



**NOUVEAU
PROGRAMME**

Algèbre-Géométrie

2^e année
PC-PC*-PSI-PSI*

- 
- A decorative background graphic consisting of several overlapping circles and intersecting lines, creating a complex geometric pattern. Three blue arrows point from the left towards the text.
- ▶ Le cours
 - ▶ De nombreux exercices
 - ▶ Tous les corrigés



HACHETTE
Supérieur



Algèbre-Géométrie

et applications à l'analyse vectorielle

2^e année PC-PC*-PSI-PSI*

Bernard BECK

Professeur en classes préparatoires au lycée Fénélon-Sainte-Marie à Paris

Isabelle SELON

Professeur en classes préparatoires
au Centre International de Valbonne à Nice



HACHETTE
Supérieur

Crédits photographiques

Toutes les photographies de cet ouvrage proviennent de la photothèque HACHETTE LIVRE.

Composition, mise en page et schémas : Publilog
Maquette intérieure : SG Création et Pascal Plottier
Maquette de couverture : Alain Vambacas

© HACHETTE LIVRE 2004, 43 quai de Grenelle 75905 Paris Cedex 15

www.hachette-education.com

I.S.B.N. 978.2.01.181568.2

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L.122-4 et L.122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

A vant-propos

L'objectif premier de cet ouvrage est la réussite aux concours et aux examens.

Pour cela, nous avons tenté de rendre intelligible et attrayante une petite partie des mathématiques : celle du programme.

Dans cette optique, nous souhaitons que ce livre soit un outil de travail efficace et adapté aux besoins des enseignants et des étudiants de tout niveau.

Le cours est agrémenté de nombreux **Exemples** et **Applications**.

Les **Exercices** aident l'étudiant à tester sa compréhension du cours, lui permettent d'approfondir sa connaissance des notions exposées... et de préparer les oraux des concours.

Les **Exercices résolus** et **TD** sont plus axés vers les écrits des concours.

L'algorithmique et le calcul formel font partie du programme des concours.

De nombreux exercices prennent en compte cette exigence ainsi que des **TD d'Algorithmique** entièrement rédigés.

Les auteurs

Sommaire

<u>1</u>	COMPLÉMENTS	5
<u>2</u>	SOMME DIRECTE. HYPERPLAN ET DUAL. GROUPE SYMÉTRIQUE	38
<u>3</u>	DÉTERMINANTS	62
<u>4</u>	RÉDUCTION	92
<u>5</u>	ESPACES PRÉHILBERTIENS	132
<u>6</u>	ESPACES EUCLIDIENS	156
<u>7</u>	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES	194
<u>8</u>	FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES	235
<u>9</u>	COURBES ET SURFACES	270
	ANNEXES	300
	INDICATIONS ET RÉPONSES	309
	INDEX	349

Compléments

1

Introduction

Pour réussir une épreuve d'algèbre linéaire, écrite ou orale, il est indispensable d'avoir en tête un grand nombre d'acquis, notamment concernant le programme de Première année. Celui-ci sera constamment utilisé pour construire le cours de Seconde année.

« Les définitions et les notions de base en algèbre linéaire sont loin d'être maîtrisées^{*}. »

Ce premier chapitre permet de réviser et de compléter vos connaissances de Première année en ce qui concerne les applications linéaires et les matrices.

La partie théorique est volontairement limitée au minimum, mais les chapitres qui suivent y font constamment appel. Un grand nombre d'exercices permet de la mettre en pratique.

^{*} Rapport Mines-Ponts, 2001.

O B J E C T I F S

- Équations linéaires.
- Supplémentaires du noyau.
- Matrices semblables.
- Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.
- Interpolation de Lagrange, le point de vue algébrique.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
- Sous-espaces stables par un endomorphisme, calcul matriciel par blocs.
- Matrices triangulaires, endomorphismes trigonalisables.

Un texte chinois intitulé *Neuf problèmes de l'art mathématique*, écrit pendant la dynastie Han (II^e siècle av. J.C.), présente un exemple de système de trois équations à trois inconnues. Sa résolution, à l'aide d'un tableau de nombres, est effectuée par des opérations sur les lignes.

Au milieu du XVI^e siècle, Cardan, dans *Ars Magna* (1545) donne la règle de résolution des systèmes de deux équations à deux inconnues.

L'idée de déterminant apparaît au Japon (Takakazu Seki) et en Europe (Leibniz) presque simultanément (1683). Elle précède la théorie matricielle. Les déterminants sont un outil pour la résolution des systèmes.

En 1850, Sylvester utilise le mot « matrice » pour désigner un tableau rectangulaire de termes.

En 1858, dans son mémoire : *Sur la théorie des matrices*, Cayley en donne la première définition abstraite et décrit les opérations que vous connaissez (addition, multiplication, inversion).

En 1888, Peano, inspiré par les travaux de Grassman, définit de façon axiomatique un espace vectoriel réel.

Dans tout ce tome, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit E un espace vectoriel. Le vecteur nul de E est noté : 0_E , l'endomorphisme nul : $0_{\mathcal{L}(E)}$ et l'application identité : Id_E .

Soit un entier $n \geq 1$. La matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée 0_n et la matrice identité I_n .

Équations linéaires

Le cadre général des **équations linéaires** est le suivant.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et b un élément de F .

L'équation :
$$f(x) = b \quad (eq)$$

où l'inconnue x est un élément de E est appelée une équation linéaire de **partie linéaire** f .

L'élément b de F est appelé le **second membre** de l'équation (eq) .

L'équation :
$$f(x) = 0_F \quad (eh)$$

est appelée l'**équation homogène associée** à (eq) , ou équation sans second membre.

Théorème 1

Avec les notations ci-dessus :

- l'ensemble S_h des solutions de l'équation homogène :

$$f(x) = 0_F \quad (eh)$$

est $S_h = \text{Ker } f$.

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscriptum est in ordine Decimus.



Hic in hoc libro, studiose Lector, Regulae Algebrae (Itali, de la Col
la vocant) nouis adiuuantiis, ac demonstrationibus ab Authore ita
locupletatas, ut pro pauculis antea usulq. tritis, iam repetitiua euaserint. Ne
q. solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo
aut tres uni equales fuerint, nudum explicans. Vnde si te librum ideo for
sum edere placuit, ut hoc abstruissimum, & plane inexhaustibile totius Arithmet
ice thesaurum in lucem eruo, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectan
dum exposito, Lectores incitauer, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per
Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perfruantur.

Cardan (1501-1576), mathématicien, médecin et astrologue italien. Dans *Ars Magna* (1545), il donne la règle de résolution de deux équations à deux inconnues.

C'est un sous-espace vectoriel de E .

Il contient toujours la solution nulle : $x = 0_E$.

- L'ensemble S des solutions de l'équation avec second membre

$$f(x) = b \quad (eq)$$

est non vide si, et seulement si, $b \in \text{Im } f$.

- Dans le cas où $b \in \text{Im } f$, si x_0 est une solution particulière de (eq) , alors l'ensemble S des solutions de (eq) est :

$$S = x_0 + S_h = x_0 + \text{Ker } f.$$

On dit aussi que toute solution de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée.



Giuseppe Peano (1858-1932), mathématicien et logicien italien. Il définit de façon axiomatique un espace vectoriel réel.

Exemples

- Soit un système de n équations à p inconnues, à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Ce système s'écrit de manière plus condensée :

$$AX = B.$$

Avec cette notation :

$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, est la matrice du système ;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ est le second membre du système.}$$

Les p inconnues $(x_1, \dots, x_p)$ forment le vecteur inconnu $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

La matrice A représente une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.

- Soit l'équation différentielle linéaire :

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t) \quad (d)$$

où a et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$.

L'algorithme de résolution numérique de tels systèmes par la méthode du pivot de Gauss a été étudié en première année (cf. *H-Prépa, Algèbre et Géométrie, 1^{re} année*). Il fait partie du programme des concours.

Vous trouverez dans le TD d'algorithmique 1 une application avancée de cette méthode permettant le calcul de fonctions splines cubiques.

Rapport ENS, 2000

« ...La plupart des candidats a évoqué de faux arguments pour inverser le système linéaire (analogie avec une suite récurrente double, évocation du nombre de degrés de liberté du système, certains feignant même de croire que toute matrice carrée est inversible...) »

Rapport CCP, 2001

« Les systèmes linéaires, même simples, posent une réelle difficulté. La structure des solutions n'est pas connue et de nombreux candidats n'ont pas l'impression qu'il s'agit là d'un problème d'algèbre linéaire. »

Il s'agit bien d'une équation linéaire au sens général défini ci-dessus.

En effet, notons $E = \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et, pour tout x de E , posons $\Phi(x) = x' + ax$.

Puisque x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , $\Phi(x)$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I et Φ est bien une application de E dans F . Elle est évidemment linéaire.

L'équation (d) peut s'écrire :

$$\Phi(x) = b.$$

Par hypothèse, le second membre b est un élément de F .

Le cours de Première année prouve que cette équation a toujours des solutions. Ceci signifie que l'application Φ est surjective.

Le résultat général du *théorème 1* confirme ce que vous connaissez déjà :

Toute solution de (d) est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée :

$$x'(t) + a(t)x(t) = 0.$$

Corollaire 1.1 : Le principe de superposition

Les notations sont celles du *théorème 1*.

Soit une équation linéaire.

$$f(x) = b \quad (eq)$$

On suppose que :

- le second membre b s'écrit $b = b_1 + b_2$,
- x_1 et x_2 sont des solutions des équations :

$$f(x) = b_1 \quad \text{et} \quad f(x) = b_2.$$

Alors, la fonction $x_0 = x_1 + x_2$ est une solution de (eq).

► Pour s'entraîner : ex. 1 et 2.

2 Supplémentaires du noyau d'une application linéaire

2.1. Le théorème et ses applications directes

Théorème 2

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, f un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ et V un sous-espace vectoriel de E , supplémentaire de $\text{Ker } f$. On définit l'application $\tilde{f}$ de V dans $\text{Im } f$ en posant :

$$\tilde{f} : \begin{cases} V \longrightarrow \text{Im } f \\ x \longmapsto \tilde{f}(x) = f(x) \end{cases}$$

L'application $\tilde{f}$ est un isomorphisme de V dans $\text{Im } f$.

Rapport E3A, 2002

« Les questions 2 et 3 posent beaucoup plus de problèmes aux élèves qui ne parviennent à la résoudre que pour une minorité d'entre eux, n'utilisant pas le fait que l'image de u soit isomorphe à tout supplémentaire du noyau de u . »

Démonstration

Tout d'abord, $\tilde{f}$ est une application linéaire de V dans $\text{Im } f$ car f est linéaire et $f(V) \subset \text{Im } f$.

- Montrons que $\tilde{f}$ est injective.

$\text{Ker } \tilde{f} = V \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$. Cela prouve que $\tilde{f}$ est injective.

- Montrons que $\tilde{f}$ est surjective.

Soit y dans $\text{Im } f$.

Il existe x dans E tel que $y = f(x)$. De plus $E = V + \text{Ker } f$.

Il existe $(v, k) \in V \times \text{Ker } f$ tel que $x = v + k$.

Donc $y = f(x) = f(v) = \tilde{f}(v)$. Cela prouve que $\tilde{f}$ est surjective.

On déduit de ce *théorème* le corollaire suivant connu sous le nom de **théorème du rang**. C'est une des formules clé de l'algèbre linéaire.

Corollaire 2.1

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et f un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. On peut dire que :

$$\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg } f.$$

2.2. Applications aux isomorphismes

Vous déduirez aisément du *théorème 2* les trois corollaires suivants :

Corollaire 2.2

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. S'il existe un isomorphisme entre E et F , alors :

$$\dim E = \dim F.$$

Corollaire 2.3

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et f un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

L'application f est un isomorphisme si, et seulement si :

$$\text{rg } f = \dim E = \dim F.$$

Corollaire 2.4

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et f un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

Lorsque $\dim E = \dim F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est bijective,
- f est injective,
- f est surjective.

Rapport IIE, 2003

« Les théorèmes doivent être clairement énoncés (hypothèses + conclusion), et non se réduire à une simple formule technique.

Exemples :

- Énoncé direct de la « formule du rang » sans avoir précisé qu'il s'agit d'une application linéaire sur un espace de dimension finie.

- ... »

Les deux exemples suivants illustrent l'importance de l'hypothèse :
 $\dim E = \dim F$ dans le corollaire précédent.

Exemples

■ L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $x \mapsto (x, x)$, est linéaire et injective mais n'est pas surjective.

■ L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $(x, y) \mapsto x$, est linéaire et surjective mais n'est pas injective.

► Pour s'entraîner : ex. 3 et 4.

Rapport Centrale, 1998

« Si f est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de dimension finie, ce n'est pas nécessairement un isomorphisme. »

3 Calcul matriciel, matrices semblables

3.1. Matrices et applications linéaires

3.1.1 Représentation matricielle des applications linéaires

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n , f une application linéaire de E dans F , $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $B' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F .

La matrice de f relativement aux bases B et B' est notée :

$$M_{B'}^B(f) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}},$$

les coefficients de la j -ième colonne étant définis par :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i.$$

Lorsque $E = F$ et $B = B'$ on écrit $M_B(f)$ au lieu de $M_B^B(f)$.

3.1.2 Endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée

Dans ce paragraphe, les éléments de $\mathbb{K}^n$ sont notés matriciellement :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice A est l'application :

$$\begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longmapsto AX \end{cases}$$

La matrice de cet endomorphisme relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est la matrice A elle-même.

Rapport Mines, 2000

« En algèbre linéaire, certains confondent un endomorphisme et sa matrice dans une base (« La matrice devient diagonale »); le réflexe de l'interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est rare. Pour certains, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. »

Une autre notation couramment utilisée est $M_{B,B'}(f)$.

Rapport IIE, 2003

« Les applications linéaires ne sont pas toutes des endomorphismes, et les matrices ne sont pas toutes carrées. »

3.1.3 Changement de base

Si B_1 et B_2 sont deux bases de E , la **matrice de passage de la base B_1 à la base B_2** est :

$$M_{B_1}^{B_2}(\text{Id}_E).$$

La j -ième colonne de la matrice ci-dessus est constituée des composantes du j -ième vecteur de la base B_2 exprimé dans la base B_1 .

3.1.4 Base adaptée

Soit E un espace vectoriel de dimension n et V un sous-espace de E de dimension $r \geq 1$.

Une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E est appelée une **base adaptée à V** si ses r premiers vecteurs $(e_1, \dots, e_r)$ forment une base de V .

Vous remarquerez que, construire une base de E adaptée à V consiste simplement à compléter une base de V en une base de E (cf. *théorème de la base incomplète*, cours de Première année).

Le terme *base adaptée* est aussi utilisé dans la situation suivante.

Soit W un supplémentaire de V dans E .

Une base $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de E est appelée une **base adaptée à la décomposition $E = V \oplus W$** si $(e'_1, \dots, e'_r)$ est une base de V et $(e'_{r+1}, \dots, e'_n)$ une base de W .

Vous remarquerez que, si $E = V \oplus W$, si B_V est une base de V et B_W une base de W alors, $B = (B_V, B_W)$ est une base adaptée à la décomposition $E = V \oplus W$.

Exemples : Représentation matricielle des projecteurs et symétries

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, V et W deux sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$E = V \oplus W \text{ et } \dim V = r.$$

La matrice du projecteur sur V parallèlement à W dans une base adaptée à la décomposition $E = V \oplus W$ est :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-r} \end{array} \right).$$

La matrice de la symétrie par rapport à V parallèlement à W dans une base adaptée à la décomposition $E = V \oplus W$ est :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-r} \end{array} \right).$$

3.2. Définition et caractérisation des matrices semblables

Deux **matrices** A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$.

Propriétés élémentaires de la relation de similitude des matrices.

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Le calcul matriciel et les formules de changement de base ne sont pas toujours bien maîtrisés. »

La formule $s = 2p - \text{Id}_E$ peut être utilisée pour déterminer la matrice de s relativement à la base B à partir de celle de p .

Soit A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- La matrice A est semblable à elle-même.
- Si A et B sont semblables, alors B et A sont semblables.
- Si A et B sont semblables ainsi que B et C , alors A et C sont semblables.
- Soit λ un élément de $\mathbb{K}$. Il est immédiat que :

$$\forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda I_n.$$

Donc la seule matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à λI_n est elle-même.

Théorème 3

Les matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si, et seulement si, elles représentent un même endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

Démonstration

Notons E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

- Si M représente l'endomorphisme u de E dans la base B et si N représente u dans la base B' , alors :

$$M_{B'}^{B'}(u) = M_{B'}^B(\text{Id}_E)M_B^B(u)M_B^{B'}(\text{Id}_E).$$

Si l'on note $P = M_{B'}^B(\text{Id}_E)$, on sait que $P^{-1} = M_B^{B'}(\text{Id}_E)$. Donc :

$$N = PMP^{-1}.$$

- Réciproquement, supposons que $N = PMP^{-1}$.

Notons B une base de E et u l'endomorphisme de E tel que $M = M_B^B(u)$. La matrice P est inversible, il existe une base B' de E telle que $P = M_{B'}^B(\text{Id}_E)$. Ainsi :

$$N = PMP^{-1} = M_{B'}^B(\text{Id}_E)M_B^B(u)M_B^{B'}(\text{Id}_E) = M_{B'}^{B'}(u).$$

Donc, la matrice N représente aussi l'endomorphisme u .

Dans cet ouvrage, nous appelons *homothétie* du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E les applications de E dans E de la forme $(x \mapsto \lambda x)$ où λ est un élément quelconque de $\mathbb{K}$ appelé *rapport de l'homothétie*.

Certains ouvrages de géométrie imposent $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$. Nous ne le faisons pas, et ainsi nous considérons que l'application nulle est une homothétie de rapport 0 et que l'identité est une homothétie de rapport 1.

Rapport Centrale, 2001

« Notons toutefois quelques points qui ne sont pas toujours connus :

- la notion de matrices semblables est parfois mal comprise. Certains candidats se cramponnent à la « définition » formelle : il existe P inversible telle que $A' = P^{-1}AP$, au lieu de chercher une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A deviendrait A' ;

- ... »

Application 1

Un exemple de matrices semblables

Soit P un plan vectoriel euclidien orienté et (i, j) une base orthonormée directe de ce plan.

1) Quelle est la nature de l'endomorphisme s de P dont la matrice dans la base (i, j) est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) On pose :

$$e_1 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)i - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)j,$$

et on définit e_2 pour que (e_1, e_2) soit une base orthonormée directe de P .

Exprimer la matrice de s relativement à la base (e_1, e_2) .

En déduire que les matrices

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1) L'endomorphisme s est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}i$.

2) On trouve :

$$s(e_1) = \cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2$$

et

$$s(e_2) = \sin \alpha e_1 - \cos \alpha e_2.$$

La matrice de s relativement à (e_1, e_2) est :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices considérées représentent toutes deux l'endomorphisme s dans des bases différentes de P . Elles sont semblables.

3.3. L'application $A \mapsto PAP^{-1}$

Les ensembles $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}[X]$ sont munis à la fois d'une structure d'espace vectoriel et d'une structure d'anneau.

On appelle $\mathbb{K}$ -algèbre un quadruplet $(A, +, \times, \cdot)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ;
- $(A, +, \times)$ est un anneau ;
- $\forall (M, N, \alpha) \in A \times A \times \mathbb{K} \quad \alpha \cdot (M \times N) = (\alpha \cdot M) \times N = M \times (\alpha \cdot N).$

Soit $(A, +, \times, \cdot)$ et $(B, +, \circ, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$ -algèbres et Φ une application de A dans B . On dit que Φ est un morphisme d'algèbre lorsque :

- $\forall (M, N) \in A^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \Phi(\alpha \cdot M + \beta \cdot N) = \alpha \cdot \Phi(M) + \beta \cdot \Phi(N) ;$
- $\forall (M, N) \in A^2 \quad \Phi(M \times N) = \Phi(M) \circ \Phi(N) ;$
- $\Phi(1_A) = 1_B.$

Théorème 4

Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même, $\Phi_P : A \mapsto PAP^{-1}$, est un automorphisme d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration

- Il est immédiat que l'application Φ_P est linéaire.
- De plus :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad P(AB)P^{-1} = P(AP P^{-1}B)P^{-1} = (PAP^{-1})(PBP^{-1}).$$

- Enfin, $PI_nP^{-1} = I_n$.

L'application Φ_P est donc un morphisme d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même.

- La formule : $\Phi_P^{-1} \circ \Phi_P(A) = P^{-1}(PAP^{-1})P = A = \Phi_P \circ \Phi_P^{-1}(A)$

prouve que Φ_P est inversible et que, de plus : $(\Phi_P)^{-1} = \Phi_P^{-1}$.

Exemple : Puissances de matrices semblables

Soit A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P une matrice inversible telle que $B = PAP^{-1}$.

Par récurrence, on déduit du *théorème* ci-dessus la formule essentielle :

$$B^n = (PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1}.$$

Soit $R = \sum_{i=0}^k \alpha_i X^i$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $R(M) = \sum_{i=0}^k \alpha_i M^i$, avec $M^0 = I_n$.

On a aussi :

$$PR(A)P^{-1} = R(B).$$

► Pour s'entraîner : ex. 5 à 7.

4 Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A et on note $\text{tr}(A)$ le scalaire $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Théorème 5

- L'application *trace* est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
- $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{tr}(P^{-1}MP) = \text{tr}(M)$.

Démonstration

- Nous vous laissons vérifier la linéarité de la trace.
- Notons $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $AB = (c_{ij})$ et $BA = (d_{ij})$.

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n d_{jj} = \text{tr}(BA).$$

- D'après le premier point, $\text{tr}(P^{-1}(MP)) = \text{tr}((MP)P^{-1}) = \text{tr}(M)$.

On peut alors définir la **trace d'un endomorphisme** d'un espace vectoriel de dimension finie comme la trace de sa matrice dans une base quelconque de l'espace vectoriel.

Le théorème 5 prouve que le résultat ne dépend pas du choix de la base.

Exemples

■ La trace d'un projecteur d'un espace de dimension finie

Si p est un projecteur de E , alors $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ et p est le projecteur sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Soit r le rang de p . La matrice de p relativement à une base de E adaptée à la décomposition $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ est :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-r} \end{array} \right).$$

Donc : $\text{tr } p = r = \text{rg } p$. La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Rapport Centrale, 1997

« La trace de $\text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ n'est pas égale à n .

■ La trace d'une symétrie d'un espace de dimension finie

La matrice de la symétrie s par rapport à V parallèlement à W dans une base adaptée à la décomposition $E = V \oplus W$ est :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-r} \end{array} \right),$$

avec $r = \dim V$. Donc :

$$\text{tr}(s) = r - (n - r) = \dim V - \dim W = 2 \dim V - \dim E.$$

► Pour s'entraîner : ex. 8 et 9.

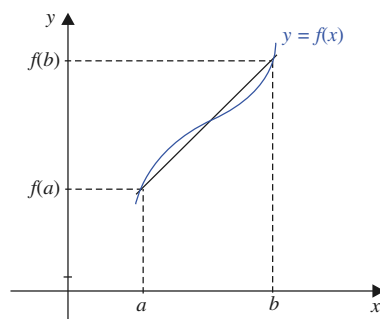
5 Deux exemples importants

5.1. Interpolation de Lagrange

La méthode de l'**interpolation linéaire** est très utilisée en physique et en ingénierie. Elle consiste à assimiler le graphe de la fonction f sur le segment $[a, b]$ au segment de droite passant par les deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Du point de vue analytique, on utilise une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 1 pour approcher la fonction f .

L'**interpolation de Lagrange** généralise cette méthode.



Doc. 1. L'interpolation linéaire.

5.1.1 Une conséquence de la division euclidienne

Lemme

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré supérieur ou égal à 1.

L'ensemble $V = P\mathbb{K}[X]$ des multiples du polynôme P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Si l'on note $\deg P = n + 1$, alors $\mathbb{K}_n[X]$ est un supplémentaire de V dans $\mathbb{K}[X]$:

$$\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_n[X].$$

Vous avez étudié la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ et dans $\mathbb{N}$ en Première année.

L'algorithme d'Euclide dans $\mathbb{N}$ figure au programme des concours.

Vous en trouverez deux versions dans le TD d'algorithmique 2.

Démonstration

Utiliser la décomposition unique fournie par la division euclidienne :

$$A = PQ + R, \text{ avec } \deg R < \deg P.$$

5.1.2 Le théorème d'interpolation

Dans ce paragraphe, on considère $\{a_0, \dots, a_n\}$ un ensemble de $n + 1$ éléments de $\mathbb{K}$ distincts deux à deux.

On pose $T(X) = \prod_{j=0}^n (X - a_j)$ et, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_i(X) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$.

Les $n + 1$ polynômes $(L_0, \dots, L_n)$ sont appelés les **polynômes de Lagrange** en $(a_0, \dots, a_n)$. Ils sont tous de degré n .

Théorème 6

On définit l'application Φ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$ en posant :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P \longmapsto \Phi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{cases}.$$

- Pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, $T(a_k) = 0$ et $L_i(a_k) = \delta_{i,k}$.
- L'application Φ est linéaire et $\text{Ker } \Phi = T\mathbb{K}[X]$.
- L'application Φ est surjective.
- La restriction de Φ à $\mathbb{K}_n[X]$ définit un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$.



Joseph-Louis Lagrange
(1736-1813), mathématicien et physicien français.

Démonstration

- Les deux premiers points sont élémentaires à démontrer.
- Pour tout (i, k) de $\llbracket 0, n \rrbracket^2$, $L_i(a_k) = \delta_{i,k}$ (le symbole de Kronecker).

Donc $\Phi(L_i) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (le i -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$).

Pour tout $(b_0, \dots, b_n)$ de $\mathbb{K}^{n+1}$, $\Phi(\sum_{i=0}^n b_i L_i) = (b_0, \dots, b_n)$.

La surjectivité de Φ est démontrée.

- Le lemme ci-dessus prouve que $\mathbb{K}_n[X]$ est un supplémentaire de $\text{Ker } \Phi = T\mathbb{K}[X]$.

Le théorème 2 permet de conclure que la restriction de Φ à $\mathbb{K}_n[X]$ définit un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1} = \text{Im } \Phi$.

Corollaire 6.1

Les hypothèses et notations sont celles du théorème 6.

- Pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n , on a :

$$P(X) = \sum_{i=0}^n P(a_i) \left(\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \right).$$

- La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Soit $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Il existe un unique polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(a_i) = y_i.$$

Il est donné par la formule :

$$P(X) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(X).$$

- Tout polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que, pour tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$, $Q(a_i) = y_i$ est de la forme :

$$Q(X) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(X) + \prod_{i=0}^n (X - a_i) S(X),$$

où S est un polynôme quelconque.

Si P appartient à $\mathbb{K}_n[X]$ et $\Phi(P) = (0, \dots, 0)$, alors P est un polynôme de degré n qui s'annule en $n+1$ points, donc P est le polynôme nul. Ce raisonnement classique permet de prouver directement l'injectivité de la restriction de Φ à $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple

Dans le cas de trois points d'interpolation, a_0, a_1, a_2 , vous écrirez les trois polynômes de Lagrange L_0, L_1, L_2 et vérifierez à l'aide de vos merveilleuses calculatrices, que :

$$L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) = 1 ;$$

$$a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) = x ;$$

$$a_0^2 L_0(x) + a_1^2 L_1(x) + a_2^2 L_2(x) = x^2.$$

► Pour s'entraîner : ex. 10 et 11.

5.2. Suites récurrentes linéaires

Le but de ce paragraphe est l'étude systématique des suites réelles ou complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant une relation de **réurrence linéaire d'ordre 2**.

Théorème 7

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{K}$. On note $E_{a,b}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (1)$$

Alors :

- $E_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;
- l'application Φ , de $E_{a,b}$ dans $\mathbb{K}^2$, définie par $\Phi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_0, u_1)$ est un isomorphisme ;
- $\dim E_{a,b} = 2$;
- pour tout scalaire r , la suite géométrique $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $E_{a,b}$ si, et seulement si, r est solution de l'équation caractéristique associée à (1) :

$$r^2 = ar + b \quad (2)$$

Démonstration

- La suite nulle est dans $E_{a,b}$ et $E_{a,b}$ est stable par combinaison linéaire.
- La linéarité de Φ est immédiate.

Si $\Phi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (0, 0)$, la relation (1) permet de prouver par récurrence que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite nulle, donc, $\text{Ker } \Phi = \{(0, 0)\}$ et Φ est injective.

Pour la surjectivité, fixons (x, y) dans $\mathbb{K}^2$ et posons $u_0 = x$ et $u_1 = y$.

La relation (1) permet de construire par récurrence une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $E_{a,b}$ telle que $\Phi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (x, y)$.

Donc Φ est un isomorphisme de $E_{a,b}$ dans $\mathbb{K}^2$.

- On en déduit :

$$\dim E_{a,b} = 2.$$

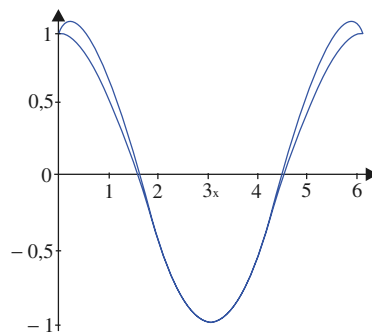
- Si la suite $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $E_{a,b}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n.$$

En particulier, pour $n = 0$, on obtient $r^2 = ar + b$ (2).

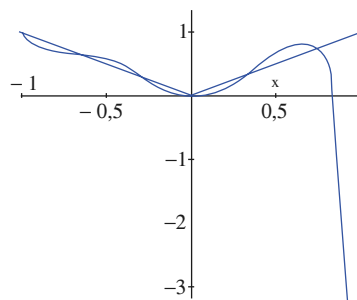
Réciproquement, si r est racine de l'équation caractéristique, en multipliant cette équation par r^n , on obtient que $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $E_{a,b}$.

Le corollaire suivant donne une méthode pratique de recherche des suites satisfaisant la relation (1).



```
restart:with(plots):
Lagrange:=proc(f,a,b,N)
local absc,k,P;
absc:=[seq(a+k*(b-a)/(N+1),k=0..(N+1))];
P:=interp(absc,[seq(subs(x=k,f),k=absc)],x);
plot({f,P},x=a..b);
end;
Lagrange:=proc(f,a,b,N)
local absc,k,P;
absc:=[seq(a+k*(b-a)/(N+1),k=0..(N+1))];
P:=interp(absc,[seq(subs(x=k,f),k=absc)],x);
plot({f,P},x=a..b);
end;
Lagrange(cos(x),0,2*Pi,3);
```

Doc. 2. La fonction cosinus et son polynôme d'interpolation de Lagrange en 6 points sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.



```
restart:with(plots):
Lagrange:=proc(f,a,b,N)
local absc,k,P;
absc:=[seq(a+k*(b-a)/(N+1),k=0..(N+1))];
P:=interp(absc,[seq(subs(x=k,f),k=absc)],x);
plot({f,P},x=a..b);
end;
Lagrange:=proc(f,a,b,N)
local absc,k,P;
absc:=[seq(a+k*(b-a)/(N+1),k=0..(N+1))];
P:=interp(absc,[seq(subs(x=k,f),k=absc)],x);
plot({f,P},x=a..b);
end;
Lagrange(abs(x),-1,1,5);
```

Doc. 3. La fonction valeur absolue et son polynôme d'interpolation de Lagrange en 6 points sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Corollaire 7.1

Les hypothèses et notations sont celles du *théorème* précédent. On suppose de plus que $(a, b) \neq (0, 0)$.

- Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes dans $\mathbb{K}$, notées r_1 et r_2 , les suites (r_1^n) et (r_2^n) forment une base de $E_{a,b}$.
- Si l'équation caractéristique admet une racine double dans $\mathbb{K}$, notée r , les suites (r^n) et (nr^n) forment une base de $E_{a,b}$.
- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et lorsque l'équation caractéristique n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$, elle admet deux racines complexes conjuguées z et $\bar{z}$.

Les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant (1) sont de la forme :

$$u_n = cz^n + \bar{c}\bar{z}^n,$$

avec $c \in \mathbb{C}$.

Si la forme trigonométrique de z est $z = \rho e^{i\theta}$, les suites réelles :

$$(\rho^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (\rho^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$$

forment une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E_{a,b}$.

Vous étudierez par vous-mêmes le cas $(a, b) = (0, 0)$.

Démonstration

• Puisque $E_{a,b}$ est de dimension 2, il suffit de prouver que les deux suites $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes pour conclure.

• Si l'équation caractéristique a une racine double, r , alors $r = \frac{a}{2}$ et, pour tout n :

$$(n+2)r^{n+2} - a(n+1)r^{n+1} - bnr^n = n(r^{n+2} - ar^{n+1} - br^n) + r^{n+1}(2r - a) = 0.$$

Donc, la suite (nr^n) est dans $E_{a,b}$.

Vous montrerez que la famille de suites $((r^n)_{n \in \mathbb{N}}, (nr^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est libre.

• Les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique étant notées z et $\bar{z}$, le premier point nous apprend que les suites complexes vérifiant (1) sont de la forme :

$$u_n = cz^n + d\bar{z}^n,$$

avec c et d dans $\mathbb{C}$.

Une telle suite est une suite réelle si, et seulement si, $d = \bar{c}$.

Vous prouverez que les deux suites réelles :

$$(\rho^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (\rho^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$$

forment une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E_{a,b}$ lorsque $z = \rho e^{i\theta}$.

Dans la pratique, pour le troisième point du corollaire, l'utilisation de la forme trigonométrique du nombre complexe z n'est intéressante que si l'argument θ de z est facile à calculer. Lorsque cela n'est pas le cas, la formule $u_n = cz^n + \bar{c}\bar{z}^n$ est plus efficace.

On peut aussi étudier les suites récurrentes vérifiant une relation du type :

$$\alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma u_n = \delta$$

Vous verrez en *exercice* comment ramener cette relation à une équation linéaire avec second membre dans l'espace des suites.

► Pour s'entraîner : ex. 12 et 13.

Application 2

Quatre suites récurrentes

1) Déterminer la suite (u_n) telle que :
 $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout n :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

2) Déterminer la suite (u_n) telle que :
 $u_0 = u_1 = \alpha$ et pour tout n :

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

3) Déterminer la suite (u_n) telle que :
 $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout n :

$$u_{n+2} = \sqrt{3}u_{n+1} - u_n.$$

4) Déterminer la suite (u_n) telle que :
 $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout n :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n.$$

1) L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 = 3r - 2.$$

Ses racines sont 1 et 2, donc il existe deux réels x et y tels que, pour tout n , $u_n = x1^n + y2^n$.

Les valeurs $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ vous permettront de prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -1 + 2^n.$$

2) L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 = 4r - 4.$$

Elle a une racine double, $r = 2$. Il existe deux réels x, y tels que, pour tout n , $u_n = x2^n + yn2^n$.

Les valeurs $u_0 = u_1 = \alpha$ vous permettront de prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha(2^n - n2^{n-1}).$$

3) L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)r + 1 = 0.$$

Ses racines sont $e^{i\pi/6}$ et $e^{-i\pi/6}$, donc il existe x et y tels que :

$$\forall n, \quad u_n = x \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + y \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right).$$

Les valeurs $u_0 = u_1 = 1$ vous permettront de prouver que :

$$\forall n, \quad u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + (2 - \sqrt{3}) \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right).$$

Vous vérifierez aussi que :

- $u_{6k} = (-1)^k$,
- $u_{6k+1} = (-1)^k$,
- $u_{6k+2} = (-1)^k(\sqrt{3} - 1)$,
- $u_{6k+3} = (-1)^k(2 - \sqrt{3})$,
- $u_{6k+4} = (-1)^k(\sqrt{3} - 2)$,
- $u_{6k+5} = (-1)^k(1 - \sqrt{3})$.

4) L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 = 2r - 3.$$

Ses racines sont :

$$z = 1 + i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \bar{z} = 1 - i\sqrt{2}.$$

u_0 et u_1 sont réels, donc il existe un complexe $c = a + ib$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = cz^n + \bar{c}\bar{z}^n.$$

Les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ vous permettront de démontrer que :

$$c = \frac{2 - i\sqrt{2}}{4}.$$

On peut calculer l'expression de u_n à l'aide du binôme de Newton. Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n+1}{2p+1} (-2)^p$$

6 Sous-espaces stables

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

6.1. Définitions

Soit V un sous-espace vectoriel de E .

On dit que V est **stable** par f si :

$$f(V) \subset V.$$

Si tel est le cas, notons $\hat{f}$ l'application définie comme suit :

$$\hat{f} : \begin{cases} V \longrightarrow V \\ x \longmapsto \hat{f}(x) = f(x). \end{cases}$$

Il est clair que $\hat{f}$ est un endomorphisme de V . On l'appelle l'**endomorphisme de V induit par f** .

Exemples

- Pour tout endomorphisme f de E , $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par f .
- Considérons l'application linéaire u de $\mathbb{K}[X]$ dans lui-même :

$$P(X) \longmapsto 3P(X) + 2XP'(X) + (X^2 - 1)P''(X)$$

Vous montrerez que, pour tout polynôme P , $\deg(u(P)) \leq \deg(P)$ et en déduirez que, pour tout entier n , $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par u .

- Si $E = V \oplus W$ et si s est la symétrie par rapport à V parallèlement à W , alors V et W sont stables par s .

Rapport Centrale, 1997

« La plupart des candidats confondent une application linéaire induite et la restriction à un sous-espace vectoriel stable. »

Rapport TPE, 1997

« Les notions de sous-espace stable et d'endomorphisme induit [...] mal comprises. »

Théorème 8

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, u et v deux endomorphismes de E tels que :

$$u \circ v = v \circ u.$$

Les sous-espaces vectoriels $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par v .

Démonstration

- Pour tout $y = u(x)$ de $\text{Im } u$, on a : $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \text{Im } u$.
Ceci prouve que $v(\text{Im } u) \subset \text{Im } u$.
- Pour tout x de $\text{Ker } u$, on a : $u(v(x)) = v(u(x)) = 0_E$.
Ceci prouve que $v(\text{Ker } u) \subset \text{Ker } u$.

6.2. Traduction matricielle de la stabilité

Théorème 9

Soit E un espace de dimension n et V un sous-espace de dimension r .

Notons B une base de E adaptée à V .

Le sous-espace V est stable par f si, et seulement si, la matrice de f dans la base B est de la forme :

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

avec A dans $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, D dans $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$, C dans $\mathcal{M}_{r,(n-r)}(\mathbb{K})$ et 0 un bloc de zéros. De plus, lorsque cette condition est réalisée, si B_V est la base de V formée des r premiers vecteurs de B , alors A est la matrice de l'endomorphisme de V induit par f dans la base B_V .

Démonstration

Vous vous assurerez que la condition :

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

équivalait à :

$$\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad f(e_j) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) = V$$

et rédigerez la démonstration.

6.3. Produit matriciel par blocs

Dans ce paragraphe, n, r et p sont 3 entiers tels que $n = r + p$.

Théorème 10

Soit B et B' deux éléments de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, C et C' deux éléments de $\mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ et D et D' deux éléments de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

On définit les matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en posant :

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ et } A' = \begin{pmatrix} B' & C' \\ 0 & D' \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$AA' = \begin{pmatrix} BB' & BC' + CD' \\ 0 & DD' \end{pmatrix}.$$

Rapport X, 2001

« Pour réussir cette question, il fallait connaître le calcul par blocs du produit matriciel... »

Démonstration

• Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $b = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , f et g les endomorphismes de E dont les matrices, relativement à la base b , sont A et A' respectivement.

Les décompositions de A et A' en blocs prouvent que le sous-espace :

$$V = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$$

est stable par f et par g . Il l'est aussi par $f \circ g$.

La matrice de $f \circ g$ relativement à la base b est AA' . Elle est donc de la forme :

$$AA' = \begin{pmatrix} B'' & C'' \\ 0 & D'' \end{pmatrix}.$$

En utilisant les endomorphismes de V induits par f et g , on prouve que :

$$B'' = BB'.$$

- En utilisant ${}^tA$ et ${}^tA'$, on prouve que :

$$D'' = DD'.$$

- Pour le dernier point, on utilise le calcul matriciel. Soit :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad A' = (a'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad AA' = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Pour $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket \times \llbracket r+1, n \rrbracket$, on obtient les coefficients de C'' .

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a'_{kj} = \sum_{k=1}^r a_{ik}a'_{kj} + \sum_{k=r+1}^n a_{ik}a'_{kj}.$$

On en déduit :

$$C'' = BC' + CD'.$$

► **Pour s'entraîner : ex. 14.**

6.4. Matrices triangulaires, endomorphismes trigonalisables : le point de vue géométrique

6.4.1 Matrices triangulaires

Les matrices triangulaires sont parmi les plus simples à étudier. Vous le constaterez tout au long de cet ouvrage.

Il est donc naturel de se demander quand la matrice d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie relativement à une base est triangulaire.

Dans la suite de ce paragraphe, E est un espace vectoriel de dimension n .

Théorème 11

Soit f un endomorphisme de E et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

La matrice de f relativement à la base B est triangulaire supérieure si, et seulement si :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad f(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_i).$$

Rapport Centrale, 1997

« Si les candidats maîtrisent la technique du calcul matriciel par blocs, rares sont ceux qui utilisent correctement ces blocs pour traduire le concept de stabilité de certains sous-espaces. »

La résolution de systèmes triangulaires, l'inversion de matrices triangulaires est facilement programmable.

Se ramener à une ou des matrices triangulaires est donc fort intéressant du point de vue du calcul numérique.

Vous trouverez, dans le TD d'algorithmique 3, l'étude de la décomposition L.U qui permet, sous certaines hypothèses, de décomposer une matrice carrée en produit d'une matrice triangulaire inférieure (*Lower triangular*) par une matrice triangulaire supérieure (*Upper triangular*).

L'étude mathématique de cet algorithme est traitée dans le problème de concours Centrale-Supelec PSI 2001 math II. Sa solution est dans le livre d'exercices *H-Prépa, Maths, 2nd année*. Cette méthode figure au programme d'algorithmique des concours.

Application 3

Produit de matrices triangulaires

1) Démontrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure et donner l'expression des termes de la diagonale de la matrice produit.

2) Que dire d'un produit de matrices triangulaires inférieures ?

1) Ci-dessous vous trouverez une démonstration calculatoire de ce résultat. Vous pourrez aussi le démontrer par récurrence en exploitant le *théorème 10*.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

deux matrices triangulaires supérieures.

Pour $i > j$, on a donc $a_{ij} = 0$ et $b_{ij} = 0$.

Notons $M = AB = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

et montrons que, pour $i > j$, $m_{ij} = 0$.

On a toujours :

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Si $i \geq j$, alors :

- pour $k \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$, $a_{ik} = 0$,
- pour $k \in \llbracket i, n \rrbracket$, $b_{kj} = 0$.

et ainsi,

$$m_{ij} = 0.$$

Donc la matrice $M = AB$ est triangulaire supérieure.

De plus, les termes de la diagonale de M sont donnés par la formule :

$$\begin{aligned} m_{ii} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{ki} + a_{ii} b_{ii} + \sum_{k=i+1}^n a_{ik} b_{ki} \\ &= a_{ii} b_{ii}. \end{aligned}$$

Cette règle sur le produit de matrices triangulaires s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ 0 & a_{22}b_{22} & & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}.$$

2) La formule ${}^t(MN) = {}^tN {}^tM$ permet de prouver que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieure.

6.4.2 Endomorphismes trigonalisables

Définissons ainsi les endomorphismes trigonalisables :

Un endomorphisme f de E est trigonalisable s'il existe une base B de E telle que la matrice de f relativement à la base B soit triangulaire.

► Pour s'entraîner : ex. 15.

Application 4

Passage d'une matrice triangulaire supérieure à une matrice triangulaire inférieure

Soit E un espace vectoriel de dimension n ,

$$B = (e_1, \dots, e_n)$$

une base de E et :

$$B' = (e_n, \dots, e_1) = (e'_1, \dots, e'_n)$$

la base de E obtenue en inversant l'ordre des termes de B .

Montrer que la matrice de l'endomorphisme f de E relativement à B est triangulaire supérieure si, et seulement si, la matrice de f relativement à B' est triangulaire inférieure.

Notons

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = M_B^B(f)$$

et

$$M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = M_{B'}^{B'}(f)$$

Par définition :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \quad \text{et} \quad f(e'_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij} e'_i.$$

De plus, pour tout $i, e'_i = e_{n+1-i}$. donc :

$$f(e'_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^n m_{ij} e_{n+1-i}.$$

$$f(e_{n+1-j}) = \sum_{k=1}^n a_{k, n+1-j} e_k = \sum_{i=1}^n a_{n+1-i, n+1-j} e_{n+1-i}.$$

Or :

$$f(e'_j) = f(e_{n+1-j}).$$

Donc :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad m_{ij} = a_{n+1-i, n+1-j}.$$

Il est immédiat que :

$$(i < j) \Leftrightarrow (n+1-i > n+1-j)$$

et ceci permet de prouver l'équivalence demandée.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a_{nn} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & a_{2n-1} & \dots & a_{22} & 0 \\ a_{1n} & a_{1n-1} & \dots & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

FICHE MÉTHODE

- Pour **étudier une équation linéaire** :

$$f(x) = b \quad (eq)$$

où f est une application linéaire de E dans F , b un élément de F et où l'inconnue x est un élément de E , on détermine, si possible, une solution particulière, x_0 , de (eq) et on résout :

$$f(x) = 0_F \quad (eh)$$

l'ensemble S des solutions de (eq) est : $S = x_0 + S_h = x_0 + \text{Ker } f$ où $S_h = \text{Ker } f$ est l'ensemble des solutions de (eh).

- Pour calculer la **trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie**, il suffit de déterminer la matrice de cet endomorphisme dans une base de l'espace et de calculer la trace de cette matrice.

- Pour déterminer un **polynôme prenant les valeurs** $(y_0, \dots, y_n)$ **aux points distincts** $(a_0, \dots, a_n)$, il suffit de considérer le **polynôme d'interpolation de Lagrange** :

$$P(X) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

- Pour montrer que **deux polynômes de degré inférieurs ou égaux à n sont égaux**, il suffit de prouver que leur différence s'annule en $n+1$ points.

- Soit a et b deux scalaires ($b \neq 0$). Pour déterminer l'**ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence** :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (1)$$

on pourra procéder comme suit :

- rappeler que l'ensemble de ces suites est un espace vectoriel de dimension 2 ;
- **résoudre l'équation caractéristique** : $r^2 = ar + b$:
 - lorsque l'équation caractéristique admet deux racines distinctes, r_1 et r_2 , conclure que toute suite (u_n) vérifiant (1) est combinaison linéaire des suites géométriques (r_1^n) et (r_2^n) ;
 - lorsque l'équation caractéristique admet une racine double, r , conclure que toute suite (u_n) vérifiant (1) est combinaison linéaire des suites (r^n) et (nr^n) ;
 - lorsque a et b sont réels et que l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées z et $\bar{z}$, conclure que toute suite réelle (u_n) vérifiant (1) est de la forme $u_n = cz^n + \bar{c}\bar{z}^n$, avec c constante complexe.

Dans ce cas, si la forme trigonométrique de z est connue ($z = \rho e^{i\theta}$), alors, toute suite (u_n) vérifiant (1) est combinaison linéaire des suites $(\rho^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\rho^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$.

- Pour déterminer la **suite vérifiant la relation de récurrence** :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (1)$$

et les **conditions initiales** $u_0 = x$ et $u_1 = y$, on déterminera d'abord la forme générale de la suite (u_n) comme précédemment, puis les deux coefficients à l'aide des conditions initiales.

Algorithmique, TD 1

Matrices tridiagonales et fonctions splines cubiques

L'étude des systèmes tridiagonaux et des fonctions splines cubiques figure au programme d'algorithmique des concours.

Une fonction spline cubique sur un segment $[a, b]$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur ce segment et dont les restrictions aux intervalles d'une subdivision de ce segment sont polynomiales de degré inférieur ou égal à 3.

Le but de ce TD est le calcul de la fonction spline cubique associée à une fonction f , définie sur $[0, 1]$, selon la méthode proposée dans le problème *Centrale-Supelec PSI 2002, maths II*.

La démarche mathématique

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

On note $x_i = \frac{i}{n}$ et $h = \frac{1}{n}$.

Étant donnés les réels $m_0, \dots, m_n, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$, on considère la fonction g définie par « recollement de polynômes de degré 3 » en posant, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $x \in [x_{i-1}, x_i]$:

$$g(x) = m_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h} + m_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + u_i(x - x_{i-1}) + v_i.$$

Résoudre le problème de Centrale permet de trouver les scalaires m_i, u_i, v_i tels que la fonction g ait les propriétés suivantes :

- g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$;
- pour tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$, $g(x_i) = f(x_i)$;
- $g'(0) = f'(0)$ et $g'(1) = f'(1)$.

Calculer $m_0, \dots, m_n$ revient à résoudre :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} ;$$

le second membre étant défini par :

$$b_0 = \frac{6}{h} \left[\frac{f(h) - f(0)}{h} - f'(0) \right], \quad b_i = \frac{6}{h^2} [f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})] \text{ pour } i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket,$$

$$b_n = \frac{6}{h} \left[f'(1) - \frac{f(1) - f(x_{n-1})}{h} \right].$$

Enfin, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$v_i = f(x_{i-1}) - \frac{h^2}{6} m_{i-1}$$

et

$$u_i = \frac{1}{h} \left[f(x_i) - f(x_{i-1}) - \frac{h^2}{6} (m_i - m_{i-1}) \right].$$

Les entrées

On entre l'entier n ; le segment $[0, 1]$ sera divisé en n segments de longueurs égales.

On entre le réel x compris entre 0 et 1.

La sortie

Le programme affiche la valeur exacte $f(x)$, la valeur de la fonction spline $g(x)$ et l'écart entre ces deux valeurs.

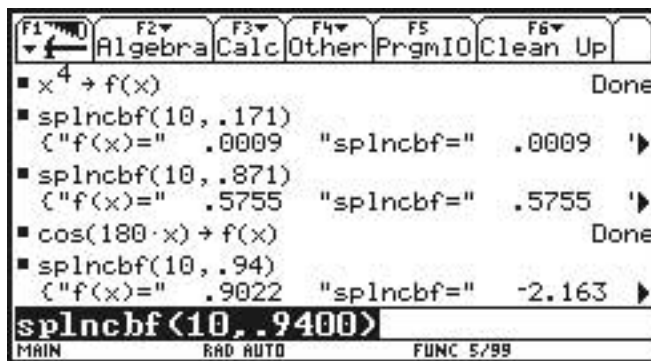
L'intérêt numérique

L'énoncé de *Centrale 2002* admet que l'erreur d'approximation est majorée, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^4$, par :

$$\|f - g\|_{\infty} \leq \frac{13}{8n^4} \|f^{(4)}\|_{\infty}$$

L'écran ci-dessous (*doc. 1*) illustre ce phénomène en étudiant deux fonctions, et en utilisant $n = 10$.

La deuxième fonction est très mal approchée par sa fonction spline cubique. À vous de comprendre pourquoi.



Doc. 1.

Le programme

Le programme ci-dessous n'est pas optimisé au niveau de la vitesse. Il suit simplement la démarche du problème mathématique :

- construire et résoudre le système linéaire permettant de calculer les m_i ;
- calculer les valeurs de u_i et v_i ;
- calculer $g(x)$.

Une difficulté technique oblige à beaucoup d'attention : le problème cité indexe les coordonnées de 0 à n ; le langage TI force à utiliser des indices de 1 à $n + 1$.

```
:splncbf(n,x)
:Func
:If floor(n)-n ≠ 0 or n<2 or x<0 or x>1 Then
:Return "la première donnée, n, doit être un entier > 1 ; la seconde, x, doit être
dans [0,1[ ; enfin, la fonction à tester doit être rentrée dans f(x)"
:Else
:Local i,b,m,p,sol,pas,j,v,u,splcb
:
:© le point x est dans le segment [j*pas,(j+1)*pas]
:1/n → pas
:floor(x/pas) → j
:
```

```

:© creation du systeme
:newmat(1,n+1) → b
: 6/pas*((f(pas)-f(0))/pas-d(f(x),x)|x=0) → b[1,1]
: For i,1,n-1
: 6/pas2*(f((i+1)*pas)-2*f(i*pas)+f((i-1)*pas)) → b[1,i+1]
: EndFor
: 6/pas*(d(f(x),x)|x=1-(f(1)-f((n-1)*pas))/pas) → b[1,n+1]
:newmat(1,n+1) → sol
:newmat(n+1,n+2) → m
: 2 → m[1,1] : 2 → m[n+1,n+1]
: For i,2,n
: 4 → m[i,i]
: EndFor
: For i,2,n+1
: 1 → m[i-1,i] : 1 → m[i,i-1]
: EndFor
: For i,1,n+1
: b[1,i] → m[i,n+2]
: EndFor
:
:© application du pivot
: m[1,1] → p
: For i,2,n+1
: 0 → m[i,i-1]
: m[i,i]-1/p → m[i,i]
: m[i,n+2]-1/p*m[i-1,n+2] → m[i,n+2]
: m[i,i] → p
: EndFor
:
:© resolution du système à partir de la dernière ligne
: m[n+1,n+2]/m[n+1,n+1] → sol[1,n+1]
: For i,n,1,-1
: 1/m[i,i]*(m[i,n+2]-sol[1,i+1]) → sol[1,i]
: EndFor
:
:© les derniers calculs intermédiaires
: f(j*pas)-(1/6)*pas2*sol[1,j+1] → v
: 1/pas*(f((j+1)*pas)-f(j*pas)-(1/6)*pas2*(sol[1,j+2]-sol[1,j+1])) → u
:
:© approximation de f(x) pour x dans [j*pas,(j+1)*pas]
: sol[1,j+1]*((j+1)*pas-x)3/(6*pas)+sol[1,j+2]*(x-j*pas)3/(6*pas)+u*(x-j*pas)+v → splcb
:
:© affichage de la solution
:Return { "f(x)=",f(x),"splncbf=",splcb,"delta=",abs(f(x)-splcb) }
:EndIf
:EndFunc
    
```

Algorithmique, TD 2

L'algorithme d'Euclide proposé dans ce TD figure au programme des concours.

Dans sa version rapide, il utilise, de façon implicite, l'écriture en base 2 d'un entier.

Algorithme d'Euclide dans $\mathbb{N}$

Objectif mathématique

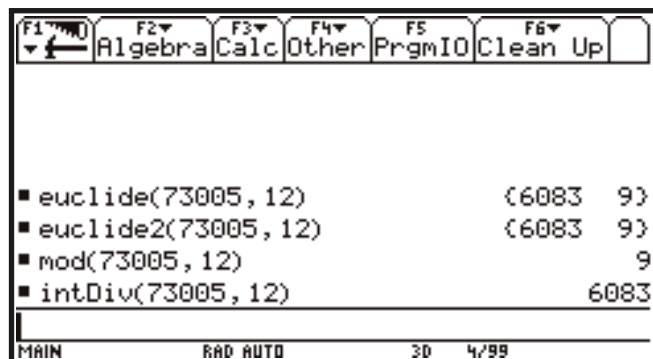
Étant donné deux entiers a et b strictement positifs, calculer les deux entiers q et r tels que :

$$a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b.$$

Fontions TI existantes

$\text{mod}(a, b)$ donne le reste r de la division euclidienne de a par b .

$\text{intDiv}(a, b)$ donne le quotient q qui n'est autre que la partie entière de a/b (doc.1).



Doc. 1.

Algorithme « naïf »

L'écran suivant (doc. 2) donne un programme très simple de division euclidienne dont le nombre d'itérations est la partie entière de (a/b) . C'est très lent lorsque a est grand et b petit (plus d'une minute pour le calcul avec $a = 73005$ et $b = 12$).



Doc. 2.

Algorithme « rapide »

Les deux écrans suivants (doc. 3 et 4) donnent un programme de division euclidienne dont le nombre d'itérations est environ $\log_2(a/b)$. Testez-le sur le même exemple !

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Control I/O Var Find... Mode
:euclide2(a,b)
:Func
:Local rr,qq,n,c
:a+rr: 0+qq:
:1+iPart(ln(a/b)/(ln(2)))>n
:2^n*b+c
:While n>0
:  c/2+c
:  n-1+n
:  If rr<c Then
:    2*qq+qq
:  Else
:    2*qq+1+qq: rr-c+rr
:  EndIf
: EndWhile
: Return (qq,rr)
: EndFunc
MAIN RAD AUTO 3D

```

Doc. 3.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Control I/O Var Find... Mode
:2^n*b+c
:While n>0
:  c/2+c
:  n-1+n
:  If rr<c Then
:    2*qq+qq
:  Else
:    2*qq+1+qq: rr-c+rr
:  EndIf
: EndWhile
: Return (qq,rr)
: EndFunc
MAIN RAD AUTO 3D

```

Doc. 4.

Algorithmique, TD 3

Décomposition LU

L'étude de cet algorithme et des résultats mathématiques nécessaires se trouvent dans le problème de concours *Centrale-Supelec PSI 2001 math II*. Sa solution est dans le livre d'exercices *H-Prépa Maths*, 2^{de} année.

L'objectif mathématique

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, trouver deux matrices L et U telles que :

- L soit triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale ;
- U soit triangulaire supérieure ;
- $A = LU$.

Les notations

- Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $A_k = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}}$ la matrice $k \times k$ extraite de A en supprimant dans

A les lignes d'indices $k+1$ à n ainsi que les colonnes de mêmes indices.

Par exemple, pour $k=1$, on obtient la matrice 1×1 : $A_1 = (a_{11})$, et pour $k=n$, $A_n = A$.

La fonction *Maple* effectuant ce travail est :

```
submatrix(A,1..k,1..k)
```

- L'échange de deux lignes ou de deux colonnes d'une matrice A est une opération que vous avez pratiquée en étudiant la méthode de Gauss.

La fonction *Maple* effectuant l'échange des lignes i et j de la matrice A est :

```
swaprow(A,i,j)
```

La fonction Maple effectuant l'échange des colonnes i et j de la matrice A est :

```
swapcol(A,i,j)
```

La condition d'existence d'une décomposition LU

La matrice A admet une décomposition LU si, et seulement si :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{Det}A_k \neq 0.$$

Le calcul de L

On impose $L[i, i] := 1$ et, pour $j > i$, $L[i, j] := 0$.

Pour $j < i$, on effectue la permutation des lignes i et j :

```
B := swaprow(A,i,j)
```

et on a la formule :

$$L[i, j] := \det(\text{submatrix}(B, 1..j, 1..j)) / \det(\text{submatrix}(A, 1..j, 1..j))$$

Le calcul de U

On impose, pour $j < i$, $U[i, j] := 0$.

Pour la première ligne $U[1, j] := A[1, j]$

Sur la diagonale, pour $j \geq 2$,

$$U[j, j] := \det(\text{submatrix}(A, 1..j, 1..j)) / U[j-1, j-1]$$

Enfin, pour $j > i$, on effectue la permutation des colonnes i et j :

```
C := swapcol(A,i,j)
```

et on a la formule :

$$U[i, j] := \det(\text{submatrix}(C, 1..i, 1..i)) /$$

$$\det(\text{submatrix}(A, 1..i-1, 1..i-1))$$

Avec Maple

```
> restart:with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> LU:=proc(A,n)
local i,j;
global L,U;
L:=matrix(n,n);U:=matrix(n,n);
  for i to n do
    L[i,1]:=A[i,1]/A[1,1];
    L[i,i]:=1;
    for j from i+1 to n do
      L[i,j]:=0;
    od;
  od;
  for i from 3 to n do
    for j from 2 to i-1 do
      L[i,j]:=det(submatrix(swaprow(A,i,j),1..j,1..j))
        /det(submatrix(A,1..j,1..j));
    od;
  od;
  for j to n do
    U[1,j]:=A[1,j];
```

```

    for i from j+1 to n do
        U[i,j]:=0;
    od;
od;
for j from 2 to n do
    U[j,j]:=det(submatrix(A,1..j,1..j))/U[j-1,j-1];
    for i from 2 to j-1 do
        U[i,j]:=det(submatrix(swapcol(A,i,j),1..i,1..i))
            /det(submatrix(A,1..i-1,1..i-1));
    od;
od;
end;

```

```

LU := proc(A, n)
local i, j;
global L, U;
L := matrix(n, n);
U := matrix(n, n);
for i to n do Li,1 := Ai,1/A1,1; Li,i := 1;
for j from i + 1 to n do Li,j := 0 od
od;
for i from 3 to n do for j from 2 to i - 1 do
    Li,j := det(submatrix(swaprow(A, i, j), 1..j, 1..j))
        /det(submatrix(A, 1..j, 1..j))
od
od;
for j to n do U1,j := A1,j;
for i from j + 1 to n do Ui,j := 0 od od;
for j from 2 to n do
    Uj,j := det(submatrix(A, 1..j, 1..j))/Uj-1,j-1;
    for i from 2 to j - 1 do Ui,j :=
        det(submatrix(swapcol(A, i, j), 1..i, 1..i))
            /det(submatrix(A, 1..i - 1, 1..i - 1))
    od
od
end

```

Avec Maple :

```

> A:=matrix(4,4,[1,1,3,1,1,2,1,3,0,1,
    -1,2,1,-1,2,1]);

```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

```

> LU(A,4):evalm(L);evalm(U);

```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Exercice résolu

Endomorphismes nilpotents

ÉNONCÉ

Dans cet exercice, E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Un endomorphisme f de l'espace vectoriel E est dit **nilpotent** si :

$$\exists p \in \mathbb{N}^* f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Le plus petit entier $p > 0$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est appelé indice de nilpotence de f .

Dans la suite de cet exercice, f est un endomorphisme nilpotent et non nul de E .

1) Soit x un vecteur de E et k un entier ≥ 0 tel que $f^k(x) \neq 0_E$.

Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^k(x))$ est libre.

2) En déduire que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

3) Montrer que, si f est nilpotent d'indice p , alors $\text{rg } f \geq p - 1$.

4) Montrer que, pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, $f - \lambda \text{Id}_E$ est bijectif.

5) Déterminer l'expression de $(\text{Id}_E - f)^{-1}$ en fonction des puissances de f .

Dans la suite de l'exercice, f est nilpotent d'indice n et x_0 désigne un élément de E tel que :

$$f^{n-1}(x_0) \neq 0_E.$$

6) Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E .

Déterminer la matrice de f dans cette base.

En déduire le rang de f .

7) Soit un endomorphisme g de E tel que $g \circ f = f \circ g$.

$$\text{On note } g(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0).$$

$$\text{Montrer que } g = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i.$$

En déduire que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $(\text{Id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$.

CONSEILS

Appliquer une puissance de f à une combinaison linéaire nulle des vecteurs $(x, f(x), \dots, f^k(x))$.

SOLUTION

1) Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ des scalaires tels que :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_k f^k(x) = 0_E.$$

Soit j le plus petit entier tel que $f^j(x) = 0_E$, alors :

$$f^{j-1}(\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_k f^k(x)) = 0_E = \alpha_0 f^{j-1}(x).$$

Donc $\alpha_0 = 0$.

On montre par récurrence que, pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $\alpha_i = 0$.

Donc, la famille $(x, f(x), \dots, f^k(x))$ est libre.

Une implication importante

$$f(x) = \lambda x \Rightarrow f^k(x) = \lambda^k x.$$

Un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie est bijectif.

Pour i entre 0 et $n-1$, $f(e_i) = e_{i+1}$ et $f(e_n) = 0_E$.

Deux applications linéaires qui coïncident sur une base de E sont égales.

2) Si, pour un x de E , $f^n(x) \neq 0_E$, alors la famille $(x, f(x), \dots, f^n(x))$ est libre. C'est impossible ($\dim E = n$). Donc : $\forall x \in E \quad f^n(x) = 0_E$.

3) Si f est nilpotent d'indice p , alors il existe un vecteur x de E tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$.

Donc la famille $(f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est une famille libre de $p-1$ éléments de $\text{Im } f$. Ceci prouve que : $\text{rg } f \geq p-1$.

4) Soit λ un scalaire non nul et x dans $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$.

On a : $\lambda^n x = f^n(x) = 0_E$. Or $\lambda \neq 0$, donc : $x = 0_E$.

Or E est de dimension finie donc $f - \lambda \text{Id}_E$ est bijectif.

5) $(\text{Id}_E - f) \circ (\text{Id}_E + f + \dots + f^{n-1}) = \text{Id}_E - f^n = \text{Id}_E$.

Donc $(\text{Id}_E - f)^{-1} = (\text{Id}_E + f + \dots + f^{n-1})$.

6) $B = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E et :

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci permet de conclure que le rang de f est $n-1$.

7) L'égalité $g \circ f = f \circ g$ entraîne que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad g(f^k(x_0)) = f^k \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0) \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(f^k(x_0)).$$

Les endomorphismes g et $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i$ coïncident sur une base de E . Ils sont égaux.

Ce qui précède prouve que l'ensemble des applications g telles que $g \circ f = f \circ g$ est inclus dans $\text{Vect}(\text{Id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$. L'inclusion réciproque est immédiate.

Exercices

1 Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

À chaque élément f de E , on associe la fonction $\Phi(f)$ en posant, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\Phi(f)(x) = f(x) + \int_0^x f(t)dt.$$

1) Prouver que l'application $(\Phi : f \mapsto \Phi(f))$ est un endomorphisme de E .

2) Déterminer $\text{Ker } \Phi$.

3) Trouver toutes les fonctions f , continues sur $\mathbb{R}$, et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + \int_0^x f(t)dt = 1 + x.$$

2 Soit V le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des suites complexes et c un nombre complexe différent de 1.

À chaque élément (x_n) de V on associe la suite :

$(y_n) = \Psi((x_n))$ en posant, pour tout entier n :

$$y_n = x_{n+1} - cx_n$$

1) Prouver que l'application $(\Psi : (x_n) \mapsto (y_n))$ est un endomorphisme de V .

2) Déterminer $\text{Ker } \Psi$. En préciser la dimension et une base.

3) Soit d un autre nombre complexe. Déterminer toutes les suites (x_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = cx_n + d.$$

3 On définit l'application Φ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même en posant :

$$\Phi(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

1) Prouver que Φ est linéaire et n'est pas injective.

2) Prouver que, pour tout entier $n \geq 0$, Φ induit un isomorphisme entre $X^2\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$.

3) En déduire que Φ est surjective.

4 Montrer que l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, définie par $P(X) \mapsto P(X+1)$ induit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, noté F_n .

Déterminer une expression simple de son inverse.

5 Les notations sont celles de l'exercice précédent

1) Déterminer la matrice de F_n relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Inverser cette matrice.

3) En déduire que, si i et j sont deux entiers tels que $0 \leq i < j$, alors :

$$(-1)^k \binom{k}{i} \binom{j}{k} = 0.$$

6 1) Montrer que l'application $(P \mapsto P - P')$ définit un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$.

2) Montrer que cet endomorphisme est inversible et exprimer son inverse (matriciellement dans la base canonique).

7 Soit $M_{a,b}$ la matrice réelle d'ordre 4 définie par l'égalité :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Peut-on trouver deux matrices distinctes semblables dans l'ensemble : $\{M_{1,1}, M_{1,0}, M_{0,1}, M_{0,0}\}$?

8 Soit E un espace vectoriel, V et W deux sous-espaces de E tels que $E = V \oplus W$.

1) Montrer que, si p est le projecteur sur V parallèlement à W , alors $s = 2p - \text{Id}_E$ est la symétrie par rapport à V parallèlement à W .

2) En déduire la trace de la symétrie s .

9 Soit A, B, C et D quatre éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que les égalités :

$$AC + DB = I_n$$

$$CA + BD = 0_n$$

sont incompatibles.

10 Déterminer le polynôme P de degré ≤ 3 tel que :

$$P(1) = 1, P(2) = 4; P(12) = 1, P(13) = 4.$$

11 Soit f le polynôme de degré ≤ 2 tel que :

$$f(a) = l, \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) = m \quad \text{et} \quad f(b) = n.$$

Calculer $\int_a^b f(t)dt$ en fonction de m , n et l .

12 1) Déterminer la suite (u_n) telle que $u_0 = -1, u_1 = 1$ et pour tout $n, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

2) Déterminer la suite (u_n) telle que $u_0 = 0, u_1 = 11$ et pour tout $n, u_{n+2} = 22u_{n+1} - 121u_n$.

3) Déterminer la suite (u_n) telle que $u_0 = a, u_1 = b$ et pour tout $n, u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$. Que remarquez-vous ?

13 Soit a, b et k trois nombres réels. Déterminer toutes les suites (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + k. \quad (1)$$

14 Soit u et v deux endomorphismes de l'espace vectoriel E tels que $uv = vu$ et F l'ensemble des vecteurs invariants de u :

$$F_u = \{x \in E \mid u(x) = x\}.$$

Montrer que si F_u est une droite, alors, pour tout x de F_u, x et $v(x)$ sont colinéaires.

15 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \deg(u(P)) = \deg(P).$$

1) Montrer que les sous-espaces $\mathbb{R}_n[X]$ sont tous stables par u et que u induit sur chacun de ces sous-espaces un endomorphisme trigonalisable.

2) Dans cette question, u est l'application définie par :

$$u : P(x) \longmapsto (2x - 1)P'(x) + 3P(x).$$

Déterminer la matrice, relativement à la base canonique, de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par u .

16 Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E .

1) Prouver que, pour tout entier $k \geq 0$:

$$\text{Im}(f^k) \supset \text{Im}(f^{k+1}).$$

2) Montrer que, si p est un entier tel que $\text{Im}(f^p) = \text{Im}(f^{p+1})$, alors pour tout entier $k \geq 0$, $\text{Im}(f^p) = \text{Im}(f^{p+k})$.

3) En déduire que $\text{Im}(f^n) = \text{Im}(f^{n+1})$.

4) Que dire si l'on remplace les images par des noyaux ?

5) Soit p le plus petit entier tel que $\text{Im}(f^p) = \text{Im}(f^{p+1})$.

Montrer que $E = \text{Im}(f^p) \oplus \text{Ker}(f^p)$.

17 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, x_0 un vecteur non nul de E et u une application linéaire non nulle de E dans $\mathbb{K}$. On définit l'endomorphisme f de E en posant :

$$f(x) = u(x)x_0.$$

1) Quel est le rang de f .

2) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un projecteur.

3) Soit un entier $k > 0$. Calculer f^k .

18 Soit un entier $n \geq 2, E$ un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme nilpotent de E .

1) Soit e_1 un vecteur non nul de $\text{Ker } f$. Prouver qu'il existe un vecteur e_2 de $E \setminus \text{Vect}(e_1)$ tel que $f(e_2) \in \text{Vect}(e_1)$.

2) Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice de f relativement à cette base soit triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale.

19 Existe-t-il une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

20 1) Dans cette question, $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad (1)$$

Une telle matrice est appelée matrice à diagonale strictement dominante.

Montrer que A est inversible.

Indication : la matrice A est inversible lorsque, pour tout vecteur colonne X :

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1. \quad (2)$$

Montrer que, pour tout $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^n$, l'équation $X = AX + B$ admet une unique solution dans $\mathbb{C}^n$.

21 Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $b \neq 0$.

1) Montrer que, pour tout couple (u, v) de scalaires tel que $v \neq 0$, la matrice M est semblable à une matrice réelle de la forme $\begin{pmatrix} u & w \\ v & z \end{pmatrix}$.

Indication : Utiliser l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associé à M .

2) Exprimer w et z en fonction de a, b, c, d, u, v .

3) Soit a, b, c, d quatre réels tels que $(a - d)^2 + 4bc < 0$.

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice de la forme : $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

22 Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, V un sous-espace vectoriel de E , W un sous-espace vectoriel de F . On considère :

$$X = \{f \in \mathcal{L}(E, F) \mid V \subset \text{Ker}(f) \text{ et } \text{Im}(f) \subset W\}.$$

Montrer que X est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$. En donner la dimension.

23 Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ une matrice

diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les termes de la diagonale sont distincts 2 à 2.

1) Montrer qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec D si, et seulement si, M est diagonale.

2) En déduire que la matrice M commute avec D si, et seulement s'il existe un polynôme $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i$ de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$M = P(D) = \sum_{i=0}^p a_i D^i.$$

Indication : utiliser l'interpolation de Lagrange.

24 Les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont notées E_{ij} . Soit f une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2 \quad f(AB) = f(BA).$$

1) Prouver que, si i et j sont deux éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors :

$$f(E_{ij}) = 0 \text{ et } f(E_{ii}) = f(E_{jj}).$$

Indication : utiliser la relation $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ (1)

2) En déduire l'existence d'un scalaire λ tel que $f = \lambda \text{tr}$.

25 Soit φ une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe une matrice $B = (b_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \varphi(M) = \text{tr}(MB).$$

Indication : utiliser la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

26 Soit $(b_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille de $n+1$ points distincts de $\mathbb{C}$ et $L_i = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - b_j}{b_i - b_j}$ le i -ème polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la famille $(b_i)_{0 \leq i \leq n}$.

1) Simplifier le polynôme $P_k = \sum_{i=0}^n b_i^k L_i$ lorsque k est un entier compris entre 0 et $n+2$.

2) Calculer $P_k(0)$ pour les mêmes valeurs de k .

Somme directe Hyperplan et dual Groupe symétrique



Introduction

La notion de somme directe de plusieurs sous-espaces vectoriels généralise celle des sous-espaces vectoriels supplémentaires, étudiée en Première année.

Pour les hyperplans, on met en parallèle leur définition géométrique et celle, algébrique, de forme linéaire.

Dans le cadre du programme de PSI, on approfondit l'étude des formes linéaires en définissant le dual et on donne les notions de base sur le groupe symétrique.

O B J E C T I F S

- Somme directe de sous-espaces vectoriels.
- Matrice d'un endomorphisme dans une base adaptée à une somme directe.
- Endomorphismes diagonalisables.
- Hyperplans d'un espace vectoriel.

Programme PSI

- Dual, base duale d'une base d'un espace vectoriel.
- Manipulations de base sur les permutations, cycles et transpositions.
- Décomposition d'une permutation en un produit de transpositions.
- Signature d'une permutation.

Sommes directes

1.1. Familles libres, familles génératrices

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et I un ensemble non vide quelconque (et éventuellement infini).

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E , indexée par I , est une **famille génératrice** de E lorsque tout élément x de E est combinaison linéaire (finie) d'éléments de cette famille :

$$\forall x \in E \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad \exists \{i_1, \dots, i_n\} \subset I \quad \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$$

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_{i_k}.$$

Ceci peut aussi s'écrire $E = \text{Vect}\{x_i, i \in I\}$.

Une famille $(y_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E indexée par I est une **famille libre** de E lorsque toute sous-famille finie de cette famille est libre :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall \{i_1, \dots, i_n\} \subset I \quad \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k y_{i_k} = 0_E \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \alpha_k = 0.$$

Exemple

Pour $E = \mathbb{K}[X]$, la famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire une **base** de cet espace.

1.2. Somme directe de sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(V_1, \dots, V_n)$ est une famille finie de n sous-espaces vectoriels de E ($n \in \mathbb{N}^*$).

La somme de ces sous-espaces vectoriels est notée :

$$V_1 + \dots + V_n \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n V_i ;$$

c'est l'ensemble des vecteurs x de E pouvant s'écrire :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i, \quad \text{avec} \quad (x_1, \dots, x_n) \quad \text{dans} \quad V_1 \times \dots \times V_n.$$

On dit que la somme $V = V_1 + \dots + V_n$ est une **somme directe** ou que les sous-espaces vectoriels $(V_1, \dots, V_n)$ sont en somme directe si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in V_1 \times \dots \times V_n \quad \left(\sum_{i=1}^n x_i = 0_E \right) \Rightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad x_i = 0_E)$$

Lorsque la somme $V = V_1 + \dots + V_n$ est une somme directe, on écrit :

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n \quad \text{ou} \quad V = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} V_i.$$

Rapport E3A, 2002

« Il est aussi inquiétant que, à défaut d'une démonstration, la grande majorité des candidats ne sache pas au moins exprimer ce qu'est une famille génératrice. »

Rapport Mines-Ponts, 2001

« On peut rappeler que pour prouver que les vecteurs (e_k) avec $2 \leq k \leq n$ constituent une base de l'espace E_n^0 , il faut déjà vérifier qu'ils sont dans cet espace. »

Rapport Centrale, 1997

« La somme et la réunion de sous-espaces vectoriels sont confondues, ainsi que les notions de supplémentaire et de complémentaire. »

Rapport Mines-Ponts, 2003

« La somme directe de plus de deux sous-espaces vectoriels est mal comprise et nous entendons toujours parler du supplémentaire d'un sous-espace vectoriel. »

Vous avez démontré en Première année que la somme de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E . Vous démontrerez qu'il en est de même pour la somme $V_1 + \dots + V_n$ de n sous-espaces.

Vous démontrerez les assertions suivantes :

- Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre de n vecteurs de E .

La somme des sous-espaces $\text{Vect}(v_i)$ est une somme directe.

- Soit $(V_1, \dots, V_n)$ une famille de sous-espaces de E dont la somme est directe. La famille $(x_1, \dots, x_n)$ de $V_1 \times \dots \times V_n$ est libre si, et seulement si, pour tout $i, x_i \neq 0_E$.

- Soit E et F deux espaces vectoriels. Les ensembles $E \times \{0_F\}$ et $\{0_E\} \times F$ sont des sous-espaces de $E \times F$ et : $E \times F = E \times \{0_F\} \oplus \{0_E\} \times F$.

Théorème 1

La somme $V = V_1 + \dots + V_n$ est une somme directe si, et seulement si, la décomposition d'un élément x de V sous la forme $x = x_1 + \dots + x_n$, avec x_i dans V_i pour tout i , est unique :

$$\forall ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in (V_1 \times \dots \times V_n)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \right) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\} \ x_i = y_i).$$

Démonstration

Point clé : $\left(\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \right) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) = 0_E \right).$

► Pour s'entraîner : ex. 1 et 2.

Lorsque deux sous-espaces vectoriels V et W sont supplémentaires dans E , ils sont en somme directe et leur somme est E . Cela justifie la notation $E = V \oplus W$ utilisée en Première année.

Rapport Centrale, 1997

« La majorité des candidats considère que $\sum_{i=1}^n F_i$ est directe si, et seulement si, lorsque $i \neq j, F_i \cap F_j = \{0\}$. Beaucoup estiment qu'une famille de vecteurs est libre si, et seulement si, ses vecteurs sont deux à deux indépendants. »

Rapport IIE, 2003

« Pour qu'une somme de sous-espaces vectoriels soit directe, il ne suffit pas que les intersections deux à deux des sous-espaces soit réduite à $\{0\}$. »

Application 1

Sommes directes et intersections de sous-espaces

Dans cette application, $V_1, \dots, V_n$ sont n sous-espaces vectoriels de E ($n \geq 2$).

1) Montrer que la somme $V_1 + \dots + V_n$ est une somme directe si, et seulement si, la somme $V_1 + \dots + V_{n-1}$ est directe et :

$$(V_1 + \dots + V_{n-1}) \cap V_n = \{0_E\}.$$

2) Trouver un exemple de trois sous-espaces vectoriels V_1, V_2, V_3 de $\mathbb{R}^2$ tels que :

$$V_1 \cap V_2 = \{0_E\}, V_2 \cap V_3 = \{0_E\}, V_3 \cap V_1 = \{0_E\},$$

bien que la somme $V_1 + V_2 + V_3$ ne soit pas directe.

1) • Supposons la somme $V_1 + \dots + V_n$ directe.

Soit $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in V_1 \times \dots \times V_{n-1}$ tel que :

$$x_1 + \dots + x_{n-1} = 0_E.$$

Il est aisé de voir que tous les x_i sont nuls.

La somme $V_1 + \dots + V_{n-1}$ est directe.

Soit $x \in (V_1 + \dots + V_{n-1}) \cap V_n$.

Il existe $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in V_1 \times \dots \times V_{n-1}$ tel que :

$$x = x_1 + \dots + x_{n-1}.$$

Alors $x_1 + \dots + x_{n-1} + (-x) = 0_E$

D'où :

$$(V_1 + \dots + V_{n-1}) \cap V_n = \{0_E\}.$$

- Réciproquement :

si $(V_1 + \dots + V_{n-1}) \cap V_n = \{0_E\}$ et si la somme $V_1 + \dots + V_{n-1}$ est directe, pour tout $(x_1, \dots, x_n)$ de $V_1 \times \dots \times V_n$ tel que $x_1 + \dots + x_n = 0_E$, on a :

$$x_1 + \dots + x_{n-1} = -x_n.$$

Donc $x_n \in (V_1 + \dots + V_{n-1}) \cap V_n = \{0_E\}$.

$$x_1 + \dots + x_{n-1} = 0_E.$$

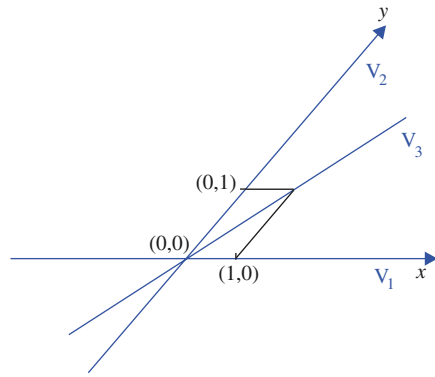
Or la somme $V_1 + \dots + V_{n-1}$ est directe.

Tous les x_i sont nuls.

La somme $V_1 + \dots + V_n$ est directe.

2) Notons $V_1 = \mathbb{R}(1, 0)$, $V_2 = \mathbb{R}(0, 1)$, $V_3 = \mathbb{R}(1, 1)$, il est aisé de prouver que, prises deux à deux, ces droites sont sécantes en $(0, 0)$, mais la somme de ces trois sous-espaces n'est pas directe puisque :

$$(1, 0) + (0, 1) + (-1, -1) = (0, 0).$$



Doc. 1. Deux droites vectorielles non confondues sont toujours en somme directe. Trois droites vectorielles du plan ne sont jamais en somme directe.

1.3. Sommes directes : bases et dimensions

Les *théorèmes* suivants, que nous vous laissons démontrer, généralisent les résultats connus sur les sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Théorème 2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $(V_1, \dots, V_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que la somme

1

Avec les hypothèses et notations précédentes, on dit que B est une **base de V adaptée à la décomposition en somme directe** $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$.

Corollaire 2.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(V_1, \dots, V_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = V_1 \oplus \dots \oplus V_p$.

L'égalité suivante est vérifiée :

$$\dim E = \sum_{j=1}^p \dim V_j.$$

Ce corollaire explique bien pourquoi trois droites vectorielles du plan ne sont jamais en somme directe.

Le théorème suivant permet d'exploiter au mieux la formule :

$$\dim E = \sum_{j=1}^p \dim V_j.$$

Théorème 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(V_1, \dots, V_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E .

- Si la somme $V_1 + \dots + V_p$ est directe et si $\dim E = \sum_{j=1}^p \dim V_j$,

alors $E = V_1 \oplus \dots \oplus V_p$.

- Si $E = V_1 + \dots + V_p$ et si $\dim E = \sum_{j=1}^p \dim V_j$,

alors $E = V_1 \oplus \dots \oplus V_p$.

2 Somme directe de sous-espaces stables par un endomorphisme

2.1. Traduction matricielle de la stabilité

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie décomposé en une somme directe de k sous-espaces $E = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.

Pour tout i de $\llbracket 1, k \rrbracket$, $n_i = \dim(V_i)$.

Théorème 4

Soit f un endomorphisme de E et B une base adaptée à la décomposition :

$$E = V_1 \oplus \dots \oplus V_k.$$

Les sous-espaces vectoriels V_i sont tous stables par f si, et seulement si :

$$\exists (A_1, \dots, A_k) \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K}) \times \dots \times \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{K})$$

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{A_k} \end{pmatrix}.$$

On dit alors que la **matrice** $M_B^B(f)$ est **diagonale par blocs**.

Lorsque cette condition est réalisée, si l'on note f_i l'endomorphisme de V_i induit par f et $B_1, \dots, B_k$ les bases de $V_1, \dots, V_k$ telles que $B = (B_1, \dots, B_k)$, alors pour tout i , le bloc A_i est la matrice de f_i relativement à la base B_i .

Avec les hypothèses et notations précédentes, on remarque que :

$$\mathrm{tr}(f) = \sum_{i=1}^k \mathrm{tr}(A_i) = \sum_{i=1}^k \mathrm{tr}(f_i).$$

Les résultats du chapitre précédent sur les sous-espaces stables vous permettront de rédiger la démonstration de ce théorème.

Corollaire 4.1

Si l'endomorphisme f de E stabilise chaque sous-espace V_i et si, pour tout i , l'endomorphisme de V_i induit par f est une homothétie, alors la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition $E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ est diagonale.

Démonstration

Avec les notations du *théorème* précédent, le bloc A_i est la matrice d'une homothétie de V_i , donc A_i est une matrice diagonale et $M_B^B(f)$ est une matrice diagonale.

► Pour s'entraîner : ex. 3.

2.2. Endomorphismes diagonalisables : le point de vue géométrique

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E . On dit que f est **diagonalisable** s'il existe une décomposition de E en somme directe de sous-espaces : $E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ telle que :

- chaque sous-espace V_i est stable par f ;
- l'endomorphisme de V_i induit par f est une homothétie.

Théorème 5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E .

L'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base B de E telle que la matrice de f relativement à cette base soit diagonale.

Démonstration

- D'après le *corollaire* 4.1, si f est diagonalisable, alors il existe une base B de E telle que $M_B(f)$ soit diagonale.
- Réciproquement, notons $n = \dim E$ et supposons l'existence d'une base de E , $B = (e_1, \dots, e_n)$, telle que $M_B(f)$ soit diagonale :

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Chaque droite $V_i = \text{Vect}(e_i)$ est stable par f et l'endomorphisme de V_i induit par f est l'homothétie de rapport d_i .

De plus, puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , on a : $E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$.

Exemples

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

- Quelque soit la base choisie, la matrice d'une homothétie de E est diagonale.

Toute homothétie de E est diagonalisable.

- Soit V et W des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = V \oplus W$. Les matrices du projecteur sur V parallèlement à W et de la symétrie par rapport à V parallèlement à W , relativement à une base adaptée à la décomposition $E = V \oplus W$, sont diagonales.

Tout projecteur et toute symétrie de E sont diagonalisables.

► Pour s'entraîner : ex. 4.

2.3. Sommes directes et construction d'applications linéaires

Théorème 6

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $(V_1, \dots, V_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = V_1 \oplus \dots \oplus V_p$.

Étant données p applications linéaires $(u_1, \dots, u_p)$ telles que u_i soit dans $\mathcal{L}(V_i, F)$ pour tout i , il existe une unique application linéaire f de E dans F dont la restriction à V_i est u_i pour chaque i :

$$\forall (u_1, \dots, u_p) \in \prod_{i=1}^p \mathcal{L}(V_i, F) \quad \exists ! f \in \mathcal{L}(E, F)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} \quad \forall x \in V_i \quad f(x) = u_i(x)$$

Démonstration

- *Construction de f*

Soit x un élément de E on l'écrit $x = x_1 + \dots + x_p$ avec x_i dans V_i .

On pose $f(x) = \sum_{i=1}^p u_i(x_i)$. L'unicité de la décomposition : $x = x_1 + \dots + x_p$, prouve que f est une application de E dans F .

- *Linéarité de f*

Il suffit de développer $f(\alpha x + \beta y)$ en utilisant les décompositions de x et y .

- *Unicité de f*

Notons f et g deux solutions du problème. Soit x un élément de E , on l'écrit $x = x_1 + \dots + x_p$ avec x_i dans V_i .

$$f(x) = \sum_{i=1}^p f(x_i) = \sum_{i=1}^p u_i(x_i) = \sum_{i=1}^p g(x_i) = g(x).$$

Théorème 7

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel somme directe de p sous-espaces $V_1, \dots, V_p$:

$$E = V_1 \oplus \dots \oplus V_p.$$

Pour chaque entier i de $\llbracket 1, p \rrbracket$, le sous-espace W_i est défini par :

$$W_i = \bigoplus_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} V_j.$$

Pour tout i de $\llbracket 1, p \rrbracket$, W_i et V_i sont supplémentaires dans E .

Si p_i désigne le projecteur sur V_i parallèlement à W_i , alors :

- $p_i \circ p_j = \begin{cases} 0_{\mathcal{L}(E)} & \text{si } i \neq j; \\ p_i & \text{si } i = j \end{cases}$.
- $\sum_{i=1}^p p_i = \text{Id}_E$.

Application 2

Construction d'endomorphismes diagonalisables à l'aide de projecteurs

Les hypothèses et notations sont celles du théorème précédent. De plus, on suppose que dans la décomposition $E = V_1 \oplus \dots \oplus V_p$, aucun des sous-espaces vectoriels V_i n'est réduit à $\{0_E\}$.

Étant donné p scalaires $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, l'endomorphisme f est défini en posant :

$$f = \sum_{i=1}^p \alpha_i p_i.$$

1) Prouver que l'endomorphisme de V_i induit par f est une homothétie de rapport α_i .

En déduire que f est diagonalisable.

2) Montrer que, pour tout entier positif k :

$$f^k = \sum_{i=1}^p \alpha_i^k p_i.$$

3) Dans cette question, $p = 2$. Que dire si :

- a) $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 0$?
- b) $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = -1$?

1) Soit i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$.

Pour tout v de V_i , $p_i(v) = v$ et $p_j(v) = 0_E$ si $j \neq i$. Donc $f(v) = \alpha_i v$.

Ceci prouve que l'endomorphisme de V_i induit par f est une homothétie de rapport α_i et que f est diagonalisable.

$$2) \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i p_i \right) \circ \left(\sum_{j=1}^p \beta_j p_j \right) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \alpha_i \beta_j p_i \circ p_j.$$

Or $p_i \circ p_j$ est nul si $i \neq j$ et $p_i \circ p_i = p_i$.
Donc :

$$\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i p_i \right) \circ \left(\sum_{j=1}^p \beta_j p_j \right) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \beta_i p_i \quad (1)$$

Vous en déduirez, par récurrence, que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f^k = \sum_{i=1}^p \alpha_i^k p_i.$$

3) Dans le premier cas, il s'agit du projecteur sur V_1 parallèlement à V_2 et dans le second, de la symétrie par rapport à V_1 parallèlement à V_2 .

3 Hyperplans d'un espace vectoriel

3.1. Définitions

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

3.1.1 Définition algébrique, point de vue géométrique

On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace vectoriel H de E admettant un supplémentaire D qui est une droite vectorielle de E .

Théorème 8

Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si, et seulement s'il existe une forme linéaire sur E , f , non nulle et telle que $H = \text{Ker } f$.

Démonstration

- Soit H un hyperplan de E et $D = \text{Vect}(v)$ un supplémentaire de H .
- Tout x de E s'écrit de manière unique sous la forme : $x = h_x + \alpha_x v$ avec h_x dans H et α_x dans $\mathbb{K}$.

L'application $x \mapsto \alpha_x$ est une forme linéaire non nulle dont le noyau est H .

Réciproquement, soit f une forme linéaire non nulle telle que $H = \text{Ker } (f)$.

Il existe x dans E tel que $f(x) \neq 0$. Soit D la droite engendrée par x , $D = \mathbb{K}x$.

On montre aisément que $H \cap D = \{0_E\}$.

Soit y dans E . Il suffit de trouver α dans $\mathbb{K}$ tel que :

$$y = (y - \alpha x) + \alpha x \quad \text{et} \quad (y - \alpha x) \in \text{Ker } (f).$$

$$\alpha = \frac{f(y)}{f(x)} \quad \text{convient et} \quad E = H \oplus D.$$

Une droite vectorielle d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1.

En conséquence, un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ est un plan vectoriel de cet espace ; un hyperplan de $\mathbb{R}^2$ est une droite.

La démonstration du *théorème 1* prouve de plus que, pour tout vecteur x qui n'appartient pas à l'hyperplan H , la droite $D = \text{Vect}(x)$ est un supplémentaire de H .

Rapport Centrale, 1998

« Il est très rare de voir comme argument que P est le noyau d'une forme linéaire non nulle. »

Il s'agissait de montrer qu'un ensemble était un sous-espace vectoriel et d'en trouver un supplémentaire.

Corollaire 8.1

Soit un entier $n \geq 1$. Les hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension n sont les sous-espaces de E de dimension $n - 1$.

3.1.2 Équation d'un hyperplan

Dans ce paragraphe nous abordons un point essentiel de la géométrie analytique : l'**équation d'un ensemble de points**.

Théorème 9

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et H un hyperplan de E . Il existe n scalaires $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ non tous nuls tels que H soit l'ensemble des points de E dont les composantes $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base B vérifient l'équation :

$$(P) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0.$$

Une base de l'espace vectoriel de dimension finie E étant choisie, une équation (P) de la partie H de E est une condition nécessaire et suffisante portant sur les coordonnées d'un point x de E et traduisant l'appartenance à H .

L'équation $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0\right)$ est une équation de l'hyperplan H .

Démonstration

Soit f une forme linéaire non nulle telle que $H = \text{Ker } f$. Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$,

on a, en notant $\alpha_i = f(e_i)$:

$$(x \in H) \Leftrightarrow (f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = 0).$$

Et $\alpha_i = f(e_i)$ convient.

Exemple

Le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices de trace nulle est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car la fonction **trace** est une forme linéaire non nulle.

Un supplémentaire de $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) | \text{Tr}(M) = 0\}$ est, par exemple, la droite $\text{Vect}(I_n)$ formée par les matrices d'homothéties.

Nous venons de définir l'équation d'un hyperplan. Celle-ci n'est pas unique. En effet, pour tout scalaire λ non nul :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i x_i = 0.$$

► Pour s'entraîner : ex. 5 et 6.

3.2. Deux propriétés des formes linéaires

3.2.1 Représentation matricielle des formes linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , H un hyperplan de E et f une forme linéaire non nulle telle que $H = \text{Ker } f$.

Puisque f est une application linéaire de E , de dimension n , dans $\mathbb{K}$, de dimension 1, la matrice de f relativement à une base de E et à une base de $\mathbb{K}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{1,n}$.

La famille à un élément de $\mathbb{K}$: $B_1 = (1)$ est une base de $\mathbb{K}$, donc :

$$M_{B_1}^B(f) = (f(e_1) \dots f(e_n)).$$

Posons $(f(e_1) \dots f(e_n)) = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$. Pour tout x de E , de composantes $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base B , l'équation $f(x) = 0$ s'écrit matriciellement :

$$(\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0.$$

C'est l'équation de l'hyperplan H obtenue à la fin du *théorème* précédent.

3.2.2 Formes linéaires colinéaires

Théorème 10

Soit f une forme linéaire non nulle sur le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et $H = \text{Ker } f$. Une forme linéaire g est telle que $H \subset \text{Ker } g$ si, et seulement si il existe un scalaire λ tel que $g = \lambda f$.

Le *théorème* ci-contre étudie l'inclusion $H \subset \text{Ker } g$. Il est aisé d'en déduire le *cas d'égalité*. Vous trouverez :

$$(H = \text{Ker } g) \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} g = \lambda f).$$

Vous en déduirez aussi que deux équations d'un même hyperplan dans une base B sont toujours proportionnelles.

Démonstration

Supposons que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g$.

Soit $D = \text{Vect}(x)$ un supplémentaire de H dans E . On a $f(x) \neq 0$.

Notons $f(x) = \alpha$ et $g(x) = \beta$. Le scalaire $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ convient.

La réciproque est évidente : si $g = \lambda f$, alors $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g$.

4 Dual, Bases duales (programme PSI)

4.1. Définition du dual

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

L'ensemble des formes linéaires sur E est appelé le **dual** de E .

Il est noté E^* plutôt que $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

On sait que, si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, alors $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim(E) \dim(F)$. Donc, si E est de dimension finie :

$$\dim E = \dim E^*.$$

4.2. Base duale

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, on note e_i^* l'application de E dans $\mathbb{K}$ qui, à un vecteur x , associe sa i -ième composante dans la base B :

$$e_i^* \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = x_i.$$

Cette application est linéaire et de plus :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}.$$

Ici, $\delta_{i,j}$ est le **symbole de Kronecker** qui vaut 0 si $i \neq j$, et 1 si $i = j$.

Théorème 11

La famille $B^* = (e_i^*)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ est une base de E^* . On l'appelle la **base duale** de la base B .

Démonstration

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un n -uplet de scalaires tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* = 0_{E^*}$.

Pour tout j de $\{1, \dots, n\}$, on peut écrire :

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*(e_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j.$$

Donc, la famille $(e_i^*)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ est libre. Or $\dim(E^*) = \dim(E)$. Le nombre d'éléments de B^* prouve que c'est une base de E^* .



Leopold Kronecker (1823-1891), mathématicien allemand. Il introduit la notion d'indéterminée X dans l'étude des polynômes, insistant sur le fait qu'il s'agit d'une quantité algébrique et non d'une variable au sens de l'analyse. Son œuvre est d'une grande importance en algèbre (théorie des groupes, théorie des nombres).

Kronecker est aussi connu pour son opposition farouche aux travaux de Cantor sur l'infini et la théorie des ensembles.

Vous prouverez les *corollaires* suivants.

Corollaire 11.1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. On a :

$$\forall x \in E \quad x = \sum_{j=1}^n e_j^*(x) e_j \quad \text{et} \quad \forall f \in E^* \quad f = \sum_{j=1}^n f(e_j) e_j^*.$$

Rapport Centrale, 1997

« Les questions qui touchent à la dualité sont souvent mal maîtrisées. »

Corollaire 11.2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $L = (f_1, \dots, f_n)$ une famille de n formes linéaires sur E .

- La famille L est une base de E^* si, et seulement si, on peut trouver une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de n vecteurs de E telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad f_i(e_j) = \delta_{i,j}.$$

- Dans ce cas, la famille $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E appelée **base anté-duale** de L .

Exemples

■ Le cas des espaces euclidiens

Soit $(E, \langle \mid \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $(E, \langle \mid \rangle)$.

La i -ième composante d'un vecteur x de E dans la base B est $\langle e_i \mid x \rangle$.

L'application « i -ième composante dans la base B » est :

$$e_i^* : x \longmapsto \langle e_i \mid x \rangle.$$

■ Interpolation de Lagrange, un second point de vue

Étant donnés $n + 1$ points distincts de $\mathbb{K}$, $(a_0, \dots, a_n)$, les polynômes d'interpolation de Lagrange en $(a_0, \dots, a_n)$ sont définis par :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

La famille $B = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Tout polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ s'écrit $P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i$.

Donc les composantes du polynôme P dans la base B sont $(P(a_0), \dots, P(a_n))$.

Pour tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$, notons f_i l'application :

$$f_i : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K} \\ P \longmapsto f_i(P) = P(a_i) \end{cases}$$

La famille $B^* = (f_0, \dots, f_n)$ est la base duale de la base B .

4.3. Un dernier théorème sur le dual

Théorème 12

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- Si x est un vecteur de E tel que, pour toute forme linéaire f : $f(x) = 0$, alors $x = 0_E$.
- Si x est un vecteur non nul de E , il existe une forme linéaire f telle que $f(x) = 1$.

► Pour s'entraîner : ex. 7 et 8.

5 Le groupe symétrique, définitions et notations (programme PSI)

Dans ce paragraphe, n est un entier supérieur ou égal à 2.

5.1. Définitions

5.1.1 Le groupe $\mathcal{S}_n$

L'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même est noté $\mathcal{S}_n$.

Un élément de $\mathcal{S}_n$ est appelé une **permutation** de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Si l'on note $\circ$ la loi de composition des applications, $(\mathcal{S}_n, \circ)$ est un groupe. C'est le **groupe symétrique** de degré n .

On abrège la notation en écrivant $\sigma\tau$ au lieu de $\sigma \circ \tau$.

La permutation $\sigma\tau$ est appelée le produit ou la composée des deux permutations σ et τ .

L'élément neutre de $\mathcal{S}_n$ est l'identité de $\llbracket 1, n \rrbracket$ noté Id_n .

Le programme de Première année nous apprend que le cardinal de $\mathcal{S}_n$ est $n!$

5.1.2 Support d'une permutation

Le **support d'une permutation** σ est l'ensemble des éléments i de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $\sigma(i) \neq i$.

Le support de la permutation σ sera noté I_σ dans la suite de ce paragraphe.

Exemples

- On note σ la permutation de $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ définie par :

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 5, \quad \sigma(3) = 6, \quad \sigma(4) = 4, \quad \sigma(5) = 2 \quad \text{et} \quad \sigma(6) = 1.$$

Le support de σ est $\{1, 2, 3, 5, 6\}$.

- Il y a une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dont le support est vide, c'est Id_n .
- Si $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{\text{Id}_n\}$, alors $\text{card}(I_\sigma) \geq 2$.
- $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n \quad I_\sigma = I_{\sigma^{-1}}$ et $\sigma(I_\sigma) = I_\sigma$.

5.1.3 Transpositions

On appelle **transposition** de $\llbracket 1, n \rrbracket$ une permutation dont le support contient exactement deux éléments.



« C'est sous la plume d'**Évariste Galois** (1811-1832) qu'apparaît pour la première fois le mot groupe. Les groupes manipulés par Galois étaient des groupes de permutations des n racines complexes d'un polynôme P de degré n à coefficients rationnels (avec le vocabulaire dont nous disposons, il s'agit de sous-groupes de $\mathcal{S}_n$). Il avait compris que l'étude de ces groupes de permutations permettrait de mieux comprendre la structure du plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant les racines du polynôme P . La théorie de Galois est à la base de la théorie des nombres moderne. Elle a permis de montrer, entre autres, qu'il n'y a pas de formule générale permettant de calculer les racines d'un polynôme de degré 5 ou plus. »

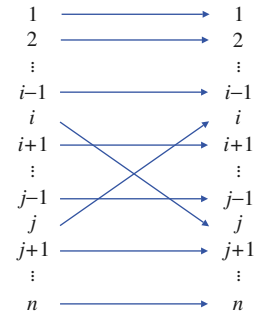
Théorème 13

Soit τ une transposition de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dont le support est $\{i, j\}$.

On a $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ et, pour tout x de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}$, $\tau(x) = x$.

Corollaire 13.1

Si τ est une transposition de $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors $\tau^2 = \text{Id}_n$ et $\tau^{-1} = \tau$.



Doc. 2. La transposition τ de support $\{i, j\}$.

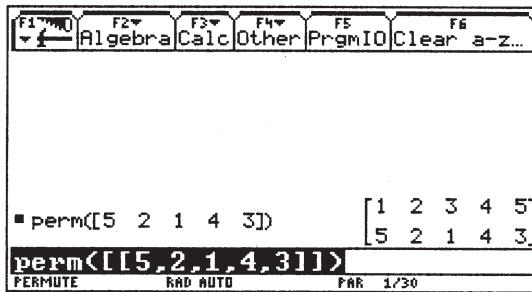
5.2. Notations

5.2.1 La notation « à deux lignes »

Soit σ une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Sous chaque nombre de la première ligne, est notée son image par σ .



Doc. 3.

Saisie de permutation

```
:Perm(1)
:Func
:Local n,i,c
:colDim(1) → n
:newMat(2,n) → c
:For i,1,n
:  i → c[1,i]
:  1[1,i] → c[2,i]
:EndFor
:c
:EndFunc
```

Produit de deux permutations

```
:produit (s,t)
:Func
:Local n,i,c
:colDim(s) → n
:newMat(2,n) → c
:For i,1,n
:  i → c[1,i]
:  s[2,t[2,i]] → c[2,i]
:EndFor
:c
:EndFunc
```

Inverse d'une permutation

```
:inverse(s)
:Func
:Local n,i,c
:colDim(s) → n
:newMat(2,n) → c
:For i,1,n
:  i → c[1,i]
:  i → c[2,s[2,i]]
:EndFor
:c
:EndFunc
```

L'intérêt de cette notation est qu'elle permet de composer rapidement des permutations

Exemples

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer $\tau\sigma$, on forme la matrice à trois lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.2.2 La notation des transpositions

La notation à deux lignes est peu utilisée pour les transpositions.

La transposition τ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de support $\{i, j\}$ est notée (i, j) .

5.2.3 Les cycles

Supposons $n \geq 2$ et notons k un entier compris entre 2 et n . Une permutation σ de $\mathcal{S}_n$ est appelée un **k -cycle** lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées :

- le support de σ contient exactement k éléments ;
- il existe une numérotation des éléments du support de $\sigma : \{a_1, \dots, a_k\}$, telle que, pour $i < k$, $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ et $\sigma(a_k) = a_1$.

Lorsque ceci est réalisé, on notera $\sigma = (a_1, \dots, a_k)$.

On dit aussi que σ est une permutation cyclique de $(a_1, \dots, a_k)$.

► Pour s'entraîner : ex. 9 à 11.

- Une transposition est un 2-cycle.
- La notation utilisée pour les cycles n'est pas unique :

$$(a_1, \dots, a_k) = (a_2, a_3, \dots, a_k, a_1).$$

Rapport Centrale, 2001

« Devant une prestation brillante [...], il lui fut demandé incidemment le nombre total des transpositions de $\llbracket 1, n \rrbracket$... son regard étonné et quasi courroucé montrait combien cette question paraissait saugrenue. »

6 Décomposition d'une permutation en produit de transpositions (programme PSI)

6.1. Le théorème de décomposition

Théorème 14

Toute permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ se décompose en un produit de transpositions.

Démonstration

On procède par récurrence sur n .

Pour $n = 2$, les éléments de $\mathcal{S}_2$ sont la transposition $(1, 2)$ et $\text{Id}_2 = (1, 2)(1, 2)$.

Supposons, pour un entier $n \geq 2$, que tous les éléments de $\mathcal{S}_n$ se décomposent en un produit de transpositions et considérons un élément σ de $\mathcal{S}_{n+1}$. Deux cas sont possibles :

- $\sigma(n+1) = n+1$

On peut considérer que σ est un élément de $\mathcal{S}_n$ et appliquer l'hypothèse de récurrence.

- $\sigma(n+1) \neq n+1$

L'identification d'un élément σ de $\mathcal{S}_n$ avec un élément de $\mathcal{S}_{n+1}$ tel que $I_\sigma \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ est très pratique à utiliser.

Notons $\sigma(n+1) = k$ et $\tau = (n+1, k)$.

On a : $\tau\sigma(n+1) = \tau(k) = n+1$. Donc, d'après ce qui précède, $\tau\sigma$ se décompose en un produit de transpositions :

$$\tau\sigma = \tau_1 \dots \tau_p.$$

Puisque $\tau = \tau^{-1}$, $\sigma = \tau\tau_1 \dots \tau_p$.

Exemples

Soit la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Suivons pas à pas la démonstration précédente pour décomposer σ .

$\sigma(8) = 4$.

Si $\tau_1 = (8, 4)$, alors $\tau_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

$\tau_1\sigma(7) = 4$.

Si $\tau_2 = (7, 4)$, alors $\tau_2\tau_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

$\tau_2\tau_1\sigma(6) = 3$.

Si $\tau_3 = (6, 3)$, alors $\tau_3\tau_2\tau_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Nous vous laissons poursuivre.

Vous trouverez $\tau_4 = (5, 2)$, $\tau_5 = (4, 1)$, $\tau_6 = (3, 2)$, $\tau_6\tau_5\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1\sigma = \text{Id}_8$.

Pour toute transposition τ , $\tau = \tau^{-1}$, donc :

$$\sigma = (\tau_6\tau_5\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1)^{-1} = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_6.$$

On peut dire que la démonstration du *théorème* est constructive puisqu'elle permet de calculer une décomposition de permutation en produit de transpositions.

L'exemple ci-contre le montre clairement.

L'application 3 ci-après donne l'algorithme de calcul, programmé sur une calculatrice TI.

6.2. Signature d'une permutation

6.2.1 Permutations paires et impaires

Dans le *théorème* précédent, nous avons obtenu l'existence d'une décomposition et un procédé de calcul mais pas d'unicité :

$$\text{Id}_5 = (1, 2)(1, 2) = (1, 2)(3, 4)(4, 5)(4, 5)(3, 4)(1, 2).$$

Théorème 15

Soit σ une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $(\tau_1, \dots, \tau_k), (\mu_1, \dots, \mu_p)$ des transpositions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $\sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_k = \mu_1\mu_2 \dots \mu_p$.

Les entiers k et p ont même parité.

Comme nous l'autorise le programme *PSI*, ce *théorème* est admis.

Il existe donc deux types de permutations :

- les **permutations paires**, dont les décompositions en un produit de transpositions comptent toujours un nombre pair de transpositions ;
- les **permutations impaires**, dont les décompositions en un produit de transpositions comptent toujours un nombre impair de transpositions.

Vous en trouverez la démonstration dans *H-Prépa, Algèbre et Géométrie, 1^{re} année, MPSI*.

Exemples

- L'identité est une permutation paire.
- Une transposition est une permutation impaire.
- Un k -cycle est une permutation paire si, et seulement si, k est impair.

En effet :

$$(a_1, \dots, a_k) = (a_1, a_k)(a_1, a_{k-1}) \dots (a_1, a_3)(a_1, a_2).$$

Un k -cycle peut se décomposer en un produit de $k - 1$ transpositions.

6.2.2 Signature d'une permutation

Soit σ et ν deux permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Si σ se décompose en un produit de k transpositions, et ν en un produit de p transpositions, alors $\sigma\nu$ se décompose en un produit de $k + p$ transpositions. Donc :

- le produit de deux permutations paires est une permutation paire ;
- le produit de deux permutations impaires est une permutation paire ;
- le produit d'une permutation paire et d'une permutation impaire est une permutation impaire.

Il s'agit là d'une « règle des signes » que nous allons traduire mathématiquement.

Pour toute permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on définit sa **signature** $\varepsilon(\sigma)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) &= +1 \text{ si } \sigma \text{ est une permutation paire,} \\ \varepsilon(\sigma) &= -1 \text{ si } \sigma \text{ est une permutation impaire.} \end{aligned}$$

Pour toute transposition τ de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\varepsilon(\tau) = -1$.

Pour tout k -cycle σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{k-1}$.

De la construction de la signature découle le *théorème* suivant.

Théorème 16

Soit un entier $n \geq 2$. L'application signature ($\varepsilon : \mathcal{S}_n \longrightarrow \{-1, 1\}$) est un morphisme de groupe surjectif de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$.

La méthode qui permet de décomposer explicitement une permutation en un produit de transpositions permet aussi de déterminer la signature de la permutation. C'est évident mais important !

Exemple

La permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ a été décomposée précédemment en un produit de six transpositions. Donc c'est une permutation paire.

► Pour s'entraîner : ex. 12 et 13.

Application 3

Algorithme de décomposition en produit de transpositions

Le programme suivant décompose une permutation p , entrée dans la machine avec la notation en deux lignes, en produit de transpositions et calcule la signature.

```

: transpo(p)
: Func
: Local j,n,li,dc,i,fini,mot,s
:
: ©Création d'une matrice dc à 2 colonnes pour
n lignes, chaque ligne de dc contiendra les
transpositions calculées successivement.
:
: colDim(p) → n : newMat(n,2) → dc
:
: ©Autres initialisations
:
: 1 → li : " " → mot : 1 → s
:
: ©La boucle principale
:
: For j,n,1,-1
:   If p[1,j] ≠ p[2,j] Then
:     p[1,j] → dc[li,1] : p[2,j] → dc[li,2]
:
: ©Maintenant, la ligne li de la matrice
dc contient la transposition  $n \circ li$  de la
décomposition que j'appelle t dans la suite
des commentaires.
:
: ©Construction de la chaine de caractères
exprimant le produit de transpositions écrit
en ligne comme une succession de parenthèses.
:
: mot & "(" & string(p[1,j]) &
      "& string(p[2,j]) & " " → mot
:
: ©Itération du calcul de la signature et
modification de la deuxième ligne de p. De

```

fait on doit modifier p en effectuant $t \cdot p \rightarrow p$ puis reprendre l'exécution de la boucle.

Étudier quel terme de la deuxième ligne de p est changé quand on effectue $t \cdot p$.

```

:
:   -1*s → s : li+1 → li : 1 → i : false → fini
:
:   While i < j and not fini
:     If p[2,i]=p[1,j] Then
:       p[2,j] → p[2,i] : true → fini
:     Else
:       i+1 → i
:     EndIf
:   EndWhile
: EndIf
: EndFor
:

```

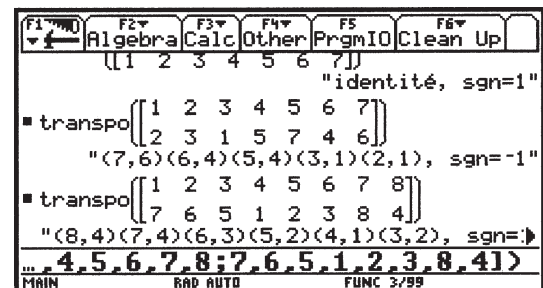
©Les calculs sont terminés.

©Affichage de la décomposition et de la signature avec traitement du cas particulier de l'identité.

```

:
: If mot=" " Then
:   "identité, sgn=" & string(s)
: Else
:   mot & " " sgn=" & string(s)
: EndIf
: EndFunc

```



FICHE MÉTHODE

● Pour prouver qu'une **famille infinie de vecteurs est libre**, il suffit de prouver que toute sous-famille finie de cette famille est libre.

● Pour prouver que la somme de sous-espaces $V_1 + \dots + V_n$ est directe, on peut :

- montrer que, si $0_E = x_1 + \dots + x_n$ avec x_i dans V_i , alors pour tout i , $x_i = 0_E$.
- prouver que la décomposition d'un élément x de V sous la forme $x = x_1 + \dots + x_n$, avec x_i dans V_i pour tout i , est unique.
- prouver que la somme $V_1 + \dots + V_{n-1}$ est directe et que $(V_1 + \dots + V_{n-1}) \cap V_n = \{0_E\}$.

● Lorsque les dimensions des sous-espaces vectoriels $V_1, \dots, V_n$ sont connues, pour prouver que la **somme de sous-espaces** $V_1 + \dots + V_n$ est directe, on peut montrer que :

$$\dim(V_1 + \dots + V_n) = \dim(V_1) + \dots + \dim(V_n).$$

● Lorsque $E = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$, pour construire une base de E adaptée à cette décomposition, il suffit de considérer, pour chaque i , une base B_i de V_i . La famille $B = (B_1, \dots, B_n)$ convient.

● Pour prouver que l'**endomorphisme** f de E est **diagonalisable**, il suffit de trouver une base B de E telle que la matrice de f relativement à cette base soit diagonale.

● Pour construire un **supplémentaire d'un hyperplan** H , il suffit de considérer un vecteur x qui n'est pas dans H . La droite $D = \text{Vect}(x) = \mathbb{K}x$ est un supplémentaire de H .

● Lorsque E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , pour prouver qu'une famille :

$$B = (e_1, \dots, e_n)$$

de n vecteurs de E et une famille $L = (f_1, \dots, f_n)$ de n formes linéaires sur E sont telles que B est une base de E et L sa base duale ou que L est une base de E^* et B sa base anté-duale, il suffit de prouver que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad f_i(e_j) = \delta_{i,j}.$$

● Pour décomposer une permutation en un produit de transpositions, on applique la méthode de la démonstration du **théorème de décomposition**.

● Pour calculer la signature d'une permutation, on la décompose en un produit de transpositions. La signature de σ est :

- $\varepsilon(\sigma) = +1$, si σ se décompose en un produit d'un nombre pair de transpositions ;
- $\varepsilon(\sigma) = -1$, si σ se décompose en un produit d'un nombre impair de transpositions.

Exercice résolu

Intersection d'hyperplans

ÉNONCÉ

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

- 1) Montrer que, si H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts de E , alors $H_1 \cap H_2$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 2$.

- 2)** On considère p hyperplans $(H_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$, noyaux de p formes linéaires indépendantes $(f_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$.

Montrer que l'intersection des H_i est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - p$.

- 3) Réciproquement, montrer qu'un sous-espace de dimension r d'un espace vectoriel de dimension n est l'intersection de $n - r$ hyperplans.

CONSEILS

SOLUTION

- 1) Notons f_1 et f_2 deux formes linéaires telles que $H_i = \text{Ker } f_i$.
D'après le *théorème* 10, f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes.
Définissons l'application h de E dans $\mathbb{K}^2$ en posant :

$$h(x) = (f_1(x), f_2(x)).$$

L'application h est linéaire, son noyau est $H_1 \cap H_2$ donc :

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim E - \dim(\operatorname{Im} h).$$

Le cas $\dim(\text{Im } h) = 0$ implique $f_1 = f_2 = 0$ ce qui est faux.

Le cas $\dim(\text{Im } h) = 1$ implique l'existence d'un couple non nul de scalaires, (α, β) , tel que :

$$\forall x \in E \quad h(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in \mathbb{K}(\alpha, \beta).$$

On en déduit que la famille de fonctions (f_1, f_2) est liée, ce qui est faux.

Nécessairement, $\dim(\text{Im } h) = 2$ et $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

- 2) Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ,
et pour (i, j) dans $\{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, n\}$ $f_i(e_j) = a_{i,j}$.

Le vecteur $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ est dans $\bigcap_{1 \leq i \leq p} H_i$ si, et seulement si, pour tout i :

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = 0.$$

C'est-à-dire si :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n = 0 \end{cases}$$

La matrice de ce système étant notée $A = (a_{i,j})$, on a $\text{rg } A = p$ donc :

$$\dim(\text{Ker } A) = \dim(\bigcap_{1 \leq i \leq p} H_i) = n - p.$$

Dans cette deuxième question, on adopte un point de vue matriciel.

Il s'agit de la base duale de la base B (PSI).

Les p lignes de A sont linéairement indépendantes, car les p formes linéaires f_i le sont.

3) Soit E un espace vectoriel de dimension n , V un sous-espace de dimension r et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à V . Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, f_i désigne la fonction i -ième coordonnée dans la base B :

$$f_i \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right) = \alpha_i.$$

$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$ est dans V si, et seulement si, $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$.

Cela se traduit par $V = \bigcap_{1+r \leq i \leq n} \text{Ker } f_i$.

Exercices

1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, A et B deux sous-espaces vectoriels de E , A' un supplémentaire de $A \cap B$ dans A et B' un supplémentaire de $A \cap B$ dans B .
Prouver que $A + B = (A \cap B) \oplus A' \oplus B'$.

2 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension quelconque et $(V_1, \dots, V_n, W_1, \dots, W_n)$ une famille de $2n$ sous-espaces vectoriels de E . On suppose que :

- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad V_i \subset W_i$.
- $V_1 + \dots + V_n = W_1 + \dots + W_n$.
- Ces deux sommes de sous-espaces sont directes.

Prouver que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad V_i = W_i.$$

3 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$, f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -\text{Id}_E$ et x un vecteur non nul de E .

1) Montrer que $f(x)$ n'est pas colinéaire à x .

En déduire qu'aucune droite de E n'est stable par f .

2) Montrer que le plan $\text{Vect}(x, f(x))$ est stable par f .

4 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad f(e_k) = \sum_{i=1}^n e_i.$$

1) Déterminer le rang de f .

2) Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

3) En déduire que f est diagonalisable.

5 Dans cet exercice, $H = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid f'(0) = 0\}$ et $K = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0\right\}$.

1) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et déterminer un supplémentaire de H dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

2) Mêmes questions avec K .

6 Soit un entier $n \geq 2$. La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée (E_{ij}) .

1) Soit ψ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe deux entiers distincts, i et j de $\llbracket 1, n \rrbracket$ avec $\psi(E_{ij}) \neq 0$.

Montrer que :

$$\exists \alpha \in \mathbb{K} \quad \psi(I_n + \alpha E_{ij}) = 0.$$

2) En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Les exercices 7 à 13 sont seulement au programme PSI.

7 Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, on pose :

$$f_0(P) = P(1), f_1(P) = P'(1) \quad \text{et} \quad f_2(P) = P''(1).$$

Prouver que les trois fonctions f_0, f_1, f_2 forment une base du dual de $\mathbb{R}_2[X]$.

8 Déterminer la base duale de la base $((X-a)^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

9
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^{-1} et τ^{-1} .

10 1) Soit i et j deux entiers distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Simplifier :

$$(1, i)(1, j)(1, i).$$

2) Soit $x_1, \dots, x_k, k$ éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Que dire de $\sigma = (x_1, x_k)(x_1, x_{k-1}) \dots (x_1, x_3)(x_1, x_2)$?

3) Montrer que tout k -cycle $(x_1, \dots, x_k)$ de $\mathcal{S}_n$ se décompose en un produit de transpositions de la forme $(1, j)$.

11 Soit (i, j) une transposition de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Montrer que, pour toute permutation σ de $\mathcal{S}_n$,

$$\sigma \circ (i, j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i), \sigma(j)).$$

12 1) Montrer que tout élément de $\mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme un produit de transpositions choisies dans l'ensemble $\{(1, 2); (1, 3); \dots; (1, n)\}$.

(On dit que le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions $(1, 2); (1, 3); \dots; (1, n)$.)

Indication : cet exercice est la suite de l'exercice 10.

2) Montrer que $\mathcal{S}_n$ est aussi engendré par la transposition $(1, 2)$ et le n -cycle $(1, 2, \dots, n)$.

$$\begin{aligned} 13 \quad \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}; \\ \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 2 & 1 & 7 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Décomposer σ et τ en produits de transpositions.

Déterminer les signatures de σ et τ .

14* Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de projecteurs de E .

On note $f = \sum_{i=1}^n f_i$.

1) Montrer que, si f est aussi un projecteur, alors :

$$\text{Im } f = \text{Im } f_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } f_n.$$

Indication : la trace d'un projecteur est égale à son rang.

2) Montrer que f est un projecteur si, et seulement si, pour tout couple d'entiers distincts (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a :

$$f_i \circ f_j = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

15* Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -\text{Id}_E$.

1) Montrer que f n'est pas diagonalisable.

2) Montrer que la dimension de E est paire et qu'il existe une base de E de la forme :

$$(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2), \dots, e_k, f(e_k)).$$

Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Indication : Cet exercice est la suite de l'exercice 3.

16 Soit α un réel non nul et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de l'exercice est de résoudre l'équation suivante dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\alpha X + \text{tr}(X)A = B \quad (1)$$

On remarquera que cette équation est une équation linéaire.

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est noté H .

1) Dans cette question, $\text{tr } A \neq 0$.

a) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(A) \oplus H$.

Dans la suite de cette question, la décomposition d'un élément X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée :

$$X = \lambda_X A + M_X, \text{ avec } \lambda_X \in \mathbb{R} \text{ et } M_X \in H.$$

b) Écrire les équations satisfaites par M_X et λ_X lorsque X est solution de (1).

c) Résoudre (1).

2) Résoudre (1) lorsque $\text{tr } A = 0$.

Les exercices qui suivent sont seulement au programme PSI.

17 Soit E un espace vectoriel de dimension n et A un sous-espace vectoriel de dimension k .

On note $A^\circ = \{f \in E^* \mid \forall x \in A, f(x) = 0\}$.

1) Prouver que A° est un sous-espace vectoriel de E^* .

2) Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à A et $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale.

Prouver que $A^\circ = \text{Vect}(e_{k+1}^*, \dots, e_n^*)$ et en déduire que $\dim A^\circ = \dim E - \dim A$.

18 Soit E un espace vectoriel de dimension n , $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de n formes linéaires sur E . On note :

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} f_1(e_1) & f_1(e_2) & \dots & f_1(e_n) \\ f_2(e_1) & f_2(e_2) & \dots & f_2(e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(e_1) & f_n(e_2) & \dots & f_n(e_n) \end{pmatrix}.$$

La matrice A est supposée inversible et sa matrice inverse est $A^{-1} = (b_{ij})$.

Pour tout j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, soit $v_j = \sum_{k=1}^n b_{kj} e_k$.

(Les composantes de v_j sont les coefficients de la j -ième colonne de A^{-1} .)

1) Calculer $f_i(v_j)$.

2) En déduire que $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E et que $(f_1, \dots, f_n)$ en est la base duale.

3) Soit (g_1, g_2, g_3) les formes linéaires sur $\mathbb{R}_2[X]$ définies par :

$$g_1(P) = \int_0^1 P(t) dt,$$

$$g_2(P) = \int_0^2 P(t) dt,$$

$$g_3(P) = \int_0^3 P(t) dt.$$

Prouver que (g_1, g_2, g_3) est une base du dual de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déterminer la base anté-duale.

19

Dans cet exercice, $E = \mathbb{K}[X]$.

Pour tout entier n et tout P de E , $f_n(P)$ désigne le coefficient de X^n du polynôme P .

1) Prouver que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

2) La forme linéaire f est définie en posant :

$$f\left(\sum_{k=0}^p \alpha_k X^k\right) = \sum_{k=0}^p \alpha_k.$$

Prouver que f n'est pas dans $\text{Vect}\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

20

1) Soit σ un élément de $\mathcal{S}_n$. Montrer l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $\sigma^k = \text{Id}_n$.

On définit l'ordre d'un élément σ de $\mathcal{S}_n$ comme le plus petit entier $k > 0$ tel que $\sigma^k = \text{Id}_n$.

2) Calculer l'ordre d'un k -cycle.

3) Calculer l'ordre des permutations σ , τ , μ et ν suivantes de $\mathcal{S}_7$:

$$\sigma = (1, 2)(2, 3)$$

$$\tau = (1, 2)(3, 4)$$

$$\mu = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7)$$

$$\nu = (1, 2, 3, 4, 5)(4, 5, 7).$$

21

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour toute permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'endomorphisme f_σ de E est défini en posant :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}.$$

1) La matrice de f_σ relativement à la base B sera notée M_σ .

Exprimer M_σ à l'aide des matrices élémentaires E_{ij} et prouver que $M_\sigma^{-1} = {}^t M_\sigma$.

2) Prouver que, si σ et τ sont deux permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors $f_{\sigma\tau} = f_\sigma \circ f_\tau$.

3) Montrer que l'application $(\sigma \mapsto f_\sigma)$ définit un morphisme de groupe injectif de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{GL}(E)$.

Déterminants

3

Introduction

Les déterminants apparaissent au XVII^e siècle pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

Le mot a été introduit par Gauss en 1801 et sa notation actuelle (barres verticales) est due à Cayley (1841). C'est cinquante ans plus tard, dans une note publiée en 1903, que Weierstrass donne une définition axiomatique des déterminants.

Les déterminants ont été présentés en Première année en dimensions 2 et 3.

Le but de ce chapitre est de généraliser cette notion à toute dimension, d'en étudier les principales propriétés et de les mettre en pratique.

O B J E C T I F S

- Formes n -linéaires alternées ; définition du déterminant d'une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n .
- Construction du déterminant (PSI).
- Orientation d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.
- Calcul de déterminants par blocs
- Développement du déterminant selon une ligne ou une colonne.
- Comatrice et formule d'inversion (PSI).
- Matrices extraites et mineurs.
- Déterminants de Vandermonde.
- Quelques applications géométriques du déterminant.

Déterminants de n vecteurs en dimension n

Dans ce paragraphe, E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, n un élément de $\mathbb{N}^*$.

1.1. Applications n -linéaires, formes n -linéaires

Une **application** f de E^n dans $F : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ est **n -linéaire** si elle est linéaire par rapport à chaque composante :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \forall (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E^{n-1} \\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall (x, y) \in E^2 \\ f(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha x + \beta y, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ = \alpha f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) + \beta f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Lorsque $n = 2$, (respectivement $n = 3$), on parle d'**application bilinéaire** (respectivement **trilinéaire**).

Exemples

- Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est une application bilinéaire de E^2 dans $\mathbb{R}$.
- Si E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, le produit vectoriel sur E est une application bilinéaire de E^2 dans E et le produit mixte une application trilinéaire de E^3 dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble des applications n -linéaires de E^n dans F est noté $\mathcal{L}_n(E, F)$.

C'est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications de E^n dans F .

Une **forme n -linéaire** sur E est une application n -linéaire de E^n dans $\mathbb{K}$.

1.2. Formes n -linéaires alternées

Une **forme n -linéaire** f sur E est **alternée** lorsque l'image par f d'un n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ est nulle dès que deux composantes de ce n -uplet sont égales :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$$

$$(\exists (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad i \neq j \text{ et } x_i = x_j) \Rightarrow (f(x_1, \dots, x_n) = 0).$$

L'ensemble des formes n -linéaires alternées sur E , noté $\mathcal{A}_n(E)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$.

Théorème 1

Soit f une forme n -linéaire alternée sur E , $(x_1, \dots, x_n)$ un n -uplet de E^n , i et j deux éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$. En permutant les composantes x_i et x_j , on obtient :

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n).$$



Carl Friedrich Gauss (1777-1855) mathématicien allemand est surnommé « le prince des mathématiciens », son œuvre est immense. Il aborde les mathématiques avec un point de vue résolument moderne. Il déclare : « Le mathématicien fait complètement abstraction de la nature des objets et de la signification de leurs relations ; il n'a qu'à énumérer les relations et les comparer entre elles. » (Werke, tome 2, page 176).

⚠ Pour $n \geq 2$, une application n -linéaire non nulle de E^n dans F n'est pas une application linéaire de E^n dans F .

Réciproquement, si f est une forme n -linéaire sur E telle que, pour tout n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ de E^n :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

alors f est alternée.

En effet, si pour $i \neq j$ on a $x_i = x_j$, alors :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ = 0. \end{aligned}$$

Démonstration

Puisque f est alternée, $f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) = 0$.

En développant, on trouve :

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0.$$

Application 1

Les formes n -linéaires alternées en dimension 2 et 3

1) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2, $B = (e_1, e_2)$ une base de E et f une forme bilinéaire alternée sur E .

a) Exprimer $f(x, y)$ en fonction des composantes de x et y dans la base B .

b) Prouver que l'ensemble $\mathcal{A}_2(E)$ des formes bilinéaires alternées sur E est un espace vectoriel de dimension 1.

2) Effectuer le même travail pour les formes trilinéaires alternées sur un espace vectoriel E de dimension 3.

1 a) Soit deux vecteurs de E :

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 \quad \text{et} \quad y = b_1 e_1 + b_2 e_2.$$

Puisque f est bilinéaire alternée :

$$f(x, y) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) f(e_1, e_2).$$

b) Le cours de Première année sur le déterminant en dimension 2 et le calcul de la question a) prouvent

que :

$$\mathcal{A}_2(E) = \mathbb{K} \text{Det}_B.$$

2) Ici, $\dim E = 3$ et f est trilinéaire alternée. Notons $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E ,

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

$$y = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

$$z = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$$

trois vecteurs de E .

Puisque f est trilinéaire alternée,

$$f(x, y, z) = (a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1) f(e_1, e_2, e_3).$$

Le cours de Première année et la règle de Sarrus prouvent que :

$$f(x, y, z) = \text{Det}_B(x, y, z) f(e_1, e_2, e_3).$$

Donc :

$$\mathcal{A}_3(E) = \mathbb{K} \text{Det}_B.$$

1.3. Le déterminant, relativement à une base, de n vecteurs d'un espace de dimension n

Le théorème 2 généralise le résultat vu en dimension 2 et 3 dans l'application 1.

Théorème 2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

L'ensemble $\mathcal{A}_n(E)$ des formes n -linéaires alternées sur E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$ de dimension 1.

La règle de Sarrus, rappelée dans l'application précédente, ne se généralise pas pour $n > 3$, malgré les nombreuses tentatives que l'on voit fleurir dans les copies.

En section PC, nous admettons ce théorème.

En section PSI, la connaissance du groupe symétrique permet de calculer effectivement une base de $\mathcal{A}_n(E)$.

Souhaitez-vous :

- voir d'abord la démonstration du théorème 2, allez au paragraphe 2 ;
- découvrir les corollaires du théorème 2 avant sa démonstration, passez à la ligne suivante.

Corollaire 2.1

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Il existe une unique forme n -linéaire alternée sur E prenant la valeur 1 en $(e_1, \dots, e_n)$. Elle est notée Det_B et c'est une base de l'espace $\mathcal{A}_n(E)$ des formes n -linéaires alternées sur E .

Démonstration

• D'après le *théorème 2*, il existe une forme n -linéaire alternée sur E non nulle. Notons-la f et montrons que $f(e_1, \dots, e_n) \neq 0$.

Par l'absurde, supposons que $f(e_1, \dots, e_n) = 0$.

Pour tout $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$ de E , et tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$f(e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_n) = 0.$$

La n -linéarité permet d'en déduire que f est la fonction nulle. C'est une contradiction.

Le reste de la démonstration en découle.

Pour un n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E , $\text{Det}_B(x_1, \dots, x_n)$ est appelé le **déterminant dans la base B de la famille de vecteurs** $(x_1, \dots, x_n)$.

Corollaire 2.2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et f une forme n -linéaire alternée sur E .

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad f(x_1, \dots, x_n) = \text{Det}_B(x_1, \dots, x_n) f(e_1, \dots, e_n).$$

Démonstration

Det_B est une base de $\mathcal{A}_n(E)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \text{Det}_B$.

Alors :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \text{Det}_B(x_1, \dots, x_n).$$

En particulier pour $(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n)$: $f(e_1, \dots, e_n) = \lambda \text{Det}_B(e_1, \dots, e_n)$.

Or $\text{Det}_B(e_1, \dots, e_n) = 1$, donc $\lambda = f(e_1, \dots, e_n)$.

► Pour s'entraîner : ex. 1.

Rapport Centrale, 1997

« Le calcul des déterminants est souvent décevant, le caractère multilinéaire insuffisamment exploité. »

1.4. Le déterminant d'une famille triangulaire de vecteurs

Dans ce paragraphe, $\dim(E) = n$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

On dit qu'une **famille** de n vecteurs de E , $(x_1, \dots, x_n)$ est **triangulaire relativement à B** si :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_j \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_j).$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En notant $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$, cela revient à dire que $a_{i,j} = 0$ si $i > j$.

La matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est triangulaire supérieure.

Corollaire 2.3

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs, triangulaire relativement à B .

On note, pour tout j : $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$. Le déterminant de cette famille dans la base B est :

$$\text{Det}_B(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

► Pour s'entraîner : ex. 2.

2 Groupe symétrique et définition du déterminant (programme PSI)

Le but de ce paragraphe est la construction explicite de la fonction Det_B .

2.1. Permutation des $(x_1, \dots, x_n)$

Théorème 3

Soit f une forme n -linéaire alternée sur un espace vectoriel E , σ une permutation de $[[1, n]]$ et $\varepsilon(\sigma)$ sa signature. Alors :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Démonstration

La formule $f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_n)$

et le théorème de décomposition d'une permutation en produit de transpositions permettent de rédiger la démonstration.

2.2. Formes n linéaires alternées en dimension n

Théorème 4

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et f une forme n -linéaire alternée sur E .

Pour tout n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E où $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$, on a :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} \right) f(e_1, \dots, e_n).$$

Démonstration

La n -linéarité de f permet d'écrire :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n,n} e_{i_n}\right) \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \llbracket 1, n \rrbracket^n} \left(\prod_{j=1}^n a_{i_j, j} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \right). \end{aligned}$$

Dès que deux des vecteurs du n -uplet $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ sont égaux :

$$f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0.$$

Donc, la somme sur les n^n éléments $(i_1, \dots, i_n)$ de $\llbracket 1, n \rrbracket^n$ est réduite aux n -uplets d'éléments distincts deux à deux. De plus, à chacun de ces n -uplets est associée une unique permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $(i_1, \dots, i_n) = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$.

De ceci découle la formule :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j} \right) f(e_1, \dots, e_n).$$

2.3. Le déterminant

Avec les notations utilisées dans le *théorème 4*, le déterminant dans la base B de la famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ est défini par la formule :

$$\text{Det}_B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j}.$$

Pour conclure, il reste à prouver que la fonction Det_B ainsi obtenue a les propriétés suivantes :

- Det_B est n -linéaire ;
- $\text{Det}_B(e_1, \dots, e_n) = 1$;
- Det_B est alternée.

Lorsque cela sera fait, le *théorème 2*, que nous avons admis au paragraphe 1, sera démontré et la fonction Det_B que nous venons de définir sera la fonction dont l'existence et l'unicité sont annoncées au *corollaire 2.1*.

Nous vous laissons prouver les deux premiers points.

Pour le troisième, soit $(x_1, \dots, x_n)$ un n -uplet de vecteurs tel que $x_i = x_k$ pour deux indices distincts i et k . On note τ la transposition (i, k) .

Soit S_n^+ l'ensemble des permutations paires de $\llbracket 1, n \rrbracket$, S_n^- celui des permutations impaires. Il est aisé de prouver que :

$$\text{Det}_B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j} = \sum_{\sigma \in S_n^+} \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j} - \sum_{\sigma \in S_n^-} \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j}.$$

De l'égalité $\varepsilon(\sigma\tau) = -\varepsilon(\sigma)$, on déduit :

$$S_n^- = S_n^+ \tau \quad \text{et} \quad \sum_{\sigma \in S_n^-} \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j} = \sum_{\sigma \in S_n^+} \prod_{j=1}^n a_{\sigma\tau(j), j}.$$

Par définition, $\tau = (i, k)$. Ceci permet de prouver que :

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n^+ \quad \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} = \prod_{j=1}^n a_{\sigma\tau(j),j}$$

et de conclure que :

$$\text{Det}_B(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Application 2

Déterminant d'une famille triangulaire de vecteurs (version PSI)

Dans l'espace vectoriel E muni de la base $B = (e_1, \dots, e_n)$, on considère une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs, triangulaire par rapport à la base $B : x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ avec $a_{i,j} = 0$ lorsque $i > j$.

Montrer que $\text{Det}_B(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.

$$\text{Det}_B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}.$$

Étant donné σ dans $\mathcal{S}_n$, s'il existe j tel que $\sigma(j) > j$, alors $\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} = 0$.

Donc, dans la somme $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}$, on peut ne considérer que les permutations σ telles que :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sigma(j) \leq j.$$

Seul Id_n vérifie cette propriété, d'où le résultat.

3 Bases et déterminants

3.1. Caractérisation des bases de E

Dans ce paragraphe, on note E un espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Lemme

Soit $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base de E . Alors :

$$\text{Det}_B(B') \text{Det}_{B'}(B) = 1.$$

Démonstration

La fonction $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \text{Det}_{B'}(x_1, \dots, x_n)$ est une forme n -linéaire alternée sur E . D'après le corollaire 2.2, on a :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad \text{Det}_{B'}(x_1, \dots, x_n) = \text{Det}_B(x_1, \dots, x_n) \text{Det}_{B'}(e_1, \dots, e_n).$$

En particulier, pour $(x_1, \dots, x_n) = B' = (e'_1, \dots, e'_n)$, on trouve :

$$\text{Det}_B(B') \text{Det}_{B'}(B) = 1.$$

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Il est aussi possible [...] de faire appel à une formule de changement de base pour les déterminants ; mais encore fallait-il préciser avec soin les bases introduites. »

Théorème 5

La famille de n vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si, et seulement si :

$$\text{Det}_B(x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

Démonstration

- Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, c'est une base de E . Notons-la B' .

Le lemme permet de conclure que :

$$\text{Det}_B(x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

- Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, il existe j tel que $x_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \alpha_i x_i$ et :

$$\text{Det}_B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \alpha_i \text{Det}_B(x_1, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n) = 0.$$

► Pour s'entraîner : ex. 3.

3.2. Orientation d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

Soit B et B' deux bases du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .

D'après le lemme, $\text{Det}_B(B')$ et $\text{Det}_{B'}(B)$ sont deux réels de même signe.

Les deux bases B et B' ont **même orientation** lorsque :

$$\text{Det}_B(B') > 0$$

Dans la situation contraire, les bases B et B' sont d'**orientations opposées**.

Choisir une orientation pour le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E , c'est choisir une base de référence, par exemple B .

On dit alors que la base B' est une **base directe** de E lorsque :

$$\text{Det}_B(B') > 0.$$

Lorsque $\text{Det}_B(B') < 0$, on dira que B' est une **base indirecte**.

Il n'y a que deux orientations possibles pour un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel car un réel non nul est soit < 0 , soit > 0 .

Dans le plan ou dans l'espace, c'est l'orientation usuelle de la physique qui définit les bases directes, mais il faut savoir que ce choix est arbitraire.

Exemple : Permutation des éléments d'une base et orientation (programme PSI)

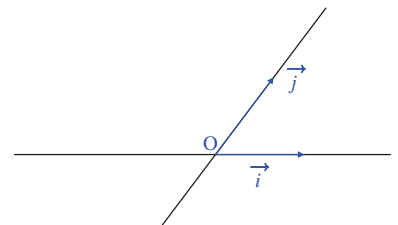
Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et ν une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

D'après le théorème 3 :

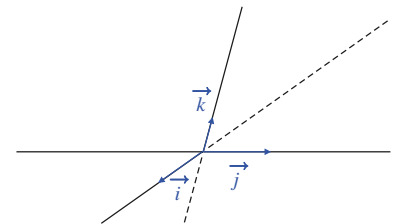
$$\text{Det}_B(e_{\nu(1)}, \dots, e_{\nu(n)}) = \varepsilon(\nu) \quad \text{Det}_B(e_1, \dots, e_n) = \varepsilon(\nu).$$

Donc, les bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e_{\nu(1)}, \dots, e_{\nu(n)})$ ont même orientation si, et seulement si, ν est une permutation paire.

► Pour s'entraîner : ex. 4.



Doc. 1. Orientation usuelle du plan : $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base directe du plan, $(\vec{j}, \vec{i})$ une base indirecte.



Doc. 2. Orientation usuelle de l'espace : $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base directe de l'espace, $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ et $(\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ aussi. Les bases $(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$, $(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ et $(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ sont indirectes.

4 Déterminants d'un endomorphisme et d'une matrice carrée

Dans ce paragraphe, E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

4.1. Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 6

Soit u un endomorphisme de E .

- L'application g de E^n dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$g(v_1, \dots, v_n) = \text{Det}_B(u(v_1), \dots, u(v_n))$$

est n -linéaire alternée.

- Si $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une autre base de E , alors :

$$\text{Det}_B(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \text{Det}_{B'}(u(e'_1), \dots, u(e'_n)).$$

Démonstration

- La linéarité de u et les propriétés de Det_B suffisent à prouver le premier point.
- $\forall (v_1, \dots, v_n) \in E^n \quad \text{Det}_{B'}(v_1, \dots, v_n) = \text{Det}_B(v_1, \dots, v_n) \text{Det}_{B'}(e_1, \dots, e_n)$.

En particulier :

$$\begin{aligned} \text{Det}_{B'}(u(e'_1), \dots, u(e'_n)) &= \text{Det}_B(u(e'_1), \dots, u(e'_n)) \text{Det}_{B'}(e_1, \dots, e_n). \\ &= g(e'_1, \dots, e'_n) \text{Det}_{B'}(e_1, \dots, e_n). \end{aligned}$$

Mais g est aussi n -linéaire alternée, donc :

$$g(e'_1, \dots, e'_n) = \text{Det}_B(e'_1, \dots, e'_n) g(e_1, \dots, e_n)$$

Le lemme, page 68, permet de conclure.

Ceci prouve que $\text{Det}_B(u(e_1), \dots, u(e_n))$ ne dépend pas de la base B , et permet de définir le **déterminant de l'endomorphisme** u par la formule :

$$\text{Det } u = \text{Det}_B(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

Le théorème qui précède permet d'écrire :

$$\forall (v_1, \dots, v_n) \in E^n \quad \text{Det}_B(u(v_1), \dots, u(v_n)) = \text{Det } u \text{Det}_B(v_1, \dots, v_n).$$

Exemple

Si u est l'homothétie de E de rapport λ , alors :

$$\text{Det } u = \text{Det}_B(\lambda e_1, \dots, \lambda e_n) = \lambda^n \text{Det}_B(e_1, \dots, e_n) = \lambda^n.$$

Théorème 7

Soit u et v deux endomorphismes de E .

- $\text{Det}(uv) = \text{Det}(u) \text{Det}(v)$.
- u est inversible si, et seulement si, $\text{Det}(u) \neq 0$. Dans ce cas :

$$\text{Det}(u^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(u)}.$$

On peut dire que l'application déterminant induit un morphisme de groupes entre le groupe $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ des automorphismes de E et le groupe multiplicatif $(\mathbb{K}^*, \times)$.

Démonstration

- $\text{Det}(uv) = \text{Det}_B(uv(e_1), \dots, uv(e_n)) = \text{Det}(u)\text{Det}_B(v(e_1), \dots, v(e_n)) = \text{Det}(u)\text{Det}(v)$.
- Le premier point et la formule $\text{Det}(uu^{-1}) = \text{Det}(\text{Id}_E) = 1$ permet de prouver le second point.

4.2. Déterminant d'une matrice carrée

Dans ce paragraphe, les éléments de $\mathbb{K}^n$ sont considérés comme des vecteurs colonnes.

Soit $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Le **déterminant de la matrice M** est le déterminant de la famille des vecteurs colonnes de M , relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Il est noté :

$$\text{Det}M = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Le programme de *PSI* permet d'affirmer que :

$$\text{Det}(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}.$$

C'est aussi le déterminant de l'endomorphisme canoniquement associé à M .

Enfin, soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , B une base de E et f l'endomorphisme de E tel que $M_B(f) = M$, alors $\text{Det}(M) = \text{Det}(f)$.

Exemple

Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est le produit des termes de sa diagonale (cf. § 1.4).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Vous vérifierez que ce résultat est aussi vrai pour les matrices triangulaires inférieures.

Du *théorème 7*, nous déduisons :

Corollaire 7.1

Soit M et M' deux matrices carrées d'ordre n .

- $\text{Det}(MM') = \text{Det}(M)\text{Det}(M')$.

Rapport X, 2001

« Les correcteurs ont été implacables pour les candidats simplifiant par $\text{Det}J$ sans vérifier que J était inversible. »

 Le déterminant n'a aucune propriété relative à l'addition.

Exemples

- $\text{Det}(\text{I}_n + \text{I}_n) = 2^n$
et $\text{Det}(\text{I}_n) + \text{Det}(\text{I}_n) = 2$.

- $\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$

- $\text{Det} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1.$

- M est inversible si, et seulement si, $\text{Det}(M) \neq 0$ et dans ce cas :

$$\text{Det}(M^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(M)}.$$

- Si P est une matrice inversible, alors $\text{Det}(PM P^{-1}) = \text{Det}(M)$.

Les propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs permettent d'énoncer le *théorème* suivant que nous vous laissons démontrer.

Théorème 8

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si deux colonnes de M sont égales, alors $\text{Det}M = 0$.
- $\text{Det}M$ dépend linéairement de chaque colonne de M .
- Si M' est une matrice obtenue à partir de M en ajoutant à une colonne de M une combinaison linéaire des autres colonnes, alors :

$$\text{Det}M = \text{Det}M'.$$

- $\text{Det}M = 0$ si, et seulement si, les vecteurs colonnes de M forment une famille liée :

$$\text{Det}M = 0 \Leftrightarrow \text{rg } M < n.$$

- Si M'' est une matrice obtenue à partir de M en permutant deux colonnes, alors :

$$\text{Det}M = -\text{Det}M''.$$

Supplément programme PSI

Soit $C_1, \dots, C_n$ les n colonnes de la matrice M , σ une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$, N la matrice obtenue en permutant les colonnes de M par σ :

$$N = (C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)}).$$

Alors :

$$\text{Det}N = \text{Det}(C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \text{Det}(C_1, \dots, C_n) = \varepsilon(\sigma) \text{Det}M.$$

Théorème 9

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{Det}(M) = \text{Det}({}^t M).$$

Ce *théorème* est admis en PC.

Démonstration

Notons $M = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et ${}^t M = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Pour tout couple d'indices (i, j) , $b_{i,j} = a_{j,i}$. Donc :

$$\text{Det}({}^t M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n b_{\sigma(j),j} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j,\sigma(j)}.$$

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Beaucoup trop de candidats calculent le déterminant d'une somme de deux matrices comme la somme des déterminants et dans un nombre non négligeable de copies, on trouve l'erreur du type $\text{Det}(-m) = -\text{Det}(m)$. »

Rapport CCP, 1997

« Les candidats sont généralement assez maladroits dans le calcul des déterminants, en particulier dans l'utilisation des opérations sur les lignes et les colonnes en vue de sa simplification, sans compter les généralisations abusives du calcul par blocs et de la règle de Sarrus »

Or, $\prod_{j=1}^n a_{j,\sigma(j)} = \prod_{k=1}^n a_{\sigma^{-1}(k),k}$ et l'application $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de $\mathcal{S}_n$.

Ceci permet de terminer la démonstration.

Les propriétés énoncées sur les colonnes sont vérifiées par les lignes.

Corollaire 9.1

Soit N une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si deux lignes de N sont égales, alors $\text{Det}N = 0$.
- $\text{Det}N$ dépend linéairement de chaque ligne de N .
- Si N' est une matrice obtenue à partir de N en ajoutant à une ligne de N une combinaison linéaire des autres lignes, alors :

$$\text{Det}N = \text{Det}N'.$$

- $\text{Det}M = 0$ si, et seulement si, les vecteurs lignes de N forment une famille liée.
- Si N'' est une matrice obtenue à partir de M en permutant deux lignes, alors :

$$\text{Det}N = -\text{Det}N''.$$

► Pour s'entraîner : ex. 5 et 6.

Application 3

Calcul de
$$\begin{vmatrix} b & a & \dots & \dots & a \\ a & b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & \dots & a & b \end{vmatrix}$$

Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $a_{i,j} = a$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} = b$. Calculer $\text{Det}A$.

Notons $C_1, \dots, C_n$ les n colonnes de A .

En remplaçant C_1 par $C_1 + C_2 + \dots + C_n$, on ne change pas le déterminant, donc :

$$\text{Det}A = (b + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & \dots & a \\ 1 & b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 1 & a & \dots & a & b \end{vmatrix}.$$

Notons $C'_1, \dots, C'_n$ les n colonnes du déterminant ci-dessus.

$$\text{Det}(C'_1, \dots, C'_n) = \text{Det}(C'_1, C'_2 - aC'_1, \dots, C'_n - aC'_1)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & b-a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & b-a \end{vmatrix} \\ = (b-a)^{n-1}.$$

Finalement :

$$\text{Det}(A) = (b + (n-1)a)(b-a)^{n-1}.$$

4.3. Application à la résolution d'un système de Cramer

Dans ce paragraphe, les éléments de $\mathbb{K}^n$ sont notés comme des vecteurs colonnes.

Soit (S) un système linéaire de n équations à n inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice du système et :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Le vecteur B est le second membre du système (S) qui s'écrit $AX = B$.

Le système (S) est un **système de Cramer** lorsque A est inversible.

Dans ce cas, il a une unique solution donnée par la formule $X = A^{-1}B$.

La suite du paragraphe, montre comment les déterminants permettent de résoudre de tels systèmes, au moins du point de vue théorique. D'un point de vue pratique, la résolution d'un système de n équations à n inconnues par la méthode de Gauss nécessite moins d'opérations que par la méthode de Cramer dès que $n \geq 4$.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La j -ième colonne de A est notée $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.

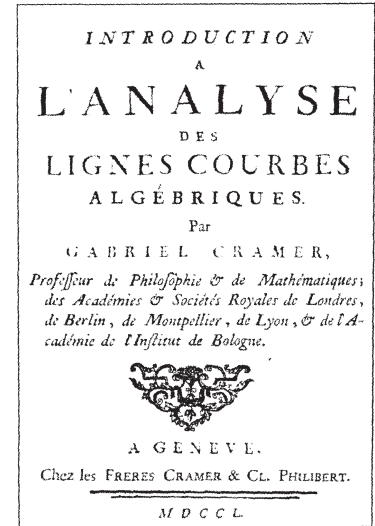
Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{K}^n$, on a : $AX = \sum_{j=1}^n x_j C_j$.

Si X est solution de (S), alors $B = \sum_{j=1}^n x_j C_j$.

Soit i un entier de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et M_i la matrice obtenue en remplaçant la i -ième colonne de A par le second membre B : $M_i = (C_1, \dots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n)$.

La multinéarité par rapport aux colonnes permet d'écrire :

$$\text{Det}(M_i) = \sum_{j=1}^n x_j \text{Det}(C_1, \dots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \dots, C_n) = x_i \text{Det}(A).$$



Gabriel Cramer (1704-1752) mathématicien suisse. Il a publié Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques dans lequel apparaissent ses formules de résolution des systèmes linéaires.

Nous commettons ici l'abus consistant à confondre la j -ième colonne de A et le vecteur colonne correspondant.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Concernant les systèmes linéaires, la méthode du pivot est sous-utilisée, seuls les meilleurs savent choisir avec discernement entre opérations sur les lignes et opérations sur les colonnes. La discussion d'un système dépendant d'un ou plusieurs paramètres est hors de portée de beaucoup de candidats. »

On déduit le *théorème* suivant de ce qui précède :

Théorème 10

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et B un vecteur de $\mathbb{K}^n$.

Les colonnes de la matrice A sont notées $(C_1, \dots, C_n)$ et (S) désigne le système linéaire $AX = B$.

Si le système (S) est de Cramer, alors la i -ième composante x_i de la solution du système vaut :

$$x_i = \frac{\text{Det}(C_1, \dots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n)}{\text{Det}(A)}.$$

Les formules obtenues sont les **formules de Cramer**.

En termes de calcul numérique, les formules de Cramer sont intéressantes pour $n = 2$ ou 3 . Vous les avez déjà étudiées en Première année.

Par exemple, si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$, la solution (x, y, z) du système :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = u \\ a_2x + b_2y + c_2z = v \\ a_3x + b_3y + c_3z = w \end{cases}$$

est donnée par les formules :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & b_1 & c_1 \\ v & b_2 & c_2 \\ w & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & u & c_1 \\ a_2 & v & c_2 \\ a_3 & w & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & u \\ a_2 & b_2 & v \\ a_3 & b_3 & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Si $\text{Det}(A) = 0$ et si le système (S) admet une solution, alors, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$

$$\text{Det}(C_1, \dots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n) = x_i \text{Det}(A) = 0.$$

A contrario, si $\text{Det}(A) = 0$ et s'il existe i tel que :

$$\text{Det}(C_1, \dots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n) \neq 0,$$

alors le système (S) ne peut pas avoir de solution.

Il s'agit d'un système incompatible.

Résoudre un système de n équations à n inconnues par les formules de Cramer, c'est calculer $n + 1$ déterminants d'ordre n .

Ceci est trop coûteux en temps de calcul.

Dès que $n \geq 4$, la méthode de Gauss est plus efficace.

► Pour s'entraîner : ex. 7.

Application 4

Étude d'un système linéaire à l'aide des formules de Cramer

Étudier le système de trois équations à trois inconnues suivant en fonction des valeurs du paramètre m .

$$(S_m) \begin{cases} x - y + mz = 1 \\ mx + y - z = 2 \\ 2x - 3y + z = m \end{cases}.$$

• La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

et $\text{Det}(A) = -3m^2 - m$.

• Si $m \neq 0$ et $m \neq -\frac{1}{3}$, le système est de Cramer.

Sa solution (x, y, z) est donnée par :

$$x = \frac{5+m}{1+3m}; \quad y = \frac{4-m^2}{1+3m}; \quad z = \frac{2-m}{1+3m}$$

• Lorsque $m = 0$, le système (S_0) équivaut à :

$$\begin{cases} x = z + 3 \\ y = z + 2 \end{cases}$$

Les solutions de (S_0) sont de la forme :

$$(x, y, z) = (3, 2, 0) + z(1, 1, 1).$$

• Lorsque $m = -\frac{1}{3}$, le système n'a pas de solution.

5 Développement d'un déterminant —

5.1. Calcul d'un déterminant par blocs

Théorème 11

Soit n, r et p trois entiers tels que $n = r + p$.

Soit B un élément de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, C un élément de $\mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ et D un élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On définit la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en posant :

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Alors $\text{Det}(A) = \text{Det}(B) \text{Det}(D)$

Rapport CCP, 2001

« Le calcul des déterminants, en particulier à paramètres, semble une épreuve de force et nombre de candidats n'ont pas le courage de conclure. »

Démonstration

On a $A = \begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$.

Il reste à prouver que $\text{Det} \begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \text{Det}(D)$ et $\text{Det} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \text{Det}(B)$.

• $\text{Det} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \text{Det}(B)$

Soit E un espace vectoriel de dimension n , $B_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ,

$$V = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) \quad \text{et} \quad B_V = (e_1, \dots, e_r).$$

Enfin, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq p}}$ et, pour $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $v_j = \sum_{i=1}^r b_{i,j} e_i$.

Par définition des déterminants, $\text{Det} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \text{Det}_{B_E}(v_1, \dots, v_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$.

Soit f l'application de V^r dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$f(x_1, \dots, x_r) = \text{Det}_{B_E}(x_1, \dots, x_r, e_{r+1}, \dots, e_n).$$

f est une forme r -linéaire alternée sur V et B_V est une base de V , donc :

$$\forall (x_1, \dots, x_r) \in V^r \quad f(x_1, \dots, x_r) = \text{Det}_{B_V}(x_1, \dots, x_r) f(e_1, \dots, e_r).$$

En particulier $\text{Det} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = f(v_1, \dots, v_r) = \text{Det}_{B_V}(v_1, \dots, v_r) f(e_1, \dots, e_r)$.

Or, $f(e_1, \dots, e_r) = \text{Det}_{B_E}(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n) = 1$ et $\text{Det}_{B_V}(v_1, \dots, v_r) = \text{Det}(B)$.

Donc :

$$\text{Det} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \text{Det}(B).$$

- $\text{Det} \begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \text{Det}(D)$

Par des opérations sur les colonnes, on prouve que :

$$\text{Det} \begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \text{Det} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Puis :

$$\text{Det} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \text{Det}(D).$$

Application 5

Déterminant d'une symétrie et de la transposition

1) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, V et W deux sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$E = V \oplus W.$$

Calculer le déterminant de la symétrie par rapport à V parallèlement à W , notée s .

2) Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et T l'endomorphisme de E défini par $T(M) = {}^tM$. Calculer $\text{Det}(T)$.

1) La matrice de s relativement à une base B adaptée à la décomposition $E = V \oplus W$ est :

$$M_B(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix},$$

avec $r = \dim(V)$. Donc $\text{Det } s = (-1)^{\dim W}$.

2) La transposition est la symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par rapport au sous-espace des matrices symétriques, parallèlement à celui des matrices antisymétriques.

Donc :

$$\text{Det}(T) = (-1)^{n(n-1)/2}.$$

5.2. Développement du déterminant selon une ligne ou une colonne

Dans ce paragraphe, les éléments de $\mathbb{K}^n$ sont des vecteurs colonnes et E_i dé-

signe le i -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Ainsi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i E_i$.

Rapport Mines-ponts, 2000

« Certains écrivent :

$$\text{Det } nI = n \text{Det } I. »$$

5.2.1 Principe du développement par rapport à une colonne

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes.

La linéarité du déterminant par rapport à une colonne entraîne :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

$$\begin{aligned} \text{Det} \left(C_1, \dots, C_{j-1}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, C_{j+1}, \dots, C_n \right) \\ = \sum_{i=1}^n x_i \text{Det}(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n) \end{aligned}$$

En utilisant $X = C_j$, on obtient :

$$\text{Det}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \text{Det}(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n).$$

On note $\text{Det}(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n) = c_{i,j}$.

5.2.2 Calcul des coefficients $c_{i,j}$

Soit une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et (i, j) un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$.

La matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue, à partir de A , en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne est notée $A_{i,j}$.

Le **cofacteur** de l'élément $a_{i,j}$ de la matrice A est le scalaire $(-1)^{i+j} \text{Det}(A_{i,j})$.

Théorème 12

Soit une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, (i, j) un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$.

- Le cofacteur de l'élément $a_{i,j}$ de la matrice A est :

$$(-1)^{i+j} \text{Det}(A_{i,j}) = \text{Det}(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n).$$

- Pour j fixé dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, la formule suivante fournit le développement du déterminant de A par rapport à la j -ième colonne :

$$\text{Det}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+j} \text{Det}(A_{i,j}).$$

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Doc. 3. Pour obtenir $A_{i,j}$, on barre la i -ième ligne et la j -ième colonne de A .

- Pour i fixé dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, le développement du déterminant de A par rapport à la i^{e} ligne est donné par :

$$\text{Det}(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+j} \text{Det}(A_{i,j}).$$

Démonstration

- *Permutation des colonnes*

$$c_{i,j} = \text{Det}(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & 1 & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Le but des permutations qui suivent est d'amener le coefficient 1 qui se trouve en (i, j) à la place $(1, 1)$.

Permuter la j -ième et la $(j-1)$ -ième colonne de ce déterminant change son signe :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & 1 & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & 1 & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

La répétition de $j-1$ opérations de permutations de deux colonnes successives permet d'amener la j -ième colonne du déterminant initial en première position et d'obtenir :

$$c_{i,j} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- *Permutation de lignes*

La répétition de $i-1$ permutations de deux lignes successives permet d'amener la i -ième ligne du déterminant en première position et d'obtenir :

$$c_{i,j} = (-1)^{j-1} (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & a_{i1} \dots a_{ij-1} a_{ij+1} \dots a_{in} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & A_{ij} & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \text{Det}(A_{i,j}).$$

- Par définition des coefficients $c_{i,j}$:

$$\text{Det}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} c_{i,j} = \sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+j} \text{Det}(A_{i,j}).$$

C'est la formule de développement par rapport à la j -ième colonne.

Le programme *PSI* permet de présenter ceci plus rapidement.

On effectue la permutation cyclique des j premières colonnes du déterminant ; un j -cycle a pour signature $(-1)^{j-1}$; le supplément *PSI* du théorème 8 permet de conclure.

- La formule de développement par rapport à la i -ième ligne du déterminant de A n'est autre que la formule de développement par rapport à la i -ième colonne du déterminant de la matrice transposée.

5.2.3 Exemples d'utilisation du développement par rapport à une ligne ou une colonne

Pour calculer un déterminant par un développement selon une ligne ou une colonne, on cherche toujours la ligne ou la colonne ayant le plus de zéros.

► Pour s'entraîner : ex. 8 et 9.

► Pour s'entraîner encore plus : Annexe, CCP 1993, page 300.

La formule de développement étudiée ici ramène le calcul d'un déterminant d'ordre n à celui de n déterminants d'ordre $n - 1$. En itérant aveuglément ce procédé, le nombre d'opérations nécessaire au calcul d'un déterminant d'ordre n est supérieur à $n!$. C'est inutilisable d'un point de vue algorithmique.

Un algorithme de calcul de déterminant basé sur la méthode de Gauss utilise environ n^3 opérations. C'est mieux que $n!$.

Application 6

Un calcul de déterminant par récurrence

Calculer le déterminant de la matrice $A_n = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 3 & \text{si } i = j \\ 2 & \text{si } i = j + 1 \\ 1 & \text{si } i = j - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le développement de $D_n = \text{Det} A_n$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 2 & 3 & 1 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

par rapport à la première colonne donne :

$$D_n = 3D_{n-1} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \vdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Ce dernier déterminant est d'ordre $n - 1$.

Il se développe par rapport à la première ligne et la formule de récurrence suivante en découle :

$$D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}.$$

C'est une formule de récurrence linéaire dont l'espace des suites solutions est de dimension 2.

L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est $r^2 = 3r - 2$.

Ses racines sont 1 et 2 donc il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad D_n = a + b2^n.$$

Or :

$$D_1 = 3 \quad \text{et} \quad D_2 = 7.$$

Vous en déduirez que :

$$D_n = 2^{n+1} - 1.$$

Application 7

Une conséquence utile du développement selon une colonne

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que, si j et k sont deux entiers distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \text{Det} A_{ij} a_{ik} = 0.$$

Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A .

$$\begin{aligned} \text{Det} \left(C_1, \dots, C_{j-1}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, C_{j+1}, \dots, C_n \right) \\ = \sum_{i=1}^n x_i (-1)^{i+j} \text{Det} A_{ij}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ik} (-1)^{i+j} \text{Det} A_{ij} \\ = \text{Det}(C_1, \dots, C_{j-1}, C_k, C_{j+1}, \dots, C_n) \end{aligned}$$

Le déterminant d'une matrice dont deux colonnes sont identiques est nul, d'où le résultat.

5.3. Un résultat important

Théorème 13

Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout x de $\mathbb{K}$, on pose :

$$P(x) = \text{Det}(A + xB).$$

La fonction P ainsi définie est une fonction polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\deg P \leq n$.

Démonstration

Procédons par récurrence.

- Le résultat est immédiatement vérifié si $n = 1$.
- Soit $n \geq 2$. Supposons le théorème vrai pour des matrices d'ordre $n - 1$ et considérons A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Posons $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ et $M = (m_{i,j}) = A + xB$.

Pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, $A_{i,j}$ (respectivement, $B_{i,j}$ ou $M_{i,j}$) désigne la matrice d'ordre $n - 1$ obtenue en barrant dans A (respectivement, dans B ou M) la i^{e} et la j^{e} colonne.

Développons le déterminant de M par rapport à la première colonne :

$$\text{Det}(M) = P(x) = \sum_{i=1}^n (a_{i,1} + x b_{i,1}) (-1)^{i+1} \text{Det}(A_{i,1} + x B_{i,1}).$$

L'hypothèse de récurrence permet de conclure que P est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à n .

Le programme de *PSI* permet de rédiger une autre démonstration de ce *théorème*.

La formule générale de développement d'un déterminant permet d'écrire :

$$\begin{aligned} P(x) \\ = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n (a_{\sigma(j),j} + x b_{\sigma(j),j}). \end{aligned}$$

Cette expression montre directement que P est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à n .

Application 8

Matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Le but de cette application est de prouver que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le sont aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\exists Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \quad M = QNQ^{-1}.$$

Soit Q une telle matrice complexe. On désigne par A et B les deux matrices réelles telles que $Q = A + iB$.

1) Montrer l'existence d'un réel t_0 tel que la matrice $A + t_0B$ soit inversible.

2) Montrer que $MA = AN$ et $MB = BN$.

En déduire l'existence d'une matrice R de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = RNR^{-1}.$$

1) La fonction $P : x \mapsto \text{Det}(A + xB)$ est une fonction polynôme de degré $\leq n$.

Ce n'est pas la fonction nulle car $P(i) \neq 0$.

Puisque P est une fonction polynôme non nulle, elle n'a qu'un nombre fini de zéros et :

$$\exists t_0 \in \mathbb{R} \quad \text{Det}(A + t_0B) \neq 0.$$

2) De l'égalité $M = QNQ^{-1}$, on déduit $MQ = QN$.

Donc :

$$M(A+iB) = (A+iB)N \text{ et } MA - AN = i(BN - MB).$$

Les matrices A, B, M et N sont à coefficients réels, donc les coefficients de $MA - AN$ sont réels et ceux de $i(BN - MB)$ sont imaginaires purs.

Donc :

$$\begin{cases} MA = AN \\ MB = BN \end{cases}.$$

En combinant ces égalités, on obtient :

$$M(A + t_0B) = (A + t_0B)N.$$

Pour un bon choix de t_0 , $A + t_0B$ est inversible et :

$$\exists R \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \quad M = RNR^{-1}.$$

5.4. Comatrice et formule d'inversion (programme PSI)

Dans ce paragraphe, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les colonnes de A sont notées $C_1, \dots, C_n$ et $c_{i,j} = (-1)^{i+j} \text{Det}(A_{i,j})$ est le cofacteur du coefficient $a_{i,j}$ de la matrice A .

La **comatrice de la matrice A** est la matrice des cofacteurs de A :

$$\text{Com } A = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

La **matrice complémentaire de A** est la transposée de la comatrice de A .

Théorème 14

- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad A {}^t\text{Com } A = {}^t\text{Com } A A = (\text{Det } A)I_n.$
- $\forall A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad A^{-1} = \frac{1}{\text{Det } A} {}^t\text{Com } A$

Rapport CCP, 1997

« La méthode du pivot de Gauss est connue, mais rarement utilisée pour d'autres questions que des résolutions de systèmes linéaires, comme par exemple, l'inversion d'une matrice carrée... ou le calcul du rang d'une matrice. »

Démonstration

• Notons $A = (a_{i,j})$, ${}^t\text{Com}A = (b_{i,j})$ et ${}^t\text{Com}AA = (d_{i,j})$.

Fixons j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et développons par rapport à la j -ième colonne.

$$\text{Det}(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \text{Det}(A_{i,j}) a_{i,j}.$$

Il a été vu à l'application 7 que, pour $k \neq j$,

$$0 = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \text{Det}(A_{i,j}) a_{i,k}.$$

Or $(-1)^{i+j} \text{Det}(A_{i,j}) = b_{ji}$, donc $d_{jk} = \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ik} = \text{Det}(A) \delta_{j,k}$.

Ainsi, ${}^t\text{Com}A.A = (\text{Det}A)I_n$. De même, $A^t \text{Com} A = (\text{Det}A)I_n$.

• La formule $A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}A} {}^t\text{Com}A$, est immédiate lorsque $\text{Det}A \neq 0$.

Remarque

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

La matrice complémentaire de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

La formule d'inversion des matrices 2×2 en découle.

Si $ad - bc \neq 0$, alors :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

La formule :

$$\forall A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\text{Com}A$$

a un intérêt théorique important. Toutefois, elle n'est pas exploitable d'un point de vue numérique ou algorithmique.

Elle ramène le calcul de l'inverse d'une matrice d'ordre n à celui de :

1 déterminant d'ordre n et n^2 déterminants d'ordre $n-1$.

C'est trop !

Pour une matrice carrée d'ordre $n \geq 3$, la méthode du pivot de Gauss, vue en Première année, reste la bonne méthode pour inverser « à la main ». À Réviser.

6 Les incontournables applications du déterminant

La partie théorique concernant les déterminants est achevée.

Vous trouverez dans le paragraphe suivant trois champs d'application des déterminants.

- Les matrices extraites en vue du calcul du rang d'une matrice.
- Les déterminants de Vandermonde.
- La géométrie.

Ces développements sont les grands classiques qu'il faut avoir étudiés pour être bien préparé au concours.

6.1. Rang d'une matrice et matrices extraites

Le résultat exposé dans l'application 9 ne figure pas au programme. C'est la méthode utilisée qu'il faut comprendre en faisant cet exercice.

Rapport Centrale, 2001

« Il est rappelé que le rang d'une matrice défini à partir de l'ordre des déterminants non nuls extraits n'est pas au programme. »

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(m, s) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$.

Une matrice A' de $\mathcal{M}_{m,s}(\mathbb{K})$ est appelée une **matrice $m \times s$ extraite de A** si elle est de la forme :

$$A' = (a_{ikj})_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq l \leq s}}$$

avec $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq p$.

Lorsque $m = s$, on dit que A' est une **matrice d'ordre s extraite de A** .

Soit un entier $r \leq \min(n, p)$. Un **mineur d'ordre r de la matrice A** est le déterminant d'une matrice d'ordre r extraite de A .

Dans la formule du développement de $\text{Det} A$ selon la j -ième colonne :

$$\text{Det} A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \text{Det} A_{ij},$$

A_{ij} est une matrice d'ordre $n-1$ extraite de A et le cofacteur $(-1)^{i+j} \text{Det} A_{ij}$, est, au signe près, un mineur d'ordre $n-1$ de A .

Application 9

Comment démontrer qu'une matrice est de rang supérieur ou égal à r

1) Soit une matrice :

$M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et un entier r tel que $1 \leq r \leq \min(n, p)$.

Montrer que M est de rang supérieur ou égal à r si, et seulement si, M admet un mineur d'ordre r non nul.

2) Soit un entier $n \geq 2$ et $(a_0, \dots, a_{n-1})$ n scalaires.

Pour tout x de $\mathbb{K}$, on pose :

$$C(x) = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x & -1 \\ a_0 & \dots & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & x + a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\text{Det} C(x)$ et en déduire le rang de $C(x)$ en fonction de x .

1) • Supposons $\text{rg } M \geq r$.

Alors, la matrice M admet r colonnes indépendantes. La matrice $n \times r$ formée par ces r co-

lonnes, notée N , est de rang r . Elle admet r lignes indépendantes. La matrice $r \times r$ formée par ces r lignes est inversible et son déterminant est un mineur non nul d'ordre r de la matrice M .

• Supposons l'existence d'un mineur d'ordre r non nul de la matrice M .

Alors, les r colonnes de la matrice M correspondantes à celles du mineur non nul sont linéairement indépendantes et $\text{rg } M \geq r$.

2) Par récurrence :

$$\text{Det } C(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0.$$

Une autre démonstration consiste à développer $\text{Det} C(x)$ par rapport à la dernière ligne.

Dans tous les cas, le mineur d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant la première colonne et la dernière ligne de $C(x)$ est non nul donc :

$$\text{rg } C(x) \geq n-1.$$

• Si $\text{Det } C(x) = 0$, alors $\text{rg } C(x) = n-1$.

• Si $\text{Det } C(x) \neq 0$, alors $\text{rg } C(x) = n$.

6.2. Déterminant de Vandermonde

Soit un entier n strictement positif et $(a_1, \dots, a_n)$ un n -uplet de nombres complexes.

Le déterminant de Vandermonde de $(a_1, \dots, a_n)$ est :

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Application 10

Trois méthodes de calcul

Soit $(a_1, \dots, a_n)$ une famille de n nombres complexes. Le but de cette application est de donner trois méthodes pour calculer le déterminant de Vandermonde de $(a_1, \dots, a_n)$.

1) Première méthode

a) Transformer le déterminant $V_n(a_1, \dots, a_n)$ à l'aide des opérations sur les colonnes $C_j \leftarrow C_j - a_1 C_{j-1}$, pour j de n à 2 .

b) En déduire une expression factorisée de $V_n(a_1, \dots, a_n)$.

2) Deuxième méthode

Pour tout nombre complexe x , on pose :

$$P(x) = V_n(a_1, \dots, a_{n-1}, x).$$

a) Démontrer que P est un polynôme de degré $\leq n-1$.

b) Déterminer une expression factorisée de P et retrouver l'expression de $V_n(a_1, \dots, a_n)$.

3) Troisième méthode

a) Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{n-2} X^{n-2} + X^{n-1}$ un polynôme unitaire de degré $n-1$.

Transformer l'expression de $V_n(a_1, \dots, a_n)$ en utilisant l'opération suivante sur la dernière colonne de ce déterminant :

$$(C_n \leftarrow C_n + \alpha_{n-2} C_{n-1} + \dots + \alpha_1 C_2 + \alpha_0 C_1).$$

b) En choisissant judicieusement le polynôme Q , retrouver l'expression factorisée de $V_n(a_1, \dots, a_n)$.

1) Première méthode

a) Les opérations sur les colonnes indiquées permettent de prouver que :

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \left[\prod_{j=2}^n (a_j - a_1) \right] V_{n-1}(a_2, \dots, a_n).$$

b) Pour $n=2$, $V_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1$.

Par récurrence on obtient :

$$\begin{aligned} V_n(a_1, \dots, a_n) &= \prod_{j=2}^n (a_j - a_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i). \end{aligned}$$

2) Deuxième méthode

a) Il suffit de développer le déterminant $V_n(a_1, \dots, a_{n-1}, x)$ par rapport à la dernière ligne pour démontrer que P est un polynôme de degré $\leq n-1$.

b) Dans les déterminants $P(a_1), \dots, P(a_{n-1})$, deux lignes sont égales, donc :

$$P(a_1) = \dots = P(a_{n-1}) = 0$$

et

$$P(x) = \alpha \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i).$$

Le coefficient de x^{n-1} dans $P(x)$, α , est le cofacteur de x^{n-1} dans l'expression de $P(x)$ sous forme de déterminant. Donc :

$$\alpha = V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})$$

et :

$$\begin{aligned} P(a_n) &= V_n(a_1, \dots, a_n) \\ &= V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i). \end{aligned}$$

3) Troisième méthode

a) L'opération :

$$(C_n \leftarrow C_n + \alpha_{n-2} C_{n-1} + \dots + \alpha_1 C_2 + \alpha_0 C_1)$$

ne change pas le déterminant et permet d'écrire :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & Q(a_1) \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & Q(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & Q(a_n) \end{vmatrix}.$$

b) En particulier pour $Q(x) = \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i)$, on obtient :

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = Q(a_n) V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}).$$

On est arrivé à la même formule de récurrence que par les autres méthodes.

6.3. Applications du déterminant à la géométrie

L'application 11 montre une utilisation des déterminants en géométrie plane et en géométrie dans l'espace (alignement et coplanarité).

Application 11

Condition d'alignement de trois points dans le plan et de coplanarité de quatre points de l'espace

1) Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et les coordonnées d'un point sont données dans ce repère.

Prouver de deux manières différentes que les trois points du plan $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$

sont alignés si, et seulement si, $\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix} = 0$.

2) En vous inspirant de la question précédente, déterminer une condition nécessaire et suffisante de coplanarité de quatre points de l'espace à l'aide d'un déterminant 4×4 .

1) Première solution

$$\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 0 & x_B - x_A & y_B - y_A \\ 0 & x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}.$$

Donc, $\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix} = 0$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont liés, c'est-à-dire si, et seulement si, les points A, B, C sont alignés.

Seconde solution

Les points A, B, C sont sur la droite D d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, si, et seulement si :

$$\begin{cases} \alpha x_A + \beta y_A + \gamma = 0 \\ \alpha x_B + \beta y_B + \gamma = 0 \\ \alpha x_C + \beta y_C + \gamma = 0 \end{cases}.$$

Ce système se traduit matriciellement par :

$$\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système a une solution $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si, et

seulement si :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix} = 0.$$

L'équivalence n'est pas complètement démontrée, car l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ représente une droite uniquement si $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. À vous de terminer.

2) Les deux méthodes exposées à la question **1)** se généralisent et permettent de prouver que les quatre points de l'espace $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ et $D(x_D, y_D, z_D)$ sont coplanaires si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & z_A \\ 1 & x_B & y_B & z_B \\ 1 & x_C & y_C & z_C \\ 1 & x_D & y_D & z_D \end{vmatrix} = 0.$$

FICHE MÉTHODE

● Pour utiliser **une forme n -linéaire alternée**, f , sur un espace vectoriel de dimension n , E , on introduit une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E . On peut alors écrire :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad f(x_1, \dots, x_n) = \text{Det}_B(x_1, \dots, x_n) f(e_1, \dots, e_n).$$

● Pour simplifier **le calcul du déterminant de la matrice** M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut utiliser un des résultats suivants.

● Si M' est une matrice obtenue à partir de M en ajoutant à une colonne (resp. une ligne) de M une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. des autres lignes), alors :

$$\text{Det}M = \text{Det}M'.$$

● $\text{Det}M = 0$ si, et seulement si, les vecteurs colonnes (resp. les vecteurs lignes) de M forment une famille liée :

$$\text{Det}M = 0 \Leftrightarrow \text{rg } M < n.$$

● Si M'' une matrice obtenue à partir de M en permutant deux colonnes (resp. deux lignes), alors :

$$\text{Det}M = -\text{Det}M''.$$

● Pour développer **un déterminant selon une colonne ou une ligne**, on utilise l'une des formules suivantes :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{Det}A = \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \text{Det}A_{ij}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{Det}A = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \text{Det}A_{ij}$$

Dans ces formules, A_{ij} est la matrice d'ordre $n - 1$ obtenue en barrant la ligne d'indice i et la colonne d'indice j de A .

Exercice résolu

Équation d'un cercle défini par trois points non alignés

ÉNONCÉ

Le plan euclidien P est muni d'un repère orthonormé.

1) Soit $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ trois points non alignés du plan.

Montrer que l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC est :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_A^2 + y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2 + y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2 + y_C^2 & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

2) Montrer que les points de coordonnées $(1, 4)$, $(6, -1)$, $(4, -5)$ et $(-3, 2)$ sont cocycliques.

CONSEILS

SOLUTION

1) • Notons $(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0$ l'équation du cercle circonscrit au triangle (A, B, C) .

Le point $M(x, y)$ est sur ce cercle si, et seulement si :

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_A^2 + y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2 + y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2 + y_C^2 & x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

L'équation (2) a une solution non nulle, $(1, \beta, \gamma, \delta)$, donc l'égalité (1) est vraie.

• Réciproquement, soit $M(x, y)$ tel que (1).

Dans le développement de ce déterminant par rapport à la première ligne, le coefficient de $x^2 + y^2$ est non nul car A, B, C ne sont pas alignés.

Donc (1) est l'équation d'un cercle.

Les coordonnées (x_A, y_A) , (x_B, y_B) , (x_C, y_C) des points A, B et C sont solutions de cette équation. Donc ce cercle est le cercle circonscrit au triangle (A, B, C) .

2) Laissons la TI calculer.

D'après la question 1), les points de coordonnées $(1, 4)$, $(6, -1)$, $(4, -5)$ et $(-3, 2)$ sont cocycliques.

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Exercices

1 Soit un entier $n \geq 2$, B une base de $\mathbb{K}^n$, $(C_1, \dots, C_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et, pour tout j de $\llbracket 1, n \rrbracket$,

$$C'_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} C_i.$$

Calculer $\text{Det}_B(C'_1, \dots, C'_n)$ en fonction de $\text{Det}_B(C_1, \dots, C_n)$.

2 $P_0 = 1$; $P_1 = 2X - 1$; $P_2 = 3X^2 - 4X + 2$;
 $P_3 = 4X^3 - 9X^2 + 8X - 2$.

Calculer le déterminant de (P_0, P_1, P_2, P_3) relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, puis relativement à $((X-1)^k)_{0 \leq k \leq 3}$.

3 Soit a un réel. Pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\Phi(P) = (X-a)P'(X) - nP(X).$$

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer sa matrice relativement à la base canonique.

2) En déduire que Φ n'est pas un automorphisme de E .

4 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel orienté de dimension $n > 0$, $B = (e_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une base directe de E .

Déterminer les orientations des bases.

$$B' = (-e_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \quad \text{et} \quad B'' = ((-1)^k e_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}.$$

5 Montrer qu'une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est jamais inversible lorsque n est impair.

6 Soit U la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients valent 1.

1) Prouver que, pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction $x \mapsto \text{Det}(A+xU)$ est une fonction polynôme de degré ≤ 1 .

2) En déduire

$$\begin{vmatrix} c & b & \dots & \dots & b \\ a & c & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & \dots & a & c \end{vmatrix}$$

Indication : Traiter d'abord le cas $a \neq b$.

7 Discuter et résoudre, en fonction du paramètre t , le système suivant de n équations à n inconnues.

$$\begin{cases} tx_1 & +x_2 & +\dots & +x_{n-1} & +x_n & = 0 \\ x_1 & +tx_2 & +\dots & +x_{n-1} & +x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ x_1 & +x_2 & +\dots & +tx_{n-1} & +x_n & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +\dots & +x_{n-1} & +tx_n & = t+n-1 \end{cases}$$

8 Calcul du déterminant d'ordre n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

9 Calculer :

$$\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix}.$$

10 Calculer $\text{Det}(B)$ et $\text{Det}(C)$ avec :

$$B = (\max(i, j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad C = (|i - j|)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

11 1) Pour tout polynôme R et tout entier j , on pose :

$$R_j(X) = R(X+j-1).$$

Montrer que, si $\deg R = d$, alors la famille de polynômes $(R_1, \dots, R_d, R_{d+1})$ est libre.

Indication : Procéder par récurrence en utilisant le polynôme :

$$Q(X) = R(X) - R(X+1).$$

2) En déduire que, tout polynôme P de degré $n-1$,

$$\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \dots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \dots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \dots & P(2n-1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

12

1) Déterminer une forme factorisée de :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}.$$

2) Plus généralement, soit $(a_1, \dots, a_n)$ une famille de n nombres complexes. Déterminer une forme factorisée de :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}.$$

13

Soit un entier $n \geq 1$ et A, B, C, D quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $CA = AC$.1) Dans cette question, A est inversible. Prouver que :

$$\text{Det} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{Det}(AD - CB) \quad (1)$$

Indication : Chercher une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ * & A \end{pmatrix}$ telleque le produit $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ * & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ se simplifie.2) Dans cette question A n'est pas inversible. Prouver (1).Indication : $\exists \delta > 0 \forall x \in]0, \delta[\quad \text{Det}(A + xI_n) \neq 0$.

14

Une surprenante application du dual (programme PSI)Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang $n - 1$.Le cofacteur de a_{ij} est noté $(-1)^{i+j} \text{Det} A_{ij}$.Pour tout j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, g_j désigne la forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto g_j \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \text{Det} A_{ij} x_i$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & x_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & x_i & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & x_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Le sous-espace V de $\mathbb{K}^n$ est défini par :

$$V = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} ; j \in \llbracket 1, n \rrbracket \right].$$

1) Montrer que V est un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.2) Montrer que : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad V \subset \text{Ker } g_j$.3) Montrer que la matrice des cofacteurs de A est de rang 1.

15

Étude de la comatriceSoit un entier $n \geq 2$ et une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.1) Déterminer le rang de la comatrice de A en fonction de celui de A .2) Calculer $\text{Det}(\text{Com } A)$.3) Exprimer $\text{Com}(\text{Com } A)$ en fonction de A .

Réduction

4

Introduction

Les calculs permettant de décrire l'action d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n nécessitent, en toute généralité, la connaissance des n^2 coefficients de la matrice de cet endomorphisme dans une certaine base.

Dès le chapitre 1, on a vu que, dans certaines circonstances, il existe une base telle que la matrice de l'endomorphisme soit diagonale. Dans ce cas, les n coefficients de la diagonale suffisent pour effectuer les calculs.

La simplification est énorme.

Réduire une matrice carrée ou un endomorphisme, c'est chercher si cette forme diagonale associée existe, et lorsqu'elle existe, la déterminer.

L'objectif de ce chapitre est l'étude de cette réduction.

O B J E C T I F S

- Éléments propres d'un endomorphisme.
- Éléments propres d'une matrice carrée.
- Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme.
- Caractérisation des endomorphismes diagonalisables par les sous-espaces propres.
- Caractérisation des endomorphismes diagonalisables par l'ordre de multiplicité des valeurs propres.
- Polynôme d'endomorphisme, polynôme annulateur d'endomorphisme.
- Caractérisation des endomorphismes diagonalisables par les polynômes annulateurs.
- Caractérisation des endomorphismes trigonalisables par leur polynôme caractéristique.

Programme PSI

- Idéal des polynômes annulateurs d'un endomorphisme.
- Théorème de Cayley-Hamilton.

Éléments propres d'un endomorphisme : le point de vue géométrique et vectoriel

1.1. Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E .

- Un scalaire λ est une **valeur propre** de l'endomorphisme u de E si :

$$\exists x \in E \setminus \{0_E\} \quad u(x) = \lambda x.$$

- Lorsque λ est valeur propre de u , tout vecteur x non nul tel que $u(x) = \lambda x$, est appelé **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ .

► Pour s'entraîner : ex. 1.

1.2. Le point de vue géométrique

Théorème 1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, u un endomorphisme de E et x un vecteur non nul de E .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

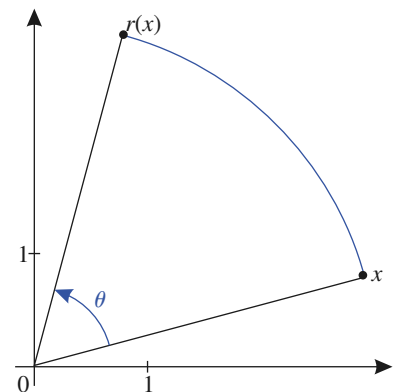
- x est vecteur propre de u ;
- les vecteurs $u(x)$ et x sont colinéaires ;
- la droite engendrée par x est stable par u .

Exemple : Un endomorphisme sans vecteur propre

Soit θ un réel $\neq 0[\pi]$ et r la rotation d'angle θ du plan vectoriel euclidien P .

Si x est un vecteur non nul de P , $r(x)$ et x ne sont pas colinéaires (doc. 1).

Donc la rotation r n'a ni valeur propre ni vecteur propre.



Doc. 1. Le vecteur non nul x et son image $r(x)$ ne sont pas colinéaires.

Théorème 2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, u un endomorphisme de E et λ un scalaire.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- λ est valeur propre de u ;
- $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$;
- il existe un sous-espace V de E , non nul et stable par u , tel que l'endomorphisme de V induit par u soit l'homothétie de rapport λ .

Démonstration

L'équivalence suivante vous permettra de rédiger la démonstration.

$$\forall x \in E \quad [u(x) = \lambda x \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)].$$

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Pour affirmer que la relation $AX = \lambda X$ prouve que le nombre complexe λ est valeur propre de la matrice A , il faut préciser (voir démontrer) que le vecteur X est non nul. »

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Il est stupéfiant de découvrir dans beaucoup trop de copies que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est vecteur propre de M . »

L'extrait de rapport suivant invite à réfléchir avant de calculer.

Rapport Mines-Ponts, 2000

« On peut toutefois regretter que trop de candidats se lancent aveuglément dans des calculs de valeurs propres par déterminant au lieu d'analyser l'endomorphisme ou la matrice proposée. »

Corollaire 2.1

Lorsque E est de dimension finie, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- λ est valeur propre de u ;
- $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas inversible ;
- $\text{Det}(u - \lambda \text{Id}_E) = 0$.

► Pour s'entraîner : ex. 2.

D'après ce corollaire, 0 est valeur propre de u si, et seulement si, u n'est pas injective.

En dimension finie, ceci équivaut à u n'est pas inversible ou $\text{Det } u = 0$.

Dans ce cas, les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls de $\text{Ker } u$.

1.3. Spectre et sous-espaces propres d'un endomorphisme

L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme s'appelle le **spectre** de u et se note $\text{Sp}(u)$.

L'exemple précédent montre qu'une rotation du plan d'angle $\theta \neq 0[\pi]$ a un spectre vide.

Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme u . Le sous-espace vectoriel de E :

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E),$$

est appelé le **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ de l'endomorphisme u .

Quelques propriétés élémentaires mais fort utiles.

Soit f un endomorphisme du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie.

■ Soit D une droite vectorielle de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- D est stable par f ;
- D est engendrée par un vecteur propre de f ;
- D est contenue dans un sous-espace propre de f .

■ f est inversible si, et seulement si, $0 \notin \text{Sp}(f)$.

Dans ce cas, les valeurs propres de f^{-1} sont les inverses de celles de f .

■ Si λ est valeur propre de f , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, λ^n est valeur propre de f^n .

Exemples

Dans les deux exemples, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, V et W sont deux sous-espaces de E différents de $\{0_E\}$ et tels que $E = V \oplus W$.

■ Soit p le projecteur sur V parallèlement à W :

- $\text{Sp}(p) = \{0, 1\}$;
- le sous-espace propre de p associé à 1 est V ;
- le sous-espace propre de p associé à 0 est W .

■ Soit s la symétrie par rapport à V parallèlement à W :

- $\text{Sp}(s) = \{-1, 1\}$;
- le sous-espace propre de s associé à 1 est V ;
- le sous-espace propre de s associé à -1 est W .

Rapport Centrale, 1998

« Le vecteur propre associé à une valeur propre est une expression dépourvue de sens, tout comme le supplémentaire d'un sous-espace vectoriel ».

Un vecteur propre n'est jamais nul.

Si λ est valeur propre de u , les vecteurs propres associés à λ sont les éléments non nuls du sous-espace propre $E_\lambda(u)$.

Les exercices d'oraux d'algèbre linéaire posent souvent la question :

« Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $f \dots$ »
C'est une manière condensée de demander :

- la liste des valeurs propres de f (c'est-à-dire son spectre) ;
- pour chaque valeur propre, la détermination du sous-espace propre associé.

La suite du chapitre développe des outils permettant d'étudier systématiquement ce problème pour un espace de dimension finie.

1.4. Stabilité des sous-espaces propres

Théorème 3

Soit E un espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E tels que $uv = vu$.

Alors tout sous-espace propre de u est stable par v .

Ce théorème montre, en particulier, que les sous-espaces propres de u sont stables par u . Ce résultat, apparemment élémentaire, sera d'une grande utilité dans la suite.

Rapport Centrale, 2001

« Notons toutefois quelques points qui ne sont pas toujours connus : lorsque deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. »

1.5. Endomorphismes diagonalisables

Théorème 4

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- il existe une base de E telle que la matrice de f relativement à cette base soit diagonale ;
- il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .

Démonstration

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Il est évident que :

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad f(e_i) = \alpha_i e_i.$$

Le théorème en découle.

Exemple

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, V et W deux sous-espaces supplémentaires dans E et k un réel différent de 0 et de 1.

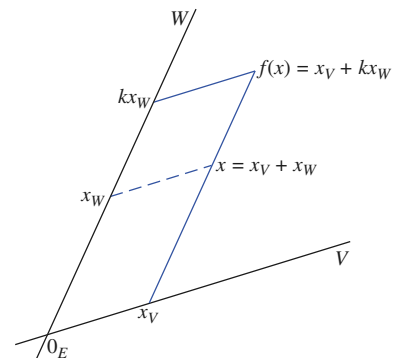
L'**affinité** de E , de rapport k , de base V , de direction W est l'endomorphisme h de E tel que :

$$\forall x \in V, \quad h(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in W, \quad h(y) = ky.$$

Une base de E adaptée à la décomposition $E = V \oplus W$ est formée de vecteurs propres de h . Donc l'affinité h est diagonalisable.

Le point de vue géométrique adopté au chapitre 2 pour définir les endomorphismes diagonalisables est rarement utilisé car peu pratique. Il est intéressant si l'on connaît géométriquement cet endomorphisme. (ex. projection, symétrie).

Le théorème 4 et les autres points de vue équivalents, développés dans ce chapitre et les suivants donnent des méthodes variées plus employées pour étudier cette question.



Doc. 2. L'affinité de rapport k , de base V , de direction W .

2 Éléments propres des matrices carrées : le point de vue algébrique et calculatoire

Dans ce paragraphe, n est un entier ≥ 1 et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les

éléments de $\mathbb{K}^n$ sont notés matriciellement $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

2.1. Définitions des éléments propres d'une matrice

- Un élément λ de $\mathbb{K}$ est appelé une **valeur propre** de la matrice A si :

$$\text{Det}(A - \lambda I_n) = 0.$$

- Lorsque λ est valeur propre de A , tout vecteur X non nul de $\mathbb{K}^n$ tel que $AX = \lambda X$, est appelé **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ .
- Lorsque λ est valeur propre de A , le **sous-espace propre** de A associé à λ est le sous-espace de $\mathbb{K}^n$, noté $E_\lambda(A)$, et défini par :

$$E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = \lambda X\}.$$

- L'ensemble des valeurs propres de la matrice A s'appelle le **spectre** de A et se note $\text{Sp}(A)$.

Vous démontrerez les *théorèmes* suivants.

Théorème 5

Les éléments propres (spectres, vecteurs propres, sous-espaces propres) de la matrice A sont les éléments propres de l'endomorphisme f_A de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A .

Théorème 6

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , f un endomorphisme de E et M sa matrice relativement à la base B .

Pour un vecteur x de E , $X = C_B(x)$ désigne le vecteur colonne des composantes de x dans la base B .

Alors :

- $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(M)$;
- pour toute valeur propre λ de f :

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow MX = \lambda X.$$

 Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut aussi considérer que c'est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et étudier ses valeurs propres réelles ou ses valeurs propres complexes. Afin de lever toute ambiguïté, nous noterons :

- $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \text{Det}(A - \lambda I_n) = 0\}$,
- $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Det}(A - \lambda I_n) = 0\}$.

De manière évidente :

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A).$$

Mais, a priori, cette inclusion n'est pas une égalité.

Exemple :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est

une matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de $\mathbb{R}^2$, elle n'a pas de valeur propre réelle et $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

Cependant :

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{i, -i\}.$$

On peut aussi dire que le vecteur x de E est un vecteur propre de f si, et seulement si, le vecteur colonne $X = C_B(x)$ est un vecteur propre de M .

2.2. Calcul des valeurs propres d'une matrice carrée, le polynôme caractéristique

Par définition, nous savons que les valeurs propres de la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les éléments de $\mathbb{K}$, solutions de l'équation $\text{Det}(A - \lambda I_n) = 0$.

Au chapitre précédent, nous avons vu que la fonction :

$$\begin{cases} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \text{Det}(A - x I_n) \end{cases}$$

est une fonction polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré inférieur ou égal à n .

Le théorème suivant en découle.

Théorème 7

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres qui sont les zéros, dans $\mathbb{K}$, de la fonction polynôme $(x \mapsto \text{Det}(A - x I_n))$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le polynôme $\text{Det}(A - x I_n)$ est appelé le **polynôme caractéristique** de la matrice A .

Le **spectre** de A , noté $\text{Sp } A$, est l'ensemble des racines, dans $\mathbb{K}$, du polynôme caractéristique de A .

En général, nous noterons ce polynôme P_A .

Si $A = (a_{ij})$, alors :

$$P_A(x) = \text{Det}(A - x I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}.$$

Lemme

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$\text{Det}(A - x I_n) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x) + Q(x),$$

où Q est un polynôme de degré $\leq n - 2$.

Démonstration

Le lemme est vrai lorsque $n = 1$.

Soit un entier $n \geq 2$. Supposons le lemme vrai pour toute matrice d'ordre $n - 1$.

Pour toute matrice $M = (m_{ij})$ de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$:

$$\text{Det}(M - x I_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} (m_{ii} - x) + R(x),$$

où R est un polynôme de degré $\leq n - 3$.

Certains ouvrages définissent le polynôme caractéristique comme étant $\text{Det}(x I_n - A)$. C'est une question de convention et l'on passe de l'une à l'autre par la formule :

$$\begin{aligned} \text{Det}(x I_n - A) &= \begin{vmatrix} x - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & x - a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \dots & x - a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n \text{Det}(A - x I_n). \end{aligned}$$

Le programme de *PSI* permet une autre démonstration.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Posons

$$m_{ij}(x) = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ a_{ii} - x & \text{si } i = j \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Det}(A - x I_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n m_{\sigma(j),j}(x) \\ &= \prod_{j=1}^n m_{j,j}(x) + \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{\text{Id}_n\}} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n m_{\sigma(j),j}(x). \end{aligned}$$

Vérifier que :

$$\prod_{j=1}^n m_{j,j}(x) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x)$$

et que :

$$Q(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{\text{Id}_n\}} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n m_{\sigma(j),j}(x)$$

est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 2$.

Considérons une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\text{Det}(A - xI_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}.$$

Notons b_{ij} le cofacteur d'indice (i, j) de la matrice $A - xI_n$ et développons son déterminant par rapport à la dernière ligne.

$$\text{Det}(A - xI_n) = (a_{nn} - x)b_{nn} + a_{n,n-1}b_{n,n-1} + \dots + a_{n1}b_{n1}.$$

Écrire b_{nn} et constater, d'après l'hypothèse de récurrence, que :

$$b_{nn} = \prod_{i=1}^{n-1} (a_{ii} - x) + R(x),$$

où R est un polynôme de degré $\leq n-3$.

Pour $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on écrira b_{nj} et on constatera que c'est une fonction polynôme de la variable x , de degré $\leq n-2$. Finalement :

$$\begin{aligned} \text{Det}(A - xI_n) &= (a_{nn} - x) \left(\prod_{i=1}^{n-1} (a_{ii} - x) + R(x) \right) + a_{n,n-1}b_{n,n-1} + \dots + a_{n1}b_{n1} \\ &= \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x) + Q(x). \end{aligned}$$

Et $Q(x)$ est une fonction polynôme de degré $\leq n-2$.

Théorème 8

Le polynôme caractéristique P_A de la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de degré n . De plus :

- le terme constant de $P_A(x)$ est $\text{Det}(A)$;
- le coefficient de x^n dans $P_A(x)$ est $(-1)^n$;
- le coefficient de x^{n-1} dans $P_A(x)$ est $(-1)^{n-1} \text{tr}(A)$.

Tout polynôme complexe de degré ≥ 1 admet au moins une racine donc toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre.

Démonstration

- Le terme constant de $P_A(x)$ est $P_A(0) = \text{Det}(A)$.
- Les deux autres points découlent du lemme :

$$\text{Det}(A - xI_n) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x) + Q(x),$$

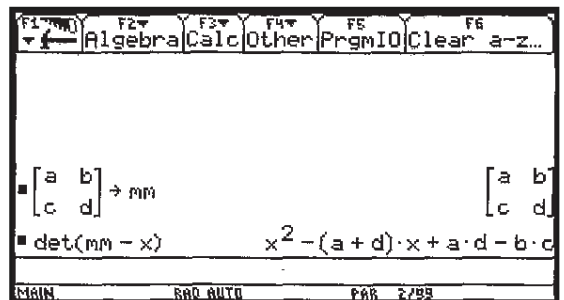
où Q est un polynôme de degré $\leq n-2$.

► Pour s'entraîner : ex. 4.

Quatre formules simples et très utilisées.

- Le polynôme caractéristique d'une matrice $2 \times 2, M$, est :

$$P_M(x) = x^2 - \text{tr}(M)x + \text{Det}(M) \text{ (doc. 3)}.$$



Doc. 3. Le polynôme caractéristique d'une matrice 2×2 .

- Le polynôme caractéristique de la matrice 3×3 :

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ est :}$$

$$P_N(x) = -x^3 + \text{tr}(N)x^2 - \left(\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} \right) x + \text{Det}(N).$$

Maple abrège les calculs, mais attention :

`charpoly(A, x) = Det(xI3 - A)` et tous les signes sont inversés pour une matrice d'ordre impair (doc. 4).

- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A et ${}^tA$ ont même polynôme caractéristique.
- Le polynôme caractéristique de la matrice triangulaire A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

est $P_A(x) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x)$. Les valeurs propres de cette matrice triangulaire sont ses termes diagonaux.

```
> restart; with(linalg);
> a:=matrix(3,3,[a,b,c,d,e,f,g,h,i]);
> charpoly(a,x);
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
A :=  $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ 
 $x^3 - x^2i - ex^2 + xei - xfh - ax^2 + aix + aex - aei + afh - dbx + dbi$ 
 $- dch - dbf - gcx + gce$ 
> collect("x");
 $x^3 + (-a-i-e)x^2 + (-gc+ai+ei-db+ae-fh)x - gbf+afh+gce+dbi$ 
 $- aei - dch$ 
```

Doc. 4. Le polynôme caractéristique d'une matrice 3×3 par Maple.

Rapport E3A, 2002

« La lecture des valeurs propres d'une matrice triangulaire n'est pas acquise. »

2.3. Calculs des vecteurs propres, dimension des sous-espaces propres d'une matrice carrée

Théorème 9

Soit λ une valeur propre de la matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les vecteurs propres de A associés à λ sont les vecteurs colonnes non nuls de $\mathbb{K}^n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, solutions du système homogène :

$$(S) \begin{cases} (a_{1,1} - \lambda)x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + (a_{2,2} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + (a_{n,n} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Théorème 10

Avec les mêmes notations, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est l'ensemble de toutes les solutions du système homogène (S) .

C'est un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ de dimension $n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$.

► Pour s'entraîner : ex. 5.

Exemple

Calcul des sous-espaces propres d'une matrice triangulaire.

Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- $\text{Sp}(M) = \{1, 2, -1\}$.
- Calcul de $\text{Ker}(M - I_4)$.

$$M - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(M - I_4) \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = z = 2t.$$

$$\text{Ker}(M - I_4) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{doc. 5}).$$

- Les calculs de $\text{Ker}(M - 2I_4)$ et $\text{Ker}(M + I_4)$ s'effectuent de manière similaire (doc. 5).

$$\text{Ker}(M - 2I_4) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \text{Ker}(M + I_4) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rapport CCP, 1997

« L'utilisation du rang pour la détermination de la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre nulle est méconnue »

Rapport TPE, 2002

« Quelques candidats lucides arrivent à mettre en cause leurs calculs, par exemple :

“Cela m'étonne un peu de trouver un vecteur propre nul.” »

```
> A:=matrix(4,4[1,0,0,0,2,1,0,0,3,-1,2,0,4,0,1,-1]);
A :=
1  0  0  0
2  1  0  0
3 -1  2  0
4  0  1 -1

> charpoly(A,x);
(x - 1)^2(x - 2)(x + 1)
e := 1, 1, 2, -1

> v:=eigenvals(A);
v := [[-1, 1, {[0, 0, 0, 1]}], [2, 1, {[0, 0, 3, 1]}], {[0, 2, 2, 1]}]]

> v[1][1]; # La première valeur propre
-1

> v[1][2]; # Son ordre de multiplicité dans le
polynôme caractéristique
1

> v[1][3]; # Une base du sous espace propre
{[0, 0, 0, 1]}
```

Doc. 5. Le calcul des vecteurs propres d'une matrice triangulaire par Maple.

2.4. Éléments propres de matrices semblables

Nous savons déjà que deux matrices semblables ont même trace et même déterminant. Le *théorème* suivant complète la liste de conditions nécessaires pour que deux matrices soient semblables.

Théorème 11

Soit A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- A et B ont le même polynôme caractéristique ;

- A et B ont le même spectre ;
- $\forall x \in \mathbb{K} \quad \text{rg}(A - xI_n) = \text{rg}(B - xI_n)$.

Les sous-espaces propres de A et B associés à la même valeur propre ont la même dimension.

Démonstration

Notons P une matrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Alors :

$$P(B - xI_n)P^{-1} = PBP^{-1} - xI_n = A - xI_n.$$

Le théorème en découle.

► Pour s'entraîner : ex. 6.

2.5. Matrices diagonalisables

Une **matrice** A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) si elle est semblable à une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 12

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et B une base de E .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- la matrice A est diagonalisable ;
- l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est diagonalisable ;
- l'endomorphisme de E tel que $M_B(f) = A$ est diagonalisable.

⚠ Aucune des conditions obtenues n'est suffisante pour que deux matrices soient semblables.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ont même polynôme caractéristique et ne sont pas semblables, car les sous-espaces propres associés à 1 n'ont pas la même dimension.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ont même polynôme caractéristique, leurs sous-espaces propres ont même dimension et, pourtant, elles ne sont pas semblables (étudier A^2 et B^2).

Une question classique à l'oral est :

« diagonaliser la matrice suivante... (ou l'endomorphisme suivant...) »

• **Diagonaliser une matrice**, c'est trouver une matrice inversible Q et une matrice diagonale D telle que $Q^{-1}MQ = D$.

• **Diagonaliser un endomorphisme** u de E c'est trouver une base de E formée de vecteurs propres de u .

Application 1

Un exemple

Étudier si la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable et, si oui, la diagonaliser.

- Le polynôme caractéristique de M est :

$$P_M(x) = -(x - 1)^2(x + 1).$$

Donc $\text{Sp}(M) = \{-1, 1\}$.

- Calcul de $\text{Ker}(M - I_3)$

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Une équation du noyau de $M - I_3$ est :

$$4y + 2z = 0.$$

$$\text{Ker}(M - I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

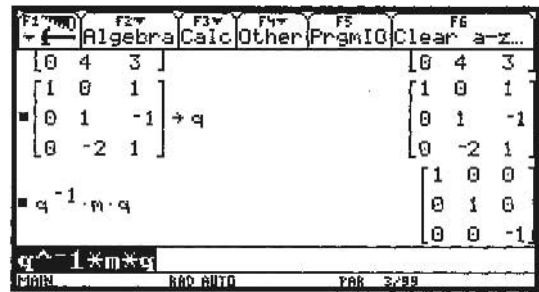
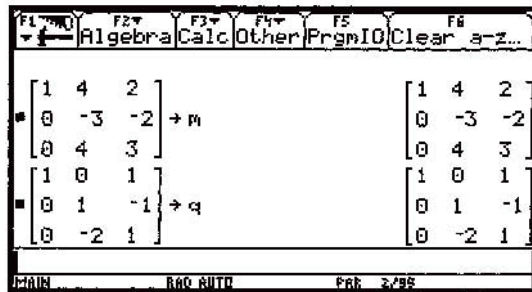
• Calcul de $\text{Ker}(M + I_3)$

$$M + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

 Une équation du noyau de $M + I_3$ est :

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ker}(M + I_3) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Doc. 6. La matrice Q , dont les colonnes sont les vecteurs trouvés ci-dessus, diagonalise M .

2.6. Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

Savoir diagonaliser une matrice permet de calculer aisément ses puissances et son inverse (lorsqu'elle est inversible) comme le montre le *corollaire* suivant.

Corollaire 12.1

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si P est une matrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ une

matrice diagonale telle que $A = PDP^{-1}$, alors :

- $\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k = PD^kP^{-1}$;
- A est inversible si, et seulement si, $\prod_{i=1}^n d_i \neq 0$ et dans ce cas :

$$A^{-1} = P \begin{pmatrix} d_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad A^k = PD^kP^{-1}.$$

Le calcul numérique des puissances d'une matrice donnée (ou d'un nombre) est préprogrammé dans les merveilleuses calculatrices.

Taper m^{1000} et on aura la puissance 1000-ième de m , que m soit un nombre ou une matrice.

Le programme des concours contient l'algorithme d'exponentiation rapide.

Vous le trouverez dans le *TD d'algorithmique 4*.

Le test proposé sur une matrice 3×3 montre son efficacité.

► Pour s'entraîner : ex. 7.

2.7. Calcul des éléments propres d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E , B et B' deux bases de E . Nous savons que les matrices $M = M_B(f)$ et $M' = M_{B'}(f)$ sont semblables. Elles ont donc le même polynôme caractéristique. Ceci permet de donner la définition suivante :

- le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f est le polynôme caractéristique de sa matrice M relativement à la base B ;
- le polynôme caractéristique de f est noté P_f . Par définition $P_f = P_{M_B(f)}$.

Exemple

Soit E un espace vectoriel de dimension n , V et W deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires l'un de l'autre, de dimensions respectives r et $n - r$.

On désigne par p le projecteur sur V parallèlement à W et par q le projecteur sur W parallèlement à V .

Étant donné deux scalaires a et b , on pose $f = ap + bq$.

Pour tout x de V , $f(x) = ax$ et pour tout y de W , $f(y) = by$.

La matrice de f relativement à une base B adaptée à la décomposition $E = V \oplus W$ est :

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} aI_r & 0 \\ 0 & bI_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique de f est :

$$P_f(x) = (a - x)^{\dim V} (b - x)^{\dim W}.$$

► Pour s'entraîner : ex. 8.

Le point de vue adopté est volontairement matriciel et calculatoire. Une autre présentation possible est la suivante.

Pour tout x de $\mathbb{K}$:

$f - x\text{Id}_E$ est un endomorphisme de E et la fonction $x \mapsto \text{Det}(f - x\text{Id}_E)$ est une fonction polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Le polynôme correspondant est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f .

Un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension impaire a toujours un spectre non vide. En effet, son polynôme caractéristique est un polynôme de degré impair de $\mathbb{R}[X]$, il a donc au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

Rapport X, 2001

« Les rapports entre racines du polynôme caractéristique et valeurs propres étant mal maîtrisés, cette question n'a quasiment jamais été traitée. »

3 La somme des sous-espaces propres est directe, applications

3.1. Famille libre de vecteurs propres, somme directe de sous-espaces propres

Théorème 13

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

Pour tout p de $\mathbb{N}^*$, la propriété suivante, notée (H_p) , est vraie :

Si le spectre de f contient p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, alors toute famille de p vecteurs propres $(x_1, \dots, x_p)$ associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ est une famille libre de E .

Démonstration

- (H_1) est vraie.
 - Soit p un entier strictement positif tel que (H_p) soit vraie et f un endomorphisme admettant $p + 1$ valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1})$.
- Soit $(x_1, \dots, x_{p+1})$ une famille de $p + 1$ vecteurs propres de f associés respectivement à $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1})$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1}$ tel que :

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p + \alpha_{p+1} x_{p+1} = 0_E \quad (1)$$

L'application f est linéaire et $f(x_i) = \lambda_i x_i$, donc :

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_p \lambda_p x_p + \alpha_{p+1} \lambda_{p+1} x_{p+1} = 0_E$$

En effectuant (2) - λ_{p+1} (1), on obtient :

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{p+1}) x_1 + \dots + \alpha_p (\lambda_p - \lambda_{p+1}) x_p = 0_E.$$

D'après (H_p) , on peut conclure que :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \alpha_i = 0, \quad \text{puis} \quad \alpha_{p+1} = 0.$$

On a prouvé $(H_p) \Rightarrow (H_{p+1})$. La récurrence est achevée.

Exemple

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une famille de n réels distincts deux à deux.

Pour tout entier i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction f_i est définie par :

$$f_i : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{\alpha_i x} \end{cases}$$

L'application $D : f \longmapsto D(f) = f'$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Pour tout i , f_i n'est pas la fonction nulle et $D(f_i) = \alpha_i f_i$.

La famille de fonctions $(f_1, \dots, f_n)$ est libre car c'est une famille de vecteurs propres de l'endomorphisme D , associés à des valeurs propres distinctes.

Corollaire 13.1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

On suppose que f admet p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

La somme des sous-espaces propres associés est une somme directe.

Corollaire 13.2

• Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace E de dimension n .

Si le polynôme caractéristique de f admet n racines distinctes dans $\mathbb{K}$, alors f est diagonalisable.

• Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si le polynôme caractéristique de M admet n racines distinctes dans $\mathbb{K}$, alors M est diagonalisable.

3.2. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Théorème 14

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est diagonalisable ;

(2)  Dire que la somme des sous-espaces propres est directe ne signifie pas que cette somme est E . Par exemple, la matrice triangulaire $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ a deux valeurs propres 1 et -1. Ses deux sous-espaces propres sont de dimension 1 (pourquoi?). Donc leur somme ne peut pas être $\mathbb{R}^3$.

 La condition obtenue est suffisante pour qu'un endomorphisme ou une matrice soit diagonalisable. Elle n'est pas nécessaire.

Par exemple, la matrice 3×3 :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a seulement deux valeurs propres 1 et -1.

Cependant, la famille :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de M qui est donc diagonalisable.

- $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$;
- $\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E))$.

Démonstration

- Montrons 1) $\Rightarrow$ 2).

Posons $n = \dim E$; Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de f .

Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, il existe une valeur propre λ de f telle que : $e_i \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$. Donc :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E).$$

Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E ,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E).$$

- Le reste de la démonstration est laissé au lecteur.

Rapport Centrale, 2001

« Notons toutefois quelques points qui ne sont pas toujours connus : les projecteurs spectraux : si un endomorphisme est diagonalisable, il est combinaison linéaire des projecteurs associés à la somme des sous-espaces propres. [...] »

Voir à ce sujet l'application 2 du chapitre 2.

Corollaire 14.1

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
- $n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \dim(\text{Ker}(M - \lambda I_n)) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (n - \text{rg}(M - \lambda I_n))$;
- $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \text{Ker}(M - \lambda I_n)$.

► Pour s'entraîner : ex. 9 et 10.

Application 2

Étude d'une matrice triangulaire

Soit a, b, c, d, e et f six nombres complexes. Déterminer une condition nécessaire et suffisante

pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & c & d \\ 0 & a & f \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

- Si $a \neq b$, alors $\text{Sp } M = \{a, b\}$.

$$M - aI_3 = \begin{pmatrix} 0 & c & d \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & b - a \end{pmatrix}$$

- $\dim(\text{Ker}(M - aI_3)) = \begin{cases} 2 & \text{si } c = 0 \\ 1 & \text{si } c \neq 0 \end{cases}$

$$\bullet M - bI_3 = \begin{pmatrix} a - b & c & d \\ 0 & a - b & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\dim(\text{Ker}(M - bI_3)) = 1$.

Dans ce cas, M est diagonalisable si, et seulement si, $c = 0$.

- Si $a = b$, alors $\text{Sp } M = \{a\}$.

Dans ce cas, la matrice M est diagonalisable si, et seulement si, $\dim(\text{Ker}(M - aI_3)) = 3$, ce qui équivaut à $M = aI_3$.

Ainsi, M est diagonalisable si, et seulement si :

$$(a \neq b \text{ et } c = 0)$$

ou $(a = b \text{ et } c = d = f = 0)$.

3.3. Sous-espace stable et factorisation du polynôme caractéristique

Théorème 15

Soit n et r deux entiers tels que $0 < r < n$ et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

avec A dans $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, D dans $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ et B dans $\mathcal{M}_{r,(n-r)}(\mathbb{K})$.

Le polynôme caractéristique de M se factorise en :

$$P_M(x) = P_A(x)P_D(x).$$

Corollaire 15.1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E , V un sous-espace de E stable par f et $\hat{f}$ l'endomorphisme de V induit par f .

Le polynôme caractéristique de $\hat{f}$ divise celui de f dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

Soit n la dimension de E , r la dimension de V , $b = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à V , A la matrice de $\hat{f}$ relativement à la base $(e_1, \dots, e_r)$ de V et M la matrice de f relativement à la base b .

On sait que $P_A = P_{\hat{f}}$, $P_M = P_f$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Le théorème 15 permet de conclure.

Exemple

Soit E un espace vectoriel de dimension 4, $B = (e_1, \dots, e_4)$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = 4e_1 - e_3; f(e_2) = 3e_2 + e_4; f(e_3) = 2e_1 + e_3; f(e_4) = 2e_2 + 2e_4.$$

Par construction :

$$f(e_1) \in \text{Vect}(e_1, e_3) \text{ et } f(e_3) \in \text{Vect}(e_1, e_3).$$

Donc $\text{Vect}(e_1, e_3)$ est stable par f .

De même $\text{Vect}(e_2, e_4)$ est stable par f .

La matrice M' de f relativement à la base $B' = (e_1, e_3, e_2, e_4)$ est indiquée ci-contre :

$$M' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rapport Centrale, 1997

« Il y a souvent des maladroites pour le calcul des polynômes caractéristiques : le candidat développe souvent l'expression avant de chercher la factorisation, alors qu'il faut faire l'inverse. »

Rapport Centrale, 1998

« La recherche de sous-espaces stables par un endomorphisme est un moyen souvent commode de réduction sans calculs du polynôme caractéristique. »

Donc, le polynôme caractéristique de f est :

$$P_f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x + 4) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4).$$

E est de dimension 4 et f admet quatre valeurs propres distinctes. Donc f est diagonalisable.

► Pour s'entraîner : ex. 11.

3.4. Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Rappel

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et α une racine de ce polynôme. L'**ordre de multiplicité** de α est, par définition, le plus grand entier k tel que $(X - \alpha)^k$ divise P .

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f , (respectivement : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \text{Sp } M$).

L'**ordre de multiplicité de la valeur propre** λ est son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de l'endomorphisme f (respectivement de la matrice M).

- Une valeur propre d'un endomorphisme ou d'une **matrice** est dite **simple** si son ordre de multiplicité vaut 1.
- Une valeur propre d'un endomorphisme ou d'une **matrice** est dite **multiple** si c'est une racine multiple du polynôme caractéristique de f .
- Une valeur propre d'un endomorphisme ou d'une **matrice** est dite **double** si son ordre de multiplicité vaut 2.

Corollaire 15.2

- Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E , λ une valeur propre de f et m_λ son ordre de multiplicité. Alors :

$$1 \leq \dim \text{Ker} (f - \lambda \text{Id}_E) \leq m_\lambda.$$

L'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est supérieur ou égal à la dimension du sous-espace propre associé à λ .

- Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, λ une valeur propre de M et m_λ son ordre de multiplicité. Alors :

$$1 \leq \dim \text{Ker} (M - \lambda I_n) \leq m_\lambda.$$

Démonstration

- Notons $k_\lambda = \dim(\text{Ker} (f - \lambda \text{Id}_E))$. Puisque λ est valeur propre, $k_\lambda \geq 1$.
- Le sous-espace propre associé à λ est stable par f et l'endomorphisme induit par f sur $\text{Ker} (f - \lambda \text{Id}_E)$ est l'homothétie $\lambda \text{Id}_{\text{Ker} (f - \lambda \text{Id}_E)}$.

Le polynôme caractéristique de cet endomorphisme induit est $(\lambda - x)^{k_\lambda}$. Il divise le polynôme caractéristique de f , donc $k_\lambda \leq m_\lambda$.

Le corollaire suivant est immédiat. Il est très utilisé.

Corollaire 15.3

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre simple de M . Le sous-espace propre associé à λ est de dimension 1.

Théorème 16

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E .

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de f et $m_1, \dots, m_k$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Si le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{K}[X]$, alors :

$$\text{Det } f = \prod_{i=1}^k \lambda_i^{m_i}; \quad \text{tr } f = \sum_{i=1}^k m_i \lambda_i.$$

Démonstration

Soit P_f le polynôme caractéristique de f . Puisqu'il est scindé, on a :

$$P_f(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}.$$

Par ailleurs :

$$P_f(x) = (-1)^n (x^n - \text{tr}(f)x + \dots + (-1)^n \text{Det } f).$$

L'expression des coefficients d'un polynôme en fonction de ses racines permet de conclure.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ces formules sont toujours valables car tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé. La trace d'une matrice carrée complexe est égale à la somme de ses valeurs propres, comptées avec leur ordre de multiplicité. Le déterminant d'une matrice carrée complexe est égal au produit de ses valeurs propres, comptées avec leur ordre de multiplicité.

Corollaire 16.1

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de M et $m_1, \dots, m_k$ leurs ordres de multiplicités respectifs.

Si le polynôme caractéristique de M est scindé dans $\mathbb{K}[X]$, alors :

$$\text{Det } M = \prod_{i=1}^k \lambda_i^{m_i}; \quad \text{tr } M = \sum_{i=1}^k m_i \lambda_i.$$

3.5. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Théorème 17

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E .

f est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et, pour toute valeur propre λ de f , l'ordre de multiplicité de λ est la dimension du sous-espace propre associé à λ .

Démonstration

Les notations utilisées sont les suivantes.

L'endomorphisme f admet p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Pour tout i de $\llbracket 1, p \rrbracket$, m_i est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i et k_i est la dimension du sous-espace propre associé.

- Supposons f diagonalisable.

Alors, $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E)$ et la matrice de f dans une base adaptée à cette décomposition est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 \text{I}_{k_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2 \text{I}_{k_2}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{\lambda_p \text{I}_{k_p}} \end{pmatrix}$$

On en déduit : $P_f(x) = \prod_{i=1}^p (\lambda_i - x)^{k_i}$ et $k_i = m_i$ pour tout i .

- Réciproquement, si le polynôme caractéristique de f est scindé et si de plus, pour tout i , $m_i = k_i$, alors :

$$\dim E = \sum_{i=1}^p \dim \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E)$$

et f est diagonalisable.

Réfléchissez avant de calculer !

Rapport TPE, 1997

« Dans les exercices sur la diagonalisation, les moins bons candidats se précipitent trop souvent sur le calcul du polynôme caractéristique, qui ne permet pas toujours de conclure. »

Corollaire 17.1

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, le polynôme caractéristique de M est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et, pour toute valeur propre λ de M , l'ordre de multiplicité de λ est la dimension du sous-espace propre associé à λ .

Application 3

Une utilisation des valeurs propres multiples

Soit un entier $n \geq 2$, a et b deux complexes tels que $a \neq 0$ et A la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & \cdots & a \\ a & b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & \cdots & a & b \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer que A admet un sous-espace propre de dimension $n - 1$.
- 2) En déduire que A est diagonalisable.
- 3) Calculer $\text{Det } A$.

$$1) A - (b - a)\text{I}_n = \begin{pmatrix} a & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & \cdots & a & a \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 1, donc $(b - a)$ est valeur propre de A et le sous-espace propre associé est de dimension $n - 1$.

- 2) Le polynôme $(x - (b - a))^{n-1}$ divise le polynôme caractéristique de A qui est donc de la forme :

$$(-1)^n (x - (b - a))^{n-1} (x - \lambda).$$

Ainsi :

$$\text{tr } A = (n - 1)(b - a) + \lambda = nb.$$

Le scalaire $\lambda = b + (n - 1)a$ est valeur propre de A .

Or $b - a \neq b + (n - 1)a$, donc $b + (n - 1)a$ est valeur propre simple de A .

La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n , donc A est diagonalisable.

$$3) \text{ Det} A = (b + (n - 1)a)(b - a)^{n-1}.$$

4 Polynômes d'un endomorphisme

4.1. Définition des polynômes d'endomorphisme (ou de matrice)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E .

Pour tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré d :

$$P = \sum_{i=0}^d \alpha_i X^i,$$

le **polynôme d'endomorphisme** $P(u)$ est l'endomorphisme :

$$P(u) = \alpha_0 \text{Id}_E + \alpha_1 u + \cdots + \alpha_d u^d.$$

De même, si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le **polynôme de matrice** $P(M)$ est la matrice :

$$P(M) = \alpha_0 I_n + \alpha_1 M + \cdots + \alpha_d M^d.$$

N'oubliez pas que les puissances de u utilisées ici sont les puissances pour la loi de composition, définies par récurrence en posant :

$u^0 = \text{Id}_E$ et, pour tout entier $n \geq 0$,

$$u^{n+1} = u^n \circ u.$$

4.2. L'application $P \mapsto P(u)$

Soit u un endomorphisme du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E :

$$P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^p b_k X^k$$

deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et α un scalaire.

Les deux égalités suivantes sont immédiates :

$$(P + Q)(u) = P(u) + Q(u),$$

$$(\alpha P)(u) = \alpha(P(u)).$$

La distributivité de la composition des endomorphismes par rapport à l'addition permet d'écrire :

$$\sum_{j=0}^{p+n} \left(\sum_{i=0}^j a_i b_{j-i} \right) u^j = \left(\sum_{i=0}^n a_i u^i \right) \circ \left(\sum_{k=0}^p b_k u^k \right).$$

D'où la troisième égalité :

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$

Ces trois égalités permettent de prouver le *théorème* suivant :

Théorème 18

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E . L'application suivante :

$$\Phi_u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ P \longmapsto \Phi_u(P) = P(u) \end{cases}$$

est un morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$.

4.3. Polynômes d'endomorphisme, sous-espaces stables et sous-espaces propres

Théorème 19

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E .

Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $\text{Im}(P(u))$ et $\text{Ker}(P(u))$ sont stables par u ;
- les sous-espaces propres de u sont stables par $P(u)$.

Démonstration

L'égalité $P(u) \circ u = u \circ P(u)$ est immédiate et permet de conclure.

Théorème 20

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, u un endomorphisme de E et P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

- Tout vecteur propre de u est vecteur propre de $P(u)$.
- Si λ est valeur propre de u , alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.

Démonstration

Soit x un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ .

Il a été montré précédemment qu'alors $\forall i \in \mathbb{N} \quad u^i(x) = \lambda^i x$.

Donc, si $P(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k$, alors :

$$P(u)(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u^k(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k x = P(\lambda)x.$$

Le vecteur x est vecteur propre de $P(u)$ relativement à la valeur propre $P(\lambda)$.

Application 4

Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice circulante

(d'après Centrale, 1998 PSI, Math II)

1) Soit la matrice :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^k)$ l'endomorphisme canoniquement associé à J .

On note aussi $c = (c_0, \dots, c_{k-1})$ la base canonique de $\mathbb{C}^k$. Calculer $u(c_0), \dots, u(c_{k-1})$.

Soit $r \in \{0, \dots, k\}$.

Calculer $u^r(c_0), \dots, u^r(c_{k-1})$.

En déduire la valeur de J^r pour tout r de $\{0, \dots, k\}$.

2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de J .

3) Soit $\omega = e^{2i\pi/k}$.

Pour tout $r \in \{0, \dots, k-1\}$, on pose :

$$e_r = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^r \\ \omega^{2r} \\ \vdots \\ \omega^{(k-1)r} \end{bmatrix}.$$

Montrer que $e = (e_0, \dots, e_{k-1})$ est une base de $\mathbb{C}^k$.

Calculer la matrice de u dans la base e .

Pour toute la suite du problème, on notera A la matrice de passage de la base c vers la base e .

4) Soit $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$. On note :

$$R(X) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i.$$

Préciser la forme de la matrice $R(J)$ et la diagonaliser.

1) D'après la définition de J , on a :

$$\begin{cases} u(c_0) = c_{k-1} \\ u(c_1) = c_0 \\ \dots \\ u(c_{k-1}) = c_{k-2} \end{cases}$$

Donc : $\forall r \in \{1, \dots, k-1\}$

$$\begin{cases} u^r(c_i) = c_{i-r+k} & \text{si } i \in \{0, \dots, r-1\} \\ u^r(c_i) = c_{i-r} & \text{si } i \in \{r, \dots, k-1\} \end{cases}.$$

De plus, $u^k = u^0 = \text{Id}_{\mathbb{C}^k}$ et :

$$J^r = \begin{pmatrix} 0 & I_{k-r} \\ I_r & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé.

Puisque $u^k(x) = \lambda^k x = x$ et $x \neq 0$, $\lambda^k = 1$ et :

$$\text{Sp } u \subset \{\omega^r \mid r \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket\}.$$

Pour tout r de $\llbracket 0, k-1 \rrbracket$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^r \\ \omega^{2r} \\ \vdots \\ \omega^{(k-1)r} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \omega^r \\ \omega^{2r} \\ \vdots \\ \omega^{(k-1)r} \\ 1 \end{bmatrix} = \omega^r \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^r \\ \omega^{2r} \\ \vdots \\ \omega^{(k-1)r} \end{bmatrix}$$

Ainsi, $\text{Sp } u = \{\omega^r \mid r \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket\}$ et :

$$\forall r \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket \quad \text{Ker}(u - \omega^r \text{Id}_{\mathbb{C}^k}) = \text{Vect}(e_r)$$

3) D'après la question précédente, e est une base de $\mathbb{C}^k$ formée de vecteurs propres de u .

$$M_e(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega^r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega^{(k-1)r} \end{bmatrix}$$

4) D'après la question 1),

$$R(J) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_{k-1} \\ a_{k-1} & a_0 & a_1 & \ddots & & a_{k-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & & & a_{k-1} & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_{k-1} & a_0 \end{bmatrix}$$

Une telle matrice est appelée une **matrice circulante**.

La famille e est aussi une base de vecteurs propres de $R(J)$ et la matrice A diagonalise $R(J)$.

$$A^{-1}R(J)A = \begin{bmatrix} R(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R(\omega^r) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & R(\omega^{(k-1)r}) \end{bmatrix}$$

4.4. Les polynômes annulateurs d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, u un endomorphisme de E et P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

On dit que le polynôme P est un **polynôme annulateur de l'endomorphisme** u si $P(u)$ est l'endomorphisme nul.

Exemple : Existence d'un polynôme annulateur non nul pour tout endomorphisme d'un espace de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E .

L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie n^2 et la famille :

$(\text{Id}_E, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ est une famille de $n^2 + 1$ éléments de $\mathcal{L}(E)$. Cette famille est donc liée.

Il existe $n^2 + 1$ scalaires non tous nuls, $(\alpha_0, \dots, \alpha_n^2)$, tels que :

$$\sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

$$\sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i X^i \text{ est un polynôme annulateur non nul de } f.$$

Corollaire 20.1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, u un endomorphisme de E et P un polynôme annulateur de u .

Toute valeur propre λ de u est racine du polynôme P :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u) \quad P(\lambda) = 0.$$

Rapport Centrale, 1997

« [...] La recherche de polynômes annulateurs d'un endomorphisme est souvent très efficace pour trouver ses éléments propres, mais la définition de ceux-ci ne peut s'y réduire. »

Démonstration

Soit x un vecteur propre de u associé à λ .

La démonstration du *théorème* précédent montre que :

$$P(u)(x) = P(\lambda)x.$$

Par hypothèse, $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc $P(\lambda)x = 0_E$. Or $x \neq 0_E$, donc $P(\lambda) = 0$.

Évidemment, si le polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors toute valeur propre de M est racine de P .

Exemple

- Si p est un projecteur, le polynôme $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p et :

$$\text{Sp}(p) \subset \{0, 1\}.$$

- Si s est une symétrie, le polynôme $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de s et :

$$\text{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}.$$

Rapport Centrale, 1998

« Le calcul du polynôme caractéristique n'est pas l'unique méthode permettant d'obtenir les valeurs propres d'une matrice. La recherche d'un polynôme annulateur est souvent plus judicieuse. Parfois, Maple permet de conjecturer une base de vecteurs propres. Il suffit alors de le vérifier. »

Rapport E3A, 2002

« La majorité des candidats savent exploiter l'existence d'une base de diagonalisation pour la recherche de noyau et d'image, les erreurs commises sont dues à la non-connaissance des valeurs propres d'une symétrie. »

5 Endomorphismes et matrices diagonalisables. Un dernier critère

5.1. Polynôme annulateur scindé à racines simples

Exemples

- La matrice triangulaire $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. (Pourquoi ?). Le polynôme X^2 est un polynôme annulateur de M , il est scindé mais n'est pas à racines simples.

On montre que tout polynôme annulateur de M est multiple de X^2 .

La matrice M , qui n'est pas diagonalisable, n'admet aucun polynôme annulateur scindé et n'ayant que des racines simples.

- Dans le cas des projecteurs et symétries, traité à la fin du paragraphe précédent, on a affaire à des endomorphismes diagonalisables qui admettent un polynôme annulateur scindé à racines simples.

5.2. Un dernier critère

Théorème 21

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E .

f est diagonalisable si, et seulement si il existe un polynôme annulateur de f , scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et ayant toutes ses racines simples.

Démonstration

- Supposons f diagonalisable.

Les notations utilisées sont les suivantes.

L'endomorphisme f admet p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Le polynôme Q est défini par :

$$Q(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i).$$

La matrice M de f relativement à une base de vecteurs propres est diagonale et il est aisé de constater que $Q(M) = 0_n$. Donc Q est un polynôme annulateur scindé à racines simples de l'endomorphisme f .

- Réciproquement, supposons l'existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples de f :

$$S = \prod_{i=1}^k (X - a_i).$$

Si $k = 1$, le problème est trivial.

Supposons $k \geq 2$. Les éléments $a_1, \dots, a_k$ de $\mathbb{K}$ sont distincts deux à deux.

Pour tout i de $\llbracket 1, k \rrbracket$, notons L_i le i -ième polynôme d'interpolation de Lagrange en $(a_1, \dots, a_k)$:

$$L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq k \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

La théorie de l'interpolation de Lagrange implique :

$$1 = \sum_{i=1}^k L_i(X).$$

D'après la définition des polynômes d'endomorphismes :

$$\text{Id}_E = \sum_{i=1}^k L_i(f) \quad \text{et} \quad \forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^k L_i(f)(x).$$

Il suffit alors de prouver que :

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket \quad L_i(f)(x) \in \text{Ker}(f - a_i \text{Id}_E)$$

pour obtenir

$$E = \sum_{i=1}^k \text{Ker}(f - a_i \text{Id}_E)$$

et terminer la démonstration.

De cette démonstration, on déduit aussi le fait que l'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme $Q(X) = \prod_{\lambda \in Sp(f)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de f .

Rapport CCP, 1997

« Certains candidats ne connaissent pas d'autre condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité que l'existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples, d'autres ignorent totalement cette condition. »

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Encore cette année, les polynômes d'endomorphismes ont donné lieu à de nombreux non-sens. »

Corollaire 21.1

Soit u un endomorphisme diagonalisable de l'espace vectoriel de dimension finie E et V un sous-espace vectoriel de E stable par u .

L'endomorphisme $\hat{u}$ de V induit par u est aussi diagonalisable.

Démonstration

Un polynôme annulateur de u est aussi un polynôme annulateur de $\hat{u}$. Le théorème 21 permet de conclure.

Corollaire 21.2

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si il existe un polynôme annulateur de M , scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et ayant toutes ses racines simples.

► Pour s'entraîner : ex. 12.

Application 5

Matrices diagonalisables de rang 1

(d'après Mines-Ponts, 1992, option M Math 2)

Dans ce problème, n est un entier ≥ 2 . Les éléments de $\mathbb{K}^n$ sont notés matriciellement :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

1) Soit m un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.

a) Démontrer que m est de rang 1 si, et seulement si il existe un vecteur X de $\mathbb{K}^n$ et une forme linéaire u définie sur $\mathbb{K}^n$, non nuls, tels que, pour tout vecteur T de $\mathbb{K}^n$:

$$m(T) = u(T)X.$$

b) Déterminer la matrice M associée à cet endomorphisme dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

c) En déduire l'expression générale d'une matrice M de rang 1 à l'aide du produit d'une matrice colonne X et d'une matrice ligne ${}^tY$.

2) Soit X et Y deux éléments de $\mathbb{K}^n$, A la matrice de rang 1 définie par $A = X {}^tY$ et a le scalaire ${}^tXY$.

a) Démontrer que la matrice A annule un polynôme de degré 2.

En déduire les valeurs propres possibles de A .

b) Pour quelles valeurs du réel a , la matrice A est-elle diagonalisable ?

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

1) a) • Supposons m de rang 1. L'image de m est une droite ; soit X un vecteur directeur de cette

droite. Alors X est non nul et :

$$\forall T \in \mathbb{K}^n \quad \exists ! \quad u(T) \in \mathbb{K} \quad m(T) = u(T)X.$$

Ainsi définie, u est une application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$. La linéarité de m entraîne celle de u , donc u est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$, non nulle car m n'est pas l'endomorphisme nul.

• Réciproquement, si m s'écrit $m(T) = u(T)X$, avec X vecteur non nul et u forme linéaire non nulle, alors m est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont l'image est $\text{Vect}(X)$. Il est de rang 1.

b) Soit $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et m un endomorphisme de rang 1, s'écrivant comme précédemment : $m(T) = u(T)X$.

En notant $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i$ et $u(E_j) = y_j$, on a :

$$m(E_j) = \begin{pmatrix} y_j x_1 \\ \vdots \\ y_j x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = (x_i y_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

c) Soit M une matrice de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

D'après ce qui précède, il existe :

$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^{2n}$ tel que :

$$M = (x_i y_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1 \dots y_n) = X {}^tY.$$

2) a) Si $A = X {}^tY$, alors :

$$A^2 = X ({}^tY X) {}^tY = a X {}^tY = a A.$$

Le polynôme $P(t) = t^2 - at$ est un polynôme annulateur de A et $\text{Sp } A \subset \{0, a\}$.

b) • Si $a \neq 0$, le polynôme P est scindé à racines simples. A est diagonalisable.

• Si $a = 0$, A n'a qu'une seule valeur propre,

0, le sous-espace propre associé, $\text{Ker } A$, est de dimension $n - 1$. A n'est pas diagonalisable.

• De plus $a = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \text{tr } A$. Ceci prouve qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.

6 Endomorphismes et matrices trigonalisables

6.1. Endomorphismes et matrices trigonalisables, une condition nécessaire

Rappel

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un **endomorphisme** f de E est **trigonalisable** s'il existe une base B de E telle que la matrice de f relativement à la base B soit triangulaire.

En termes matriciels : une **matrice** A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) si elle est semblable à une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 22

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et B une base de E .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- la matrice A est trigonalisable ;
- l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est trigonalisable ;
- l'endomorphisme de E tel que $M_B(f) = A$ est trigonalisable.

Théorème 23

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Si l'endomorphisme f de E (respectivement, la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est trigonalisable, son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

Le polynôme caractéristique de la matrice triangulaire $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :

$$P_T(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_{ii}).$$

Il est scindé dans $\mathbb{K}[X]$. Le *théorème* en découle.

Exemple

La matrice :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où $\theta \neq 0[\pi]$, n'est pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car son polynôme caractéristique :

$$X^2 + 2\cos(\theta)X + 1$$

n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

6.2. La réciproque du théorème 23

Le théorème 23 est élémentaire, sa réciproque l'est moins.

Théorème 24

Un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie (respectivement une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

La démonstration de ce théorème est hors programme.

Sachant que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé, le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 24.1

- Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
- Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.

Exemple : Matrices nilpotentes, le retour

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Supposons la matrice M nilpotente. Alors :

$$M^n = 0_n.$$

On en déduit $\text{Sp } M \subset \{0\}$ et $\text{Det } M = 0$. Donc : $\text{Sp } M = \{0\}$.

- Réciproquement, supposons que $\text{Sp } M = \{0\}$.

La matrice complexe M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Sur la diagonale d'une matrice triangulaire semblable à M se trouvent les valeurs propres de M , c'est-à-dire 0. Donc M est nilpotente.

Cet exemple prouve qu'une matrice complexe M est nilpotente si, et seulement si, $\text{Sp } M = \{0\}$.

► Pour s'entraîner : ex. 13.

Corollaire 24.2

- Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable si, et seulement si, elle admet un polynôme annulateur scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
- Un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable si, et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant un polynôme annulateur scindé dans $\mathbb{R}[X]$

et $Q = \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)^{r_i}$ un tel polynôme où les α_i sont des réels distincts deux à deux.

Alors $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$.

Donc le polynôme caractéristique de M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Application 6

Trigonalisation des matrices d'ordre 2 ou 3

Les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sont notés en colonne.

Partie A

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique, P_M , est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

1) Que dire si P_M a deux racines distinctes dans $\mathbb{K}$?

2) Dans cette question, P_M a une seule racine, notée α .

a) À quelle condition M est-elle diagonalisable ?

b) Soit V_1 un vecteur propre de M et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dont la première colonne est V_1 .

Prouver que P trigonalise M , c'est-à-dire que $P^{-1}MP$ est triangulaire.

3) Trigonaliser la matrice $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Partie B

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique, P_A , est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

1) Que dire si P_A a trois racines distinctes dans $\mathbb{K}$?

2) Dans cette question, P_A a deux racines distinctes dans $\mathbb{K}$. La racine simple est notée α et la double β .

a) À quelle condition A est-elle diagonalisable ?

b) Soit V_1 et V_2 des vecteurs propres de A associés respectivement à α et β et Q une matrice inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ dont les deux premières colonnes sont V_1 et V_2 .

Prouver que Q trigonalise A .

c) Trigonaliser la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Dans cette question P_A a une racine triple notée α .

a) À quelle condition A est-elle diagonalisable ?

b) Dans cette question, $\text{rg}(A - \alpha I_3) = 1$.

• Déterminer une technique de trigonalisation de A .

• Trigonaliser la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Dans cette question, $\text{rg}(A - \alpha I_3) = 2$.

• Montrer que $N = (A - \alpha I_3)$ est nilpotente d'indice 3.

Soit V_1 un vecteur colonne de $\mathbb{K}^3$ tel que $N^2 V_1 \neq 0$.

On pose $V_2 = NV_1$ et $V_3 = NV_2$.

• Montrer que la matrice dont les colonnes sont V_1 , V_2 et V_3 est inversible et trigonalise A .

• Trigonaliser la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

A. 1) Dans ce cas, M est diagonalisable.

2) a) Ici, M est diagonalisable si, et seulement si, $M = \alpha I_2$.

b) La première colonne de $P^{-1}MP$ est $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}MP$ est triangulaire.

En effet, soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associé à M . On a $f(V_1) = \alpha V_1$, ce qui donne la première colonne de la matrice de f dans une base (V_1, V_2) de $\mathbb{K}^2$.

3) La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ trigonalise M_1 .

B. 1) Dans ce cas, A est diagonalisable.

2) a) Ici, A est diagonalisable si, et seulement si, $\text{rg}(A - \beta I_3) = 1$.

b) Les deux premières colonnes de $Q^{-1}AQ$ sont $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est donc triangulaire.

En effet, soit g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à A . On a $g(V_1) = \alpha V_1$ et $g(V_2) = \beta V_2$ ce qui donne les deux premières colonnes de la matrice de g dans une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathbb{K}^3$.

c) La matrice indiquée admet 1 et 2 comme valeurs propres. On calculera des vecteurs propres associés et on trouvera que :

$$\text{la matrice } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ trigonalise}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) a) Dans ce cas, A est diagonalisable si, et seulement si, $A = \alpha I_3$.

b) Ici, le sous-espace propre associé à α est de dimension 2.

• Soit (V_1, V_2) une base de $\text{Ker}(A - \alpha I_3)$.

Le *théorème* de la base incomplète permet d'affirmer l'existence d'un vecteur V_3 tel que (V_1, V_2, V_3) soit une base de $\mathbb{K}^3$.

La matrice Q dont les colonnes sont V_1, V_2 et V_3 est inversible et trigonalise A .

• La matrice A_2 admet 2 comme valeur propre triple.

On calculera une base de $\text{Ker}(A_2 - 2I_3)$ qui est de dimension 2.

$$\text{On vérifiera que la matrice } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

trigonalise A_2 .

c) • La matrice A est semblable à une matrice triangulaire T (corollaire 24.1). On a :

$$\text{Sp } T = \text{Sp } A = \{\alpha\},$$

donc $(T - \alpha I_3)$ est triangulaire avec des zéros sur la diagonale et $(T - \alpha I_3)^3 = 0_3$.

Puisque A et T sont semblables, on a aussi :

$$(A - \alpha I_3)^3 = 0_3.$$

Si l'on avait $(A - \alpha I_3)^2 = 0_3$, on aurait aussi :

$$\text{Im}(A - \alpha I_3) \subset \text{Ker}(A - \alpha I_3).$$

Ceci est impossible, donc $(A - \alpha I_3)$ est nilpotente d'indice 3.

• On (re)démontrera que, si N est une matrice nilpotente d'indice 3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ et si V est un vecteur colonne de $\mathbb{K}^3$ tel que $N^2 V \neq 0$, alors la famille $(V, NV, N^2 V)$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

De plus, la matrice Q dont les colonnes sont $(V, NV, N^2 V)$ trigonalise N et A .

$$\bullet \text{ La matrice } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ trigonalise}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7 Un complément sur les polynômes (programme PSI)

7.1. Quelques résultats sur l'anneau des polynômes

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif. L'élément neutre de l'addition est noté 0_A .

Un **idéal** de A est une partie I de A telle que :

- $0_A \in I$,
- $\forall (x, y) \in I^2 \quad x - y \in I$,
- $\forall (x, a) \in I \times A \quad x \cdot a \in I$.

Exemple

Soit p un élément de A , vous prouverez que l'ensemble $I = p \cdot A$ des multiples de p est un idéal de l'anneau $(A, +, \cdot)$.

La définition proposée est volontairement utilitaire. Vous aurez remarqué que les deux premiers points équivalent à I est un sous-groupe de $(A, +)$.

Théorème 25

Soit I un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

- Il existe un polynôme P tel que I soit l'ensemble des multiples de P :

$$\exists P \in \mathbb{K}[X] \quad I = P\mathbb{K}[X] \quad (1)$$

Un tel polynôme est appelé un **générateur de l'idéal** I .

- Lorsque $I \neq \{0\}$, le polynôme P qui engendre l'idéal I n'est pas unique. Tout polynôme non nul de I et de degré minimal convient.

Démonstration

Le cas $I = \{0\}$ est trivial.

Supposons $I \neq \{0\}$. Soit P un élément non nul de I de degré minimal.

Puisque I est un idéal, tout multiple de P est dans I :

$$P\mathbb{K}[X] \subset I.$$

Inversement, soit S un élément de I .

Effectuons la division euclidienne de S par P :

$$S = PQ + R \quad \text{avec} \quad \deg R < \deg P.$$

Or P est un élément de I , donc $R = S - PQ \in I$.

De plus $\deg R < \deg P$ et P est de degré minimal parmi les éléments non nuls de I . Donc $R = 0$ et $S \in P\mathbb{K}[X]$.

Finalement : $I = P\mathbb{K}[X]$.

Rapport Mines-Ponts, 2001

« La partie la mieux maîtrisée est l'algèbre linéaire et en particulier la réduction des endomorphismes. En revanche, les connaissances sur les structures usuelles : groupes, anneaux, sont insuffisantes. »

7.2. L'application $P \mapsto P(u)$ **Rappel**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E . L'application suivante :

$$\Phi_u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ P \longmapsto \Phi_u(P) = P(u) \end{cases}$$

est un morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Théorème 26

- L'ensemble, noté $\mathbb{K}[u]$, des polynômes de l'endomorphisme u est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.
- L'ensemble I_u des polynômes annulateurs de u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

- Par définition $\mathbb{K}[u] = \text{Im } \Phi_u$. Le premier résultat en découle.

- On a $I_u = \text{Ker } \Phi_u$, donc I_u est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$.

Soit $P \in I_u$.

Pour tout polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Donc $PQ \in I_u$. Ceci prouve que I_u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Application 7

Le polynôme minimal d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \geq 1$ et u un endomorphisme de E .

1) Montrer que le morphisme d'algèbre Φ_u n'est pas injectif.

2) Prouver l'existence d'un unique polynôme unitaire, noté Q_u , tel que l'ensemble I_u des polynômes annulateurs de u soit l'ensemble des multiples de Q_u .

Le polynôme Q_u est alors appelé le polynôme minimal de l'endomorphisme u .

3) Déterminer le polynôme minimal d'une homothétie, d'un projecteur non nul et différent de Id_E , d'une symétrie de E différente de $\pm \text{Id}_E$.

4) Soit d le degré du polynôme minimal de l'endomorphisme u .

a) Montrer que la famille $(u^k)_{k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket}$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que la famille $(u^k)_{k \in \llbracket 0, d \rrbracket}$ est une famille liée de $\mathcal{L}(E)$.

c) Montrer que la famille $(u^k)_{k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{K}[u] = \text{Vect}\{u^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1) L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie alors que $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie. Donc l'application linéaire Φ_u n'est pas injective.

2) • L'ensemble I_u des polynômes annulateurs de u est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$.

Il est engendré par un polynôme non nul :

$$\exists P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \quad I_u = P\mathbb{K}[X].$$

Soit α le coefficient dominant de P , $\alpha \neq 0$ et :

$$I_u = P\mathbb{K}[X] = \frac{1}{\alpha} P\mathbb{K}[X].$$

Donc I_u est l'ensemble des multiples du polynôme unitaire $\frac{1}{\alpha} P$.

• Soit Q un autre polynôme unitaire engendrant I_u .

Q et $\frac{1}{\alpha} P$ sont multiples l'un de l'autre, de même degré et tous deux unitaires. On en déduit qu'ils sont égaux.

3) • Si u est une homothétie de E de rapport λ , alors $u = \lambda \text{Id}_E$.

Le polynôme $X - \lambda$ est un polynôme annulateur de u .

Il est unitaire et de degré minimum parmi les polynômes annulateurs de u . C'est le polynôme minimal de l'homothétie λId_E .

• Si u est un projecteur de E , alors $u^2 = u$.

Le polynôme $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de u .

Il est unitaire de degré minimal car u est non nul et différent de Id_E . C'est le polynôme minimal du projecteur u .

• Si u est une symétrie de E , alors $u^2 = \text{Id}_E$.

Le polynôme $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de u .

Il est unitaire et de degré minimal car u est différente de $\pm \text{Id}_E$. C'est le polynôme minimal de la symétrie u .

4) a) Une combinaison linéaire nulle de :

$(u^k)_{k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket}$ s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Alors, le polynôme $\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k X^k$ est un polynôme annulateur de u , de degré $< d$.

Donc, c'est le polynôme nul et pour tout i , $\alpha_i = 0$.

Ceci prouve que la famille $(u^k)_{k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket}$ est libre.

b) Notons $\sum_{k=0}^d \beta_k X^k$ le polynôme minimal de u (avec $\beta_d = 1$).

Alors $\sum_{k=0}^d \beta_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et les coefficients β_k ne sont pas tous nuls.

Donc, la famille $(u^k)_{k \in \llbracket 0, d \rrbracket}$ est liée.

c) Avec les notations du b), on a :

$$u^d = - \sum_{k=0}^{d-1} \beta_k u^k \in \text{Vect}(u^k)_{k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket}.$$

On en déduit par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u^n \in \text{Vect}(u^k)_{k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket}.$$

Ceci permet de conclure que $(u^k)_{k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket}$ est une base de $\text{Vect}\{u^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

7.3. Le théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 27

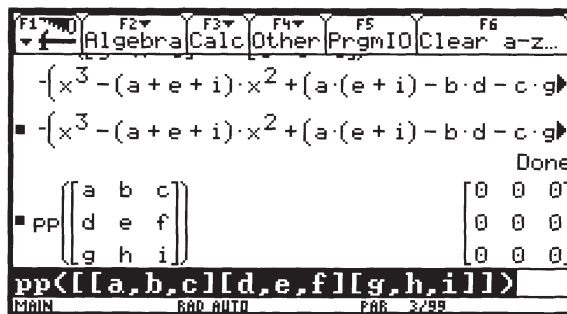
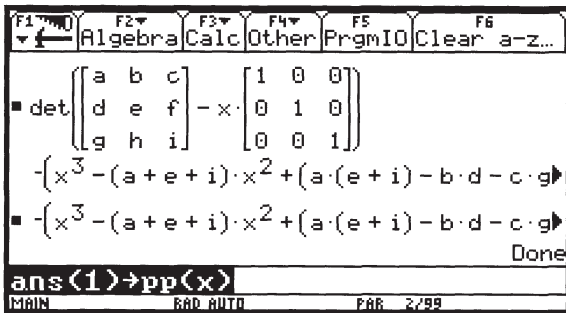
Le polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement d'un endomorphisme d'un espace de dimension n) est un polynôme annulateur de cette matrice (respectivement de cet endomorphisme).

La démonstration de ce *théorème* est hors programme, néanmoins l'étude des cas $n = 1, 2, 3$ fournit un exercice simple de calcul matriciel.

- À vous d'étudier le cas $n = 1$.
- Pour le cas $n = 2$, vérifier que, pour toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Les deux écrans ci-dessous traitent le cas $n = 3$ par le biais du calcul formel



Corollaire 27.1

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E . Si f admet n valeurs propres distinctes, f est diagonalisable.

Démonstration

Ce résultat a déjà été vu. En voici une autre démonstration.

Puisque f admet $n = \dim E$ valeurs propres distinctes, le polynôme caractéristique de f est scindé à racines simples. D'après le *théorème de Cayley-Hamilton*, ce polynôme est un polynôme annulateur de f .

Donc f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples et f est diagonalisable.



Arthur Cayley (1821-1895), mathématicien anglais.

Avocat talentueux, il décide à 42 ans de se consacrer aux mathématiques, moins rémunératrices.

Il publie plus de 900 articles sur pratiquement tous les domaines des mathématiques.

Dans son mémoire de 1858, il présente la théorie des matrices sous sa forme actuelle. Il démontre le *théorème de Cayley-Hamilton* dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.



William Rowan Hamilton (1801-1865), astronome, physicien et mathématicien irlandais. On lui doit la présentation des nombres complexes comme des couples de réels. La grande œuvre mathématique qui occupe la fin de sa vie est sa théorie des quaternions, $\mathbb{R}$ -algèbre non commutative de dimension 4. Cette théorie fournit un puissant outil de calcul en géométrie dans l'espace. Elle est utilisée en robotique industrielle.

Exemple : Inversion d'une matrice et polynôme caractéristique

Soit M une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P_M son polynôme caractéristique.

$$P_M(x) = (-1)^n(x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n).$$

D'après le *théorème de Cayley-Hamilton* :

$$M^n + a_1M^{n-1} + \dots + a_{n-1}M + a_nI_n = 0_n.$$

La matrice M est inversible, donc $a_n \neq 0$ et :

$$I_n = \frac{-1}{a_n}(M^{n-1} + a_1M^{n-2} + \dots + a_{n-1}I_n)M.$$

Ainsi :

$$M^{-1} = \frac{-1}{a_n}(M^{n-1} + a_1M^{n-2} + a_2M^{n-3} + \dots + a_{n-1}I_n).$$

► **Pour s'entraîner : ex. 15 et 16.**

FICHE MÉTHODE

● Pour calculer **les vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme** f (respectivement d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), on peut :

- étudier géométriquement l'équation $f(x) = \lambda x$ où x est un vecteur et λ un scalaire ;
- étudier algébriquement l'équation $MX = \lambda X$ en cherchant notamment des solutions « évidentes » ;
- calculer le polynôme caractéristique de M , le factoriser pour déterminer toutes ses racines, puis, pour chaque racine λ du polynôme caractéristique, calculer le sous-espace propre associé en résolvant le système :

$$(M - \lambda I_n)X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

● Pour démontrer qu'**un endomorphisme** f du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E **est diagonalisable**, on peut utiliser une des méthodes suivantes.

- On détermine une décomposition de E en une somme de sous-espaces stables par f :

$$E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

telle que, pour tout i , l'endomorphisme de V_i induit par f soit une homothétie (méthode la moins utilisée).

- On détermine une base de E telle que la matrice de f par rapport à cette base soit diagonale.
- On détermine une base de E formée de vecteurs propres de f .
- On prouve que la dimension de E est la somme des dimensions des sous-espaces propres de f :

$$\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E).$$

- On prouve que E est la somme des sous-espaces propres de f :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E).$$

- On montre que le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et que la dimension de chaque sous-espace propre de f est l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.
- On trouve un polynôme annulateur de f qui est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et qui n'a que des racines simples.

● Pour démontrer qu'**un endomorphisme** f du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E **n'est pas diagonalisable**, on peut :

- montrer que son polynôme caractéristique n'est pas scindé dans $\mathbb{K}[X]$, ou bien :
- déterminer une valeur propre multiple de f , λ , telle que la dimension du sous-espace propre associé à λ soit différente de l'ordre de multiplicité de λ .

Algorithmique TD 4

Exponentiation d'un nombre ou d'une matrice

L'algorithme d'exponentiation rapide proposé dans ce TD figure au programme des concours.

Il utilise, de façon implicite, l'écriture en base 2 d'un entier.

Algorithme « naïf »

Le premier écran (doc. 1) donne un programme très simple de calcul de la puissance n -ième d'un nombre ou d'une matrice. Le nombre d'itérations est n .

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Control I/O Var Find... Mode
:explant(X,n)
:Func
:Local i,p
:1→p
:For i,1,n
:  X*p→p
:EndFor
:Return p
:EndFunc
MAIN RAD AUTO 3D
  
```

Doc. 1

Algorithme « rapide »

Le deuxième écran (doc. 2) donne un programme qui effectue le même calcul par un algorithme appelé « exponentiation rapide » et dont le nombre d'itérations est environ $\log_2(n)$.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Control I/O Var Find... Mode
:exprap(X,n)
:Func
:Local nn,p,xx: n→nn: 1→p: X→xx
:While nn≥1
:  If mod(nn,2)=0 Then
:    nn/2→nn: xx^2→xx
:  Else
:    (nn-1)/2→nn: p*xx→p: xx^2→xx
:  EndIf
:EndWhile
:Return p
:EndFunc
MAIN RAD AUTO 3D
  
```

Doc. 2

Tests

Nous vous invitons à comparer les temps de calcul de la puissance 1 000 d'une matrice 3×3 :

- avec la fonction existante : $m^{1\,000}$,
- avec le programme : `exrap(m, 1000)`,
- avec le programme : `explant(m, 1000)`,

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
[1 1 1]
[0 1 1] → M
[0 0 1]
exrap(M, 1000)
[1 1 1]
[0 1 1]
[0 0 1]
[1 1000 500500]
[0 1 1000]
[0 0 1]
MAIN RAD AUTO 3D 2/99
  
```

Doc. 3

Exercice résolu

Les disques de Gerschgorin d'une matrice carrée

ÉNONCÉ

Dans cet exercice, $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Soit λ dans $\mathbb{C}$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |a_{ii} - \lambda| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}|$.

Montrer que λ n'est pas valeur propre de A .

2) Pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on note $D(a, r)$ le disque du plan complexe de centre a de rayon r :

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}.$$

Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $l_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}|$.

Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} D(a_{ii}, l_i)$.

Montrer que l'on a aussi $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} D(a_{ii}, c_i)$, où $c_i = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} |a_{ki}|$.

Les disques apparaissant dans cet exercice sont les disques de Gerschgorin de la matrice A . Ils permettent de localiser (assez grossièrement) les valeurs propres d'une matrice complexe.

3) Tracer les disques de Gerschgorin de la matrice de rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle θ et ses valeurs propres complexes.

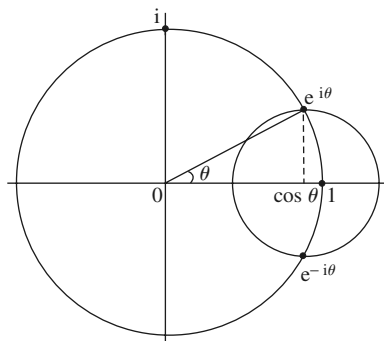
CONSEILS

Considérer un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel

que $AX = \lambda X$ et i_0 tel que :
 $|x_{i_0}| = \max_i |x_i|$.

On rappelle que, par hypothèse,

$$|\lambda - a_{i_0 i_0}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0 j}|.$$



SOLUTION

1) Suivons l'indication ci-contre.

La ligne i_0 de l'égalité $AX = \lambda X$ s'écrit :

$$(\lambda - a_{i_0 i_0})x_{i_0} = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} a_{i_0 j} x_j.$$

$$\text{Donc : } |(\lambda - a_{i_0 i_0})x_{i_0}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0 j} x_j| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0 j}| |x_{i_0}|.$$

Si $|x_{i_0}|$ est non nul, on peut simplifier par ce terme, on aboutit à une contradiction.

Donc $|x_{i_0}| = 0$, $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et λ n'est pas valeur propre de A .

2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. La question précédente prouve l'implication :

$$[\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda \notin D(a_{ii}, l_i)] \Rightarrow [\lambda \notin \text{Sp } A].$$

Par contraposée, on en déduit l'inclusion :

$$\text{Sp } A \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} D(a_{ii}, l_i).$$

En utilisant la transposée de A , on trouve l'autre inclusion.

$$3) A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Il y a un seul disque de Gerschgorin, de centre $\cos(\theta)$ de rayon $|\sin(\theta)|$.

Les valeurs propres complexes de A sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

Exercice résolu

Une étude sur les matrices 2×2

ÉNONCÉ

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}I_2$.

1) Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $(a - d)^2 + 4bc \neq 0$.

Soit f_A l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par $f_A(M) = AM - MA$.

2) Montrer que c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

3) Soit (E_1, E_2, E_3, E_4) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prouver que l'endomorphisme f_A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A est diagonalisable.

CONSEILS

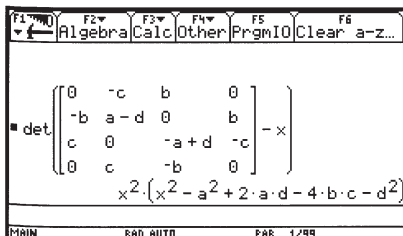
Les exercices sur les endomorphismes de l'espace des matrices ne sont jamais faciles.

Prenez le temps de revenir aux définitions

Ici, on trouve la première colonne de M_A en calculant :

$$\begin{aligned} f_A(E_1) &= AE_1 - E_1A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} \\ &= -bE_2 + cE_3. \end{aligned}$$

Faites les autres calculs.



SOLUTION

1) Le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(X) = X^2 - (a + d)X + ad - bc;$$

son discriminant est $\Delta = (a - d)^2 + 4bc$.

• Si $\Delta \neq 0$, alors A est diagonalisable.

• Réciproquement, si A est diagonalisable, alors A est semblable à une matrice diagonale $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$. De plus, $u \neq v$, car $A \notin \mathbb{C}I_2$. Donc le polynôme caractéristique de A a deux racines distinctes, et $\Delta \neq 0$.

2) La linéarité de f_A est immédiate.

3) Soit M_A la matrice de f_A dans la base (E_1, E_2, E_3, E_4) , vous calculerez $f_A(E_j)$ et trouverez :

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Le calcul par blocs permet de trouver le polynôme caractéristique de f_A :

$$P = X^2(X^2 - ((a - d)^2 + 4bc)) = X^2(X^2 - \Delta).$$

• Lorsque $\Delta \neq 0$, P admet deux racines simples et 0 comme racine double.

Pour la valeur propre double 0, $\dim \text{Ker}(f_A) = 4 - \text{rg}(M_A) = 2$.

Dans ce cas, f_A est diagonalisable.

• Lorsque $\Delta = 0$, P admet 0 comme racine quadruple, mais $\dim \text{Ker}(f_A) \neq 4$ car $M_A \neq 0$.

Dans ce cas, f_A n'est pas diagonalisable.

Le calcul par blocs permet de trouver le polynôme caractéristique de f_A :

$$P = X^2(X^2 - ((a - d)^2 + 4bc)) = X^2(X^2 - \Delta).$$

Exercices

1 1) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de l'endomorphisme $(P \longrightarrow P')$ de $\mathbb{R}[X]$.

2) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de l'endomorphisme $(f \longrightarrow f')$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

2 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E admettant deux valeurs propres distinctes λ et μ .

Montrer que, si x et y sont deux vecteurs propres associés respectivement à λ et μ , alors la famille (x, y) est libre et le vecteur $x + y$ n'est pas un vecteur propre de u .

3 Soit a un réel. À tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on associe $\Phi(P)$ défini par :

$$\Phi(P)(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x P(t) dt.$$

1) Prouver que, pour tout entier $n \geq 0$, Φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Montrer que cet endomorphisme est diagonalisable.

4 Dans cet exercice, la convention utilisée pour définir le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A d'ordre n est :

$$P_A(X) = \text{Det}(XI_n - A).$$

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1})$ un n -uplet d'éléments de $\mathbb{K}$.

1) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(Une matrice telle que A est appelée *matrice compagne*.)

2) En déduire que tout polynôme unitaire de degré n est le polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5 Montrer que les sous-espaces propres d'une matrice compagne A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont tous de dimension 1.

6 Soit A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, P une matrice inversible telle que :

$$A = PBP^{-1}.$$

Exprimer les vecteurs propres de A en fonction de ceux de B .

7 Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et inversible. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

8 Déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f , de rang 1, d'un espace de dimension n .

9 Soit un entier $n \geq 3$ et un réel a . Diagonaliser la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}$$

sans calculer le polynôme caractéristique de M .

Indication

- Calculer le rang de M et une base de $\text{Ker } M$.
- Étudier le système $MX = \lambda X$ lorsque $\lambda \neq 0$.

10 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E tel que $\text{rg}(u - \text{Id}_E) = 1$.

1) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- u est diagonalisable,
- $\text{tr } u \neq n$,
- $\text{Det } u \neq 1$.

2) Que représente géométriquement l'endomorphisme u lorsque $\text{Det } u = 0$?

3) Même question lorsque $\text{Det } u \notin \{0, 1\}$.

11 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et f un endomorphisme de E tel que :

$$f^2 + f + \text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

1) Prouver que, pour tout vecteur $x \neq 0_E$, $\text{Vect}(x, f(x))$ est un plan stable par f .

2) En déduire que le polynôme caractéristique de f est divisible par $X^2 + X + 1$.

12 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^3 .

2) la matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?

13 Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et calculer ses puissances.

14 Soit un entier $n \geq 2$, M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, P_M son polynôme caractéristique, Q un polynôme de $\mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$.

Montrer que, si Q divise P_M et si Q est un polynôme annulateur de A , alors Q et P_M ont les mêmes racines.

15 Soit M une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P_M son polynôme caractéristique.

Prouver que $P_M(M) = 0_n$ (sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton).

16 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M .

La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est notée $(e_1, \dots, e_n)$.

1) Montrer que la famille $(I_n, M, \dots, M^{n-1})$ est une famille libre.

2) En déduire que l'idéal des polynômes annulateurs de M est engendré par le polynôme caractéristique de M .

17 Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Dans cette question, la matrice A est inversible. Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

2) Montrer le même résultat lorsque A n'est pas inversible.

Indication : Montrer l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]0, \delta[\quad \text{Det}(A - xI_n) \neq 0.$$

18 1) Résoudre, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'équation :

$$X^3 - 7X = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 42 & 36 \end{pmatrix} \quad (1)$$

2) Combien a-t-elle de solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

19* Dans cet exercice, $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} &= 1, \\ \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad a_{ij} &\geq 0. \end{aligned}$$

1) Montrer que 1 est valeur propre de A .

2) Montrer que toute valeur propre complexe de A est de module ≤ 1 .

Indication : Utilisez la question 1) de l'exercice résolu sur les disques de Gerschgorin.

3) Dans cette question, on suppose de plus que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad a_{ii} > 0.$$

Montrer que toutes les valeurs propres de A , distinctes de 1, sont de module < 1 .

4) Dans cette question, on suppose que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que toutes les valeurs propres de A sont de module 1.

20 Dans cet exercice, M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$.

1) Soit N une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$MN = NM.$$

Prouver que tout vecteur propre de M est aussi vecteur propre de N .

En déduire que, si Q est une matrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}MQ$ soit diagonale, alors $Q^{-1}NQ$ l'est aussi.

2) Montrer que :

$$\{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid MN = NM\} = \{P(M) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

21 Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, f et g deux endomorphismes de E tels que $fg = gf$.

Montrer qu'il existe un vecteur propre commun à f et à g .

22 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et u, v deux endomorphismes diagonalisables de E .

Pour simplifier, on dira qu'une base de E diagonalise u (respectivement v) lorsque c'est une base de vecteurs propres de u (respectivement de v).

Montrer qu'il existe une base de E qui diagonalise simultanément u et de v si, et seulement si, $u v = v u$.

23 Montrer que les suites réelles (x_n) , (y_n) et (z_n) définies par leur premiers termes, x_0, y_0, z_0 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{4}z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{4}z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{2}z_n \end{cases}$$

sont toujours convergentes et exprimer leurs limites en fonction de x_0 , y_0 et z_0 .

24 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et g un endomorphisme de E tel que :

$$\begin{aligned} \left(g - \frac{3}{2}\text{Id}_E\right)^3 \circ \left(g - \frac{5}{2}\text{Id}_E\right) &= 0_{\mathcal{L}(E)}, \\ \left(g - \frac{3}{2}\text{Id}_E\right)^2 \circ \left(g - \frac{5}{2}\text{Id}_E\right) &\neq 0_{\mathcal{L}(E)}. \end{aligned}$$

Prouver que g n'est pas diagonalisable.

25** Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

- 1) Trouver un exemple d'endomorphisme f de E tel que f^2 soit diagonalisable bien que f ne le soit pas.
- 2) Montrer que, si f est diagonalisable, alors $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
- 3) Soit f un endomorphisme de E tel que f^2 soit diagonalisable.

Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.

Espaces préhilbertiens

5

Introduction

Ce chapitre étudie les produits scalaires et les relations d'orthogonalité qui en découlent, tant dans les espaces vectoriels réels que complexes.

Ces notions constituent la base moderne de la géométrie euclidienne. Les familles orthonormales fournissent un outil de calcul performant. Le chapitre sur les séries de Fourier, dans H-Prépa, Analyse montre l'intérêt de ces notions, utilisables dans un cadre apparemment éloigné du point de vue algébrique et géométrique de départ.

O B J E C T I F S

- Produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme associée.
- Formes linéaires sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel euclidien.
- Orthogonalité des vecteurs, des sous-espaces.
- Projecteurs orthogonaux.
- Familles orthonormales
- Projecteur orthogonal sur un sous-espace de dimension finie, inégalité de Bessel.
- Orthonormalisation de Gram-Schmidt.

L'étude des coniques par Fermat (au XVII^e siècle), puis celle des quadriques par Euler (au XVIII^e), ainsi que des recherches arithmétiques, sont à l'origine des études sur les formes bilinéaires symétriques. Cauchy, en 1826, pour son enseignement à l'École polytechnique, reprend ces travaux. Il étudie les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle.

Les outils du calcul vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ (produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte) sont l'œuvre de quelques « physico-mathématiciens », (Maxwell, Gibbs, Heaviside) vers 1880.

La définition axiomatique des espaces vectoriels réels et celle des applications linéaires est due à Péano en 1888.

La théorie des espaces euclidiens se construit ensuite. Hilbert effectue, à la fin du XIX^e siècle, le passage à la dimension infinie.

Espaces préhilbertiens réels

Dans tout ce paragraphe, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

1.1. Produit scalaire sur un espace vectoriel réel

Un **produit scalaire** sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est une application φ , bilinéaire, symétrique, définie positive de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire vérifiant les propriétés suivantes :

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 :$$

- $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}$;
- $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (symétrique) ;
- $\varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(x, z)$ (linéaire à droite) ;
- $\varphi(x, x) \geq 0$ et $(\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E)$ (définie positive).

On appelle **espace préhilbertien réel** tout couple (E, φ) où E est un espace vectoriel réel et φ un produit scalaire sur E .

Soit (E, φ) un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E . La restriction de φ à $F \times F$ est un produit scalaire sur F .

Un **espace vectoriel euclidien** est un espace préhilbertien réel de dimension finie non nulle.

Exemples

■ Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Ce produit scalaire est appelé produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. C'est le produit scalaire que vous avez déjà utilisé au lycée, dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$.

■ Pour tout f et tout g de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on pose $(f | g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$.

L'application $(|)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

■ Soit E l'espace vectoriel des suites réelles (u_n) telles que la série $\sum u_n^2$ soit convergente.

David Hilbert (1862-1943), mathématicien allemand, fut le premier à résoudre un problème d'existence (d'objet mathématique) par une méthode complètement abstraite, sans fournir de méthode de construction (article dans *Mathematische Annalen*, 1888), à l'époque, une véritable révolution. Farouche partisan de la méthode axiomatique, il avait une connaissance profonde de toutes les branches des mathématiques. En 1900, au congrès de Paris, il posa à la communauté mathématique vingt-trois problèmes qu'il jugeait de grande importance. À ce jour, tous n'ont pas été résolus, mais tous ont permis un développement fécond des mathématiques.

Le texte complet du discours de Hilbert au congrès de Paris est sur le site :

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html>

La symétrie et la linéarité à droite entraînent la linéarité à gauche de φ .

Rapport Ensam, 1997

« Un bon nombre de candidats (près de 20 %) ne sait pas correctement ce qu'est un produit scalaire. »

Les notations les plus utilisées pour désigner des produits scalaires sont :

$$\varphi(x, y); x \cdot y; (x | y); \langle x | y \rangle.$$

Dans la suite, nous utiliserons indifféremment l'une ou l'autre de ces notations.

De l'inégalité $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2} (u_n^2 + v_n^2)$ on déduit que, si (u_n) et (v_n) sont deux éléments de E , alors la série $\sum u_n v_n$ converge absolument.

L'application $\langle | \rangle$, de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\langle (u_n) | (v_n) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur E .

1.2. Norme et distance sur un espace préhilbertien réel

Les résultats suivants ont été démontrés en Première année.

Théorème 1 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \cdot)$ un espace préhilbertien réel. Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (x \cdot y)^2 \leq (x \cdot x)(y \cdot y).$$

L'égalité est réalisée si, et seulement si, x et y sont liés.

Corollaire 1.1

Soit $(E, \cdot)$ un espace préhilbertien réel.

L'application $\| \cdot \|$, définie sur E par la formule :

$$\forall x \in E \quad \|x\| = \sqrt{x \cdot x}$$

est une norme sur E appelée **norme associée au produit scalaire** $\cdot$.

L'application d , définie sur $E \times E$ par la formule :

$$\forall (x, y) \in E \times E \quad d(x, y) = \|x - y\|$$

est une distance sur E appelée **distance associée au produit scalaire** $\cdot$.



Hermann Schwarz (1843-1921), mathématicien allemand.



Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), mathématicien français.

L'inégalité triangulaire :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

lorsque $\| \cdot \|$ est la norme associée au produit scalaire $\cdot$, s'écrit :

$$[(x + y) \cdot (x + y)]^{1/2} \leq (x \cdot x)^{1/2} + (y \cdot y)^{1/2}.$$

On l'appelle **inégalité de Minkowski**.

1.3. Autour de $\|x + y\|^2$

Avec les mêmes notations, il est immédiat de vérifier que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2.$$

Les formules suivantes en découlent.

■ Les formules de polarisation

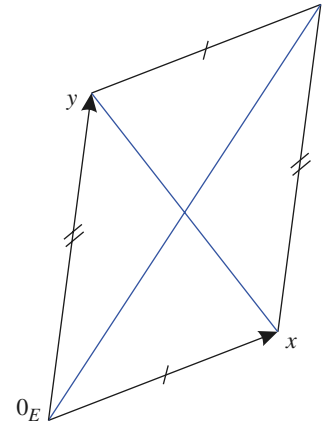
$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x \cdot y = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}.$$

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x \cdot y = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}.$$

Ces formules expriment le produit scalaire à partir de la norme.

■ Égalité du parallélogramme

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$



Doc. 1. La somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés.

Application 1

L'égalité du parallélogramme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé dont la norme vérifie l'égalité du parallélogramme :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

On pose

$$f(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}.$$

L'objectif de cet exercice est d'établir que f est un produit scalaire et que $\|\cdot\|$ est la norme associée à f .

1) Prouver que :

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad f(x + y, z) + f(x - y, z) = 2f(x, z).$$

2) En déduire que :

$$\forall (x, z) \in E^2 \quad f(2x, z) = 2f(x, z)$$

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z).$$

3) Soit $(x, z) \in E^2$. Montrer que l'application :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha \longmapsto \Phi(\alpha) = f(\alpha x, z) \end{cases}$$

est continue et en déduire :

$$\forall (\alpha, x, z) \in \mathbb{R} \times E \times E \quad f(\alpha x, z) = \alpha f(x, z).$$

4) Prouver que f est un produit scalaire dont la norme associée est $\|\cdot\|$.

1) Par définition de f , on a, pour tous x, y, z de E :

$$\begin{aligned} & f(x + y, z) + f(x - y, z) \\ &= \frac{\|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2}{4} \\ & \quad + \frac{\|x - y + z\|^2 - \|x - y - z\|^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}(2\|x + z\|^2 + 2\|y\|^2 - 2\|x - z\|^2 - 2\|y\|^2) \\ &= 2f(x, z). \end{aligned}$$

2) Lorsque $x = y$, on obtient :

$$f(2x, z) = 2f(x, z).$$

De plus :

$$x = \frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2}.$$

Donc :

$$f(x, z) + f(y, z) = f(x + y, z).$$

3) On fixe (x, z) dans E^2 .

$$\Phi(\alpha) = f(\alpha x, z) = \frac{\|\alpha x + z\|^2 - \|\alpha x - z\|^2}{4}.$$

Les applications $\alpha \mapsto \alpha x + z$ et $\alpha \mapsto \alpha x - z$ sont des applications continues de $\mathbb{R}$ dans E .

L'application $\| \cdot \|$ est continue de E dans $\mathbb{R}$, donc Φ est continue sur $\mathbb{R}$.

On déduit de ce qui précède :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall (x, z) \in E^2 \quad f(nx, z) = nf(x, z).$$

Puis :

$$\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(rx, z) = rf(x, z).$$

Considérons pour terminer un réel α et une suite (r_n) de rationnels convergeant vers α .

La fonction Φ est continue en α , donc :

$$f(\alpha x, z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n x, z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n f(x, z) = \alpha f(x, z).$$

4) On vient de prouver qu'à z fixé, l'application $(x \mapsto f(x, z))$ est linéaire.

Ceci permet de terminer la démonstration.

1.4. Formes linéaires sur un espace euclidien

Théorème 2

Soit $(E, \cdot)$ un espace euclidien. Pour tout x de E , on note φ_x l'application définie par :

$$\varphi_x : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \varphi_x(y) = x \cdot y \end{cases}$$

Alors :

- l'application φ_x est une forme linéaire sur E ;
- pour toute forme linéaire f sur E , il existe un unique vecteur v de E tel que :

$$\forall y \in E \quad f(y) = v \cdot y.$$

Ce résultat a été vu en Première année.

Corollaire 2.1 (PSI)

Soit $(E, \cdot)$ un espace euclidien. Les notations sont celles du *théorème 2*.

L'application $(x \mapsto \varphi_x)$ définit un isomorphisme de E sur son dual E^* .

Pour un vecteur x non nul, l'ensemble :

$$\text{Ker } \varphi_x = \{y \in E \mid x \cdot y = 0\}$$

est appelé l'hyperplan orthogonal à x .

2 Espaces préhilbertiens complexes —

Dans tout ce paragraphe, E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

2.1. Produit scalaire sur un espace vectoriel complexe

Un **produit scalaire** sur le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E est une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, hermitienne, sesquilinéaire, définie positive, c'est-à-dire vérifiant les propriétés suivantes :

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 :$$

- $\varphi(x, y) \in \mathbb{C}$;

- $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ (hermitienne);
- $\varphi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda \varphi(x, y_1) + \mu \varphi(x, y_2)$ (linéaire à droite);
- $\varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \overline{\lambda} \varphi(x_1, y) + \overline{\mu} \varphi(x_2, y)$ (semi-linéaire à gauche);
- $\varphi(x, x) \geq 0$ et $(\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E)$ (définie positive).

On appelle **espace préhilbertien complexe** tout couple (E, φ) où E est un espace vectoriel complexe et φ un produit scalaire complexe sur E .

Un **espace vectoriel hermitien** est un espace préhilbertien complexe de dimension finie non nulle.

■ Règle de calcul dans un espace préhilbertien complexe

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien complexe.

Si $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_p$ sont $n+p$ vecteurs de E et $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_p, n+p$ complexes, alors :

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \sum_{j=1}^p \beta_j w_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \overline{\alpha_i} \beta_j \langle v_i \mid w_j \rangle.$$

Exemples

■ L'application φ définie sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ par :

$$\varphi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$$

est un produit scalaire. Il est appelé le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$.

■ Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$. On pose :

$$\langle f \mid g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt.$$

L'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$.

■ Soit $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace des fonctions continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. L'application suivante :

$$(\cdot | \cdot) : \begin{cases} \mathcal{C}_{2\pi} \times \mathcal{C}_{2\pi} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) \longmapsto (f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt \end{cases}$$

est un produit scalaire complexe sur $\mathcal{C}_{2\pi}$.

► Pour s'entraîner : ex. 1.

2.2. Norme et distance sur un espace préhilbertien complexe

Théorème 3 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |\langle x \mid y \rangle|^2 \leq \langle x \mid x \rangle \langle y \mid y \rangle.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, les vecteurs x et y sont liés.

On dit d'une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, qui est linéaire à droite et semi-linéaire à gauche, qu'elle est sesquilinéaire.

Vous remarquerez qu'une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, qui est hermitienne et linéaire à droite, est nécessairement semi-linéaire à gauche.

Charles Hermite (1822-1901), mathématicien français, démontre, en 1873, que le nombre e , base des logarithmes népériens, est un nombre transcendant, c'est-à-dire que e n'est la racine d'aucun polynôme non nul à coefficients entiers. La transcendance de π sera démontrée neuf ans plus tard par le mathématicien allemand Lindemann.

Rapport CCP, 1997

« Une majorité de candidats est en état de sous-compréhension vis-à-vis des espaces hermitiens et de la géométrie en général. »

Démonstration

Traiter à part $x = 0_E$. Dans la suite, $x \in E \setminus \{0_E\}$ et $y \in E$.

• L'inégalité

On pose $v = \langle x | x \rangle y - \langle x | y \rangle x$ et on développe $\langle v | v \rangle$ par sesquilinearité :

$$\langle v | v \rangle = \langle x | x \rangle \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle - |\langle x | y \rangle|^2.$$

Par ailleurs, $\langle v | v \rangle \geq 0$. L'inégalité en découle.

• Le cas d'égalité

Avec les notations précédentes :

$$|\langle x | y \rangle|^2 = \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle \Leftrightarrow \langle v | v \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x | x \rangle y - \langle x | y \rangle x = 0_E.$$

Le résultat en découle.

Pour effectuer correctement ce développement, ne pas oublier que :

- $\langle x | x \rangle > 0$
- $\langle y | x \rangle = \overline{\langle x | y \rangle}$.

Corollaire 3.1

Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace préhilbertien complexe.

La fonction :

$$\| \cdot \| : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle} \end{cases}$$

est une norme sur E appelée **norme associée au produit scalaire**.

L'application d , définie sur $E \times E$ par la formule :

$$\forall (x, y) \in E \times E \quad d(x, y) = \|x - y\|$$

est une distance sur E appelée **distance associée au produit scalaire**.

Démonstration

De même que dans le cas réel, seule l'inégalité triangulaire demande un peu de travail.

Fixons x et y dans E . On a :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x | y \rangle) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|.$$

L'inégalité $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ en découle.

Exemples

Les applications suivantes sont les normes associées aux produits scalaires complexes des exemples indiqués précédemment.

■ Sur $\mathbb{C}^n$, la norme associée au produit scalaire canonique est :

$$\|(z_1, \dots, z_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}.$$

■ Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$, l'application :

$$\left(f \longmapsto N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \right)$$

définit une norme.

• La formule suivante, valable pour un produit scalaire complexe :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x | y \rangle)$$

est fondamentale.

• Ne pas oublier que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re}(z) \leq |z|.$$

■ Sur l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, la fonction $\|\cdot\|_2$:

$$f \mapsto \|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$$

est la norme associée au produit scalaire :

$$(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

2.3. Formule de polarisation complexe

Soit (E, φ) un espace préhilbertien complexe.

La norme associée est notée $\|\cdot\|$.

Pour tout couple de vecteurs (x, y) , on sait que :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} (\varphi(x, y)).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \varphi(x, y); \\ \|x + iy\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \operatorname{Im} (\varphi(x, y)); \\ \|x - iy\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Im} (\varphi(x, y)). \end{aligned}$$

Par combinaison des résultats précédents :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)).$$

3 Orthogonalité

Dans ce paragraphe, $(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace préhilbertien réel ou complexe.

La norme associée au produit scalaire est notée $\|\cdot\|$ et la distance, d .

3.1. Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs x et y de E sont dits **orthogonaux** (relativement au produit scalaire $(\cdot | \cdot)$) lorsque :

$$(x | y) = 0.$$

Théorème 4 : Théorème de Pythagore

Si les vecteurs x et y de E sont orthogonaux, alors :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Remarque

Vous vérifierez la réciproque lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$.

Lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$, la formule :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re} (x | y) + \|y\|^2.$$

montre que la réciproque n'est pas nécessairement vraie.



Pythagore de Samos (environ 580-500 av. J.-C.), mathématicien grec.

Son célèbre théorème était connu des Babyloniens plus de 1 000 ans auparavant mais il serait le premier à l'avoir démontré.

La version : « Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal, si je ne m'abuse, à la somme des carrés des deux autres côtés. » équivaut à :

$$(x | y) = 0 \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

En voici une démonstration géométrique.

3.2. Sous-espaces orthogonaux

Soit V et W deux sous-espaces vectoriels de E .

On dit que V et W sont des **sous-espaces vectoriels orthogonaux** ou que V est orthogonal à W lorsque tout vecteur de V est orthogonal à tout vecteur de W .

$$\forall (x, y) \in V \times W \quad (x | y) = 0.$$

Théorème 5

Soit $(V_1, \dots, V_p)$ une famille de p sous-espaces de l'espace préhilbertien $(E, (|))$.

Si les sous-espaces $(V_1, \dots, V_p)$ sont orthogonaux deux à deux, alors leur somme est une somme directe.

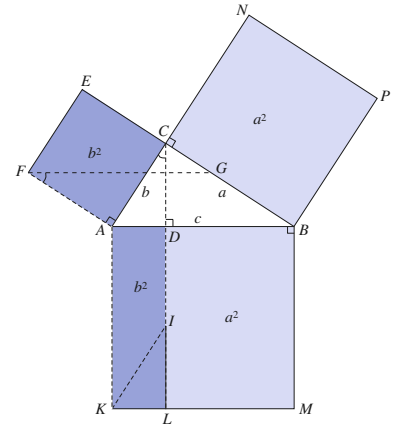
Lorsque ceci est réalisé, on dit que la somme de ces sous-espaces est une **somme directe orthogonale**.

Démonstration

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in V_1 \times \dots \times V_p$ tel que $\sum_{i=1}^p x_i = 0_E$.

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad 0 = \left(x_k | \sum_{i=1}^p x_i \right) = \sum_{i=1}^p (x_k | x_i) = (x_k | x_k).$$

Donc, pour tout k , $x_k = 0_E$ et la somme $V_1 + \dots + V_p$ est directe.



Doc. 2. Le triangle ACB est rectangle en C . Les deux parallélogrammes $AFGB$ et $ACIK$ sont isométriques, donc ils ont même aire. Cette aire vaut b^2 . C'est aussi celle du rectangle $AKLD$. On montre de même que l'aire du rectangle $BMLD$ vaut a^2 . On en déduit que :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

3.3. Orthogonal d'un sous-espace

Théorème 6

Soit $(E, (|))$ un espace préhilbertien et F un sous-espace de E .

L'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à F est un sous-espace de E , appelé **orthogonal de F** et noté $F^\perp$ ou F° .

Théorème 7

Soit $(E, (|))$ un espace préhilbertien et F un sous-espace de E . On a :

- $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.
- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.
- $F \subset (F^\perp)^\perp$.

Soit $(E, (|))$ un espace préhilbertien et V et W deux sous-espaces supplémentaires dans E : $E = V \oplus W$. On dit que V et W sont des supplémentaires orthogonaux si V et W sont orthogonaux.

On dit aussi que V est un supplémentaire orthogonal de W (ou l'inverse).

Soit F un sous-espace de l'espace préhilbertien $(E, (|))$. D'après le théorème 6, la somme $F + F^\perp$ est toujours directe. Mais, en général, il n'est pas certain que $E = F + F^\perp$. Un sous-espace d'un espace préhilbertien n'a pas toujours de supplémentaire orthogonal (cf. exercice 2).

Théorème 8

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien et F un sous-espace de E .

Le sous-espace F admet un supplémentaire orthogonal si, et seulement si :

$$E = F \oplus F^\perp.$$

Lorsqu'il existe, le supplémentaire orthogonal est unique, c'est $F^\perp$.

Vous remarquerez que, lorsque $E = F \oplus F^\perp$, on a $(F^\perp)^\perp = F$.

Exemples

■ Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien et v un vecteur non nul de E .

La forme linéaire $x \mapsto (v | x)$ a pour noyau $H = (\text{Vect } v)^\perp$.

H est un hyperplan de E , supplémentaire de la droite $\text{Vect } v$.

Donc toute droite $D = \text{Vect } v$ de E admet un supplémentaire orthogonal qui est appelé l'hyperplan orthogonal à la droite D (on dit aussi l'hyperplan orthogonal à v).

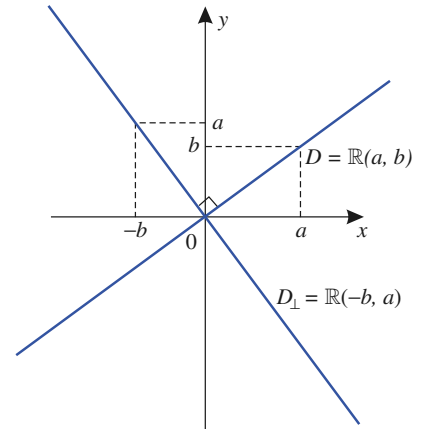
■ Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, le supplémentaire orthogonal de la droite $D = \mathbb{R}(a, b)$ est la droite $\mathbb{R}(-b, a)$, d'équation $ax + by = 0$ (doc. 3a).

■ Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, le supplémentaire orthogonal de la droite $D = \mathbb{R}(a, b, c)$ est le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ (doc. 3b).

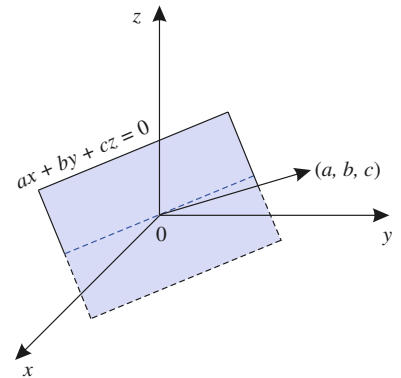
■ Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien orienté de dimension 3, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$.

Le supplémentaire orthogonal du plan $\mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}$ est la droite $\mathbb{R}(\vec{v} \wedge \vec{w})$.

► Pour s'entraîner : ex. 2 et 3.



Doc. 3a.



Doc. 3b. Orthogonalité dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

3.4. Projecteurs orthogonaux

Soit p un projecteur de l'espace préhilbertien $(E, (\cdot | \cdot))$. On dit que p est un projecteur orthogonal lorsque $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont orthogonaux.

D'après ce qui précède, ceci équivaut à :

$$\text{Im } p = (\text{Ker } p)^\perp \text{ ou à } \text{Ker } p = (\text{Im } p)^\perp.$$

Soit F un sous-espace de l'espace préhilbertien $(E, (\cdot | \cdot))$.

Si $E = F \oplus F^\perp$, alors le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$ est un projecteur orthogonal.

On l'appelle le **projecteur orthogonal** sur F .

► Pour s'entraîner : ex. 4.

Si F est un sous-espace vectoriel de E , il y a en général plusieurs projecteurs dont l'image est F .

Si F admet un supplémentaire orthogonal, il y a exactement un projecteur orthogonal dont l'image est F , c'est le projecteur orthogonal sur F .

Si F n'a pas de supplémentaire orthogonal, il n'y a pas de projecteur orthogonal sur F .

Application 2

Matrice d'une projection orthogonale par rapport à une droite ou un hyperplan

1) Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $\| \cdot \|$ la norme associée à $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et v un vecteur non nul de E .

Montrer que l'application p :

$$x \mapsto \frac{\langle v | x \rangle}{\|v\|^2} v$$

est le projecteur orthogonal sur la droite $\text{Vect}(v)$.

2) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit p le projecteur orthogonal sur la droite $\mathbb{R}(1, 2, 3)$ et q le projecteur orthogonal sur le plan d'équation $x+2y+3z=0$ dans la base canonique.

Déduire de ce qui précède les matrices, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, des projecteurs orthogonaux p et q .

1) • La linéarité $x \mapsto \langle v | x \rangle$ implique celle de p .

• On a $p(v) = v$. On en déduit $p \circ p = p$.

Donc p est un projecteur de E .

• De plus :

$$\text{Im } p = \text{Vect}(v) \quad \text{et} \quad \text{Ker } p = \text{Vect}(v)^\perp.$$

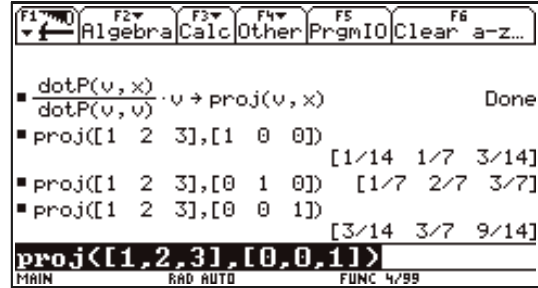
Donc p est le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(v)$.

2) Sur la TI, La fonction $\text{dotP}(\text{vect1}, \text{vect2})$ calcule le produit scalaire de deux vecteurs lignes.

Sur l'écran suivant, vous voyez la définition de la fonction $\text{proj}(v, x)$ qui calcule le projeté sur la droite de vecteur directeur v du vecteur x et son application aux vecteurs de la base canonique dans le cas où $v = (1, 2, 3)$.

D'où la matrice de p relativement à la base canonique :

$$M = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$



Doc. 4.

• Pour q , on a $p + q = \text{Id}_E$.

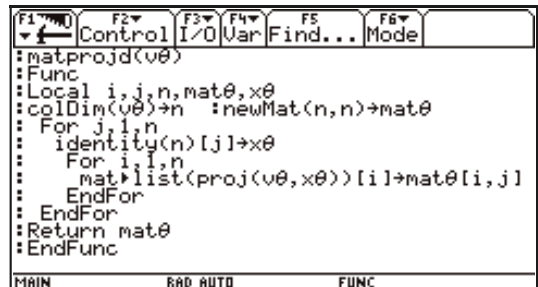
D'où la matrice N de q relativement à la base canonique :

$$N = I_3 - M = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

L'écran suivant montre la fonction matprojd programmée sur TI.

Celle-ci s'applique à un vecteur ligne non nul v de dimension quelconque et fournit la matrice, relativement à la base canonique, du projecteur orthogonal sur la droite engendrée par v .

Testez en calculant $\text{matprojd}([1,2,3])$.



Doc. 5.

Théorème 9

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, F un sous-espace admettant un supplémentaire orthogonal et p le projecteur orthogonal sur F .

La norme associée au produit scalaire est notée $\| \cdot \|$.

Pour tout vecteur x de E , on a :

- $x - p(x) \in F^\perp$, c'est-à-dire :

$$\forall u \in F \quad (x - p(x) | u) = 0.$$

- $\|x - p(x)\| = \min_{y \in F} \|x - y\|$.

Cette quantité est appelée la distance de x au sous-espace F .

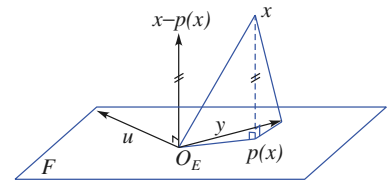
Elle est notée $d(x, F)$.

- Le projeté $p(x)$ est l'unique élément z de F tel que :

$$\|x - z\| = \min_{y \in F} \|x - y\|.$$

Rapport Centrale, 1997

« Les candidats maîtrisent souvent mal les techniques de base : détermination d'un point projeté ou d'un point symétrique par rapport à une droite ou un plan, la distance d'un point à une droite ou un plan... »



Doc. 6. Principales propriétés du projeté orthogonal sur un sous-espace.

Démonstration

- Pour tout x de E , $x - p(x) \in \text{Ker } p = F^\perp$. Donc :

$$\forall u \in F \quad (x - p(x) | u) = 0.$$

- Soit $y \in F$. Les vecteurs $x - p(x)$ et $p(x) - y$ sont orthogonaux. Donc :

$$\|x - y\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - y\|^2 \geq \|x - p(x)\|^2.$$

L'égalité demandée en découle.

- Soit un élément z de F tel que $\|x - z\| = \|x - p(x)\|$.

Comme on vient de le voir : $\|x - z\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - z\|^2$.

Donc $\|p(x) - z\| = 0$ et $p(x) = z$.

► Pour s'entraîner : ex. 5 et 6.

Rapport TPE, 2002

« Le calcul de la distance d'un point à une droite dans $\mathbb{R}^3$ donne des résultats bizarres. »

Application 3

Distance d'un point à une droite affine, à un hyperplan affine

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $\| \cdot \|$ la norme associée à $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

L'espace vectoriel E est muni de sa structure usuelle d'espace affine, A est un point de E et $\vec{v}$ un vecteur non nul de E , D est la droite affine $A + \text{Vect}(\vec{v})$ et H est l'hyperplan affine orthogonal à D et passant par A : $H = A + \text{Vect}(\vec{v})^\perp$.

1) Soit M un point de E .

Montrer que le projeté orthogonal de M sur la

droite affine D est :

$$p_D(M) = A + \frac{\langle \vec{v} | \overrightarrow{AM} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}.$$

En déduire la distance du point M à la droite affine D .

2) Montrer que la distance du point M à l'hyperplan H est :

$$d(M, H) = \frac{|\langle \vec{v} | \overrightarrow{AM} \rangle|}{\|\vec{v}\|}.$$

3) On désigne par H l'hyperplan affine dont l'équation dans le repère canonique de $\mathbb{R}^n$ est :

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \beta.$$

Montrer que la distance du point M , de coordonnées $(y_1, \dots, y_n)$, à l'hyperplan H est :

$$d(M, H) = \frac{|\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n - \beta|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}}.$$

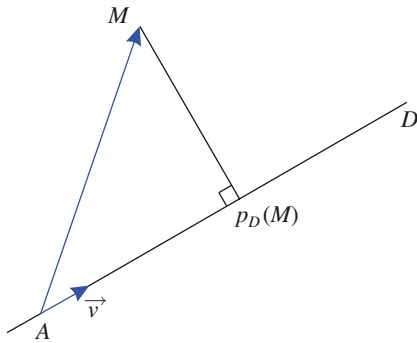
1) Soit $\overrightarrow{p_D}$ la partie linéaire de p_D .

On sait que $p_D(A) = A$. Donc :

$$\forall M \in E \quad p_D(M) = A + \overrightarrow{p_D}(\overrightarrow{AM})$$

De plus, $\overrightarrow{p_D}$ est le projecteur orthogonal sur la droite vectorielle $\text{Vect}(\overrightarrow{v})$. Donc :

$$\forall M \in E \quad p_D(M) = A + \frac{\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{AM} \rangle}{\|\overrightarrow{v}\|^2} \overrightarrow{v}.$$



Doc. 7. Projection orthogonale sur une droite affine.

Le vecteur $\overrightarrow{Mp_D(M)}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v}$ et :

$$\begin{aligned} d(M, D) &= \|\overrightarrow{Mp_D(M)}\| \\ &= \sqrt{\|\overrightarrow{AM}\|^2 - \frac{|\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{AM} \rangle|^2}{\|\overrightarrow{v}\|^2}}. \end{aligned}$$

2) Pour tout M de E , on pose :

$$p_H(M) = A + \overrightarrow{p_D}(\overrightarrow{AM}).$$

D'après la question précédente

$$\begin{aligned} d(M, H) &= \|\overrightarrow{Mp_H(M)}\| \\ &= \frac{|\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{AM} \rangle|}{\|\overrightarrow{v}\|}. \end{aligned}$$

3) On note $\overrightarrow{v} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Soit $A(x_1, \dots, x_n) \in H$, on a $\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{OA} \rangle = \beta$.

Pour tout $M(y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d(M, H) &= \frac{|\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{AM} \rangle|}{\|\overrightarrow{v}\|} \\ &= \frac{|\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{OM} \rangle - \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{OA} \rangle|}{\|\overrightarrow{v}\|} \\ &= \frac{|\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n - \beta|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}} \end{aligned}$$

4 Familles orthogonales, bases orthonormées

Dans ce paragraphe, $(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace préhilbertien réel ou complexe.

La norme associée au produit scalaire est notée $\|\cdot\|$ et la distance, d .

4.1. Familles orthogonales et orthonormales

Soit I un ensemble quelconque, non vide, et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de l'espace préhilbertien $(E, (\cdot | \cdot))$. On dit que cette famille est **orthogonale** lorsque ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux.

$$\forall (i, j) \in I^2 \quad (i \neq j \Rightarrow (x_i | x_j) = 0).$$

Vous démontrerez le *théorème* suivant.

Théorème 10 : Formule de Pythagore

Soit $(x_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ une famille orthogonale finie de l'espace préhilbertien $(E, (\cdot | \cdot))$. On a :

$$\left\| \sum_{i=1}^p x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2.$$

Un **vecteur** x de E est dit **unitaire** lorsque $\|x\| = 1$.

La **famille** de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est dite **orthonormée** ou orthonormale si c'est une famille orthogonale dont tous les vecteurs sont unitaires.

$$\forall (i, j) \in I^2 \quad (x_i | x_j) = \delta_{i,j}.$$

Théorème 11

- Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille orthogonale de l'espace préhilbertien $(E, (\cdot | \cdot))$. Cette famille est libre si, et seulement si, pour tout i de I , $x_i \neq 0_E$.
- Toute famille orthonormale d'un espace préhilbertien est libre.

Démonstration

Il suffit de montrer le premier résultat pour des familles finies.

Soit $(x_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ une famille orthogonale finie de E telle que : $\forall i, x_i \neq 0_E$.

Si $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ sont des scalaires tels que $\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = 0_E$, alors :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad 0 = \left(x_k | \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i \right) = \sum_{i=1}^p \alpha_i (x_k | x_i) = \alpha_k (x_k | x_k).$$

Or $(x_k | x_k) \neq 0$, donc $\alpha_k = 0$ pour tout k et la famille est libre.

Réciproquement, s'il existe i tel que $x_i = 0_E$, alors la famille est liée.

Bien noter cette technique de démonstration, fréquemment utilisée dans les espaces préhilbertiens.

Exemples

■ La base canonique de $\mathbb{C}^n$ ou de $\mathbb{R}^n$ est une famille orthonormale pour le produit scalaire canonique.

■ Soit $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace des fonctions continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

$$\varphi(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt \text{ définit un produit scalaire sur } \mathcal{C}_{2\pi}.$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on pose $e_k(x) = e^{ikx}$.

La famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale pour le produit scalaire φ .

■ Soit $P_0(X) = 1, P_1(X) = X, P_2(X) = X^2 - \frac{1}{3}, P_3(X) = X^3 - \frac{3}{5}X$.

La famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire défini par :

$$(P | Q) = \int_{-1}^1 P(x) Q(x) dx.$$

Ce n'est pas une famille orthonormale.

⚠ Ces quatre polynômes sont des polynômes unitaires, mais ce ne sont pas des vecteurs unitaires de l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], (\cdot | \cdot))$.

Il faut faire attention, dans les problèmes sur les polynômes orthogonaux, au double sens possible de l'adjectif « unitaire ».

4.2. Calculs à l'aide d'une base orthonormale

Dans ce paragraphe, $(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace préhilbertien de dimension finie.

La famille $(e_i)_{i \in I}$ est une base orthonormale (ou orthonormée) de $(E, (\cdot | \cdot))$ si c'est à la fois une famille orthonormale et une base de E .

Les *théorèmes* qui suivent sont élémentaires à démontrer mais d'une importance pratique considérable.

4.2.1 Le cas réel

Théorème 12

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

• Pour tout vecteur x de E , on a :

$$x = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i.$$

Si x et y sont deux vecteurs de coordonnées respectives $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ dans la base B , alors :

$$\bullet (x | y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i.$$

$$\bullet \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$$

$$\bullet d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2}.$$

Corollaire 12.1

Les hypothèses et notations sont celles du *théorème* précédent.

Si X (respectivement Y) est le vecteur colonne des composantes de x (respectivement y) dans la base orthonormée B , alors :

$$(x | y) = {}^t X Y \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{{}^t X X}.$$

4.2.2 Le cas complexe

Théorème 13

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace hermitien de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

• Pour tout vecteur x de E , on a :

$$x = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i.$$

Rapport Ensam, 1997

« La plupart des candidats se comporte comme si toutes les bases d'un espace euclidien étaient orthonormées. »

 Les formules données par les théorèmes qui suivent ne sont valables qu'avec des bases orthonormées.

Dans le cas réel comme dans le cas complexe, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de l'espace préhilbertien $(E, (\cdot | \cdot))$, la formule $x = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i$ se démontre de la manière suivante.

Si $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, alors pour tout k :

$$(e_k | x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (e_k | e_i) = \alpha_k.$$

• Dans le cas réel, on peut écrire :

$$x = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i = \sum_{i=1}^n (x | e_i) e_i$$

pour tout x de E .

• Dans le cas complexe, seule la formule $x = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i$ est valable, car un produit scalaire complexe n'est pas symétrique :

$$(x | e_i) = \overline{(e_i | x)}.$$

Il faut donc faire très attention à ce « détail » lorsque le problème concerne un espace préhilbertien complexe.

Si x et y sont deux vecteurs de coordonnées respectives $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ dans la base B , alors :

- $(x | y) = \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i \beta_i$.
- $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2}$
- $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|^2}$.

Exemple

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien réel ou complexe de dimension n , $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et f un endomorphisme de E .

Par définition de $M_B(f) = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, m_{ij} est la i -ième composante dans la base B du vecteur $f(e_j)$.

Or la base B est orthonormée. Donc :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle e_i | f(e_j) \rangle e_i \quad \text{et} \quad m_{ij} = \langle e_i | f(e_j) \rangle.$$

4.3. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Dans ce paragraphe, il n'y a pas de restriction sur la dimension de E .

Théorème 14

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien de dimension quelconque, F un sous-espace vectoriel de dimension finie, notée k .

Si l'on connaît une base orthonormale de F , $(e_1, \dots, e_k)$, alors :

- $E = F \oplus F^\perp$.
- L'application p définie par $p(x) = \sum_{i=1}^k (e_i | x) e_i$ est le projecteur orthogonal sur F .

Démonstration

- Montrons que p est un projecteur de E .

Un produit scalaire (réel ou complexe) est linéaire à droite, d'où la linéarité de p .

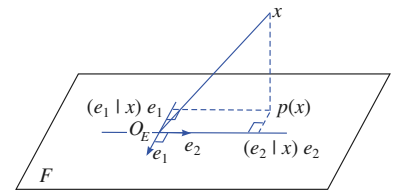
La famille $(e_1, \dots, e_k)$ est orthonormale, donc, pour tout j , $p(e_j) = e_j$. On en déduit que, pour tout x de E , $p(p(x)) = p(x)$. Donc p est un projecteur de E .

- Montrons que $\text{Im } p = F$ et $\text{Ker } p = F^\perp$.

Par construction, $\text{Im } p \subset F$. De plus, $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket \quad e_j \in \text{Im } p$. Donc $\text{Im } p = F$.

Rapport TPE, 2002

« Beaucoup sont dans l'incapacité d'écrire, dans une base orthonormée, le terme général d'une matrice comme un produit scalaire. »



Doc. 8. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel dont on connaît une base orthonormale.

Rapport X, 2002

« La "géométrie" est devenue un monde à part... Clairement, les examinateurs s'en tiennent à des notions simples ; il demeure néanmoins nécessaire de savoir calculer la distance à une droite ou à un plan, de savoir reconnaître un cercle... »

Soit $x \in F^\perp$. Par définition de p , $p(x) = 0_E$. Donc $F^\perp \subset \text{Ker } p$.

Inversement, soit $x \in \text{Ker } p$. Alors $p(x) = \sum_{i=1}^k (e_i | x) e_i = 0_E$ et, pour tout i , $(e_i | x) = 0$. Donc pour tout y de F , $(y | x) = 0$ et $\text{Ker } p \subset F^\perp$.

• Ainsi, $E = F \oplus F^\perp$ et p est le projecteur orthogonal sur F .

Corollaire 14.1

La distance d'un élément x de E au sous-espace F se calcule par la formule :

$$d(x, F) = \|x - p(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{i=1}^k |(e_i | x)|^2}.$$

Une formulation équivalente de ce corollaire est la suivante :

Si $(e_1, \dots, e_k)$ est une famille orthonormale de $(E, (\cdot | \cdot))$, la fonction :

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \mapsto \left\| x - \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i \right\|.$$

atteint son minimum lorsque $\alpha_i = (e_i | x)$ pour tout i .

De plus, la valeur de ce minimum est :

$$d(x, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)) = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{i=1}^k |(e_i | x)|^2}.$$

► Pour s'entraîner : ex. 7 et 8.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Si l'utilisation du théorème de la projection orthogonale est assez bien maîtrisée, sa justification à l'aide du théorème de Pythagore ne l'est pas toujours aussi bien. »

Application 4

Un calcul de borne inférieure

1) Montrer l'existence de :

$$I = \inf \left\{ \int_0^1 (e^x - ax - b)^2 dx \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2) Le calculer.

1) L'ensemble étudié est une partie non vide de $\mathbb{R}^+$. Elle a une borne inférieure.

2) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire sur E défini par $(f | g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

On note F l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré ≤ 1 et $\exp$ la fonction

exponentielle.

$$I = \inf \{ \|\exp - P\|^2 \mid P \in F \}.$$

D'après le corollaire 14.1, si (f_0, f_1) est une base orthonormée de F , alors :

$$I = \|\exp\|^2 - |(f_0 | \exp)|^2 - |(f_1 | \exp)|^2.$$

Les fonctions suivantes conviennent :

$$f_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad f_1(x) = \sqrt{3}(2x - 1).$$

Après calcul :

$$I = \frac{1}{2}(e^2 - 1) - (e - 1)^2 - 3(e - 3)^2.$$

Corollaire 14.2

Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille orthonormale finie de l'espace préhilbertien $(E, (\cdot | \cdot))$.

Pour tout x de E , on a l'**inégalité de Bessel** :

$$\sum_{i=1}^k |(e_i | x)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration

Soit p le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. Pour tout x de E :

$$\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2 = \sum_{i=1}^k |(e_i | x)|^2.$$

4.4. Construction de bases orthonormales en dimension finie

Le *théorème* qui suit prouve l'existence et donne une méthode de construction de telles bases.

Théorème 15 : Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien de dimension n et $B = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E .

Il existe une base orthonormale $B' = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad e_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_i).$$

Démonstration

La norme associée au produit scalaire est notée $\|\cdot\|$.

La démonstration se fait par récurrence sur n , à l'aide des idées suivantes qui fournissent une méthode de calcul effective.

- On pose :

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

- Tant que $k < n$, ayant construit une base orthonormée $(e_1, \dots, e_k)$ de :

$$F_k = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k),$$

on détermine e_{k+1} de la manière suivante :

– on calcule :

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k (e_i | v_{k+1}) e_i$$

(par sa construction, w_{k+1} est orthogonal à F_k et non nul) ;

– on pose :

$$e_{k+1} = \frac{w_{k+1}}{\|w_{k+1}\|}.$$

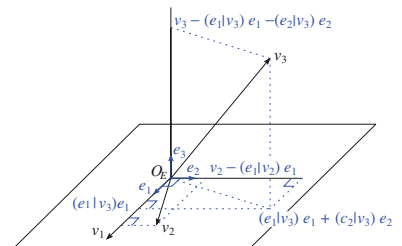
La famille $(e_1, \dots, e_{k+1})$ obtenue est une base orthonormale de :

$$F_{k+1} = \text{Vect}(v_1, \dots, v_{k+1}).$$

Friedrich Bessel (1784-1846), astronome et mathématicien allemand. Les fonctions qui portent son nom :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin t) dt$$

furent utilisées par Bessel pour étudier les perturbations des mouvements des planètes. Elles figurent régulièrement dans des problèmes de concours.



Doc. 9. L'orthonormalisation de Gram-Schmidt réalisée par projections successives.

- L'énoncé de ce *théorème* présente un résultat d'existence de base orthonormale, mais la démonstration fournit une *méthode de calcul* d'une telle base. Cette méthode doit être sue.

- Par construction, la matrice de passage de la base B à la base orthonormale B' est triangulaire supérieure.

- La direction du i -ième vecteur de la base orthonormale obtenue par le procédé de Gram-Schmidt est unique :

$$e_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_i)$$

$$\cap \text{Vect}(v_1, \dots, v_{i-1})^\perp.$$

Mais le vecteur e_i n'est pas unique. En effet, si α est un scalaire tel que $|\alpha| = 1$, les vecteurs e_i et αe_i ont même norme et même direction.

Application 5

Une orthonormalisation traitée par Maple

Orthonormalisation

Construisons d'abord la base canonique de $\mathbb{R}_6[X]$.

```
> restart:N:=6;
> for i from 0 to N do
  X.i:=subs(t=i,x->x^t)od;
```

```
      N := 6
      X0 := 1
      X1 := x → x
      X2 := x → x2
      X3 := x → x3
      X4 := x → x4
      X5 := x → x5
      X6 := x → x6
```

```
> Base1:= [seq(X.i,i=0..N)];
```

```
      Base 1 := [1, X1, X2, X3, X4, X5, X6]
```

La procédure...

```
> Schmidt:=proc(scal,baseV) local W,E,
  k,i;
  W:=baseV; E:=W; for i to nops(baseV)
  do W[i]:=W[i]-convert([seq(scal(W[i],
  E[k])*E[k],k=1..i-1)], '+');
  E[i]:=W[i]/(sqrt(scal(W[i],W[i])))od;
  E end;
```

```
Schmidt := proc(scal, baseV)
local W, E, k, i;
  W := baseV;
```

```
E := W;
for i to nops( baseV) do
  W[i] := W[i] - convert([seq(scal(W[i], Ek)
  × Ek, k = 1..i - 1)], '+');
  Ei := W[i]/sqrt( scal(W[i], W[i]))
od;
E
end
```

Les polynômes de Legendre

```
> ScalLegendre:=(f,g)->int(f(x)*g(x),
  x=-1..1);
Legendre:=Schmidt(ScalLegendre,Base1):
```

$$ScalLegendre := (f, g) \rightarrow \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$$

```
> for i to nops(Legendre) do
  Legendre[i] od; ;
```

$$\frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2} X_1 \sqrt{6}$$

$$\frac{3}{4} (X_2 - \frac{1}{3}) \sqrt{10}$$

$$\frac{5}{4} (X_3 - \frac{3}{5} X_1) \sqrt{14}$$

$$\frac{105}{16} (X_4 + \frac{3}{35} - \frac{6}{7} X_2) \sqrt{2}$$

$$\frac{63}{16} (X_5 + \frac{5}{21} X_1 - \frac{10}{9} X_3) \sqrt{22}$$

$$\frac{231}{32} (X_6 - \frac{5}{231} + \frac{5}{11} X_2 - \frac{15}{11} X_4) \sqrt{26}$$

Corollaire 15.3

- Un espace préhilbertien de dimension finie non nulle admet au moins une base orthonormale.
- Dans un espace préhilbertien de dimension finie, toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

4.5. Dimension de l'orthogonal d'un sous-espace

Théorème 16

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien de dimension finie et F un sous-espace de E .

- $E = F \oplus F^\perp$.
- $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.
- $(F^\perp)^\perp = F$.

► Pour s'entraîner : ex. 12.

FICHE MÉTHODE

● Soit F un sous-espace vectoriel de dimension k de l'espace préhilbertien $(E, (\cdot | \cdot))$. La norme associée au produit scalaire est notée $\| \cdot \|$.

- Pour **déterminer le projecteur orthogonal** sur F , noté p ,
 - on détermine une base orthonormale de $F, (e_1, \dots, e_k)$;
 - on a :

$$p(x) = \sum_{i=1}^k (e_i | x) e_i.$$

- Pour **calculer la distance d'un point** x de E **au sous-espace** F de dimension k ,
 - on détermine une base orthonormale de $F, (e_1, \dots, e_k)$;
 - on a :

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{i=1}^k |(e_i | x)|^2}.$$

- Pour **déterminer une base orthonormale**, on utilise le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice résolu

Déterminant de Gram d'une famille de vecteurs

ÉNONCÉ

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. La norme associée à $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est notée $\| \cdot \|$.

Pour toute famille de n vecteurs de E , $(v_1, \dots, v_n)$, le déterminant de Gram de cette famille est le déterminant de la matrice $(\langle v_i | v_j \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. On le note :

$$\text{Gram}_n(v_1, \dots, v_n).$$

1) Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E , $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ et p le projecteur orthogonal sur F . Montrer que :

$$\forall x \in E \quad \text{Gram}_{n+1}(x, v_1, \dots, v_n) = \langle x | x - p(x) \rangle \text{Gram}_n(v_1, \dots, v_n).$$

2) En déduire que, pour tout entier $n > 0$, la famille de n vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ est libre si, et seulement si, $\text{Gram}_n(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

3) Dans cette question, la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre et $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.

Prouver que, pour tout x de E ,

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \sqrt{\frac{\text{Gram}_{n+1}(x, v_1, \dots, v_n)}{\text{Gram}_n(v_1, \dots, v_n)}}.$$

CONSEILS

Utiliser l'égalité :

$$\langle y | x \rangle = \langle y | x - p(x) \rangle + \langle y | p(x) \rangle$$

pour décomposer la première colonne de $\text{Gram}_{n+1}(x, v_1, \dots, v_n)$.

De l'égalité :

$$p(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j,$$

vous déduirez que les colonnes $C_0, C_1, \dots, C_n$ du dernier déterminant sont liées par la relation :

$$C_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j C_j.$$

SOLUTION

1) On développe $\text{Gram}_{n+1}(x, v_1, \dots, v_n)$ en remplaçant x par $(x - p(x)) + p(x)$ dans la première colonne :

$$\begin{vmatrix} \langle x | x \rangle & \langle x | v_1 \rangle & \dots & \langle x | v_n \rangle \\ \langle x | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_1 \rangle & \dots & \langle v_1 | v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x | v_n \rangle & \langle v_1 | v_n \rangle & \dots & \langle v_n | v_n \rangle \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \langle x - p(x) | x \rangle & \langle x | v_1 \rangle & \dots & \langle x | v_n \rangle \\ \langle x - p(x) | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_1 \rangle & \dots & \langle v_1 | v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x - p(x) | v_n \rangle & \langle v_1 | v_n \rangle & \dots & \langle v_n | v_n \rangle \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \langle p(x) | x \rangle & \langle x | v_1 \rangle & \dots & \langle x | v_n \rangle \\ \langle p(x) | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_1 \rangle & \dots & \langle v_1 | v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle p(x) | v_n \rangle & \langle v_1 | v_n \rangle & \dots & \langle v_n | v_n \rangle \end{vmatrix}.$$

Or $p(x) \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ donc le dernier déterminant est nul.

De plus, $x - p(x)$ est orthogonal à $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.

Donc, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle x - p(x) | v_i \rangle = 0$ et :

$$\forall x \in E \quad \text{Gram}_{n+1}(x, v_1, \dots, v_n) = \langle x | x - p(x) \rangle \text{Gram}_n(v_1, \dots, v_n).$$

2) La formule ci-dessus prouve que :

$$\begin{aligned} \text{Gram}_n(v_1, \dots, v_n) \neq 0 \text{ et } x \notin \text{Vect}(v_1, \dots, v_n) \\ \Rightarrow \text{Gram}_{n+1}(x, v_1, \dots, v_n) \neq 0. \end{aligned}$$

Ceci permet de démontrer l'équivalence demandée par récurrence.

3) D'après ce qui précède, si p est le projecteur orthogonal sur :

$$F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$$

alors, pour tout x de E :

$$\text{Gram}_{n+1}(x, v_1, \dots, v_n) = \|x - p(x)\|^2 \text{Gram}_n(v_1, \dots, v_n).$$

La formule demandée découle de l'égalité $\|x - p(x)\| = d(x, F)$.

Exercices

1 Soit B l'ensemble des suites complexes bornées.

Montrer que l'application :

$$\langle | \rangle : \begin{cases} B \times B \longrightarrow \mathbb{C} \\ ((u_n), (v_n)) \longmapsto \langle (u_n) | (v_n) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{u_n} v_n}{2^n} \end{cases}$$

est un produit scalaire sur B .

2 1) Dans l'espace vectoriel E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $f \cdot g = \int_{\mathbb{R}} fg$, montrer que les sous-espaces vectoriels constitués des fonctions paires et des fonctions impaires sont des supplémentaires orthogonaux.

2) L'espace vectoriel B des suites complexes bornées est muni du produit scalaire décrit à l'exercice précédent.

Soit F le sous-espace vectoriel des suites nulles à partir d'un certain rang.

Prouver que F n'a pas de supplémentaire orthogonal.

3 Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace préhilbertien et A, B deux sous-espaces de E . Montrer que :

- $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$;
- $(A + B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.

4 Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace préhilbertien réel ou complexe, $\| \cdot \|$ la norme associée et p un projecteur de E .

Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si :

$$\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

5 L'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique :

$$(A | B) = \text{tr}^t(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}.$$

1) On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques.

Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Calculer la distance à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ - & -3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6 Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan P de $\mathbb{R}^3$ dont l'équation dans la base canonique est :

$$x - y + 2z = 0.$$

7 $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Le produit scalaire est noté $(|)$ et la norme $\| \cdot \|$.

Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ d'équation :

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

1) Déterminer une base orthonormée de F .

2) Donner la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de la projection orthogonale p_F sur F .

3) Soit $X = (1, 1, 1, 1)$. Calculer $d(X, F)$.

8 Montrer que, pour tout k dans $\mathbb{N}$:

$$I = \inf \left\{ \int_0^{\infty} (x^k - ax - b)^2 e^{-x} dx \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

existe et est atteint. Le calculer.

Indication : Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx = p!.$$

9 $(E, \langle | \rangle)$ est un espace préhilbertien de dimension finie et $(v_i)_{i \in [1, k]}$ une famille libre de vecteurs de E .

1) Déterminer le rang, l'image et le noyau de l'endomorphisme f de E défini par :

$$f : x \longmapsto \sum_{i=1}^k \langle v_i | x \rangle v_i.$$

2) Dans cette question, $k = \dim E$.

Montrer que, pour tout $(\alpha_i)_{i \in [1, k]}$ de $\mathbb{R}^k$, il existe un unique vecteur x de E tel que :

$$\forall i \in [1, k] \quad \langle v_i | x \rangle = \alpha_i.$$

10 $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace euclidien orienté. Le produit scalaire est noté $\cdot$ et le produit vectoriel $\wedge$.

Soit A, B et C trois points de l'espace.

Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}) = 0.$$

11 Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, espace euclidien orienté de dimension 3.

Identifier l'application f :

$$\vec{x} \longmapsto \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{x}).$$

12 Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour tout f de E , on pose :

$$N(f) = [f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t) dt]^{1/2}.$$

- 1) Montrer que N est une norme sur E .
- 2) Montrer que $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
- 3) Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

13 Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien complexe, $\|\cdot\|$ la norme associée et un entier $n > 2$.

- 1) Prouvez que, pour tout (x, y) de E^2 :

$$\langle x | y \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{(2ik\pi)/n} \|x + e^{-(2ik\pi)/n} y\|^2.$$

- 2) Que dire lorsque $n = 4$?

6

Espaces euclidiens

Introduction

Dans son programme d'Erlangen (1872), Félix Klein (1849-1925) aborde la géométrie d'un point de vue synthétique tout à fait nouveau. Il ne la considère plus comme l'étude des figures mais d'abord comme l'étude d'un espace muni d'une structure et du groupe des bijections de l'espace qui conservent cette structure.

À ce titre, l'algèbre linéaire peut être appelée « géométrie vectorielle ». Les ensembles étudiés sont alors les espaces vectoriels. Le groupe des transformations qui conservent la structure d'un espace vectoriel est le « groupe linéaire », groupe des automorphismes de cet espace vectoriel.

Cette approche globale permettra aux mathématiciens de comprendre et de développer les différentes géométries (euclidienne et non-euclidiennes). Elle montrera aussi l'importance fondamentale de la théorie des groupes.

Dans ce chapitre, nous abordons (modestement) l'étude du groupe orthogonal. C'est le groupe des bijections d'un espace euclidien qui conservent le produit scalaire.

Le deuxième volet de ce chapitre traite la réduction des matrices symétriques réelles, utilisée dans d'innombrables problèmes de concours.

L'étude des coniques et quadriques découle de la connaissance de cette réduction.

O B J E C T I F S

- Endomorphismes symétriques.
- Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien (programme *PSI*).
- Automorphismes orthogonaux, groupe orthogonal.
- Symétries et réflexions orthogonales.
- Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable dans une base orthonormée.
- Traduction en terme de matrice symétrique réelle.
- Réduction de l'équation d'une conique.
- Exemples d'étude de quadrique.

Dans tout ce chapitre, $(E, \langle \mid \rangle)$ est un espace euclidien. La norme associée au produit scalaire est notée $\| \cdot \|$.

Endomorphismes symétriques

Un **endomorphisme** f de l'espace euclidien $(E, \langle \mid \rangle)$ est dit **symétrique** lorsque :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle f(x) \mid y \rangle = \langle x \mid f(y) \rangle.$$

Théorème 1

Soit f un endomorphisme de l'espace euclidien $(E, \langle \mid \rangle)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) f est un endomorphisme symétrique ;
- 2) pour toute base orthonormée B de $(E, \langle \mid \rangle)$, la matrice de f relativement à B est symétrique : ${}^t M_B(f) = M_B(f)$;
- 3) il existe une base orthonormée de $(E, \langle \mid \rangle)$ telle que la matrice de f relativement à cette base soit symétrique.

Démonstration

Voici le point clé de l'implication $3) \Rightarrow 1)$.

Soit B une base orthonormée telle que la matrice M de f dans cette base soit symétrique, X le vecteur colonne des composantes de x dans cette base et Y celui de y . On a :

$$\langle f(x) \mid y \rangle = {}^t(MX)Y = {}^tX {}^tMY = {}^tX(MY) = \langle x \mid f(y) \rangle.$$

Théorème 2

Les endomorphismes symétriques de l'espace euclidien $(E, \langle \mid \rangle)$ constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Rapport Centrale, 1998

« La matrice d'un endomorphisme symétrique n'est symétrique que si elle le représente dans une base orthonormée. »

Le résultat évoqué dans le rapport de concours qui suit est aisé à démontrer.

Rapport Centrale, 1998

« Rappelons par ailleurs que, lorsque f est un endomorphisme symétrique, son image et son noyau sont supplémentaires orthogonaux, et sont tous deux stables par f . »

Vous prouverez que, lorsque $\dim E = n$, ce sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ est isomorphe au sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La dimension de ce sous-espace est :

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

► Pour s'entraîner : ex. 1 et 2.

Application 1

Supplémentaires orthogonaux et endomorphismes symétriques

Soit V et W deux sous-espaces de l'espace euclidien $(E, \langle \mid \rangle)$ tels que $E = V \oplus W$.

Le projecteur sur V parallèlement à W est noté p et celui sur W parallèlement à V est noté q .

1) On fixe deux réels distincts α et β et on pose $f = \alpha p + \beta q$.

Montrer que f est symétrique si, et seulement si, V et W sont orthogonaux entre eux.

2) Soit u un projecteur de E .

Montrer que u est un projecteur orthogonal si, et seulement si, c'est un endomorphisme symétrique.

1) Supposons V orthogonal à W .

Soit x et y deux éléments quelconques de E décomposés dans $V \oplus W$ en :

$$x = v + w \quad \text{et} \quad y = v' + w'.$$

On a : $af(x) = \alpha v + \beta w$ et $f(y) = \alpha v' + \beta w'$ et, par l'orthogonalité de V et W :

$$\langle f(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle = \alpha \langle v | v' \rangle + \beta \langle w | w' \rangle.$$

Donc, f est symétrique.

Réciproquement, si V et W ne sont pas orthogonaux, il existe $(v, w') \in V \times W$ tel que :

$$\langle v | w' \rangle \neq 0.$$

On vérifie que :

$$\langle f(v) | w' \rangle \neq \langle v | f(w') \rangle.$$

Donc, f n'est pas symétrique.

2) Poser $V = \text{Im } u$, $W = \text{Ker } u$, $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ et utiliser 1).

2 Adjoint d'un endomorphisme (programme PSI)

Théorème 3

Soit u un endomorphisme de l'espace euclidien $(E, \langle | \rangle)$.

- Il existe un unique endomorphisme u^* tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle.$$

- Si B est une base orthonormée de $(E, \langle | \rangle)$, alors la matrice de u^* relativement à la base B est la transposée de celle de u :

$$M_B(u^*) = {}^t M_B(u).$$

Rapport Mines-Ponts, 2001

« La connaissance des espaces euclidiens est très insuffisante en particulier : méthode d'orthonormalisation de Schmidt, calcul sur les matrices symétriques réelles, utilisation de l'adjoint. »

Démonstration

- Soit M la matrice de u relativement à la base orthonormée B , X le vecteur colonne des composantes de x dans cette base et Y celui de y .

On sait que :

$$\langle u(x) | y \rangle = {}^t(MX)Y = {}^tX({}^tMY) \quad (1)$$

Soit u^* tel que $M_B(u^*) = {}^t M_B(u)$. D'après (1), on a :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle.$$

- Il reste à prouver l'unicité de u^* .

Soit f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle u(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle.$$

Fixons y dans E .

Pour tout x , $\langle x | u^*(y) \rangle = \langle x | f(y) \rangle$ et $\langle x | u^*(y) - f(y) \rangle = 0$.

En prenant $x = u^*(y) - f(y)$, on trouve $u^*(y) - f(y) = 0_E$.

Ceci permet de conclure que $f = u^*$.

Vous pouvez construire une démonstration plus rapide de l'unicité, en utilisant, par exemple, le point de vue matriciel.

La méthode proposée est importante et sera utilisée en d'autres occasions.

L'endomorphisme u^* s'appelle l'**adjoint** de u .

On a évidemment :

Théorème 4

Soit f un endomorphisme de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est un endomorphisme symétrique ;
- $f^* = f$.

C'est pourquoi les endomorphismes symétriques sont aussi appelés des **endomorphismes auto-adjoints**.

Théorème 5

Étant donné (f, g) dans $\mathcal{L}(E)^2$ et (α, β) dans $\mathbb{R}^2$, on a :

- $(f^*)^* = f$
- $(\alpha f + \beta g)^* = \alpha f^* + \beta g^*$
- L'application $f \mapsto f^*$ définit un automorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$.
- $(fg)^* = g^* f^*$.
- $\text{Id}_E = \text{Id}_E^*$.

■ Quelques propriétés de l'adjoint

Soit f un endomorphisme de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

- f et f^* ont le même polynôme caractéristique.
- $\text{Ker } f^* = (\text{Im } f)^\perp$, $\text{Im } f^* = (\text{Ker } f)^\perp$ et $\text{rg } f = \text{rg } f^*$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{Ker } (f^* - \lambda \text{Id}_E) = [\text{Im } (f - \lambda \text{Id}_E)]^\perp$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

- F est stable par f si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par f^* .

Rapport X, 2001

« Facile à condition de mettre en évidence le passage d'une égalité du type " $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(Tx | y) = 0$ " à " $T = 0$ ". »

3 Le groupe orthogonal

3.1. Automorphismes orthogonaux

On appelle **automorphisme orthogonal** de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ tout endomorphisme u de E conservant le produit scalaire.

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x | y \rangle = \langle u(x) | u(y) \rangle.$$

Un tel endomorphisme est nécessairement bijectif.

En effet, soit x dans $\text{Ker } u$. La relation ci-dessus donne, pour $x = y$:

$$\|x\|^2 = \|u(x)\|^2 = 0.$$

Donc $x = 0_E$ et u est un automorphisme de E .

Théorème 6

Soit u un endomorphisme de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ de dimension n . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1) u conserve la norme :

$$\forall x \in E \quad \|x\| = \|u(x)\|.$$

2) u est un automorphisme orthogonal :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x | y \rangle = \langle u(x) | u(y) \rangle.$$

3) L'image par u de toute base orthonormée de E est une base orthonormée de E .

4) Il existe une base orthonormée de E , $B = (e_1, \dots, e_n)$, dont l'image par u , $B' = (u(e_1), \dots, u(e_n))$, est une base orthonormée de E .

Un automorphisme orthogonal conserve la norme, donc il conserve les distances :

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|u(x - y)\| \\ &= \|u(x) - u(y)\|. \end{aligned}$$

C'est pourquoi un automorphisme orthogonal est parfois appelé une isométrie vectorielle de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Démonstration

- La formule de polarisation permet de prouver 1) $\Rightarrow$ 2).
- Pour 2) $\Rightarrow$ 3) il est immédiat que, si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base orthonormée de E , alors :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad \langle u(v_i) | u(v_j) \rangle = \langle v_i | v_j \rangle = \delta_{i,j}$$

- L'implication 3) $\Rightarrow$ 4) est triviale.
- Étudions 4) $\Rightarrow$ 1).

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée telle que $B' = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit aussi une base orthonormée de E .

Pour tout x de E , on écrit : $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. On a : $u(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u(e_i)$.

Puisque B et B' sont orthonormées, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} = \|u(x)\|$

► Pour s'entraîner : ex. 3 et 4.

Le programme de Deuxième année n'aborde pas l'étude des applications affines d'un espace euclidien dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal. Ces applications conservent aussi les distances et sont nommées isométries. En dimension 2 ou 3, ce sont les déplacements et antidéplacements que vous avez étudiés en Première année.

Théorème 7 (programme PSI)

Soit u un endomorphisme de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- u est un automorphisme orthogonal ;
- $u^* u = u u^* = \text{Id}_E$;
- u est un automorphisme de E et $u^{-1} = u^*$.

Point clé pour le théorème 7

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x | y \rangle &= \langle u^*(u(x)) | y \rangle \\ &\Leftrightarrow \\ \forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x - u^*(u(x)) | y \rangle &= 0. \\ &\Leftrightarrow \\ \forall x \in E \quad x - u^*(u(x)) &= 0_E. \end{aligned}$$

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Géométrie

C'est le point faible de très nombreux candidats qui semblent faire une impasse sur cette partie du programme :

– Très peu sont capables de donner les propriétés élémentaires des applications affines.

– Les isométries sont très mal connues.

– L'idée de choisir un repère est rarement bien mise en œuvre.

– Les courbes classiques (cercles, coniques) sont souvent difficiles à identifier. »

3.2. Matrices orthogonales

Dans tout ce paragraphe, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Une **matrice** A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** lorsque l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 8

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- A est une matrice orthogonale ;
- ${}^tAA = A{}^tA = I_n$;
- la matrice A est inversible et ${}^tA = A^{-1}$;
- la matrice A est une matrice de passage entre deux bases orthonormées d'un espace euclidien de dimension n ;
- les vecteurs colonnes de A définissent une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

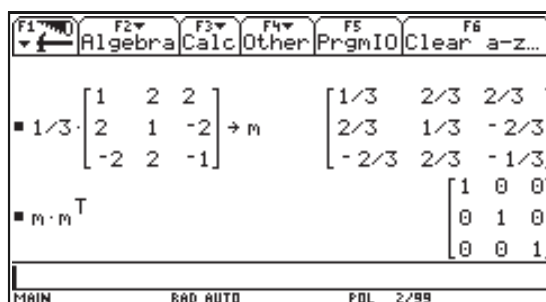
Exemples

- Les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

- La matrice $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice

orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.



Doc. 1.

Théorème 9

- Le déterminant d'une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $+1$ ou -1 .
- Le déterminant d'un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien est $+1$ ou -1 .

Pour éviter l'erreur trop répandue évoquée dans les rapports ci-contre, penser à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son déterminant vaut 1 mais ce n'est pas une matrice orthogonale.

Corollaire 9.1

L'espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est orienté et $\dim E = n$.

- Si B et B' sont deux bases orthonormées de même orientation, le déterminant de la matrice de passage de B à B' vaut 1.
- Soit B et B' deux bases orthonormées directes de E . Pour toute famille $(v_1, \dots, v_n)$ de n vecteurs de E ,

$$\text{Det}_B(v_1, \dots, v_n) = \text{Det}_{B'}(v_1, \dots, v_n).$$

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Un élève sur deux croit qu'une matrice est orthogonale si, et seulement si, son déterminant est égal à 1. »

Rapport Centrale, 1997

« Comme chaque année, nous signalons qu'une matrice ayant un déterminant égal à -1 ou 1 n'est pas nécessairement orthogonale, et qu'une matrice 3×3 ayant pour valeurs propres $1, e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ n'est pas nécessairement une rotation. »

Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, le produit scalaire étant noté. et le produit vectoriel $\wedge$, on a :

$$[u, v, w] = (u \wedge v) \cdot w.$$

C'est le **produit mixte** des vecteurs u, v, w .

En d'autres termes, le déterminant d'une famille de n vecteurs, calculé relativement à une base orthonormée directe de E , ne dépend pas de cette base. Il est aussi noté $[v_1, \dots, v_n]$.

► Pour s'entraîner : ex. 5.

Application 2

Valeurs propres et sous-espaces propres d'une matrice orthogonale

Soit A une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

1) Montrer que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$.

2) Montrer que, si $\text{Det} A = -1$, alors -1 est valeur propre de A .

En déduire que, si $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, alors :
 $\text{Det} A = +1$ et n est pair.

3) On note $E_1 = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$, $E_{-1} = \text{Ker}(u + \text{Id}_E)$ et $W = [E_1 + E_{-1}]^\perp$.

a) Montrer que E est la somme directe orthogonale de ces trois sous-espaces.

b) Montrer que chacun de ces sous-espaces est stable par u .

c) En déduire :

$$\text{Det} u = (-1)^{\dim(E_{-1})} = (-1)^{n - \dim(E_1)} \quad \text{et}$$

$$\text{Det} A = (-1)^{n - \text{rg}(A + I_n)} = (-1)^{\text{rg}(A - I_n)}.$$

1) Si $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, le problème est réglé.

Sinon, soit λ dans $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et x un vecteur propre associé

$$\|x\| = \|u(x)\| = |\lambda| \|x\|.$$

De plus $x \neq 0_E$, donc $|\lambda| = 1$.

2) • On suppose que $\text{Det} A = -1$.

Le polynôme caractéristique de A est de la forme :

$$P(X) = \text{Det}(A - XI_n) = (-1)^n X^n + \dots + \text{Det}(A),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = +\infty \quad \text{et} \quad P(0) = \text{Det}(A) = -1.$$

Or P est continue sur $\mathbb{R}^-$, donc P a une racine dans $\mathbb{R}^-$. D'après 1), cette racine est -1 .

• On suppose que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

$\text{Det}(A) \neq -1$. d'après le théorème 9, $\text{Det}(A) = +1$.

Enfin, si n est impair, le polynôme caractéristique de A est un polynôme réel de degré impair.

Il a au moins une racine dans $\mathbb{R}$ et $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$.

Par contraposée, si $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, n est pair.

3) a) Puisque $W = [E_1 + E_{-1}]^\perp$, on a :

$$E = [E_1 + E_{-1}] + W.$$

Reste à prouver l'orthogonalité de E_1, E_{-1} et W .

b) On sait déjà que $E_1 = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ et $E_{-1} = \text{Ker}(u + \text{Id}_E)$ sont stables par u .

Soit x dans W . Montrer que $u(x)$ appartient à W revient à prouver que :

$$\forall z \in E_1 + E_{-1} \quad \langle u(x) | z \rangle = 0,$$

ce que vous ferez facilement.

c) On note $k = \dim E_1$ et $m = \dim E_{-1}$, u_1 (respectivement u_{-1} et u_W) l'endomorphisme de E_1 (respectivement de E_{-1} et de W) induit par u .

Enfin, on désigne par B_1 (respectivement B_{-1}, B_W) une base orthonormée de E_1 (respectivement de E_{-1} , de W).

La matrice M de u dans la base (B_1, B_{-1}, B_W) de E est diagonale par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{B} & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{C} \end{pmatrix}$$

Avec $A = I_k, B = -I_m$. De plus, C est la matrice de u_W dans la base B_W . Donc :

$$\text{Det} M = \text{Det} A \text{Det} B \text{Det} C = (-1)^m \text{Det} u_W.$$

Mais $\text{Sp}(u_W) = \emptyset$, donc $\text{Det} u_W = +1$ et :

$$\text{Det} u = (-1)^m = (-1)^{\dim(E_{-1})}.$$

Le reste en découle, car $\dim W$ est pair.

3.3. Définition du groupe orthogonal

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de l'espace euclidien $(E, \langle \mid \rangle)$ est noté $\mathcal{O}(E)$.

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{O}(n)$.

Théorème 10

- L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des automorphismes orthogonaux de l'espace euclidien $(E, \langle \mid \rangle)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.
- L'ensemble $\mathcal{O}(n)$ des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ (ici l'opération $\times$ est le produit matriciel).
- Si E est de dimension n , alors $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}(n)$ sont des groupes isomorphes.

Le point clé de la démonstration est le fait que :

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in \mathcal{O}(E)^2 \quad \forall x \in E : \\ \|u \circ v^{-1}(x)\| &= \|v^{-1}(x)\| \\ &= \|v(v^{-1}(x))\| = \|x\|. \end{aligned}$$

$\mathcal{O}(E)$ est appelé **groupe orthogonal** de E .

$\mathcal{O}(n)$ est appelé **groupe orthogonal en dimension n** .

3.4. Symétries et réflexions

On appelle **symétrie orthogonale** de l'espace euclidien $(E, \langle \mid \rangle)$ toute symétrie s de E telle que $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ soient orthogonaux.

Théorème 11

Soit f un endomorphisme de l'espace euclidien $(E, \langle \mid \rangle)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est une symétrie orthogonale de E ;
- f est simultanément un endomorphisme symétrique et un automorphisme orthogonal de E .

Les élèves de *PSI* prouveront de plus que ceci équivaut aussi à :

$$f = f^* = f^{-1}.$$

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H de l'espace euclidien $(E, \langle \mid \rangle)$ est appelée une **réflexion** de E .

Il a été vu précédemment que le déterminant d'une symétrie s de E est :

$$\text{Det } s = (-1)^{\dim \text{Ker}(s + \text{Id}_E)}.$$

Si f est une réflexion de E , alors $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ est une droite. Donc :

Le déterminant d'une réflexion est toujours -1 .

Exemple

Soit v un vecteur non nul de l'espace euclidien $(E, \langle \mid \rangle)$.

On a vu que le projecteur orthogonal sur la droite $D = \text{Vect } v$ est la fonction :

$$p_v : x \longmapsto \frac{\langle v \mid x \rangle}{\langle v \mid v \rangle} v.$$

Rapport Centrale, 1997

« Certaines confusions ont pour cause la méconnaissance de la signification exacte des termes employés : un projecteur orthogonal n'est en général pas un endomorphisme orthogonal, de même qu'un endomorphisme symétrique n'est pas toujours une symétrie. »

On en déduit que la réflexion par rapport à l'hyperplan $H = D^\perp$ est la fonction :

$$r_v : x \mapsto x - 2 \frac{\langle v | x \rangle}{\langle v | v \rangle} v.$$

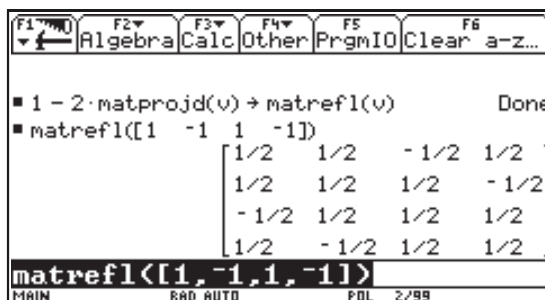
Soit à calculer la matrice, relative à la base canonique, de la réflexion par rapport à l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ d'équation :

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

On introduit le vecteur $v = (1, -1, 1, -1)$ et on utilise les programmes TI développés au chapitre précédent.

La matrice cherchée est indiquée sur l'écran ci-contre (doc. 2).

Vérification : la j -ième colonne de cette matrice est l'image par r_v du j -ième vecteur de la base canonique.



Doc. 2

► Pour s'entraîner : ex. 6 et 7.

3.5. Les automorphismes orthogonaux en dimension 2 et 3

L'étude des automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3 fait partie intégrante du programme de Première année ET du programme des concours.

Les tableaux suivants classifient ces automorphismes en étudiant leur spectre.

■ Tableaux récapitulatifs

Notation :

$$f \in \mathcal{O}(E); E_1 = \text{Ker}(f - \text{Id}_E); E_{-1} = \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$$

$\text{Sp}(f)$	sous-espaces propres de f	nature de f	$\text{Det}(f)$
$\emptyset$	Pas de sous-espace propre.	f est une rotation d'angle $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$.	+1
$\{1\}$	$E_1 = E$.	$f = \text{Id}_E$. f est une rotation d'angle $\theta = 0 \pmod{2\pi}$.	+1
$\{-1\}$	$E_{-1} = E$.	$f = -\text{Id}_E$. f est une rotation d'angle $\theta = \pi \pmod{2\pi}$.	+1
$\{1, -1\}$	E_1 et E_{-1} sont des droites orthogonales du plan E .	f est la réflexion par rapport à E_1 .	-1

Le cas $\dim E = 2$

La matrice, relativement à une base orthonormée directe, de la rotation d'angle θ de E ne dépend pas de cette base et vaut toujours :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Rapport Centrale, 1998

« La classification des isométries vectorielles en dimension 3 est méconnue, et trop de candidats persistent à croire qu'une projection orthogonale est un automorphisme orthogonal. »

L'ensemble des rotations du plan euclidien E est noté $\mathcal{SO}(E)$ ou $\mathcal{O}^+(E)$.

$\mathcal{SO}(E)$

$$= \{f \in \mathcal{O}(E); \text{Det } f = +1\}.$$

C'est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$. Il est commutatif (uniquement parce que $\dim E \leq 2$).

$\text{Sp}(f)$	sous-espaces propres de f	nature de f	$\text{Det}(f)$
$\{1\}$	$E_1 = E$.	$f = \text{Id}_E$.	+1
	E_1 est une droite.	f est une rotation d'axe E_1 .	+1
$\{-1\}$	$E_{-1} = E$.	$f = -\text{Id}_E$.	-1
	E_{-1} est une droite.	f est la composée d'une rotation d'axe E_{-1} et de la réflexion par rapport au plan $E_{-1}^\perp$.	-1
$\{1, -1\}$	E_1 est un plan, E_{-1} est la droite $E_1^\perp$.	f est la réflexion par rapport à E_1 .	-1
	E_1 est une droite, E_{-1} est le plan $E_1^\perp$.	f est le demi-tour d'axe E_1 (symétrie orthogonale par rapport à E_1).	+1

Le cas $\dim E = 3$

L'ensemble des rotations de l'espace euclidien E , de dimension 3, est noté $\mathcal{SO}(E)$ ou $\mathcal{O}^+(E)$.

$\mathcal{SO}(E)$

$$= \{f \in \mathcal{O}(E); \text{Det} f = +1\}.$$

C'est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$. Il n'est pas commutatif (parce que $\dim E > 2$).

La matrice, relativement à une base orthonormée, d'une rotation r d'angle θ de E dépend de cette base. Il existe une base orthonormée directe de E telle que la matrice de r dans cette base soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

► Pour s'entraîner : ex. 8.

Application 3

Deux études de matrices orthogonales

(Caractérisation géométrique d'une isométrie vectorielle à partir de sa matrice)

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Caractériser géométriquement les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices, relativement à la base canonique, sont respectivement :

$$M = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice M est symétrique et orthogonale. Donc f est une symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Ici, $\text{tr} M = -1$. Donc f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite :

f est le demi-tour d'axe $\mathbb{R}(3, 1, 2)$.

A est une matrice orthogonale et $\text{Det} A = 1$.

Donc g est une rotation de $\mathbb{R}^3$.

• Calculons son axe (doc. 3).

Sur la TI, la fonction `rref` indique que le système :

$$(A - I_3)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculons son angle. $\text{tr } g = 1 + 2 \cos(\theta) = \text{tr } A = \frac{2}{7}$.

$$\cos(\theta) = \frac{-5}{14} \quad \text{et} \quad \theta = \pm \text{Arccos} \left(\frac{-5}{14} \right).$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad AV = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$
$$\theta = -\text{Arccos} \left(\frac{-5}{14} \right).$$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow a$					
$\begin{bmatrix} 2/7 & 6/7 & -3/7 \\ 3/7 & 2/7 & 6/7 \\ 6/7 & -3/7 & -2/7 \end{bmatrix}$					
$\det(a)$					
$\text{rref}(a - 1)$					
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$					
MAIN END AUTO POL 5/99					

F1 F2 F3 F4 F5 F6
 Algebra Calc Other PrgmIO Clear a-z...

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow v$$

$$\text{crossP}(v, a \cdot v)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9/7 \\ -9/7 \\ -3/7 \end{bmatrix}$$

crossP(v, a*v)
 MAIN BAD AUTO PDL 2/99

Doc. 4.

4 Réduction des endomorphismes symétriques

4.1. Trois lemmes

Il existe un sous-espace vectoriel de F , de dimension 1 ou 2, stable par u .

Le polynôme caractéristique de u est noté P . C'est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Pour un élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^n$, on note $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, notons B une base de F et $A = M_B(u)$. Pour tout vecteur v de F , $C_B(v)$ désigne le vecteur colonne des composantes de v dans la base B .

Cette méthode figure au programme d'algorithmique des concours.

Le polynôme P a au moins deux racines complexes conjuguées, λ et $\bar{\lambda}$.

Il existe un vecteur non nul de $\mathbb{C}^n$, X , tel que :

$$AX = \lambda X.$$

La matrice A étant à coefficients réels, on a aussi :

$$A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}.$$

Les vecteurs $V_1 = X + \bar{X}$ et $V_2 = \frac{1}{i}(X - \bar{X})$ sont dans $\mathbb{R}^n$ et :

$$AV_1 = \operatorname{Re}(\lambda)V_1 - \operatorname{Im}(\lambda)V_2 \quad \text{et} \quad AV_2 = \operatorname{Im}(\lambda)V_1 + \operatorname{Re}(\lambda)V_2.$$

Le plan de F engendré par (v_1, v_2) avec $C_B(v_1) = V_1$ et $C_B(v_2) = V_2$ est stable par u .

Lemme 2

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E et V un sous-espace vectoriel de E .

Si V est stable par u , alors $V^\perp$ l'est aussi.

Point clé

Pour tout x de $V^\perp$ et tout y de V :

$$\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle = 0.$$

Lemme 3

Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension 1 ou 2 est diagonalisable.

Démonstration

- Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 1 est diagonalisable.
- Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Le discriminant de son polynôme caractéristique est $\Delta = (a - d)^2 + 4b^2$.

Si $a - d = 0$ et $b = 0$, alors la matrice A est diagonale.

Si $a - d \neq 0$ ou $b \neq 0$, alors $\Delta > 0$ et A admet deux valeurs propres distinctes.

Donc toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

4.2. Les endomorphismes symétriques sont diagonalisables

Théorème 12

Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable.

4.3. Base orthonormée de vecteurs propres

Théorème 13

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E .

- Les sous-espaces propres de u sont orthogonaux deux à deux.
- Il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u .

Les trois lemmes permettent de rédiger une démonstration par récurrence du *théorème 12*.

Points clé

- il existe un sous-espace P de E , de dimension 1 ou 2, stable par u ;
- le sous-espace $P^\perp$ est aussi stable par u ;
- Les endomorphismes de P et $P^\perp$ induits par u sont symétriques.

Démonstration

- Supposons que u ait au moins deux valeurs propres distinctes λ et μ

Soit $(x, y) \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \times \text{Ker}(u - \mu \text{Id}_E)$:

$$\langle u(x) | y \rangle = \lambda \langle x | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle = \mu \langle x | y \rangle.$$

Donc $\langle x | y \rangle = 0$ et les sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux.

- Supposons que u ait k valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Les sous-espaces propres correspondants sont notés $E_1, \dots, E_k$.

Pour tout i de $\llbracket 1, k \rrbracket$, soit B_i une base orthonormée du sous-espace E_i .

La famille $B = (B_1, \dots, B_k)$ est une base de E formée de vecteurs propres de u et c'est une base orthonormée de E .

Les théorèmes 12, 13 et 14 sont fondamentaux et doivent être connus sur le bout des doigts.

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Signalons qu'un candidat a affirmé : une matrice symétrique réelle n'est pas nécessairement diagonalisable, il faudrait que son polynôme caractéristique soit scindé sur $\mathbb{R}$. »

Une affirmation qui a dû faire chuter sa note.

► Pour s'entraîner : ex. 9.

4.4. Diagonalisation des matrices symétriques réelles

L'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Théorème 14

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable par une matrice orthogonale.

$$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \quad \exists P \in \mathcal{O}(n) \quad \exists (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$$

$${}^t P A P = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Point clé

La matrice de passage entre deux bases orthonormées est une matrice orthogonale.

Il est faux qu'une matrice symétrique complexe soit diagonalisable. Essayer la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

► Pour s'entraîner : ex. 10 et 11.

Application 4

Réduction d'une matrice symétrique réelle

Soit b un nombre réel. La matrice M est définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Diagonaliser M en utilisant l'orthogonalité des sous-espaces propres.

2) Que dire de M lorsque b est complexe ?

1) La matrice M est symétrique réelle.

La matrice $M - 2I_3$ a deux lignes identiques.

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à 2.

Les vecteurs orthogonaux à V_1 sont de la forme :

$$V = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

On peut supposer $\alpha = 1$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \beta \\ 2 + b\beta \\ 4 + \beta \end{pmatrix}.$$

V est vecteur propre de M si, et seulement si :

$$2 + b\beta = (4 + \beta)\beta \quad (1)$$

L'équation (1) admet deux racines distinctes, β_1 et β_2 à calculer.

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment

une base de vecteurs propres de M dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux.

La matrice :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2 + \beta_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{2 + \beta_2^2}} \\ 0 & \frac{\beta_1}{\sqrt{2 + \beta_1^2}} & \frac{\beta_2}{\sqrt{2 + \beta_2^2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2 + \beta_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{2 + \beta_2^2}} \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale qui diagonalise M .

2) Supposons b complexe.

Cas 1 : $(b - 4)^2 + 8 \neq 0$.

Les calculs précédents restent valables, l'équation (1) a deux racines complexes distinctes β_1 et β_2 .

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et diagonalise M .

Cas 2 : $(b - 4)^2 + 8 = 0$.

La matrice M n'est pas diagonalisable. Pourquoi ?

5 Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques (programme PSI) .

5.1. Forme bilinéaire symétrique, endomorphisme auto-adjoint associé

Rappel

Une forme bilinéaire sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est une application bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Soit φ une telle forme.

On dit que φ est symétrique lorsque : $\forall (x, y) \in E^2 \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

On dit que φ est positive lorsque : $\forall x \in E \quad \varphi(x, x) \geq 0$.

On dit que φ est définie positive lorsque : $\forall x \in E \setminus \{0_E\} \quad \varphi(x, x) > 0$.

Théorème 15

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. L'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Dans le cas de la dimension finie, un lien étroit existe entre les formes bilinéaires symétriques et les endomorphismes auto-adjoints.

Dans la suite de ce paragraphe, $(E, \langle \mid \rangle)$ est un espace euclidien.

Théorème 16

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur l'espace euclidien $(E, \langle \mid \rangle)$.

Il existe un unique endomorphisme auto-adjoint u de E tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \varphi(x, y) = \langle x \mid u(y) \rangle.$$

L'endomorphisme u est appelé l'endomorphisme associé à la forme bilinéaire symétrique φ .

Démonstration

• Soit n la dimension de E et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $(E, \langle \mid \rangle)$.

Pour tout couple d'indice (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $m_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.

La matrice $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est symétrique et, puisque B est orthonormée, l'endomorphisme u de E tel que $M = M_B(u)$ est auto-adjoint.

• L'endomorphisme u ainsi construit est tel que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad \langle e_i \mid u(e_j) \rangle = m_{ij} = \varphi(e_i, e_j).$$

La linéarité de u et la bilinéarité de φ et de $\langle \mid \rangle$ permettent de prouver :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \varphi(x, y) = \langle x \mid u(y) \rangle.$$

• Il reste à prouver l'unicité de u .

Soit u et v tels que $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x \mid u(y) \rangle = \langle x \mid v(y) \rangle$.

On fixe y dans E . Pour tout x , $\langle x \mid u(y) - v(y) \rangle = 0$.

En prenant $x = u(y) - v(y)$ on obtient $u(y) = v(y)$ et $u = v$.

Vérifier que, réciproquement, si u est un endomorphisme auto-adjoint de E , l'application :

$$(x, y) \longmapsto \langle x \mid u(y) \rangle$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E .

La construction utilisée pour prouver l'existence de u dépend, *a priori*, de la base orthonormée B . La démonstration d'unicité prouve, qu'en fait, u ne dépend pas de B .

Corollaire 16.1

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur l'espace euclidien $(E, \langle \mid \rangle)$, u l'endomorphisme auto-adjoint de E associé à φ , B une base orthonormée de E et M la matrice, dans la base B , de u .

Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E , on note :

$$X = C_B(x) \quad \text{et} \quad Y = C_B(y).$$

Alors :

$$\varphi(x, y) = {}^t X M Y.$$

Corollaire 16.2

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur l'espace euclidien $(E, \langle \mid \rangle)$, de dimension n .

Il existe une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E et n réels

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tels que, pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et tout $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ de E :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i, \quad \text{et} \quad \varphi(x, x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2.$$

Démonstration

Soit u l'endomorphisme auto-adjoint associé à φ . D'après le *théorème* 13, il existe une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u .

La matrice M de u dans cette base est diagonale. Les termes de la diagonale de M étant $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, le *corollaire* 16.1 implique :

$$\varphi(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i.$$

De ceci découle le fait que l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E est un espace vectoriel isomorphe à l'espace $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes auto-adjoints de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

En notant $n = \dim E$, il est aussi isomorphe au sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5.2. Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et f une forme bilinéaire symétrique sur E .

La fonction Q , de E dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in E \quad Q(x) = f(x, x),$$

est appelée la **forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique f** .

Puisque f est bilinéaire et symétrique, on a :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + 2f(x, y).$$

On en déduit la **formule de polarisation**, qui permet de calculer f à partir de Q .

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad f(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)).$$

Cette formule de polarisation permet de donner la définition générale d'une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .

Une application Q , de E dans $\mathbb{R}$, est appelée une **forme quadratique** sur E lorsque la fonction f , de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad f(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$$

est une forme bilinéaire symétrique.

Dans ce cas, f est appelée la **forme polaire de la forme quadratique Q** .

Le *théorème* suivant permet de reconnaître, par le calcul, une forme quadratique en dimension finie.

L'ensemble des forme quadratiques sur E est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications de E dans $\mathbb{R}$. Il est isomorphe à l'espace des formes bilinéaires symétriques sur E .

Théorème 17

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, $\dim E = n$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et Q une application de E dans $\mathbb{R}$.

Pour un vecteur x de E , de composantes $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base B , on note X le vecteur colonne de ses composantes dans cette base.

La fonction Q est une forme quadratique sur E si, et seulement si, il existe une matrice symétrique $M = (m_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E \quad Q(x) = \sum_{i=1}^n m_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij} x_i x_j = {}^t X M X.$$

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et Q une forme quadratique sur E .

On dit que Q est une **forme quadratique positive** lorsque :

$$\forall x \in E \quad Q(x) \geq 0.$$

Théorème 18 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, Q une forme quadratique positive sur E et f sa forme polaire.

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |f(x, y)|^2 \leq Q(x)Q(y).$$

Lorsque la forme quadratique Q est positive et vérifie de plus :

$$Q(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E,$$

on dit que Q est une **forme quadratique définie positive**.

Il est immédiat de constater que, dans ce cas, la forme polaire de Q est un produit scalaire sur E .

► Pour s'entraîner : ex. 12.

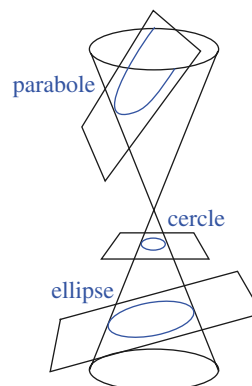
6 Les coniques

La première étude des coniques est sans doute due à Ménechme (IV^e siècle av. J.-C.). Il les obtient en coupant un cône de révolution par un plan perpendiculaire à une génératrice, droite contenue dans le cône et passant par son sommet. Avec un angle au sommet du cône aigu, droit, obtus, la courbe est respectivement une ellipse, une parabole ou une hyperbole (doc. 5 et 6).

Un siècle plus tard, avec un cône quelconque, en modifiant l'angle d'inclinaison du plan de la section, Apollonius retrouve ces trois types de coniques.

Vers 320 ap. J.-C., Pappus, dans le livre, *La Collection*, les définit comme « ensemble des points dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe est constant ».

La définition bifocale de l'ellipse est due à Guidobaldo del Monte, en 1579.



Doc. 5.

Fermat (1601-1665) définit les coniques par des équations que nous écrivons :

$$x^2 = ay, \quad k^2 - x^2 = ay^2 \quad \text{et} \quad k^2 + x^2 = ay^2.$$

Philippe de La Hire (1640-1718) présente l'ellipse et l'hyperbole par leur définition bifocale et la parabole par sa définition foyer-directrice.

Euler (1707-1783) définit les coniques comme courbes d'équation cartésienne :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

6.1. Réduction de l'équation d'une conique

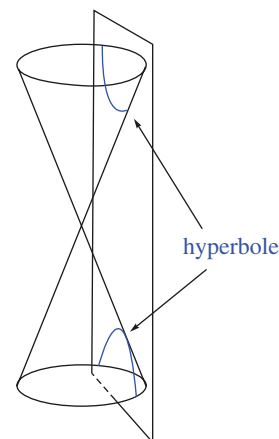
Le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit six réels a, b, c, d, e et f tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et (C) la courbe d'équation :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

dans ce repère.

La courbe (C) est appelée une **conique**.



Doc. 6.

Théorème 18

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (a, b, c) dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ et (C) la conique dont l'équation dans ce repère est :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Les valeurs propres de la matrice symétrique réelle $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ sont notées λ et μ .

Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée de vecteurs propres telle que : $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ et $A\vec{v} = \mu\vec{v}$, alors l'équation de (C) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est de la forme :

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + gx' + hy' + f = 0.$$

Démonstration

Notons A la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de $\vec{OM}$. Alors :

$$\begin{aligned} M \in (C) &\Leftrightarrow ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ &\Leftrightarrow {}^tXAX + (d, e)X + f = 0. \end{aligned}$$

Soit P la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$, $A = PD^tP$.

Alors :

$$M \in (C) \Leftrightarrow {}^t({}^tPX)D({}^tPX) + (d, e)X + f = 0.$$

${}^tPX$ est le vecteur colonne des coordonnées de $\vec{OM}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

On a $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Notons $(g, h) = (d, e)P$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tPX$.

L'équation de (C) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est :

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + gx' + hy' + f = 0.$$

Quitte à permuter les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ou à changer un des vecteurs en son opposé, on peut imposer aux bases $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{i}, \vec{j})$ d'avoir même orientation.

6.2. Nature de la conique

Considérons une conique dont une équation dans un repère orthonormé est :

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + gx + hy + f = 0 \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

- Lorsque $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$, la courbe est une **parabole**, ou deux droites parallèles, ou une droite, ou $\emptyset$.
- Lorsque $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$, la mise sous forme canonique d'une équation du second degré, permet d'écrire l'équation sous la forme :

$$\lambda \left(x + \frac{g}{2\lambda} \right)^2 + \mu \left(y + \frac{h}{2\mu} \right)^2 + \beta = 0.$$

Il s'agit alors d'une **conique à centre**.

- Lorsque $\lambda\mu > 0$, la courbe est une **ellipse** de centre $\left(-\frac{g}{2\lambda}, -\frac{h}{2\mu} \right)$, ou un singleton (lorsque $\beta = 0$), ou $\emptyset$ (lorsque $\mu\beta < 0$).

Le cercle est un cas particulier de l'ellipse. Il correspond à $\lambda = \mu$.

- Lorsque $\lambda\mu < 0$, la courbe est une **hyperbole** de centre $\left(-\frac{g}{2\lambda}, -\frac{h}{2\mu} \right)$, ou deux droites sécantes (lorsque $\beta = 0$).

Les **asymptotes** de l'hyperbole d'équation :

$$\lambda \left(x + \frac{g}{2\lambda} \right)^2 + \mu \left(y + \frac{h}{2\mu} \right)^2 + \beta = 0.$$

sont les droites sécantes d'équation :

$$\lambda \left(x + \frac{g}{2\lambda} \right)^2 + \mu \left(y + \frac{h}{2\mu} \right)^2 = 0.$$

On déduit de ceci le *théorème* suivant.

Théorème 19

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit (a, b, c) dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ et (C) la conique d'équation :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

dans ce repère.

Les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ sont notées λ et μ .

- Si $\text{Det}(A) = \lambda\mu > 0$, la conique (C) est une ellipse, ou un singleton ou l'ensemble vide.
- Si $\text{Det}(A) = \lambda\mu < 0$, la conique (C) est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.
- Si $\text{Det}(A) = \lambda\mu = 0$, la conique (C) est une parabole, ou la réunion de deux droites parallèles, ou une droite, ou l'ensemble vide.

Deux lueurs d'espoir sous un déluge de critiques !

Rapport E3A, 2002

« Cet exercice consiste en la représentation d'une ellipse. Il s'est avéré le plus accessible et le plus réussi. »

Rapport Centrale, 2001

« Il semblerait que les rapports des années antérieures aient incité à ne plus considérer la géométrie comme partie négligeable et méprisable. Le mot "conique" ne fait plus peur. »

Mais tout n'est pas si facile.

Rapport CCP, 2000

« Les candidats ont aussi beaucoup de mal à reconnaître l'équation d'un cercle, par exemple, pour $x^2 + y^2 - x = 0$, ils y arrivent par approximation successives, ils proposent d'abord une conique, puis une parabole (!), puis une ellipse et enfin un cercle. »

La conique (C) est un cercle lorsque $a = c$ et $b = 0$. Dans ce cas, il est inutile de changer de repère pour le voir. L'équation est déjà sous la forme :

$$ax^2 + ay^2 + dx + ey + f = 0.$$

Application 5

Une équation bien compliquée

(D'après TPE, 1993)

Déterminer la nature de la conique et les coordonnées des foyers de la conique (C) définie dans un repère orthonormé d'un plan euclidien par l'équation :

$$481x^2 + 384xy + 369y^2 + 2118x - 324y - 2124 = 0.$$

Avec les notations du théorème 19, les valeurs propres de la matrice associée, A, sont 225 et 625.

Les sous-espaces propres associés sont engendrés respectivement par $\begin{pmatrix} 1, -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{4}{3}, 1 \end{pmatrix}$.

Avec Maple :

```
> with(linalg):
> A:=matrix(2,2,[481,192,192,369]);
      A :=  $\begin{bmatrix} 481 & 192 \\ 192 & 369 \end{bmatrix}$ 
> eigenvects(A);
      [225, 1,  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \right\}$ ], [625, 1,  $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ]
```

Doc. 7.

Posons $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormé. Appelons $(x, y), (x', y')$ les coordonnées d'un point M dans les bases $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O, \vec{u}, \vec{v})$ respectivement.

Nous savons que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$M \in (C) \Leftrightarrow 481x^2 + 384xy + 369y^2 + 2118x - 324y - 2124 = 0.$$

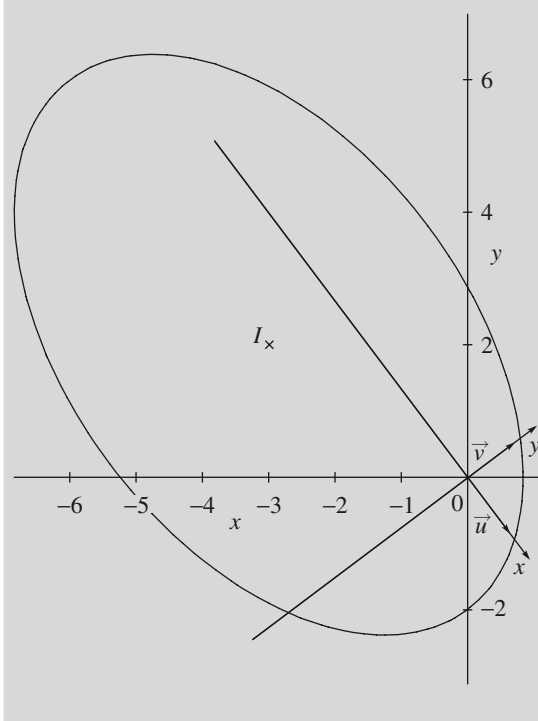
$$\Leftrightarrow 225x'^2 + 625y'^2 + 1530x' + 1500y' - 2124 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x' + \frac{17}{5}\right)^2}{25} + \frac{\left(y' + \frac{6}{5}\right)^2}{9} - 1 = 0.$$

(C) est une ellipse de centre $I \left(-\frac{17}{5}, -\frac{6}{5} \right)$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Son axe principal est la droite passant par I et dirigée par $\vec{u}$, son axe secondaire est la droite passant par I et dirigée par $\vec{v}$. Son demi grand-axe vaut $a = 5$, son demi petit-axe $b = 3$ et la distance de I aux foyers $c = 4$.

Avec Maple :

```
> with(plots):
> implicitplot(481*x^2+384*x*y
+369*y^2+2118*x-324*y-2124,
x=-7..1,y=-3..8,
scaling=constrained);
```



Doc. 8.

Les foyers sont les points définis par :

$$\vec{IF} = 4\vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{IF'} = -4\vec{u}.$$

Ils ont respectivement pour coordonnées, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5}, -\frac{6}{5} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -\frac{37}{5}, -\frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

6.3. Quelques rappels

Révisons l'étude des coniques du point de vue géométrique, telle qu'abordée en Première année

■ Une **conique non dégénérée** qui n'est pas un cercle est l'ensemble des points M tels que :

$$\frac{d(M, F)}{d(M, D)} = e,$$

où e est un réel strictement positif appelé excentricité de la conique, F un point du plan appelé foyer de la conique, D une droite ne contenant pas F appelée directrice de la conique (doc. 9).

- Si $e = 1$, la conique est une **parabole**.
- Si $e < 1$, c'est une **ellipse**.
- Si $e > 1$, c'est une **hyperbole**.

En choisissant le foyer F pour origine, la droite passant par F et orthogonale à D pour axe des x , la conique a pour équation polaire (doc. 10) :

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

■ Équations cartésiennes réduites

Dans un repère orthonormé approprié, la parabole admet pour équation :

$$y^2 = 2qx.$$

Dans un repère orthonormé approprié, l'ellipse admet pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dans un repère orthonormé approprié, l'hyperbole admet pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

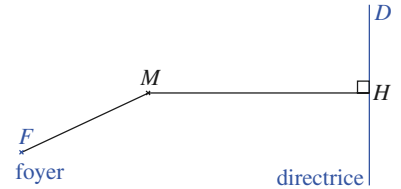
■ Équations paramétriques

La parabole d'équation $y^2 = 2qx$ peut être paramétrée par :

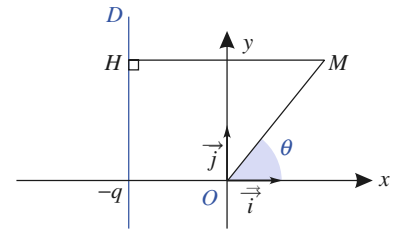
$$\begin{cases} x = 2qt^2 \\ y = 2qt \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ peut être paramétrée par :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad \text{avec } t \in [0, 2\pi].$$



Doc. 9. $d(M, F) = MF = eMH = ed(M, D)$



Doc. 10.

Rapport Centrale, 2001

« D'une façon générale, les coniques ont annihilé les chances de nombreux candidats qui n'avaient aucune notion sur leurs définitions et propriétés les plus simples. La "machinerie" de réduction de l'équation générale semble avoir été vue. Mais aucune idée des équations réduites, de la position des foyers et directrice, des relations entre a, b, c, e et p pour trop de candidats. Que faire d'une équation polaire de la conique, si on ne connaît ni le centre du repère, ni la signification des constantes qui y figurent ! »

L'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ peut être paramétrée par :

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos t} \\ y = b \tan t \end{cases} \text{ avec } t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}[$$

ou :

$$\begin{cases} x = \varepsilon a \cosh u \\ y = b \sinh u \end{cases} \text{ avec } u \in \mathbb{R} \text{ et } \varepsilon \in \{+1, -1\}.$$

■ Définitions bifocales

Une ellipse de foyers F_1 et F_2 est l'ensemble des points M tels que :

$$d(M, F_1) + d(M, F_2) = 2a.$$

Une hyperbole de foyers F_1 et F_2 est l'ensemble des points M tels que :

$$|d(M, F_1) - d(M, F_2)| = 2a.$$

Application 6

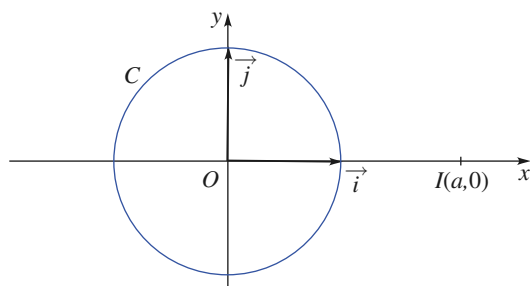
Points équidistants d'un point et d'un cercle

Déterminer l'ensemble E des points équidistants d'un point et d'un cercle.

$$d(M, C) = d(M, I)$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1-a^2}{2} \frac{1}{1-a \cos \theta} \quad (1)$$

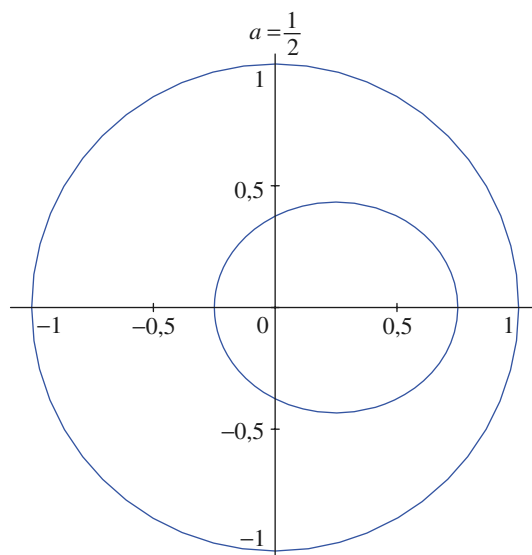
Munissons le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et considérons le cercle C de centre O et de rayon 1 et le point $I(a, 0)$, avec a dans $\mathbb{R}^+$.



Doc. 11. Le choix du repère.

- Lorsque $a = 0$, E est le cercle de centre O , de rayon $\frac{1}{2}$.
- Lorsque $a = 1$, E est la demi-droite $O + \mathbb{R}^+ \vec{i}$.
- Lorsque $a \neq 0$ et $a \neq 1$, on note (ρ, θ) les coordonnées polaires d'un point M .

Donc E est inclus dans une conique d'excentricité a .



Doc. 12. Le cas $a = \frac{1}{2}$.

• Pour $a > 1$

E est la branche d'hyperbole d'équation polaire (1),

de sommet $\left(\frac{1+a}{2}, 0\right)$ (faire le schéma).

• Pour $0 < a < 1$

E est l'ellipse d'équation polaire (1) (doc. 12).

Ses sommets ont pour coordonnées :

$$\left(\frac{1+a}{2}, 0\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{a-1}{2}, 0\right).$$

7 Les quadriques

Dans ce paragraphe, E est un espace euclidien de dimension 3.

7.1. Présentation des quadriques et principe de la réduction

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de E et $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ et j des réels tels que $(a, b, c, d, e, f) \neq (0, \dots, 0)$.

On désigne par Q l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ satisfont à l'équation :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + gx + hy + iz + j = 0$$

L'ensemble Q est appelé une **quadrique**.

Soit M un point de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note $A = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des composantes de M .

Un calcul similaire à celui de la démonstration du *théorème 19* prouve que :

$$M \in Q \Leftrightarrow {}^tXAX + (g, h, i)X + j = 0.$$

Ce point de départ permet de prouver, en diagonalisant A , le *théorème* suivant.

Théorème 20

Soit la quadrique Q d'équation :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + gx + hy + iz + j = 0$$

dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice symétrique réelle A , α, β, γ les valeurs propres associées respectivement à $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ et (x', y', z') les coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Alors l'équation de Q dans ce repère est de la forme :

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 + kx' + ly' + mz' + j = 0.$$

Les coefficients devant les termes au carré sont les valeurs propres de A .

Le terme constant j ne change pas d'une équation à l'autre lorsqu'on ne change pas d'origine.

La factorisation canonique permet ensuite de simplifier encore plus cette équation. De même que pour les coniques, cette opération correspond à un changement d'origine.

7.2. Les principales quadriques

Le programme *PSI* dit :

« Description des quadriques usuelles définies par une équation cartésienne réduite en repère orthonormal... »

Le programme *PC* dit :

« Exemples de description de quadriques à partir de leurs équations réduites en repère orthonormal... »

Vous trouverez, dans ce paragraphe, les quadriques usuelles présentées par leurs équations réduites ainsi qu'un exemple de représentation graphique de chacune d'elle obtenue grâce à *Maple*.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

7.2.1 Les ellipsoïdes

Un **ellipsoïde** est une quadrique dont l'équation réduite est de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Les trois plans (xOy) , (yOz) et (xOz) sont des plans de symétrie.

Les trois axes (Ox) , (Oy) et (Oz) sont des axes de symétrie.

Le point O est un centre de symétrie.

Sa section par un plan parallèle à un des plans de coordonnées est une ellipse, un point ou $\emptyset$.

7.2.2 Les hyperboloïdes

Un **hyperboloïde** est une quadrique dont l'équation réduite est de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon,$$

ε valant $+1$ ou -1 .

Les trois plans (xOy) , (yOz) et (xOz) sont des plans de symétrie.

Les trois axes (Ox) , (Oy) et (Oz) sont des axes de symétrie.

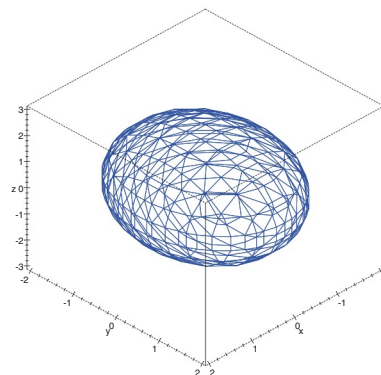
Le point O est un centre de symétrie.

Lorsque $\varepsilon = +1$, la section de l'hyperboloïde par un plan parallèle à (xOy) est une ellipse ; sa section par un plan parallèle à (yOz) ou (xOz) est une hyperbole.

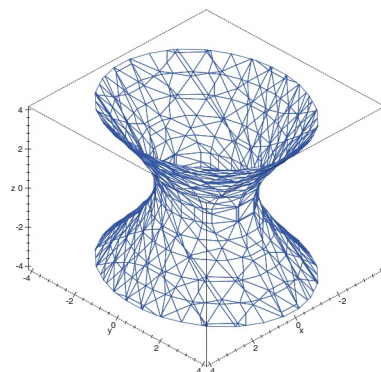
Pour un point $M(x, y, z)$ de l'hyperboloïde, il n'y a pas de restriction sur z .

C'est un **hyperboloïde à une nappe**.

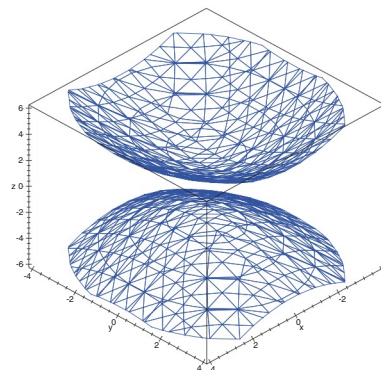
Lorsque $\varepsilon = -1$, la section de l'hyperboloïde par un plan parallèle à (xOy) est une ellipse, un point ou $\emptyset$; sa section par un plan parallèle à (yOz) ou (xOz) est une hyperbole.



Doc. 13. Un ellipsoïde.



Doc. 14. Un hyperboloïde à une nappe.



Doc. 15. Un hyperboloïde à deux nappes.

Pour un point $M(x, y, z)$ de l'hyperboloïde, on a : $|z| \geq |c|$.

C'est un **hyperboloïde à deux nappes**.

7.2.3 Les cônes elliptiques

Un **cône elliptique** est une quadrique dont l'équation réduite est de la forme :

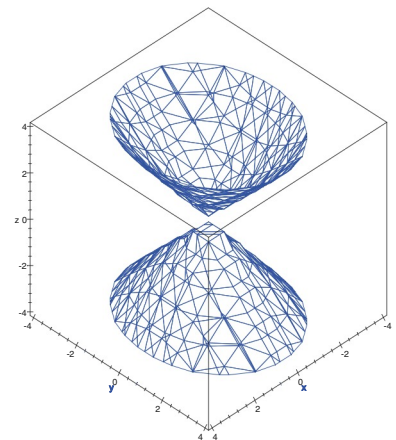
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Les trois plans (xOy) , (yOz) et (xOz) sont des plans de symétrie.

Les trois axes (Ox) , (Oy) et (Oz) sont des axes de symétrie.

Le point O est un centre de symétrie.

La section du cône elliptique par un plan parallèle à (xOy) est une ellipse ou un point ; sa section par un plan contenant l'axe (Oz) est la réunion de deux droites sécantes en O ; sa section par un plan parallèle à (yOz) ou (xOz) est une hyperbole.



Doc. 16. Un cône elliptique.

7.2.4 Les paraboloides elliptiques

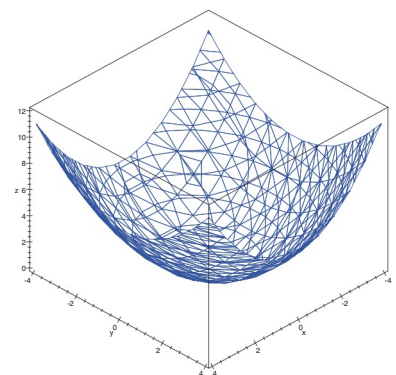
Un **paraboloïde elliptique** est une quadrique dont l'équation réduite est de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$$

Les plans (yOz) et (xOz) sont des plans de symétrie.

L'axe Oz est un axe de symétrie.

La section du paraboloides elliptique par un plan parallèle à (xOy) est une ellipse, un point ou $\emptyset$; sa section par un plan parallèle à (yOz) ou (xOz) est une parabole.



Doc. 17. Un paraboloides elliptique.

7.2.5 Les paraboloides hyperboliques

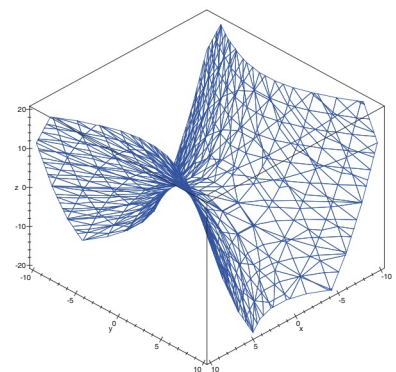
Un **paraboloïde hyperbolique** est une quadrique dont l'équation réduite est de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$

Les plans (yOz) , (xOz) sont des plans de symétrie.

L'axe (Oz) est un axe de symétrie.

La section du paraboloides hyperbolique par un plan parallèle à (xOy) est une hyperbole ou deux droites sécantes (dans le cas $z = 0$) ; sa section par un plan parallèle à (yOz) ou (xOz) est une parabole.



Doc. 18. Un paraboloides hyperbolique.

7.2.6 Les cylindres

Lorsque, dans l'équation réduite, une des trois variables a disparu, on a affaire à un cylindre.

Dans le cadre de notre étude, on trouve :

– le **cylindre elliptique**, d'équation réduite :

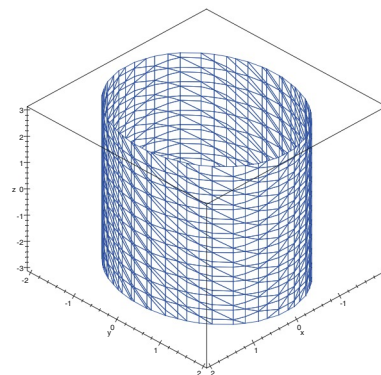
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ;$$

– le **cylindre hyperbolique**, d'équation réduite :

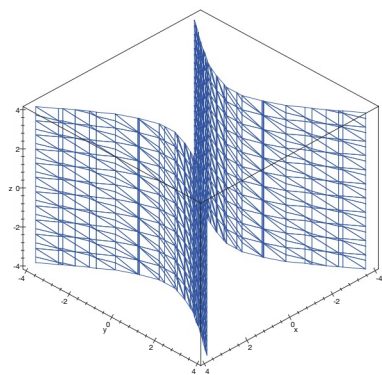
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 ;$$

– le **cylindre parabolique**, d'équation réduite :

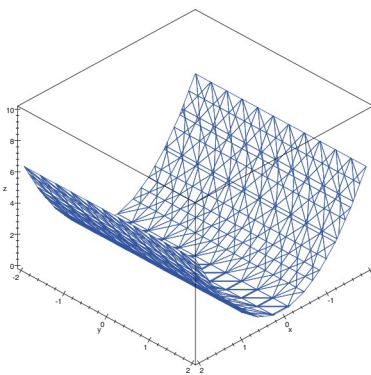
$$z = ax^2.$$



Doc. 19. Un cylindre elliptique.



Doc. 20. Un cylindre hyperbolique.



Doc. 21. Un cylindre parabolique.

► Pour s'entraîner : ex. 15 et 16.

Application 7

Quadriques de révolution

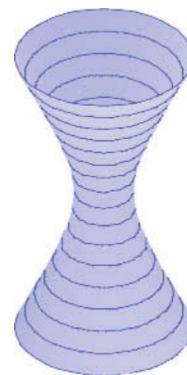
1) Déterminer, parmi les quadriques présentées précédemment sous leur forme réduite, celles qui sont invariantes par rotation d'axe (Oz) .

2) Soit un hyperboloïde de révolution à une nappe, $\mathcal{H}$, d'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

a) Prouver que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x = 1$ coupe $\mathcal{H}$ selon deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

b) On note $\mathcal{D}_\theta$ la droite image de $\mathcal{D}$ par la rotation d'axe (Oz) est d'angle θ . Prouver que $\mathcal{H}$ est la réunion des droites $\mathcal{D}_\theta$, avec $\theta \in [0, 2\pi]$ (doc. 22).



Doc. 22. « Mais où sont les droites dans cet hyperboloïde de révolution ? »

1) Une telle quadrique est de révolution d'axe (Oz) lorsque sa section par un plan parallèle à (xOy) (d'équation $z = k$) est un cercle de ce plan (ou un point ou $\emptyset$), dont le centre est sur l'axe (Oz) .

On doit donc pouvoir se ramener, lorsque $z = k$, à une équation du type $x^2 + y^2 = R^2$.

Avec les notations précédentes, on obtient $|a| = |b|$ et la liste suivante :

- Ellipsoïde de révolution :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- Hyperboloïde de révolution à une nappe :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- Hyperboloïde de révolution à deux nappes :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

- Cône de révolution :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

- Paraboloïde de révolution :

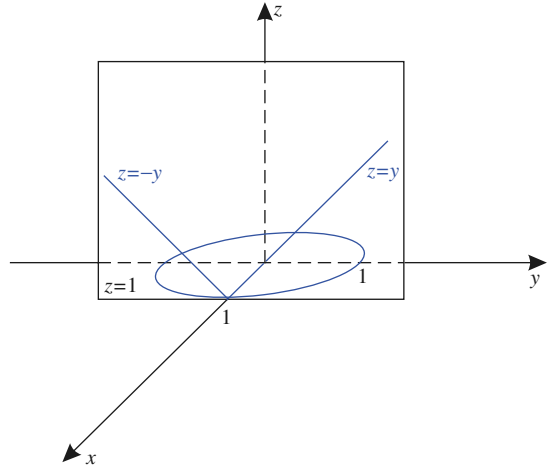
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = z.$$

- Cylindre de révolution :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

2) a) $\mathcal{P} \cap \mathcal{H} = \{(x, y, z) \mid x = 1 \text{ et } y^2 - z^2 = 0\}$

C'est la réunion des droites $\mathcal{D}$, d'équation $(x = 1 \text{ et } y = z)$ et $\mathcal{D}'$, d'équation $(x = 1 \text{ et } y = -z)$ (doc. 23).

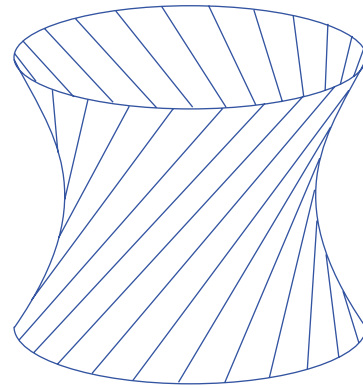


Doc. 23.

b) Fixons un réel z . Le plan parallèle à xOy , de cote z , coupe la droite $\mathcal{D}$ au point M de coordonnées $(1, z, z)$.

Le carré de la distance de M à l'axe Oz est $R^2 = 1 + z^2$. Par une rotation d'axe Oz , le point M est transformé en M' , de coordonnées (x, y, z) , tel que $x^2 + y^2 = R^2 = 1 + z^2$.

Ceci prouve que la réunion des droites $\mathcal{D}_\theta$ est incluse dans $\mathcal{H}$. L'inclusion réciproque reste à prouver.



Doc. 24. Génération rectiligne d'un hyperboloïde à une nappe.

7.3. Quadriques et droites

L'hyperboloïde de révolution à une nappe et le paraboloïde hyperbolique peuvent être décrits comme des réunions de droites de l'espace. Prouvons-le.

7.3.1 L'hyperboloïde de révolution à une nappe

Son équation dans un repère orthonormé bien choisi est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

On pose $d = \frac{c}{a}$, l'équation devient $x^2 + y^2 - d^2 z^2 - a^2 = 0$, c'est-à-dire :

$$(x-a)(x+a) - (dz-y)(dz+y) = \begin{vmatrix} x-a & dz-y \\ dz+y & x+a \end{vmatrix} = 0.$$

On en déduit que le point $M(x, y, z)$ de l'espace est sur l'hyperboloïde si, et seulement s'il existe un couple (α, β) de réels distincts de $(0, 0)$, tel que :

$$\begin{cases} \alpha(x-a) + \beta(dz-y) = 0 \\ \alpha(dz+y) + \beta(x+a) = 0 \end{cases}$$

Pour $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ donné, ceci est l'équation d'une droite de l'espace, $D_{(\alpha, \beta)}$, et l'hyperboloïde est la réunion de ces droites. On dit aussi qu'il est engendré par ces droites.

On peut aussi factoriser l'équation de l'hyperboloïde en :

$$(y-a)(y+a) - (dz-x)(dz+x) = 0.$$

Ceci permet de trouver une deuxième famille de droites qui engendre l'hyperboloïde de révolution à une nappe.

7.3.2 Le paraboloïde hyperbolique

Son équation dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ bien choisi est :

$$\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2 = z \quad (1)$$

On désigne par $\mathcal{P}$ ce paraboloïde. Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{P}$.

Chercher les droites de l'espace passant par M et incluses dans $\mathcal{P}$, c'est chercher un vecteur non nul, $\vec{V}$, tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad M + \lambda \vec{V} \in \mathcal{P}.$$

Le problème équivaut à trouver les triplets de réels $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$ tels que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \alpha^2(x + \lambda u)^2 - \beta^2(y + \lambda v)^2 = z + \lambda w.$$

Sachant que (x, y, z) est solution de (1), ceci est réalisé si, et seulement si :

$$\alpha^2 u^2 - \beta^2 v^2 = 0 \quad \text{et} \quad w = 2(\alpha^2 x u - \beta^2 y v).$$

C'est-à-dire :

$$(u, v, w) = c(\beta, \alpha, 2\alpha\beta(\alpha x - \beta y)),$$

ou bien $(u, v, w) = c(\beta, -\alpha, 2\alpha\beta(\alpha x + \beta y))$, où c est un réel non nul.

Notons :

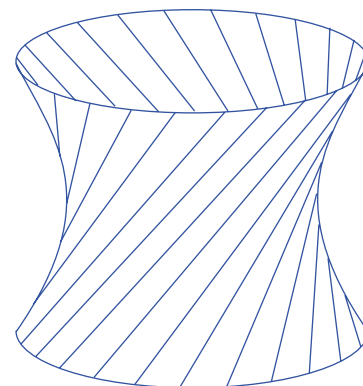
$$\vec{V}_M = \beta \vec{i} + \alpha \vec{j} + 2\alpha\beta(\alpha x - \beta y) \vec{k}$$

et

$$\vec{W}_M = \beta \vec{i} - \alpha \vec{j} + 2\alpha\beta(\alpha x + \beta y) \vec{k}.$$

Le paraboloïde $\mathcal{P}$ est la réunion des droites $M + \mathbb{R} \vec{V}_M$ lorsque M parcourt $\mathcal{P}$.

C'est aussi la réunion des droites $M + \mathbb{R} \vec{W}_M$.

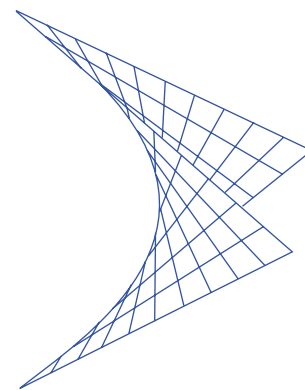


Doc. 25. Génération rectiligne d'un hyperboloïde à une nappe.

Dans la forme réduite usuelle :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z,$$

on a mis $\alpha = 1/a$ et $\beta = 1/b$. Cette forme est plus pratique pour effectuer les calculs algébriques de ce paragraphe.



Doc. 26. Double génération rectiligne d'un paraboloïde hyperbolique.

FICHE MÉTHODE

● L'étude des automorphismes orthogonaux en dimension 2 et 3 se fait, du point de vue géométrique, selon les méthodes vues en Première année.

Le point de vue algébrique, présenté dans les *tableaux* suivants, complète cette étude.

$\text{Sp}(f)$	sous-espaces propres de f	nature de f	$\text{Det}(f)$
$\emptyset$	pas de sous-espace propre.	f est une rotation d'angle $\theta \neq 0 \bmod \pi$.	+1
$\{1\}$	$E_1 = E$.	$f = \text{Id}_E$. f est une rotation d'angle $\theta = 0 \bmod 2\pi$.	+1
$\{-1\}$	$E_{-1} = E$.	$f = -\text{Id}_E$. f est une rotation d'angle $\theta = \pi \bmod 2\pi$.	+1
$\{1, -1\}$	E_1 et E_{-1} sont des droites orthogonales du plan E .	f est la réflexion par rapport à E_1 .	-1

Le cas $\dim E = 2$

$\text{Sp}(f)$	sous-espaces propres de f	nature de f	$\text{Det}(f)$
$\{1\}$	$E_1 = E$.	$f = \text{Id}_E$.	+1
	E_1 est une droite.	f est une rotation d'axe E_1 .	+1
$\{-1\}$	$E_{-1} = E$.	$f = -\text{Id}_E$.	-1
	E_{-1} est une droite.	f est la composée d'une rotation d'axe E_{-1} et de la réflexion par rapport au plan $E_{-1}^\perp$.	-1
$\{1, -1\}$	E_1 est un plan, E_{-1} est la droite $E_1^\perp$.	f est la réflexion par rapport à E_1 .	-1
	E_1 est une droite, E_{-1} est le plan $E_1^\perp$.	f est le demi-tour d'axe E_1 (symétrie orthogonale par rapport à E_1).	+1

Le cas $\dim E = 3$

● Soit une conique d'équation :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \text{ avec } b \neq 0,$$

pour **réduire l'équation de la conique** :

- on écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et on diagonalise la matrice A ;
- on choisit une base orthonormée de vecteurs propres de A , $(\vec{u}, \vec{v})$ et on écrit l'équation de la conique dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$;
- on effectue éventuellement une translation de l'origine, de manière à simplifier les termes de degré 1 dans l'équation de la conique.

FICHE MÉTHODE

● Pour **déterminer la nature d'une conique** sans en réduire l'équation, on calcule $\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$:

- si $\text{Det}(A) > 0$, la conique (C) est une ellipse, ou un singleton ou l'ensemble vide ;
- si $\text{Det}(A) < 0$, la conique (C) est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes ;
- si $\text{Det}(A) = 0$, la conique (C) est une parabole, ou la réunion de deux droites parallèles, ou une droite, ou l'ensemble vide.

● Soit une quadrique d'équation :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + gx + hy + iz + j = 0.$$

Pour **réduire l'équation de la quadrique** :

• on écrit $A = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$ et on diagonalise la matrice A ;

• on choisit une base orthonormée de vecteurs propres de A , $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et on écrit l'équation de la quadrique dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$; celle-ci est de la forme :

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 + kx' + ly' + mz' + j = 0$$

où α, β et γ sont les valeurs propres de A associées à $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ respectivement ;

• on effectue éventuellement une translation de l'origine, de manière à simplifier les termes de degré 1 dans l'équation de la quadrique.

Algorithmique TD 5

Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi pour le calcul approché des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle est étudiée dans les problèmes suivants : *Centrale-Supelec MP 2000, Maths II et CCP PSI 1997, 2^e épreuve*. Elle figure au programme d'algorithmique des concours.

La démarche mathématique

■ L'idée de départ

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $B = {}^t P A P$ et A sont semblables.

■ L'itération

On part d'une matrice symétrique réelle A et on construit une suite (A_k) de matrices en posant :

$$A_0 = A \quad \text{et} \quad A_{k+1} = {}^t P_k A_k P_k$$

où la matrice P_k est une matrice orthogonale particulière, telle que la suite (A_k) converge vers une matrice diagonale D , (c'est la grande idée de Jacobi, la technique employée est exposée plus loin, vous la programmerez).

■ Le test d'arrêt

La suite de matrices (A_k) converge vers une matrice diagonale D semblable à A . La liste des valeurs propres de A est la liste des termes diagonaux de D .

Mais, un algorithme informatique doit s'arrêter après un nombre fini d'itérations.

On décide, au départ, d'une précision souhaitée, ε . À chaque étape, on teste si la matrice A_k est diagonale à ε près. Tant que la précision n'est pas atteinte, on poursuit l'itération.

■ Le résultat

À l'arrêt du test, la diagonale de la dernière matrice A_k calculée fournit la liste des valeurs propres approchées de la matrice A .

■ Et les vecteurs propres ?

On constate que $A_k = {}^t(P_0 P_1 \dots P_{k-1}) A (P_0 P_1 \dots P_{k-1})$.

On pose $Q_k = (P_0 P_1 \dots P_{k-1})$. Pour l'entier k auquel on a arrêté l'itération, les colonnes de la matrice Q_k fournissent une approximation d'une base de vecteurs propres de A . À vous de concevoir le complément de programme permettant de donner la liste de ces vecteurs.

La démarche algorithmique

Vous trouverez ci-dessous une présentation des différents éléments de l'algorithme en question.

À vous de les assembler pour créer un programme qui fonctionne.

La syntaxe utilisée est celle de la TI.

Les données de départ sont une matrice symétrique réelle, notée $a = (a[i, j])$ et un réel $\text{epsilon} > 0$.

```
: jacobi(a, epsilon)
:
: © Initialisation :
: Local aa, n, orth, max, i, j, p, q, theta, bb
: a → aa : rowdim(a) → n : identity(n) → orth : epsilon → max
:
```

```

:Ⓒ La boucle principale et son arrêt
:Ⓒ On va calculer le maximum (max) des valeurs absolues des composantes hors dia-
gonale de la matrice aa. Tant que  $\max \geq \epsilon$ , on répète le processus itératif.
Lorsque l'on sort de cette boucle, la matrice aa est diagonale à epsilon près.
:
:While  $\max \geq \epsilon$ 
:
:Ⓒ Détermination de  $\max \{ |aa[i,j]|, i \neq j \}$  et des indices p et q donnant ce max.
:
:  For i, 2, n
:    For j, 1, i-1
:      If  $\text{abs}(aa[i,j]) \geq \max$  Then
:         $\text{abs}(aa[i,j]) \rightarrow \max$ 
:         $i \rightarrow q : j \rightarrow p$ 
:      Endif
:    Endfor
:  Endfor
:
:Ⓒ Construction de la matrice orthogonale (orth). C'est la matrice identité sauf pour
les 4 coefficients d'indices [p,p], [p,q], [q,p], [q,q]. Les valeurs de p et q ont été
calculées dans le premier bloc et  $p < q$ .
:
:  If  $aa[p,p] = aa[q,q]$  Then
:     $\pi/4 \rightarrow \theta$ 
:  Else
:     $1/2 * \arctan(2 * aa[p,q] / (aa[q,q] - aa[p,p])) \rightarrow \theta$ 
:  Endif
:
:   $\cos(\theta) \rightarrow \text{orth}[p,p] : \cos(\theta) \rightarrow \text{orth}[q,q]$ 
:   $\sin(\theta) \rightarrow \text{orth}[q,p] : -\sin(\theta) \rightarrow \text{orth}[p,q]$ 
:
:Ⓒ L'itération  ${}^t\text{orth} * aa * \text{orth} \rightarrow bb$ .
:Ⓒ La matrice orth définie ci-dessus est telle que les termes hors diagonale de
(bb =  ${}^t\text{orth} * aa * \text{orth}$ ) soient plus petits que ceux de aa.
:Ⓒ Le produit matriciel général ferait calculer les  $n^2$  coefficients du produit (aa *
orth), puis les  $n^2$  coefficients du produit orth * (aa * orth). Mais ici, les coeffi-
cients hors des lignes et colonnes p et q sont inchangés. Il n'y a pas plus de 4n co-
efficients à calculer (2 lignes et 2 colonnes). On aura intérêt à utiliser une formule
spécifique à notre problème. Ces calculs constituent une des questions du problème de
Centrale.
:
:Ⓒ Remplissage de la matrice bb
:  aa  $\rightarrow$  bb
:

```

:© Modification de la colonne p de bb. la valeur de theta est celle qui annule le coefficient d'indices [q,p] du produit. Pour les autres coefficients, on admet les formules utilisées.

```
:
: 0 → bb[q,p]
: (cos(theta))^2*aa[p,p] - sin(2*theta)*aa[p,q]
:   + (sin(theta))^2*aa[q,q] → bb[p,p]
: For i, 1, n
:   If i ≠ p and i ≠ q Then
:     cos(theta)*aa[i,p] - sin(theta)*aa[i,q] → bb[i,p]
:   Endif
: Endfor
```

:© Pour la ligne p, la matrice est symétrique.

```
: For i, 1, n
:   bb[i,p] → bb[p,i]
: Endfor
```

:© Pour la colonne q de bb, le coefficient bb[p,q] est déjà le bon.

```
: (sin(theta))^2*aa[p,p] + sin(2*theta)*aa[p,q]
:   + (cos(theta))^2*aa[q,q] → bb[q,q]
: For i, 1, n
:   If i ≠ p and i ≠ q Then
:     sin(theta)*aa[i,p] + cos(theta)*aa[i,q] → bb[i,q]
:   Endif
: Endfor
```

:© Pour la ligne q, la matrice est symétrique.

```
: For i, 1, n
:   bb[i,q] → bb[q,i]
: Endfor
```

:© Les calculs sont terminés, on réaffecte bb à aa, et on recommence.

```
:
: bb → aa
```

```
:
:Endwhile
```

:© affichage de la liste des termes diagonaux de aa qui donne la liste des valeurs propres approchées

```
:
:seq(aa[i,i],i,1,n)
```

Exercice résolu

Étude de A^*A

(D'après X.P' 1996, programme PSI)

ÉNONCÉ

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, \dots$) muni de son produit scalaire usuel noté $(\mid)$; par $\text{Ker } A$, $\text{Im } A$, A^* respectivement le noyau, le sous-espace image et l'adjoint d'un endomorphisme A ; par $F^\perp$ le sous-espace orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E .

On note $A \circ B$ la composée de deux applications A et B , et Ax l'image d'un élément x par A .

On dit qu'un endomorphisme A de E est positif si l'on a $(Ax \mid x) \geq 0$ pour tout x de E .

1) Soit A un endomorphisme symétrique de E .

a) Donner un critère portant sur les valeurs propres de A pour que A soit positif.

b) Montrer que, si A et B sont deux endomorphismes symétriques, positifs tels que $B^2 = A$, A et B ont les mêmes sous-espaces propres.

c) En déduire que, si A est un endomorphisme symétrique positif, il existe un unique endomorphisme symétrique positif B tel que $B^2 = A$. On le notera $A^{1/2}$.

2) Donner un exemple simple d'endomorphisme positif, mais non symétrique.

3) Soit A un endomorphisme de E .

a) Vérifier que A^*A est symétrique et positif. Comparer son noyau et celui de A , son image et celle de A^* .

On posera $|A| = (A^*A)^{1/2}$.

b) Déterminer $|kA|$, k étant un réel.

4) Exemple : Déterminer $|A|$ lorsque $n = 3$ et lorsque A est représenté dans la base naturelle de E par une matrice

de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où α et β sont deux réels non nuls.

CONSEILS

Il est essentiel, dans cette question, de savoir que A est un endomorphisme symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée.

Voir aussi à ce sujet l'exercice 18.

On rappelle que :

- $Be_i = \mu_i e_i \Rightarrow B^2 e_i = \mu_i^2 e_i$
- la restriction de $x \mapsto x^2$ à $\mathbb{R}^+$ est injective.

SOLUTION

1) a) Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A et, pour chaque i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, λ_i la valeur propre de A associée à e_i .

Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ de E , $(Ax \mid x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.

Donc A est positif si, et seulement si, $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$.

b) B est symétrique donc diagonalisable. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de B et μ_j la valeur propre associée à e_j . Puisque $B^2 = A$, on a :

$$\text{Ker}(B - \mu_i \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(A - \mu_i^2 \text{Id}_E) \quad (1)$$

On en déduit que l'inclusion (1) est une égalité et que les sous-espaces propres de B sont exactement les mêmes que ceux de A .

c) Soit A un endomorphisme symétrique positif et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A . On appelle λ_j la valeur propre positive associée au vecteur propre e_j et μ_j la racine carrée de λ_j .

Soit B l'endomorphisme de E défini par $B e_j = \mu_j e_j$ pour tout j de $\llbracket 1, n \rrbracket$. B est un endomorphisme symétrique positif et $B^2 = A$.

La question 1) b) permet de prouver l'unicité de B .

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Pour tout $x = (\alpha, \beta)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$(A x | x) = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (\alpha + \beta)^2 + 3\beta^2 \geq 0.$$

Par définition de l'adjoint :

$$\forall (x, y) \in E^2$$

$$(A^* A x | y) = (A x | A y) \\ = (x | A^* A y),$$

$$(A^* A x | x) = (A x | A x).$$

On a toujours :

$$\text{Ker } f \subset \text{Ker } g \text{ et } \text{Im } g \subset \text{Im } f.$$

Dans la rédaction de cette dernière question, nous identifions les matrices et les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés.

3) a) Il est aisé de prouver que $A^* A$ est symétrique et positif grâce aux formules ci-contre.

L'égalité $(A^* A x | x) = (A x | A x)$ et le théorème du rang donnent :

$$A^* A x = 0_E \Rightarrow A x = 0_E; \text{Ker } A^* A = \text{Ker } A; \text{Im } A^* A = \text{Im } A.$$

b) Notons B la matrice $|A| = (A^* A)^{1/2}$. Alors :

$$(|k|B)(|k|B) = k^2 A^* A = (kA)^*(kA) \quad \text{et} \quad |kA| = |k| |A|.$$

$$4) A^* A = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |A| = \begin{pmatrix} |\beta| & 0 & 0 \\ 0 & |\alpha| & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercices

1 Soit u un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Prouver que $\text{Im } u = (\text{Ker } u)^\perp$.

2 $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$.

1) Montrer que l'application :

$$\begin{cases} E \longrightarrow E \\ P(X) \longmapsto (1 - X^2)P''(X) - 2XP'(X) \end{cases}$$

est un endomorphisme symétrique de $(E, (\cdot | \cdot))$.

2) Déterminer le spectre de φ . Que conclure ?

3 Soit $(E, \cdot)$ un espace préhilbertien et u une application de E dans E qui conserve le produit scalaire :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad u(x) \cdot u(y) = x \cdot y.$$

Montrer que u est linéaire.

4 Un endomorphisme f d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est appelé une similitude s'il existe un automorphisme orthogonal u et un réel $k > 0$ tel que : $f = ku$.

Prouver qu'un endomorphisme non nul de E est une similitude si, et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (\langle x | y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x) | f(y) \rangle = 0) \quad (1)$$

5 Soit $S = (s_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice orthogonale d'ordre n . Montrer que :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij}^2 = n \quad \text{et} \quad \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} \right| \leq n.$$

Indication : Pour l'inégalité, déterminer d'abord un vecteur colonne X tel que :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} = {}^t X S X.$$

6 Caractériser géométriquement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à :

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

7 Caractériser géométriquement les endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associés aux matrices :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8 Soit $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Caractériser géométriquement les applications suivantes :

1) $u : X \longmapsto X' = AX + B$.

2) $v : X \longmapsto X' = AX + C$.

9 Soit $(E, \cdot)$ un espace euclidien, u et v deux endomorphismes symétriques de E tels que :

$$u \circ v = v \circ u.$$

Montrer l'existence d'une base orthonormée de E dont les vecteurs soient simultanément vecteurs propres de u et de v .

Indication : Les sous-espaces propres de v sont stables par u .

10 Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres complexes non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 0.$$

Prouver que la matrice $A = (\alpha_i \alpha_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est symétrique mais n'est pas diagonalisable.

11 Diagonaliser la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 2 \\ -8 & -4 & 10 \\ 2 & 10 & -7 \end{pmatrix}.$$

12 Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et Q une forme quadratique sur E .

On désigne par f la forme polaire de Q et par u l'endomorphisme auto-adjoint de E associé à f .

1) Montrer l'existence d'une base orthonormée,

$$B = (e_1, \dots, e_n),$$

de E et d'une famille de réels $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ telle que :

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E \quad Q(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2.$$

2) En déduire que Q est une forme quadratique positive si, et seulement si, $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$.

13 Déterminer la nature des courbes dont les équations suivent, les dessiner.

1) $x^2 + 8xy - 5y^2 + 14\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y + \frac{264}{7} = 0$;

2) $x^2 - 2xy + y^2 - 7\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2 = 0$;

3) $2,9x^2 - 0,6xy + 2,1y^2 + 3\sqrt{10}x + 3\sqrt{10}y + 15 = 0$;

4) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 500x + 500y - 600 = 0$;

5) $x^2 - 2xy \cos \alpha + y^2 + 8\sqrt{2}x = 0$.

14 Discuter, suivant λ , la nature de la conique d'équation :

$$x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2\sqrt{2}y + 2 = 0.$$

15 Déterminer la nature de la quadrique d'équation :

$$2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 2x + 2y - 4z + 2 = 0.$$

16 Déterminer la nature de la quadrique d'équation :

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz + 2zx + 4x - 2y - 3z - 1 = 0.$$

17 L'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ est muni du produit scalaire, noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$:

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

La norme associée est notée $\| \cdot \|$.

L'endomorphisme v de E est défini par :

$$v(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1) Déterminer un endomorphisme v^* de E tel que :

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad \langle v(f) | g \rangle = \langle f | v^*(g) \rangle \quad (1)$$

Étudier l'unicité de v^* .

2) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de $v^* \circ v$.

18 Soit a, b et c trois réels et M la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

Prouver que M est une matrice de rotation si, et seulement si, a, b et c sont les trois racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + k$ avec $k \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$.

19 Soit $(E, \cdot)$ un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E . La norme associée à $\cdot$ est notée $\| \cdot \|$.

Prouver :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| = \max\{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp}u\}.$$

N.B. : Les élèves des sections *PSI* reconnaîtront le calcul de $\|u\|$.

20 Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

1) Prouver que la suite de matrices (M^n) converge.

2) Soit $N = \lim M^n$.

Caractériser géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à N .

3) Soit (X_n) la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_{n+1} = MX_n.$$

Prouver que la suite (X_n) converge et déterminer sa limite en fonction de u_0, v_0 et w_0 .

21 $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.

1) Soit u un endomorphisme de E . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\forall x \in E \quad \langle x | u(x) \rangle = 0$
- $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle y | u(x) \rangle = -\langle x | u(y) \rangle$
- La matrice de u , relativement à une base orthonormée de E , est antisymétrique.

2) Montrer que le spectre d'un endomorphisme antisymétrique est soit $\emptyset$, soit $\{0\}$.

En déduire qu'un endomorphisme antisymétrique non nul de E n'est jamais diagonalisable.

3) Soit u un endomorphisme antisymétrique. Montrer que :

a) $\text{Im } u = (\text{Ker } u)^\perp$;

b) le rang de u est pair (étudier la restriction de u à $\text{Im } u$) ;

c) u^2 est diagonalisable.

Que dire des valeurs propres de u^2 ?

d) Lorsque dimension $E = 3$, prouver l'existence d'un unique vecteur b tel que :

$$\forall \vec{x} \in E \quad u(\vec{x}) = \vec{b} \wedge \vec{x}.$$

22 Déterminer le lieu des projections orthogonales du foyer sur les tangentes à :

1) la parabole ; 2) l'ellipse ; 3) l'hyperbole.

23 Montrer que tout cercle centré sur une directrice D d'une hyperbole d'excentricité 2 et passant par le foyer associé à cette directrice, recoupe l'hyperbole en quatre points, un sur (Ox) , les trois autres formant un triangle équilatéral.

24 Soit $[MN]$ une corde d'une parabole (P) passant par son foyer F . Montrer que le cercle de diamètre $[MN]$ est tangent à la directrice.

25 Un point M se promène sur une ellipse. La normale en M recoupe l'ellipse en P . Déterminer la longueur minimale de MP .

Indication : Paramétrer l'ellipse, puis écrire que $\overrightarrow{MP} = s\vec{u}$, où $\vec{u}$ désigne un vecteur normal à l'ellipse en M ...

26 L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit a, b et c trois réels non nuls et D_1, D_2 les droites affines définies par :

$$D_1 = O + \mathbb{R}\vec{k}; \quad D_2 = O + b\vec{j} + \mathbb{R}(a\vec{i} + c\vec{k}).$$

1) Déterminer le lieu des points de l'espace équidistants des deux droites et reconnaître cette quadrique.

2) Déterminer une équation, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, de la surface obtenue par rotation de la droite D_2 autour de la droite D_1 et reconnaître cette quadrique.

Équations différentielles linéaires



Introduction

La première partie de ce chapitre approfondit l'étude, largement entamée en Première année, des équations différentielles linéaires scalaires. Une des caractéristiques du programme de Deuxième année est le passage des fonctions à valeurs scalaires aux fonctions à valeurs vectorielles. En cinématique, l'étude du mouvement d'un point mobile, du plan ou de l'espace, en fonction du temps conduit à observer les relations qui peuvent exister entre le vecteur vitesse et la position du point mobile à un instant donné. Cela amène tout naturellement aux systèmes différentiels dont Jean Leray disait, en 1963, « Le problème de Cauchy (existence de solutions) pour les systèmes différentiels ordinaires a été, bien entendu, le plus important problème mathématique tant que l'artillerie a régi le monde, tant que la mécanique céleste a été la théorie scientifique principale et triomphante. »

O B J E C T I F S

- Résolution des équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre.
- Structure de l'ensemble de leurs solutions.
- Étude de problèmes de recollement.
- Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre.
- Structure de l'ensemble de leurs solutions.
- Wronskien.
- Méthodes pratiques pour l'étude des équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre.
- Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants.
- Résolution de tels systèmes lorsque la matrice est diagonalisable.

Programme PSI

- Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les systèmes différentiels linéaires.
- Système fondamental de solutions et wronskien.
- Méthode de variation des constantes.
- Application à la résolution des systèmes homogènes à coefficients constants et à celle des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2.

L'invention du calcul différentiel par Leibniz et Newton, à la fin du XVII^e siècle, a permis la modélisation mathématique de nombreux phénomènes naturels.

Beaucoup de problèmes de mécanique, d'astronomie et de physique s'expriment par des équations différentielles.

La résolution de ces équations revêt deux aspects complémentaires : existence et détermination des solutions.

Vers 1840, Liouville a prouvé que des équations différentielles simples ($y' = x + y^2$) ne sont pas intégrables par quadrature, c'est-à-dire en utilisant uniquement les fonctions usuelles, les opérations algébriques et la primitivation.

La détermination pratique de solutions exactes, lorsqu'elle est possible, requiert souvent l'utilisation de nombreux outils de l'Analyse et de l'Algèbre développés dans ce cours : séries de fonctions, séries entières, séries de Fourier, fonctions définies par une intégrale, diagonalisation des matrices... Une grande ingéniosité est alors nécessaire.

Généralités

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les intervalles considérés sont non vides et non réduits à un singleton.

1.1. Équation avec second membre, sans second membre

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, n un entier strictement positif, $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta$, $n+2$ applications continues de I dans $\mathbb{K}$.

L'application Φ , définie ci-dessous, est linéaire.

$$\Phi : \begin{cases} C^n(I, \mathbb{K}) \longrightarrow C^0(I, \mathbb{K}) \\ y \longmapsto \alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y \end{cases}$$

On considère les *équations différentielles linéaires* suivantes :

$$\alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = \beta \quad (E)$$

$$\alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0 \quad (H)$$

(E) est une **équation différentielle linéaire avec second membre**

(H) est une **équation différentielle linéaire sans second membre**, ou **homogène**. On dit que (H) est l'équation homogène associée à (E).

Une **I-solution** de (E) est une application y de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ telle que :

$$\forall x \in I \quad \alpha_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + \alpha_1(x)y'(x) + \alpha_0(x)y(x) = \beta(x)$$

L'équation (E) peut s'écrire $\Phi(y) = \beta$. C'est une équation linéaire puisque Φ est une application linéaire (cf. chapitre 1). Les fonctions utilisées dans ces équations sont à valeurs scalaires, ces équations sont qualifiées d'**équations différentielles scalaires**.

L'**ordre d'une équation différentielle** est le plus grand ordre de dérivation apparaissant dans l'équation. Dans la situation présente, si α_n n'est pas la fonction nulle, il s'agit d'une équation différentielle d'ordre n .

On peut aussi parler de **solution sur I** de l'équation différentielle (E).

Théorème 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, n un entier strictement positif, $\alpha_0, \dots, \alpha_n$, β , $n+2$ applications continues de I dans $\mathbb{K}$.

- L'ensemble S_H des I -solutions de l'équation homogène :

$$\alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0 \quad (H)$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

- Si l'équation différentielle linéaire avec second membre :

$$\alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = \beta \quad (E)$$

admet une I -solution, y_1 , alors toute I -solution de (E) est somme de la solution particulière y_1 et d'une solution de (H) .

- Dans ce cas, l'ensemble S_E des I -solutions de (E) est le sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de direction S_H :

$$S_E = y_1 + S_H.$$

Il est important de constater que, dans tous les cas, l'équation homogène (H) admet au moins une solution (la fonction nulle), alors que l'équation avec second membre (E) peut ne pas en avoir.

Exemple

Le cours de Première année vous permet de prouver que, sur un intervalle ne contenant pas 0, les solutions de :

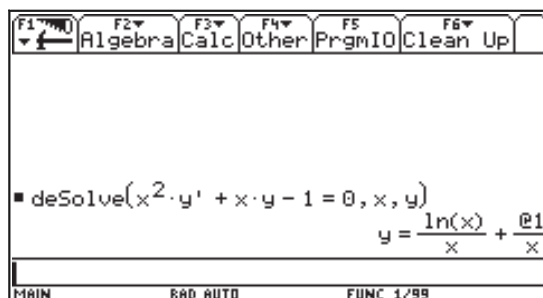
$$x^2 y' + xy - 1 = 0 \quad (E)$$

sont de la forme :

$$y(x) = \frac{\ln|x|}{x} + \frac{k}{x}$$

où k est une constante.

Il est aisé d'en déduire que (E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.



Doc. 1. Attention, la TI ne prend pas en compte le fait qu'une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln|x|$.

1.2. Équation sous forme résolue

Dans l'équation (E) , si la fonction α_n ne s'annule pas sur I , il est possible de diviser par α_n et (E) est équivalente à une équation différentielle de la forme :

$$y^{(n)} = a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y + b \quad (R)$$

où $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, b$ sont $n+1$ fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

On dit que l'équation différentielle (R) est sous **forme résolue** en $y^{(n)}$.

2 Les équations scalaires d'ordre 1

2.1. Résolution des équations linéaires scalaires d'ordre 1

Le contenu de ce paragraphe a été étudié en Première année. Sa connaissance approfondie, tant du point de vue théorique que pratique, est indispensable pour la réussite au concours.

Rapport Air, 1998

« Quelques lacunes fréquentes chez les candidats cette année : une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre est rarement reconnue comme telle et la structure de l'ensemble des solutions est parfois mal connue... »

2.1.1 Présentation

Une **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1** est une équation différentielle de la forme :

$$\alpha(t)x' + \beta(t)x = \gamma(t) \quad (E)$$

où α, β et γ sont trois fonctions continues sur un intervalle I , à valeurs réelles ou complexes, telles que α ne soit pas la fonction nulle.

L'**équation différentielle linéaire homogène** associée à (E) est :

$$\alpha(t)x' + \beta(t)x = 0 \quad (H)$$

Le problème de la recherche d'une solution de (E) vérifiant une condition initiale donnée est appelé **problème de Cauchy** associé à l'équation et noté :

$$\begin{cases} \alpha(t)x' + \beta(t)x = \gamma(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où t_0 est dans I et x_0 dans $\mathbb{K}$.

2.1.2 Résolution pratique

Théorème 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

On note (R) l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$x' = a(t)x + b(t) \quad (R)$$

et (H) l'équation homogène associée :

$$x' = a(t)x \quad (H)$$

- Soit A une primitive sur I de la fonction continue a . Toute I -solution de (H) est de la forme : $t \mapsto Ce^{A(t)}$, où C est une constante ($C \in \mathbb{K}$).
- L'ensemble S_H des I -solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. Il est engendré par la fonction $t \mapsto e^{A(t)}$.
- L'équation différentielle linéaire (R) , qui est sous forme résolue, a toujours des I -solutions. Si x_1 est une telle solution, l'ensemble S_R des I -solutions de (R) est :

$$S_R = x_1 + S_H.$$

Démonstration

Ce théorème a été vu en Première année. Rappelons cependant la **méthode de variation de la constante**.

Soit t_0 un point de I et $A(t) = \int_{t_0}^t a(u) du$, une primitive de a .

Puisque a est continue sur I , la fonction A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

On cherche une solution f de l'équation (R) sous la forme :

$$f(t) = C(t)e^{A(t)}.$$

Rapport CCP, 1997

« Il y a des candidats incapables d'intégrer les équations différentielles élémentaires. »

 Le théorème 1 ne montre pas l'existence d'une solution de (E) définie sur I et ne dit pas comment résoudre l'équation (H) et l'équation (E) . C'est le but du paragraphe suivant.

Le théorème 2 permet de résoudre complètement une équation différentielle linéaire du premier ordre uniquement lorsque celle-ci est sous **forme résolue**.

Lorsque une telle équation n'est pas résolue en y' , on sait que l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est un espace vectoriel (cf. théorème 1), mais on ne peut rien dire, *a priori*, de sa dimension.

f est une I -solution de (R) si, et seulement si :

$$\forall t \in I \quad C'(t) e^{A(t)} = b(t).$$

Trouver C revient donc à chercher une primitive de :

$$t \mapsto e^{-A(t)} b(t).$$

D'après le *théorème 1*, toute I -solution de (R) est de la forme :

$$x(t) = e^{A(t)} \left(\int_{t_0}^t e^{-A(u)} b(u) du + k \right),$$

avec $k \in \mathbb{K}$.

2.1.3 Exemple de recherche directe de solution particulière

D'un point de vue pratique, la *méthode de variation de la constante* ramène la résolution de (R) au calcul de deux primitives :

$$A \quad \text{et} \quad \int e^{-A(u)} b(u) du.$$

Le calcul de A est inévitable, mais, si on « devine » une solution particulière x_1 de (R) , on peut conclure, en évitant le deuxième calcul, que toute solution de (R) est de la forme :

$$x(t) = x_1(t) + C e^{A(t)}.$$

Exemple

L'équation différentielle linéaire

$$x' = x + 1 \quad (E)$$

admet la fonction constante $x = -1$ comme solution particulière sur $\mathbb{R}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée sont de la forme :

$$x(t) = C e^t,$$

où C est une constante.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions de la forme :

$$x(t) = C e^t - 1. \quad \blacktriangleright \text{Pour s'entraîner : ex. 1.}$$

Application 1

L'équation différentielle $x' = -2x + e^{-2t}(3t + 1)$

Résoudre cette équation différentielle.

C'est une équation différentielle linéaire, sous forme résolue, à coefficients constants, du premier ordre. L'ensemble de ses $\mathbb{R}$ -solutions est un espace affine de dimension 1.

Cherchons une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $P(t)e^{-2t}$.

Elle doit vérifier :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad -2P(t) + P'(t) = -2P(t) + (3t + 1)$$

et $P(t) = \frac{3}{2}t^2 + t$ convient.

Les $\mathbb{R}$ -solutions sont les fonctions :

$$t \mapsto c e^{-2t} + \left(\frac{3}{2}t^2 + t \right) e^{-2t} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}.$$

2.2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires d'ordre 1

Théorème 3 : Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ et (t_0, x_0) dans $I \times \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Interprétation géométrique

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on appelle **courbe intégrale** de l'équation différentielle

$$\alpha(t)x' + \beta(t)x = \gamma(t) \quad (E)$$

le graphe d'une solution de (E).

Le *théorème de Cauchy-Lipschitz* signifie que, par un point (t_0, x_0) de $I \times \mathbb{R}$ passe une unique courbe intégrale de l'équation résolue en x' :

$$x' = a(t)x + b(t) \quad (R)$$

Les courbes intégrales de l'équation résolue en x' , (R), ne se coupent jamais dans $I \times \mathbb{R}$.

Par l'étude de quelques exemples, le paragraphe suivant montre la démarche à suivre lorsque l'équation étudiée n'est pas sous forme résolue.

2.3. Exemples de problèmes de recollements

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, α , β , γ trois fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$, J un intervalle inclus dans I et l'équation différentielle :

$$\alpha(t)x' + \beta(t)x = \gamma(t) \quad (E)$$

Une **J-solution** f de l'équation différentielle (E) est dite **maximale** s'il n'existe pas d'intervalle K contenant strictement J et de K -solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g|_J = f$.

Exemples

■ Recherche des solutions maximales de :

$$tx' - 2x = t \quad (E_1)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre qui s'écrit sous forme résolue sur un intervalle I ne contenant pas 0 :

$$x' = \frac{2}{t}x + 1 \quad (R_1)$$

Dans la suite de cet exemple, I est un intervalle ne contenant pas 0.

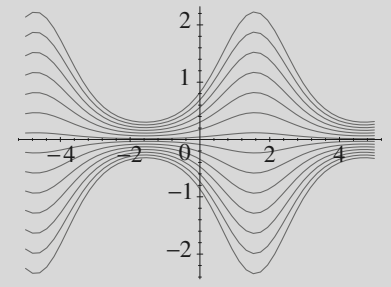
• Résolution de l'équation homogène associée

$$x' = \frac{2}{t}x \quad (H_1)$$

Avec Maple :

```
> with(plots):
L:=[]:dsolve(\{D(y)(x)
= y(x)*cos(x)\}, y(x));
for k from -2 to 2 by .3 do
p:= dsolve(\{D(y)(x) = y(x)
*cos(x), y(1)=k\}, y(x),
type=numeric):
L:=L,odeplot(p,[x,y(x)],
-5..5):od:
display(L);
```

$$y(x) = e^{\sin(x)} \_C1$$



Doc. 2. Une famille de courbes intégrales de $y' = \cos(x)y$.

$t \mapsto A(t) = \ln(t^2)$ est une primitive de $t \mapsto a(t) = \frac{2}{t}$.

Donc, f est solution de (H_1) sur I si, et seulement si :

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I \quad f(t) = Ce^{\ln(t^2)} = Ct^2.$$

• *Résolution de l'équation avec second membre*

Il est tentant de chercher une solution particulière de la forme $x(t) = \lambda t$.

Après calcul, $\lambda = -1$ convient et les solutions de (E_1) , sur un intervalle I ne contenant pas 0, sont de la forme :

$$t \mapsto x(t) = -t + Ct^2, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

• *Recherche des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1)*

Une telle solution, si elle existe, est nécessairement de la forme :

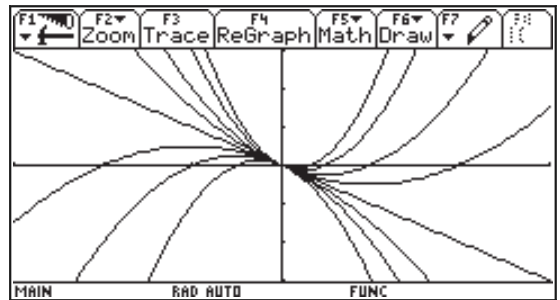
$$x(t) = \begin{cases} -t + C_1 t^2 & \text{si } t > 0 \\ -t + C_2 t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Elle doit être continue en 0, donc $x(0) = 0$.

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$. de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} x'(t) = -1.$$

Quelque soit le choix de C_1 et C_2 , x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. C'est une $\mathbb{R}$ -solution de (E_1) . Ces fonctions sont les solutions maximales de (E_1) .



Doc. 3. Quelques courbes intégrales de l'équation différentielle $tx' - 2x = t$.

Bien qu'il s'agisse d'une équation d'ordre 1, l'ensemble des $\mathbb{R}$ -solutions de (E_1) est un sous-espace affine de dimension 2 de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

■ *Résolution de :*

$$(1 - x^2)y' - xy = 1 \quad (E_2)$$

Il s'agit aussi d'une équation différentielle linéaire du premier ordre qui s'écrit sous forme résolue sur tout intervalle I ne contenant ni 1 ni -1 :

$$y' = \frac{x}{(1 - x^2)}y + \frac{1}{(1 - x^2)} \quad (R_2)$$

Dans la suite de cet exemple, I est un intervalle ne contenant ni 1 ni -1 .

• *Résolution de l'équation homogène associée*

$$y' = \frac{x}{(1 - x^2)}y \quad (H_2)$$

$x \mapsto -\frac{1}{2} \ln(|1 - x^2|)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{x}{(1 - x^2)}$.

Donc, g est solution de (H_2) sur I si, et seulement si :

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad g(x) = \frac{C}{\sqrt{|1 - x^2|}}.$$

• *Résolution de l'équation avec second membre*

On cherche une solution particulière de (R_2)

sous la forme :

$$y(x) = \frac{C(x)}{\sqrt{|1 - x^2|}}.$$

La fonction y est solution de (R_2) sur I si, et seulement si, pour tout x de I :

$$\frac{C'(x)}{\sqrt{|1-x^2|}} = \frac{1}{(1-x^2)}.$$

Soit :

$$C'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(1-x^2)}{\sqrt{|1-x^2|}}.$$

Le calcul de primitives permet de déterminer C .

• **Résolution sur $] -1, 1[$**

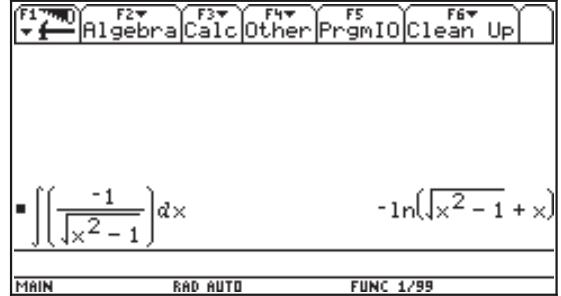
Les solutions de (R_2) sur $] -1, 1[$ sont les fonctions y de la forme :

$$y(x) = \frac{\operatorname{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{k_1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{où } k_1 \in \mathbb{R}.$$

• **Résolution sur $]1, +\infty[$**

Les solutions de (R_2) sur $]1, +\infty[$ sont de la forme :

$$y(x) = \frac{-\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{k_2}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{où } k_2 \in \mathbb{R} \text{ (doc. 4).}$$



Doc. 4.

• **Résolution sur $] -\infty, -1[$**

Les solutions de (R_2) sur $] -\infty, -1[$ sont les fonctions y de la forme :

$$y(x) = \frac{-\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{k_3}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{où } k_3 \in \mathbb{R}.$$

• **Recollement de solutions en $x = 1$; solutions sur $] -1, +\infty[$**

Une éventuelle solution de (E_2) sur $] -1, +\infty[$ est nécessairement telle que :

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{k_1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in] -1, 1[\\ \frac{-\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{k_2}{\sqrt{x^2 - 1}} & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

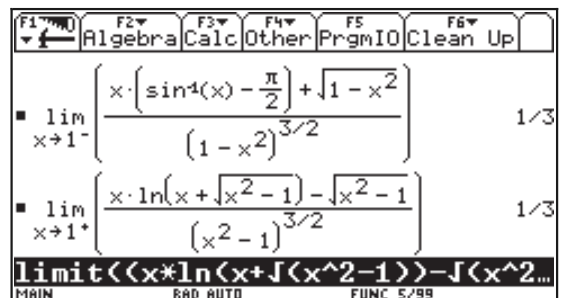
Le calcul de développements limités permet de prouver que le choix de $k_1 = -\frac{\pi}{2}$, $k_2 = 0$ et $y(1) = -1$ donne une fonction continue sur $] -1, +\infty[$.

De plus, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[\setminus\{1\}$ et :

$$y'(x) = \frac{x}{(1-x^2)}y(x) + \frac{1}{(1-x^2)}$$

$$= \begin{cases} \frac{x \left(\operatorname{Arcsin}(x) - \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{3/2}} & \text{si } x \in] -1, 1[\\ \frac{x \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \sqrt{x^2 - 1}}{(x^2 - 1)^{3/2}} & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

Ceci permet de conclure que la fonction y ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[$ et que $y'(1) = \frac{1}{3}$. C'est la seule solution de (E_2) sur cet intervalle (doc. 5).



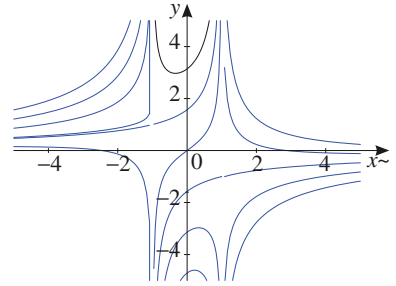
Doc. 5. Deux développements limités vous conduiront aux mêmes résultats.

On démontre de manière similaire que (E_2) admet une unique solution sur $] - \infty, 1[$.

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Arcsin}(x) + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]-1, 1[\\ -1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{-\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|}{\sqrt{x^2 - 1}} & \text{si } x \in]-\infty, 1[\end{cases}$$

L'équation (E_2) a donc une solution maximale définie sur $] - \infty, 1[$, une autre sur $] - 1, +\infty[$. Toutes les autres solutions maximales sont définies sur $] - \infty, -1[$ ou $] - 1, 1[$ ou $] 1, +\infty[$. Il n'y a pas de $\mathbb{R}$ -solution.

► Pour s'entraîner : ex. 2 et 3.



Doc. 6. Quelques courbes intégrales de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y' - xy = 1.$$

3 Les équations scalaires d'ordre 2

3.1. Présentation

Une **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2** est une équation différentielle de la forme :

$$\alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t) \quad (E)$$

où α , β , γ et δ sont quatre fonctions continues sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$ et α n'est pas la fonction nulle.

L'**équation différentielle linéaire homogène** associée à (E) est l'équation différentielle (H) :

$$\alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = 0 \quad (H)$$

Un **problème de Cauchy**, associé à (E) , est la recherche d'une solution de cette équation vérifiant une condition initiale du type :

$$\begin{cases} \alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

où t_0 est dans I et x_0, x_1 sont dans $\mathbb{K}$.

L'interprétation cinématique classique est la suivante.

La variable t représente le temps et la fonction x l'abscisse d'un point mobile animé d'un mouvement rectiligne. La condition initiale :

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

indique la position x_0 du point mobile à l'instant initial t_0 ainsi que sa vitesse x_1 à ce même instant.

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Le problème proposé avait pour objet l'étude de quelques propriétés de certaines équations différentielles du type :

$$(E) \quad y''(t) + \varphi(t)y(t) = 0$$

[...] De nombreuses questions étaient accessibles à un candidat connaissant bien son cours, [...]. Cependant de nombreux candidats ne maîtrisent pas le cours et sont incapables d'énoncer de façon précise les théorèmes utilisés ou bien ne se donnent pas la peine de vérifier que les hypothèses de ces théorèmes sont bien satisfaites. »

Pour une équation différentielle d'ordre 2, la dénomination **problème de Cauchy** s'applique uniquement lorsque, le paramètre t désignant le temps, la condition initiale indique la position et la vitesse à un même instant t_0 .

Un problème du type :

$$\begin{cases} \alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

n'est pas un problème de Cauchy. On l'appelle parfois problème de l'artilleur. Pourquoi ?

3.2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires scalaires d'ordre 2

Dans toute la suite du paragraphe 3, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b, c trois fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre, résolue en x'' :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \quad (E)$$

et l'équation homogène associée :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x \quad (H)$$

Théorème 4

Soit $(t_0, x_0, x_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy associé à (E) :

$$\begin{cases} x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

admet une unique solution définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur I .

La démonstration de ce *théorème* est hors programme.

► Pour s'entraîner : ex. 4.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le *théorème de Cauchy-Lipschitz* s'interprète géométriquement de la façon suivante.

Par un point (t_0, x_0) du plan (O, t, x) , avec t_0 dans I , passe une infinité de courbes intégrales de (E) , mais une seule admet en ce point une pente donnée x_1 (doc. 7).

Un problème du type « problème de l'artilleur », évoqué plus haut, n'est pas un problème de Cauchy. Les deux exemples suivants montrent que, pour de tels problèmes, ni l'existence de solutions, ni l'unicité d'une éventuelle solution ne sont assurées.

Le problème suivant a une infinité de solutions :

$$\begin{cases} x'' = -x \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{cases}$$

Ce sont les fonctions $t \rightarrow C \sin(t)$.

Le problème suivant n'en a aucune :

$$\begin{cases} x'' = -x \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 1 \end{cases}$$

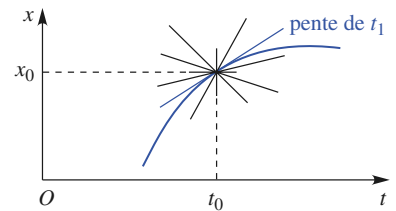
Il est fondamental de noter que le *théorème de Cauchy-Lipschitz* s'applique à une équation différentielle mise sous forme résolue. Pour étudier un problème de Cauchy associé à une équation du type :

$$\alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t)$$

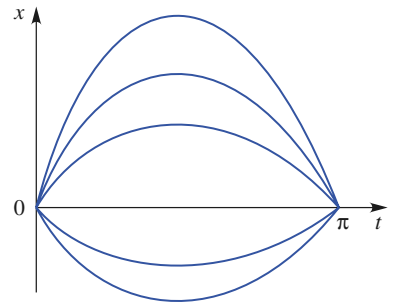
il faut restreindre l'étude à des intervalles où α ne s'annule pas et, s'il y a lieu, étudier les éventuels problèmes de recollement.

Rapport CCP, 1997

« Dans une part non négligeable des copies [...] le *théorème de Cauchy-Lipschitz* est faux. »



Doc. 7.



Doc. 8. Graphes de fonctions :

$x(t) = C \sin(t)$
sur $[0, \pi]$.

3.3. Structure de l'ensemble des solutions

Corollaire 4.1 : Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre sous forme résolue

Soit I un intervalle et a , b , c trois fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

- L'ensemble S_H des I -solutions de l'équation homogène :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x \quad (H)$$

est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$.

- L'ensemble S_E des I -solutions de l'équation avec second membre :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \quad (E)$$

est non vide. C'est un sous-espace affine de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$, de direction S_H .

Démonstration

Le *théorème de Cauchy-Lipschitz* permet de démontrer ce théorème de structure.

- Le *théorème 1* prouve que S_H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$.

Soit t_0 un point fixé de I et Ψ l'application définie par :

$$\Psi : \begin{cases} S_H \longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ x \longmapsto (x(t_0), x'(t_0)) \end{cases}$$

L'application Ψ est évidemment linéaire.

Le *théorème 4* appliqué à (H) permet de montrer que Ψ est bijective.

Ainsi Ψ est un isomorphisme de S_H dans $\mathbb{K}^2$ et $\dim S_H = 2$.

- Le *théorème 4* appliqué à (E) prouve que S_E n'est pas vide. Le *théorème 1* permet de terminer la démonstration.

3.4. Le wronskien

On appelle :

- **système fondamental de solutions** de l'équation homogène :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x \quad (H)$$

toute base de S_H , c'est-à-dire tout couple (f_1, f_2) de I -solutions de (H) , linéairement indépendantes ;

- **wronskien** de deux I -solutions (g_1, g_2) de (H) , la fonction W :

$$\forall t \in I \quad W(t) = \begin{vmatrix} g_1(t) & g_2(t) \\ g_1'(t) & g_2'(t) \end{vmatrix} = g_1(t)g_2'(t) - g_1'(t)g_2(t).$$

Théorème 5

Soit un couple (g_1, g_2) de I -solutions de (H) et W leur wronskien. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) $\exists t_0 \in I \quad W(t_0) \neq 0$;

Hæné Wronski (1776-1853), mathématicien polonais.

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Au chapitre équations différentielles, les techniques de résolution sont connues, l'aspect théorique (théorème de Cauchy-Lipschitz et surtout la notion de wronskien) beaucoup moins. »

- 2) $\forall t \in I \quad W(t) \neq 0$;
 3) (g_1, g_2) est un système fondamental de solutions de (H) .

Démonstration

Voici le point clé de la démonstration

Vous rédigerez l'équivalence des trois points à l'aide de ceci.

L'application $(\Psi : g \mapsto (g(t), g'(t)))$ est un isomorphisme de S_H dans $\mathbb{K}^2$.

Ainsi, (g_1, g_2) est une base de S_H si, et seulement si, $((g_1(t), g_1'(t)), (g_2(t), g_2'(t)))$ est une base de $\mathbb{K}^2$.

4

Boîte à outils

Les *théorèmes* 3, 4 et 5 permettent de comprendre la théorie des équations différentielles linéaires du deuxième ordre mais ne donnent pas de méthode de résolution.

Le but de ce paragraphe est de présenter quelques-unes de ces méthodes. Certaines s'appliquent aussi aux équations d'ordre 1.

4.1. Les équations homogènes à coefficients constants (rappel)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et (H) l'équation homogène à coefficients constants :

$$y'' = \alpha y' + \beta y.$$

L'équation caractéristique (C) associée est :

$$r^2 = \alpha r + \beta.$$

4.1.1 Le cas complexe

Lorsque (C) admet deux racines distinctes λ et μ , toute solution complexe de (H) est de la forme :

$$y(t) = k_1 e^{\lambda t} + k_2 e^{\mu t}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes complexes.

Lorsque (C) admet une racine double $\lambda = \frac{\alpha}{2}$, toute solution complexe de (H) est de la forme :

$$y(t) = (k_1 + k_2 t) e^{\lambda t}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes complexes.

4.1.2 Le cas réel

Les coefficients (α, β) sont supposés réels.

Lorsque (C) admet deux racines réelles distinctes λ et μ , toute solution réelle de (H) est de la forme :

$$y(t) = k_1 e^{\lambda t} + k_2 e^{\mu t}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes réelles.

Le raisonnement suivant donne une autre démonstration du fait que le wronskien est identiquement nul ou ne s'annule jamais. D'après la définition, le wronskien W de deux solutions (g_1, g_2) de (H) est défini sur I par :

$$W(t) = g_1(t)g_2'(t) - g_1'(t)g_2(t).$$

Les fonctions g_1 et g_2 étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur I , W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

En dérivant, on obtient, après simplifications :

$$W'(t) = a(t)W(t).$$

Soit A une primitive de a . La fonction W est de la forme :

$$W(t) = K e^{-A(t)}$$

où K est une constante.

D'où la conclusion cherchée.



L'utilisation de l'équation caractéristique :

$$r^2 = \alpha r + \beta$$

n'est valable que lorsque α et β sont des constantes.

Les fonctions $t \mapsto e^{\lambda t}$ et $t \mapsto e^{\mu t}$ forment un système fondamental de solutions de (H) .

Les fonctions $t \mapsto e^{\lambda t}$ et $t \mapsto t e^{\lambda t}$ forment un système fondamental de solutions de (H) .

Lorsque (C) admet une racine double $\lambda = \frac{\alpha}{2}$, toute solution réelle de (H) est de la forme :

$$y(t) = (k_1 + k_2 t)e^{\lambda t}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes réelles.

Lorsque (C) admet deux racines complexes conjuguées distinctes $\lambda = r + is$ et $\bar{\lambda} = r - is$, toute solution réelle de (H) est de la forme :

$$y(t) = (k_1 \cos(st) + k_2 \sin(st))e^{rt}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes réelles.

Exemple

Résoudre l'équation fonctionnelle :

$$f'(x) = f(2000 - x) \quad (1)$$

dans l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Si la fonction f est solution, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$f''(x) = -f'(2000 - x) = -f(x).$$

Donc f est de la forme $f(x) = a \cos x + b \sin x$, avec a et b réels.

Mais, f vérifie (1), d'où une relation entre a et b . Finalement :

$$f(x) = c \cos(2000 - x) + c \sin x$$

où c est une constante réelle.

4.2. Les équations à coefficients constants avec second membre de la forme $P(t)e^{\delta t}$ (rappel)

La méthode exposée s'applique aussi aux équations d'ordre 1.

Soit P un polynôme et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre scalaires. On cherche une solution particulière de :

$$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = P(t)e^{\delta t} \quad (E)$$

sous la forme $y(t) = e^{\delta t} Q(t)$ où Q est un polynôme à déterminer. On a :

$$\begin{cases} y(t) = e^{\delta t} Q(t) \\ y'(t) = \delta e^{\delta t} Q(t) + e^{\delta t} Q'(t) \\ y''(t) = \delta^2 e^{\delta t} Q(t) + 2\delta e^{\delta t} Q'(t) + e^{\delta t} Q''(t) \end{cases}.$$

On en déduit que y est solution de (E) si, et seulement si :

$$P(t) = (\alpha \delta^2 + \beta \delta + \gamma) Q(t) + (2\alpha \delta + \beta) Q'(t) + \alpha Q''(t).$$

P, α, β, γ et δ sont connus. On trouve Q par identification.

On en déduit une solution particulière de (E) :

$$t \mapsto e^{\delta t} Q(t).$$

Les fonctions $t \mapsto e^{rt} \cos(st)$ et $t \mapsto e^{rt} \sin(st)$: forment un système fondamental de solutions de (H).

Exemples

■ Résoudre :

$$y'' + y' - 2y = xe^{2x} \quad (1)$$

On applique ce qui précède pour chercher une solution particulière sous la forme $Q(x)e^{2x}$, où Q est un polynôme. On obtient :

$$Q''(x) + 5Q'(x) + 4Q(x) = x.$$

Q est de degré 1 et :

$$Q(x) = \frac{1}{4}x - \frac{5}{16}.$$

Finalement, les solutions de (1) sont de la forme :

$$y(x) = ae^x + be^{-2x} + \left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{16}\right)e^{2x},$$

avec a et b réels quelconques.

■ Résoudre :

$$y'' + y' - 2y = xe^{-2x} \quad (2)$$

On applique ce qui précède pour chercher une solution particulière sous la forme $Q(x)e^{-2x}$, où Q est un polynôme. On obtient :

$$Q''(x) - 3Q'(x) = x.$$

$$Q(x) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x \text{ convient.}$$

Les solutions de (2) sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = ae^x + be^{-2x} + \left(-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x\right)e^{-2x},$$

avec a et b réels quelconques.

4.3. Le principe de superposition

La méthode exposée s'applique aussi aux équations d'ordre 1.

Théorème 6

Soit α, β, γ et δ quatre fonctions continues sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que δ se décompose en une somme de fonctions continues :

$$\delta = \sum_{i=1}^n v_i.$$

On considère les équations différentielles suivantes :

$$\alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t) \quad (E)$$

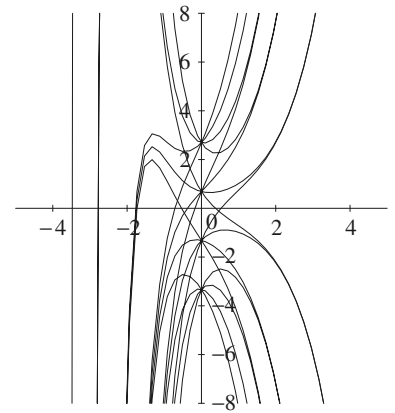
$$\alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = v_i(t) \quad (E_i)$$

Avec Maple :

```
> restart :with(plots):
eq:=diff(y(x),x$2)
+diff(y(x),x)-2*y(x)
=x*exp(2*x);
dsolve(eq, y(x));
```

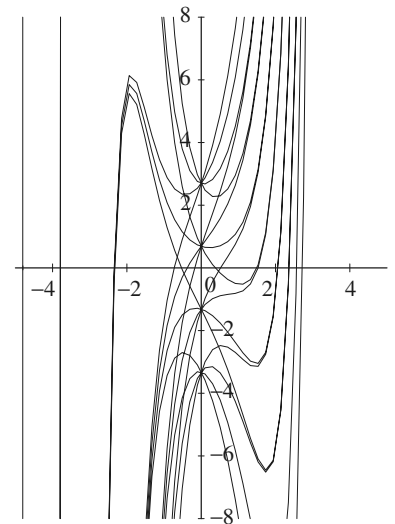
$$\begin{aligned} eq &:= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) - 2y(x) \\ &= x e^{(2x)} \\ y(x) &= \left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{16}\right) e^{(2x)} + \_C1 e^x \\ &\quad + \_C2 e^{(-2x)} \end{aligned}$$

Doc. 9.



Doc. 10. Quelques courbes intégrales de l'équation différentielle :

$$y'' + y' - 2y = xe^{-2x}.$$



Doc. 11. Quelques courbes intégrales de l'équation différentielle :

$$y'' + y' - 2y = xch2x.$$

Si pour chaque i , x_i est une solution particulière de (E_i) , alors la fonction

$$x = \sum_{i=1}^n x_i$$

est une solution de (E) .

Exemple

Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + y' - 2y = x \operatorname{ch}(2x).$$

Écrivons $x \operatorname{ch} 2x = \frac{1}{2}x(e^{2x} + e^{-2x})$ et utilisons les exemples précédents.

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = ae^x + be^{-2x} + \left(\frac{1}{8}x - \frac{5}{32}\right)e^{2x} + \left(-\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{18}x\right)e^{-2x},$$

avec a et b réels quelconques.

► Pour s'entraîner : ex. 5.

4.4. La méthode de la variation de la constante

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b, c trois fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \quad (E)$$

et l'équation homogène associée :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x \quad (H)$$

La méthode étudiée dans ce paragraphe permet de déterminer toutes les I -solutions de (E) lorsque l'on connaît une I -solution de l'équation homogène (H) qui ne s'annule pas sur I .

■ Exposé de la méthode

Soit x_0 une telle solution de (H) . On pose $x(t) = x_0(t)k(t)$.

• Première étape : Recherche de l'équation satisfaite par la fonction k

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t)k(t) \\ x'(t) &= x_0'(t)k(t) + x_0(t)k'(t) \\ x''(t) &= x_0''(t)k(t) + 2x_0'(t)k'(t) + x_0(t)k''(t) \end{aligned}$$

En combinant ces trois égalités on obtient :

$$x''(t) - a(t)x'(t) - b(t)x(t) = (2x_0'(t) - a(t)x_0(t))k'(t) + x_0(t)k''(t).$$

Le coefficient de $k(t)$ est nul car x_0 est solution de (H) .

x est une I -solution de (E) si, et seulement si, k est une I -solution de :

$$k''(t) = \left(a(t) - 2\frac{x_0'(t)}{x_0(t)}\right)k'(t) + \frac{c(t)}{x_0(t)} \quad (F)$$

La fonction x_0 est de classe $\mathcal{C}^2$ et ne s'annule pas sur I , donc x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I si, et seulement si, k l'est.

• Deuxième étape : Détermination de k'

On pose $u = k'$ et on résout l'équation du premier ordre :

$$u'(t) = \left(a(t) - 2 \frac{x'_0(t)}{x_0(t)} \right) u(t) + \frac{c(t)}{x_0(t)}.$$

• Troisième étape : Résolution de (E)

Un calcul de primitive permet de trouver toutes les solutions k de (F) et d'en déduire toutes les solutions x de (E).

► Pour s'entraîner : ex. 6 et 7.

Application 2

Résolution de $x'' + x = \cotan t$

Trouver toutes les solutions sur $]0, \pi[$ de l'équation différentielle :

$$x'' + x = \cotan t \quad (E)$$

- La fonction cotangente est continue sur $]0, \pi[$.

La fonction sinus ne s'annule pas sur $]0, \pi[$ et c'est une solution de l'équation homogène associée à (E).

On pose $x(t) = y(t) \sin t$.

On a : $x(t) = y(t) \sin t$.

$$x'(t) = y(t) \cos t + y'(t) \sin t.$$

$$x''(t) = -y(t) \sin t + 2y'(t) \cos t + y''(t) \sin t.$$

Donc $x''(t) + x(t) = 2y'(t) \cos t + y''(t) \sin t$.

x est solution de (E) sur $]0, \pi[$ si, et seulement si :

$$\forall t \in]0, \pi[\quad y''(t) \sin t = -2y'(t) \cos t + \cotan t.$$

- On pose $z = y'$ et on résout :

$$z' = -2z \frac{\cos t}{\sin t} + \frac{\cos t}{\sin^2 t} \quad (F)$$

Après calculs, il existe un réel k_1 tel que :

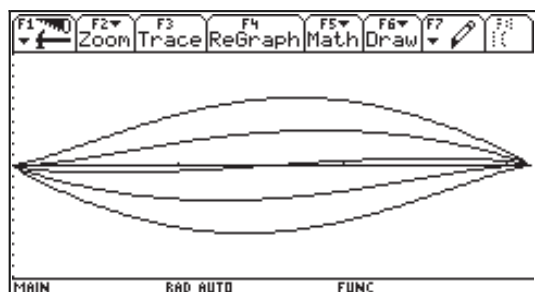
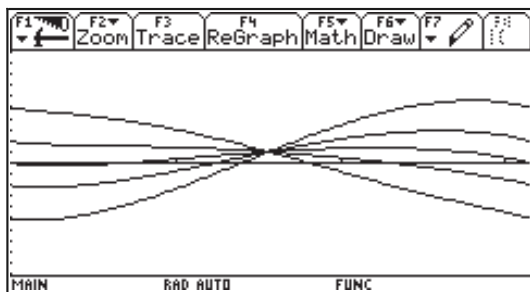
$$y'(t) = z(t) = \frac{1}{\sin t} + \frac{k_1}{\sin^2 t}$$

puis, il existe un réel k_2 tel que :

$$y(t) = \ln \left| \tan \left(\frac{t}{2} \right) \right| - k_1 \cotan t + k_2,$$

et, finalement :

$$x(t) = \sin(t) y(t) = \sin(t) \ln \left| \tan \left(\frac{t}{2} \right) \right| - k_1 \cos t + k_2 \sin t.$$



Doc. 12. Avec la TI, deux familles de courbes intégrales. Dans les deux cas :

$(t, x) \in [10^{-5}; 3,14159] \times [-10; 10]$.

Sur l'écran de gauche, $k_1 \in \{-5, -2, 0, 2, 5\}$ et $k_2 = 1$; sur celui de droite, $k_1 = 0$ et $k_2 \in \{-6, -3, 0, 3, 6\}$.

4.5. La méthode de la variation des constantes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b, c trois fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \quad (E)$$

et l'équation homogène associée :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x \quad (H)$$

La méthode étudiée dans ce paragraphe permet de déterminer une solution particulière de (E) lorsque l'on connaît un système fondamental de solutions (f_1, f_2) de (H).

Le calcul formel (*Maple*, TI, TI plus) résout automatiquement ces équations différentielles. Une bonne compréhension des méthodes exposées dans ce paragraphe est cependant indispensable.

Théorème 7

Soit (f_1, f_2) un système fondamental de solutions de l'équation homogène :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x \quad (H)$$

Pour que la fonction x , définie par :

$$x(t) = \lambda(t)f_1(t) + \mu(t)f_2(t),$$

avec λ et μ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , soit solution de l'équation avec second membre

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \quad (E)$$

il suffit que, pour tout t de I , $(\lambda'(t), \mu'(t))$ soit solution du système :

$$\begin{cases} \lambda'(t)f_1(t) + \mu'(t)f_2(t) = 0 \\ \lambda'(t)f_1'(t) + \mu'(t)f_2'(t) = c(t) \end{cases} \quad (S)$$

Rapport Centrale, 2001

« La méthode de la variation des constantes pour une équation différentielle du second ordre est presque totalement inconnue. »

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Méconnaissance de la méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires du second ordre. »

Démonstration

Soit λ et μ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que, pour tout t de I , $(\lambda'(t), \mu'(t))$ soit solution de (S).

La fonction $x = \lambda f_1 + \mu f_2$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . En dérivant et en utilisant la première ligne de (S), on trouve :

$$x' = \lambda f_1' + \mu f_2'.$$

On en déduit que x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I . En utilisant la deuxième ligne de (S) et le fait que f_1 et f_2 sont solutions de (H), on obtient :

$$x'' = c + \lambda f_1'' + \mu f_2'' = c + bx + ax'.$$

Donc x est une I -solution de (E).

Déterminer deux fonctions λ et μ telles que $x = \lambda f_1 + \mu f_2$ soit solution de (E) revient donc à :

- résoudre le système 2×2 :

$$\begin{cases} \lambda'(t)f_1(t) + \mu'(t)f_2(t) = 0 \\ \lambda'(t)f_1'(t) + \mu'(t)f_2'(t) = c(t) \end{cases}$$
- connaissant λ' et μ' , calculer leurs primitives.

► Pour s'entraîner : ex. 8.

Application 3

Étude de $x'' + x = \cotan t$ (deuxième version)

Résoudre, sur $]0, \pi[$, l'équation différentielle

$$x'' + x = \cotan t \quad (E)$$

par la méthode de variation des constantes.

- $(\sin, \cos)$ est un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée :

$$x'' + x = 0.$$

- On cherche une solution de (E) de la forme :

$$x(t) = A(t) \cos(t) + B(t) \sin(t).$$

On résout le système :

$$\begin{cases} A'(t) \cos(t) + B'(t) \sin(t) = 0 \\ -A'(t) \sin(t) + B'(t) \cos(t) = \cotan(t) \end{cases}.$$

On obtient :

$$A'(t) = -\cos(t) \quad \text{et} \quad B'(t) = \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}.$$

- Des primitives de ces fonctions sont :

$$A(t) = -\sin(t), B(t) = \cos(t) + \ln \left| \tan \left(\frac{t}{2} \right) \right|$$

- Les solutions de (E) sont de la forme :

$$x(t) = \sin(t) \ln \left| \tan \left(\frac{t}{2} \right) \right| + K_1 \cos(t) + K_2 \sin(t),$$

où K_1 et K_2 sont des constantes.

5 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Dans ce paragraphe, les éléments de $\mathbb{K}^n$ seront représentés par des vecteurs colonnes et X désigne une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}^n$.

5.1. Définitions

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle :

- **système différentiel linéaire homogène à coefficients constants**, l'équation différentielle :

$$X' = AX \quad (H)$$

- **I-solution** de ce système différentiel, toute application X de I dans $\mathbb{K}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , telle que :

$$\forall t \in I \quad X'(t) = AX(t)$$

- **orbite** ou **courbe intégrale** du système (H) l'image de la courbe paramétrée de $\mathbb{K}^n, t \mapsto X(t)$ où X est une solution de (H) .

Un **problème de Cauchy** associé au système $X' = AX$ est la recherche d'une solution de ce système satisfaisant à une condition initiale de la forme $X(t_0) = X_0$ où $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$. On le note :

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (C)$$

La notation utilisée sera :

$$t \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Présenté ainsi, on peut considérer ce système comme une équation différentielle du premier ordre dont la fonction inconnue, X , est à valeurs vectorielles.

Si l'on note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et

si l'on développe le produit AX ,
on voit apparaître le système :

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

5.2. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 8

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et (t_0, X_0) un élément de $I \times \mathbb{K}^n$.

Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (C)$$

admet une unique solution X définie sur I .

- On déduit de ce *théorème*, par récurrence, que la solution de (C) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Dans le cas des systèmes à coefficients constants qui nous intéresse dans ce paragraphe, il n'y a pas de restriction sur l'intervalle de définition des fonctions solutions. Elles sont toutes définies sur $\mathbb{R}$.

La démonstration de ce *théorème* est hors programme.

Application 4

Structure de l'ensemble des solutions

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et le système différentiel linéaire homogène associé :

$$X' = AX \quad (H)$$

1) Montrer que l'ensemble S_H des $\mathbb{R}$ -solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$.

2) Soit t_0 un réel. Montrer que l'application $X \mapsto X(t_0)$ définit un isomorphisme de S_H dans $\mathbb{K}^n$.

En déduire que $\dim S_H = n$.

1) Par définition, $S_H \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$.

La fonction nulle est dans S_H .

La linéarité de la dérivation implique la stabilité de S_H par combinaison linéaire.

Donc S_H est un sous-espace de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$.

2) L'application Ψ , de S_H dans $\mathbb{K}^n$, définie par $\Psi(X) = X(t_0)$ est linéaire

Le *théorème de Cauchy-Lipschitz* permet de prouver que Ψ est bijective.

On en déduit que $\dim S_H = \dim \mathbb{K}^n = n$.

5.3. Méthode pratique lorsque la matrice A est diagonalisable

Dans ce paragraphe, A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$A = PDP^{-1}.$$

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Il est décevant de constater que certains étudiants ne savent pas donner la solution générale d'un tel système lorsque sa matrice est diagonalisable. »

On rappelle qu'alors :

- les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A (les valeurs propres multiples étant répétées autant de fois que leur multiplicité) ;
- P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une base de $\mathbb{K}^n$, $(V_1, \dots, V_n)$, formée de vecteurs propres de A (pour tout i , $AV_i = \lambda_i V_i$).

Lemme

Soit X une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}^n$.

- La fonction Y définie par $Y = P^{-1}X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $Y' = P^{-1}X'$.

- La fonction X est solution sur $\mathbb{R}$ de : $X' = AX$ (H)

- si, et seulement si, Y est solution de : $Y' = DY$ (HD)

Les équivalences suivantes sont essentielles :

$$X' = AX = PDP^{-1}X$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P^{-1}X' = DP^{-1}X$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Y' = DY.$$

■ Exposé de la méthode de résolution de $X' = AX$.

- Première étape : *Diagonalisation de A*

On détermine les valeurs propres de A (et leur multiplicité).

Puis on détermine une base de vecteurs propres de A , $(V_1, \dots, V_n)$.

La matrice P est la matrice dont les colonnes sont $(V_1, \dots, V_n)$.

- Deuxième étape : *Rappel du principe utilisé*

On pose $Y = P^{-1}X$. Le système $X' = AX = PDP^{-1}X$

équivalait à : $Y' = DY$.

- Troisième étape : *Résolution de $Y' = DY$*

Le système $Y' = DY$ s'écrit :

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases}$$

On obtient, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $y_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$, où $(C_1, C_2, \dots, C_n) \in \mathbb{K}^n$.

- Quatrième étape : *Détermination des solutions de (H)*

Connaissant Y , on en déduit X par la formule $X = PY$.

- Cinquième étape : *Étude d'une éventuelle condition initiale*

Si le problème posé est la résolution d'un problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

on détermine $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ en résolvant $X(t_0) = PY(t_0) = X_0$.

Vous remarquerez que ce problème d'analyse : « résolution d'un système différentiel linéaire » est traité de façon purement algébrique.

Vous remarquerez aussi que le calcul effectif de P^{-1} n'est pas utile, sauf éventuellement à la dernière étape pour étudier une condition initiale d'un problème de Cauchy.

Application 5

Étude d'un système différentiel

Le corps de base est $\mathbb{R}$.

1) Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = y - x \\ y' = x - 4z \\ z' = 4z - y \end{cases} \quad (H)$$

2) Montrer que toutes les courbes intégrales du système sont situées dans des plans affines parallèles de $\mathbb{R}^3$.

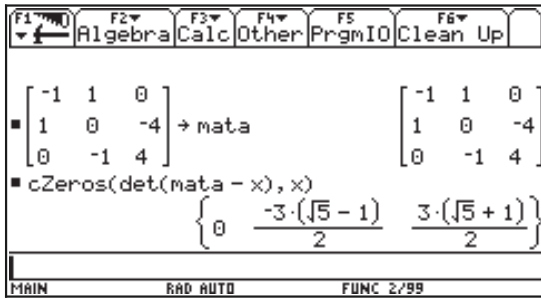
1) On profitera de cet exercice pour réviser les techniques de base de diagonalisation.

La matrice du système est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont :

$$0, \frac{3+3\sqrt{5}}{2}, \frac{3-3\sqrt{5}}{2}.$$



Doc. 13. Calcul des valeurs propres de la matrice A .

Le calcul des vecteurs propres donne :

$$\text{Ker } A = \text{Vect} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker} \left(A - \frac{3+3\sqrt{5}}{2} I_3 \right) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -7+3\sqrt{5} \\ 5-3\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker} \left(A - \frac{3-3\sqrt{5}}{2} I_3 \right) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -7-3\sqrt{5} \\ 5+3\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matrice } P = \begin{pmatrix} 4 & -7+3\sqrt{5} & -7-3\sqrt{5} \\ 4 & 5-3\sqrt{5} & 5+3\sqrt{5} \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalise A .

On pose :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ et } Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}.$$

La fonction X est solution de (H) si, et seulement si, Y est solution de $Y' = DY$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} u'(t) = 0 \\ v'(t) = \frac{3+3\sqrt{5}}{2}v(t) \\ w'(t) = \frac{3-3\sqrt{5}}{2}w(t) \end{cases}$$

$$\text{On note } \alpha = \frac{3+3\sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{3-3\sqrt{5}}{2}.$$

Alors :

$$\begin{cases} u(t) = C_1 \\ v(t) = C_2 e^{\alpha t} \\ w(t) = C_3 e^{\beta t} \end{cases}$$

avec $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$.

Enfin, $X = PY$. Les solutions de (H) sont :

$$\begin{cases} x(t) = 4C_1 + (-7+3\sqrt{5})C_2 e^{\alpha t} \\ \quad \quad \quad + (-7-3\sqrt{5})C_3 e^{\beta t} \\ y(t) = 4C_1 + (5-3\sqrt{5})C_2 e^{\alpha t} \\ \quad \quad \quad + (5+3\sqrt{5})C_3 e^{\beta t} \\ z(t) = C_1 + 2C_2 e^{\alpha t} + 2C_3 e^{\beta t} \end{cases}.$$

2) Puisque 0 est valeur propre, les lignes de A sont liées. On voit que la somme des lignes est nulle. On en déduit que, si (x, y, z) est une solution de (H) , alors $x' + y' + z' = 0$.

La fonction $x + y + z$ est constante. La trajectoire correspondante est dans un plan d'équation : $x + y + z = k$. Tous ces plans sont parallèles.

6 Systèmes différentiels linéaires : cas général (programme PSI)

6.1. Définitions

Soit A une application continue de l'intervalle I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et B une application continue de I dans $\mathbb{K}^n$.

On note, pour t dans I , $A(t) = (a_{ij}(t))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$.

- L'équation différentielle vectorielle :

$$X' = A(t)X + B(t) \quad (E)$$

se traduit par le **système différentiel linéaire** :

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases} \quad (S)$$

- Une **I-solution** de (E) (ou de (S)) est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}^n$ telle que :

$$\forall t \in I \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t).$$

- Une **orbite**, ou **courbe intégrale**, du système (E) est l'image d'une courbe paramétrée de $\mathbb{K}^n$, $t \mapsto X(t)$ où X est une solution de (E) .
- Pour tout couple (t_0, X_0) de $I \times \mathbb{K}^n$, l'étude du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (C)$$

est la recherche d'une solution de l'équation différentielle (E) sur un intervalle J inclus dans I et contenant t_0 , telle que $X(t_0) = X_0$.

- Le système différentiel : $X' = A(t)X$ (H)

est le **système homogène** associé à (E) .

- La fonction vectorielle B est le **second membre** de (E) .
- Les ensembles des I -solutions des systèmes différentiels (E) et (H) sont notés respectivement $S(E)$ et $S(H)$.

6.2. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 9 : Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, A une application continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et B une application continue de I dans $\mathbb{K}^n$. Pour tout couple (t_0, X_0) de $I \times \mathbb{K}^n$, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I .

Dans ce paragraphe, les éléments de $\mathbb{K}^n$ seront représentés par des vecteurs colonnes. I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et X une application de I dans $\mathbb{K}^n$:

$$t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Le programme *PSI* précise que, F étant un espace vectoriel normé de dimension finie, on étudiera l'équation différentielle :

$$x' = a(t)x + b(t)$$

où a désigne une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$ et b une application continue de I dans F . Le passage à la présentation matricielle, développée ici, se fait simplement en choisissant une base de l'espace vectoriel F et en représentant l'endomorphisme $a(t)$ et le vecteur $b(t)$ relativement à cette base. La présentation matricielle n'est pas intrinsèque car elle dépend du choix d'une base, mais elle correspond mieux à la pratique la plus couramment rencontrée.

La démonstration de ce *théorème* est hors programme.

Théorème 10

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, A une application continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et B une application continue de I dans $\mathbb{K}^n$.

- L'ensemble $S(H)$ des I -solutions du système homogène :

$$X' = A(t)X \quad (H)$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.

- Soit t_0 un point fixé de I . L'application :

$$\Phi : \begin{cases} S(H) \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longmapsto \Phi(X) = X(t_0) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

- $S(H)$ est un espace vectoriel de dimension n .
- L'ensemble $S(E)$ des I -solutions du système avec second membre

$$X' = A(t)X + B(t) \quad (E)$$

est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$, de direction $S(H)$.

La démonstration du *théorème 10* est similaire à celle du *théorème de structure* de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire du second ordre vue précédemment.

Il est essentiel de comprendre que :

- l'injectivité de Φ est due au résultat d'unicité du *théorème de Cauchy-Lipschitz* ;
- la surjectivité est due au résultat d'existence dudit théorème.

De plus, on retrouve le résultat habituel pour les équations linéaires :

si X est une solution particulière de (E) , alors :

$$S(E) = X + S(H).$$

6.3. Système fondamental de solutions. Le wronskien

Dans ce paragraphe, on étudie le système différentiel homogène :

$$X' = A(t)X \quad (H)$$

où A est une application continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Une famille $(X_1, \dots, X_n)$ de n éléments de $S(H)$ est appelée un **système fondamental de solutions** de (H) si, et seulement si, c'est une base de $S(H)$.

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de n éléments de $S(H)$.

Pour tout j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note $X_j(t) = \begin{pmatrix} w_{1j}(t) \\ \vdots \\ w_{nj}(t) \end{pmatrix}$.

Le **wronskien** de $(X_1, \dots, X_n)$ est la fonction W de I dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$\forall t \in I \quad W(t) = \text{Det} \left((w_{ij}(t))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \right) = \text{Det}(X_1(t), \dots, X_n(t)).$$

On sait déjà que l'ensemble $S(H)$ des solutions de ce système différentiel est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Pour une famille $(V_1, \dots, V_n)$ de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$, la notation $\text{Det}(V_1, \dots, V_n)$ désigne le déterminant de cette famille de vecteurs relativement à la base canonique.

Théorème 11

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n -uplet de I -solutions du système homogène :

$$X' = A(t)X \quad (H)$$

et W le wronskien de cette famille.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\forall t \in I \quad W(t) \neq 0$;
- $\exists t_0 \in I \quad W(t_0) \neq 0$;
- $(X_1, \dots, X_n)$ est un système fondamental de solutions de (H) .

6.4. Application à la résolution de systèmes homogènes lorsque la matrice A est diagonalisable

Dans ce paragraphe, A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on étudie le système différentiel homogène à coefficients constants

$$X' = AX. \quad (H)$$

La méthode de résolution d'un tel système exposée au paragraphe 1.3 (programme PC) n'est pas exclue du programme PSI et il est intéressant de l'étudier.

Lemme

Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé. La fonction X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$t \mapsto X(t) = e^{\lambda t} V,$$

est solution de (H) sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Pour tout réel t , $X'(t) = e^{\lambda t} \lambda V = e^{\lambda t} (AV)$, mais $e^{\lambda t}$ est un scalaire, donc :

$$X'(t) = A(e^{\lambda t} V) = AX(t).$$

Lemme

On suppose la matrice A diagonalisable.

Soit $(V_1, \dots, V_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A .

Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note λ_i la valeur propre de A associée à V_i et X_i la fonction de $\mathbb{R}$ définie par :

$$X_i : t \mapsto X_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i.$$

$(X_1, \dots, X_n)$ est un système fondamental de solutions de (H) .

Démonstration

La famille $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une famille de n solutions de H . Le wronskien de cette famille est tel que $W(0) = \text{Det}(V_1, \dots, V_n) \neq 0$. Le théorème 4 permet de conclure.

■ Exposé de la méthode de résolution lorsque A est diagonalisable

- Première étape : *Diagonalisation de A*

On détermine les valeurs propres de A (et leur multiplicité).

Puis on détermine une base de vecteurs propres de A , $(V_1, \dots, V_n)$.

Encore une fois l'isomorphisme

$$\Phi : \begin{cases} S(H) \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longmapsto \Phi(X) = X(t_0) \end{cases}$$

joue un rôle essentiel.

Il montre que la famille de fonctions $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $S(H)$ si, et seulement si, la famille de vecteurs $(X_1(t_0), \dots, X_n(t_0))$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Ceci permet de rédiger la démonstration.

Au paragraphe 5.3, on a obtenu l'expression générale d'une solution de (H) sous la forme :

$$X(t) = P \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

où P est la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres de A , $(V_1, \dots, V_n)$. Par construction, les colonnes de la matrice P sont les vecteurs colonnes $(V_1, \dots, V_n)$. La définition du produit « matrice $\times$ vecteur colonne » permet d'écrire :

$$P \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} V_n.$$

On trouve le même résultat !

• Deuxième étape : *Rappel du principe utilisé*

Soit λ_i la valeur propre associée au vecteur propre V_i .

Chaque fonction $X_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} V_i$ est solution de **(H)** et la famille de fonctions $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un système fondamental de solutions de **(H)**.

• Troisième étape : *Expression des solutions de (H)*

Soit X une solution de **(H)**. Il existe $(C_1, C_2, \dots, C_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} V_n.$$

► Pour s'entraîner : ex. 9 et 10.

Application 6

Étude d'un système différentiel

Dans cette application, on étudie le même système qu'à l'application 5.

Ceci permet de comparer les deux méthodes de résolution. Le corps de base est $\mathbb{R}$.

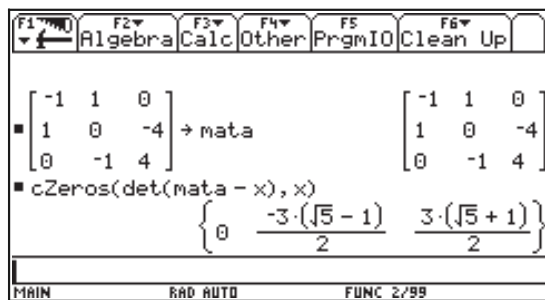
1) Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = y - x \\ y' = x - 4z \\ z' = 4z - y \end{cases} \quad (\mathbf{H})$$

2) Montrer que toutes les courbes intégrales du système sont situées dans des plans affines parallèles de $\mathbb{R}^3$.

1) La matrice du système est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$



Doc. 14. Calcul des valeurs propres de la matrice A.

Les valeurs propres de A sont :

$$0, \quad \alpha = \frac{3+3\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{3-3\sqrt{5}}{2}.$$

Une base de $\text{Ker } A$ est :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une base de $\text{Ker } (A - \alpha I_3)$ est :

$$V_2 = \begin{pmatrix} -7+3\sqrt{5} \\ 5-3\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Une base de $\text{Ker } (A - \beta I_3)$ est :

$$V_3 = \begin{pmatrix} -7-3\sqrt{5} \\ 5+3\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les deux lemmes qui viennent d'être démontrés prouvent que les fonctions :

$$X_1 : t \mapsto X_1(t) = V_1,$$

$$X_2 : t \mapsto X_2(t) = e^{\alpha t} V_2,$$

$$X_3 : t \mapsto X_3(t) = e^{\beta t} V_3,$$

forment un système fondamental de solutions de **(H)**.

Sous forme vectorielle, les solutions de **(H)** sont les fonctions X telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad X(t) = C_1 V_1 + C_2 e^{\alpha t} V_2 + C_3 e^{\beta t} V_3$$

avec (C_1, C_2, C_3) dans $\mathbb{R}^3$.

2) Avec les notations précédentes :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad X(t) \in C_1 V_1 + \text{Vect}(V_2, V_3).$$

La courbe intégrale associée à la solution X est dans un plan affine de direction $\text{Vect}(V_2, V_3)$.

6.5. La méthode (vectorielle) de variation des constantes

Dans ce paragraphe, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, A une application continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et B une application continue de I dans $\mathbb{K}^n$.

La méthode de variation des constantes permet de déterminer une solution particulière du système différentiel avec second membre :

$$X' = A(t)X + B(t) \quad (\text{E})$$

lorsqu'un système fondamental de solutions du système homogène :

$$X' = A(t)X \quad (\text{H})$$

est connu.

Théorème 12

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un système fondamental de solutions de :

$$X' = A(t)X \quad (\text{H})$$

et $(C_1, \dots, C_n)$ une famille de n fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}$.

Pour que l'application X définie par $X(t) = \sum_{j=1}^n C_j(t) X_j(t)$ soit solution du système avec second membre :

$$X' = A(t)X + B(t) \quad (\text{E})$$

il suffit que :

$$\forall t \in I \quad \sum_{j=1}^n C'_j(t) X_j(t) = B(t). \quad (\text{R})$$

Démonstration

On suppose que la famille de fonctions $(C_1, \dots, C_n)$ vérifie **(R)**.

La fonction $X = \sum_{j=1}^n C_j X_j$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout t de I :

$$X'(t) = \sum_{j=1}^n C'_j(t) X_j(t) + \sum_{j=1}^n C_j(t) X'_j(t).$$

Or $X'_j(t) = A(t)X_j(t)$, donc :

$$X'(t) = \sum_{j=1}^n C'_j(t) X_j(t) + A(t)X(t).$$

La relation **(R)** permet de conclure que X est solution de **(E)**.

Sachant que les $X_j(t)$ et $B(t)$ sont des vecteurs colonnes bien déterminés, On constate que l'équation :

$$\sum_{j=1}^n C'_j(t) X_j(t) = B(t),$$

est un système linéaire de n équations dont les n inconnues sont les scalaires :

$$(C'_1(t), \dots, C'_n(t)).$$

On pose ce système et on vérifie que c'est un système de Cramer car son déterminant est le wronskien $W(t)$ du système fondamental $(X_1, \dots, X_n)$.

Ainsi, d'un point de vue pratique, appliquer la méthode de variations des constantes se résume à :

- poser et résoudre le système de Cramer :

$$\sum_{j=1}^n C'_j(t) X_j(t) = B(t)$$

d'inconnues $(C'_1(t), \dots, C'_n(t))$;

- calculer n primitives

$$(C_1, \dots, C_n)$$

des fonctions $(C'_1, \dots, C'_n)$ que l'on vient de trouver ;

- présenter la solution particulière X ainsi obtenue :

$$X(t) = \sum_{j=1}^n C_j(t) X_j(t).$$

En ajoutant les solutions de **(H)**, on obtient toutes les solutions de **(E)**.

Application 7

Le système
$$\begin{cases} x' = \frac{t}{t^2+1}x + \frac{1}{t^2+1}y + \frac{2t^2-1}{t^2+1} \\ y' = -\frac{1}{t^2+1}x + \frac{t}{t^2+1}y + \frac{3t}{t^2+1} \end{cases}$$

Résoudre ce système.

Les fonctions :

$$\varphi_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des solutions du système homogène associé.

Calculons leur wronskien :

$$W(t) = 1 + t^2 \neq 0.$$

Le couple (φ_1, φ_2) est un système fondamental de solutions du système homogène.

Cherchons une solution du système avec second membre sous la forme :

$$t \mapsto \lambda_1(t)\varphi_1(t) + \lambda_2(t)\varphi_2(t).$$

Il suffit que λ'_1 et λ'_2 vérifient :

$$\begin{cases} \lambda'_1(t) + t\lambda'_2(t) = \frac{2t^2-1}{t^2+1} \\ -t\lambda'_1(t) + \lambda'_2(t) = \frac{3t}{t^2+1} \end{cases}.$$

Soit :

$$\lambda'_1(t) = \frac{-1}{t^2+1} \quad \text{et} \quad \lambda'_2(t) = \frac{2t}{t^2+1}.$$

Les fonctions λ_1 et λ_2 telles que :

$$\lambda_1(t) = -\text{Arctan } t \quad \text{et} \quad \lambda_2(t) = \ln(1+t^2)$$

conviennent et les solutions du système avec second membre sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{Arctan } t + t \ln(1+t^2) + k_1 + k_2 t \\ t \text{Arctan } t + \ln(1+t^2) - k_1 t + k_2 \end{pmatrix}.$$

6.6. Application à l'étude des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Dans ce paragraphe, l'étude d'une équation différentielle scalaire d'ordre 2 est ramenée à celle d'un système d'ordre 1.

Théorème 13

Soit (E) l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$$

et (S) le système différentiel linéaire scalaire d'ordre 1 :

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

• Si x est une I -solution de (E) , alors :

$$Z = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

est une I -solution de (S) .

Rapport X, 2000

« La méthode de variation des constantes pour des équations linéaires du second ordre est à savoir sans hésitations. »

- Si $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est une I -solution de (S) , alors x est une I -solution de (E) .

Démonstration

- Soit x une I -solution de (E) et $Z = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$.

Puisque x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I , Z est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout t de I :

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Donc Z est une I -solution de (S) .

- Soit $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ une I -solution de (S) . Pour tout t de I :

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\forall t \in I \quad x'(t) = y(t).$$

Ainsi, la fonction x' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et x est de classe $\mathcal{C}^2$.

De plus :

$$\forall t \in I \quad y'(t) = x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t)$$

Donc x est une I -solution de (E) .

Théorème 14

Soit (f_1, f_2) deux solutions de l'équation différentielle homogène :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x \quad (H)$$

On note :

$$Z_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix}.$$

- Les fonctions Z_1 et Z_2 sont solutions du système différentiel homogène :

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} Z \quad (SH)$$

- La famille (Z_1, Z_2) est un système fondamental de solutions du système différentiel homogène (SH) si, et seulement si, (f_1, f_2) est un système fondamental de solutions de l'équation différentielle homogène (H) .

Les *théorèmes* 13 et 14 donnent une autre façon de présenter la méthode de variation des constantes pour la recherche d'une solution particulière de l'équation différentielle scalaire d'ordre 2 avec second membre :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \quad (E)$$

lorsque l'on connaît (f_1, f_2) , un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée.

- On pose $Z = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ et on rappelle que x est une I -solution de (E) si, et seulement si, Z est une I -solution du système :

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

- On pose :

$$Z_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix}$$

qui forment un système fondamental de solutions du système homogène associé à (S) .

On cherche λ et μ deux fonctions de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ telles que $Z = \lambda Z_1 + \mu Z_2$ soit solution de (S) . Pour cela, il suffit que :

$$\forall t \in I \quad \lambda'(t)Z_1(t) + \mu'(t)Z_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

- On calcule $\lambda'(t)$ et $\mu'(t)$ en résolvant :

$$\begin{cases} \lambda'(t)f_1(t) + \mu'(t)f_2(t) = 0 \\ \lambda'(t)f_1'(t) + \mu'(t)f_2'(t) = c(t) \end{cases}$$

Deux calculs de primitives donnent λ et μ et $x = \lambda f_1 + \mu f_2$ est une solution particulière de (E) .

Application 8

Étude de $x'' + x = \cotan t$ (troisième version)

Résoudre, sur $]0, \pi[$, l'équation différentielle

$$x'' + x = \cotan t \quad (E)$$

On pose :

$$Z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

On obtient x , solution de (E), en résolvant :

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \cotan t \end{pmatrix} \quad (S)$$

On sait que $(\cos, \sin)$ est un système fondamental de solutions de $x'' + x = 0$.

$$\text{Soit } Z_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \text{ et } Z_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Pour que la fonction Z , définie par :

$$Z(t) = a(t)Z_1(t) + b(t)Z_2(t)$$

soit solution de (S), il suffit que :

$$a'(t)Z_1(t) + b'(t)Z_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cotan t \end{pmatrix}.$$

On en déduit a' et b' , puis a et b et enfin les solutions de (E) :

$$x(t) = \sin(t) \ln \left| \tan \left(\frac{t}{2} \right) \right| + K_1 \cos(t) + K_2 \sin(t),$$

où K_1 et K_2 sont des constantes.

6.7. Étude de $X' = AX$ lorsque A est trigonalisable

Théorème 15

Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, T une matrice triangulaire et P une matrice inversible telle que :

$$A = PTP^{-1}.$$

Soit X une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$.

• La fonction Y définie par $Y = P^{-1}X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $Y' = P^{-1}X'$.

• La fonction X est solution sur $\mathbb{R}$ du système homogène :

$$X' = AX \quad (S)$$

si, et seulement si, Y est solution de :

$$Y' = TY \quad (ST)$$

L'intérêt de ce *théorème* réside dans le fait que le système différentiel :

$$Y' = TY \quad (ST)$$

se résout simplement car T est triangulaire.

On en déduit X par la formule $X = PY$.

► Pour s'entraîner : ex. 14.

FICHE MÉTHODE

- Résolution d'une **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1** :

$$\alpha(t)x' + \beta(t)x = \gamma(t) \quad (E)$$

où α, β et γ sont trois fonctions continues sur un intervalle I , à valeurs réelles ou complexes.

- Déterminer les intervalles où α ne s'annule pas. Sur un tel intervalle J , on divise par α pour se ramener à une équation sous forme résolue

$$x' = a(t)x + b(t) \quad (R)$$

- Calculer une primitive A de a . Les J -solutions de l'équation homogène (H) associée à (R) :

$$x' = a(t)x \quad (H)$$

sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{A(t)}$ où C est une constante.

- Si l'on connaît une J -solution x_1 de (R) , toute J -solution de (R) est de la forme :

$$t \mapsto x_1(t) + Ce^{A(t)}.$$

- Pour déterminer une solution particulière, x_1 , de (R) , on peut :
 - essayer de « deviner » une telle solution ;
 - décomposer le second membre en une somme de fonctions « plus simples » et appliquer le principe de superposition ;
 - utiliser la méthode de variation de la constante ;
- Pour résoudre l'équation (E) sur I , il faut étudier les recollements des solutions de (R) aux différents points en lesquels la fonction α s'annule.

- Résolution d'une **équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants** :

$$y'' = \alpha y' + \beta y \quad (H)$$

où α et β sont deux constantes.

- Déterminer les racines de l'équation caractéristique associée :

$$r^2 = \alpha r + \beta \quad (C)$$

- *Le cas* : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

– Lorsque l'équation caractéristique (C) admet deux racines distinctes λ et μ , toute solution complexe de (H) est de la forme :

$$y(t) = k_1 e^{\lambda t} + k_2 e^{\mu t},$$

où k_1 et k_2 sont des constantes complexes.

– Lorsque l'équation caractéristique (C) admet une racine double $\lambda = \frac{\alpha}{2}$, toute solution complexe de (H) est de la forme :

$$y(t) = (k_1 + k_2 t) e^{\lambda t},$$

où k_1 et k_2 sont des constantes complexes.

FICHE MÉTHODE

Le cas : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

– Lorsque l'équation caractéristique (C) admet deux racines réelles distinctes λ et μ , toute solution réelle de (H) est de la forme :

$$y(t) = k_1 e^{\lambda t} + k_2 e^{\mu t},$$

où k_1 et k_2 sont des constantes réelles.

– Lorsque l'équation caractéristique (C) admet une racine double réelle $\lambda = \frac{\alpha}{2}$, toute solution réelle de (H) est de la forme :

$$y(t) = (k_1 + k_2 t) e^{\lambda t},$$

où k_1 et k_2 sont des constantes réelles.

– Lorsque l'équation caractéristique (C) admet deux racines complexes conjuguées $\lambda = r + is$ et $\bar{\lambda} = r - is$, toute solution réelle de (H) est de la forme :

$$y(t) = (k_1 \cos(st) + k_2 \sin(st)) e^{rt},$$

où k_1 et k_2 sont des constantes réelles.

• Pour trouver une solution particulière d'une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre, on peut :

– essayer de « deviner » une telle solution ;

– décomposer le second membre en une somme de fonctions « plus simples » et appliquer le principe de superposition ;

– lorsque l'on connaît une solution de l'équation homogène associée qui ne s'annule pas, utiliser la méthode de variation de la constante ;

– lorsque l'on connaît un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée, utiliser la méthode de variation des deux constantes.

• Résolution d'un **système différentiel linéaire homogène à coefficients constants** lorsque la matrice du système est diagonalisable

• *Première méthode*

Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour résoudre le système :

$$X' = AX \tag{H}$$

on peut :

– diagonaliser A en déterminant une matrice diagonale D et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$A = P D P^{-1} ;$$

– poser $Y = P^{-1} X$, le système initial $X' = AX$ équivaut à $Y' = DY$;

– résoudre le système $Y' = DY$;

– en déduire $X = PY$.

• *Seconde méthode (programme PSI)*

Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour résoudre le système :

$$X' = AX \tag{H}$$

FICHE MÉTHODE

on peut :

- diagonaliser A en déterminant une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A , $(V_1, \dots, V_n)$ et les valeurs propres associées, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$;
- rappeler que les n fonctions $X_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} V_i$ forment un système fondamental de solutions de **(H)** ;
- en déduire que toute solution X de **(H)** est de la forme :

$$X(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} V_i$$

où $C_1, \dots, C_n$ sont n éléments de $\mathbb{K}$.

- Résolution d'un **système différentiel linéaire homogène à coefficients constants** lorsque la matrice du système est trigonalisable
 - On trigonalise la matrice A du système et on résout le système triangulaire associé.
- Résolution d'un **système différentiel linéaire avec second membre** lorsqu'un système fondamental de solutions du système homogène est connu (programme *PSI*)
 - On applique la méthode de variation des constantes.

Algorithmique TD 6

Résolution approchée d'une équation différentielle par discrétisation

Partie mathématique

L'équation suivante, appelée équation de Laplace, de Poisson ou de la conduction, modélise de nombreux phénomènes physiques :

$$\forall x \in]0, 1[\quad -u''(x) + c(x)u(x) = f(x); \quad u(0) = a, u(1) = b$$

a et b sont deux réels, c est une fonction continue et positive sur $[0, 1]$ et f est une fonction continue sur $[0, 1]$. Les conditions imposées en 0 et 1 justifient l'expression de « problème aux limites » utilisée pour désigner l'équation. De nombreux phénomènes physiques se traduisent par des problèmes aux limites. Leur résolution exacte est en général impossible. Nous allons exposer une méthode de résolution approchée par discrétisation, appelée méthode des différences finies.

Nous admettons l'existence d'une unique solution u de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$.

Notons, pour $n > 0$ et tout i entre 0 et n : $h = \frac{1}{n}$, $x_i = ih$, $c_i = c(x_i)$, $f_i = f(x_i)$ et u_i la valeur approchée cherchée de $u(x_i)$.

Supposons u de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0, 1]$. Alors :

$$u''(x_i) = \frac{1}{h^2}[-2u(x_i) + u(x_{i-1}) + u(x_{i+1})] + O(h^2).$$

D'où :

$$u''_i \simeq \frac{1}{h^2}[-2u_i + u_{i-1} + u_{i+1}].$$

En reportant dans l'équation, on obtient, pour tout i de 1 à $n-1$:

$$\frac{1}{h^2}[2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}] + c_i u_i = f_i.$$

et $u_0 = a$, $u_n = b$.

Le vecteur $u = (u_1, \dots, u_{n-1})$ est solution du système linéaire : $Au = B$, où :

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 + c_1 h^2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + c_2 h^2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & & 2 + c_{n-2} h^2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 + c_{n-1} h^2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} f_1 + \frac{a}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} + \frac{b}{h^2} \end{bmatrix}.$$

Partie informatique

Écrire une procédure dont les fonctions c, u sont des paramètres et qui trace les graphes des fonctions u et de la solution approchée déterminée par cette méthode.

Comparer.

Méthode des différences finies

```

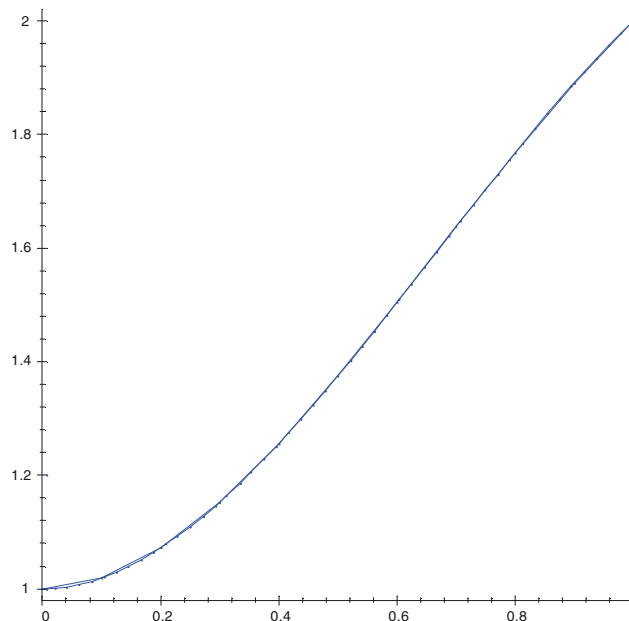
> restart:with(linalg):with(plots):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> u:=t->1+2*t^2-t^3:c:=t->2*t-t^3:
> f:=t->-D(D(u))(t)+c(t)*u(t);f(t);


$$f := t \rightarrow -D(D(u))(t) + c(t)u(t)$$


$$v - 4 + 6t + (2t - t^3)(1 + 2t^3 - t^3)$$


> DiffFinies:=proc(c,f,a,b,n)
  local h,i,x,s,L,G,U;
  global A,B;
  h:=1/n;
  A:=matrix(n-1,n-1,0);
  B:=matrix(n-1,1,0);
  for i from 1 to n-1 do
    x:=i*h;
    A[i,i]:=2/h^2+c(x);
    B[i,1]:=f(x);
    if i<n-1 then A[i,i+1]:=-1/h^2; fi;
    if 1<i then A[i,i-1]:=-1/h^2; fi;
  od;
  B[1,1]:=B[1,1]+a/h^2;B[n-1,1]:=B[n-1,1]+b/h^2;
  U:=linsolve(1.*A,B);
  s:=[0,a];
  for i from 1 to n-1 do s:=s,[i*h,U[i,1]]; od;
  s:=s,[1,b];
  L:=plot([s]);
  G:=plot(u(t),t=0..1);
  display(L,G):
end:
> DiffFinies(c,f,1,2,10);

```



Exercice résolu

Étude des équations d'Euler

ÉNONCÉ

Une équation d'Euler est une équation linéaire du deuxième ordre de la forme :

$$t^2 y''(t) + \alpha t y'(t) + \beta y(t) = c(t)$$

où α et β sont deux constantes.

Une méthode pour résoudre ce type d'équation sur $\mathbb{R}^{+*}$ consiste à :

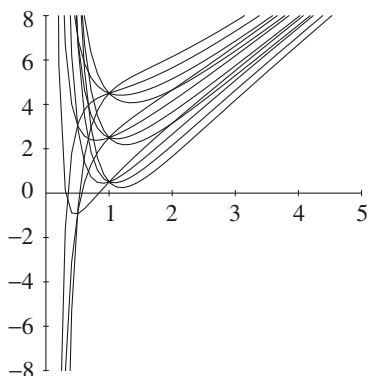
- trouver des fonctions solutions de l'équation homogène associée, de la forme $t \mapsto t^r$;
- appliquer la méthode de variation de la constante ou des constantes pour résoudre l'équation avec second membre.

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}^{+*}$:

1) $t^2 y''(t) + 4t y'(t) + 2y(t) = 2 \ln^2 t + 12t$.

2) $t^3 y''(t) + 3t^2 y'(t) + t y(t) = 6 \ln t$.

CONSEILS



Doc. 1.

Avec Maple :

```
> restart:with(plots):
eq := (x^3)*diff(y(x),x$2)
+3*(x^2)*diff(y(x),x)
+x*y(x) = 6*ln(x);
dsolve(eq, y(x));
```

$$\begin{aligned} eq &:= x^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) \right) \\ &\quad + 3x^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) + x y(x) \\ &= 6 \ln(x) \end{aligned}$$

$$y(x) = \frac{\ln(x)^3}{x} + \frac{-C1}{x} + \frac{-C2 \ln(x)}{x}$$

Doc. 2.

SOLUTION

1) La recherche de solutions de l'équation homogène associée à 1), de la forme :

$$t \mapsto t^r,$$

conduit à l'équation :

$$r^2 + 3r + 2 = 0,$$

dont les solutions sont -2 et -1 .

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :

$$y(t) = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t}.$$

La méthode de variation des constantes permet ensuite d'obtenir les solutions de 1) (doc. 1) :

N.B. : Penser à mettre 1) sous forme résolue en y'' .

$$y(t) = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + \ln^2 t - 3 \ln t + 2t + \frac{7}{2}.$$

2) De même, les solutions de l'équation homogène associée à 2) de la forme :

$$y(t) = t^r$$

sont telles que :

$$r^2 + 2r + 1 = 0, \text{ soit } r = -1.$$

La méthode de variation de la constante permet de résoudre 2). en cherchant les solutions sous la forme :

$$y(t) = \frac{c(t)}{t}.$$

Finalement :

$$y(t) = \frac{1}{t} [a + b \ln t + \ln^3 t],$$

avec a et b réels (doc. 2).

Exercice résolu

Système différentiel et matrice de similitude

ÉNONCÉ

Déterminer les solutions réelles du système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + 1 \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) + t \end{cases} \quad (E)$$

vérifiant la condition initiale :

$$\begin{cases} x(0) = -0,36 \\ y(0) = 0,02 \end{cases}.$$

CONSEILS

C'est une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

que l'on appelle matrice de similitude. Dans ce cas, il est *toujours* intéressant de résoudre le système en posant :

$$z = x + iy.$$

Le second membre de (E_1) est un polynôme complexe de degré 1. On cherche une solution particulière de la même forme :

$$z(t) = \alpha + t\beta.$$

On trouve les couples (x, y) de solutions réelles de (E) en calculant $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ et $y(t) = \operatorname{Im} z(t)$. Ne pas oublier que la constante C est complexe.

SOLUTION

La matrice de ce système différentiel linéaire est $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Le couple de fonctions (x, y) est solution du système si, et seulement si, la fonction complexe $z = x + iy$ vérifie :

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) = (3 + i)z(t) + 1 + it \quad (E_1)$$

Les solutions de l'équation homogène associée à (E_1) sont de la forme : $z(t) = Ce^{(3+i)t}$, où C est une constante complexe.

La fonction z définie par $z(t) = \frac{-18+i}{50} - \frac{1+3i}{10}t$, est une solution particulière de (E_1)

Les solutions de (E_1) sont les fonctions de la forme :

$$z(t) = \frac{-18+i}{50} - \frac{1+3i}{10}t + Ce^{(3+i)t}$$

où $C \in \mathbb{C}$.

La condition initiale est, pour la fonction z :

$$z(0) = -0,36 + 0,02i = \frac{-18+i}{50} + C.$$

On en déduit $C = 0$, d'où les fonctions x et y recherchées :

$$x(t) = -\frac{9}{25} - \frac{t}{10}; y(t) = \frac{1}{50} - \frac{3t}{10}.$$

Exercices

- 1** Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par les fonctions de la forme :

$$f(x) = c \ln x + x^2.$$

- 2** Résoudre l'équation différentielle :

$$(x^2 - 4)y' + xy = 2.$$

Préciser les solutions maximales.

- 3** Résoudre l'équation différentielle :

$$|x|y' + (x - 1)y = x^2.$$

Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

- 4** Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et un entier $n \geq 2$.

La fonction $x : t \mapsto t^n$ peut-elle être la solution sur I d'une équation linéaire homogène du deuxième ordre, résolue en x'' ?

- 5** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 4 \cos x \operatorname{ch} x.$$

- 6** Résoudre l'équation différentielle :

$$(t+1)x'' - x' - xt = 0,$$

sachant que la fonction $t \mapsto e^t$ est solution.

- 7** Résoudre l'équation différentielle :

$$x^3 y'' + xy' - y = e^{1/x}.$$

- 8** Résoudre l'équation différentielle $y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$.

- 9** 1) Résoudre le système :

$$\begin{cases} x' = 2y - 2z \\ y' = -2x + z \\ z' = 2x - y \end{cases}.$$

2) Prouver que les trajectoires du système différentiel ci-dessus, sont contenues dans des plans parallèles de $\mathbb{R}^3$ (on considère uniquement les solutions réelles du système).

- 10** Résoudre le système :

$$\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = y + z \\ z' = z \end{cases}.$$

- 11** Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = y + t \\ y' = x - t^2 \end{cases}.$$

- 12** Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = -x - y + 1 \\ y' = 2x + y - 1 \end{cases}.$$

- 13** Résoudre, en la transformant en un système différentiel, l'équation différentielle :

$$x'' - 10x' + 25x = -t \quad (1)$$

- 14** Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = -4x + y + z \\ y' = x - y - 2z \\ z' = -2x + y - z \end{cases} \quad (1)$$

- 15** Résoudre l'équation différentielle :

$$y' \sin x + y \cos x = \sin^3 x.$$

Déterminer les solutions maximales.

- 16** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ et α un complexe de partie réelle strictement positive tels que $\lim_{+\infty} (f + \alpha f') = 0$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.

- 17** Soit f une application continue et bornée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle : $y'' + y' + y = f(x)$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

- 18** Déterminer les fonctions à valeurs réelles solutions du système :

$$\begin{cases} tx' = x - ty \\ ty' = tx + y \end{cases} \quad (S)$$

- 19** Déterminer les fonctions à valeurs réelles solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' + y' - x \end{cases} \quad (S)$$

Annexe

L'oscillateur harmonique

Oscillateur linéaire (ou harmonique) simple

De nombreux phénomènes physiques, tels que le mouvement d'une masse suspendue à un ressort vertical et soumise à son poids et à la force de rappel du ressort, se traduisent par une équation différentielle de la forme :

$$x'' + \omega^2 x = 0.$$

La solution générale de l'équation est de la forme : $x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$. Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes a et ϕ . a est l'amplitude du mouvement et $\omega > 0$ est sa pulsation. La solution est périodique. Multiplions (1) par x' et intégrons. Nous obtenons :

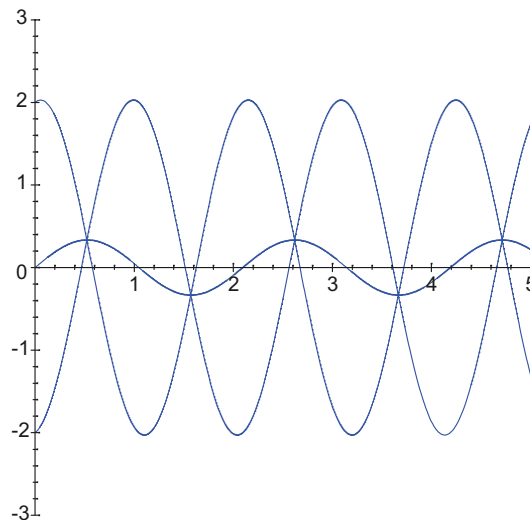
$$\frac{x'^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2} = C.$$

À un facteur près, et en convenant de prendre l'énergie potentielle nulle lorsque la masse est à sa position d'équilibre, cette équation s'interprète par la conservation de l'énergie mécanique totale du système (doc. 1).

```
> restart:with(plots):
> eq:=diff(x(t),t$2)+9*x(t):dsolve(eq,x(t));

x(t) = _C1 sin(3t) + _C2 cos(3t)

> L:=[]:
> for k from -2 to 2 by 2 do p:=dsolve({eq,x(0)=k,D(x)(0)=1},x(t),type=numeric):
> L:=L,odeplot(p,[t,x(t)],0..5,view=[0..5,-3..3],numpoints=500):od:
> display(L);
```



Doc. 1. $x'' + 9x = 0$.

Oscillateur linéaire amorti

Lorsque l'oscillateur est amorti par un frottement fluide, une force de frottement opposée au vecteur vitesse modifie l'équation différentielle qui devient :

$$x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = 0.$$

Le réel λ est positif. Le terme en $2\lambda x'$ correspond à une dissipation d'énergie. Les réels $\frac{1}{2\lambda}$ et $\frac{1}{\omega}$ sont homogènes à un temps. On les compare en introduisant le rapport $Q = \frac{\omega}{2\lambda}$, appelé facteur de qualité de l'oscillateur ou $\chi = \frac{1}{2Q}$, appelé facteur d'amortissement (sciences de l'ingénieur).

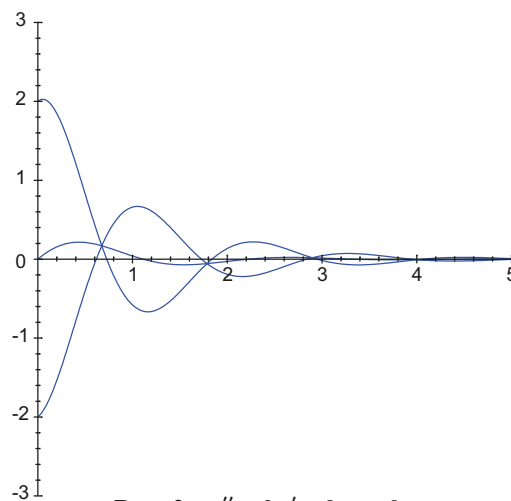
L'équation caractéristique de l'équation différentielle a pour discriminant réduit :

$$\delta = \lambda^2 - \omega^2 = \lambda^2(1 - 4Q^2).$$

■ Lorsque $\lambda < \omega$, les conditions initiales permettent de déterminer une solution de la forme :

$$x(t) = \exp(-\lambda t) \left(a \cos(\sqrt{-\delta}t) + b \sin(\sqrt{-\delta}t) \right).$$

Le régime est pseudo-périodique. L'oscillateur est amorti (doc. 2).

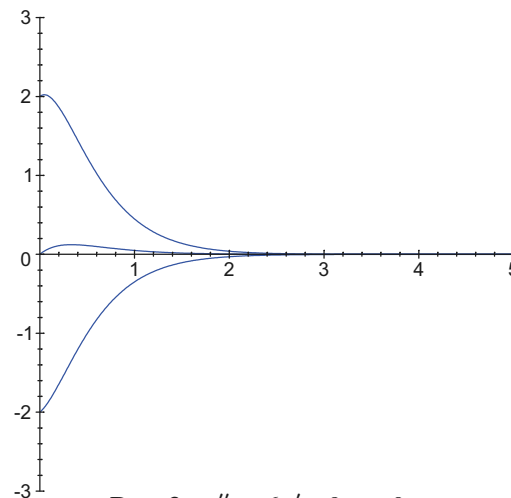


Doc. 2. $x'' + 2x' + 9x = 0$.

■ Lorsque $\omega = \lambda$, les conditions initiales permettent d'obtenir :

$$x(t) = (a\lambda t + b) \exp(-\lambda t).$$

$b = x(0)$ mesure ici l'allongement du ressort à l'état initial moins l'allongement à l'équilibre. Il n'y a pas d'oscillation. Le régime est dit apériodique critique (doc. 3).



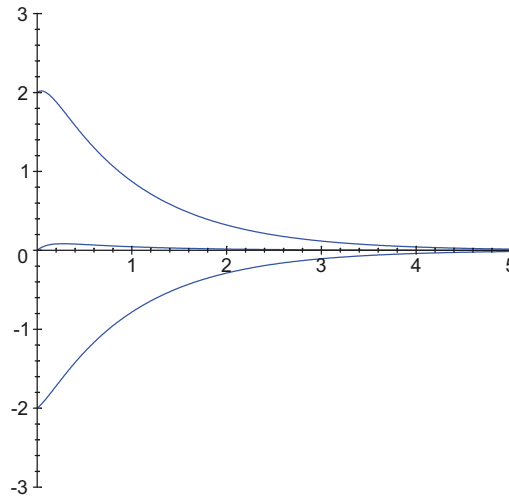
Doc. 3. $x'' = 6x' + 9x = 0$.

■ Lorsque $\omega < \lambda$, les conditions initiales permettent d'obtenir :

$$x(t) = a \exp(-\lambda t) \exp(-\sqrt{\delta} t) + b \exp(-\lambda t) \exp(\sqrt{\delta} t).$$

Il n'y a pas d'oscillation. Le régime est dit apériodique (*doc. 4*). Rapidement, $x(t)$ est à peu près égal à :

$$x(t) = b \exp\left((- \lambda + \sqrt{\delta})t\right).$$



Doc. 4. $x'' + 10x' + 9x = 0$.

Oscillateur linéaire amorti et excité

Le point en lequel est accroché le ressort est soumis à un mouvement imposé.

L'équation différentielle devient :

$$x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = f(t).$$

La solution cherchée de l'équation différentielle est la somme d'une solution x_1 correspondant au régime libre (qui tend vers 0) et d'une solution particulière x_2 . Les deux constantes de la solution x_1 s'obtiennent à partir des conditions initiales et traduisent la dépendance de cette solution vis-à-vis des conditions initiales. Assez vite, la solution devient presque égale à la solution x_2 . Le système semble oublier les conditions initiales et sa réponse est dictée par l'excitation imposée. C'est le régime forcé, le signal de sortie est dicté par l'extérieur, c'est-à-dire le signal d'entrée.

Exemple

Le signal d'entrée est sinusoïdal : $f(t) = A \cos(\alpha t)$.

À partir d'un certain temps, le signal de sortie est à peu près égal à la solution particulière :

$$x(t) = A \left(2\lambda \alpha \sin(\alpha t) + \frac{(\omega^2 - \alpha^2) \cos(\alpha t)}{(4\lambda^2 \alpha^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2)} \right)$$

Cette solution peut s'écrire sous la forme : $x(t) = GA \cos(\alpha t + \phi)$.

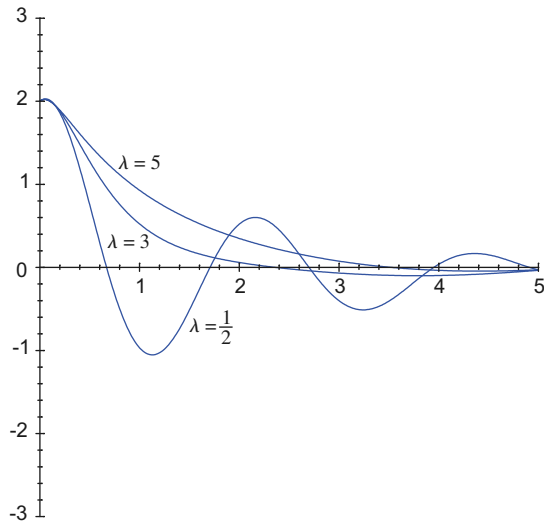
ϕ désigne le décalage de phase de l'oscillateur par rapport à l'excitateur. G et ϕ sont respectivement le module et un argument de :

$$H(\alpha) = \frac{1}{((\omega^2 - \alpha^2) + 2i\lambda\alpha)}$$

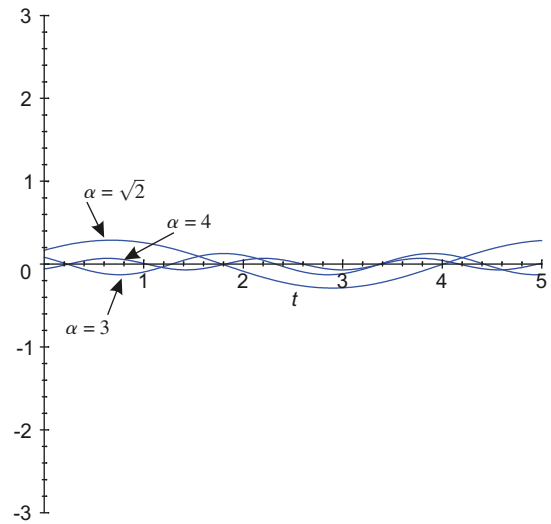
qui est la fonction de transfert.

On constate que ϕ varie de 0 à $-\pi$ lorsque α augmente et vaut $-\frac{\pi}{2}$ pour $\omega = \alpha$.

Le signal de sortie est en retard sur le signal d'entrée. De plus, si l'amortissement est faible, G devient maximum lorsque $\alpha = \omega \sqrt{1 - \frac{1}{2}Q^2}$. L'objet entre en résonance sur sa fréquence propre ω (doc. 5 et 6).



Doc. 5. $x'' + 2\lambda x' + 9x = \cos t$.



Doc. 6. $x'' + 2x' + 4x = \cos \alpha t$.

Fonctions de plusieurs variables

8

Introduction

*Les fonctions de plusieurs variables
et leurs dérivées partielles interviennent
dans de nombreux domaines.*

*En mécanique, vous avez rencontré l'équation des
cordes vibrantes ; en thermodynamique, l'équation
de la chaleur ; en électromagnétisme,
les équations de Maxwell.*

*En finance, les équations aux dérivées partielles
interviennent dans la modélisation et la
valorisation des options. Ce sont des droits
d'acquérir ou de vendre, à un prix donné, un actif
financier quelconque (les actions en bourse, les
dettes sur les marchés des taux d'intérêt ou les
monnaies sur les marchés des changes).*

*En 1973, Black et Scholes ont introduit le
raisonnement d'arbitrage qui consiste à reproduire
le profil d'un actif donné à l'aide d'une
combinaison d'autres actifs. Cette démarche
appliquée aux options conduit, après application
du lemme d'Ito, à une équation aux dérivées
partielles que l'on sait résoudre
par une formule explicite.*

*C'est sans doute la raison du succès de leur
travail. Le fait que des dizaines de milliers
d'opérateurs aient pu disposer, sur un tableur de
poche, d'une formule efficace a contribué à la
fantastique expansion de la finance moderne.*

O B J E C T I F S

- Dérivées directionnelles et dérivées partielles.
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Différentielle d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
- Matrice jacobienne d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
- Fonction différentiable en un point (programme PSI).
- Dérivées partielles d'une fonction composée.
- Gradient d'une fonction numérique.
- Recherche d'extremum local.
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et théorème de Schwarz.
- Utilisation des coordonnées polaires.
- $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.
- Exemples d'équations aux dérivées partielles.

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Dans la pratique, n et p sont inférieurs à 3.

Afin de ne pas compliquer l'exposé, nous nous autoriserons quelques abus de notation, que nous allons préciser maintenant :

- Nous noterons, pour une fonction f définie sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$:

$$f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n, \text{ au lieu de } : f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

- Pour un élément $x = (x_1, \dots, x_p)$ de U , nous noterons :

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_p), \text{ au lieu de } f((x_1, \dots, x_p)).$$

- Nous utiliserons des normes des espaces vectoriels normés, $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.

Toutes les normes de $\mathbb{R}^p$ sont équivalentes. En particulier, on rappelle que la norme $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{R}^p$ est la norme définie par :

$$\|(x_1, \dots, x_p)\|_\infty = \max \{|x_i|; 1 \leq i \leq p\}.$$

Quelques rappels

1.1. Applications coordonnées

$$\text{Soit } f : \begin{cases} U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, \dots, x_p) \longmapsto f(x) = f(x_1, \dots, x_p) \end{cases}$$

Pour tout x de U , on note $f_j(x)$ la coordonnée de $f(x)$ relativement au j -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On définit ainsi n applications de U dans $\mathbb{R}$, $f_j : U \longrightarrow \mathbb{R}$, telles que :

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) = (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_n(x_1, \dots, x_p)).$$

Les n applications f_j sont appelées **applications coordonnées** de f .

1.2. Applications partielles

Soit $a = (a_1, \dots, a_p)$ un point de l'ouvert non vide U , et k un entier compris entre 1 et p . On note :

$$U_{a,k} = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_p) \in U\}.$$

L'ensemble $U_{a,k}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

$$\text{Soit } f : \begin{cases} U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, \dots, x_p) \longmapsto f(x) = f(x_1, \dots, x_p) \end{cases}.$$

Pour tout (a, k) de $U \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on définit la k -ième **application partielle** de f au point a par :

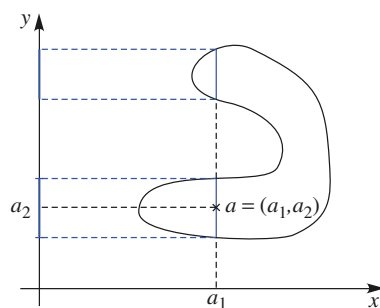
$$f_{a,k} : \begin{cases} U_{a,k} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto f_{a,k}(t) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_p) \end{cases}$$

La continuité de f sur U implique la continuité de chacune des applications partielles de f . Cependant, la réciproque est fausse.

Rapport Centrale, 2001

« Les fonctions de plusieurs variables ont fait l'objet, cette année, d'un nombre non négligeable d'interrogations. Des exercices simples [...] ont souvent transformé l'examineur en bourreau infligeant au candidat une épreuve à la limite du supportable... »

Peut-être suffit-il d'apprendre son cours sur la question et de faire quelques exercices pour surmonter une telle épreuve !



Doc. 1. $U_{a,1}$ est l'union des deux segments de $\mathbb{R}$ représentés en couleur sur l'axe des x .

Exemple

On définit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ en posant :

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

Les applications partielles en $O = (0, 0)$ sont données par :

$$f_{O,1}(t) = f(t, 0) = 0 \quad \text{et} \quad f_{O,2}(t) = f(0, t) = 0.$$

Elles sont continues, pourtant f n'est pas continue en $(0, 0)$.

2 Les dérivées partielles

2.1. Dérivée suivant un vecteur

Soit f une application de l'ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, a un point de U et $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$. Alors :

$$\exists \delta > 0 \quad \forall t \in [-\delta, \delta], \quad a + t\vec{v} \in U.$$

On peut alors considérer l'application :

$$\varphi_{\vec{v}} : \begin{cases} [-\delta, \delta] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto \varphi_{\vec{v}}(t) = f(a + t\vec{v}) \end{cases}$$

On dit que f admet une **dérivée en a selon le vecteur $\vec{v}$** (ou une **dérivée directionnelle** selon $\vec{v}$ au point a , si la fonction $\varphi_{\vec{v}}$ est dérivable en 0 :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t}$$

existe.

Lorsque $\varphi'_{\vec{v}}(0)$ existe, elle est notée $D_{\vec{v}}f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a)$.

C'est un élément de $\mathbb{R}^n$, appelé dérivée de f en a selon le vecteur $\vec{v}$.

Théorème 1

Soit $f_1, \dots, f_n$ les applications coordonnées de f . La fonction f est dérivable en a suivant le vecteur $\vec{v}$ si, et seulement si, les n fonctions coordonnées f_j sont dérivables en a suivant $\vec{v}$. Dans ce cas, on a :

$$D_{\vec{v}}f(a) = (D_{\vec{v}}f_1(a), \dots, D_{\vec{v}}f_n(a)).$$

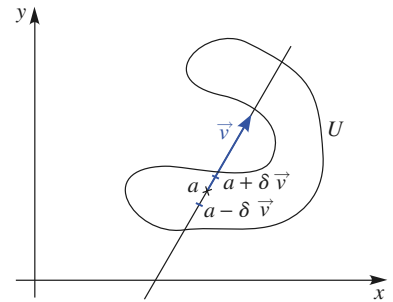
2.2. Dérivées partielles

La base canonique de $\mathbb{R}^p$ est notée $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$

On dit que f admet une **dérivée partielle** en a par rapport à la j -ième composante si f admet une dérivée en a suivant le vecteur $\vec{e}_j$, c'est-à-dire si la fonction $\varphi_{\vec{e}_j}$ admet en 0 une dérivée.

Rapport TPE, 1997

« La continuité d'une fonction de plusieurs variables réelles est trop souvent confondue avec la continuité par rapport à chaque variable ; la notion même de limite d'une fonction de plusieurs variables n'est pas toujours assimilée. »



Doc. 2.

Pour une fonction de deux ou trois variables, notée $f(x, y)$ ou $f(x, y, z)$, les dérivées partielles en un point a , lorsqu'elles existent, sont le plus souvent notées :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(a).$$

Lorsque cette dérivée partielle existe, on la note :

$$D_j f(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial e_j}(a).$$

En notant $a = (a_1, \dots, a_p)$, on a par définition :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \vec{e}_j) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_p) - f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_p)}{t}. \end{aligned}$$

Exemple

Calcul des dérivées partielles de la fonction f définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}(x_1^2 - x_3^2), x_2 \sin(x_1), \cos(x_2) \right)$$

Étant donné un point $a = (a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = (a_1, a_2 \cos(a_1), 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = (0, \sin(a_1), -\sin(a_2))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(a) = (-a_3, 0, 0).$$

Remarque

L'existence des dérivées partielles en a de f n'implique pas la continuité de f .

Ainsi, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0$$

n'est pas continue en $(0, 0)$.

Toutefois, elle admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ car :

$$\forall t \neq 0, \quad \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0, \quad \text{donc} : \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

De même :

$$\forall t \neq 0, \quad \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0, \quad \text{donc} : \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

 La notation $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est pratique et très utilisée, mais peut s'avérer ambiguë. Il faut bien comprendre que $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_p)$ signifie simplement la valeur au point $(x_1, \dots, x_p)$ de la dérivée partielle de f par rapport à la j -ième composante. La notation $D_j f$ ne présente pas cette ambiguïté.

2.3. Fonctions dérivées partielles

Si f admet une dérivée partielle par rapport à la j -ième composante en tout point de U , on définit sur U la j -ième fonction dérivée partielle :

$$D_j f : \begin{cases} U & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_p) & \longrightarrow D_j f(x_1, \dots, x_p) \end{cases}$$

Exemple

Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit G sur $\mathbb{R}^2$ en posant :

$$G(x, y) = g(x + y) + g(x - y).$$

À y fixé, $x \mapsto g(x + y) + g(x - y)$ est dérivable car g l'est. D'où :

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = g'(x + y) + g'(x - y).$$

À x fixé, $y \mapsto g(x + y) + g(x - y)$ est dérivable. On en déduit :

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = g'(x + y) - g'(x - y).$$

► **Pour s'entraîner : ex. 1.**

2.4. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

La fonction f de U dans $\mathbb{R}^n$ est dite de **classe $\mathcal{C}^1$** (ou **continûment différentiable**) sur U si toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur U .

Théorème 2

Soit f une application de U , ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Les fonctions coordonnées de f sont notées $f_1, \dots, f_n$.

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si, et seulement si, ses applications coordonnées $f_1, \dots, f_n$ le sont aussi.

Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut donc dire que les coordonnées des dérivées partielles de f sont les dérivées partielles des applications coordonnées de f .

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}.$$

À y et z fixés, l'application $\left(x \mapsto \varphi(x) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{yz(1 - x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}.$$

L'application $\frac{\partial f}{\partial x}$ est une fonction rationnelle en (x, y, z) dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^3$. Donc elle est continue sur $\mathbb{R}^3$. On procède de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$. Ceci prouve que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

2.5. L'espace vectoriel $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$

On note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 3

- $\forall (f, g) \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)^2 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall a \in U \quad \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$

$$\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_j}(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_j}(a).$$

- L'ensemble $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$.

► Pour s'entraîner : ex. 2.

3 Étude locale des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (programme PC)

3.1. Le théorème fondamental

Théorème 4

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $\vec{v} = (h_1, \dots, h_p)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$.

Alors :

- f est continue sur U ;
- f admet, en tout point a de U , une dérivée selon le vecteur $\vec{v}$:

$$D_{\vec{v}} f(a) = \sum_{j=1}^p h_j D_j f(a).$$

Il suffit de montrer que chaque fonction coordonnée de f possède cette propriété. Par conséquent, on peut se limiter au cas des fonctions de U dans $\mathbb{R}$. Dans la démonstration, on suppose que f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$. Cette simplification permet d'utiliser l'égalité des accroissements finis.

Démonstration

La démonstration de ce *théorème* n'est pas exigible des étudiants. Nous donnons ici uniquement la preuve du second point.

Les notations indispensables

Pour simplifier les notations, nous rédigerons la démonstration dans le cas $p = 2$.

La norme de $\mathbb{R}^2$ utilisée est $\|(h_1, h_2)\| = \max(|h_1|, |h_2|)$.

- Soit $\vec{v} = (h_1, h_2)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ et $a = (a_1, a_2)$ un point de U .

Puisque U est un ouvert, il existe un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre a de rayon r , $B(a, r)$, soit incluse dans U .

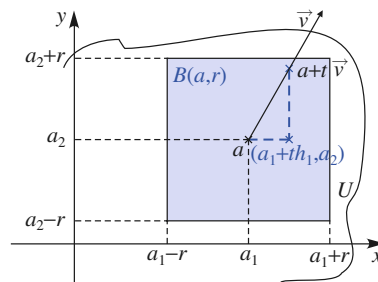
Soit $\delta = \frac{r}{\|\vec{v}\|}$. Pour tout t de $]-\delta, \delta[$, $a + t\vec{v} \in B(a, r)$.

- On fixe t dans $]-\delta, \delta[$ et on définit :

$$\psi_1(w) = f(w, a_2) \quad \text{et} \quad \psi_2(z) = f(a_1 + th_1, z).$$

Alors :

$$\psi_1 \in \mathcal{C}^1([a_1 - \delta h_1, a_1 + \delta h_1[, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \psi_2 \in \mathcal{C}^1([a_2 - \delta h_2, a_2 + \delta h_2[, \mathbb{R}).$$



Doc. 3.

De plus :

$$\psi'_1(w) = D_1 f(w, a_2) \quad \text{et} \quad \psi'_2(z) = D_2 f(a_1 + th_1, z).$$

• *Le calcul de la dérivée directionnelle*

Le réel t est toujours fixé dans $] -\delta, \delta [$.

$$f(a + t \vec{v}) - f(a) = \psi_2(a_2 + th_2) - \psi_2(a_2) + \psi_1(a_1 + th_1) - \psi_1(a_1).$$

D'après l'égalité des accroissements finis appliquée à ψ_1 et ψ_2 , il existe w entre a_1 et $a_1 + th_1$ et z entre a_2 et $a_2 + th_2$ tels que :

$$\psi_1(a_1 + th_1) - \psi_1(a_1) = th_1 \psi'_1(w) \quad \text{et} \quad \psi_2(a_2 + th_2) - \psi_2(a_2) = th_2 \psi'_2(z).$$

Donc, pour $t \neq 0$:

$$\frac{f(a + t \vec{v}) - f(a)}{t} = h_1 D_1 f(w, a_2) + h_2 D_2 f(a_1 + th_1, z).$$

La continuité de $D_1 f$ et $D_2 f$ permet de conclure que :

$$D_{\vec{v}} f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \vec{v}) - f(a)}{t} = h_1 D_1 f(a_1, a_2) + h_2 D_2 f(a_1, a_2).$$

3.2. La différentielle d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^n$.

Pour tout point a de U , l'application linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{v} = (h_1, \dots, h_p) \longmapsto D_{\vec{v}} f(a) = \sum_{j=1}^p h_j D_j f(a) \end{array} \right.$$

est appelée **différentielle** de f au point a et notée $df(a)$.

Exemple : Cas d'une fonction d'une variable réelle

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Il n'y a qu'une seule variable et la dérivée partielle est égale à la dérivée usuelle.

Pour tout a de U , on note :

$$f(a) = (f_1(a), \dots, f_n(a)).$$

On a $f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_n(a))$. La différentielle de f au point a est l'application :

$$df(a) : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ h \longmapsto hf'(a) = h(f'_1(a), \dots, f'_n(a)) \end{array} \right.$$

Rapport CCP, 1997

« Les candidats sont en général peu à l'aise en calcul différentiel. Cela est sans doute dû à la légèreté du programme sur ce point. De manière générale, les candidats n'apprécient que modérément l'analyse dans $\mathbb{R}^n$. À titre d'exemple, il leur est souvent très difficile de montrer que l'application $u \mapsto \|u\|$ (u de $\mathbb{R}^n$) est de classe $\mathcal{C}^1$. »

Il s'agit ici de la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$ qui définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Par construction, la différentielle de f au point a , $df(a)$, est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

De plus, la dérivée directionnelle de f selon $\vec{v}$ au point a est l'image du vecteur $\vec{v}$ par l'application $df(a)$:

$$D_{\vec{v}} f(a) = df(a)(\vec{v}).$$

Il est important de comprendre que $D_{\vec{v}} f(a) \in \mathbb{R}^n$ alors que $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

Rapport Mines-Ponts, 1997

« Certaines parties du programme se sont révélées mal assimilées par beaucoup de candidats. C'est le cas du calcul différentiel à plusieurs variables (où tout ce qui dépasse les dérivées partielles reste trop souvent un mystère). »

► Pour s'entraîner : ex. 3 et 4.

Application 1

Différentielle du carré de la norme euclidienne

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ est muni du produit scalaire usuel, noté $(\mid)$ et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$.

Pour tout a de $\mathbb{R}^p$, on note $f(a) = \|a\|^2$ et $g(a) = \|a\|$.

1) Montrer que l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$ et donner sa différentielle.

2) Que dire de l'application g ?

1) Calcul des dérivées partielles

Soit $a = (a_1, \dots, a_p)$ un élément de $\mathbb{R}^p$. On a :

$$f(a) = \sum_{i=1}^p a_i^2 \quad \text{et} \quad D_j f(a) = 2a_j.$$

Les $D_j f$ sont continues, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

Expression de la différentielle.

Par définition de la différentielle de f au point a :

$$df(a) : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v = (h_1, \dots, h_p) & \longmapsto & df(a)(v) = 2 \sum_{j=1}^p h_j a_j \end{cases}$$

On constate que $df(a)(v) = 2(a \mid v)$.

2) Étude de g sur $\mathbb{R}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\}$

Par définition, $g(a) = \sqrt{\sum_{i=1}^p a_i^2}$.

Donc, pour $a \neq (0, \dots, 0)$:

$$D_j g(a) = \frac{a_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^p a_i^2}} = \frac{a_j}{\|a\|}.$$

La norme $\|\cdot\|$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^p$ et ne s'annule qu'en $(0, \dots, 0)$.

On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur : $\mathbb{R}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

La différentielle de g en $a \neq (0, \dots, 0)$ est l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$:

$$dg(a) : v \longmapsto dg(a)(v) = \sum_{j=1}^p \frac{a_j h_j}{\|a\|} = \left(\frac{a}{\|a\|} \mid v \right).$$

Les dérivées partielles de la fonction g ne sont pas définies en $(0, \dots, 0)$.

4 Applications différentiables (programme PSI)

Ici, U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, f une application de U dans $\mathbb{R}^n$.

On utilise une norme de $\mathbb{R}^p$, notée $\|\cdot\|_p$, et une norme de $\mathbb{R}^n$, notée $\|\cdot\|_n$.

4.1. Définition

On dit que f est **différentiable** au point a de U lorsqu'il existe une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, notée $df(a)$, et une application ε définie au voisinage du zéro de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, telle que :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\|_p \varepsilon(h),$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \|\varepsilon(h)\|_n = 0$.

L'égalité ci-contre est aussi notée :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o(\|h\|_p).$$

(La notion de fonction vectorielle négligeable devant une fonction numérique est définie dans *H-Prépa, Analyse, chapitre 3.*)

Remarques

- Dans le cas $n = p = 1$, on retrouve la formule de Taylor à l'ordre 1 :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h \varepsilon(h).$$

La différentielle de f au point a est l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$h \longmapsto f'(a)h.$$

- Si f est différentiable en a , elle est continue en ce point. En effet, $df(a)$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie. Elle est donc continue et l'égalité :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\|_p \varepsilon(h),$$

prouve que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a).$$

Lorsque f est différentiable en a , l'application linéaire $df(a)$ est unique.

C'est l'**application linéaire tangente** à f en a ou **différentielle** de f en a .

De même qu'en physique, où un test d'homogénéité permet un contrôle aisé de nombreuses formules, en mathématiques, un « test d'appartenance » permet une première vérification des formules souvent complexes du calcul différentiel.

Ici, a et h sont dans $\mathbb{R}^p$;

$f(a+h)$, $f(a)$ et $\varepsilon(h)$ sont dans $\mathbb{R}^n$, $df(a)$ est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

Donc $df(a)(h)$ est aussi dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 5

On note $(f_1, \dots, f_n)$ les fonctions coordonnées de f et a un point de U . L'application f est différentiable en a si, et seulement si, chaque fonction coordonnée de f est différentiable en a . Dans ce cas, pour tout h de $\mathbb{R}^p$:

$$df(a)(h) = (df_1(a)(h), \dots, df_n(a)(h)).$$

4.2. Dérivées directionnelles, dérivées partielles d'une application différentiable

4.2.1 Dérivées directionnelles

Théorème 6

Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^n$, différentiable au point a .

Pour tout vecteur non nul $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^p$, f admet en a une dérivée selon le vecteur $\vec{v}$ donnée par :

$$D_{\vec{v}} f(a) = df(a)(\vec{v}).$$

Démonstration

Puisque f est différentiable en a :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\|_p \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|\varepsilon(h)\|_n = 0. \quad (1)$$

Fixons un vecteur non nul $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^p$. Pour $h = t\vec{v}$, on obtient :

$$f(a+t\vec{v}) = f(a) + t df(a)(\vec{v}) + t\alpha(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|\alpha(t)\|_n = 0. \quad (2)$$

Ceci permet de conclure.

Rapport X, 2001

« On a d'étranges surprises lorsqu'on s'aventure sur la différentiabilité des applications à plusieurs variables ; il y a des candidats, raisonnables par ailleurs, qui croient avoir appris que l'existence de dérivées directionnelles garantit la différentiabilité. (Parce qu'on est en dimension finie disent-ils !) »

4.2.2 Dérivées partielles

La base canonique de $\mathbb{R}^p$ est notée $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$.

Corollaire 6.1

Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^n$ différentiable au point a .

Les p dérivées partielles de f en a existent et :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a)(\vec{e}_i).$$

Corollaire 6.2

Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^n$ différentiable au point a .

Pour tout vecteur $\vec{v} = (h_1, \dots, h_p) = \sum_{j=1}^p h_j \vec{e}_j$ de $\mathbb{R}^p$:

$$df(a)(\vec{v}) = df(a) \left(\sum_{j=1}^p h_j \vec{e}_j \right) = \sum_{j=1}^p h_j df(a)(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

La formule :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\|_p \varepsilon(h)$$

est une formule de Taylor à l'ordre 1 pour les fonctions de plusieurs variables.

D'un point de vue pratique, elle indique que, pour h petit, l'accroissement de f en a :

$$f(a+h) - f(a)$$

est égal, en première approximation, à :

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Une application intéressante de ceci est le calcul d'erreurs pour les fonctions de plusieurs variables.

Application 2

Exemples de fonctions non différentiables

On définit les applications f et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ en posant :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

et

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$ alors qu'elle admet des dérivées partielles en ce point.

2) a) Montrer que g est continue en $(0, 0)$ et admet, en ce point, des dérivées directionnelles selon tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que, cependant, g n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

1) L'application f a déjà été rencontrée.

Elle n'est pas continue en $(0, 0)$, donc elle n'est pas différentiable en ce point.

Elle admet des dérivées partielles en $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

2) a) • Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$|g(x, y)| \leq |x|.$$

D'où la continuité de g en $(0, 0)$.

• On note $a = (0, 0)$, $v = (h_1, h_2)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ et t un réel non nul.

$$\frac{g(a+tv) - g(a)}{t} = \frac{g(th_1, th_2)}{t} = \frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2}.$$

Donc la fonction g admet, en $(0, 0)$, une dérivée selon le vecteur $v = (h_1, h_2)$ donnée par :

$$D_v g(0, 0) = \frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2} \quad (1)$$

b) En particulier :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Si g était différentiable en $(0, 0)$, on aurait :

$$D_v g(0, 0) = h_1 \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) + h_2 \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = h_1 \quad (2)$$

Il y a contradiction entre (1) et (2).

4.3. Le théorème fondamental

Théorème 7

Si f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^n$, alors f est différentiable en tout point de U .

Démonstration

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, les dérivées partielles de f existent et, pour prouver que f est différentiable en a , il suffit de prouver que :

$$f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \|h\|_p \varepsilon(h),$$

où ε est une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, définie au voisinage de zéro, et telle que $\lim_{h \rightarrow 0} |\varepsilon(h)| = 0$.

• Les notations

La norme de $\mathbb{R}^p$ utilisée est $\|(h_1, \dots, h_p)\|_p = \max_i |h_i|$.

Soit $a = (a_1, \dots, a_p)$ un point de l'ouvert U .

Il existe un réel $r > 0$ tel que, pour tout h de $\mathbb{R}^p$ tel que $\|h\|_p < r$, $a+h \in U$.

Soit $h = (h_1, \dots, h_p)$ un tel vecteur de $\mathbb{R}^p$. Pour tout i de $\llbracket 1, p \rrbracket$, on pose :

$$\forall w \in]a_i - r, a_i + r[, \psi_i(w) = f(a_1 + h_1, \dots, a_{i-1} + h_{i-1}, w, a_{i+1}, \dots, a_p)$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , $\psi_i \in \mathcal{C}^1(]a_i - r, a_i + r[, \mathbb{R})$ et :

$$\psi'_i(w) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1 + h_1, \dots, a_{i-1} + h_{i-1}, w, a_{i+1}, \dots, a_p) \quad (1)$$

• Le calcul

On a :

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^p [\psi_j(a_j + h_j) - \psi_j(a_j)] \quad (2)$$

D'après l'égalité des accroissements finis, il existe w_j entre $a_j + h_j$ et a_j tel que :

$$\psi_j(a_j + h_j) - \psi_j(a_j) = h_j \psi'_j(w_j).$$

Il suffit de montrer que chaque fonction coordonnée de f possède cette propriété. Par conséquent, on peut se limiter au cas des fonctions de U dans $\mathbb{R}$. Dans la démonstration, on suppose que f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$. Cette simplification permet d'utiliser l'égalité des accroissements finis.

On convient que :
pour $i = 1$:

$$\psi_1(w) = f(w, a_2, \dots, a_p);$$

pour $i = p$:

$$\psi_p(w) = f(a_1 + h_1, \dots, a_{p-1} + h_{p-1}, w).$$

On déduit de (1) et (2) que :

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \\ = \sum_{j=1}^p h_j \left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1+h_1, \dots, a_{j-1}+h_{j-1}, w_j, a_{j+1}, \dots, a_p) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right]. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\left| f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right| \leq \|h\|_p R(h) \quad (3)$$

où :

$$R(h) = \sum_{j=1}^p \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1+h_1, \dots, a_{j-1}+h_{j-1}, w_j, a_{j+1}, \dots, a_p) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right|.$$

La continuité des dérivées partielles permet de prouver que : $\lim_{h \rightarrow 0} |R(h)| = 0$ et d'en déduire la différentiabilité de f au point a .

Exemple

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ est muni du produit scalaire usuel, noté $(\mid)$, et de la norme associée, notée $\| \cdot \|$.

Pour tout a de $\mathbb{R}^p$, on note $f(a) = \|a\|^2$. On a :

$$f(a+h) = \|a+h\|^2 = f(a) + 2(a \mid h) + \|h\|^2$$

La fonction $h \mapsto 2(a \mid h)$ est linéaire et $\|h\|^2 = \|h\| \varepsilon(h)$, avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Ceci prouve que f est différentiable en a et que :

$$df(a)(h) = 2(a \mid h).$$

► Pour s'entraîner : ex. 3 à 5.

5 Matrice jacobienne et jacobien

Les vecteurs de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ sont notés comme des vecteurs colonnes.

5.1. Matrice jacobienne

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^n$ et a un point de U .

On note $f_1, f_2, \dots, f_n$ les fonctions composantes de f et $(e_1, \dots, e_p)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$. On sait que :

$$f(a) = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_n(a) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad df(a)(e_j) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \end{pmatrix}.$$

Gustav Jacobi (1804-1851), mathématicien allemand et pédagogue renommé.

Ses travaux sur les fonctions elliptiques (*Fundamenta nova theoria functionum ellipticarum*, 1829) sont d'une grande importance en théorie des nombres.

Dans un long mémoire de 1841 (*De determinantibus functionalibus*), il étudie le déterminant fonctionnel qui porte maintenant son nom.

La **matrice jacobienne de f** au point a est la matrice :

$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

On remarque que la j -ième colonne de $Jf(a)$ est $df(a)(e_j)$. On en déduit que :

La matrice, relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$, de la différentielle de f au point a est la matrice jacobienne de f en a .

Exemples

■ Soit l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, définie par $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - 2y \\ x + y^3 \\ -3xy \end{pmatrix}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \\ -3y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3y^2 \\ -3x \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice jacobienne de f au point (x, y) est :

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2 \\ 1 & 3y^2 \\ -3y & -3x \end{pmatrix}.$$

■ Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à A .

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^p$, on a : $f(X) = AX = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ \vdots \\ f_n(X) \end{pmatrix}$

avec, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$f_i(X) = \sum_{j=1}^p a_{ij}x_j,$$

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$ et que, pour tout X de $\mathbb{R}^p$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X) = a_{ij}.$$

Ainsi :

$$\forall X \in \mathbb{R}^p \quad Jf(X) = A.$$

5.2. Jacobien

Dans ce paragraphe, $n = p$ et U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^n$ et a un point de U .

Le **jacobien** de f au point a est le déterminant de la matrice jacobienne de f en ce point.

Les applications composantes de f étant notées $f_1, \dots, f_n$, le jacobien de f au point a est noté :

$$\text{Det}[Jf(a)] = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a).$$

Cet exemple est très important. On peut aussi dire que, pour toute application linéaire f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, la différentielle de f en un point quelconque x de $\mathbb{R}^p$ est l'application linéaire f :

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \quad df(x) = f.$$

En particulier, la matrice jacobienne de $\text{Id}_{\mathbb{R}^p}$ est la matrice identité I_p .

Le jacobien existe, je l'ai rencontré !

Rapport X, 2001

« Une majorité de candidats ne parvient pas à un calcul juste du jacobien de U . »

Exemples

■ Considérons l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ x + y \end{pmatrix}.$$

On a : $Jf(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\text{Det}[Jf(x, y)] = y - x$.

■ Soit l'application p de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

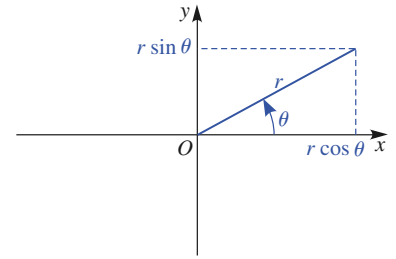
$$p(r, \theta) = \begin{pmatrix} x(r, \theta) \\ y(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne de p est :

$$Jp(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

et son jacobien :

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$



Doc. 4.

■ Étudions les coordonnées sphériques. Soit S l'application :

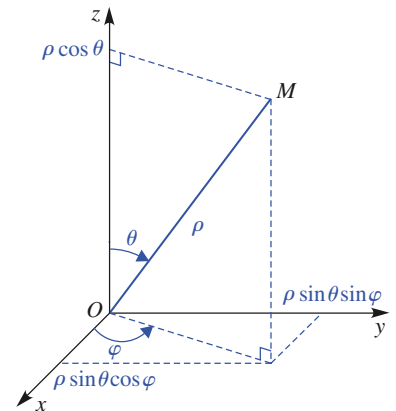
$$S : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \theta, \varphi) \longmapsto S(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} x(\rho, \theta, \varphi) \\ y(\rho, \theta, \varphi) \\ z(\rho, \theta, \varphi) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \rho \sin \theta \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

L'application S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et sa matrice jacobienne est :

$$JS(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Son jacobien est :

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \theta.$$



Doc. 5.

► Pour s'entraîner : ex. 6 et 7.

6 Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$

Dans ce paragraphe, U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$.

6.1. Combinaison linéaire d'applications continûment différentiables

Les paragraphes précédents nous apprennent que $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$ et que :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)^2 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall a \in U \quad \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$$

$$\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_j}(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_j}(a).$$

Le théorème 8 en découle.

Théorème 8

Soit f et g deux applications continûment différentiables de U dans $\mathbb{R}^n$, α et β deux réels quelconques. La différentielle et la matrice jacobienne de la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ en un point a de U se calculent par les formules :

$$d(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha df(a) + \beta dg(a),$$

$$J(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha Jf(a) + \beta Jg(a).$$

6.2. Composée d'applications continûment différentiables

Théorème 9

Soit f une application continûment différentiable sur l'ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans un ouvert V de $\mathbb{R}^n$, et g une application continûment différentiable de V dans $\mathbb{R}^m$.

Les fonctions composantes de f sont notées $f_1, \dots, f_n$ et leurs dérivées partielles $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$, avec $(k, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$.

Les fonctions composantes de g sont notées $g_1, \dots, g_m$ et leurs dérivées partielles $\frac{\partial g_i}{\partial y_k}$, avec $(i, k) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$.

Alors :

- $g \circ f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^m)$,
- $\forall a \in U \quad d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$,
- $\forall a \in U \quad J(g \circ f)(a) = Jg(f(a))Jf(a)$,
- $\forall a \in U \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\frac{\partial g_i \circ f}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

Une traduction plus algébrique de ce *théorème* est que, pour tout a de U , l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \\ f \longmapsto df(a) \end{cases}$$

est linéaire.

La formule :

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

généralise la formule de dérivation des fonctions composées d'une variable :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Le programme *PSI* permet de démontrer ce *théorème* en commençant par l'égalité concernant les différentielles. Pour cela on utilisera les formules de Taylor à l'ordre 1 :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\|_p \varepsilon(h),$$

$$g(b+k) = b + dg(b)(k) + \|k\|_n \delta(k),$$

avec :

$$b = f(a) \quad \text{et} \quad b+k = f(a+h).$$

En procédant ainsi, la formule sur les matrices jacobienes est une conséquence de l'égalité sur les différentielles. L'égalité sur les dérivées partielles est une conséquence de l'égalité sur les matrices jacobienes.

La continuité des dérivées partielles de $g \circ f$ découle de leurs expressions. Le programme de la section *PC* impose de commencer par le calcul des dérivées partielles. C'est la méthode de la démonstration proposée ci-après.

Démonstration

La base canonique de $\mathbb{R}^p$ est notée $(e_1, \dots, e_p)$.

Soit a dans U et $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$. On étudie la limite en 0 de :

$$\frac{g_i \circ f(a + te_j) - g_i \circ f(a)}{t} = \frac{g_i(f_1(a + te_j), \dots, f_n(a + te_j)) - g_i(f_1(a), \dots, f_n(a))}{t}$$

• Décomposition en une somme de n termes

Puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, respectivement sur les ouverts U et V , il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout t de $] -\delta, \delta [$ et tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction Ψ_k , avec :

$$\Psi_k(y) = g_i(f_1(a + te_j), \dots, f_{k-1}(a + te_j), y, f_{k+1}(a), \dots, f_n(a)),$$

soit définie sur un intervalle contenant $f_k(a + te_j)$ et $f_k(a)$.

Alors :

$$g_i \circ f(a + te_j) - g_i \circ f(a) = \sum_{k=1}^n [\Psi_k(f_k(a + te_j)) - \Psi_k(f_k(a))].$$

• Utilisation de l'égalité des accroissements finis

Le réel t étant fixé dans $] -\delta, \delta [$, on peut appliquer l'égalité des accroissements finis à la fonction Ψ_k . Il existe un réel y_k entre $f_k(a + te_j)$ et $f_k(a)$ tel que :

$$\Psi_k(f_k(a + te_j)) - \Psi_k(f_k(a)) = \Psi'_k(y_k)[f_k(a + te_j) - f_k(a)].$$

$$\text{D'où : } \frac{g_i \circ f(a + te_j) - g_i \circ f(a)}{t} = \sum_{k=1}^n \Psi'_k(y_k) \frac{f_k(a + te_j) - f_k(a)}{t} \quad (1)$$

• Passage à la limite

Puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Psi'_k(y_k) = \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f_1(a), \dots, f_n(a)) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_k(a + te_j) - f_k(a)}{t} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

L'égalité (1) permet de conclure que $g_i \circ f$ admet une j -ième dérivée partielle :

$$\frac{\partial g_i \circ f}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \quad (2)$$

Le reste du *théorème* découle de cette formule.

6.3. Composition par une fonction d'une variable

Le cas $p = 1$ donne la formule suivante, sans doute l'une des plus utilisées dans les calculs sur les fonctions de plusieurs variables (*doc.* 6).

Corollaire 9.1

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans V et g une application de classe $\mathcal{C}^1$ de V dans $\mathbb{R}^m$. Alors :

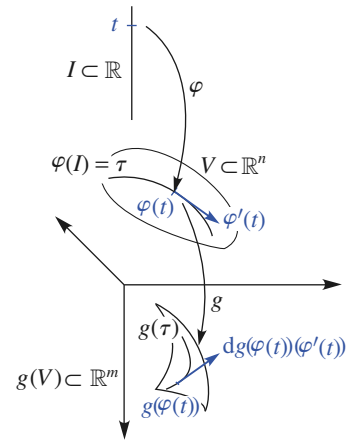
- $g \circ \varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^m)$,
- $\forall t \in I \quad (g \circ \varphi)'(t) = dg(\varphi(t))(\varphi'(t))$.

En notant $\varphi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, cette égalité s'écrit aussi :

$$\frac{d}{dt} g(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \frac{dx_j}{dt}(t).$$

Rapport Mines-Ponts, 2001

« ...le théorème donnant la matrice jacobienne d'une fonction composée. C'est grâce à lui que les candidats peuvent calculer les dérivées partielles. »



Doc. 6.

La formule ci-contre reste valable lorsque φ est définie sur un intervalle du type $[t, b [$ (respectivement : $] a, t]$). Dans ce cas, elle donne la dérivée à droite (respectivement : à gauche) de $g \circ \varphi$ en t .

Exemple

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique, noté $\cdot$; la norme associée est $\|\cdot\|$ et $O = (0, \dots, 0)$. Un point mobile M de $\mathbb{R}^n$ se déplace selon une loi horaire de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\varphi : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto \overrightarrow{OM}(t) \end{cases}$$

Calculons $\frac{d}{dt} \|\overrightarrow{AM}(t)\|$ lorsque A est un point fixe qui n'est pas sur la trajectoire du point mobile M .

On pose $\psi(t) = \overrightarrow{AM}(t)$ et $g(\vec{v}) = \|\vec{v}\|$. On a $\|\overrightarrow{AM}(t)\| = g \circ \psi(t)$.

La fonction g est classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. La fonction ψ ne s'annule pas puisque A n'est pas sur la trajectoire du point mobile M .

Enfin $\psi(t) = \overrightarrow{AO} + \varphi(t)$, donc ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\psi'(t) = \varphi'(t) = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t)$.

On en déduit :

$$\frac{d}{dt} \|\overrightarrow{AM}(t)\| = dg(\psi(t))(\psi'(t)) = \frac{\overrightarrow{AM}(t)}{\|\overrightarrow{AM}(t)\|} \cdot \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t).$$

L'étude de la fonction $g : v \mapsto \|\vec{v}\|$, et le calcul de sa différentielle a été fait à l'application 1.

7 Fonctions numériques continûment différentiables

De nombreux résultats sur les fonctions à valeurs vectorielles sont démontrés en étudiant les fonctions coordonnées qui sont à valeurs réelles.

Ce paragraphe étudie les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Leur ensemble est noté $\mathcal{C}^1(U)$.

7.1. Le gradient

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ est muni du produit scalaire canonique, noté $(\mid)$, pour lequel la base canonique est une base orthonormée.

Soit f un élément de $\mathcal{C}^1(U)$. Pour tout a de U , la différentielle de f en a est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$. Donc, il existe un unique vecteur de $\mathbb{R}^p$, noté $\overrightarrow{\text{grad}}f(a)$ ou $\text{grad } f(a)$ tel que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^p \quad df(a)(h) = (\overrightarrow{\text{grad}}f(a) \mid h).$$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}f(a)$ est appelé **gradient de f** au point a .

$h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$, alors $df(a)(h) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$. Donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right).$$

Cette définition du gradient ne dépend pas de la base utilisée. C'est pourquoi on l'appelle « la définition intrinsèque du gradient ».

La formule du gradient de f donnée ci-contre est la plus utilisée. Elle fournit les coordonnées du gradient dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Ce n'est pas une définition intrinsèque puisqu'elle dépend de la base utilisée pour faire les calculs.

Exemple

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\cdot$ et $\vec{u}$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{u}$.

On note $\vec{u} = (a_1, \dots, a_p)$. Pour tout $\vec{x} = (x_1, \dots, x_p)$, on a :

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^p a_i x_i.$$

Donc : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = a_i$ et $\vec{\text{grad}} f(\vec{x}) = (a_1, \dots, a_p) = \vec{u}$.

Rapport Centrale, 1998

« Le gradient en coordonnées polaires est au programme. »

Application 3

Le gradient et les coordonnées polaires

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Sa base canonique est notée $(\vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout réel θ , on note :

$$\vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

et

$$\vec{v}(\theta) = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}.$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Le but de cette application est d'exprimer $\vec{\text{grad}} f(x, y)$ en fonction des coordonnées polaires (r, θ) de (x, y) . Pour tout (r, θ) de $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$, on pose :

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (1)$$

1) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées partielles en fonction de celles de f .

2) En déduire une expression de $\vec{\text{grad}} f(x, y)$ en fonction des dérivées partielles de g et des coordonnées polaires de (x, y) .

1) Soit p l'application définie sur $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$ par :

$$p : (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Cette application est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$.

$g = f \circ p$, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$ et, en tout point (r, θ) de cet ensemble :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \sin \theta \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) r \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

2) On déduit de (2) que, pour tout

$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \sin \theta \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \cos \theta \end{cases} \quad (3)$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}} f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \vec{j} \\ &= \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \vec{u}(\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \vec{v}(\theta). \end{aligned}$$

7.2. L'algèbre $\mathcal{C}^1(U)$

L'ensemble U est toujours un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$.

Théorème 10

Soit f et g deux éléments de $\mathcal{C}^1(U)$ et a un point de U .

- Pour tout vecteur non nul $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^p$, la fonction produit fg admet une dérivée directionnelle selon $\vec{v}$ au point a :

$$D_{\vec{v}} fg(a) = f(a)D_{\vec{v}} g(a) + g(a)D_{\vec{v}} f(a).$$

- Pour tout j de $[[1, p]]$, la fonction produit fg admet une dérivée partielle en a par rapport à la j -ième composante :

$$\frac{\partial fg}{\partial x_j}(a) = f(a)\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) + g(a)\frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

- La fonction produit fg est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et de plus :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}} fg(a) &= f(a)\overrightarrow{\text{grad}} g(a) + g(a)\overrightarrow{\text{grad}} f(a) \\ df(a) &= f(a) dg(a) + g(a) df(a).\end{aligned}$$

On retrouve ici la formule de dérivation d'un produit.

Algébriquement parlant, ceci permet de conclure que l'ensemble $\mathcal{C}^1(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ est une sous-algèbre de la $\mathbb{R}$ -algèbre $\mathcal{C}^0(U)$ des fonctions continues de U dans $\mathbb{R}$.

Théorème 11

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ et a un point de U tel que $f(a) \neq 0$.

- Il existe une boule ouverte B , de centre a , incluse dans U et telle que :

$$\forall b \in B \quad f(b) \neq 0.$$

- Pour tout vecteur non nul $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^p$, la fonction $\frac{1}{f}$ admet une dérivée directionnelle selon $\vec{v}$ au point a :

$$D_{\vec{v}} \frac{1}{f}(a) = \frac{-1}{f^2(a)} D_{\vec{v}} f(a).$$

- Pour tout j de $[[1, p]]$, la fonction $\frac{1}{f}$ admet une dérivée partielle en a par rapport à la j -ième composante :

$$\frac{\partial(1/f)}{\partial x_j}(a) = \frac{-1}{f^2(a)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

- La fonction $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur B et de plus :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{f}(a) &= \frac{-1}{f^2(a)} \overrightarrow{\text{grad}} f(a) \\ d\frac{1}{f}(a) &= \frac{-1}{f^2(a)} df(a).\end{aligned}$$

Traduction algébrique de ce résultat : les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{C}^1(U)$ sont les fonctions qui ne s'annulent en aucun point de U .

7.3. Extremum local d'une fonction numérique

U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$.

Une norme de $\mathbb{R}^p$, notée $\| \cdot \|$, est choisie et la boule ouverte de $\mathbb{R}^p$, de centre a et de rayon r , relativement à cette norme est notée $B(a, r)$.

- La fonction f admet un **maximum local** au point a de U si :

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in B(a, r) \cap U \quad f(x) \leq f(a).$$

Dans ce cas, le maximum local est le réel $f(a)$.

- La fonction f admet un **minimum local** au point a de U si :

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in B(a, r) \cap U \quad f(x) \geq f(a).$$

Dans ce cas, le minimum local est le réel $f(a)$.

- La fonction f admet un **extremum local** au point a de U si f admet un minimum local ou un maximum local en a .

Théorème 12

Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et a un point de U .

Si f admet un extremum local en a alors $\overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \overrightarrow{0}$.

Démonstration

Par contraposée, soit a un point de U tel que :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(a) \neq \overrightarrow{0}.$$

On va prouver que f n'a pas d'extremum local au point a .

Le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^p$ est noté $(\cdot | \cdot)$, la norme associée $\| \cdot \|$.

Il existe un vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^p$ tel que $(\overrightarrow{\text{grad}} f(a) | \overrightarrow{v}) \neq 0$ et :

$$f(a + t\overrightarrow{v}) = f(a) + t(\overrightarrow{\text{grad}} f(a) | \overrightarrow{v}) + t\varepsilon(t)$$

où ε est une fonction définie sur un intervalle $]-\delta, \delta[$ et telle que $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$.

Puisque $(\overrightarrow{\text{grad}} f(a) | \overrightarrow{v}) \neq 0$, pour t suffisamment proche de 0,

$$\text{sgn}[f(a + t\overrightarrow{v}) - f(a)] = \text{sgn}(t)\text{sgn}(\overrightarrow{\text{grad}} f(a) | \overrightarrow{v}).$$

Donc $f(a + t\overrightarrow{v}) - f(a)$ change de signe avec t et f n'a pas d'extremum local en a .

Exemples

■ La fonction f définie par $f(x, y) = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le disque ouvert $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 49\}$. Son gradient est nul en $(0, 0)$ et en ce point f admet un maximum local (il s'agit même d'un maximum global) (doc. 7.).

■ La fonction g définie par $g(x, y) = x^2 - y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Son gradient est nul en $(0, 0)$ mais g n'a pas d'extremum local en ce point (doc. 8.).

Les deux surfaces représentées sur ces documents sont des quadriques. Lesquelles ?

Rapport ENS, 2000

« Les conditions nécessaires et / ou suffisantes pour un extremum sont souvent mal comprises (y compris pour les fonctions d'une variable : un nombre trop élevé de candidats pense encore que si la dérivée s'annule la fonction a un extremum local).

Plus généralement, les fonctions de plusieurs variables semblent être un obstacle insurmontable pour beaucoup de candidats. »

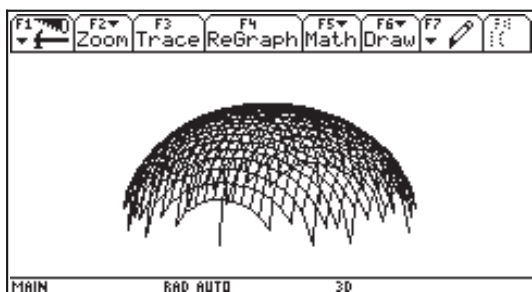
Ceci est une condition nécessaire mais non suffisante d'existence d'un extremum local.

Nous avons vu, dans *H-Prépa, Analyse*, qu'une fonction numérique continue sur un compact K de $\mathbb{R}^p$, est bornée et atteint ses bornes. Dans ce cas, les extrema de f existent. Ce sont même des extrema globaux :

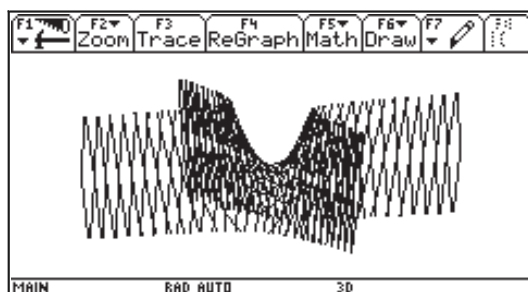
$$\exists x_0 \in K \quad \forall x \in K \quad f(x) \leq f(x_0),$$

$$\exists x_1 \in K \quad \forall x \in K \quad f(x) \geq f(x_1).$$

Ce résultat est utile, mais attention ! un compact de $\mathbb{R}^p$ n'est pas un ouvert.



Doc. 7.



Doc. 8.

► Pour s'entraîner : ex. 9 et 10.

Application 4

Un exemple de calcul d'extrema locaux

Déterminer les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2.$$

• Étude du gradient de f

$$\vec{\text{grad}} f(x, y) = (4x^3 - 8(x - y), 4y^3 + 8(x - y)).$$

Le gradient de f s'annule en trois points de $\mathbb{R}^2$: $(0, 0)$, $(2, -2)$ et $(-2, 2)$.

• Étude en $(0, 0)$

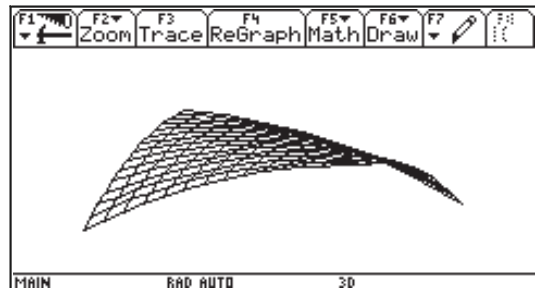
$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x, x) = 2x^4 > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x, -x) = 2x^4 - 16x^2 = 2x^2(x^2 - 8).$$

Donc :

$$\forall x \in]-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}[\setminus \{0\}, \quad f(x, -x) < 0.$$

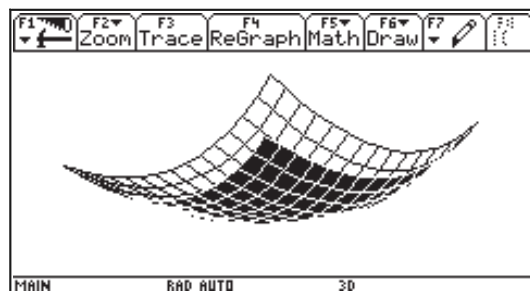
Finalement, l'expression $f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y)$ n'est de signe constant dans aucune boule de centre $(0, 0)$. f n'a pas d'extremum local en $(0, 0)$.



Doc. 9. Changement de signe de la fonction f au voisinage de $(0, 0)$.

• Étude en $(2, -2)$ et $(-2, 2)$

Puisque $f(-x, -y) = f(x, y)$, si f a un minimum local en $(2, -2)$, elle en a aussi un en $(-2, 2)$.



Doc. 10. Tracé de $z = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$ pour (x, y) dans $[1,5; 2,5] \times [-2,5; -1,5]$.

Prouver que f a un minimum local en $(2, -2)$, c'est trouver $r > 0$ tel que, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$

$$\|(h, k)\| \leq r \Rightarrow f(2 + h, -2 + k) - f(2, -2) \geq 0.$$

En posant $(h, k) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & f(2 + h, -2 + k) - f(2, -2) \\ &= (20h^2 + 8hk + 20k^2) + (8h^3 - 8k^3) + (h^4 + k^4) \\ &= 20\rho^2 \left(1 + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{5} \right) + 8\rho^3 (\cos^3 \theta - \sin^3 \theta) \\ &\quad + \rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$f(2+h, -2+k) - f(2, -2) \geq 16\rho^2 - 16\rho^3.$$

$$\|(h, k)\| = \rho < 1 \Rightarrow f(2+h, -2+k) - f(2, -2) \geq 0.$$

Donc f a un minimum local au point $(2, -2)$.

Ce minimum vaut $f(2, -2) = -32$.

Par symétrie, il en est de même en $(-2, 2)$.

8 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

8.1. Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ et un entier $k \geq 2$. On définit par récurrence une **application de classe $\mathcal{C}^k$** sur U de la manière suivante.

L'application f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et si ses fonctions dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur U .

Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U , les fonctions dérivées partielles des fonctions dérivées partielles de f sont notées de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} (a).$$

Les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ sont appelées fonctions **dérivées partielles d'ordre 2** de f .

De manière analogue, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U , on définit les fonctions dérivées partielles d'ordre k de f de la manière suivante :

pour tout k -uplet $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ de $\llbracket 1, p \rrbracket^k$,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \right) \right) \right).$$

f est dite **de classe $\mathcal{C}^\infty$** sur U lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$.

8.2. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$.

- L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}^n$ est noté $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$.
- L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}^k(U)$.

Théorème 13

Soit un entier $k \geq 1$, (f, g) dans $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)^2$ et (α, β) dans $\mathbb{R}^2$.

Pour tout k -uplet $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ de $\llbracket 1, p \rrbracket^k$,

$$\frac{\partial^k (\alpha f + \beta g)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \alpha \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} + \beta \frac{\partial^k g}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}.$$

Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^n$ dont les fonctions composantes sont notées $f_1, \dots, f_n$. Il est immédiat que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si, et seulement si, chaque fonction composante de f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U . De plus, dans ce cas, les fonctions composantes de $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$ sont les $\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$ avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

L'ensemble $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$.

Pour tout j de $\llbracket 1, p \rrbracket$, l'application $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}$ est une application linéaire de $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(U, \mathbb{R}^n)$.

Théorème 14

Soit un entier $k \geq 1$.

- Le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U .
- L'ensemble $\mathcal{C}^k(U)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(U)$.

Le point clé est la formule :

$$\frac{\partial fg}{\partial x_{i_k}} = f \frac{\partial g}{\partial x_{i_k}} + g \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}.$$

Théorème 15

Soit un entier $k \geq 1$, une application f de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans un ouvert V de $\mathbb{R}^n$, et une application g de classe $\mathcal{C}^k$ de V dans $\mathbb{R}^m$.

Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U .

Le point clé est la formule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_i \circ f}{\partial x_j} &= \sum_{q=1}^n \left[\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_q} \circ f \right) \frac{\partial f_q}{\partial x_j} \right]. \end{aligned}$$

Exemples

- Une fonction polynôme de n variables est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
- De même, pour une fonction rationnelle des n variables $x_1, \dots, x_n$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{Q(x_1, \dots, x_n)}$$

où P et Q sont deux fonctions polynômes en $x_1, \dots, x_n$.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^n \setminus Z(Q)$, avec :

$$Z(Q) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid Q(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

► Pour s'entraîner : ex. 11 et 12.

8.3. Le théorème de Schwarz

Le *théorème de Schwarz* peut servir à établir qu'une fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 2$) comme le montre l'exemple suivant.

Dans ce paragraphe, U est encore un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$.

Conformément au programme, nous admettrons le *théorème* suivant :

Théorème 16 : Théorème de Schwarz

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}^n$, alors :

$$\forall a \in U \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

*Ne pas confondre **Hermann Schwarz** (1843-1921), auquel nous devons ce théorème et dont le travail porta essentiellement sur les fonctions de plusieurs variables, la théorie du potentiel et les surfaces, avec **Laurent Schwartz**, mathématicien français né en 1915, et auteur de la théorie des distributions, qui lui valut la médaille Fields en 1950.*

En d'autres termes, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^2$, pour calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f , l'ordre de dérivation n'importe pas.

Ce résultat se généralise de façon immédiate à un ordre de dérivation $k \geq 2$, dès lors que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U .

Exemple

Dans cet exemple, on étudie une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, ayant des dérivées partielles d'ordre 2 en tout point et telle que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Le *théorème de Schwarz* permet de conclure, par contraposée, que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

• Étude sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car c'est une fonction rationnelle des deux variables (x,y) dont le dénominateur ne s'annule que pour $(x,y) = (0,0)$.

• Continuité de f en $(0,0)$

Il est immédiat que, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$:

$$|f(x,y)| \leq |xy|.$$

On en déduit la continuité de f en $(0,0)$.

• Dérivées partielles de f en $(0,0)$

Pour tout $x \neq 0$, $\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$ et pour tout $y \neq 0$,

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

• Continuité des dérivées partielles en $(0,0)$

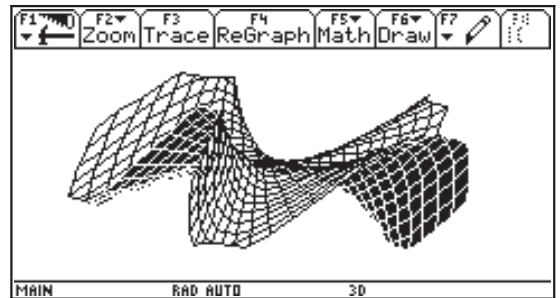
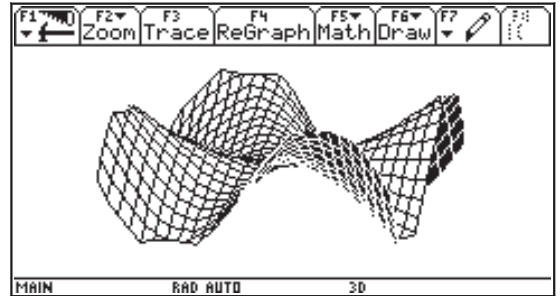
Soit $(x,y) \neq (0,0)$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y[(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - 2x^2(x^2 - y^2)]}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x[(x^2 - 3y^2)(x^2 + y^2) - 2y^2(x^2 - y^2)]}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant, par exemple, les coordonnées polaires :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| \leq 6\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \leq 6\sqrt{x^2 + y^2}.$$

La continuité des dérivées partielles de f en $(0,0)$ en découle.



Doc. 11. Tracés de $z = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ pour (x,y) dans $[-10,10] \times [-10,10]$ sous deux angles de vues différents.

Cet exemple est dû à **Peano** (1858-1935), dont le travail pour fonder rigoureusement les mathématiques sur un ensemble d'axiomes cohérents est très important. On lui doit l'introduction en mathématiques de nombreux symboles tels que : $\in, \cup, \cap$ et les axiomes qui définissent rigoureusement l'ensemble $\mathbb{N}$ et permettent notamment la démonstration par récurrence.

- Étude des dérivées partielles d'ordre deux en $(0, 0)$

D'une part, $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x} = +1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = +1$.

D'autre part, $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = -1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$.

• Conclusion

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, mais elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Application 5

Le laplacien et les coordonnées polaires

Dans cette application, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}$. Le laplacien de f est la fonction Δf définie par :

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Sa base canonique est notée $(\vec{i}, \vec{j})$. Pour tout réel θ , on note :

$$\vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

et

$$\vec{v}(\theta) = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}.$$

Pour tout (r, θ) de $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$, on pose :

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Le but de cette application est d'exprimer $\Delta f(x, y)$ en fonction des coordonnées polaires (r, θ) de (x, y) et des dérivées partielles de g .

1) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées partielles d'ordre 2,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

en fonction de celles de f .

2) En déduire une expression de $\Delta f(x, y)$ en fonction des dérivées partielles de g , de ρ et de θ .

1) L'application $p : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$ et $g = f \circ p$.

Donc g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$.

Pour tout (r, θ) de $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \sin \theta \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) r \cos \theta \end{cases}$$

On fixe θ dans $\mathbb{R}$. L'application définie par :

$$r \mapsto \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \sin \theta$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{++}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \right] \\ &\quad + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \right] \\ &= \cos \theta \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial x(r, \theta)}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial y(r, \theta)}{\partial r} \right] \\ &\quad + \sin \theta \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial x(r, \theta)}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial y(r, \theta)}{\partial r} \right] \end{aligned}$$

Grâce au *théorème de Schwarz*, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \\ &\quad + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y). \end{aligned}$$

De façon similaire, on prouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) &= -r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \\ &\quad + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - 2 \cos \theta \sin \theta r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \Delta f(x, y). \end{aligned}$$

9 Difféomorphisme et changement de variable

9.1. Difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$

Soit U et V deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbb{R}^n$.

On dit que f est un **$\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme** ou un **difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$** de U sur V lorsque :

- f réalise une bijection de U sur V ;
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V .

Théorème 17

Soit U et V deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$ et f un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U sur V .

Pour tout a de U , la matrice jacobienne de f en a est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et :

$$[Jf(a)]^{-1} = Jf^{-1}(f(a)).$$

De même, pour tout b de V , $Jf^{-1}(b)$ est inversible et :

$$Jf^{-1}(b) = [Jf(f^{-1}(b))]^{-1}.$$

La clé du *théorème 17* tient dans les égalités suivantes :

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_V$$

et

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_U,$$

$$\forall b \in V$$

$$df(f^{-1}(b)) \circ df^{-1}(b) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n},$$

$$\forall a \in U$$

$$df^{-1}(f(a)) \circ df(a) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}.$$

9.2. Caractérisation des difféomorphismes

Le *théorème* suivant est admis, conformément au programme. Il permet de déterminer facilement si une application f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

Théorème 18

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbb{R}^n$.

Lorsque les trois hypothèses suivantes sont vérifiées :

- f est injective,
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ,

Rapport CCP, 1997

« La démonstration du fait que φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme a donné lieu aux développements les plus courts (il est clair que...) comme les plus longs (jusqu'à 7 pages, ce qui est excessif pour une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$). »

- $\forall a \in U \quad \text{Det}(Jf(a)) \neq 0$;

on peut conclure que :

- $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$,
- f un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Ce théorème entraîne en particulier que, sous ces hypothèses et pour tout a de U , l'application linéaire $df(a)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

► Pour s'entraîner : ex. 13.

9.3. Le passage en coordonnées polaires

L'application p , de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par :

$$p : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \longmapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle est surjective mais pas injective.

La matrice jacobienne de p est :

$$Jp(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Son jacobien vaut r , il s'annule lorsque $r = 0$.

L'application p n'est pas un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 19

La restriction Φ de p à $\mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[$ définit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de :

$$U = \mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[\text{ sur } \Phi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^-\}.$$

Démonstration

- $U = \mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$,
- Φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^2$,
- Φ est injective sur U ,
- $\forall (r, \theta) \in U \quad J\Phi(r, \theta) = r \neq 0$.

Le théorème 18 permet de conclure.

De plus le théorème 17 permet de trouver la matrice jacobienne de la bijection réciproque sans expliciter ladite réciproque :

$$J\Phi^{-1}(x(r, \theta), y(r, \theta)) = [J\Phi(r, \theta)]^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^-\}$:

$$J\Phi^{-1}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \\ \sqrt{x^2 + y^2} & \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

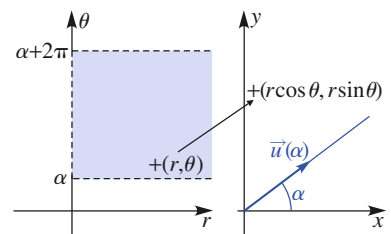
Rapport Mines-Ponts, 2000

Le calcul différentiel et intégral à plusieurs variables reste catastrophique : continuité, notion de matrice jacobienne, caractérisation des $\mathcal{C}^1$ -difféomorphismes parmi les applications injectives de classe $\mathcal{C}^1$ [...] tout ce chapitre est peu ou mal connu. »

En fait, pour tout réel α , l'application :

$$(r, \theta) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

définit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de l'ouvert $\mathbb{R}^{+*} \times]\alpha, \alpha + 2\pi[$ sur le plan $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite $\mathbb{R}^+ \vec{u}(\alpha)$.



Doc. 12.

Notons $\Phi^{-1}(x, y) = (r(x, y), \theta(x, y))$. La formule ci-dessus prouve que :

$$\frac{\partial r}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \theta.$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-\sin \theta}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

En imposant :

$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^-\}$, $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$, on a :

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta(x, y) = 2\text{Arctan} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Cette fonction θ est appelée **détermination principale de l'argument**.

Un calcul direct des dérivées partielles à partir de ces formules permet de retrouver les dérivées partielles annoncées.

► Pour s'entraîner : ex. 14.

9.4. Application à la résolution d'une équation aux dérivées partielles

Changer de variables signifie composer avec un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

Cette technique permet d'étudier et de résoudre certaines équations aux dérivées partielles.

► Pour s'entraîner : ex. 15.

Application 6

L'équation des cordes vibrantes

L'équation des cordes vibrantes est donnée par :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (E)$$

où c est une constante strictement positive.

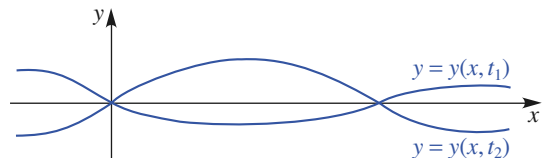


Doc. 13. Machine analogique pour l'étude des cordes vibrantes (fin du XIX^e siècle).

Mathématiquement, y est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La variable t représente le temps. La corde vibre dans le plan (xOy) .

À t fixé, le graphe de la fonction $x \mapsto y(x, t)$ représente la position de la corde à l'instant t .



Doc. 14. Positions de la corde aux instants t_1 et t_2 .

À x fixé, l'application $t \mapsto y(x, t)$ représente la variation au cours du temps du point d'abscisse x .

1) Soit γ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(x, t) = (u(x, t), v(x, t))$ avec :

$$u(x, t) = x + ct \quad ; \quad v(x, t) = x - ct.$$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $y = f \circ \gamma$.
Pour tout (x, t) de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$y(x, t) = f(u(x, t), v(x, t)).$$

a) Montrer que y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, f l'est. Puis que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, f est solution d'une équation d'ordre 2 que l'on déterminera.

b) En déduire que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement s'il existe deux fonctions d'une variable, G et H , de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad y(x, t) = G(x - ct) + H(x + ct) \quad (1)$$

2) Dans la suite du problème, Ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que l'équation (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 \text{ et } y(x, 0) = \Psi(x) \quad (C_1)$$

(La fonction Ψ représente la position de la corde à l'instant $t = 0$. La condition $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$ indique qu'en tout point de la corde, la vitesse à l'instant $t = 0$ est nulle.)

1) a) La fonction γ est linéaire et bijective.

On a : $y = f \circ \gamma$ et $f = y \circ \gamma^{-1}$. Puisque γ et γ^{-1} sont linéaires, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, y l'est.

Dans la suite, y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Puisque $y(x, t) = f(u(x, t), v(x, t))$, on a :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \frac{\partial v}{\partial x}(x, t).$$

$$\text{Mais } \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 1 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) = 1.$$

Donc :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v).$$

On poursuit les calculs sur ce principe :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u, v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u, v) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v).$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) - c \frac{\partial f}{\partial v}(u, v).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u, v) \\ &\quad + c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u, v) - 2c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v). \end{aligned}$$

Finalement, pour tout (x, t) de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u(x, t), v(x, t)).$$

Ainsi, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, l'application f associée vérifie :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) = 0 \quad (F)$$

b) Soit f une solution de (F).

À v fixé, l'application $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ a sa dérivée nulle, donc elle est constante.

$$\exists g(v) \in \mathbb{R} \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = g(v).$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit G une primitive de g . La fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

À u fixé, on a :

$$\forall v \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = g(v).$$

Donc, il existe $H(u)$ tel que :

$$\forall v \in \mathbb{R} \quad f(u, v) = G(v) + H(u).$$

La fonction H est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et la relation liant y et f implique que les solutions de (E) sont de la forme (1).

Réciproquement, si G et H sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la fonction y définie par (1) est évidemment solution de (E).

2) • Supposons l'existence d'une solution y de (E) vérifiant la condition initiale (C_1) .

Soit G, H , de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$y(x, t) = G(x - ct) + H(x + ct).$$

D'après (C_1) , on a, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$y(x, 0) = G(x) + H(x) = \Psi(x).$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = cH'(x) - cG'(x) = 0.$$

Il existe une constante k telle que, pour tout x :

$$\begin{cases} G(x) + H(x) = \Psi(x) \\ G(x) - H(x) = k \end{cases}$$

Ainsi :

$$G(x) = \frac{\Psi(x) + k}{2} \quad \text{et} \quad H(x) = \frac{\Psi(x) - k}{2}$$

Finalement, pour tout (x, t) de $\mathbb{R}^2$:

$$y(x, t) = \frac{1}{2} [\Psi(x + ct) + \Psi(x - ct)].$$

• Réciproquement, sachant que Ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, il est immédiat de prouver que :

$$(x, t) \mapsto y(x, t) = \frac{1}{2} [\Psi(x + ct) + \Psi(x - ct)]$$

est l'unique solution du problème posé.

FICHE MÉTHODE

- Soit f une fonction définie sur l'ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
- Pour calculer **la dérivée suivant le vecteur non nul** $\vec{v}$ de la fonction f au point a , on cherche la limite lorsque le réel t tend vers 0 de :

$$\frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t}.$$

N.B. : Cette limite n'existe pas toujours.

- Pour calculer **la j -ième dérivée partielle de** f au point a , $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, on cherche la dérivée de f au point a suivant le j -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Si $a = (a_1, \dots, a_p)$, la j -ième dérivée partielle de f au point a , $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, est la dérivée de la fonction d'une variable :

$$x \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_p).$$

N.B. : Cette dérivée partielle n'existe pas toujours.

- Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U , la dérivée de f suivant un vecteur $\vec{v} = (h_1, \dots, h_p)$ est définie en tout point a de U . Elle est donnée par la formule :

$$D_{\vec{v}} f(a) = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

N.B. : Dans ce cas, la connaissance des dérivées partielles suffit pour déterminer toutes les dérivées directionnelles. L'étude du rapport $\frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t}$ est inutile.

FICHE MÉTHODE

● Soit f et g deux fonctions définies sur des ouverts de telle sorte que leur composée $g \circ f$ ait un sens.

Pour montrer que **la fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$** , on vérifie que les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur domaine de définition.

Lorsque c'est le cas, pour déterminer les dérivées partielles de $g \circ f$ en un point a , on utilise la formule :

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a))Jf(a).$$

● Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$, I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans U .

La dérivée de la fonction d'une variable $t \mapsto g(x_1(t), \dots, x_n(t))$, se calcule par la formule :

$$\frac{d}{dt}g(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \frac{dx_j}{dt}(t).$$

● Pour déterminer **les éventuels extrema locaux d'une fonction numérique f** , de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, on commence par trouver les points a de U tels que :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \overrightarrow{0}.$$

Puis, pour chacun de ces points, on étudie le signe de $f(a + \overrightarrow{v}) - f(a)$ lorsque le vecteur $\overrightarrow{v}$ tend vers $\overrightarrow{0}$.

Dans la pratique, en dimension 2, $\overrightarrow{v} = (h, k)$ tend vers $(0, 0)$; en dimension 3, $\overrightarrow{v} = (h, k, l)$ tend vers $(0, 0, 0)$.

● Pour étudier **les extrema d'une fonction numérique f** continue sur un compact K de $\mathbb{R}^p$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur le plus grand ouvert U inclus dans K :

- on affirme l'existence d'un maximum global et d'un minimum global de f sur K ;
- on effectue l'étude ci-dessus sur l'ouvert U ;
- on étudie la fonction f sur $K \setminus U$; lorsque $p = 2$, on est alors ramené à l'étude d'une fonction d'une seule variable ;
- on compare les valeurs des extrema locaux de f sur U et des extrema de f sur $K \setminus U$.

● Pour prouver qu'**une fonction f** de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, **définit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme** de U sur $f(U)$, il suffit de vérifier que :

- f est injective,
- le jacobien de f ne s'annule pas sur U , c'est-à-dire :

$$\forall a \in U \quad \text{Det}(Jf(a)) \neq 0.$$

Exercice résolu

Fonctions définies par des intégrales

ÉNONCÉ

Soit I et J deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$, f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $I \times J$ dans $\mathbb{R}$ et a un point de I . Pour tout (x, y) de $I \times J$, on pose :

$$\Phi(x, y) = \int_a^x f(t, y) dt.$$

1) Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times J$.

2) Soit u et v deux éléments de $\mathcal{C}^1(J, I)$.

Montrer que l'application :

$$g : y \mapsto \int_{u(y)}^{v(y)} f(t, y) dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et exprimer sa dérivée.

3) Lorsque $I = J$, montrer que l'application

$$h : x \mapsto \int_a^x f(t, x) dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et exprimer sa dérivée.

CONSEILS

SOLUTION

1) • À y fixé dans J , l'application $x \mapsto \int_a^x f(t, y) dt$ est une primitive de la fonction $x \mapsto f(x, y)$ qui est continue sur I .

Pour tout (x, y) de $I \times J$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = f(x, y)$.

• À x fixé, les hypothèses sur les fonctions définies par des intégrales à paramètre sont vérifiées et la fonction $y \mapsto \int_a^x f(t, y) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J .

En effet :

– la fonction $(t \mapsto f(t, y))$ est continue, donc intégrable sur le segment $[\min(a, x), \max(a, x)]$;

– la fonction $(t \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(t, y))$ est continue sur J ;

– pour tout segment $[c, d]$ inclus dans J , la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue, donc bornée, sur le compact $K = [\min(a, x), \max(a, x)] \times [c, d]$; ainsi :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (t, y) \in K \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \leq M$$

et la fonction constante $(t \mapsto M)$ est intégrable sur le segment :

$$[\min(a, x), \max(a, x)].$$

On en déduit la formule :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = \int_a^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) dt.$$

On a prouvé l'existence de dérivées partielles. Il reste à prouver leur continuité.

- On a vu que $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = f$. Donc $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ est continue sur $I \times J$.
- L'égalité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0) &= \int_a^{x_0} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_0) \right] dt + \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) dt \\ &\quad - \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_0) dt \end{aligned}$$

et la continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ permettent de prouver que $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ est continue sur $I \times J$.

2) Puisque $g(y) = \Phi(v(y), y) - \Phi(u(y), y)$, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$g'(y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(v(y), y)v'(y) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(v(y), y) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u(y), y)u'(y) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(u(y), y)$$

$$g'(y) = f(v(y), y)v'(y) - f(u(y), y)u'(y) + \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) dt.$$

3) On a $h(x) = \Phi(x, x)$. Donc h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$h'(x) = D_1 \Phi(x, x) + D_2 \Phi(x, x) = f(x, x) + \int_a^x D_2 f(t, x) dt.$$

Quelles hypothèses sur Φ, u et v permettent d'écrire la formule ci-contre ?

Pour éviter toute ambiguïté, l'utilisation des notations D_1 et D_2 est préférable à $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$.

Exercices

1 Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que les fonctions suivantes admettent des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer :

$$f_1(x, y) = \int_{\pi}^{x+y} g(t) dt ; \quad f_2(x, y) = \int_y^x g(t) dt ;$$

$$f_3(x, y) = \int_2^x (y-t)g(t) dt.$$

2 On considère la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}.$$

Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

3 On considère les trois applications de l'exercice 1.

Après avoir justifié que ces applications sont continûment différentiables sur $\mathbb{R}^2$, écrire leurs différentielles et donner leurs dérivées directionnelles.

4 On définit l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(\vec{u}) = \vec{u} \wedge \vec{a}.$$

Montrer que f est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et donner sa différentielle.

5 Étudier la différentiabilité des deux fonctions suivantes :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

6 On considère les trois applications de l'exercice 1. Donner leurs matrices jacobienues en un point quelconque de $\mathbb{R}^2$.

7 L'application f est celle de l'exercice 4.

Donner sa matrice jacobienne et son jacobien en un point quelconque de $\mathbb{R}^3$.

8 Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, l'application f^n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et donner son gradient et sa différentielle.

9 Étudier les extrema de l'application f définie par :
 $f(x, y) = (y - x)^3 + 6xy$ sur les domaines suivants :

$$\Delta_O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < x < y < 1\}$$

$$\Delta_F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq y \leq 1\}$$

10 On pose $g(x, y) = x - y + x^3 + y^3$.

Prouver que g a des extrema sur $[0, 1] \times [0, 1]$, les déterminer.

11 La fonction f ci-dessous est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

12 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui vérifie l'équation aux dérivées partielles (E_1) suivante :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) - 2 \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = 0.$$

1) Déterminer l'équation aux dérivées partielles (E_2) vérifiée par la fonction

$$U : (x, t) \mapsto U(x, t) = e^t f(x, t).$$

2) Déterminer l'équation aux dérivées partielles (E_3) vérifiée par la fonction $V : (a, b) \mapsto V(a, b) = U(x, t)$ déduite de U par le changement de variables :

$$a = x + t; \quad b = x - t.$$

13 Soit k dans $]0, 1[$ et f dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f'(x)| \leq k.$$

On définit l'application φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$\varphi(x, y) = (y + f(x), x + f(y)).$$

1) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer le jacobien de φ .

3) Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

14 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère la fonction g définie, sur $\mathbb{R}^{**} \times \mathbb{R}$, par :

$$g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

1) Que dire de g lorsque f est solution de :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \quad (1)$$

2) Mêmes questions lorsque f est solution de :

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \quad (2)$$

3) Résoudre :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - f = -(x^2 + y^2) \quad (E)$$

sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^-\}$.

15 Soit l'équation aux dérivées partielles :

$$(ax + by) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (cx + dy) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \quad (E)$$

où $ad - bc \neq 0$.

1) Transformer (E) par le changement de variables :

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$$

2) Quelle condition nécessaire et suffisante doivent vérifier a, b, c et d pour que l'équation admette une solution de la forme :

$$f(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$$

où $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$.

3) Trouver une solution lorsque :

$$a = b = c = 1 \quad \text{et} \quad d = -1.$$

16 $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.

À toute application de U dans $\mathbb{C}$, $f : (z \mapsto f(z))$, on associe l'application F définie sur U par :

$$F(x, y) = f(x + iy).$$

On dit qu'une application f de U dans $\mathbb{C}$ est holomorphe sur U si, et seulement si :

$$\begin{cases} F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ dans } U \\ \frac{\partial F}{\partial y} = i \frac{\partial F}{\partial x} \end{cases}$$

1) Montrer que l'ensemble des fonctions holomorphes sur U est un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les applications de U dans $\mathbb{C}$.

2) Montrer que f est holomorphe dans U si, et seulement si, pour tout z_0 de U , $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ a une limite $l(z_0)$ quand z tend vers z_0 et l est continue sur U .

17 Soit $a > 0$ et f définie sur $(\mathbb{R}^{**})^2$ par :

$$f(x, y) = \frac{a}{x} + \frac{a}{y} + \frac{xy}{a^2}.$$

Prouver que f admet un minimum global et le calculer.

18 Trouver les applications g de classe $\mathcal{C}^2$ de $] -1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ telles que le laplacien de l'application f définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ par $f(x, y) = g\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)$ soit nul.

Courbes et surfaces



Introduction

Les premières courbes que vous avez rencontrées au collège, puis au lycée, sont les droites définies par une équation de la forme : $y = ax + b$, les hyperboles d'équation : $y = \frac{a}{x}$, les paraboles d'équation : $y = ax^2 + bx + c...$

En Première année, vous avez étudié des courbes définies sous forme paramétrique :

$$t \longmapsto (x, y) = (x(t), y(t)).$$

Les courbes définies par une équation polaire en sont un cas particulier. La représentation paramétrique des courbes généralise la représentation cartésienne explicite $y = f(x)$ que l'on peut en effet écrire :

$$x \longmapsto (x, y(x)) = (x, f(x)).$$

Dans les premiers paragraphes de ce chapitre, on récapitule les principales propriétés des courbes planes. Il s'agit là d'une source importante d'exercices pour les concours. Vous devez refaire tous les exercices de Première année sur ce sujet.

Les derniers paragraphes du chapitre sont consacrés, d'une part à l'étude des courbes planes définies par une équation cartésienne implicite : $f(x, y) = k$; d'autre part aux surfaces de $\mathbb{R}^3$, définies soit par une équation cartésienne, soit par un paramétrage.

O B J E C T I F S

- Changement de paramétrage d'une courbe.
- Propriétés géométriques d'une courbe.
- Étude métrique des courbes.
- Courbe plane définie par une équation cartésienne implicite.
- Surface définie par une équation cartésienne implicite.
- Surface paramétrée.

Étude affine des courbes

Les intervalles considérés dans ce paragraphe contiennent toujours au moins deux points. L'entier k considéré est supérieur ou égal à 1.

1.1. Courbe paramétrée, paramétrage

Une **courbe paramétrée** (ou **arc paramétré**) de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) du plan ou de l'espace est un triplet (I, f, C) (parfois noté simplement C) tel que :

- I est un intervalle de $\mathbb{R}$;
- f est une application de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}^p$ ($p \in \{2, 3\}$) ;
- $C = \{M \in \mathbb{R}^p, \exists t \in I \quad M = f(t)\}$.

L'ensemble C est appelé le **support de la courbe** ou, en cinématique, la **trajectoire** du mouvement.

Le couple (I, f) est appelé un **paramétrage** de classe $\mathcal{C}^k$ de la courbe.

1.2. Propriété géométrique d'une courbe

Toute application $\varphi, \mathcal{C}^k$ -difféomorphisme d'un intervalle J sur l'intervalle I , est dite un **changement de paramétrage** de la courbe. Le couple $(J, f \circ \varphi)$ est alors un autre paramétrage de classe $\mathcal{C}^k$ de la courbe.

On appelle **paramétrage admissible** de classe $\mathcal{C}^k$ de la courbe (I, f, C) tout couple (J, g) tel qu'il existe un changement de paramétrage φ de classe $\mathcal{C}^k$ vérifiant $g = f \circ \varphi$.

Toute propriété des courbes paramétrées, ou des points des courbes, invariante par changement de paramètre admissible est dite **propriété géométrique** des courbes.

Exemple : Le support d'une courbe est une propriété géométrique de la courbe.

1.3. Point régulier, arc régulier

Le vecteur nul de $\mathbb{R}^p$ est noté $\vec{0}$.

Un **point** $M(t)$ de l'arc paramétré (I, f, C) est dit **régulier** lorsque :

$$f'(t) \neq \vec{0}.$$

Un **point** non régulier est dit **stationnaire**.

Un arc paramétré dont tous les points sont réguliers est appelé **arc régulier**.

Un **point** $M(t)$ de l'arc paramétré (I, f, C) est dit **birégulier** lorsque la famille $(f'(t), f''(t))$ est libre.

Exemple

Soit (I, f, C) une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$, φ un changement de paramétrage de cette courbe et $M = f(a) = (f \circ \varphi)(b)$ un point de cette courbe.

• Supposons le point M régulier pour le paramétrage f . Posons $g = f \circ \varphi$. Alors :

$$g'(b) = \varphi'(b) f'(\varphi(b)).$$

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Géométrie

C'est de loin la partie la plus faible chez la plupart des candidats qui semblent faire une impasse sur cette partie du programme. On note en particulier [...] d'énormes difficultés à identifier les courbes classiques (coniques, arcs paramétrés...) ou à identifier les surfaces classiques (cônes, cylindres...) sont rencontrées. »

Nous noterons indifféremment $M(t)$ ou $f(t)$

Rappel

Une application φ de l'intervalle J dans I vérifiant les conditions :

- φ est bijective de J sur I ,
- φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J ,
- φ' ne s'annule pas sur J , est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de l'intervalle J sur l'intervalle I .

Les éléments de $\mathbb{R}^p$ notés $f(t)$ ou $M(t)$ sont appelés des points, alors que les éléments de $\mathbb{R}^p$ notés $f^{(j)}(t)$, pour j dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, sont considérés comme des vecteurs.

Les notions de point régulier d'une courbe, point birégulier d'une courbe sont des notions géométriques.

La notion d'arc régulier est donc aussi une propriété géométrique de l'arc.

Le point M est aussi régulier pour $f \circ \varphi$.

• Supposons ensuite M birégulier pour f :

$$g''(b) = (\varphi'(b))^2 f''(\varphi(b)) + \varphi''(b) f'(\varphi(b)).$$

On en déduit que $(g'(b), g''(b))$ est libre. Le point M est aussi birégulier pour g .

1.4. Orientation d'une courbe

Soit (I, f, C) une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ et φ un changement de paramétrage de cette courbe. Lorsque l'application φ est strictement croissante, les **paramétrages** (I, f) et (J, g) de la courbe sont dits **de même sens**. Lorsque l'application φ est strictement décroissante, ils sont dits **de sens contraires**.

Le choix d'un paramétrage (I, f) de classe $\mathcal{C}^k$ d'un arc régulier permet de définir une orientation de la courbe.

Tout changement de paramétrage strictement croissant conserve l'orientation de la courbe.

Tout changement de paramétrage strictement décroissant modifie l'orientation de la courbe.

Une courbe paramétrée régulière admet deux orientations.

L'orientation n'est pas une propriété géométrique des courbes.

1.5. Tangente en un point d'une courbe

Dans ce paragraphe, (I, f, C) est une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ et a un point de I qui n'est pas une borne de I .

1.5.1 Tangente en un point régulier (rappel)

Soit $M = f(a)$ un point régulier de cette courbe, la droite affine :

$$T_a = f(a) + \mathbb{R} f'(a)$$

est la **tangente** à la courbe en M .

La tangente en un point régulier est une propriété géométrique de la courbe.

1.5.2 Recherche de la tangente par le développement limité

Soit $M = f(a)$ un point de la courbe (stationnaire ou non, peu importe).

f est de classe $\mathcal{C}^k$, donc admet en a un développement limité à l'ordre $k \geq 1$:

$$f(t) = f(a) + \sum_{i=1}^k \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + o((t-a)^k).$$

On suppose que :

$$\exists i \in \llbracket 1, k \rrbracket \quad f^{(i)}(a) \neq \vec{0}.$$

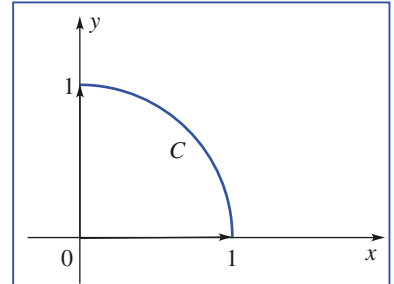
On note :

$$m = \min\{i \in \llbracket 1, k \rrbracket, f^{(i)}(a) \neq \vec{0}\}.$$

Alors :

$$\overrightarrow{f(a)f(t)} = \frac{(t-a)^m}{m!} (f^{(m)}(a) + \varepsilon_m(t)).$$

avec $\lim \varepsilon_m(t) = \vec{0}$.



Si la courbe n'est pas régulière, il peut n'exister qu'une seule orientation.

Considérer $I = [0, \pi]$:

$$f : t \mapsto (\sin(t), \cos^2(t))$$

$$\varphi : t \mapsto \pi - t \text{ de } I \text{ sur } I.$$

L'application φ est décroissante et $f \circ \varphi = f$.

La courbe (I, f, C) n'a qu'une seule orientation.

Si les paramétrages (I, f) et (J, g) de la courbe ont même sens, les vecteurs tangents $f'(a)$ et $g'(b)$ en un point régulier $M = f(a) = g(b)$ ont même sens.

On remarque que $m = 1$ si, et seulement si, le point $f(a)$ est un point régulier de la courbe.

Pour t assez proche de a , on a $f(t) \neq f(a)$ et la sécante à la courbe passant par $f(t)$ et $f(a)$ est la droite affine :

$$f(a) + \overrightarrow{f(a)f(t)} = f(a) + \mathbb{R}(f^{(m)}(a) + \varepsilon_m(t)).$$

Lorsque t tend vers a , elle admet une position limite, la droite affine :

$$T_a = f(a) + \mathbb{R} f^{(m)}(a).$$

C'est la **tangente** à la courbe en M .

1.5.3 Position par rapport à la tangente pour une courbe plane ($p = 2$)

L'étude de la position par rapport à la tangente est possible lorsque l'hypothèse suivante est vérifiée :

il existe un entier $i > m$ tel que $(f^{(m)}(a), f^{(i)}(a))$ soit libre.

On note $r = \min \{i \in \llbracket m+1, k \rrbracket, (f^{(m)}(a), f^{(i)}(a)) \text{ libre}\}$. On peut écrire :

$$f(t) = f(a) + \frac{(t-a)^m}{m!} (1 + \alpha(t)) f^{(m)}(a) + \frac{(t-a)^r}{r!} (1 + \beta(t)) f^{(r)}(a)$$

où α et β sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\lim_{t \rightarrow a} \alpha(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow a} \beta(t) = 0.$$

Quatre cas sont à distinguer, suivant les parités de m et r .

- Si m est impair et r pair : le point est un point ordinaire (doc. 1).

Lorsque la courbe est birégulière au point a , on est dans ce cas puisqu'alors, $m = 1$ et $r = 2$.

- Si m et r sont impairs : le point est un point d'inflexion (doc. 2).
- Si m est pair et r impair : le point est un point de rebroussement de première espèce (doc. 3).
- Si m et r sont pairs : le point est un point de rebroussement de deuxième espèce (doc. 4).

Point stationnaire et point de rebroussement sont des propriétés géométriques de la courbe.

Exemple

On fixe un réel a . Déterminer la tangente, au point de paramètre $t = 0$, à la courbe définie par :

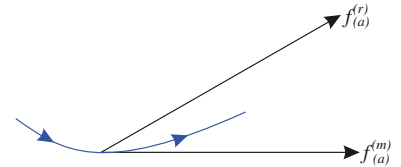
$$\begin{cases} x(t) = \cos t + at^2 \\ y(t) = -\sin t + t \end{cases}$$

On a :

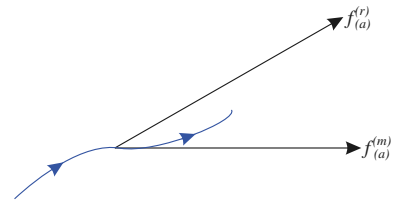
$$x(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + at^2 + o(t^3) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{t^3}{6} + o(t^3).$$

Présentons ce résultat vectoriellement :

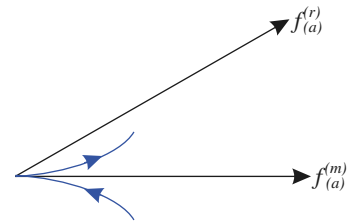
$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} a - \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} + o(t^3).$$



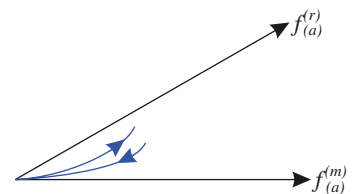
Doc. 1. m impair et p pair : point ordinaire.



Doc. 2. m et r impairs : point d'inflexion.



Doc. 3. m pair et r impair : point de rebroussement de première espèce.

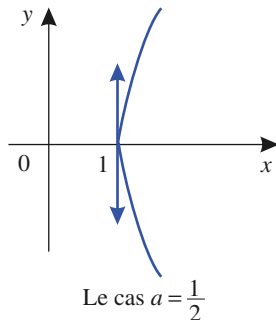
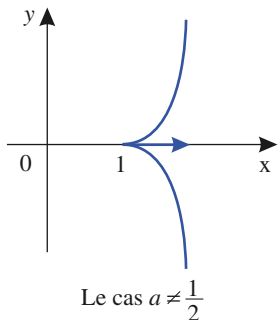


Doc. 4. m et r pairs : point de rebroussement de deuxième espèce.

Si $a \neq \frac{1}{2}$, la tangente à la courbe en $f(0)$ est horizontale (doc. 5).

Si $a = \frac{1}{2}$, la tangente à la courbe en $f(0)$ est verticale (doc. 5).

De plus x est une fonction paire et y une fonction impaire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x , on en déduit les schémas suivants :



Doc. 5.

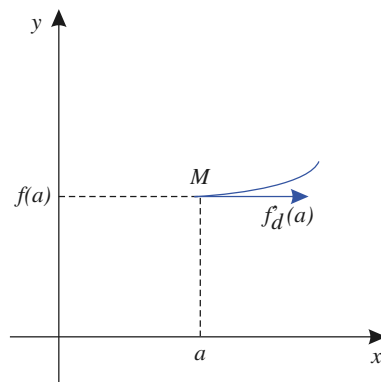
1.5.4 Demi-tangentes

Si f est définie sur $[a, a + \delta[$ ($\delta > 0$) et si sa dérivée à droite en a n'est pas le vecteur nul, alors la courbe admet au point $M(a)$ une demi-tangente de vecteur directeur $f'_d(a)$:

$$T = f(a) + \mathbb{R}^+ f'_d(a) \quad (\text{doc. 6}).$$

De même, si f est dérivable à gauche en a , et si $f'_g(a) \neq \vec{0}$.

► Pour s'entraîner : ex. 1.



Doc. 6.

1.6. Branches infinies

L'étude des branches infinies des courbes planes a été effectuée en Première année. Afin de réviser ceci, vous étudierez les branches infinies des courbes suivantes.

- Le graphe :

$$x \mapsto y = \sqrt[3]{x^3 + 2x + 1}.$$

- La courbe paramétrée sur $\mathbb{R}$ par :

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = \left(\frac{t^2}{t+1}, \frac{1}{t+1} \right).$$

- La courbe donnée par son équation polaire :

$$\rho = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta}$$

Une calculatrice graphique permet de visualiser ces courbes. Le cours de Première année permet de démontrer l'existence de branches infinies et de les calculer exactement.

► Pour s'entraîner : ex. 2.

Rapport Centrale, 1998

« Les candidats ne savent pas étudier les branches infinies d'une courbe en coordonnées polaires »

Rapport Mines-Ponts, 2000

« La géométrie reste le gros point noir de l'interrogation. [...]

De simples courbes polaires $\rho = f(\theta)$ posent problème. Qu'en est-il des courbes $\theta = f(\rho)$ ou $(\rho = f(t), \theta = g(t))$? »

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Les points les plus sensibles :
- impossibilité de tracer une courbe en coordonnées polaires ;

- ... »

Application 1

La conchoïde de droite

Solution de Nicomède (250 av. J.-C. environ).

1) Le point C est extérieur à un cercle de centre O et de rayon R . Une corde AB de ce cercle passant par C est telle que $BC = R$. La droite CO coupe le cercle en D et E . Montrer que l'arc $\widehat{AD}$ est triple de l'arc $\widehat{BE}$ (ce résultat est dû à Archimède).

2) Soit un réel $r > 0$, une droite D et un point A du plan n'appartenant pas à D .

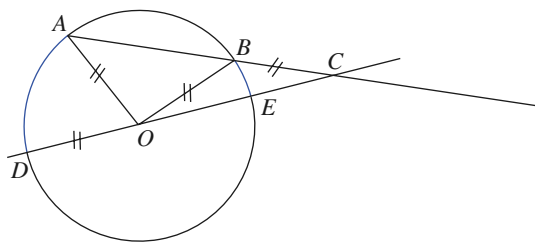
Une droite variable Δ passant par A coupe D en P . L'ensemble des points M (de Δ) tels que $PM = r$ est appelé conchoïde de la droite D , de pôle A et de paramètre r .

Donner une équation polaire de la conchoïde obtenue. La tracer.

3) Quelle conchoïde choisir et comment l'utiliser pour trisecter un angle ?

1) Les arcs et angles considérés ne sont pas orientés.

$$\widehat{BE} = \widehat{BOE} = \widehat{BCO} = \frac{1}{2} \widehat{ABO} = \frac{1}{2} \widehat{BAO}.$$



Doc. 7.

$$\begin{aligned} \widehat{AD} &= \widehat{AOD} = \pi - \widehat{BOC} - (\pi - 2\widehat{ABO}) \\ &= 2\widehat{ABO} - \widehat{BOC} = \frac{3}{2} \widehat{ABO} = 3\widehat{BE}. \end{aligned}$$

2) Soit le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$ tel que D ait pour équation $\rho = \frac{a}{\cos \theta}$, avec $a > 0$.

La conchoïde cherchée a pour équation :

$$\rho = \frac{a}{\cos \theta} \pm r.$$

Toute la courbe s'obtient en étudiant :

$$\rho = \frac{a}{\cos \theta} + r,$$

θ décrivant $]-\pi, \pi[\setminus \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$.

ρ est paire, on se restreint à $[0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Pour étudier le signe de ρ , trois cas sont à distinguer, suivant que $a < r, a = r, a > r$.

Nous traiterons dans le détail le cas $a < r$ (doc. 8).

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	θ_0	π
ρ	$a+r$	$+\infty$	$-\infty$	$-a+r$

Doc. 8

Étudions les branches infinies.

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \rho(\theta) = \pm \infty,$$

donc la courbe a une direction asymptotique verticale.

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} x(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \rho(\theta) \cos \theta = a.$$

La droite D est asymptote au graphe (doc. 9).

3) Considérons le cercle de centre $I(1, 0)$ et de rayon 1, ainsi que sa conchoïde C de pôle O et de paramètre 1.

Cette conchoïde a pour équation polaire :

$$\rho = 2 \cos \theta + 1.$$

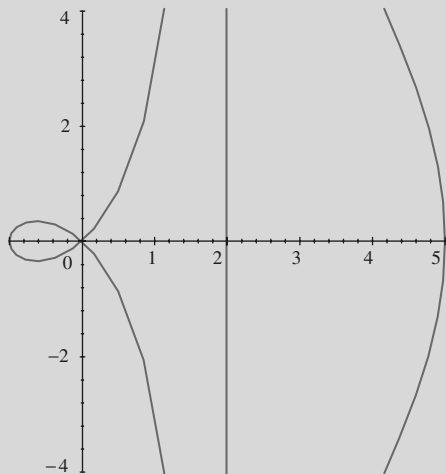
La question 1) entraîne que :

$$\widehat{ICO} = \frac{1}{3} \widehat{OID} \quad (\text{doc. 10}).$$

Avec Maple :

```
> restart:with(plots):
polarplot([2/cos(t)+3,t,t=-Pi..Pi],
view=[-1..5,-4..4],title='a=2,r=3',
scaling=constrained);
```

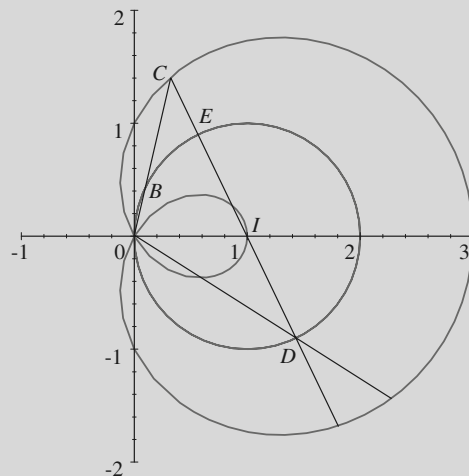
$a = 2, r = 3$



Doc. 9

Avec Maple :

```
> restart:with(plots):
C1:=polarplot([2*cos(t)+1,
t,t=-Pi..Pi],view=[-1..3,-2..2],
scaling=constrained):
C2:=polarplot([2*cos(t),
t,t=-Pi..Pi],view=[-1..3,-2..2],
scaling=constrained):
display({C1,C2});
```



Doc. 10

2 Étude métrique des courbes

2.1. Abscisse curviligne

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^p$ est muni d'un repère orthonormé.

On considère un arc géométrique (I, f, C) régulier de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 2$) et s une primitive de la fonction continue $t \mapsto \|f'(t)\|$. L'application s est une fonction de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ définie sur un intervalle I et appelée **abscisse curviligne** sur cet arc.

Elle définit un changement de paramétrage de la courbe. Le paramétrage $(s(I), f \circ s^{-1})$ est alors un paramétrage admissible. Il est dit **normal** car il possède la propriété :

$$\forall s \in s(I) \quad \left\| \frac{d\vec{M}}{ds} \right\| = 1.$$

Si s est une abscisse curviligne sur la courbe, A et B sont deux points de paramètres respectifs a et b , la longueur de l'arc AB est :

$$L = \left| \int_a^b ds \right| = |s(b) - s(a)|.$$

Rapport Centrale, 2000

« La géométrie différentielle fait partie du programme, il est inadmissible que certains candidats soient désemparés devant le moindre tracé de courbe, ou devant le plus élémentaire calcul d'abscisse curviligne. »

La longueur d'un arc de la courbe est une propriété géométrique de la courbe.

L'abscisse curviligne n'en est pas une, car elle dépend de l'orientation de la courbe.

■ Méthode pratique dans $\mathbb{R}^2$

Si l'arc est défini paramétriquement par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, on orientera l'arc dans

le sens des t croissants et on prendra $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$.

Si l'arc est défini en coordonnées polaires par $\rho = \rho(\theta)$, on orientera l'arc dans le sens des θ croissants et on prendra $ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$.

■ Méthode pratique dans $\mathbb{R}^3$

Si l'arc est défini paramétriquement par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, on orientera l'arc dans

le sens des t croissants et on prendra $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$.

2.2. Repère de Frénet dans $\mathbb{R}^2$

Le repère de Frénet en un point régulier M de la courbe est le repère orthonormé direct $(M, \vec{T}, \vec{N})$ dans lequel $\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds}$.

Connaissant M en fonction du paramètre t , on a :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{T}(t).$$

Jean Frédéric Frénet (1816-1900), mathématicien français.

Il publia, en 1852, dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, six des neuf formules de géométrie métrique des courbes planes et dans l'espace.

2.3. Angle que fait la tangente avec l'axe des x

Si la courbe est régulière et de classe $\mathcal{C}^2$ sur J , on admet qu'il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur J telle que, pour tout t de J :

$$\varphi(t) = (\vec{i}, \vec{T}(t)).$$

En utilisant l'angle φ , par construction :

$$\vec{T} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{N} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} = \frac{d\vec{T}}{d\varphi}.$$

Lorsque la courbe est définie en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \vec{OM}(\theta) &= \rho(\theta) \vec{u}(\theta) \\ \frac{d\vec{M}}{d\theta} &= \rho'(\theta) \vec{u}(\theta) + \rho(\theta) \vec{v}(\theta). \end{aligned}$$

Il existe une fonction V de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $V = (\vec{u}(\theta), \vec{T})$.

Alors :

$$\vec{T} = \cos V \vec{u}(\theta) + \sin V \vec{v}(\theta), \quad \varphi = V + \theta \quad \text{et} \quad \tan V = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}.$$

Cet angle n'est pas une propriété géométrique de la courbe. En effet, un changement d'orientation de la courbe transforme $\vec{T}$ en $-\vec{T}$, donc φ en $\varphi + \pi$.

2.4. Courbure, rayon de courbure

On considère un arc géométrique (I, M, C) , régulier de classe $\mathcal{C}^k (k \geq 2)$.

■ La **courbure** en un point régulier M de cet arc est définie par :

$$c(t) = \frac{\left\| \frac{d\vec{M}}{dt}, \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} \right\|}{\left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\|^3}$$

Les formules vectorielles suivantes permettent de calculer la courbure.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{dt} &= \frac{ds}{dt} \vec{T}(t) \\ \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} &= \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T}(t) + c(t) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \vec{N}(t) \end{aligned}$$

Dans le cas d'un paramétrage normal, ($t = s$, abscisse curviligne), on a :

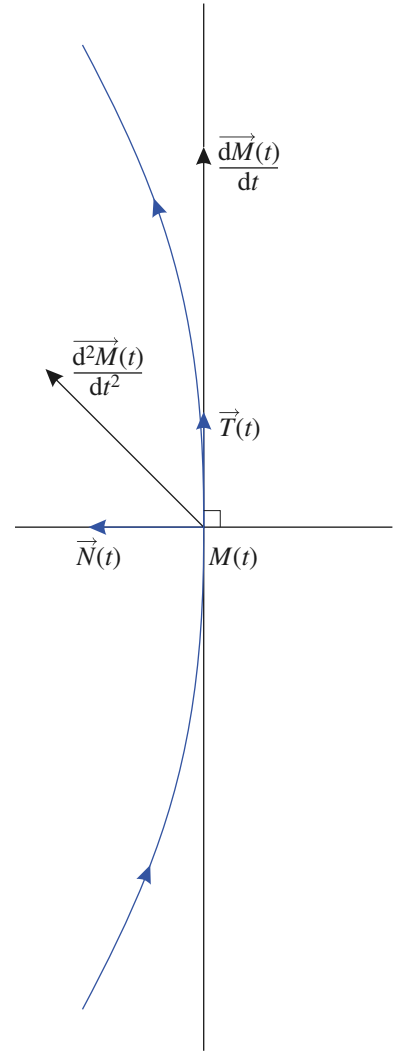
$$\frac{d\vec{M}}{ds} = \vec{T}(s); \quad \frac{d^2\vec{M}}{ds^2} = c(s) \vec{N}(s); \quad c(s) = \frac{d\varphi}{ds}$$

Dans le cas d'une courbe paramétrée par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{OM}(t) &= x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} \\ \frac{d\vec{M}}{dt} &= x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j} \\ \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} &= x''(t) \vec{i} + y''(t) \vec{j} \\ c(t) &= \frac{(x'y'' - y'x'')}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Lorsque l'arc est défini en coordonnées polaires par $\rho = \rho(\theta)$:

$$\begin{aligned} \vec{OM}(\theta) &= \rho(\theta) \vec{u}(\theta) \\ \frac{d\vec{M}}{d\theta} &= \rho' \vec{u}(\theta) + \rho \vec{v}(\theta) \\ \frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2} &= (\rho'' - \rho) \vec{u}(\theta) + \rho' \vec{v}(\theta) \\ c(\theta) &= \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$



Doc. 11. Le repère de Frénet en un point d'une courbe plane.

■ Le **rayon de courbure** en un point birégulier est $R = \frac{1}{c}$.

Si l'arc est défini paramétriquement par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, on obtient :

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{(x'y'' - y'x'')}.$$

Si l'arc est défini par $y = y(x)$, on obtient $R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$.

Si l'arc est défini en coordonnées polaires par $\rho = \rho(\theta)$, on obtient :

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

Si l'arc est paramétré par l'angle φ , on obtient :

$$R = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Dans le cas d'un **paramétrage normal**, c'est-à-dire à l'aide de l'abscisse curviligne, on a :

$$\begin{aligned} c &= \frac{d\varphi}{ds}; \\ \frac{d\vec{T}}{ds} &= c\vec{N} = \frac{\vec{N}}{R}; \\ \frac{d\vec{N}}{ds} &= -c\vec{T} = -\frac{\vec{T}}{R}. \end{aligned}$$

Rapport TPE, 2002

« Une expression du rayon de courbure sous la forme $R = \frac{ds}{d\varphi}$ est trois fois sur quatre inconnue. »

La valeur absolue du rayon de courbure est une propriété géométrique. Le signe de R dépend de l'orientation de la courbe.

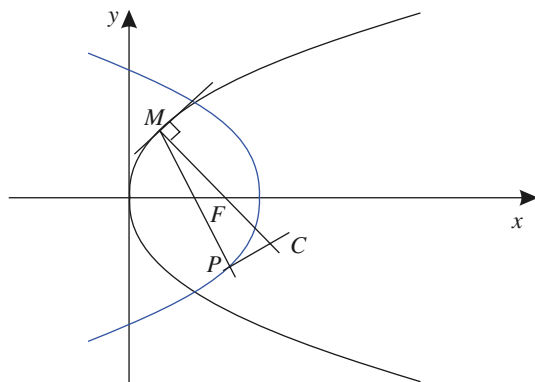
► Pour s'entraîner : ex. 3.

Application 2

La parabole

Soit C le centre de courbure en M d'une parabole de foyer F (c'est-à-dire le point défini par $\vec{MC} = R\vec{N}$) et P le projeté orthogonal de C sur (FM) .

Montrer que F est le milieu de $[P, M]$. En déduire le lieu de P .



Doc. 12.

La parabole admet, dans un repère approprié, une équation de la forme : $y^2 = 2px$.

Le point M a pour coordonnées $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$

La normale en M à la parabole a pour équation :

$$t \left(X - \frac{t^2}{2p} \right) + p(y - t) = 0.$$

Le rayon de courbure en M est :

$$R = -p \left(1 + \frac{t^2}{p^2} \right)^{3/2}$$

Le centre de courbure C a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_C = \frac{t^2}{2p} + p \left(1 + \frac{t^2}{p^2} \right) = p + \frac{3t^2}{2p} \\ y_C = t - \left(1 + \frac{t^2}{p^2} \right) t = -\frac{t^3}{p^2} \end{cases}$$

Les coordonnées de F sont $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Le point P est caractérisé par :

$$\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} & \overrightarrow{FP} = \lambda \overrightarrow{FM} \\ \overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{CP} = 0 \end{cases}$$

On obtient $\lambda = -1$.

F est le milieu de $[P, M]$.

P décrit la parabole symétrique de la parabole donnée par rapport à F .

3 Courbe du plan donnée par équation cartésienne

Dans ce paragraphe, E est un plan euclidien. Il est muni d'un repère ortho-normé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le produit scalaire utilisé est noté $(\mid)$ et la norme associée, $\|\mid\|$.

Les points de E sont repérés par leur coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On s'autorise, parfois, à parler du point (x, y) du plan, au lieu de dire : le point de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit U un ouvert non vide du plan, f une application de U dans $\mathbb{R}$.

On appelle **ligne de niveau de la fonction f** l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) vérifiant une équation du type :

$$f(x, y) = k,$$

où k est un réel.

Cette ligne de niveau sera notée $\mathcal{L}_k$ dans la suite du paragraphe.

L'équation $f(x, y) = k$ est appelé une **équation cartésienne** de $\mathcal{L}_k$.

Le **théorème** suivant donne une condition suffisante pour qu'un tel ensemble soit une courbe, du moins « au voisinage d'un point », et il permet de déterminer directement la tangente et la normale en un point de cette courbe.

Théorème 1

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, f une application de U dans $\mathbb{R}$, k un réel, et (x_0, y_0) un point de U .

On suppose que :

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
- Le point (x_0, y_0) est sur la ligne de niveau $\mathcal{L}_k$, c'est-à-dire :

$$f(x_0, y_0) = k ;$$

- $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Alors :

- au voisinage du point (x_0, y_0) , la ligne de niveau $\mathcal{L}_k$ est une courbe qui admet un paramétrage régulier de classe $\mathcal{C}^1$;
- la normale à la courbe $\mathcal{L}_k$ au point (x_0, y_0) est la droite affine :

$$(x_0, y_0) + \mathbb{R} \overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) ;$$

Vous connaissez déjà les courbes suivantes, décrites par leurs équations cartésiennes :

- les *droites*, ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) vérifiant une équation de la forme :

$$ax + by = c,$$

avec $(a, b) \neq (0, 0)$;

- les *cercles*, ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) vérifiant une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 ;$$

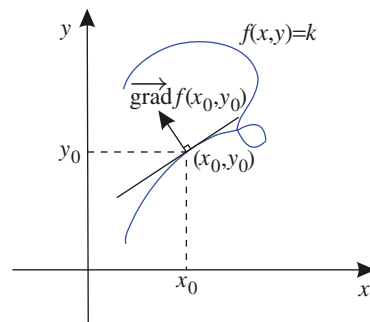
- les *coniques*, ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) vérifiant une équation de la forme :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$;

- le *graphe* d'une fonction g , ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) vérifiant une équation de la forme :

$$y - g(x) = 0.$$



Doc. 13.

- la tangente à la courbe $\mathcal{L}_k$ au point (a, b) est la droite d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(X - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(Y - y_0) = 0.$$

Démonstration

Le premier point est admis. Il s'agit d'un résultat d'existence difficile qui, de plus, n'est pas assorti d'une méthode de calcul permettant de déterminer le paramétrage annoncé.

Il est cependant facile d'en déduire le reste du *théorème*.

Soit $I : t \mapsto (x(t), y(t))$ un paramétrage régulier et de classe $\mathcal{C}^1$ de la ligne de niveau $\mathcal{L}_k$, valable au voisinage de (x_0, y_0) . On note t_0 la valeur du paramètre telle que $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$. On a :

$$\forall t \in I \quad (x(t), y(t)) \in \mathcal{L}_k \quad \text{et} \quad f(x(t), y(t)) = k.$$

La fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est constante. Sa dérivée est nulle et, d'après le *chapitre* précédent, pour tout t de I :

$$\frac{df(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) = 0.$$

On en déduit, pour $t = t_0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(t_0) = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0)$ est orthogonal au vecteur vitesse $(x'(t_0), y'(t_0))$ au point (x_0, y_0) de la courbe $\mathcal{L}_k$. Le reste du *théorème* en découle.

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$, k un réel tel que la ligne de niveau $\mathcal{L}_k$ de la fonction f soit non vide et (x_0, y_0) un point de la ligne de niveau $\mathcal{L}_k$.

- Ce point est dit **régulier** lorsque $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.
- Ce point est dit **singulier** lorsque $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Exemples

■ Les droites

Soit D la droite du plan d'équation $ax + by = c$ (avec $(a, b) \neq (0, 0)$).

C'est une ligne de niveau de la fonction $f(x, y) = ax + by$.

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et son gradient est, en tout point (x_0, y_0) de D :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = (a, b).$$

On retrouve un résultat bien connu. Le vecteur (a, b) est un vecteur normal à la droite d'équation $ax + by = c$. Tout point de la droite est un point régulier.

■ Les graphes de fonctions

Soit G le graphe de la fonction, g , de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $y = g(x)$. Donc, c'est une ligne de niveau de la fonction :

$$f(x, y) = y - g(x).$$

Le vocabulaire utilisé est celui de la cinématique.

Le paramètre t est assimilé au temps, le vecteur dérivé est appelé « vecteur vitesse ».

Rapport E3A, 2002

« ... on définissait les lignes de niveau d'une fonction de deux variables réelles ; il s'agissait de procéder à une étude qualitative de cette famille de courbes à partir des propriétés de la fonction donnée initialement. Cet exercice semble avoir souffert de la défaveur de la géométrie. [...] On n'a que quelques copies signalant que le vecteur gradient est normal aux lignes de niveau ; la plupart le proposent comme vecteur tangent. »

Rapport Centrale, 1998

« En géométrie différentielle, les hypothèses ne sont jamais invoquées. »

En tout point (x, y) du plan :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = (-g'(x), 1).$$

Donc, tout point $(x, y) = (x, g(x))$ de G est régulier et l'équation de la tangente est :

$$-g'(x)(X - x) + (Y - g(x)) = 0.$$

On retrouve l'équation bien connue de la tangente en un point du graphe de g .

■ Les coniques passant par O , étude au point O

• L'équation d'une conique passant par O est de la forme :

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey = 0$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

• $\overrightarrow{\text{grad}} f(0, 0) = (d, e)$.

O est un point singulier si, et seulement si, $d = e = 0$.

Dans ce cas, l'équation est : $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$.

– Si $ac - b^2 > 0$, la conique est $\{O\}$.

– Si $ac - b^2 = 0$, il s'agit d'une droite passant par O .

– Si $ac - b^2 < 0$, c'est l'union de deux droites sécantes en O .

• Le point O est un point régulier lorsque $(d, e) \neq (0, 0)$. Dans ce cas, la tangente en O a pour équation :

$$dx + ey = 0.$$

► Pour s'entraîner : ex. 4.

4 Surface définie par une représentation cartésienne

Dans les paragraphes qui suivent, E est un espace euclidien de dimension 3. Il est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le produit scalaire utilisé est noté $(\mid)$ et la norme associée, $\|\mid\|$.

Les points de E sont repérés par leurs coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On s'autorise, parfois, à parler du point (x, y, z) de l'espace, au lieu de dire : le point de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

4.1. Représentation cartésienne explicite

Soit un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et g une application définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) sur U . L'équation :

$$z = g(x, y)$$

définit une surface $\mathcal{S}$ de E .

Une telle équation est appelée une équation cartésienne explicite.

Lorsque la courbe est décrite par une équation du type :

$$f(x, y) = 0, \quad \text{ou} \quad f(x, y) = k,$$

on parle d'équation cartésienne implicite.

Lorsque l'on peut exprimer y en fonction de x , ou x en fonction de y :

$$y = g(x), \quad \text{ou} \quad x = h(y),$$

on parle d'équation cartésienne explicite.

Rapport Centrale, 1997
« Trop de candidats ont fait une impasse sur la géométrie différentielle et se sont retrouvés, de ce fait, lourdement pénalisés. »

La section de $\mathcal{S}$ par un plan parallèle à (yOz) , d'équation $x = x_0$, est une courbe. Plus précisément, c'est le graphe de la fonction $y \mapsto z = g(x_0, y)$.

De même, la section de $\mathcal{S}$ par un plan parallèle à (xOz) , d'équation $y = y_0$, est le graphe de la fonction $x \mapsto z = g(x, y_0)$.

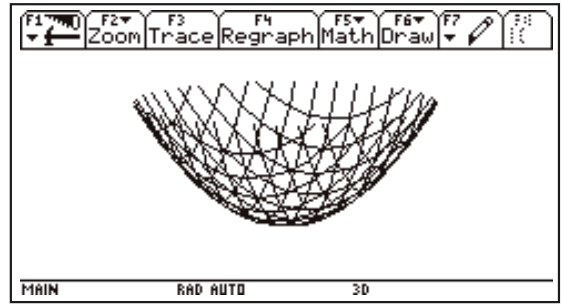
Les calculettes TI permettent de représenter de telles surfaces en utilisant effectivement leurs intersections avec des plans parallèles aux plans de coordonnées.

Pour cela, dans MODE, choisir : graph . . . 3D.

Dans l'écran : Y=, rentrer la fonction désirée :

$$z1 = x^2 + y^2.$$

Passer dans l'écran : GRAPH.



Doc. 14. Paraboloïde de révolution d'équation :

$$z = x^2 + y^2$$

vu par la TI.

La fenêtre utilisée est la fenêtre standard modifiée en prenant : $z_{\min} = 0$, $z_{\max} = 100$.

4.2. Surface décrite par une équation cartésienne implicite

Soit W un ouvert de l'espace E , f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de W dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathcal{S}$ des points de l'espace de coordonnées (x, y, z) vérifiant une équation du type :

$$f(x, y, z) = 0$$

est appelé une **surface**, et l'équation $f(x, y, z) = 0$ est appelée une **équation cartésienne** implicite de $\mathcal{S}$.

Pour les curieux !

Le premier point du *théorème 1*, ainsi que le fait qu'une équation cartésienne implicite de trois variables définisse une surface pouvant être décrite localement par une équation explicite sont des conséquences du *théorème* suivant que nous admettrons.

Théorème 2 : Théorème des fonctions implicites

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une application de U dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) sur U et $a = (a_1, \dots, a_n)$ un point de U tels que :

- $f(a_1, \dots, a_n) = 0$;
- $(D_n f)(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

Alors il existe une boule ouverte B' de $\mathbb{R}^{n-1}$ de centre $(a_1, \dots, a_{n-1})$ et un réel $\alpha > 0$ tels que :

- $B' \times]a_n - \alpha, a_n + \alpha[\subset U$;
- pour tout $(x_1, \dots, x_{n-1})$ de B' , l'équation : $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, d'inconnue x_n , admet une unique solution dans $]a_n - \alpha, a_n + \alpha[$:

$$x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) ;$$

- l'application φ ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^k$ sur B' ;
- les dérivées partielles de φ en un point quelconque de B' sont, pour tout i de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$D_i \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = - \frac{D_i f(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}))}{D_n f(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}))}.$$

De plus, les différentes composantes de f jouant ici le même rôle, le théorème s'applique dès que :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(a_1, \dots, a_n) \neq \vec{0}.$$

Si $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ et $(D_j f)(a_1, \dots, a_n) \neq 0$, on pourra exprimer la j -ième composante des solutions de $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ en fonction de $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ dans un voisinage de $(a_1, \dots, a_n)$.

4.3. Courbe tracée sur la surface, normale et plan tangent

Dans ce paragraphe, on considère toujours W , un ouvert de l'espace E , f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de W dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{S}$, la surface d'équation :

$$f(x, y, z) = 0.$$

Soit (I, Γ, C) une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$. On note :

$$\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

On dit que cette **courbe** est **tracée sur la surface** $\mathcal{S}$ lorsque $C \subset \mathcal{S}$, c'est-à-dire :

$$\forall t \in I \quad f(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

Théorème 3

Soit (x_0, y_0, z_0) un point de la surface $\mathcal{S}$, et (I, Γ, C) une courbe régulière, de classe $\mathcal{C}^1$, tracée sur $\mathcal{S}$.

On suppose que :

- $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$;
- la courbe C passe par (x_0, y_0, z_0) pour la valeur t_0 du paramètre :

$$\Gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0).$$

Alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0)$ est orthogonal au vecteur vitesse $\Gamma'(t_0)$.
- La tangente à la courbe C au point (x_0, y_0, z_0) est incluse dans le plan d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(X - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(Y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(Z - z_0) = 0.$$

Démonstration

Puisque, pour tout t , $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{S}$, la fonction $(t \mapsto f(x(t), y(t), z(t)))$ est constante. Sa dérivée est nulle et, de même que dans la démonstration du *théorème* 1, on obtient, pour $t = t_0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0)$ est orthogonal au vecteur vitesse $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ au point (x_0, y_0, z_0) de la courbe C . Le reste du *théorème* en découle.

De même qu'au paragraphe précédent, le vocabulaire utilisé est celui de la cinématique. Le paramètre t est assimilé au temps, le vecteur dérivé est appelé « vecteur vitesse ».

Ceci permet de donner les définitions suivantes :

Soit (x_0, y_0, z_0) un point de la surface $\mathcal{S}$.

- Ce point est dit **régulier** lorsque $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$.
- Ce point est dit **singulier** lorsque $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$.

Soit (x_0, y_0, z_0) un point régulier de la surface $\mathcal{S}$.

Le **plan tangent à la surface $\mathcal{S}$** , au point (x_0, y_0, z_0) est le plan affine d'équation (doc. 15) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(X - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(Y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(Z - z_0) = 0.$$

La **normale à la surface $\mathcal{S}$** , au point (x_0, y_0, z_0) , est la droite affine (doc. 15) :

$$(x_0, y_0, z_0) + \mathbb{R} \overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0).$$

Exemples

Vous connaissez déjà les surfaces suivantes, décrites par leurs équations cartésiennes.

- Un plan P , ensemble des points de l'espace de coordonnées (x, y, z) vérifiant une équation de la forme :

$$f(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0 ;$$

dans ce cas, $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = (a, b, c)$ et tous les points du plan sont réguliers.

Le plan tangent à P en un de ses points est P lui-même, la normale étant dirigée par le vecteur (a, b, c) .

- Une quadrique, ensemble des points de l'espace de coordonnées (x, y, z) vérifiant une équation de la forme :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + gx + hy + iz + j = 0.$$

Vous étudierez quand une quadrique contient des points singuliers

- Une surface connue par une équation explicite, $z = g(x, y)$. C'est aussi l'ensemble des points de l'espace de coordonnées (x, y, z) tels que :

$$f(x, y, z) = z - g(x, y) = 0.$$

Lorsque g est de $\mathcal{C}^1$, $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y), -1 \right)$ et tous les points de cette surface sont réguliers ; le plan tangent à cette surface au point $(x, y, g(x, y))$ a pour équation :

$$Z = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)(X - x) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)(Y - y) + g(x, y).$$

- Une sphère de centre O . Elle a pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

En utilisant ce qui précède, vous vérifierez que :

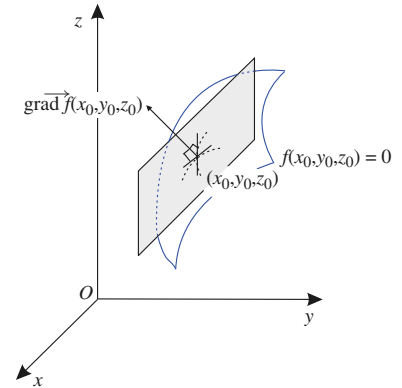
- le plan tangent en un point $N(x_0, y_0, z_0)$ de cette sphère a pour équation :

$$x_0 X + y_0 Y + z_0 Z = R^2 ;$$

- la normale en N à la sphère passe par le centre de la sphère.

Rapport Centrale, 2001

« La notion de point régulier, plan tangent à une surface ou de tangente à une courbe n'est pas toujours maîtrisée. »



Doc. 15.

Application 3

Droites incluses dans une surface et plan tangent

L'hyperboloïde de révolution à une nappe et le paraboloid hyperbolique sont des surfaces qui contiennent des droites (cf. chapitre 6)

Soit S une telle surface, D une droite incluse dans S et (x_0, y_0, z_0) un point de D .

Prouver que le plan tangent à la surface S au point (x_0, y_0, z_0) contient toute la droite D .

La droite D est une courbe tracée sur la surface S .

Soit (x_0, y_0, z_0) un point de D .

Le théorème 2 nous apprend que le plan tangent en (x_0, y_0, z_0) à la surface S contient la tangente à la courbe D en ce point. Or la tangente à une droite est la droite elle-même.

Le résultat en découle.

5 Surfaces définies par une paramétrisation

5.1. Définition

Soit φ une application de classe $\mathcal{C}^k (k \geq 1)$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi : \begin{cases} U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{cases}.$$

L'image de φ est notée S . Le triplet (U, φ, S) est appelé une **surface paramétrée** de classe $\mathcal{C}^k$.

Le couple (U, φ) est appelé un **paramétrage de la surface**.

L'ensemble S est appelé le **support de la surface**.

On note fréquemment $M(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ un point de la surface.

Un point M de la surface est appelé un **point régulier** lorsque les vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ forment une famille libre.

Le point M est régulier lorsque :
 $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \neq (0, 0, 0).$

5.2. Courbe tracée sur une surface paramétrée

Les notations sont celles du paragraphe précédent.

Considérons une application h d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans U ,

$$\text{de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I : h : \begin{cases} I \longrightarrow U \\ t \longmapsto (u(t), v(t)) \end{cases}$$

On suppose la fonction h régulière sur I : $(\forall t \in I \ h'(t) \neq (0, 0))$.

$$\text{L'application } \varphi \circ h : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Elle définit une courbe de $\mathbb{R}^3$ et tout point de cette courbe appartient à la surface (S) paramétrée par (U, φ) . Cette **courbe** est dite **tracée sur la surface (S)**.

En un point N de la courbe, régulier sur la surface, la tangente à la courbe est dirigée par le vecteur non nul :

$$\frac{d\varphi \circ h}{dt}(t) = u'(t) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u(t), v(t)).$$

On en déduit le *théorème* suivant.

Théorème 4

Soit (U, φ, S) une surface paramétrée de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $N = \varphi(u, v)$ un point régulier de S . Le plan affine :

$$P = N + \text{Vect} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right)$$

contient la tangente en N à toute courbe régulière tracée sur S et passant par N .

Si l'on note $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, une équation de ce plan est :

$$\begin{vmatrix} X - x(u, v) & \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ Y - y(u, v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ Z - z(u, v) & \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} = 0.$$

Ceci permet de définir le plan tangent et la normale en un point régulier d'une surface paramétrée.

Le plan affine $P = N + \text{Vect} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right)$ est appelé le **plan tangent** en N à la surface paramétrée (U, φ, S) .

La droite affine $D = N + \mathbb{R} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ est appelée la **normale** en N à la surface paramétrée (U, φ, S) .

Exemple

Les coordonnées sphériques donnent une représentation paramétrique de la sphère de centre O et de rayon 1.

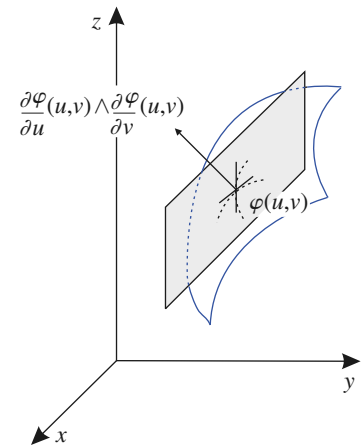
$$\varphi : (u, v) \mapsto \begin{cases} x(u, v) = \sin u \cos v \\ y(u, v) = \sin u \sin v \\ z(u, v) = \cos u \end{cases}$$

De plus :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lorsque $\sin u \neq 0$, ces vecteurs sont linéairement indépendants. Tout point de la sphère, paramétrée par φ , autre que les points $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$ est régulier et la normale en un tel point régulier est dirigée par :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \sin u \overrightarrow{OM}.$$



Doc. 16.

► Pour s'entraîner : ex. 6.

► Pour s'entraîner beaucoup plus : Le ruban de Möbius, page 304.

5.3. Représentation cartésienne explicite et paramétrage

Les représentations cartésiennes explicites de surface :

$$z = g(x, y),$$

avec g définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, ont été le point de départ de notre étude des surfaces.

Soit $\mathcal{S}$ une telle surface.

Elle peut aussi être définie par une représentation paramétrique. En effet, l'application :

$$\varphi : \begin{cases} U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (x, y, g(x, y)) \end{cases}$$

paramètre la surface $\mathcal{S}$.

Exemple

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle.

- Soit un plan affine P de $\mathbb{R}^3$ défini par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{t}(a, b, c)$ et $\vec{r}(a', b', c')$.
- Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace :

$$M \in P \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \overrightarrow{AM} = u \vec{t} + v \vec{r}.$$

En posant $\varphi(u, v) = (x_A + ua + va', y_A + ub + vb', z_A + uc + vc')$, on a une paramétrisation du plan P . On constate que :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \vec{t} \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \vec{r}.$$

On en déduira, avec bonheur, que le plan tangent en tout point de (P) est le plan (P) lui-même !

On pose :

$$f(x, y, z) = z - g(x, y)$$

et on calcule :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y).$$

Les vecteurs :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \text{ et } \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z).$$

sont colinéaires.

Les deux points de vue (équation cartésienne ou paramétrage) donnent le même plan tangent et la même normale. Heureusement !

6 Intersection de deux surfaces

Soit S_1 et S_2 deux surfaces définies par une représentation cartésienne ou une représentation paramétrique de classe $\mathcal{C}^1$, et un point M de $S_1 \cap S_2$ régulier sur chacune des deux surfaces.

Lorsque les plans tangents en M à S_1 et S_2 sont confondus, les **surfaces** S_1 et S_2 sont dites **tangentes** en M .

Conformément au programme, nous admettrons le *théorème* suivant.

Théorème 5

Soit S_1 et S_2 deux surfaces de classe $\mathcal{C}^1$, non tangentes en un point M de leur intersection. On suppose que M est régulier sur chacune des deux surfaces. Alors, au voisinage de M , $S_1 \cap S_2$ est une courbe régulière (C)

et la tangente à (C) en M est l'intersection des plans tangents en M aux deux surfaces.

Exemple : Droite et plans

Soit P et Q deux plans non parallèles, d'équations :

$$\begin{cases} ux + vy + wz + h = 0 \\ u'x + v'y + w'z + h' = 0 \end{cases}$$

P et Q non parallèles équivalent à l'indépendance linéaire de leurs vecteurs normaux $\vec{N}(u, v, w)$ et $\vec{N}'(u', v', w')$. L'intersection des deux plans est une droite affine dirigée par $\vec{N} \wedge \vec{N}'$.

Pour déterminer l'intersection de deux surfaces, il est préférable d'avoir :

- une équation cartésienne de l'une des deux, $F(x, y, z) = 0$;
- une représentation paramétrique de l'autre :

$$(u, v) \mapsto \varphi(u, v).$$

L'intersection s'obtient alors en résolvant $F(\varphi(u, v)) = 0$.

7 Quelques exemples de surfaces remarquables (programme PC)

7.1. Cylindres

On appelle **cylindre** une partie $\mathcal{C}$ de l'espace qui admet, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ bien choisi, une équation du type :

$$f(x, y) = 0 \quad (1)$$

On remarque que la troisième composante n'apparaît pas dans l'équation.

Si le couple (x, y) est solution de (1), alors, pour tout z , le point de coordonnées (x, y, z) est dans $\mathcal{C}$.

D'un point de vue géométrique, si le point $M = O + x\vec{i} + y\vec{j}$ du plan (xOy) est dans $\mathcal{C}$, alors toute la droite affine $M + \mathbb{R}\vec{k}$ est incluse dans $\mathcal{C}$.

L'intersection de $\mathcal{C}$ avec un plan parallèle à (xOy) est une courbe de ce plan appelée **section droite** du cylindre.

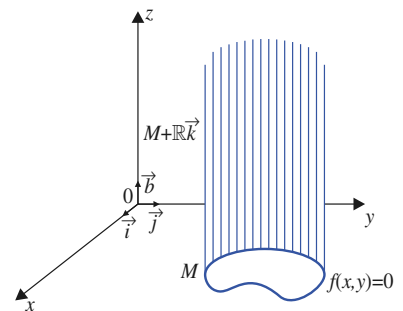
Les droites $M + \mathbb{R}\vec{k}$, sont appelées les **génératrices du cylindre** $\mathcal{C}$.

On suppose la fonction f de classe $\mathcal{C}^1$. L'application 3 montre, sans effectuer de calcul, qu'en un point régulier M du cylindre $\mathcal{C}$, la génératrice $M + \mathbb{R}\vec{k}$ du cylindre est entièrement incluse dans le plan tangent en M à la surface $\mathcal{C}$.

Par ailleurs, l'équation du plan tangent au point M de coordonnées (x, y, z) de $\mathcal{C}$ est, d'après le *théorème 2* :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)(Y - y) = 0.$$

On retrouve, à l'aide de cette équation, le fait que la génératrice $M + \mathbb{R}\vec{k}$ est incluse dans le plan tangent en M .



Doc. 17.

On considère la surface (S) de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 = 4$.

Il s'agit du cylindre de révolution d'axe (Oz) , de rayon 2.

Tout point de (S) est régulier.

Le plan tangent en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de (S) a pour équation :

$$x_0x + y_0y = 4.$$

7.2. Cônes

Soit S un point de l'espace. On appelle **cône de sommet S** une partie de l'espace qui est la réunion d'une famille de droites affines passant toutes par S .

Cela signifie que, si M est un point du cône, différent de S , alors la droite (SM) est incluse dans le cône.

Ces droites s'appellent les **généatrices du cône**.

Soit une surface $\mathcal{Q}$ d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Cette surface est un cône de sommet O lorsque la fonction f vérifie la propriété :

$$f(x, y, z) = 0 \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0.$$

De même que pour les cylindres, l'application 3 montre qu'en un point régulier M du cône $\mathcal{Q}$ de sommet O , la génératrice (OM) du cône est entièrement incluse dans le plan tangent en M à la surface $\mathcal{Q}$.

Exemple

On appelle cône de révolution d'axe Oz , de sommet O et de demi-angle au sommet θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) l'ensemble $\mathcal{Q}$ constitué du point O et des points M tels que l'angle de la droite (OM) et de l'axe Oz soit θ .

Une équation cartésienne de ce cône est :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - \tan^2(\theta)z^2 = 0.$$

Une représentation paramétrique du cône est :

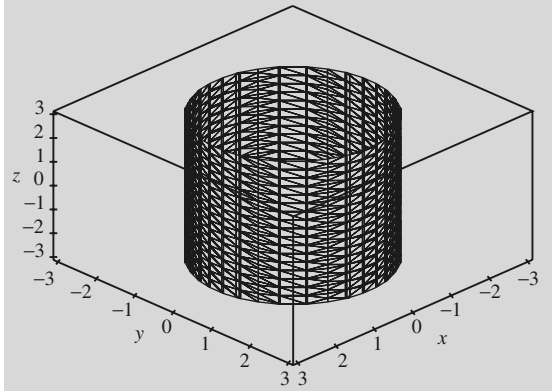
$$(t, z) \mapsto \begin{cases} x = z \cos t \tan \theta \\ y = z \sin t \tan \theta \\ z = z \end{cases}$$

Tout point du cône, à l'exception du sommet O , est un point régulier.

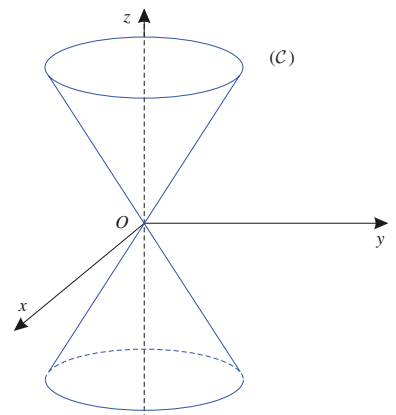
L'équation du plan tangent en un point de $\mathcal{Q}$, de coordonnées $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, est :

$$xX + yY - \tan^2(\theta)zZ = 0.$$

```
> restart:with(plots):implicitplot
(x*exp(y)+y^2*exp(x),x=-1..1,
y=-1..1,scaling=(constrained);
```



Doc. 18.



Doc. 19. Un cône d'axe (Oz) .

7.3. Surfaces de révolution

Soit D une droite de l'espace. Une **surface de révolution d'axe D** est une surface obtenue en faisant tourner une courbe d'un plan P contenant la droite D autour de cette droite.

On choisit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace tel que l'axe de rotation soit l'axe $Oz = O + \mathbb{R}\vec{k}$.

On utilise les coordonnées cylindriques relatives à ce repère en notant :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}.$$

Une **méridienne d'une surface de révolution** est l'intersection de la surface avec un plan contenant l'axe de rotation :

$$P = O + \mathbb{R}\vec{u}(\theta) + \mathbb{R}\vec{k}.$$

Il s'agit d'une courbe de ce plan qui admet donc une équation de la forme :

$$g(r, z) = 0 \quad \text{ou} \quad h(r^2, z) = 0.$$

La surface de révolution d'axe (Oz) , définie par cette méridienne, admet l'équation cartésienne :

$$h(x^2 + y^2, z) = 0.$$

Un **parallèle d'une surface de révolution** est l'intersection de la surface avec un plan perpendiculaire à l'axe de rotation. C'est un cercle ou une union de cercles centrés sur l'axe de rotation.

Exemple

L'hyperboloïde de révolution à une nappe d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

est une surface de révolution d'axe (Oz) .

Avec les coordonnées cylindriques, on trouve l'équation d'une méridienne :

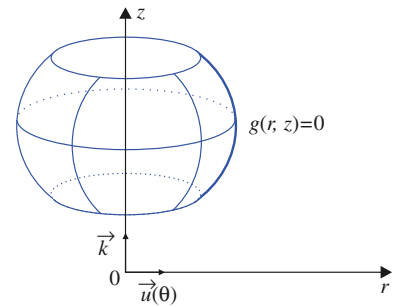
$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Il s'agit d'une hyperbole.

Un parallèle est l'intersection de la surface avec un plan d'équation $z = k$.

On obtient le cercle de ce plan centré sur l'axe (Oz) et d'équation :

$$x^2 + y^2 = a^2 \left(1 + \frac{k^2}{c^2} \right).$$



Doc. 20.

FICHE MÉTHODE

- Pour **déterminer la tangente** en un point d'une courbe définie paramétriquement :
 - si le point est régulier, la tangente est dirigée par le vecteur dérivé en ce point ;
 - si le point n'est pas régulier, la tangente est dirigée par le premier vecteur dérivé non nul, s'il en existe.
- Les formules suivants permettent de **calculer la courbure** :

$$c(t) = \frac{\left[\frac{d\vec{M}}{dt}, \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} \right]}{\left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\|^3}$$

- Avec le repère de Frénet :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{dt} &= \frac{ds}{dt} \vec{T}(t) \\ \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} &= \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T}(t) + c(t) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \vec{N}(t). \end{aligned}$$

- Dans le cas d'une courbe paramétrée par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \vec{OM}(t) &= x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} \\ \frac{d\vec{M}}{dt} &= x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j} \\ \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} &= x''(t) \vec{i} + y''(t) \vec{j} \\ c(t) &= \frac{(x'y'' - y'x'')}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

- Lorsque l'arc est défini en coordonnées polaires par $\rho = \rho(\theta)$

$$\begin{aligned} \vec{OM}(\theta) &= \rho(\theta) \vec{u}(\theta) \\ \frac{d\vec{M}}{d\theta} &= \rho' \vec{u}(\theta) + \rho \vec{v}(\theta) \\ \frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2} &= (\rho'' - \rho) \vec{u}(\theta) + \rho' \vec{v}(\theta) \\ c(\theta) &= \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

FICHE MÉTHODE

- Pour **déterminer le rayon de courbure**, on peut :
- utiliser les tableaux précédents et la définition $R = 1/c$;
- exprimer $\frac{ds}{dt}$, puis $\vec{T}$ et $\varphi = (\vec{i}, \vec{T})$; alors :

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{d\varphi};$$

- écrire :

$$R = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\left[\frac{d\vec{M}}{dt}, \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}\right]}.$$

- La **tangente en un point régulier** $M(a, b)$ d'une courbe plane définie par une représentation implicite $f(x, y) = 0$ est la droite passant par M et normale au vecteur $\vec{\text{grad}} f(a, b)$.

- Pour montrer qu'un point M d'une surface est régulier :

- si la surface est définie par une équation cartésienne explicite $z = g(x, y)$, avec g de classe $\mathcal{C}^1$, on rappelle que tout point de cette surface est régulier ;
- si la surface est définie par une équation cartésienne implicite, $f(x, y, z) = 0$, avec f de classe $\mathcal{C}^1$, on vérifie que $\vec{\text{grad}} f(M) \neq 0$;
- si la surface est définie par une représentation paramétrique, $M = \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, on vérifie que les vecteurs $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ sont linéairement indépendants.

- **Plan tangent en un point régulier** M d'une surface

- si la surface est définie par une représentation implicite $f(x, y, z) = 0$ et $M = (a, b, c)$, l'équation du plan tangent en M est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)(X - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)(Y - b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)(Z - c) = 0 ;$$

- si la surface est définie par une représentation paramétrique, $M = \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ et $M = \varphi(u, v)$, l'équation du plan tangent en M est :

$$\begin{vmatrix} X - x(u, v) & \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ Y - y(u, v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ Z - z(u, v) & \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} = 0 ;$$

- si la surface est définie par une représentation cartésienne explicite, on se ramène à l'un des cas ci-dessus.

FICHE MÉTHODE

● **Normale en un point régulier** M d'une surface :

- si la surface est définie par une représentation implicite $f(x, y, z) = 0$ et $M = (a, b, c)$, la normale est la droite :

$$(a, b, c) + \mathbb{R} \overrightarrow{\text{grad}} f(a, b, c) ;$$

- si la surface est définie par une représentation paramétrique $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ et $M = \varphi(u, v)$, la normale est la droite :

$$D = N + \mathbb{R} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) ;$$

- si la surface est définie par une représentation cartésienne explicite, on se ramène à l'un des cas ci-dessus.

● Pour étudier en un point la **courbe définie par l'intersection de deux surfaces**, on vérifie :

- si le point est régulier sur chacune des deux surfaces ;
- si les deux surfaces ne sont pas tangentes en ce point.

On peut alors conclure que :

- le point est régulier sur la courbe ;
- la tangente en ce point est l'intersection des deux plans tangents en ce point aux deux surfaces.

Exercice résolu

L'hyperbole

ÉNONCÉ

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (H) est l'hyperbole équilatère d'équation $xy = 1$.

1) Soit A, B , et C trois points distincts de (H) d'abscisses respectives a, b , et c .

a) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre K du triangle (ABC) . Que remarquez-vous ?

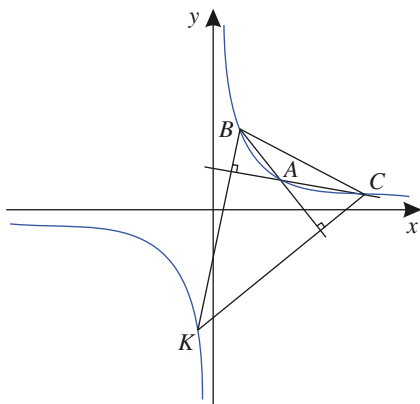
b) Lorsque le cercle circonscrit au triangle ABC recoupe l'hyperbole (H) en un quatrième point D , montrer que D se déduit de K par une transformation géométrique simple.

2) Soit J la projection orthogonale du point O sur la tangente en un point M de l'hyperbole (H) . Donner une équation polaire de l'ensemble des points J et tracer cet ensemble et (H) sur le même graphe.

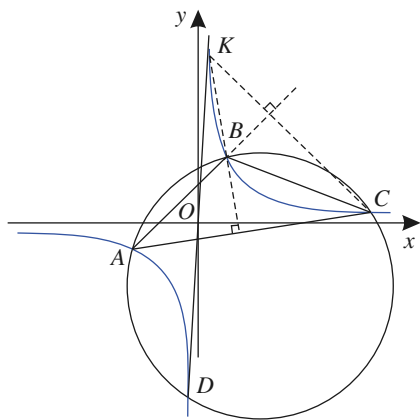
3) Déterminer le rayon de courbure en un point M de l'hyperbole.

CONSEILS

Faites des figures.



Doc. 1.



Doc. 2.

SOLUTION

1) a) Les coordonnées (x, y) de K s'obtiennent par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)(c-b) + \left(y - \frac{1}{a}\right) \left(\frac{b-c}{bc}\right) = 0 \\ (x-b)(c-a) + \left(y - \frac{1}{b}\right) \left(\frac{a-c}{ac}\right) = 0 \end{cases}$$

On obtient : $\begin{cases} x = -\frac{1}{abc} \\ y = -abc \end{cases}$, donc $K \in (H)$ (doc. 1).

b) Le cercle circonscrit au triangle (ABC) a une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0.$$

L'intersection de (H) et du cercle circonscrit à (ABC) s'obtient en résolvant le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Donc, les valeurs des abscisses des points de l'intersection vérifient :

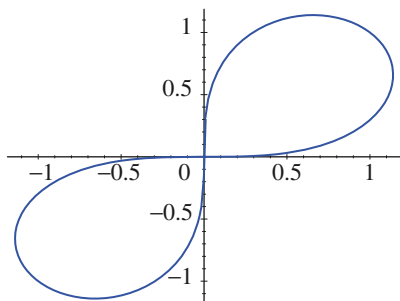
$$x^4 - 2\alpha x^3 + \gamma x^2 - 2\beta x + 1 = 0.$$

Cette équation admet a, b et c pour racines. On note d la quatrième racine. Le produit des racines est $abcd = 1$. On en déduit que D est le symétrique de K par rapport à O (doc. 2).

2) Les tangentes à (H) ne passent jamais par O , donc $J \neq O$. Soit J , de coordonnées polaires (r, θ) . L'équation de la droite orthogonale en J à (OJ) est :

$$x \cos \theta + y \sin \theta = r, \quad \text{avec } \theta \in [0, 2\pi].$$

Quelles sont les coordonnées de D ,
quelles sont celles de K ?



Doc. 3. Attention, dans ce tracé « à la machine », le repère n'est pas ortho-normé.

Cette droite est tangente à (H) si, et seulement si, elle la rencontre en un point double, ce qui équivaut à dire que l'équation :

$$x^2 \cos \theta - rx + \sin \theta = 0 \text{ admet une racine double, c'est-à-dire :}$$

$$\Delta = r^2 - 4 \sin \theta \cos \theta = 0.$$

Une équation polaire du lieu des points J est donc :

$$r = \pm \sqrt{2 \sin 2\theta}, \quad \text{avec } \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[.$$

Étude et graphe

La courbe d'équation $r = -\sqrt{2 \sin 2\theta}$ se déduit de celle d'équation $r = \sqrt{2 \sin 2\theta}$ par une symétrie par rapport à O .

Étude de $r = \sqrt{2 \sin 2\theta}$.

r est défini pour θ dans $\left[0, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right]$ et $r(\theta + \pi) = r(\theta)$, donc la courbe s'obtiendra en étudiant et traçant la partie correspondant à $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, puis en complétant par une symétrie par rapport à O . Il faut exclure le point O qui n'est pas un point J (doc. 3).

3) En utilisant une équation polaire de (H) :

$$R(\theta) = \frac{1}{2(\sin \theta \cos \theta)^{3/2}}.$$

En utilisant le paramétrage $x \mapsto \left(x, \frac{1}{x} \right)$:

$$R(x) = \frac{1}{2x^3}(x^2 + 1)^{3/2}.$$

Exercice résolu

Coniques et tangentes

ÉNONCÉ

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) (C) est une conique de centre O , ne passant pas par O . Donner une équation de (C) , déterminer ses points réguliers et une équation de la tangente en chacun de ces points.

2) Soit (H) l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur u, v et h pour que la droite (D) d'équation $uX + vY + h = 0$ soit tangente à (H) .

3) Déterminer l'ensemble des points desquels on peut mener deux tangentes orthogonales à l'hyperbole (H) .

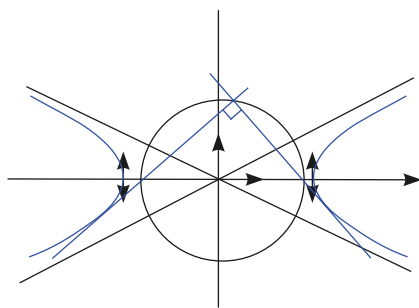
CONSEILS

Une conique à centre est une ellipse ou une hyperbole. Dans l'équation ci-contre, on a donc :

$$ac - b^2 \neq 0.$$

Les équations $uX + vY + h = 0$ et $u'X + v'Y + h' = 0$ définissent la même droite affine si, et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$(u, v, h) = \lambda(u', v', h').$$



Doc. 1.

SOLUTION

1) Une conique de centre O admet, dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ une équation de la forme :

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + d = 0.$$

Elle ne passe pas par O , donc $d \neq 0$.

Puisque $\vec{\text{grad}} f(x, y) = (2ax + 2by, 2bx + 2cy)$, tout point de (C) est régulier.

L'équation de la tangente au point $M(x, y)$ de (C) se simplifie en :

$$(ax + by)X + (bx + cy)Y + d = 0.$$

2) D'après 1), la tangente en un point $M(x, y)$ de (H) a pour équation :

$$\frac{x}{a^2}X - \frac{y}{b^2}Y - 1 = 0.$$

On en déduit que la droite (D) , d'équation $uX + vY + h = 0$, est tangente à (H) si, et seulement si :

$$a^2u^2 - b^2v^2 = h^2 \quad \text{et} \quad h \neq 0.$$

3) Soit $P(r, s)$ un point du plan, $P \neq O$, et (D) la droite passant par P et de coefficient directeur m . Une équation de (D) est :

$$y = mx + (s - mr).$$

On exclut les droites verticales de notre étude. Pourquoi ?

D'après 2), (D) est tangente à (H) si, et seulement si :

$$m^2(a^2 - r^2) + 2mrs - (b^2 + s^2) = 0 \quad \text{et} \quad (s - mr) \neq 0.$$

On sait que :

- un trinôme du second degré a au plus deux racines, donc par un point P passent au plus deux tangentes à (H) ;
- deux droites de pentes m et m' , sont orthogonales si, et seulement si, $mm' = -1$.

On en déduit que, si $P(r, s)$ répond à la question, alors :

$$b^2 + s^2 = a^2 - r^2.$$

et le point $P(r, s)$ est sur le cercle d'équation $r^2 + s^2 = a^2 - b^2$.

Si $a^2 - b^2 \leq 0$, le problème n'a pas de solution.

Réciproquement, supposons $a^2 - b^2 > 0$ et considérons un point $P(r, s)$ du cercle (Γ) d'équation $r^2 + s^2 = a^2 - b^2$.

Par P , on peut tracer deux tangentes à (H) qui sont orthogonales sauf dans le cas où $\frac{r^2}{a^2} - \frac{s^2}{b^2} = 0$.

Finalement, lorsque $a^2 - b^2 > 0$, l'ensemble des points P d'où l'on peut tracer deux tangentes à (H) qui soient orthogonales est le cercle (Γ) privé de ses quatre points d'intersection avec les asymptotes de l'hyperbole.

Exercices

1 Étudier les points stationnaires de la courbe définie par :

$$\begin{cases} x(t) = 2t \sin(t) - t^2 \cos(t) \\ y(t) = 3t^2 \sin(t) - t^3 \cos(t) \end{cases}$$

2 Étude et tracé de la courbe définie par :

$$\rho = \frac{\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta}{1 - \sin \theta} = \frac{\sin 2\theta(1 + 2 \cos \theta)}{1 - \sin \theta}$$

Déterminer les points multiples.

3 Déterminer le rayon de courbure minimum du graphe de $y = e^x$.

4 Montrer que l'équation $xe^y + y^2e^x = 0$ définit, dans une boule de centre $O(0, 0)$, une courbe passant par O et la tracer au voisinage de O .

5 On considère la surface S d'équation $z = \frac{xy}{a} (a > 0)$.

1) Utiliser un logiciel de calcul formel pour déterminer l'allure de S .

2) Exprimer une équation du plan tangent en un point régulier de S .

6 On considère la surface (S) définie par la paramétrisation

$$\varphi : (u, v) \longmapsto (u - v, u^2 + v^2, u^2 - v^2).$$

1) Utiliser un logiciel de calcul formel pour tracer un graphe de la surface.

2) Déterminer les points multiples de cette surface.

3) Déterminer ses points réguliers et une équation du plan tangent en un point régulier.

7 Soit a , b et c trois réels strictement positifs tels que $a < c$.

Déterminer une équation de la surface de révolution obtenue en faisant tourner l'ellipse du plan (yOz) d'équation :

$$\frac{(y - c)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

autour de l'axe (Oz) .

8 Étude et tracé de la courbe (C) paramétrée par :

$$x = \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}; y = \frac{t^2}{(t+1)(t-1)}.$$

Montrer que (C) a une parabole asymptote d'axe parallèle à (Ox) . Préciser sa position par rapport à cette parabole.

9 La chaînette est la courbe décrite par un fil pesant, homogène, tenu à ses deux extrémités.

Elle admet pour équation $y = \frac{\text{ch}(ax)}{a}$, où $a \in \mathbb{R}^*$.

1) Étudier et tracer une telle courbe.

2) Déterminer la longueur d'un arc de chaînette.

3) Préciser le repère de Frénet et le rayon de courbure en un point.

10 On appelle parabolôïde elliptique une surface (S) dont l'équation dans un repère orthonormé convenablement choisi est :

$$mz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

(avec $a, b > 0, m \neq 0$).

1) Utiliser un logiciel de calcul formel pour déterminer l'allure de la surface.

2) Déterminer les intersections de S avec les plans de coordonnées et avec un plan parallèle à (xOy) .

3) Déterminer les projections orthogonales de S sur les plans de coordonnées.

4) Déterminer les points réguliers du parabolôïde elliptique et le plan tangent en un de ces points.

11 On note E un espace affine euclidien orienté de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désigne d'autre part par A l'ensemble des couples (α, f) de fonctions à valeurs réelles vérifiant les propriétés suivantes :

- α et f sont définies, continues et croissantes sur $[1, +\infty[$,
- α et f sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[1, +\infty[$,
- $\alpha(1) = f(1) = 0$,
- $\forall x \in]1, +\infty[\quad f'(x) > 0$.

Pour tout couple $(\alpha, f) \in A$, on considère la surface $S_{\alpha, f}$ de E définie paramétriquement par :

$$\overrightarrow{OM}(u, v) = \alpha(u) \vec{i} + u \vec{e}_v + f(u) \vec{k}$$

où :

$$\vec{e}_v = \cos v \vec{i} + \sin v \vec{j}$$

et :

$$(u, v) \in [1, +\infty[\times [0, 2\pi].$$

1) Montrer que $S_{a,f}$ admet un plan de symétrie. En donner une équation.

2) Étudier, suivant les valeurs du réel z_0 , l'intersection de $S_{a,f}$ avec le plan P_0 d'équation $z = z_0$. Préciser la nature de cette intersection et en déduire une interprétation géométrique des paramètres u et v .

3) Montrer que l'intersection de $S_{a,f}$ et du plan d'équation $y = 0$ est la réunion de deux courbes disjointes. On note C_1 (respectivement C_2) celle de ces deux courbes qui contient le point de coordonnées $(1, 0, 0)$ (respectivement $(-1, 0, 0)$).

4) a) Déterminer en tout point, $M(u, v)$ de $S_{a,f}$ tel que $u \neq 1$, les vecteurs dérivés partiels $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$.

b) Déterminer en tout point, $M(u, v)$ de $S_{a,f}$ tel que $u \neq 1$, un vecteur normal $\vec{N}$.

c) Que peut-on dire de $\vec{N}$ en tout point de C_1 ou de C_2 en lequel ce vecteur est défini ? Quelle propriété de ces deux courbes met-on ainsi en évidence ?

12

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit a et R deux réels tels que $0 < R < a$.

On considère la sphère S de l'espace de centre $(0, 0, a)$ et de rayon R .

1) Déterminer une équation cartésienne du cône de sommet O dont les génératrices sont tangentes à la sphère S .

2) Vous disposez maintenant d'un cornet de glace virtuel surmonté d'une boule parfaite, mais il y a de la place à l'intérieur !

Quel est le rayon maximum d'une petite boule supplémentaire que l'on puisse placer dans le cornet.

Indication : Faites des dessins, car un exercice de géométrie sans dessin, c'est comme un cornet de glace sans glace !

Annexes

1. Quelques propriétés des cofacteurs d'une matrice

(D'après CCP 1993 Math I)

ÉNONCÉ

A) Quelques résultats d'algèbre linéaire

Soit A une matrice carrée d'ordre $(n+1)$, où n est un entier supérieur ou égal à 1. Ses éléments sont des nombres réels notés a_{ij} et, pour la commodité des notations, on fait varier l'indice de ligne i et l'indice de colonne j de 0 à n . Le déterminant de A est noté $\text{Det } A$ et le cofacteur d'un élément a_{ij} est noté a'_{ij} .

On rappelle que $(-1)^{i+j}a'_{ij}$ est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne d'indice i et la colonne d'indice j de A . On note A' la matrice des cofacteurs a'_{ij} et $\text{Som } A'$ la somme des $(n+1)^2$ éléments de A' .

De cette matrice A , on déduit la matrice rectangulaire B qui a pour éléments :

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{0j} \quad (1)$$

l'indice de ligne i varie maintenant de 1 à n et l'indice de colonne j toujours de 0 à n .

On appelle $S(B)$ le système d'équations linéaires associé à B :

$$\sum_{j=0}^n b_{ij}x_j = 0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n$$

l'espace vectoriel des solutions de $S(B)$ est noté $X(B)$ et sa dimension est donnée par le rang de B grâce à l'égalité $\dim X(B) = n+1 - \text{rg } B$.

On note $B(z_0, z_1, \dots, z_n)$, ou en abrégé $B(z)$, la matrice carrée d'ordre $(n+1)$ obtenue en ajoutant à B une ligne d'indice 0 formée de $(n+1)$ variables $z_0, z_1, \dots, z_n$ et l'on note $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ les cofacteurs de $z_0, z_1, \dots, z_n$ dans $B(z)$, ce qui signifie que :

$$\text{Det } B(z) = \sum_{j=0}^n \beta_j z_j \quad (2)$$

La matrice $B(1, 1, \dots, 1)$, obtenue en attribuant la valeur 1 à toutes les variables, sera notée $B(1)$.

Enfin, de cette matrice B , on déduit la matrice carrée C dont les éléments sont :

$$c_{i,j} = b_{ij} - b_{i0} \quad (3)$$

les indices de ligne i et de colonne j varient maintenant tous les deux de 1 à n ; on peut évidemment passer de A à C :

$$c_{i,j} = a_{ij} - a_{0j} - a_{i0} + a_{00} \quad (4)$$

1) Pour commencer, on ne considère que la matrice B et les matrices carrées associées $B(z)$, $B(1)$ et C .

a) Démontrer que $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \in X(B)$.

b) Quels sont les éléments de $X(B)$ lorsque $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ ne sont pas tous nuls ?

c) Trouver une égalité simple reliant le rang des matrices C et $B(1)$.

d) Démontrer que $\text{Det } C = \sum_{j=0}^n \beta_j$.

2) On revient maintenant à la matrice A .

a) Démontrer l'égalité :

$$\beta_j = \sum_{i=0}^n a'_{ij} \text{ pour } j = 0, 1, \dots, n \quad (5)$$

On vous suggère de partir de la matrice $B(a_{00}, a_{01}, \dots, z_j, \dots, a_{0n})$ obtenue en rajoutant à B la ligne d'indice 0 de A , à l'exception de a_{0j} dans la colonne d'indice j , à la place duquel on met la variable z_j ; le déterminant de cette matrice est une fonction $\beta_j z_j + \delta_j$, où δ_j est une constante que l'on ne cherchera pas à calculer.

b) Conclure par les égalités :

$$\text{Det} C = \sum_{j=0}^n \beta_j = \text{Som } A' \quad (6)$$

3) Dans cette question, a, b, c sont trois nombres réels positifs et :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer la matrice A' , les coefficients $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ et $\text{Det} A$.

b) Décomposer la fonction :

$$F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2(y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2)$$

en un produit de quatre facteurs non triviaux, et en déduire une expression factorisée de $\text{Som } A'$.

B) Encore un peu d'algèbre linéaire

Dans cette partie, la matrice A est une matrice carrée quelconque d'ordre $n+1$. On veut démontrer que, si $\text{Det} A$ et $\text{Som } A'$ sont nuls, la somme des a'_{ij} est déjà nulle, ou bien dans toutes les colonnes de A' , ou bien dans toutes les lignes de A' , les deux éventualités ne s'excluant pas.

Pour démontrer ce *théorème*, on distinguera d'abord le cas où A est de rang inférieur ou égal à $n-1$, puis le cas où son rang est n (maximum compatible avec l'hypothèse $\text{Det} A = 0$).

1) Calculer A' lorsque $\text{rg } A \leq n-1$.

2) On suppose maintenant que $\text{rg } A = n$.

a) Démontrer que chaque ligne $(a'_{h0}, a'_{h1}, \dots, a'_{hn})$ de A' est une solution du système d'équations $S(A)$ associé à A .

Pour démontrer l'égalité suivante, pour tout i de 0 à n :

$$\sum_{j=0}^n a_{ij} a'_{hj}$$

on suggère d'interpréter le membre de gauche comme le déterminant d'une matrice carrée d'ordre $(n+1)$ dont chaque ligne, sauf une, est égale à la ligne de même indice dans A .

b) Quelle est la dimension de $X(A)$, espace vectoriel des solutions de $S(A)$? Quel est le rang de A' ?

c) Démontrer l'existence de $(2n+3)$ nombres $a', \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ tels que $a'_{ij} = \lambda_i \mu_j a'$ quels que soient i et j , et en déduire une expression de $\text{Som } A'$ qui montre quand cette somme est nulle.

SOLUTION

A) 1) a) La formule (2) indique que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{Det } B(b_{i0}, b_{i1}, \dots, b_{in}) = \sum_{j=0}^n \beta_j b_{ij}$$

Or la matrice $B(b_{i0}, b_{i1}, \dots, b_{in})$ a deux lignes identiques, donc :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \sum_{j=0}^n \beta_j b_{ij} = 0$$

Ceci prouve que $B(b_{i0}, b_{i1}, \dots, b_{in}) \in X(B)$.

b) Soit j dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $\beta_j \neq 0$. Par définition, β_j est le déterminant de la matrice carrée d'ordre n obtenue à partir de B en barrant la j -ième colonne. Puisqu'il est non nul, les colonnes de B d'indice $0, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ sont indépendantes et $\text{rg } B = n$.

Donc :

$$\dim X(B) = (n+1) - n = 1$$

et :

$$X(B) = \mathbb{R}(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n).$$

c) Les opérations suivantes sur les colonnes de $B(1)$, notées $C_0, C_1, \dots, C_n$, ne changent pas le rang :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad C_j \leftarrow C_j - C_0$$

donc :

$$\begin{aligned} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_{10} & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n0} & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{10} & b_{11} - b_{10} & \dots & b_{1n} - b_{10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n0} & b_{n1} - b_{n0} & \dots & b_{nn} - b_{n0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit :

$$B(1) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{10} & & & \\ \vdots & C & & \\ b_{n0} & & & \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\text{rg } B(1) = 1 + \text{rg } C$.

d) Les opérations sur les colonnes de $B(1)$ effectuées précédemment ne changent pas son déterminant, donc :

$$\sum_{j=1}^n \beta_j = \text{Det } B(1) = \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{10} & & & \\ \vdots & C & & \\ b_{n0} & & & \end{pmatrix} = \text{Det } C$$

2) a) Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $z_j \in \mathbb{R}$. D'après la formule (2) :

$$\text{Det } B(a_{00}, \dots, a_{0j-1}, z_j, a_{0j+1}, \dots, a_{0n}) = \beta_j z_j + \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \beta_i a_{0i}$$

Par ailleurs, les opérations suivantes sur les lignes de :

$$B(a_{00}, \dots, a_{0j-1}, z_j, a_{0j+1}, \dots, a_{0n})$$

ne changent pas son déterminant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad L_i \leftarrow L_i - L_0$$

Donc :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{00} & \dots & a_{0j-1} & z_j & a_{0j+1} & \dots & a_{0n} \\ b_{10} & \dots & b_{1j-1} & b_{1j} & b_{1j+1} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n0} & \dots & b_{nj-1} & b_{nj} & b_{nj+1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_{00} & \dots & a_{0j-1} & z_j & a_{0j+1} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & \dots & a_{1j-1} & b_{1j} + z_j & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nj-1} & b_{nj} + z_j & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Le développement de ce dernier déterminant par rapport à la colonne d'indice j donne :

$$\begin{aligned} \text{Det } B(a_{00}, \dots, a_{0j-1}, z_j, a_{0j+1}, \dots, a_{0n}) \\ = z_j a'_{0j} + \sum_{i=1}^n (b_{ij} + z_j) a'_{ij}. \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité suivante valable pour tout réel z_j :

$$\beta_j z_j + \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \beta_i a_{0i} = z_j + \sum_{i=0}^n a'_{ij} + \sum_{i=1}^n b_{ij} a'_{ij}$$

En effectuant le calcul pour $z_j = 0$ et $z_j = 1$, on obtient, pour tout j de $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\beta_j = \sum_{i=0}^n a'_{ij}$$

b) D'après ce qui précède :

$$\text{Det } C = \sum_{j=0}^n \beta_j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n a'_{ij} = \text{Som } A'$$

$$3) a) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } A = 2a^2 b^2 c^2$$

La matrice des cofacteurs de A est :

$$A' = \begin{pmatrix} -a^4 & a^2b^2 & c^2a^2 \\ a^2b^2 & -b^4 & b^2c^2 \\ c^2a^2 & b^2c^2 & -c^4 \end{pmatrix}$$

$$B(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c^2 & -c^2 & a^2 - b^2 \\ b^2 & a^2 - c^2 & -b^2 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\beta_0 &= a^2(-a^2 + b^2 + c^2), \\ \beta_1 &= b^2(a^2 - b^2 + c^2), \\ \beta_2 &= c^2(a^2 + b^2 - c^2)\end{aligned}$$

b) La solution proposée est une suite naturelle des calculs qui viennent d'être faits ; elle détourne l'énoncé en trouvant d'abord la forme factorisée de $\text{Som } A'$ pour en déduire la factorisation de la fonction F .

D'après **A) 2) b)**, $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = \text{Det} C = \text{Som} A$.

Dans notre cas,

$$C = \begin{pmatrix} -2c^2 & a^2 - b^2 - c^2 \\ a^2 - b^2 - c^2 & -2b^2 \end{pmatrix},$$

donc :

$$\text{Det } C = 4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2$$

Quelques identités remarquables plus tard :

$$\text{Som } A' = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$$

D'après la définition de F et les valeurs de $\beta_0, \beta_1, \beta_2$:

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = -F(a, b, c)$$

donc :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

$$F(a, b, c) = -(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$$

Finalement :

$$\begin{aligned}F(x, y, z) &= x^4 + y^4 + z^4 - 2(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) \\ &= (x + y + z)(x - y - z)(-x + y - z)(-x - y + z)\end{aligned}$$

B)1) Soit A une matrice carrée d'ordre $n + 1$, de rang inférieur ou égal à $n - 1$.

La famille des colonnes de A est de rang inférieur ou égal à $n - 1$. Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la matrice A_j obtenue en barrant la j -ième colonne de A est telle que $\text{rg } A_j \leq n - 1$.

La famille des lignes de A_j est de rang inférieur ou égal à $n - 1$. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la matrice A_{ij} obtenue en barrant la i -ième ligne de A_j , est telle que $\text{rg } A_{ij} \leq n - 1$.

Or la matrice A_{ij} est une matrice carrée d'ordre n , donc son déterminant est nul. De plus, par construction :

$$\text{Det } A_{ij} = (-1)^{i+j} a'_{ij}.$$

Ceci prouve que si $\text{rg } A \leq n - 1$, alors A' est la matrice nulle.

N.B. : Une étude des matrices extraites est faite en application au chapitre 3.

2) Soit A une matrice carrée d'ordre $n + 1$, de rang n .

a) Soit $h \in \llbracket 0, n \rrbracket$. La formule de développement du déterminant selon la ligne d'indice h prouve que :

$$\forall (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\sum_{j=0}^n x_j a'_{hj} = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h-1,0} & a_{h-1,1} & \dots & a_{h-1,n} \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ a_{h+1,0} & a_{h+1,1} & \dots & a_{h+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Donc, pour $k \neq h$, $\sum_{j=0}^n a_{kj} a'_{hj} = 0$, car il s'agit du déterminant d'une matrice dont deux lignes sont identiques.

Et pour $k = h$, $\sum_{j=0}^n a_{hj} a'_{hj} = \text{Det } A = 0$, car A est de rang n .

Ceci prouve que, pour tout $h \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(a'_{h0}, a'_{h1}, \dots, a'_{hn})$ est solution de $S(A)$.

b) Puisque $\text{rg } A = n$, $\dim X(A) = 1$.

Or toutes les lignes de A' sont dans $X(A)$, donc $\text{rg } A' \leq 1$.

De plus $\text{rg } A = n$. La matrice A admet donc n colonnes indépendantes et il existe j dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ tel que les colonnes d'indices $0, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ soient indépendantes. La matrice A_j obtenue en supprimant la j -ième colonne de A est de rang n . Elle admet donc n lignes indépendantes et il existe un indice i de $\llbracket 0, n \rrbracket$ tel que la matrice A_{ij} obtenue en supprimant la i -ième ligne de A_j soit de rang n .

Donc le déterminant de A_{ij} est non nul et au moins un cofacteur de A est non nul.

Finalement, $\text{rg } A' = 1$.

c) Soit $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$ une base de $X(A)$:

$$\forall h \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \exists \lambda_h \in \mathbb{R}$$

$$(a'_{h0}, a'_{h1}, \dots, a'_{hn}) = \lambda_h (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$$

En prenant $a' = 1$, on trouve le résultat souhaité.

$$\text{Alors } \text{Som} A' = \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{j=0}^n \mu_j \right).$$

$\text{Som} A' = 0$ si, et seulement si, $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$ ou

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0 \text{ ou } \sum_{j=0}^n \mu_j = 0.$$

Or $(a'_{h0}, a'_{h1}, \dots, a'_{hn}) = \lambda_h(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$

et $(a'_{0h}, a'_{1h}, \dots, a'_{nh}) = \mu_h(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Donc, $\text{Som} A' = 0$ si, et seulement si, les sommes des termes de chaque ligne de A' sont nulles ou si les sommes des termes de chaque colonne de A' sont nulles.

2. Le ruban de Möbius

(d'après X P', 1994)

ÉNONCÉ

Augustus Möbius (1790-1868), astronome et mathématicien allemand, fut l'élève de Gauss. Son travail en Géométrie fait de lui un des précurseurs de la topologie, qui est peut-être la partie des mathématiques la plus fondamentale étudiée au XX^e siècle.

Möbius reste surtout connu pour la surface qui porte son nom, obtenue en recollant les deux extrémités d'une bande de papier après l'avoir retournée. Cette surface est l'objet du présent problème.

Ce problème est consacré à l'étude d'une surface dans l'espace $\mathbb{R}^3$ et de certaines courbes tracées sur cette surface.

On désigne par (e_1, e_2, e_3) la base naturelle de $\mathbb{R}^3$, par $(|)$ son produit scalaire et par $\| \|$ la norme correspondante.

On note $R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, -\pi \leq v \leq \pi\}$. On définit une application F de R dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$F(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v), F_3(u, v))$$

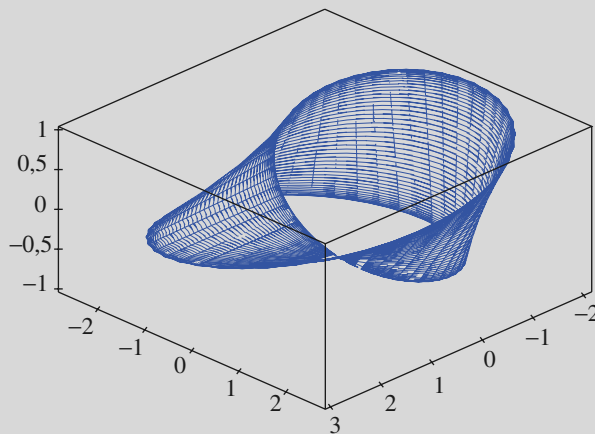
où :

$$F_1(u, v) = (2 + \sin u \cos v) \cos 2v; \quad F_2(u, v) = (2 + \sin u \cos v) \sin 2v; \quad F_3(u, v) = \sin u \sin v$$

Enfin, on note $\mathcal{M}$ l'ensemble $F(R)$.

Avec Maple :

```
> with(plots) :
> plot3d([(2+sin(u)*cos(v))*cos(2*v), (2+sin(u)*cos(v))*sin(2*v), sin(u)*sin(v)],
u=-Pi/2..Pi/2, v=-Pi..Pi, numpoints=2000, axes=BOXED);
```



Avant de vous lancer dans ce problème, il est indispensable que vous preniez une bande de papier, la retourniez, puis recolliez les deux extrémités. Vous obtenez le « ruban de Möbius ». Vérifiez que cette surface ne comporte qu'une seule face.

Partie A

1) Calculer $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$, $\left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\|^2$, $\left\| \frac{\partial F}{\partial v} \right\|^2$, $\left(\frac{\partial F}{\partial u} \mid \frac{\partial F}{\partial v} \right)$.

2) Étant donné un point (u, v) de R , déterminer tous les points (u', v') vérifiant :

$$F(u', v') = F(u, v).$$

3) Dessiner la projection orthogonale de $\mathcal{M}$ sur le plan (e_1, e_2) .

4) Déterminer les extrema de la fonction F_3 .

5) On fixe un réel b dans $[-\pi, \pi]$ et on note φ_b l'application de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varphi_b(u) = F(u, b).$$

a) Reconnaître la courbe C_b , image de φ_b , ainsi que sa projection orthogonale sur le plan (e_1, e_2) .

b) Quelle est la longueur de C_b .

6) Montrer que, si u appartient à $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la surface admet un plan tangent au point $F(u, v)$. Écrire les coordonnées d'un vecteur normal unitaire, que l'on notera $N(v)$, dans le cas où $u = 0$.

Partie B

Pour tout réel $a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on désigne par ψ_a l'application : $v \mapsto F(a, v)$ de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{R}^3$, et par D_a la courbe image.

7) Pour quels couples (a, a') a-t-on $D_a = D_{a'}$?

8) a) Reconnaître la courbe D_0 .

b) Est-il possible de choisir, pour tout point m de D_0 , un vecteur $V(m)$, normal en m à M , unitaire et dépendant continûment de m ?

9) Pour quelles valeurs de a la courbe D_a est-elle plane ?

10) Écrire la longueur $L(a)$ de D_a sous la forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer ; puis étudier la continuité de la fonction L .

Partie C

Pour tout point (u, v) de R , on pose :

$$g(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v)).$$

On fixe un réel v_0 dans $[-\pi, \pi]$.

11) Calculer le jacobien J de g au point $(0, v_0)$.

12) a) Montrer que, si $v_0 \neq \pm \frac{\pi}{2}$, il existe un ouvert U contenant $(0, v_0)$ tel que g soit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U sur $g(U)$.

b) Soit $h = g^{-1}$. Calculer les deux dérivées partielles de la fonction composée $F_3 \circ h$ au point $g(0, v_0)$.

13) Étudier la position de la surface $\mathcal{M}$ par rapport à son plan tangent au point $F(0, 0)$.

INDICATIONS ET RÉPONSES**Partie A**

1) $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \cos u (\cos v \cos 2v, \cos v \sin 2v, \sin v)$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial F_2}{\partial v}(u, v), \frac{\partial F_3}{\partial v}(u, v) \right)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial v}(u, v) = -2 \sin 2v (2 + \sin u \cos v) - \cos 2v \sin u \sin v,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial v}(u, v) = 2 \cos 2v (2 + \sin u \cos v) - \sin 2v \sin u \sin v,$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial v}(u, v) = \sin u \cos v.$$

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\|^2 = \cos^2 u,$$

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial v} \right\|^2 = 4(2 + \sin u \cos v)^2 + \sin^2 u,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u} \mid \frac{\partial F}{\partial v} \right) = 0.$$

2) En tenant compte de $2 + \sin u \cos v > 0$ et $2 + \sin u' \cos v' > 0$, l'équation $F(u', v') = F(u, v)$ devient :

$$\begin{cases} \cos 2v = \cos 2v' \\ \sin 2v = \sin 2v' \\ \sin u \sin v = \sin u' \sin v' \\ \sin u \cos v = \sin u' \cos v' \end{cases}$$

puis donne :

- si $u = 0$, ($u' = 0$ et $v = v' [\text{mod } \pi]$)
- si $u \neq 0$, ($u = u'$ et $v = v' [\text{mod } 2\pi]$) ou ($u = -u'$ et $v = v' + \pi [\text{mod } 2\pi]$).

3) La projection orthogonale de $\mathcal{M}$ sur le plan (e_1, e_2) est l'ensemble P des points du plan (xOy) de coordonnées $(x(u, v), y(u, v), 0)$ avec :

$$\begin{cases} x(u, v) = (2 + \sin u \cos v) \cos 2v \\ y(u, v) = (2 + \sin u \cos v) \sin 2v \end{cases},$$

lorsque u décrit $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et v décrit $[-\pi, \pi]$.

Posons $t = \sin u$ (t décrit $[-1, 1]$) et fixons v .

P est la réunion des segments d'extrémités les points de coordonnées :

$$((2 - \cos v) \cos 2v, (2 - \cos v) \sin 2v, 0)$$

et

$$((2 + \cos v) \cos 2v, (2 + \cos v) \sin 2v, 0).$$

P est donc la partie du plan délimitée par les courbes paramétrées du plan (xOy) d'équations :

$$\begin{cases} x_1(v) = (2 - \cos v) \cos 2v \\ y_1(v) = (2 - \cos v) \sin 2v \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} x_2(v) = (2 + \cos v) \cos 2v \\ y_2(v) = (2 + \cos v) \sin 2v \end{cases}.$$

L'étude de ces courbes est plus simple si nous utilisons une représentation polaire.

On obtient, en posant $\theta = 2v$:

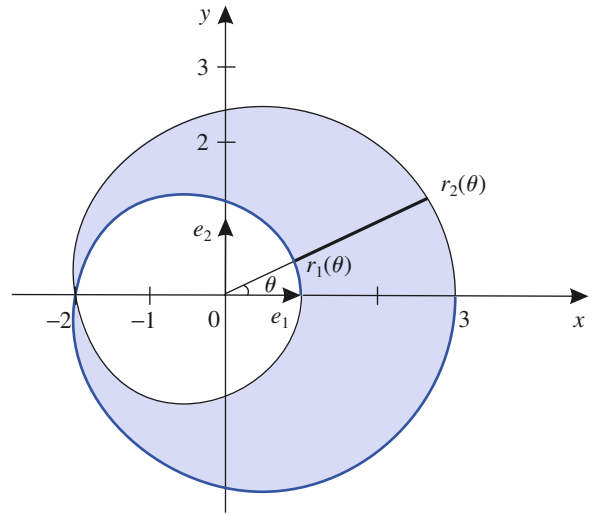
$$r_1 = 2 - \cos \frac{\theta}{2}$$

pour la première, et :

$$r_2 = 2 + \cos \frac{\theta}{2}$$

pour la seconde.

La partie P est représentée par la partie tramée du schéma suivant.



4. Le maximum de F_3 est 1, atteint lorsque :

$$\sin u = \sin v = \pm 1,$$

donc pour $u = v = \varepsilon \frac{\pi}{2}$ ($\varepsilon = \pm 1$).

Le minimum de F_3 est -1 , atteint pour :

$$\sin u = -\sin v = \pm 1,$$

donc pour $u = -v = \varepsilon \frac{\pi}{2}$ ($\varepsilon = \pm 1$).

5) a) Posons $\sin u = t$, la courbe C_b est paramétrée par :

$$t \mapsto \begin{cases} x(t) = (2 + t \cos b) \cos 2b \\ y(t) = (2 + t \cos b) \sin 2b \\ z(t) = t \sin b \end{cases}$$

avec $t \in [-1, 1]$.

C_b est donc le segment de droite dont les extrémités sont les points correspondants aux valeurs -1 et 1 de t . La projection orthogonale de ce segment sur le plan (e_1, e_2) est le segment décrit sur le schéma de la question 3), pour l'angle polaire $\theta = 2b$.

b) La longueur de C_b est :

$$\left\| F\left(-\frac{\pi}{2}, b\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, b\right) \right\| = 2.$$

6) D'après la première question, les vecteurs $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(u, v)$ sont orthogonaux et non nuls si $\cos u \neq 0$, c'est-à-dire si $u \neq \pm \frac{\pi}{2}$. Donc la surface admet un plan tangent au point $F(u, v)$ lorsque $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Dans le cas où $u = 0$, on a :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0, v) = (\cos v \cos 2v, \cos v \sin 2v, \sin v) ;$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(0, v) = 4(-\sin 2v, \cos 2v, 0) ;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}(0, v) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(0, v) &= \\ &= -4(\sin v \cos 2v, \sin v \sin 2v, -\cos v). \end{aligned}$$

On peut choisir :

$$N(v) = (\sin v \cos 2v, \sin v \sin 2v, -\cos v).$$

Partie B

7) Sur D_a , F_3 varie entre $-|\sin a|$ et $+|\sin a|$. Donc, si $D_a = D_{a'}$, alors $a = \pm a'$. La réciproque est (presque) immédiate.

8) a) D_0 est le cercle du plan (xOy) , de centre O et de rayon 2, parcouru deux fois lorsque t varie de $-\pi$ à π .

b) Supposons qu'il existe une application V continue de $D_0 = \{F(0, v) \mid v \in [-\pi, \pi]\}$ dans $\mathbb{R}^3$, telle que, en tout point $m = F(0, v)$ de D_0 , $V(m)$ soit unitaire et normal en m à $\mathcal{M}$.

En utilisant la question 6), on peut affirmer que, en tout point m , $V(m) = \varepsilon(m)N(v)$, avec $\varepsilon(m) = \pm 1$.

Or, la fonction $v \mapsto m(v) = F(0, v)$ est continue, donc la fonction $v \mapsto V(m(v))$ l'est également. Le produit scalaire dans des espaces vectoriels de dimension finie est une application continue, donc la fonction $v \mapsto (V(m(v)) \mid N(v)) = \varepsilon(m(v))$ est continue. L'image d'un intervalle par une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle, donc cette fonction est constante et :

$$\forall v \in [-\pi, \pi] \quad V(m(v)) = N(v)$$

ou bien :

$$\forall v \in [-\pi, \pi] \quad V(m(v)) = -N(v).$$

Or, $m(0) = m(\pi)$ et $N(0) = -N(\pi)$. Ce qui contredit l'hypothèse de l'existence de la fonction V .

Ceci s'exprime en disant que le ruban de Möbius n'est pas orientable. Si l'on considère un marcheur se promenant sur $\mathcal{M}$ le long de la courbe D_0 , il se retrouve après un tour au même point, mais la tête en bas !

9) Posons $\alpha = \sin a$. La courbe D_a est plane si, et seulement s'il existe des réels A , B , C et D tels que :

$$(A, B, C) \neq (0, 0, 0) \quad \text{et} \quad \forall v \in [-\pi, \pi]$$

$$A(2 + \alpha \cos v) \cos 2v + B(2 + \alpha \cos v) \sin 2v + C \alpha \sin v = D.$$

En séparant partie paire et partie impaire et en donnant des valeurs à v , on obtient $a = 0$.

10) On sait que :

$$\begin{aligned} L(a) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\| \frac{\partial F}{\partial v}(a, v) \right\| dv \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{4(2 + \sin a \cos v)^2 + \sin^2 a} dv. \end{aligned}$$

L'application de $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \times [0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$,

$$(a, v) \mapsto \sqrt{4(2 + \sin a \cos v)^2 + \sin^2 a}$$

est continue, donc l'application :

$$L : a \mapsto 2 \int_0^{\pi} \sqrt{4(2 + \sin a \cos v)^2 + \sin^2 a} dv$$

est continue sur $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.

Remarque : Dans ce calcul, on trouve $L(0) = 8\pi$ alors que D_0 est un cercle de rayon 2, de périmètre 4π . Cela provient du fait que le cercle D_0 est parcouru deux fois lorsque v varie de $-\pi$ à π .

Partie C

11)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(0, v_0) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(0, v_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(0, v_0) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(0, v_0) \end{vmatrix} = 4 \cos v_0.$$

12) a) Soit $\delta > 0$ tel que :

$$]v_0 - \delta, v_0 + \delta[\subset \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \setminus \left\{ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}.$$

La fonction g est injective sur l'ouvert :

$$U = \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\times]v_0 - \delta, v_0 + \delta[.$$

Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et son jacobien ne s'annule pas sur cet ouvert.

Ceci permet de conclure que g est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U sur $g(U)$.

b) Une occasion remarquable de manipuler des matrices jacobiniennes !

La matrice jacobienne d'une application f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n$ en un point (α, β) est notée $J(f)(\alpha, \beta)$.

Soit (x, y) un point de $g(U)$. On sait que :

$$J(F_3 \circ h)(x, y) = J(F_3)(h(x, y))J(h)(x, y).$$

De plus :

$$J(h)(x, y) = [J(g)(h(x, y))]^{-1}.$$

Ici, $(x, y) = g(0, v_0)$ et $h(x, y) = (0, v_0)$. Donc :

$$J(F_3)(0, v_0) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial u}(0, v_0) \quad \frac{\partial F_3}{\partial v}(0, v_0) \right) = (\sin v_0 \quad 0).$$

$$\begin{aligned} J(h)(g(0, v_0)) &= [J(g)(0, v_0)]^{-1} \\ &= \frac{1}{4 \cos v_0} \begin{pmatrix} 4 \cos 2v_0 & 4 \sin 2v_0 \\ -\cos v_0 \sin 2v_0 & \cos v_0 \cos 2v_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(F_3 \circ h)(g(0, v_0)) &= \frac{1}{4 \cos v_0} (\sin v_0 \quad 0) \begin{pmatrix} 4 \cos 2v_0 & 4 \sin 2v_0 \\ -\cos v_0 \sin 2v_0 & \cos v_0 \cos 2v_0 \end{pmatrix} \\ &= (\cos 2v_0 \tan v_0 \quad \sin 2v_0 \tan v_0). \end{aligned}$$

Finalement :

$$D_1(F_3 \circ h)(g(0, v_0)) = \tan v_0 \cos 2v_0.$$

$$D_2(F_3 \circ h)(g(0, v_0)) = \tan v_0 \sin 2v_0.$$

13) On a ici $F(0, 0) = (2, 0, 0)$, $N(0) = (0, 0, -1)$.

Le plan tangent en ce point est donc le plan (xOy) . Étudier la position de la surface au voisinage de ce point revient à étudier le signe de $F_3(u, v)$ pour u et v proches de 0.

$F_3(u, v) = \sin u \sin v$ n'est pas de signe constant au voisinage de $(0, 0)$.

Donc le plan tangent traverse la surface $\mathcal{M}$ au point $F(0, 0)$.

Indications et réponses

Chapitre 1

- 1** 1) Si f est continue, $\Phi(f)$ l'est aussi. La linéarité de Φ est immédiate. Donc Φ est un endomorphisme de E .
2) Pour tout f de $\text{Ker } \Phi$, on a :

$$f(x) = - \int_0^x f(t) dt \quad (1)$$

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et après dérivation :

$$f'(x) = -f(x) \quad (2)$$

Donc f est de la forme $f(x) = ce^{-x}$.

Mais, d'après (1), on a $f(0) = 0$. Donc $\text{Ker } \Phi = \{0_E\}$.

- 3) On pose $g(x) = 1 + x$. Il s'agit de résoudre, dans E , l'équation linéaire :

$$\Phi(f) = g.$$

La fonction constante $x \mapsto 1$ en est une solution particulière. C'est la seule car $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

- 2** 1) La linéarité de Ψ est facile à prouver.

2) $\text{Ker } \Psi$ est l'ensemble des suites géométriques de raison c . C'est le sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la suite (c^n) .

- 3) On note (d) la suite constante égale à d . Il s'agit de résoudre l'équation linéaire :

$$\Psi((x_n)) = (d).$$

La suite constante $(x_n) = \left(\frac{d}{1-c}\right)$ en est une solution.

Les suites solutions du problème sont de la forme :

$$x_n = \frac{d}{1-c} + zc^n,$$

où z est un complexe quelconque.

- 3** 1) • La linéarité est immédiate.

• $\Phi(1) = \Phi(X) = 0$. Donc Φ n'est pas injective.

2) Pour tout entier $k \geq 2$, $\deg \Phi(X^k) = k - 2$.

Le noyau de cette application linéaire est $\text{Vect}(1, X)$.

La conclusion découle du *théorème 2*.

- 3) La question 2) entraîne la surjectivité de Φ .

- 4** Notons F cette application. Elle est linéaire.

• $\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \deg P = \deg F(P)$.

Donc F induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, noté F_n .

• $\text{Ker } F_n = \{0\}$ donc F_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

• La bijection réciproque de $(P(X) \mapsto P(X+1))$ est :

$$(P(X) \mapsto P(X-1)).$$

$$\mathbf{5} \quad 1) \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad F_n(X^j) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i.$$

La matrice de F_n relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la matrice triangulaire supérieure de $M_{n+1}(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & \frac{n(n-1)}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 2) La bijection réciproque de F_n est l'application :

$$P(X) \mapsto P(X-1).$$

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad F_n^{-1}(X^j) = (X-1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} X^i.$$

$$\text{Donc : } M^{-1} = \left((-1)^{j-i} \binom{j}{i} \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}.$$

- 3) Pour $i < j$, le terme d'indice (i, j) de $M^{-1}M$ est nul.

$$\text{L'égalité } \sum_{k=i}^j (-1)^k \binom{k}{i} \binom{j}{k} = 0 \text{ en découle.}$$

- 6** 1) On a, $\deg(P) = \deg(P - P')$. Notons :

$$g : P \mapsto P - P'$$

La linéarité de g est immédiate.

- 2) De plus $g(1) = 1$ et, pour $k \geq 1$, $g(X^k) = X^k - kX^{k-1}$.

La matrice G de g relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est une matrice triangulaire de $M_{n+1}(\mathbb{K})$:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Et } G^{-1} = (m_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}, \text{ avec } m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \frac{j!}{i!} & \text{si } i \leq j \end{cases}.$$

7 Si les deux matrices M et N sont semblables, alors, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, $(M - I_n)^p$ et $(N - I_n)^p$ le sont aussi et ont même rang.

$$\text{Seules } M_{1,0} - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } M_{0,1} - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ont même rang. Calculons :

$$(M_{1,0} - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } (M_{0,1} - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elles n'ont pas le même rang, donc aucune des quatre matrices indiquées n'est semblable à une des autres.

8 1) $\forall v \in V, \quad s(v) = v; \quad \forall w \in W, \quad s(w) = -w.$
2) La trace est linéaire, donc :

$$\text{tr } s = 2 \text{tr}(p) - \text{tr}(\text{Id}_E) = \dim V - \dim W.$$

9 Calculer les traces aboutit à une impossibilité.

$$\begin{aligned} \text{10 } P(x) &= \frac{-1}{132}(x-2)(x-12)(x-13) \\ &\quad + \frac{2}{55}(x-1)(x-12)(x-13) \\ &\quad - \frac{1}{110}(x-1)(x-2)(x-13) \\ &\quad + \frac{1}{33}(x-1)(x-2)(x-12). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{11 } f(x) &= \frac{2}{(b-a)^2} \left[l(x-b) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2m(x-a)(x-b) + n(x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \right]. \\ \int_a^b f(t) dt &= \frac{b-a}{6}(l+4m+n). \end{aligned}$$

C'est la formule de Simpson.

12 1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3^{n+1} - 2^{n+2}.$
2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n11^n.$

3) De $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$, on déduit $u_{n+3} = u_n$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u_{3k} = a, u_{3k+1} = b; \quad u_{3k+2} = -a - b.$$

13 L'équation (1) peut s'écrire :

$$\Phi((u_n)) = (k),$$

où Φ est l'endomorphisme

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

de l'espace des suites réelles et (k) la suite constante.

• Recherche d'une solution constante $(u_n) = (c).$

Si $1 - a - b \neq 0$, on obtient :

$$u_n = \frac{k}{1-a-b}.$$

• Lorsque $1 - a - b = 0$, recherche d'une solution de la forme $(u_n) = (cn).$

Si $2 - a \neq 0$, on obtient :

$$u_n = \frac{k}{2-a}n.$$

• Lorsque $a = 2$ et $b = -1$, recherche d'une solution de la forme $(u_n) = (cn^2).$

On obtient :

$$u_n = \frac{k}{2}n^2.$$

À cette solution particulière, on ajoutera un élément de $\text{Ker } \Phi$ qui est l'espace $E_{a,b}$ des suites (v_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n \quad (2)$$

14 Si $x \in F_u$, alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(x).$

Donc $v(x) \in F_u.$

Or F_u est une droite, d'où la conclusion.

15 1) La stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ est immédiate.

La matrice, relativement à la base canonique, de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par u est triangulaire supérieure car :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad u(X^k) \in \mathbb{R}_k[X].$$

2) $u(1) = 3$ et pour $k \geq 1, u(X^k) = (2k+3)X^k - kX^{k-1}.$

La matrice cherchée est :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 5 & -2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2n+1 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2n+3 \end{pmatrix}.$$

16

1) $\forall x \in E \quad f^{k+1}(x) = f^k(f(x)).$

2) Soit (H_k) la propriété : $\text{Im}(f^p) = \text{Im}(f^{p+k})$. (H_1) est vraie. Supposons que, pour un entier $k \geq 1$, on ait :

$$\text{Im}(f^p) = \text{Im}(f^{p+k}).$$

L'inclusion $\text{Im}(f^{p+k+1}) \subset \text{Im}(f^p)$ est déjà connue.

Inversement, soit x dans $\text{Im}(f^p) = \text{Im}(f^{p+k})$.

Il existe t dans E tel que $x = f^{p+k}(t) = f^k(f^p(t))$ et il existe u tel que $f^p(t) = f^{p+1}(u)$.

Donc $x = f^{p+k+1}(u)$, d'où $\text{Im}(f^{p+k+1}) = \text{Im}(f^p)$.

Ceci permet de conclure.

3) La suite $(\text{rg } f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'entiers entre 0 et n . Elle est convergente et stationnaire.

Notons p le plus petit entier tel que $\text{Im}(f^p) = \text{Im}(f^{p+1})$.

- Si $p = 0$, alors, pour tout k , $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^{k+1}) = E$.
- Si $p > 0$, alors $n = \text{rg } \text{Id}_E > \text{rg } f > \dots > \text{rg } f^p$. Donc :

$$0 \leq \text{rg } f^p \leq n - p \text{ et } p \leq n.$$

Et, d'après 2) : $\text{Im}(f^p) = \text{Im}(f^n) = \text{Im}(f^{n+1})$.

4) Il est aisé de prouver que, pour tout entier $k \geq 0$:

$$\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1}).$$

Le théorème du rang et la question 3) permettent de prouver que :

$$\text{Ker}(f^n) = \text{Ker}(f^{n+1}).$$

5) Il suffit de prouver que $\text{Im}(f^p) \cap \text{Ker}(f^p) = \{0_E\}$.

Soit $x \in \text{Im}(f^p) \cap \text{Ker}(f^p)$. Il existe t dans E tel que :

$$x = f^p(t) \quad \text{et} \quad f^p(x) = 0_E.$$

Donc $f^{2p}(t) = 0_E$ et $t \in \text{Ker}(f^{2p}) = \text{Ker}(f^p)$. Donc :

$$x = f^p(t) = 0_E.$$

17

1) Le rang de f est 1 car $\text{Im } f = \text{Vect}(x_0)$.

2) $f \circ f(x) = u(x)f(x_0) = u(x)u(x_0)x_0 = u(x_0)f(x)$.

Donc f est un projecteur si et seulement si $u(x_0) = 1$.

3) De $f \circ f(x) = u(x_0)f(x)$, on déduit par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad f^k = (u(x_0))^{k-1} f.$$

18

1) On procède par l'absurde.

Puque $\dim E \geq 2$, $E \setminus \text{Vect}(e_1) \neq \emptyset$.

Si : $\forall x \in E \setminus \text{Vect}(e_1) \quad f(x) \in E \setminus \text{Vect}(e_1)$,

alors : $\forall x \in E \setminus \text{Vect}(e_1) \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad f^k(x) \neq 0_E$.

L'application f ne serait pas nilpotente.

D'où l'existence de e_2 tel que :

$$e_2 \in E \setminus \text{Vect}(e_1) \quad \text{et} \quad f(e_2) \in \text{Vect}(e_1).$$

2) Si l'on suppose l'existence d'une famille libre $(e_1, \dots, e_k)$ telle que :

$$f(e_1) = 0_E \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 2, k \rrbracket f(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1})$$

et si $k < n$, $E \setminus \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \neq \emptyset$.

On en déduit l'existence d'un vecteur e_{k+1} tel que :

$$e_{k+1} \in E \setminus \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \quad \text{et} \quad f(e_{k+1}) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

Ainsi, par récurrence, on peut construire une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice de f dans cette base soit triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

19

Si une telle matrice existe, alors $M^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc M est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $M^3 = 0$.

Or $M^4 \neq 0$. Il y a contradiction.

20

1) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne tel que :

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit un indice i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

La ligne i_0 de l'égalité matricielle $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ s'écrit :

$$\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j = 0.$$

Donc :

$$|a_{i_0 i_0} x_{i_0}| = \left| - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} a_{i_0 j} x_j \right|$$

$$\leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0 j} x_j| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0 j}| |x_{i_0}|.$$

On déduit de (1) que $|x_{i_0}| = 0$ et $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc A est inversible.

2) Il s'agit d'un système linéaire : $(I_n - A)X = B$.

La matrice de ce système est $(I_n - A)$ et, d'après (2) :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |1 - a_{ii}| \geq 1 - |a_{ii}| > \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} |a_{ij}|.$$

D'après 1), la matrice $I_n - A$ est inversible et le système a une unique solution.

21 1) Soit $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$ et m l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associé à M . Par définition :

$$m(e_1) = ae_1 + be_2 \quad \text{et} \quad m(e_2) = ce_1 + de_2.$$

Soit $e'_2 = xe_1 + ye_2$.

Si $y \neq 0$, $B' = (e_1, e'_2)$ est une base de $\mathbb{K}^2$.

On cherche x et y tels que :

$$m(e_1) = ue_1 + ve'_2,$$

C'est-à-dire :

$$ae_1 + be_2 = ue_1 + v(xe_1 + ye_2).$$

Sachant que $v \neq 0$, $x = \frac{a-u}{v}$ et $y = \frac{b}{v}$ conviennent.

2) Les matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u & w \\ v & z \end{pmatrix}$ ont même trace et même déterminant.

Donc :

$$z = a + d - u \quad \text{et} \quad w = \frac{1}{v}(uz - ad + bc).$$

3) On trouve $\alpha = \frac{a+d}{2}$ et $\beta = \sqrt{ad - bc - \alpha^2}$.

22 Les notations suivantes sont utilisées.

$\dim E = p$; $\dim V = k$; $\dim F = n$; $\dim W = r$.

X contient l'application nulle et est stable par combinaison linéaire. De plus, soit $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E adaptée à V et $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de F adaptée à W .

L'endomorphisme f est dans X si, et seulement si :

$$M_{B'}^B(f) = \left(\begin{array}{c|c} 0_k & A \\ \hline 0 & 0_{n-r} \end{array} \right),$$

avec $A \in \mathcal{M}_{r, (p-k)}(\mathbb{K})$. On en déduit :

$$\dim X = r(p-k).$$

23 1) Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Prouver que $DM = (d_i m_{i,j})$ et $MD = (d_j m_{i,j})$.

Ceci permet de conclure que $DM = MD$ si, et seulement si, M est diagonale car les d_i sont distincts deux à deux.

2) Supposons que $MD = DM$. D'après 1), M est diagonale.

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_n \end{pmatrix}.$$

L'équation $M = P(D)$, s'écrit :

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(d_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(d_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(d_n) \end{pmatrix}.$$

Les points $d_1, \dots, d_n$ sont distincts deux à deux. Si $L_1, \dots, L_n$ sont les polynômes de Lagrange en $(d_1, \dots, d_n)$, alors

$$P = \sum_{i=1}^n m_i L_i \text{ convient.}$$

Étudier la réciproque.

24 La matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée 0_n .

1) Si $i \neq j$,

$$f(E_{ij}) = f(E_{ii} E_{ij}) = f(E_{ij} E_{ii}) = f(0_n) = 0$$

et

$$f(E_{ii}) = f(E_{ij} E_{ji}) = f(E_{ji} E_{ij}) = f(E_{jj}).$$

2) Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$f(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} f(E_{ij}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} f(E_{ii}) = f(E_{11}) \operatorname{tr} A.$$

25 Pour toute matrice $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$:

$$\varphi(M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \varphi(E_{ij}).$$

On pose $b_{ji} = \varphi(E_{ij})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

$$\text{On trouve } \varphi(M) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} b_{ji} \right) = \operatorname{tr}(MB).$$

26 1) • $k \leq n$.

Le polynôme $X^k - P_k(X)$ admet $n+1$ racines : $b_0, b_1, \dots, b_n$.

Il est de degré $\leq n$ donc c'est le polynôme nul et :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P_k(X) = X^k.$$

• $k = n+1$.

Le polynôme $X^{n+1} - P_{n+1}(X)$ est unitaire de degré $n+1$.

Il admet $n+1$ racines : $b_0, b_1, \dots, b_n$. Donc :

$$P_{n+1}(X) = X^{n+1} - \prod_{i=0}^n (X - b_i).$$

• $k = n+2$.

Le polynôme $X^{n+2} - P_{n+2}(X)$ est unitaire de degré $n+2$.

Il admet $n+1$ racines : $b_0, b_1, \dots, b_n$. Donc, il existe z tel que :

$$X^{n+2} - P_{n+2}(X) = (X - z) \prod_{i=0}^n (X - b_i).$$

Le terme de degré $n+1$ de $X^{n+2} - P_{n+2}(X)$ est nul.

Donc :

$$z = - \sum_{i=0}^n b_i$$

et

$$P_{n+2}(X) = X^{n+2} - \left(X + \sum_{i=0}^n b_i \right) \prod_{i=0}^n (X - b_i).$$

2) Il est aisé de constater que :

$$P_0(0) = 1,$$

$$P_k(0) = 0 \text{ pour } k \text{ entre } 1 \text{ et } n,$$

$$P_{n+1}(0) = (-1)^n \prod_{i=0}^n b_i,$$

$$P_{n+2}(0) = (-1)^n \left(\sum_{i=0}^n b_i \right) \prod_{i=0}^n b_i.$$

Chapitre 2

1

• On a :

$$(A \cap B) + A' + B' \subset A + B$$

et

$$A + B \subset (A \cap B) + A' + B'.$$

• Soit $(u, a', b') \in (A \cap B) \times A' \times B'$ tel que :

$$0_E = u + a' + b'.$$

Alors :

$$b' = -a' - u \in (A \cap B) \cap B' = \{0_E\}.$$

Donc $b' = 0_E$.

De même $a' = u = 0_E$.

Donc, la somme $(A \cap B) + A' + B'$ est directe.

2

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $x \in W_i$.

On a : $x \in V_1 + \dots + V_n$.

$$\exists (v_1, \dots, v_n) \in V_1 \times \dots \times V_n \quad x = v_1 + \dots + v_n.$$

Or pour tout $j, v_j \in W_j$ et la somme $W_1 + \dots + W_n$ est directe.

Donc, pour $j \neq i, v_j = 0_E$ et $x = v_i$. Ainsi $W_i \subset V_i$.

3

1) Si $f(x) = \lambda x$, alors $f^2(x) = \lambda^2 x = -x$.

Or $x \neq 0_E$, donc $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

Soit D une droite stable par l'endomorphisme f et y un vecteur directeur de D , alors y et $f(y)$ sont colinéaires. C'est impossible.

2) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad f(\alpha x + \beta f(x)) = \alpha f(x) - \beta x$.

4

1) $\text{Im } f = \text{Vect} \left(\sum_{i=1}^n e_i \right)$, $\text{rg } f = 1$.

2) Soit $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$.

$$\exists \alpha \in \mathbb{K} \quad x = \alpha \sum_{i=1}^n e_i \quad \text{et} \quad f(x) = n\alpha \sum_{i=1}^n e_i = 0_E.$$

Donc $x = 0_E$. Le *théorème du rang* permet de conclure.

3) La matrice de f dans une base adaptée à la décomposition $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ est diagonale, donc f est diagonalisable.

5

1) L'application $(\Phi : f \mapsto f'(0))$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. $H = \text{Ker } \Phi$ est un hyperplan de E . La fonction $g(x \mapsto x)$ est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et n'est pas dans H . Donc :

$$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid f'(0) = 0\} \oplus \mathbb{R}g.$$

2) K est aussi un hyperplan de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, la même fonction g donne :

$$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0\} \oplus \mathbb{R}g.$$

6

1) $\alpha = -\frac{\psi(I_n)}{\psi(E_{ij})}$ convient.

2) Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et ψ une forme linéaire tel que $H = \text{Ker } \psi$.

• S'il existe $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$ et $\psi(E_{ij}) \neq 0$, alors, pour un tel couple (i, j) , la matrice $I_n + \alpha E_{ij}$ vue en 1) convient.

• Sinon : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j, \psi(E_{ij}) = 0$.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est dans H et est inver-

sible.

7

Il suffit de prouver que la famille (f_0, f_1, f_2) est libre. Soit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ trois réels tels que :

$$\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0.$$

Alors pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$[\alpha_0 P(1) + \alpha_1 P'(1) + \alpha_2 P''(1) = 0.]$$

En utilisant $P = 1, P = X - 1$ et $P = (X - 1)^2$, on trouve :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

8

La formule de Taylor pour les polynômes donne :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

La base duale de $((X - a)^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est la famille $(f_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ où :

$$f_k(P) = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}.$$

9

1) $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix},$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & 7 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

10

 1) $(1, i)(1, j)(1, i) = (i, j)$.

 2) $(x_1, x_k)(x_1, x_{k-1}) \dots (x_1, x_3)(x_1, x_2) = (x_1, \dots, x_k)$.

 3) Soit $(x_1, \dots, x_k)$ un k -cycle de $\mathcal{S}_n$.

 • Si $1 \in \{x_1, \dots, x_k\}$, on peut supposer que $x_1 = 1$.

La question 2) permet de conclure.

 • Si $1 \notin \{x_1, \dots, x_k\}$, alors :

 $(x_1, \dots, x_k) = (1, x_1)(1, x_k)(1, x_{k-1}) \dots (1, x_2)(1, x_1)$.

11

 • Si $k \notin \{i, j\}$,

 alors $\sigma \circ (i, j) \circ \sigma^{-1}(\sigma(k)) = \sigma(k)$.

 • $\sigma \circ (i, j) \circ \sigma^{-1}(\sigma(i)) = \sigma(j)$.

 • $\sigma \circ (i, j) \circ \sigma^{-1}(\sigma(j)) = \sigma(i)$.

12

1) Toute permutation est un produit de transpositions et, d'après l'exercice 10, toute transposition peut s'écrire comme un produit de transpositions choisies dans l'ensemble :

$$\{(1, 2); (1, 3); \dots; (1, n)\}.$$

 Donc $\mathcal{S}_n$ est engendré par $\{(1, 2); (1, 3); \dots; (1, n)\}$.

 2) $(1, 2, \dots, n)(1, 2)(1, 2, \dots, n)^{-1} = (2, 3)$

$$\text{et } (1, 2)(2, 3)(1, 2) = (1, 3).$$

$$(1, 2, \dots, n)(2, 3)(1, 2, \dots, n)^{-1} = (3, 4)$$

$$\text{et } (1, 3)(3, 4)(1, 3) = (1, 4).$$

 En répétant ceci, on prouve que les transpositions $(1, 2); (1, 3); \dots; (1, n)$ sont engendrées par $(1, 2)$ et $(1, 2, \dots, n)$.

La question 1) permet de conclure.

13

$$\sigma = (3, 7)(6, 3)(4, 5)(2, 3)(1, 2); \quad \varepsilon(\sigma) = -1.$$

$$\tau = (3, 8)(7, 6)(6, 4)(5, 4)(4, 1)(3, 2); \quad \varepsilon(\sigma) = +1.$$

14

 1) La trace est linéaire, donc : $\text{tr } f = \sum_{i=1}^n \text{tr}(f_i)$.

 Les f_i et f sont des projecteurs, et $\text{Im } f \subset \sum_{i=1}^n \text{Im } f_i$, donc :

$$\dim(\text{Im } f) \leq \dim\left(\sum_{i=1}^n \text{Im } f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \dim(\text{Im } f_i) = \dim(\text{Im } f).$$

 Ceci prouve que l'inclusion $\text{Im } f \subset \sum_{i=1}^n \text{Im } f_i$ est une égalité

 et que la somme de sous-espaces $\sum_{i=1}^n \text{Im } f_i$ est directe.

 2) Si $f_i \circ f_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ lorsque $i \neq j$, alors l'égalité $f^2 = f$ est immédiate et f est un projecteur.

 Réciproquement, supposons que $f = \sum_{i=1}^n f_i$ soit un projecteur.

 Soit i et j deux éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

 Il suffit de prouver $\text{Im } f_j \subset \text{Ker } f_i$ pour obtenir

$$f_i \circ f_j = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

 Soit $x \in \text{Im } f_j$, alors $x \in \text{Im } f$. Or f et f_j sont des projecteurs, donc :

$$x = f_j(x) = f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} f_i(x) = 0_E.$$

 Or la somme des sous-espaces $\text{Im } f_k$ est directe. Donc pour $i \neq j$, $f_i(x) = 0_E$ et $\text{Im } f_j \subset \text{Ker } f_i$.

15

 1) D'après l'exercice 3, si $x \neq 0_E$, alors x et $f(x)$ ne sont pas colinéaires. Donc la restriction de f à un sous-espace non nul de E n'est jamais une homothétie et f n'est pas diagonalisable.

 2) Soit e_1 un vecteur non nul de E .

 La famille $(e_1, f(e_1))$ est libre.

 Si $\dim E = 2$, la question est résolue.

 Supposons $n > 2$.

 Soit un entier $q \geq 1$ tel que :

 • $2q < n$

 • Il existe une famille libre d'éléments de E de la forme $(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q))$.

 Puisque $2q < n$, il existe un vecteur e_{q+1} dans E :

 $\text{Vect}(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q))$.

 La famille $(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q), e_{q+1})$ est libre.

 Prouvons que $(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q), e_{q+1}, f(e_{q+1}))$ l'est aussi.

 Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_q, \gamma, \delta)$, $2q + 2$ réels tels que :

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^q \beta_i f(e_i) + \gamma e_{q+1} + \delta f(e_{q+1}) = 0_E \quad (1)$$

 Sachant que $f \circ f = -\text{Id}_E$, on a :

$$-\sum_{i=1}^q \beta_i e_i + \sum_{i=1}^q \alpha_i f(e_i) - \delta e_{q+1} + \gamma f(e_{q+1}) = 0_E \quad (2)$$

 La combinaison $\gamma(1) - \delta(2)$ donne :

$$\sum_{i=1}^q (\gamma \alpha_i + \delta \beta_i) e_i + \sum_{i=1}^q (\gamma \beta_i - \delta \alpha_i) f(e_i) + (\gamma^2 + \delta^2) e_{q+1} = 0_E$$

 Or la famille $(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q), e_{q+1})$ est libre, donc tous les coefficients $(\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_q, \gamma, \delta)$ sont nuls. Ceci résout la première partie de la question.

 Chaque plan $P_i = \text{Vect}(e_i, f(e_i))$ est stable par f .

 La matrice de l'endomorphisme de P_i induit par f dans la base $(e_i, f(e_i))$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

 La matrice de f dans la base B est diagonale par blocs :

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{A} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{A} \end{pmatrix}.$$

16 1) a) H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A n'est pas dans cet hyperplan, donc la droite engendrée par A est un supplémentaire de H .

b) Pour une solution X de (1), on a :

$$\lambda_X(\alpha + \text{tr } A) = \lambda_B \quad \text{et} \quad \alpha M_X = M_B.$$

c) Si $(\alpha + \text{tr } A) \neq 0$, alors, $\lambda_X = \frac{\lambda_B}{\alpha + \text{tr } A}$ et $M_X = \frac{1}{\alpha} M_B$.

La matrice $X = \frac{\lambda_B}{\alpha + \text{tr } A} A + \frac{1}{\alpha} M_B$ est l'unique solution de (1).

Si $(\alpha + \text{tr } A) = 0$ et $\lambda_B \neq 0$, l'équation (1) n'a pas de solution.

Si $(\alpha + \text{tr } A) = 0$ et $\lambda_B = 0$, alors, $M_X = \frac{1}{\alpha} M_B$. Les solutions de (1) sont les matrices $M = \lambda A + \frac{1}{\alpha} M_B$ où λ est un réel.

2) Dans ce cas, $X = \frac{1}{\alpha} \left(B - \frac{\text{tr } B}{\alpha} A \right)$ est l'unique solution de (1).

17 1) $0_{E^*} \in A^\circ$ et A° est stable par combinaisons linéaires.

2) Soit $f \in \text{Vect}(e_{k+1}^*, \dots, e_n^*)$. Il existe $n - k$ scalaires $(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$ tels que :

$$f = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i e_i^*.$$

Pour tout j de $\llbracket 1, k \rrbracket$,

$$f(e_j) = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i e_i^*(e_j) = 0.$$

Donc, $f \in A^\circ$.

Réciproquement, soit $f \in A^\circ$.

$$f = \sum_{i=1}^n f(e_i) e_i^* = \sum_{i=k+1}^n f(e_i) e_i^*.$$

Donc $f \in \text{Vect}(e_{k+1}^*, \dots, e_n^*)$.

La formule $\dim A^\circ = \dim E - \dim A$ est immédiate.

18 1) $f_i(v_j) = \sum_{k=1}^n b_{kj} f_i(e_k) = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \delta_{i,j}$.

2) Lorsque $\dim E = n$ et $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ $f_i(v_j) = \delta_{i,j}$, on doit savoir démontrer que $(v_1, \dots, v_n)$, est une base de E et que $(f_1, \dots, f_n)$ en est la base duale.

3) On pose $e_1 = 1$, $e_2 = X$, $e_3 = X^2$ et $A = (g_i(e_j))$.

Écrire A et calculer A^{-1} .

Les colonnes de A^{-1} fournissent les coordonnées, dans la base canonique, des vecteurs (P_1, P_2, P_3) de la base anté-duale de (g_1, g_2, g_3) . Donc :

$$\begin{aligned} P_1 &= 3 - 5X + \frac{3}{2}X^2, \\ P_2 &= -\frac{3}{2} + 4X - \frac{3}{2}X^2, \\ P_3 &= \frac{1}{3} - X + \frac{1}{2}X^2. \end{aligned}$$

Vérifier que $g_i(P_j) = \delta_{i,j}$.

19 1) La famille $(f_0, \dots, f_n)$ est la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. D'où le résultat.

2) Soit $h \in \text{Vect}\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad h \in \text{Vect}\{f_k \mid k \in \llbracket 0, N \rrbracket\}.$$

Pour tout $p > N$, on a alors $h(X^p) = 0$.

Or : $\forall p \in \mathbb{N} \quad f(X^p) = 1$. Donc :

$$f \notin \text{Vect}\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

20 1) $\mathbb{N}$ est infini alors que $\mathcal{S}_n$ est fini. Il existe deux entiers distincts, $i < j$, tels que $\sigma^i = \sigma^j$. Alors $\sigma^{j-i} = \text{Id}_n$.

2) L'ordre d'un k -cycle est k .

3) L'ordre de σ est 3 (σ est un 3-cycle).

L'ordre de τ est 2 (mais τ n'est pas un cycle).

L'ordre de μ est 12.

L'ordre de ν est 4.

21 1) Dans la j -ième colonne de M_σ , se trouve un 1 à la ligne $\sigma(j)$ et des 0 ailleurs.

Donc :

$$M_\sigma = \sum_{j=1}^n E_{\sigma(j)j}.$$

$${}^t M_\sigma M_\sigma = \sum_{k=1}^n E_{k\sigma(k)} \sum_{j=1}^n E_{\sigma(j)j} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n E_{k\sigma(k)} E_{\sigma(j)j}.$$

Donc :

$${}^t M_\sigma M_\sigma = \sum_{j=1}^n E_{jj} = I_n.$$

2) Pour tout j de $\llbracket 1, n \rrbracket$ $f_{\sigma\tau}(e_j) = e_{\sigma\tau(j)} = f_\sigma \circ f_\tau(e_j)$.

Les endomorphismes $f_{\sigma\tau}$ et $f_\sigma \circ f_\tau$ coïncident sur une base de E , donc ils sont égaux.

3) C'est une conséquence directe des questions précédentes.

Chapitre 3

1 $\text{Det}_B(C'_1, \dots, C'_n) = \text{Det}_B\left(\sum_{j=1}^n C'_j, C'_2, \dots, C'_n\right)$. Or :

$$\sum_{j=1}^n C'_j = (n-1) \sum_{j=1}^n C_j \quad \text{et, pour } k \geq 2, \quad C'_k = \sum_{j=1}^n C_j - C_k.$$

On en déduira :

$$\text{Det}_B(C'_1, \dots, C'_n) = (-1)^{n-1} (n-1) \text{Det}_B(C_1, \dots, C_n).$$

2 • Relativement à la base canonique, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24.$$

• Avec l'autre base, on trouve évidemment le même résultat.

3 1) $\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \deg \Phi(P) \leq \deg P$.

La linéarité de Φ est immédiate.

$$\Phi(1) = -n \text{ et, pour } k \geq 1, \Phi(X^k) = (k-n)X^k - akX^{k-1}$$

D'où la matrice de Φ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Soit B la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On trouve :

$$\text{Det}_B(\Phi(1), \Phi(X), \dots, \Phi(X^n)) = \prod_{k=0}^n (k-n) = 0.$$

Donc Φ n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4 $\text{Det}_B(B') = (-1)^n, \quad \text{Det}_B(B'') = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$

5 On a ${}^tM = -M$ et :

$$\text{Det}M = (-1)^n \text{Det}M = 0 \text{ si } n \text{ impair.}$$

6 1) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On soustrait la première ligne à toutes les autres dans $\text{Det}(A + xU)$, on trouve :

$$\begin{aligned} \text{Det}(A + xU) &= \begin{vmatrix} a_{1,1} + x & a_{1,2} + x & \dots & a_{1,n} + x \\ a_{2,1} + x & a_{2,2} + x & \dots & a_{2,n} + x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} + x & a_{n,2} + x & \dots & a_{n,n} + x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{1,1} + x & a_{1,2} + x & \dots & a_{1,n} + x \\ a_{2,1} - a_{1,1} & a_{2,2} - a_{1,2} & \dots & a_{2,n} - a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} - a_{1,1} & a_{n,2} - a_{1,2} & \dots & a_{n,n} - a_{1,n} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

D'où $\text{Det}(A + xU) = \alpha x + \beta$.

2) Les matrices $A - aU$ et $A - bU$ sont triangulaires.

Avec la question 1), on obtient :

$$\text{Det}(A - aU) = -\alpha a + \beta = (c - a)^n.$$

$$\text{Det}(A - bU) = -\alpha b + \beta = (c - b)^n.$$

• Si $a \neq b$, alors $\text{Det}A = \beta = \frac{a(c-b)^n - b(c-a)^n}{a-b}.$

• Si $a = b$, on trouve $\text{Det}A = (c + (n-1)a)(c-a)^{n-1}.$

7 Soit M la matrice du système. On a :

$$\text{Det}M = (t+n-1)(t-1)^{n-1}.$$

• Lorsque $t \neq 1$ et $t \neq 1-n$, le système est de Cramer.

La solution est $x_1 = \dots = x_{n-1} = \frac{1}{1-t}, x_n = \frac{2-t-n}{1-t}.$

• Lorsque $t = 1$, le système est incompatible.

• Lorsque $t = 1-n$, le système est homogène. Les solutions sont les n -uplets $(x_1, \dots, x_n)$ tels que :

$$x_1 = \dots = x_n.$$

8 En développant par rapport à la dernière ligne, on obtient :

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - 3\Delta_{n-2}.$$

Après résolution de l'équation caractéristique, sachant que Δ_n est réel, on trouve l'existence d'un complexe z tel que :

$$\Delta_n = z(1+i\sqrt{2})^n + \bar{z}(1-i\sqrt{2})^n.$$

Or $\Delta_1 = 2$ et $\Delta_2 = 1$, donc :

$$\Delta_n = 2 \text{Re} \left(-\frac{i\sqrt{2}}{4} (1+i\sqrt{2})^{n+1} \right) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n+1}{2k+1} (-1)^k 2^k.$$

9 Le calcul formel donne la solution.

« À la main », vous devez savoir prouver que par un jeu d'opérations sur les colonnes :

$$\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix} = (a-b)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & b & x \\ 1 & 0 & x & b \\ -1 & 0 & x & a \\ 0 & -1 & a & x \end{vmatrix}.$$

Puis, par un jeu d'opérations sur les lignes :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & b & x \\ 1 & 0 & x & b \\ -1 & 0 & x & a \\ 0 & -1 & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & b & x \\ 1 & 0 & x & b \\ 0 & 0 & 2x & a+b \\ 0 & 0 & a+b & 2x \end{vmatrix} = -(4x^2 - (a+b)^2).$$

Le déterminant cherché est $(a-b)^2((a+b)^2 - 4x^2)$.

10 • Pour B , on effectue les opérations suivantes sur les lignes :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}.$$

On en déduira : $\text{Det}B = (-1)^{n-1}n.$

• Pour C , on effectue les opérations suivantes sur les lignes :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}.$$

Puis, sur la matrice obtenue, les opérations sur les colonnes :

$$\forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket \quad C_j \leftarrow C_j + C_1.$$

Finalement, $\text{Det}C = (-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1).$

11

 1) Soit (H_d) la propriété suivante :

 Pour tout polynôme R de degré d , la famille de polynômes $(R_1, \dots, R_d, R_{d+1})$ est libre. (H_0) est vraie.

 Soit un entier $d \geq 1$ tel que (H_{d-1}) soit vraie.

 Considérons un polynôme quelconque de degré d , noté R .

 Le polynôme Q défini par $Q(X) = R(X) - R(X+1)$ est de degré $d-1$. Donc les polynômes $(Q_1, \dots, Q_d)$ forment une famille libre. Or :

$$\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket \quad Q_j(X) = R_j(X) - R_{j+1}(X).$$

 Ainsi, la famille $(R_1 - R_2, R_2 - R_3, \dots, R_d - R_{d+1})$ est libre.

 De plus : $\deg(R_j - R_{j+1}) = d-1$ et $\deg R_{d+1} = d$.

 Donc, $R_{d+1} \notin \text{Vect}(R_1 - R_2, R_2 - R_3, \dots, R_d - R_{d+1})$.

 La famille $(R_1 - R_2, R_2 - R_3, \dots, R_d - R_{d+1}, R_{d+1})$ est libre.

Ceci permet d'achever la récurrence.

 2) Soit P un polynôme de degré $n-1$.

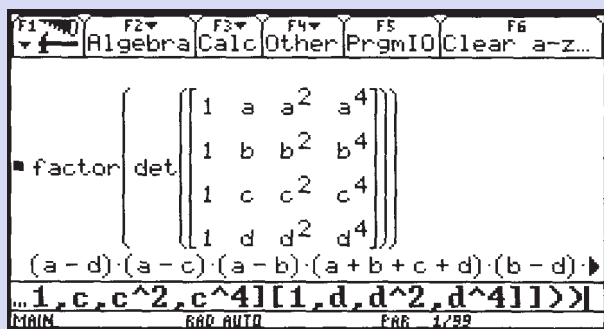
 D'après la question précédente, si $P_j(X) = P(X+j-1)$, alors la famille de polynômes $(P_1, \dots, P_n)$ est libre. De plus :

$$\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \dots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \dots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \dots & P(2n-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1(1) & P_2(1) & \dots & P_n(1) \\ P_1(2) & P_2(2) & \dots & P_n(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_1(n) & P_2(n) & \dots & P_n(n) \end{vmatrix}.$$

 Or les polynômes P_i sont linéairement indépendants, donc les colonnes du déterminant étudié forment une famille libre.

12

1) La TI sait faire directement ce genre de calcul formel.



Les opérations suivantes sur les colonnes :

$$C_4 \leftarrow C_4 - a^2 C_3; \quad C_3 \leftarrow C_3 - a C_2; \quad C_2 \leftarrow C_2 - a C_1,$$

et les opérations suivantes sur les lignes :

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1; \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1,$$

permettent de prouver « à la main » que :

$$D = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d).$$

 2) Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{n-2} X^{n-2} + X^n$ un polynôme unitaire de degré n dont le coefficient de X^{n-1} est nul.

 L'opération $(C_n \leftarrow C_n + \alpha_{n-2} C_{n-1} + \dots + \alpha_1 C_2 + \alpha_0 C_1)$ ne change pas le déterminant et permet d'écrire :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & Q(a_1) \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & Q(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & Q(a_n) \end{vmatrix}.$$

 Avec $Q = (X + a_1 + \dots + a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i)$, on obtient :

$$D_n = Q(a_n) V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})$$

 où $V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})$ est un déterminant de Vandermonde.

$$D_n = (a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

13

$$1) \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & -CB + AD \end{pmatrix}.$$

Le calcul de déterminants par blocs donne :

$$\text{Det} A \text{ Det} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{Det} A \text{ Det}(AD - CB).$$

 Or $\text{Det} A \neq 0$. Le résultat en découle.

 2) La fonction $x \mapsto \text{Det}(A + xI_n)$ est une fonction polynôme.

Elle n'a qu'un nombre fini de zéros et :

$$\exists \delta > 0 \forall x \in]0, \delta[\quad \text{Det}(A + xI_n) \neq 0.$$

$$\text{Soit } P(x) = \text{Det} \begin{pmatrix} A + xI_n & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

$$\text{et } Q(x) = \text{Det}((A + xI_n)D - CB).$$

 D'après 1), $\forall x \in]0, \delta[\quad P(x) - Q(x) = 0$.

 $P - Q$ a une infinité de zéros, c'est le polynôme nul.

 L'égalité $P(0) = Q(0)$ donne le résultat demandé.

14

 1) La matrice A est de rang $n-1$. V est le sous-espace de $\mathbb{K}^n$ engendré par les colonnes de A .

 Donc $\dim V = \text{rg } A = n-1$ et V est un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.

 2) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque $\text{rg } A < n$, $\text{Det} A = 0$

Donc :

$$0 = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \text{Det} A_{ij} a_{ij} = g_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

De plus, si k est un entier distinct de j , alors :

$$g_j \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1k} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ik} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nk} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

car deux colonnes de ce déterminant sont identiques.

Ainsi : $V \subset \text{Ker } g_j$.

3) Soit f une forme linéaire non nulle telle que $V = \text{Ker } f$.

Puisque $V \subset \text{Ker } g_j$, $\exists \lambda_j \in \mathbb{K} \quad g_j = \lambda_j f$.

Si la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est notée $(e_1, \dots, e_n)$, alors :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad g_j(e_i) = (-1)^{i+j} \text{Det} A_{ij} = \lambda_j f(e_i).$$

Donc la matrice des cofacteurs de A est de rang 1.

15 1) Notons ${}^t\text{Com} A = C$. On a :

$$AC = CA = \text{Det}(A)I_n.$$

• Si $\text{rg } A = n$, alors A et C sont inversibles. Donc :

$$\text{rg}(\text{Com} A) = \text{rg}(C) = n.$$

• Si $\text{rg } A = n - 1$, alors $AC = CA = 0_n$ (la matrice nulle).
Soit f_A et f_C les endomorphismes canoniquement associés à A et C . On a :

$$f_A \circ f_C = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)}.$$

Donc $\text{Im } f_C \subset \text{Ker } f_A$ et $\text{rg } C \leq \dim(\text{Ker } f_A) = 1$.

De plus, la matrice A a au moins un cofacteur non nul car elle est de rang $n - 1$.

Finalement, $\text{rg}(\text{Com} A) = \text{rg}(C) = 1$.

• Si $\text{rg } A \leq n - 2$, alors tous les cofacteurs de A sont nuls et $\text{rg}(\text{Com} A) = 0$.

2) Distinguer les cas $\text{Det} A = 0$, $\text{Det} A \neq 0$ et prouver :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{Det}(\text{Com} A) = (\text{Det} A)^{n-1}.$$

3) • On a :

$$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \quad \text{Com}(\text{Com} A) = A.$$

• Dans le cas $n \geq 3$, prouver d'abord :

$$\forall (\lambda, B) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{Com}(\lambda B) = \lambda^{n-1} \text{Com} B.$$

En déduire, en séparant les cas $\text{Det} A = 0$ et $\text{Det} A \neq 0$:

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{Com}(\text{Com} A) = (\text{Det} A)^{n-2} A.$$

Chapitre 4

1 1) • Le réel $\lambda = 0$ est valeur propre. Les vecteurs propres associés sont les polynômes constants non nuls.

• Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors l'équation $P' = \lambda P$ n'a que le polynôme nul comme solution. L'endomorphisme « dérivation » de $\mathbb{R}[X]$ n'a que 0 comme valeur propre.

2) Dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, l'équation $f' = \lambda f$ admet comme solutions les fonctions de la forme $f(x) = ce^{\lambda x}$.

Donc tout réel λ est valeur propre de l'endomorphisme $(f \mapsto f')$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Les vecteurs propres associés à la valeur propre λ sont les multiples non nuls de la fonction $f : x \mapsto e^{\lambda x}$.

2 Soit x et y deux vecteurs propres de u associés aux valeurs propres distinctes λ et μ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tels que :

$$\alpha x + \beta y = 0_E \quad (1)$$

Appliquons f :

$$\alpha \lambda x + \beta \mu y = 0_E \quad (2)$$

On en déduit $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. La famille (x, y) est libre.

Si l'on avait $f(x + y) = \gamma(x + y)$, on aurait alors :

$$(\gamma - \lambda)x + (\gamma - \mu)y = 0_E, \text{ donc } \gamma = \lambda = \mu.$$

C'est faux, donc $x + y$ n'est pas vecteur propre de f .

3 1) La linéarité de l'intégrale permet de conclure que Φ est linéaire.

Soit $P_n = (X - a)^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi(P_n) = \frac{P_n}{n+1}$.

Donc, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ .

2) L'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Φ est diagonalisable car $(P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base formée de vecteurs propres de Φ .

4 1) $\text{Det}(XI_n - A) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$.

2) Immédiat d'après 1).

5 Soit λ une valeur propre de A . Alors :

$$\text{rg}(A - \lambda I_n) \leq n - 1.$$

Par ailleurs, la matrice d'ordre $n - 1$ extraite de $A - \lambda I_n$ en supprimant la première ligne et la dernière colonne est inversible. Donc :

$$\text{rg}(A - \lambda I_n) \geq n - 1.$$

Tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

6 Soit X un vecteur propre de B relativement à λ , alors :

$$A(PX) = PBP^{-1}(PX) = P(BX) = \lambda(PX).$$

Donc PX est vecteur propre de A relativement à λ .

7 • $\text{Sp}(A) = \{2, 6\}$. A est inversible car $0 \notin \text{Sp } A$.

$$\bullet A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si } P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ alors } A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

La matrice est diagonalisable.

- De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$A^n = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8 En utilisant une base adaptée à $\text{Im } f$, on trouve :

$$P_f(X) = (-1)^n (X^n - \text{tr}(f)X^{n-1}).$$

9 • La matrice M est de rang 2.
Les $n - 2$ vecteurs

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, V_{n-2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

forment une base de $\text{Ker } M$.

• Soit λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

tels que $MX = \lambda X$. En développant, on trouve :

$$x_n = \lambda x_1 = \lambda x_2 = \dots = \lambda x_{n-1},$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i + ax_n = \lambda x_n.$$

$$\lambda_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{n-1 + \frac{a^2}{4}} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{n-1 + \frac{a^2}{4}}$$

sont les deux valeurs de λ telles que le système admette une solution $(x_1, \dots, x_n)$ non nulle.

Les vecteurs suivants sont des vecteurs propres associés :

$$V_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice P dont les colonnes sont $(V_1, \dots, V_n)$ diagonalise M :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

10 1) Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$. Sachant que $\text{rg}(u - \text{Id}_E) = 1$, on a :

$$\text{Ker}(u - \text{Id}_E) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}),$$

$$M_B(u - \text{Id}_E) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix},$$

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 + a_n \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de u sont 1 et $1 + a_n$. Par hypothèse, le sous-espace propre associé à 1 est de dimension $n - 1$. Donc u est diagonalisable si, et seulement si, u admet une valeur propre distincte de 1, c'est-à-dire $1 \neq 1 + a_n$.

L'équivalence des trois propriétés est alors immédiate.

2) Lorsque $\text{Det } u = 0$, u est un projecteur.

3) Lorsque $\text{Det } u \notin \{0, 1\}$, u est une affinité, de rapport $\text{Det } u$.

11 1) • Soit $y = \alpha x + \beta f(x)$ dans $\text{Vect}(x, f(x))$. On a :

$$f(y) = \alpha f(x) + \beta f^2(x) = -\beta x + (\alpha - \beta)f(x).$$

Donc $\text{Vect}(x, f(x))$ est stable par f .

• Il reste à prouver que $\text{Vect}(x, f(x))$ est un plan.

Le vecteur x n'est pas nul. Si $f(x)$ est colinéaire à x , alors il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$.

De $f^2(x) + f(x) + x = 0_E$, on déduit $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

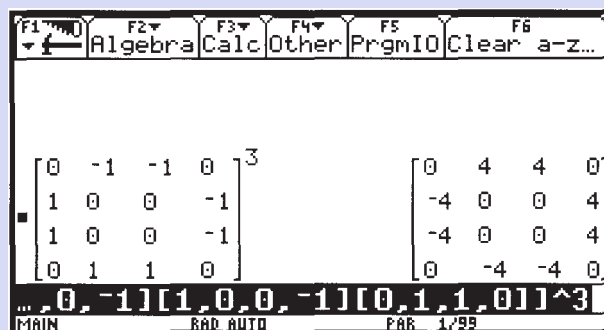
C'est impossible dans $\mathbb{R}$.

2) Soit $\hat{f}$ l'endomorphisme de $\text{Vect}(x, f(x))$ induit par f .

La matrice de $\hat{f}$ dans la base $(x, f(x))$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de $\hat{f}$ est $X^2 + X + 1$, il divise celui de f dans $\mathbb{R}[X]$.

12 1)



2) D'après 1), $A^3 = -4A$, donc le polynôme $X^3 + 4X$ est un polynôme annulateur de A .
Ceci permet de prouver que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ mais qu'elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

13 $\text{Det}(XI_3 - M) = X(X-3)^2$, donc M est trigonalisable.
Calcul de M^n par trigonalisation :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } M^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

14 On note $Z(P)$ l'ensemble des racines du polynôme P .
Si Q divise P_M , alors $Z(Q) \subset Z(P_M)$.
Si Q est un polynôme annulateur de A , alors :

$$Z(P_M) = \text{Sp}(M) \subset Z(Q).$$

Le résultat en découle.

15 Soit Q une matrice inversible et D une matrice diagonale telle que $M = QDQ^{-1}$.
On a $P_M(M) = QP_M(D)Q^{-1}$.

$$\text{Et, si } D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}, \text{ alors :}$$

$$P_M(D) = \begin{pmatrix} P_M(d_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_M(d_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P_M(d_n) \end{pmatrix}.$$

Or les d_i sont les racines de P_M . Donc $P_M(M) = 0_n$.

16 1) Par définition de M , on a :

$$f(e_1) = e_2, f(e_2) = f^2(e_1) = e_3, \dots, f(e_{n-1}) = f^{n-1}(e_1) = e_n.$$

Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ n scalaires tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i M^i = 0_n$.

On a :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(e_1) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_{i+1} = 0_E.$$

Tous les α_i sont nuls et $(I_n, M, \dots, M^{n-1})$ est libre.

2) D'après 1), un polynôme non nul de degré $\leq n-1$ n'est pas un polynôme annulateur de M .

Donc le polynôme caractéristique de M est un polynôme annulateur de M , non nul et de degré minimal. D'où le résultat.

17 1) $AB = A(BA)A^{-1}$, donc AB et BA sont semblables et ont même polynôme caractéristique.

2) La matrice A n'a qu'un nombre fini de valeurs propres.

- Si A n'a pas de valeur propre non nulle, tout réel $\delta > 0$ convient.
- Si A a des valeurs propres non nulles, on pose :

$$= \min\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}\}.$$

Pour tout x de $]0, \delta[$, les matrices $(A - xI_n)B$ et $B(A - xI_n)$ sont semblables et :

$$\forall y \in \mathbb{C} \quad \text{Det}((A - xI_n)B - yI_n) = \text{Det}(B(A - xI_n) - yI_n).$$

Lisons l'égalité ci-dessus à y fixé. Ces deux fonctions polynômes de la variable x coïncident sur l'ensemble infini $]0, \delta[$. Donc elle sont égales. Pour $x = 0$ la conclusion en découle.

18 1) Les valeurs propres de $B = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 42 & 36 \end{pmatrix}$ sont -6 et 36 .

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de B associés -6 et 36 .

$$\text{Posons } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a : } P^{-1}BP = D = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}.$$

Soit $Y = P^{-1}XP$, alors X est solution de (1) si, et seulement si :

$$Y^3 - 7Y = D \quad (2)$$

De (2), on déduit : $YD = DY$ et Y est diagonale.

Or $Y = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ est solution de (2) si, et seulement si :

$$\lambda^3 - 7\lambda = -6 \text{ et } \mu^3 - 7\mu = 36.$$

Donc l'équation (1) a trois solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$X = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 4 - \lambda & 4 \end{pmatrix},$$

avec $\lambda \in \{1, 2, -3\}$.

2) L'équation (1) admet neuf solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$X = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu - \lambda & \mu \end{pmatrix},$$

avec $\lambda \in \{1, 2, -3\}$ et $\mu \in \{4, -2 + i\sqrt{5}, -2 - i\sqrt{5}\}$.

19

1) La somme des coefficients de chaque ligne de A vaut 1, donc :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci prouve que 1 est valeur propre de A .

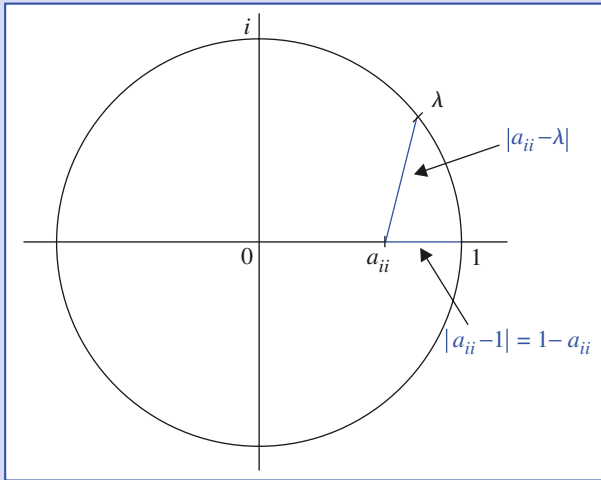
2) Soit λ un complexe tel que $|\lambda| > 1$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$|a_{ii} - \lambda| \geq |\lambda| - a_{ii} > 1 - a_{ii} = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}|.$$

On en déduit que λ n'est pas valeur propre de A (cf. chapitre 1, exercice 20).

3) Soit $\lambda = e^{i\theta}$ un nombre complexe de module 1, différent de 1.



On a : $\cos(\theta) < 1$ et, pour tout i , $a_{ii} > 0$. On en déduit :

Or $1 - a_{ii} \geq 0$, donc : $|a_{ii} - \lambda| > 1 - a_{ii} = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}|$.

Ceci est vrai pour tout i . Donc λ n'est pas valeur propre de A .

4) Le polynôme caractéristique de A est $(-1)^n (X^n - 1)$.

Donc les valeurs propres de A sont toutes de module 1.

20

1) • Puisque M admet n valeurs propres distinctes, tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1 et M est diagonalisable.

Soit X un vecteur propre de M , λ la valeur propre associée.

On a :

$$\text{Ker}(M - \lambda I_n) = \text{Vect}(X).$$

Par ailleurs, $M(NX) = N(MX) = \lambda(NX)$.

Donc, $NX \in \text{Ker}(M - \lambda I_n) = \text{Vect}(X)$. X est vecteur propre de N .

• Si Q est inversible et si $Q^{-1}MQ$ est diagonale, alors la famille des n colonnes de Q est une base de $\mathbb{K}^n$ faite de vecteurs propres de M . D'après ce qui précède, c'est aussi une base de vecteurs propres de N , donc $Q^{-1}NQ$ est diagonale.

2) • Soit $P = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ un polynôme, alors :

$$MP(M) = P(M)M = \sum_{i=0}^d a_i M^{i+1}.$$

Donc :

$$\{P(M) \mid P \in \mathbb{K}[X]\} \subset \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid MN = NM\}.$$

• Inversement, soit N une matrice commutant avec M .

D'après les hypothèses sur M , il existe une matrice inversible Q et n scalaires distincts $d_1, \dots, d_n$, tels que :

$$M = Q \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

D'après 1), la matrice $Q^{-1}NQ$ est aussi diagonale, donc il existe n scalaires $(y_1, \dots, y_n)$ tels que :

$$N = Q \begin{pmatrix} y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & y_n \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Un polynôme P tel que $P(M) = N$ vérifie :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P(d_i) = y_i.$$

Le polynôme suivant convient :

$$P(X) = \sum_{i=1}^n y_i \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - d_j}{d_i - d_j}.$$

21

Le corps de base est $\mathbb{C}$, donc f a une valeur propre λ . Le sous-espace propre associé, noté $E_\lambda(f)$, est stable par g car $fg = gf$.

Soit $\hat{g}$ l'endomorphisme du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $E_\lambda(f)$ induit par g . Sachant que $\dim(E_\lambda(f)) \geq 1$, $\hat{g}$ a au moins une valeur propre et un vecteur propre qui est un vecteur propre commun à f et g .

22

• Supposons que $uv = vu$.

Soit k le nombre de valeurs propres de u et $E_1(u), \dots, E_k(u)$ les sous-espaces propres de u .

Chaque sous-espace $E_i(u)$ est stable par v car $uv = vu$.

Si v_i désigne l'endomorphisme de $E_i(u)$ induit par v , alors v_i est diagonalisable, donc $E_i(u)$ admet une base B_i formée de vecteurs propres de v_i .

Or $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} E_i(u)$, donc $B = (B_1, \dots, B_k)$ est une base de E et, par construction, elle diagonalise simultanément u et v .

• Réciproquement, supposons l'existence d'une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E qui diagonalise simultanément u et v .

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \exists (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{K}^2 \quad u(e_i) = \alpha_i e_i \text{ et } v(e_i) = \beta_i e_i.$$

Alors : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad uv(e_i) = \alpha_i \beta_i e_i = vu(e_i)$.

Les endomorphismes uv et vu prennent les mêmes valeurs pour tous les éléments d'une base de E . Ils sont égaux.

23

La relation de récurrence s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de M sont 1 et $\frac{1}{4}$.

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ diagonalise M :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

On trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \frac{1}{3}(x_0 + y_0 + z_0)$.

24

Le polynôme $\left(X - \frac{3}{2}\right)^3 \left(X - \frac{5}{2}\right)$ est un polynôme annulateur de g , donc :

$$\text{Sp}(g) \subset \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right\}.$$

Si g était diagonalisable, on aurait alors :

$$\left(g - \frac{3}{2}\text{Id}_E\right) \circ \left(g - \frac{5}{2}\text{Id}_E\right) = 0_{\mathcal{L}(E)},$$

ce qui est faux par hypothèse.

25

1) Un endomorphisme nilpotent d'indice 2 n'est pas diagonalisable. Son carré l'est car c'est l'endomorphisme nul.

2) L'inclusion $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$ est vraie.

On suppose f diagonalisable et on considère une base de vecteurs propres de f .

La matrice $D = M_B(f)$ est diagonale et $\dim(\text{Ker } f)$ est le nombre de 0 sur la diagonale de D (pourquoi ?).

On a : $D^2 = M_B(f^2)$. Le nombre de 0 sur la diagonale de D^2 est le même que celui de D .

Donc :

$$\dim(\text{Ker } f) = \dim(\text{Ker } f^2) \text{ et } \text{Ker } f = \text{Ker } f^2.$$

3) • Le cas $\text{Ker } f = \{0_E\}$

On note $\text{Sp } f^2 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$.

Le polynôme $Q(X) = \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)$ un polynôme annulateur de f^2 .

Alors le polynôme $R(X) = \prod_{i=1}^p (X^2 - \alpha_i)$ est un polynôme annulateur de f . Celui-ci est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ car les α_i sont non nuls et distincts deux à deux. Donc f est diagonalisable.

• Le cas $\text{Ker } f \neq \{0_E\}$

De l'égalité $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$, on déduit :

$$\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\} \text{ et } E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.$$

Le sous-espace vectoriel $V = \text{Im } f$ est stable par f . Soit f_V l'endomorphisme de V induit par f .

Puisque f^2 est diagonalisable, f_V^2 l'est aussi.

Mais $\text{Ker } f_V = \{0_E\}$, donc f_V est diagonalisable.

On en déduit l'existence d'une base de $E = V \oplus \text{Ker } f$ formée de vecteurs propres de f .

Chapitre 5

1

Soit (u_n) et (v_n) deux suites complexes bornées. Il existe un réel $K \geq 0$ et tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \left| \frac{\overline{u_n} v_n}{2^n} \right| \leq \frac{K}{2^n}.$$

• La série géométrique $\sum \frac{K}{2^n}$ converge.

Donc l'application $\langle (u_n) \mid (v_n) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{u_n} v_n}{2^n}$ est bien définie sur $B \times B$.

• Rédiger le fait que $\langle \mid \rangle$ est hermitienne et sesquilineaire.

• Enfin, pour toute suite non nulle (u_n) de B , $\langle (u_n) \mid (u_n) \rangle > 0$.

2 1) Pour tout f de E , l'application $x \mapsto f(-x)$ est aussi continue de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. Ceci permet de prouver, en notant V l'ensemble des fonctions paires de E et W celui des fonctions impaires, que :

$$E = V \oplus W.$$

Soit $(f, g) \in V \times W$. fg est impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc :

$$f \cdot g = \int_{\mathbb{R}} fg = 0.$$

Les sous-espaces V et W sont donc orthogonaux.

2) Soit $U = (u_n)$ un élément de $F^\perp$. Pour tout entier k , on note $D_k = (\delta_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice k qui vaut 1.

$$\langle U | D_k \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{u_n} \delta_{n,k}}{2^n} = \frac{\overline{u_k}}{2^k} = 0.$$

Donc U est la suite nulle, $F^\perp = \{0_B\}$, $F \oplus F^\perp = F \neq B$.

3 • On suppose $A \subset B$.

Soit $x \in B^\perp$. Tout y de A est dans B et $(x | y) = 0$.

Donc $x \in A^\perp$.

• Soit $x \in A^\perp \cap B^\perp$.

Pour tout y de $(A+B)$, on écrit $y = a+b$ avec (a, b) dans $A \times B$.

$(x | y) = (x | a) + (x | b) = 0$.

Donc $x \in (A+B)^\perp$. Ceci prouve $A^\perp \cap B^\perp \subset (A+B)^\perp$.

L'inclusion inverse vient de $A \subset A+B$ et $B \subset A+B$.

4 • Si p est un projecteur orthogonal, les vecteurs $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux. Le théorème de Pythagore donne $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

• Réciproquement, supposons que, pour tout x de E :

$$\|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Soit $y \in \text{Im } p$, $z \in \text{Ker } p$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\|p(y + \lambda z)\| = \|y\| \leq \|y + \lambda z\|.$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en élevant au carré, on obtient :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad 0 \leq 2\text{Re}(\lambda \langle y | z \rangle) + |\lambda|^2 \|z\|^2$$

En notant $\langle y | z \rangle = |\langle y | z \rangle| e^{i\theta}$ et en prenant $\lambda = t e^{-i\theta}$, on trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 \leq 2t |\langle y | z \rangle| + t^2 \|z\|^2,$$

puis $\langle y | z \rangle = 0$. Le cas réel est plus simple.

5 1) $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et toute matrice M se décompose en :

$$M = \frac{M + {}^t M}{2} + \frac{M - {}^t M}{2}$$

dans la somme directe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Vérifier :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), (A|B) = 0.$$

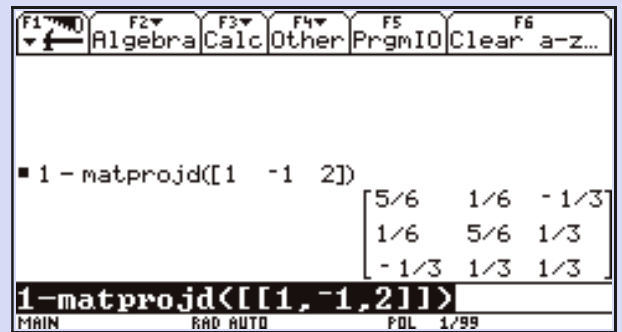
2) La décomposition rappelée en 1) implique :

$$d(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \left\| M - \frac{M + {}^t M}{2} \right\| = \left\| \frac{M - {}^t M}{2} \right\|.$$

Pour la matrice de l'énoncé, $d(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \sqrt{21}$.

6

L'écran suivant donne la solution, calculée sur la TI à l'aide de la fonction `matprojd` développée à l'application 2.



7

1) Vérifier que $V_1 = (1, -2, 1, 0) \in F$, puis chercher un vecteur V_2 , orthogonal à V_1

Alors :

$$(E_1, E_2) = \left(\frac{V_1}{\|V_1\|}, \frac{V_2}{\|V_2\|} \right)$$

convient.

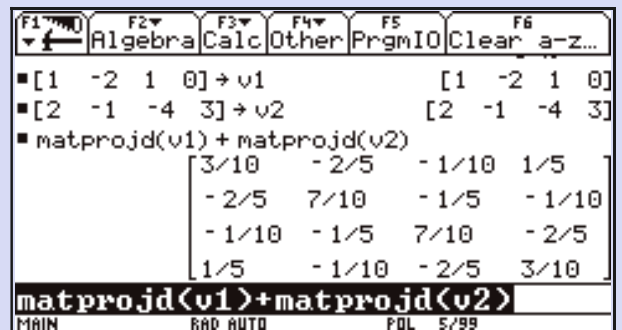
Les calculs donnent :

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1, 0) \quad \text{et} \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, -1, -4, 3).$$

2) On sait que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^4 \quad p_F(X) = (E_1 | X) E_1 + (E_2 | X) E_2.$$

L'écran suivant donne la solution, calculée sur la TI à l'aide de la fonction `matprojd` développée à l'application 2.



3) $(1, 1, 1, 1)$ est orthogonal à F donc $d(X, F) = \|X\| = 2$.

8 On note $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \mathbb{R}_1[X]$, $P_k(X) = X^k$ et, pour tout couple de polynômes (P, Q) :

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^\infty P(x)Q(x) e^{-x} dx.$$

$\langle | \rangle$ est un produit scalaire sur E . Soit $\| \cdot \|$ la norme associée.

$$I = \inf_{P \in F} \|P_k - P\| = d(P_k, F).$$

La famille $(f_0, f_1) = (P_0, P_1 - P_0)$ est une base orthonormée de F .

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\|P_k\|^2 - \langle f_0 | P_k \rangle^2 - \langle f_1 | P_k \rangle^2} \\ &= \sqrt{(2k)! - (k!)^2 - (k!k)^2}. \end{aligned}$$

9 1) $\text{Ker } f = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)^\perp$.

$\text{rg } f = \dim \text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = k$.

$\text{Im } f = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$.

2) Si $k = \dim, E$ f est surjective et le résultat est immédiat.

10 On a :

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}.$$

Donc :

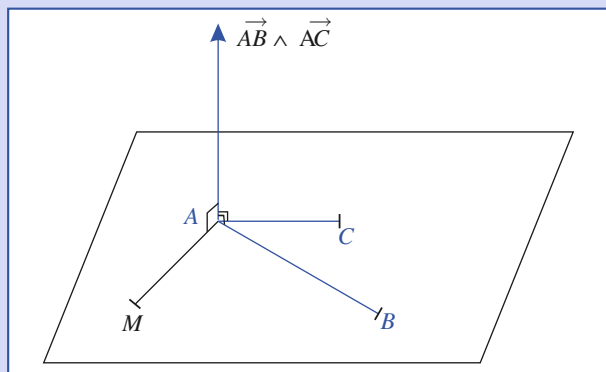
$$\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).$$

• Si les points A, B et C sont alignés, L'ensemble cherché est $\mathbb{R}^3$.

• Si les points A, B et C ne sont pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{AC}$ sont indépendants. Ils engendrent un plan vectoriel, $\text{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, qui est l'orthogonal de la droite engendrée par $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Ainsi :

$$\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \in \text{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

L'ensemble cherché est le plan affine contenant A, B et C .



11 • La linéarité de f est immédiate.

• Si $\vec{x}$ est colinéaire à $\vec{u}$, $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{0}$ et $f(\vec{x}) = \vec{0}$. Donc :

$$\text{Vect}(\vec{u}) \subset \text{Ker } f.$$

• La formule du double produit vectoriel montre que :

$$\begin{aligned} \forall \vec{x} \in E \quad \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{x}) &= \langle \vec{u} | \vec{x} \rangle \vec{u} - \langle \vec{u} | \vec{u} \rangle \vec{x} \\ &= \langle \vec{u} | \vec{x} \rangle \vec{u} - \vec{x}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\vec{x}$ de $\text{Vect}(\vec{u})^\perp$, $f(\vec{x}) = -\vec{x}$.

Donc $f = -p$ où p est le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(\vec{u})^\perp$.

12

1) L'application :

$$(f, g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$$

est un produit scalaire. N est la norme associée à ce produit scalaire.

2) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on peut écrire :

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1] \quad (f(x))^2 &= \left(f(0) + \int_0^x f'(t) dt \right)^2 \\ &\leq f^2(0) + 2|f(0)| \int_0^x |f'(t)| dt + \left(\int_0^x |f'(t)| dt \right)^2. \end{aligned}$$

Or :

$$|f(0)| \int_0^x |f'(t)| dt \leq \frac{1}{2} \left(f^2(0) + \left(\int_0^x |f'(t)| dt \right)^2 \right).$$

De plus :

$$\left(\int_0^x |f'(t)| dt \right)^2 \leq \int_0^1 f'^2(t) dt \times \int_0^1 1 dt.$$

On obtient ainsi :

$$\forall x \in [0, 1] \quad (f(x))^2 \leq 2 \left(f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t) dt \right) = 2N(f)^2.$$

D'où le résultat souhaité : $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.

3) Soit la suite (f_n) de $E^\mathbb{N}$ où : $f_n(x) = x^n$.

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad N(f_n) = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}.$$

Les normes $\| \cdot \|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes.

13

1) On a, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \|x + e^{-(2ik)\pi/n} y\|^2 \\ = \|x\|^2 + \|y\|^2 + e^{-(2ik)\pi/n} \langle x | y \rangle + e^{(2ik)\pi/n} \langle y | x \rangle. \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque $n > 2$,

$$\sum_{k=1}^n e^{(2ik)\pi/n} = \sum_{k=1}^n e^{(4ik)\pi/n} = 0.$$

On en déduit la formule demandée.

2) Pour $n = 4$, on trouve la formule de polarisation complexe du § 2.3.

Chapitre 6

1 Si $(x, y) \in \text{Ker } u \times \text{Im } u$ et si t est tel que $y = u(t)$

$$\langle x | y \rangle = \langle x | u(t) \rangle = \langle u(x) | t \rangle = 0.$$

Donc $\text{Im } u \subset (\text{Ker } u)^\perp$. Le théorème du rang donne l'égalité.

2 $1) (\varphi(P) | Q) = \int_{-1}^1 [(1-t^2)P''(t) - 2tP'(t)]Q(t) dt$.

Une intégration par parties permet de prouver que :

$$(\varphi(P) | Q) = \int_{-1}^1 (1-t^2)P'(t)Q'(t) dt = (P | \varphi(Q)).$$

$2) \varphi(1) = 0, \varphi(X) = -2X, \varphi(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - k(k+1)X^k$,

Donc :

$$\text{Sp } \varphi = \{-k(k+1) \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

La matrice de φ dans la base canonique n'est pas symétrique bien que φ soit symétrique. Donc la base canonique n'est pas orthonormée.

Puisque φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes, il est diagonalisable.

N.B. : Le théorème 12 rend ce raisonnement inutile.

3 La norme de E associée au produit scalaire $\cdot$ est notée $\| \cdot \|$. Fixons (x, y, α, β) dans $E \times E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et développons $\|u(\alpha x + \beta y) - \alpha u(x) - \beta u(y)\|^2$:

Sachant que u conserve le produit scalaire, on obtient :

$$\begin{aligned} & \|u(\alpha x + \beta y) - \alpha u(x) - \beta u(y)\|^2 \\ &= \|\alpha x + \beta y\|^2 + \alpha^2 \|x\|^2 + \beta^2 \|y\|^2 \\ &\quad - 2\alpha(\alpha x + \beta y) \cdot x - 2\beta(\alpha x + \beta y) \cdot y + 2\alpha\beta x \cdot y. \end{aligned}$$

Finalement, $\|u(\alpha x + \beta y) - \alpha u(x) - \beta u(y)\|^2 = 0$.

La linéarité de u en découle.

4 • Si $f = ku$ avec $k \in \mathbb{R}^{+*}$ et $u \in \mathcal{O}(E)$, (1) est vraie.

• Soit f un endomorphisme non nul de E vérifiant (1).

Pout tout (x, y) de $(E \setminus \{0_E\})^2$, on a :

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \mid \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = 0.$$

En utilisant (1) et en développant, on trouve :

$$\forall (x, y) \text{ de } (E \setminus \{0_E\})^2 \quad \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(y)\|}{\|y\|}.$$

Ce qui permet de conclure.

5 • Chaque vecteur colonne de S est unitaire, donc :

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n s_{ij}^2 \right) = n.$$

• Soit X le vecteur colonne dont toutes les composantes valent 1.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} = {}^t X S X = (X | S X)$$

où $(|)$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de conclure.

6 A est la matrice, dans la base canonique, de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}(1, 4, 1)$.

7 • Les matrices A et B sont symétriques et orthogonales. Elles représentent donc des symétries orthogonales.

• Il reste à calculer $\text{Ker}(A - I_4)$ et $\text{Ker}(B - I_4)$.

8 L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axe $\mathbb{R}(0, 1, 1)$.

Les applications $u : X \mapsto AX + B$ et $v : X \mapsto AX + C$ sont des applications affines de partie linéaire f .

1) Étude de u

L'application u admet des points fixes que l'on détermine en résolvant $X = AX + B$.

L'application u est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axe :

$$D = (1/2, \sqrt{6}/6, 0) + \mathbb{R}(0, 1, 1).$$

2) Étude de v

L'équation $X = AX + C$ n'a pas de solution. L'application v n'a pas de point fixe. Il s'agit d'un vissage car sa partie linéaire est une rotation.

On note $V = (0, 1, 1)$. Alors :

$$v(O) = C = V + u(O) \text{ et } v(M) = v(O) + f(\overrightarrow{OM}) = V + u(M).$$

Donc v est la composée de u et de la translation de vecteur V .

9 Les sous-espaces propres de v sont stables par u car $u \circ v = v \circ u$. Soit λ une valeur propre de v , E_λ le sous-espace propre associé et u_λ l'endomorphisme de E_λ induit par u .

L'endomorphisme u_λ est symétrique. Donc il existe une base orthonormée B_λ de E_λ formée de vecteurs propres de u .

Les E_λ sont orthogonaux deux à deux et leur somme est E car v est diagonalisable. Donc $B = (B_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp } v}$ est une base ortho-normée de E .

Les éléments de B sont vecteurs propres de u et de v .

10

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Donc $A^2 = 0_n$ et $\text{Sp } A = \{0\}$. Si A était diagonalisable, ce serait la matrice nulle, ce qui n'est pas.

11

La matrice A est symétrique ; ses valeurs propres sont 0, 9, -18 ; la matrice orthogonale :

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

diagonalise M .

12

1) Par définition de f et de u :

$$\forall x \in E \quad Q(x) = f(x, x) = \langle x | u(x) \rangle$$

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u et, α_i la valeur propre de u associée à e_i . Alors :

$$Q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i \mid \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2.$$

2) Avec les notations de la question 1) on a :

$$\begin{aligned} (\forall x \in E \quad Q(x) \geq 0) &\Leftrightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \alpha_i \geq 0) \\ &\Leftrightarrow (\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+). \end{aligned}$$

13

1) Les vecteurs $(2, 1)$ et $(1, -2)$ sont vecteurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres associées sont 3 et -7.

On pose :

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2).$$

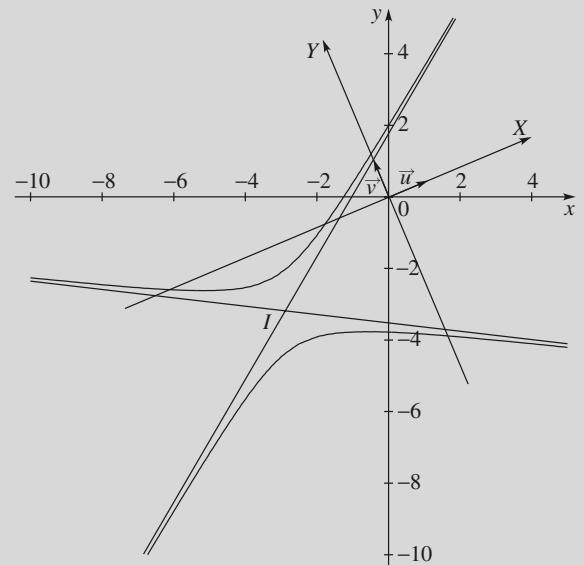
Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la conique est :

$$3(X+4)^2 - 7\left(Y + \frac{11}{7}\right)^2 + 7 = 0.$$

C'est une hyperbole.

Avec Maple :

```
> restart :with(plots) :
implicitplot(x^2+8*x*y-5*y^2+14*sqrt(5)*x
-4*sqrt(5)*y+264/7=0,x=-8..4,
y=-12..5,numpoints=4000,
scaling=constrained);
```



2) Les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$ sont vecteurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres associées sont 0 et 2.

On pose :

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1).$$

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la conique est :

$$(Y+2)^2 - 3X - 3 = 0.$$

Il s'agit d'une parabole de sommet $S(-1, -2)$, d'axe la droite d'équation $Y = -2$, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3) Les vecteurs $(1, 3)$ et $(-3, 1)$ sont vecteurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2,9 & -0,3 \\ -0,3 & 2,1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres associées sont 2 et 3.

On pose :

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1).$$

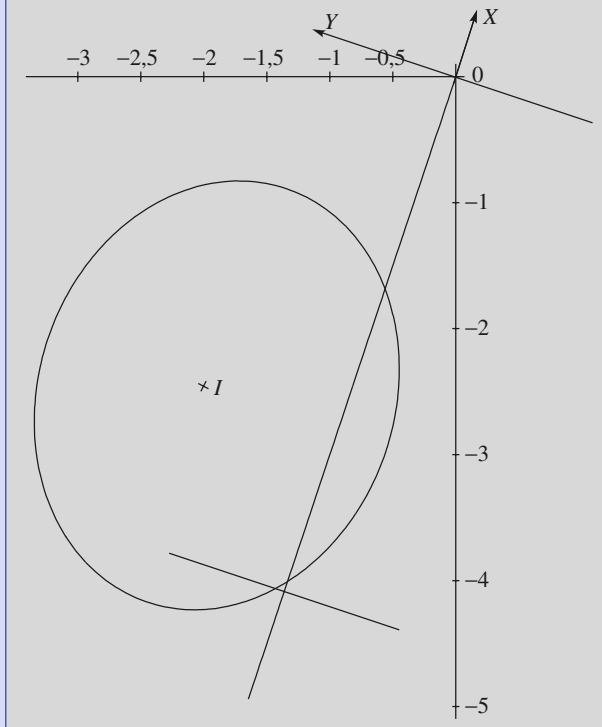
Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la conique est :

$$2(X+3)^2 + 3(Y-1)^2 - 6 = 0.$$

Cette conique est l'ellipse de centre $I(-3, 1)$, de demi-grand axe $a = \sqrt{3}$ et de demi-petit axe $b = \sqrt{2}$, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Avec Maple :

```
> implicitplot({2.9*x^2-0.6*x*y+2.1*y^2
+3*sqrt(10)*x+3*sqrt(10)*y+15=0,y-3*x},
x=-5..0,y=-5..0,
numpoints=4000,scaling=constrained);
```



4) Les vecteurs $(4, -3)$ et $(3, 4)$ sont vecteurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres associées sont 25 et 0.

On pose :

$$\vec{u} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la conique est :

$$(X+2)^2 + 28Y - 28 = 0.$$

C'est une parabole de sommet $S(-2, 1)$, d'axe la droite d'équation $X = -2$, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

5) Les vecteurs $(1, -1)$ et $(1, 1)$ sont vecteurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos \alpha \\ -\cos \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose :

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

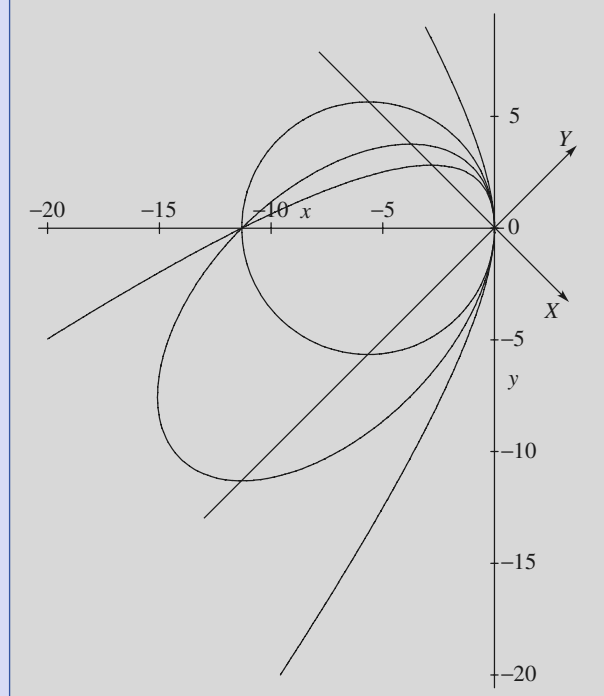
Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la conique est :

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} X^2 + \sin^2 \frac{\alpha}{2} Y^2 + 4X + 4Y = 0.$$

- Si $\alpha = 0 \pmod{\pi}$, on obtient une parabole.
- Si $\alpha = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, on obtient un cercle passant par O .
- Si $\alpha \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$, on obtient l'équation d'une ellipse.

Avec Maple :

```
> implicitplot({x^2-2*x*y+y^2+8*sqrt(2)*x,
x^2-x*y+y^2+8*sqrt(2)*x,x^2+y^2+8*sqrt(2)*x},
x=-20..0,y=-20..9,numpoints=4000,
scaling=constrained);
```



14

On pose :

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1).$$

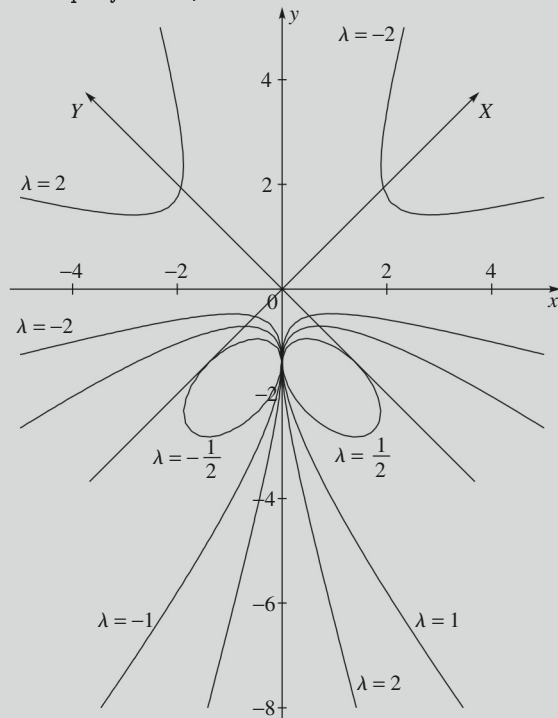
Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la conique est :

$$(1+\lambda)X^2 + (1-\lambda)Y^2 + 2X + 2Y + 2 = 0.$$

- Si $\lambda = 0$, on trouve un point.
- Si $\lambda = 1$ ou -1 , on obtient une parabole.
- Si $\lambda \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, c'est une ellipse.
- Si $\lambda \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, il s'agit d'une hyperbole.

Avec Maple :

```
> L := NULL : with(plots) : i := 0 :
  for a in {-2, -1/2, -1, 0, 1/2, 1, 2} do
>   couleur := {red, green, blue, pink, violet,
    yellow, maroon} : i := i + 1 :
>   L := L, implicitplot(x^2 + 2*a*x*y + y^2
    + 2*sqrt(2)*y + 2, x = -5..5, y = -8..5,
    color = couleur[i], numpoints = 3000,
    scaling = constrained) :
> od :
> display({L}) ;
```



15 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. De l'équation dans ce repère, on déduit la matrice associée à la quadrique :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Maple nous donne les éléments propres A.

```
> restart : with (linalg) : > A := linalg
[matrix] (3,3, [2,-2,0,-2,1,-2,0,-2,0]);
> eigenvecs (A);
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

[1, 1, {[2, 1, -2]}], [-2, 1, {[1, 2, 2]}], [4, 1, {[2, -2, 1]}]

Les vecteurs propres fournis par Maple sont tous de norme 3. On pose :

$$\vec{u} = \frac{1}{3}(2, 1, -2), \quad \vec{v} = \frac{1}{3}(1, 2, 2), \quad \vec{w} = \frac{1}{3}(2, -2, 1).$$

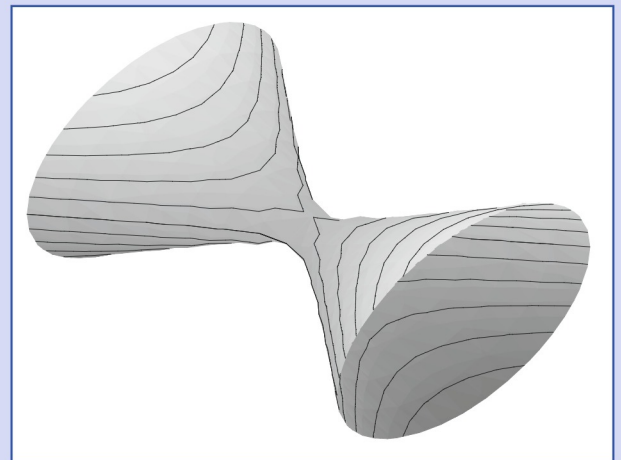
L'équation de la quadrique dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est :

$$x'^2 - 2y'^2 + 4z'^2 + \frac{1}{3}(14x' - 2y' - 4z') + 2 = 0.$$

Par factorisation canonique, ce qui correspond à un changement d'origine, on arrive à une équation du type :

$$x''^2 - 2y''^2 + 4z''^2 = c^2, \quad \text{avec } c \neq 0.$$

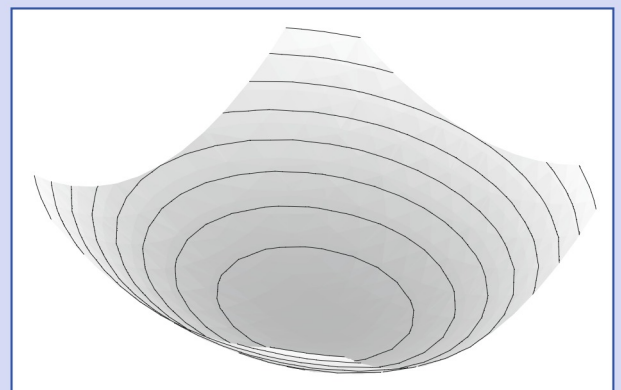
Il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe.



16 Par la même méthode que dans l'exercice précédent, on arrive à une équation du type :

$$3x''^2 + 2y''^2 = cz'', \quad \text{avec } c \neq 0$$

dans un nouveau repère orthonormé. Il s'agit d'un paraboloïde elliptique.



171) Soit f et g deux éléments de E .La fonction $v(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. De plus :

$$v(f)(0) = 0 \quad \text{et} \quad v(f)' = f.$$

Soit G la primitive de g qui s'annule en 1.

$$\begin{aligned} \langle v(f) | g \rangle &= [v(f)(x)G(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)G(x) dx \\ &= \langle f | -G \rangle \end{aligned}$$

On pose $v^*(g)(x) = -G(x) = \int_x^1 g(t) dt$. L'application v^* définit un endomorphisme de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ qui répond à la question.

Il est unique (cf. *théorème 3* pour la démonstration).2) Soit λ une valeur propre de $v^* \circ v$ et f un vecteur propre associé.• On montre tout d'abord que $\lambda > 0$.

$$\langle v^* \circ v(f) | f \rangle = \|v(f)\|^2 = \lambda \|f\|^2.$$

Sachant que $\|f\|^2 > 0$, on en déduit $\lambda \geq 0$.Si $\lambda = 0$, alors $v(f) = 0$ et $f = v(f)' = 0$. Ce n'est pas possible.• Puisque $\lambda > 0$, on peut écrire $\lambda = \alpha^2$ avec $\alpha > 0$ et :

$$\alpha^2 f(x) = v^* \circ v(f)(x)$$

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que, pour tout x de $[0, 1]$:

$$\alpha^2 f''(x) = -f(x).$$

Donc, f est de la forme :

$$f(x) = A \cos\left(\frac{1}{\alpha}x\right) + B \sin\left(\frac{1}{\alpha}x\right).$$

Or :

$$v(f)(0) = 0, \quad v^* \circ v(f)(1) = 0 \quad \text{et} \quad v^* \circ v(f) = \alpha^2 f.$$

Donc :

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \text{et} \quad B = 0.$$

Ces deux conditions sont nécessaires pour que $\lambda = \alpha^2$ soit valeur propre de $v^* \circ v$ et que f soit dans le sous-espace propre associé. Vérifier qu'elles sont suffisantes.

18• Si M est une matrice de rotation, ses vecteurs colonnes sont unitaires et orthogonaux deux à deux. Donc :

$$ab + bc + ca = 0 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

De plus :

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \text{Det}M = 1.$$

Finalement, si M est une matrice de rotation :

$$ab + bc + ca = 0 \quad \text{et} \quad a + b + c = 1 \quad (1)$$

• Si a, b et c vérifient (1), ce sont les trois racines du polynôme :

$$P(X) = X^3 - X^2 + k$$

avec $k = -abc$. Dresser le tableau de variations de P et en déduire que :

$$k \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$$

car P a trois racines réelles

• Réciproquement, si :

$$k \in \left[0, \frac{4}{27}\right],$$

le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + k$ admet trois racines réelles a, b, c telles que $ab + bc + ca = 0$ et $a + b + c = 1$. La matrice M associée est une matrice de rotation.

19Soit n la dimension de E , $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u , λ_i la valeur propre associée à e_i .Soit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ tel que $\|x\| = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq 1$, on a :

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i^2 \leq (\max\{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp } u\})^2.$$

De plus, si j est tel que $|\lambda_j| = \max\{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp } u\}$, alors $\|u(e_j)\| = \max\{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp } u\}$.

D'où l'égalité demandée.

201) La matrice M est symétrique réelle, donc diagonalisable. Ses valeurs propres sont $1, \frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{12}$.La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est telle que :

$$M^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-1)^n}{12^n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

La convergence de la suite de matrices (M^n) en découle.

$$2) N = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

N est la matrice, relativement à la base canonique, du projecteur orthogonal sur la droite :

$$D = \text{Ker}(M - I_3) = \mathbb{R}(1, 1, 1).$$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = NX_0$. Effectuer le calcul.

21 1) • Développer $\langle x + y | u(x + y) \rangle$ permet de prouver que le premier point entraîne le second.

• Supposons le deuxième point.

Soit $M = (m_{ij})$ la matrice de u relativement à la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. On a :

$$m_{ij} = \langle e_i | u(e_j) \rangle = -\langle e_j | u(e_i) \rangle = -m_{ji}.$$

Donc le deuxième point implique le troisième.

• Supposons que la matrice M de u relativement à une base orthonormée B soit antisymétrique.

Pour tout x de E , on note X le vecteur colonne des composantes de x dans la base B . Alors :

$$\begin{aligned} \langle x | u(x) \rangle &= {}^t X M X = {}^t X (-{}^t M) X = -{}^t (M X) X \\ &= -\langle x | u(x) \rangle \end{aligned}$$

Donc le troisième point implique le premier.

2) • Soit u un endomorphisme antisymétrique de spectre non vide, λ une valeur propre de u , x un vecteur propre associé.

$$\langle x | u(x) \rangle = 0 = \lambda \langle x | x \rangle.$$

Or $\langle x | x \rangle > 0$, donc $\lambda = 0$.

• Si u est un endomorphisme antisymétrique et diagonalisable, il n'a qu'une seule valeur propre, 0, et $\text{Ker } u = E$. Donc $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

3) Soit u un endomorphisme antisymétrique.

a) Si $(x, y) \in \text{Ker } u \times \text{Im } u$ et si t est tel que $y = u(t)$

$$\langle x | y \rangle = \langle x | u(t) \rangle = -\langle u(x) | t \rangle = 0.$$

Donc $\text{Im } u \subset (\text{Ker } u)^\perp$. Le théorème du rang donne l'égalité.

b) $\text{Im } u$ est un sous-espace de E stable par u . L'endomorphisme $\hat{u}$ de $\text{Im } u$ induit par u est aussi antisymétrique.

$$\text{Ker } \hat{u} = \text{Ker } u \cap \text{Im } u = \{0_E\}.$$

Donc 0 n'est pas valeur propre de $\hat{u}$, $\text{Sp } \hat{u} = \emptyset$ et $\text{rg } (\hat{u})$ est pair.

c) • L'endomorphisme u^2 est symétrique, donc diagonalisable.

• Soit μ une valeur propre de u^2 et x un vecteur propre associé.

De $\langle u^2(x) | x \rangle = -\langle u(x) | u(x) \rangle$, on déduit $\mu \leq 0$.

d) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de u relativement

à une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E :

$$u(\vec{i}) = \gamma \vec{j} - \beta \vec{k} = (\alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}) \wedge \vec{i};$$

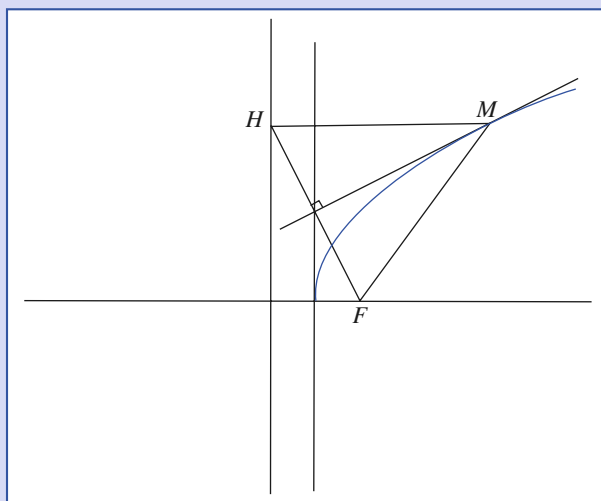
$$u(\vec{j}) = -\gamma \vec{i} + \alpha \vec{k} = (\alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}) \wedge \vec{j};$$

$$u(\vec{k}) = \beta \vec{i} - \alpha \vec{j} = (\alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}) \wedge \vec{k};$$

On pose $\vec{b} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$. Les calculs précédents permettent de prouver que :

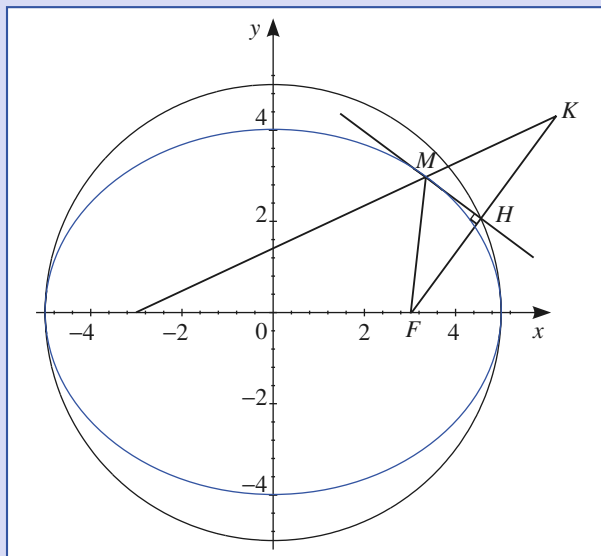
$$\forall \vec{x} \in E \quad u(\vec{x}) = \vec{b} \wedge \vec{x}.$$

22 1)



On appelle F le foyer, H le projeté d'un point M de la parabole sur la directrice. Montrer que la tangente à la parabole en M est perpendiculaire à la droite (HF) et en déduire que le lieu cherché est la parallèle à la directrice passant par le sommet.

2)

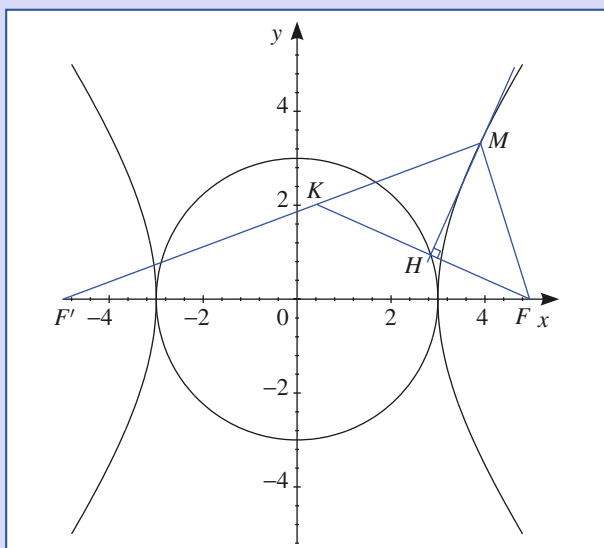


On rappelle que, si M est un point de l'ellipse, la tangente en M est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$ et que :

$$MF + MF' = 2a.$$

Soit K le symétrique de F par rapport à la tangente en M et H le projeté orthogonal de F sur la tangente en M . Alors K décrit le cercle de centre F' et de rayon $2a$ et H décrit le cercle image de ce cercle par l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$. Ce cercle est le cercle de centre O et de rayon a , c'est le cercle principal de l'ellipse.

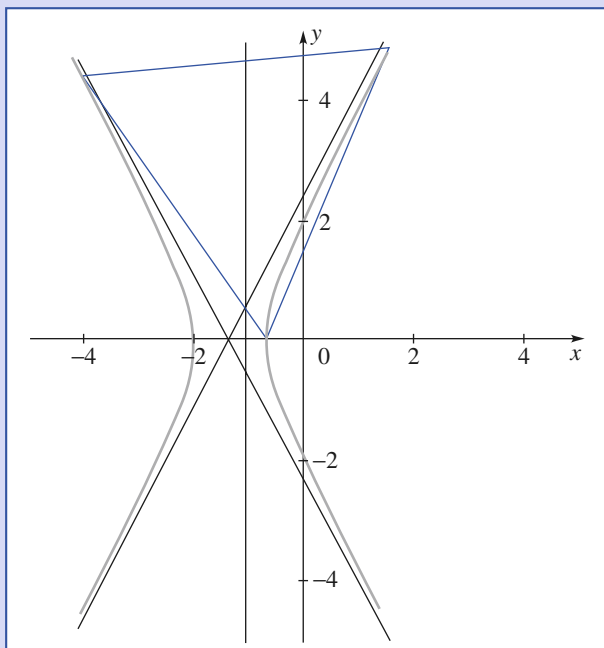
3)



Montrer de manière analogue, que le lieu des projections orthogonales du foyer $F(c, 0)$ sur les tangentes à l'hyperbole est le cercle de centre O et de rayon a privé des deux points :

$$\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{e}, -\frac{b}{e}\right).$$

23



On utilise une représentation polaire dans un repère d'origine le foyer et dont l'axe $(x'x)$ est perpendiculaire à la directrice.

L'hyperbole admet une équation de la forme $\rho = \frac{2a}{1 - 2\cos\theta}$.

La directrice a pour équation cartésienne $x = a$ et le cercle de

centre $I(-a, b)$ a pour équation polaire :

$$\rho = -2a \cos\theta + 2b \sin\theta.$$

L'angle polaire des points de l'intersection étudiée vérifie :

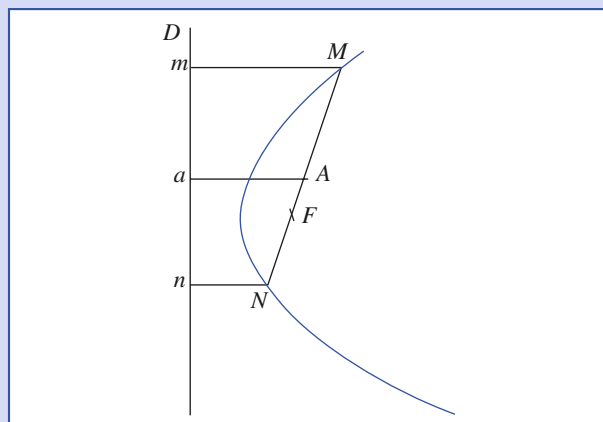
$$2a \cos\theta - 2b \sin\theta = 2a \cos 2\theta - 2b \sin 2\theta.$$

En écrivant $(2a, -2b) = r(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$, on obtient

$$\theta = 2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{2\theta_0}{3} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

D'où le résultat.

24



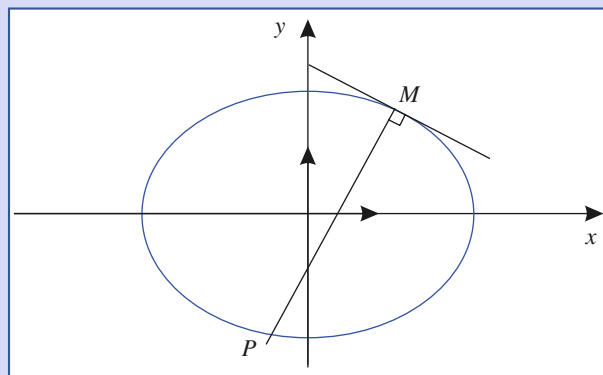
On note F le foyer de la parabole.

Soit A le milieu de $[MN]$. Les points M, N et A se projettent respectivement en m, n et a sur la directrice (D) . Alors on a :

$$Aa = \frac{1}{2}(Mm + Nn) = \frac{1}{2}(MA + AN).$$

D'où le résultat.

25



Le point M a pour coordonnées :

$$x = a \cos t, y = b \sin t, \quad \text{avec} \quad a > b.$$

La normale à l'ellipse est dirigée par le vecteur :

$$\vec{u} = (b \cos t, a \sin t).$$

Le point P est tel que $\overrightarrow{MP} = s\overrightarrow{u}$. On calcule s en écrivant que P appartient à l'ellipse. Puis on pose :

$$\sin^2 t = z \quad \text{et} \quad f(z) = MP^2.$$

Il reste alors à déterminer z pour que $f(z)$ soit minimal.

Avec Maple :

```
> restart :eq := (a+s*b)^2*cos(t)^2/a^2
+(b+s*a)^2*sin(t)^2/b^2=1 ;
équation := (a+s*b)^2*cos(t)^2/a^2 + (b+s*a)^2*sin(t)^2/b^2 = 1
> sol := [solve(eq,s)] ;
Solution := [0, -2*ba*(-b^2+b^2*sin(t)^2-sin(t)^2*a^2)/
(-b^4+b^4*sin(t)^2-sin(t)^2*a^4)]
> MP2 := op(2,sol)^2*(b^2*cos(t)^2+a^2*sin(t)^2) ;
MP2 := 4*b^2*a^2*(-b^2+b^2*sin(t)^2-sin(t)^2*a^2)^2*(b^2*cos(t)^2+sin(t)^2*a^2)/
(-b^4+b^4*sin(t)^2-sin(t)^2*a^4)^2
> f := unapply(subs({sin(t)^2=z,
cos(t)^2=1-z},MP2),z) ;
f := z -> 4*b^2*a^2*(-b^2+b^2*z-za^2)^2*(b^2*(1-z)+za^2)/
(-b^4+b^4*z-za^4)^2
> diff(f(z),z) ;
8*b^2*a^2*(-b^2+b^2*z-za^2)*(b^2*(1-z)+za^2)*(b^2-a^2)/
(-b^4+b^4*z-za^4)^2
-8*b^2*a^2*(-b^2+b^2*z-za^2)^2*(b^2*(1-z)+za^2)*(b^4-a^4)/
(-b^4+b^4*z-za^4)^3
+4*b^2*a^2*(-b^2+b^2*z-za^2)^2*(-b^2+a^2)/
(-b^4+b^4*z-za^4)^2
> solve(diff(f(z),z),z) ;
b^2/(b^2-a^2), b^2/(b^2-a^2), (b^2-2a^2)*b^2/
(b^4-a^4)
```

f' s'annule pour $z_1 = \frac{b^2}{b^2-a^2}$ et $z_2 = \frac{b^2(b^2-2a^2)}{b^4-a^4}$.

Finalement, si $b^2 \leq 2a^2$, la longueur minimale de MP est :

$$a^2 b^2 \left(\frac{3}{a^2 + b^2} \right)^{3/2}.$$

Sinon, la longueur minimale de MP est $2b$.

26

1) Pour un point M , de coordonnées (x, y, z) dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

$$d^2(M, D_1) = x^2 + y^2.$$

Pour la distance de M à D_2 , on introduit le point $B = O + b\vec{j}$ de D_2 et $\vec{v} = a\vec{i} + c\vec{k}$ son vecteur directeur.

$$d^2(M, D_2) = \|\overrightarrow{BM}\|^2 - \frac{(\overrightarrow{BM} | \vec{v})^2}{(\vec{v} | \vec{v})}.$$

L'équation du lieu des points équidistants de D_1 et D_2 s'obtient en simplifiant l'expression :

$$d^2(M, D_1) = d^2(M, D_2).$$

On arrive à :

$$a^2 x^2 - a^2 y^2 + 2acxz + (a^2 + c^2)b(2y - b) = 0 \quad (1)$$

La méthode de réduction proposée permettra de prouver que ce lieu est un paraboloïde hyperbolique.

2) Le plan de cote z coupe la droite $D_2 = B + \mathbb{R}\vec{v}$ en un point N de coordonnées $(0, b, 0) + \lambda(a, 0, c)$ de telle façon que $z = \lambda c$. Donc :

$$\lambda = \frac{z}{c} \quad \text{et} \quad N = \left(\frac{az}{c}, b, z \right).$$

Par rotation autour de la droite D_1 (alias l'axe Oz), le point N décrit un cercle du plan de cote z d'équation :

$$x^2 + y^2 = \frac{az^2}{c^2} + b^2. \quad (2)$$

(Faire le dessin correspondant à ce descriptif !)

Le raisonnement précédent est valable pour toute valeur de z et l'équation (2) est l'équation de la surface étudiée. Il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe.

Chapitre 7

1

La fonction g définie sur $\mathbb{R}^{**}$ par $g(x) = \ln x$ admet pour dérivée $g'(x) = \frac{1}{x}$.

Elle vérifie donc l'équation différentielle :

$$x \ln(x)y' - y = 0.$$

Les fonctions f sont donc les solutions de l'équation différentielle :

$$x \ln(x)y' - y = 2x^2 \ln(x) - x^2.$$

2

On reconnaît une équation linéaire, du premier ordre, avec second membre. Sous forme résolue, elle s'écrit :

$$y' = -\frac{x}{(x^2-4)}y + \frac{2}{(x^2-4)}.$$

On la résout sur :

$$I_1 =]-\infty, -2[, I_2 =]-2, 2[\quad \text{et} \quad I_3 =]2, +\infty[.$$

Solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = \frac{k}{\sqrt{|x^2-4|}}, \quad \text{avec } k \text{ réel.}$$

Variation de la constante pour l'équation avec second membre :

$$y(x) = \frac{k(x)}{\sqrt{|x^2-4|}}, \quad \text{avec } k'(x) = 2 \frac{\sqrt{|x^2-4|}}{(x^2-4)}.$$

Résolution sur I_1

$$k'(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}}, \quad y(x) = \frac{2 \ln(-x - \sqrt{x^2 - 4}) + a}{\sqrt{x^2 - 4}} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Résolution sur I_2

$$k'(x) = -\frac{2}{\sqrt{4 - x^2}},$$

$$y(x) = -2 \frac{\text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{b}{\sqrt{4 - x^2}} \quad (b \in \mathbb{R}).$$

Résolution sur I_3

$$k'(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}},$$

$$y(x) = \frac{2 \ln(x + \sqrt{x^2 - 4}) + c}{\sqrt{x^2 - 4}} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Recherche de solutions sur $] -2, +\infty[$

L'existence d'une limite de y en $x = 2$ impose $b = \pi$ et $c = -2 \ln 2$. Pour ces valeurs de b et c , on pose $y(2) = 1$. On obtient une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -2, +\infty[$, avec $y'(2) = -\frac{1}{6}$ et solution de l'équation différentielle sur cet intervalle.

Recherche de solutions sur $] -\infty, 2[$

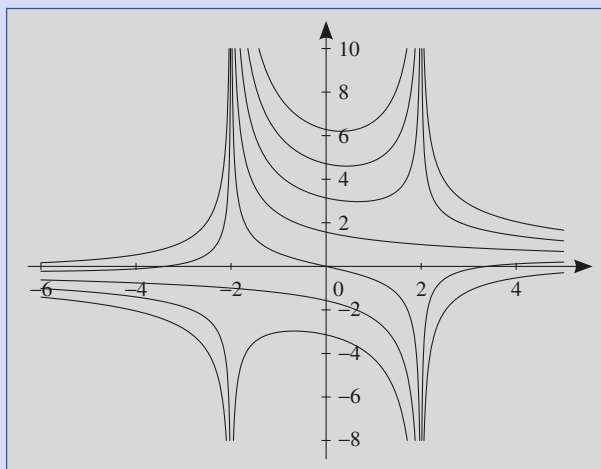
L'existence d'une limite de y en $x = -2$ impose $a = -2 \ln 2$ et $b = -\pi$. Pour ces valeurs de a et b , on pose $y(-2) = -1$. On obtient une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 2[$, avec $y'(-2) = -\frac{1}{6}$ et solution de l'équation différentielle sur cet intervalle.

Il n'existe donc pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Avec Maple :

```
> with(plots) :
L := [] : dsolve({(x^2-4)*D(y)(x)+x*y(x)=2},
y(x));
for k from -2 to 2 by 1 do
p := dsolve({(x^2-4)*D(y)(x)+x*y(x)=2,
y(-3)=2*(ln(3-sqrt(5))-ln(2))/sqrt(5)+k},
y(x),type=numeric) :
L := L, odeplot(p, [x,y(x)], -6..-2,
view=[-6..-2,-5..5], numpoints=500) : od :
for k from -3 to 3 by 1 do
p := dsolve({(x^2-4)*D(y)(x)+x*y(x)=2,
y(3)=2*(ln(3+sqrt(5))-ln(2))/sqrt(5)+k},
y(x),type=numeric) :
L := L, odeplot(p, [x,y(x)], -2..2,
view=[-2..2,-8..10], numpoints=500) : od :
for k from -2 to 2 by 1 do
p := dsolve({(x^2-4)*D(y)(x)+x*y(x)=2,
y(3)=2*(ln(3+sqrt(5))-ln(2))/sqrt(5)+k},
y(x),type=numeric) :
L := L, odeplot(p, [x,y(x)], 2..5,
view=[2..5,-8..10], numpoints=500) : od :
display(L) ;
```

$$y(x) = \frac{2 \ln(x + \sqrt{(x-2)(x+2)}) + C_1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$



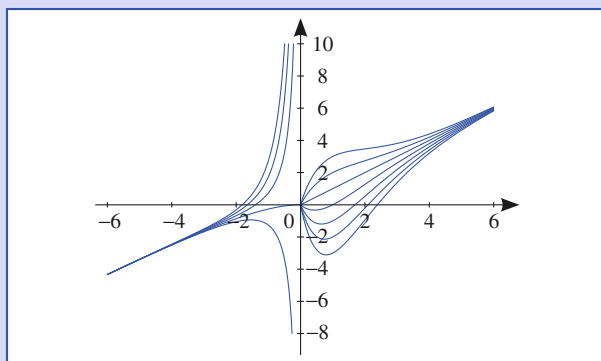
3

On reconnaît une équation linéaire, du premier ordre, avec second membre. Sous forme résolue, elle s'écrit :

$$y' = -\frac{(x-1)}{|x|}y + |x|.$$

Sur $\mathbb{R}^*$, on trouve : $y(x) = \frac{a}{x}e^x + x + 2 + \frac{2}{x}$, avec a réel quelconque.

Sur $\mathbb{R}^{**}$, on trouve : $y(x) = bxe^{-x} + x$, avec b réel quelconque.



Deux calculs de développements limités permettront de prouver que l'équation initiale admet une unique $\mathbb{R}$ -solution.

On l'obtient avec $a = -2$, $b = -1$ et $y(0) = 0$.

4

On suppose que la fonction x est solution de :

$$x'' = ax' + bx.$$

La fonction nulle l'est aussi et ces deux fonctions satisfont la condition initiale $x(0) = 0$; $x'(0) = 0$. C'est impossible.

5

C'est une équation linéaire, du second ordre, résolue en y'' .

Solutions de l'équation homogène : $(ax + b)e^{-x}$.

Décomposition du second membre :

$$4 \cos x \operatorname{ch} x = 2 \operatorname{Re} \left(e^{x(1+i)} + e^{x(-1+i)} \right).$$

Solution particulière de $y'' + 2y' + y = e^{x(1+i)}$:

$$y(x) = \frac{1}{4i+3} e^{x(1+i)}.$$

Solution particulière de $y'' + 2y' + y = e^{x(-1+i)}$:

$$y(x) = -e^{x(-1+i)}.$$

Une solution particulière de l'équation différentielle est :

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \left(\frac{1}{4i+3} e^{x(1+i)} - e^{x(-1+i)} \right) \\ = \frac{6}{25} e^x \cos x + \frac{8}{25} e^x \sin x - 2e^{-x} \cos x. \end{aligned}$$

Solutions de l'équation différentielle de départ :

$$y(x) = (ax + b)e^{-x} + \frac{6}{25} e^x \cos x + \frac{8}{25} e^x \sin x - 2e^{-x} \cos x.$$

6 C'est une équation linéaire, du second ordre. Elle s'écrit sous forme résolue sur chacun des intervalles

$$]-\infty, -1[\quad \text{et} \quad]-1, +\infty[.$$

On applique la variation de la constante en posant :

$$x(t) = c(t)e^t.$$

On obtient $c''(t)(t+1) + (2t+1)c'(t) = 0$.

Après calculs, $x(t) = ae^{-t}(2t+3) + be^t$.

Recherche des $\mathbb{R}$ -solutions.

La restriction d'une $\mathbb{R}$ -solution à $]-\infty, -1[$ est de la forme :

$$x_1(t) = a_1 e^{-t}(2t+3) + b_1 e^t.$$

La restriction d'une $\mathbb{R}$ -solution à $]-1, +\infty[$ est de la forme :

$$x_2(t) = a_2 e^{-t}(2t+3) + b_2 e^t.$$

Le raccordement en -1 des deux fonctions, pour obtenir une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, impose $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$. Les $\mathbb{R}$ -solutions de l'équation initiale sont de la forme :

$$x(t) = ae^{-t}(2t+3) + be^t, \quad \text{avec} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

7 Cette équation différentielle linéaire, du second ordre peut s'écrire sous forme résolue, sur $\mathbb{R}^{-*}$ ou $\mathbb{R}^{+*}$. Sur $\mathbb{R}^{-*}$ ou $\mathbb{R}^{+*}$, $(x \mapsto x)$ est solution de l'équation homogène.

On pose $y(x) = c(x)x$.

On trouve $c(x) = e^{1/x} \left(\frac{1}{x} - 1 - a \right) + b$.

Enfin $y(x) = e^{1/x}(1 - ax) + bx$.

8 La méthode de variation des constantes conduit à la recherche de solutions sous la forme :

$$y(x) = a(x)e^x + b(x)e^{-x}.$$

On obtient :

$$a'(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1} \quad \text{et} \quad b'(x) = -\frac{1}{e^{-2x} + 1}.$$

Puis :

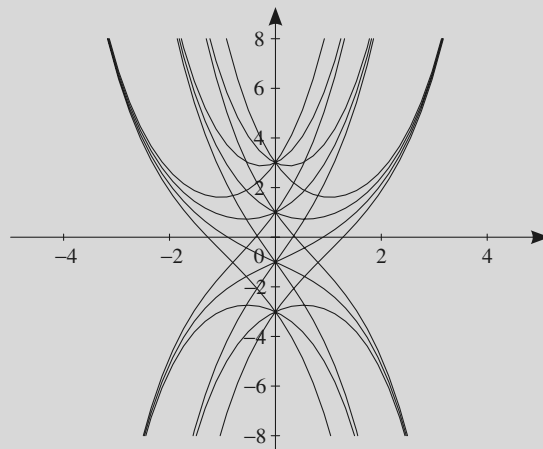
$$y(x) = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \ln(\operatorname{ch}(x)) + c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Avec Maple :

```
> restart :with(plots) :
eq :=diff(y(x),x$2)-y(x) = 1/cosh(x);
dsolve(eq, y(x));
L :=[] :
for k from -3 to 3 by 2 do
for j from -3 to 3 by 2 do
init := y(0) = +k, D(y)(0) = j :
rep := dsolve({eq, init}, y(x),
type=numeric) :
L :=L,odeplot(rep,[x,y(x)],-5..5,
view=[-5..5,-8..8]) od : od :
display(L);
```

$$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) \right) - y(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

$$\begin{aligned} y(x) = \left(-\frac{1}{2} \ln(\cosh(x)) + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} e^{(-2x)} \ln(\cosh(x)) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} e^{(-2x)} x \right) e^x + {}_C1 e^x + {}_C2 e^{(-x)} \end{aligned}$$



9 1) • Étude de la matrice du système
La matrice du système est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont $0, -3i, 3i$.

$(1, 2, 2)$ engendre $\text{Ker } A$.

$(4, -1 - 3i, -1 + 3i)$ engendre $\text{Ker}(A + 3iI_3)$

$(4, -1 + 3i, -1 - 3i)$ engendre $\text{Ker}(A - 3iI_3)$

• Détermination des solutions complexes du système

Le système donné s'écrit alors :

$$X'(t) = AX(t) = PDP^{-1}X(t),$$

avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 - 3i & -1 + 3i \\ 2 & -1 + 3i & -1 - 3i \end{pmatrix}$$

et :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3i & 0 \\ 0 & 0 & 3i \end{pmatrix}.$$

Posons $Y = P^{-1}X$, le système devient $Y'(t) = DY(t)$.

En notant y_1, y_2, y_3 les fonctions composantes de Y , on trouve :

$$y_1(t) = C_1, y_2(t) = C_2 e^{-3it}, y_3(t) = C_3 e^{3it},$$

où C_1, C_2, C_3 sont des complexes quelconques.

On en déduit $X = PY$.

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + 4C_2 e^{-3it} + 4C_3 e^{3it} \\ y(t) = 2C_1 + (-1 - 3i)C_2 e^{-3it} + (-1 + 3i)C_3 e^{3it} \\ z(t) = 2C_1 + (-1 + 3i)C_2 e^{-3it} + (-1 - 3i)C_3 e^{3it} \end{cases}.$$

• Détermination des solutions réelles du système

Soit (α, β, γ) trois réels. En posant $C_1 = \alpha, C_2 = \beta + i\gamma$ et $C_3 = \beta - i\gamma$, on obtient une solution réelle du système :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + 8\beta \cos(3t) + 8\gamma \sin(3t) \\ y(t) = 2\alpha + 2(-\beta + 3\gamma) \cos(3t) + 2(-3\beta - \gamma) \sin(3t) \\ z(t) = 2\alpha + 2(-\beta - 3\gamma) \cos(3t) + 2(3\beta - \gamma) \sin(3t) \end{cases}.$$

Prouver que toute solution réelle du système est de la forme ci-dessus.

Avec Maple :

```
> restart :with(plots) :
sys :=diff(x(t),t)=2*y(t)-2*z(t),diff(y(t),t)
=-2*x(t)+z(t),diff(z(t),t)
=2*x(t)-y(t) :
fcns := {x(t), y(t), z(t)} :
init :=x(0)=i,y(0)=j,z(0)=k :
s :=dsolve({sys,init}, fcns) ;
assign(s) ;
```

$$s := \{$$

$$z(t) = \frac{5}{9}k \cos(3t) + \frac{4}{9}k + \frac{2}{3}i \sin(3t) + \frac{2}{9}i$$

$$- \frac{2}{9}i \cos(3t) - \frac{1}{3}j \sin(3t) + \frac{4}{9}j - \frac{4}{9}j \cos(3t),$$

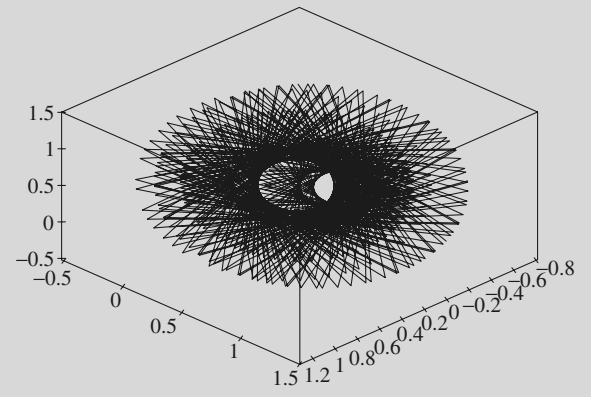
$$x(t) = -\frac{2}{3}k \sin(3t) + \frac{2}{9}k - \frac{2}{9}k \cos(3t) + \frac{8}{9}i \cos(3t)$$

$$+ \frac{1}{9}i + \frac{2}{3}j \sin(3t) + \frac{2}{9}j - \frac{2}{9}j \cos(3t),$$

$$y(t) = \frac{1}{3}k \sin(3t) + \frac{4}{9}k - \frac{4}{9}k \cos(3t) - \frac{2}{3}i \sin(3t)$$

$$+ \frac{2}{9}i - \frac{2}{9}i \cos(3t) + \frac{5}{9}j \cos(3t) + \frac{4}{9}j \}$$

```
> L :=[] :
x :=unapply(x(t),t) : y :=unapply(y(t),t) :
z :=unapply(z(t),t) :
for i from 0 to 1 do
for j from 0 to 1 do
for k from 0 to 1 do
L :=L, spacecurve([x(t), y(t), z(t)],
t=-20..20, axes=BOXED) : od : od :
od ;
display(L) ;
```



2) Les trois lignes de la matrice A du système sont liées par la relation :

$$L_1 + 2L_2 + 2L_3 = 0.$$

Une solution (x, y, z) du système vérifie donc :

$$x' + 2y' + 2z' = 0.$$

La courbe associée, est dans un plan affine d'équation :

$$x + 2y + 2z = \delta$$

où δ est une constante.

10 La dernière équation se résout en $z(t) = Ce^t$.
La deuxième devient

$$y' = y + Ce^t \quad (2)$$

On résout et on trouve $y(t) = (Ct + B)e^t$.

La première équation devient :

$$x' = x + (Ct + B + C)e^t \quad (1)$$

Finalement
$$\begin{cases} x(t) = \left(C \frac{t^2}{2} + (B+C)t + A \right) e^t \\ y(t) = (Ct + B)e^t \\ z(t) = Ce^t \end{cases}$$

avec $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$.

11

On reconnaît un système différentiel linéaire avec second membre que l'on note (E) .

Le système homogène associé est noté (H) .

(E) peut s'écrire $X' = AX + B(t)$, avec :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix}.$$

-1 et 1 sont valeurs propres de A et les fonctions :

$$\varphi_1 : t \mapsto e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment un système fondamental de solutions de (H) .

On cherche deux fonctions a et b , de classe $\mathcal{C}^1$, telles que $X = a\varphi_1 + b\varphi_2$ soit solution de (E) .

Pour cela, il suffit que :

$$a'(t)\varphi_1(t) + b'(t)\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit $a'(t) = \frac{1}{2}(t+t^2)e^t$ et $b'(t) = \frac{1}{2}(t-t^2)e^{-t}$.

Puis $x(t) = t^2 + 1 + ce^{-t} + de^t$ et $y(t) = t - ce^{-t} + de^t$ avec $(c, d) \in \mathbb{R}^2$.

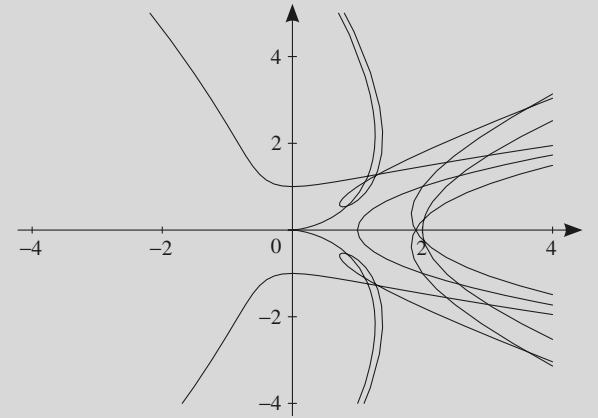
Avec Maple :

```
> restart :
sys := diff(x(t),t)=y(t)+t,diff(y(t),t)
=x(t)-t^2 : fcns := {x(t),y(t)} :
s := dsolve({sys}, fcns);
assign(s);
x := unapply(x(t),t); y := unapply(y(t),t);
L := [] : with(plots) :
for _C1 from -1 to 1 do
for _C2 from -1 to 1 do
L := L, plot([x(t),y(t),t=-4..4],
view=[-4..4,-4..5]) : od : od :
display(L);
```

$$\begin{aligned} s &:= \{x(t) = \frac{1}{2} - C1e^{(-t)} + \frac{1}{2} - C1e^t + \frac{1}{2} - C2e^t \\ &\quad - \frac{1}{2} - C2e^{(-t)} + 1 + t^2, \\ y(t) &= \frac{1}{2} - C1e^t - \frac{1}{2} - C1e^{(-t)} + \frac{1}{2} - C2e^{(-t)} \\ &\quad + \frac{1}{2} - C2e^t + t\} \end{aligned}$$

$$x := t \rightarrow \frac{1}{2} - C1e^{(-t)} + \frac{1}{2} - C1e^t + \frac{1}{2} - C2e^t - \frac{1}{2} - C2e^{(-t)} + 1 + t^2$$

$$y := t \rightarrow \frac{1}{2} - C1e^t - \frac{1}{2} - C1e^{(-t)} + \frac{1}{2} - C2e^{(-t)} + \frac{1}{2} - C2e^t + t$$



12

On peut écrire ce système $X' = AX + B$, avec :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- On en cherche une solution particulière avec x et y constante. On a alors $x' = y' = 0$. On trouve que $x = 0$ et $y = 1$ convient.
- On étudie le système homogène

$$X' = AX \quad (H)$$

Les valeurs propres de A sont i et $-i$ et les fonctions

$$Z : t \mapsto e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{Z} : t \mapsto e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$$

forment un système fondamental de l'ensemble des solutions à valeurs complexes du système (H) .

Les solutions réelles de (H) peuvent s'écrire :

$$X(t) = CZ(t) + \bar{C}\bar{Z}(t)$$

où C est une constante complexe.

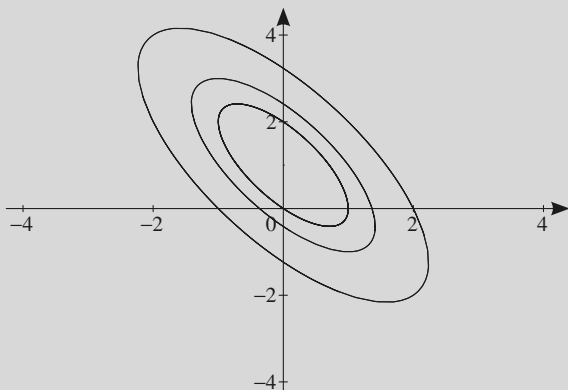
- Pour conclure, les solutions réelles du système avec second membre s'obtiennent en ajoutant la solution particulière. On obtient :

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t + b \sin t \\ y(t) = a(\sin t - \cos t) - b(\cos t + \sin t) + 1 \end{cases}$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Avec Maple :

```
> restart :sys :=
diff(x(t),t)=-x(t)-y(t)+1,diff(y(t),t)
=2*x(t)+y(t)-1 :
fcns :={x(t),y(t)} :
s :=dsolve({sys}, fcns) ;
assign(s) ;
x :=unapply(x(t),t) ;y :=unapply(y(t),t) ;
L :=[] :with(plots) :
for _C1 from -1 to 1 do
for _C2 from -1 to 1 do
L :=L,plot([x(t),y(t),t=-4..4],
view=[-4..4,-4..5]) :od : od :
display(L) ;
s := {x(t) = _C1cos(t) - sin(t)_C1 - sin(t)_C2,
y(t) = 2sin(t)_C1 + _C2cos(t) + sin(t)_C2 + 1}
x := t -> _C1cos(t) - sin(t)_C1 - sin(t)_C2
y := t -> 2sin(t)_C1 + _C2cos(t) + sin(t)_C2 + 1
```



13

L'équation (1) équivaut au système différentiel défini par :

$$Z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \text{ et } Z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -25 & 10 \end{pmatrix} Z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix} \quad (2)$$

Les fonctions $x_1 : t \mapsto e^{5t}$ et $x_2 : t \mapsto te^{5t}$ sont un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée à (1).

On pose Z_1 :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 5e^{5t} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} te^{5t} \\ (5t+1)e^{5t} \end{pmatrix}.$$

On cherche une solution de (2) sous la forme :

$$Z = aZ_1 + bZ_2.$$

Il suffit que $a'(t)$ et $b'(t)$ soient solutions de :

$$\begin{cases} a'(t)e^{5t} + b'(t)te^{5t} = 0 \\ a'(t)5e^{5t} + b'(t)(5t+1)e^{5t} = -t \end{cases}$$

On en déduit $a'(t)$ et $b'(t)$, puis, par intégration, a et b et enfin :

$$x(t) = -\frac{t}{25} - \frac{2}{125} + ce^{5t} + dte^{5t},$$

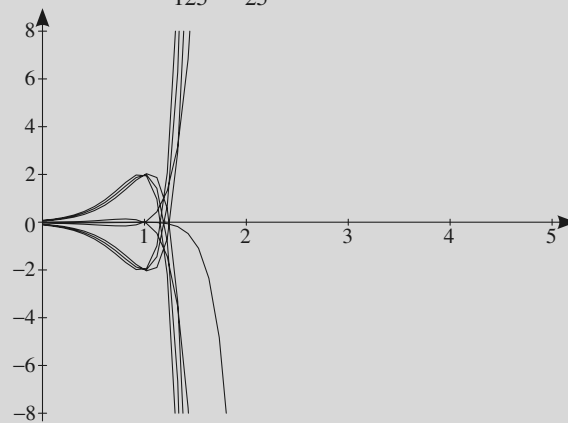
avec c et d réels quelconques.

Avec Maple :

```
> restart :
eq :=diff(y(x),x$2)-10*diff(y(x),x)
+25*y(x) = -x ;
dsolve(eq, y(x)) ;
L :=[] :with(plots) :
for k from -2 to 2 by 2 do
for j from -2 to 2 by 2 do
init := y(1) = +k, D(y)(1) = j :
rep := dsolve({eq, init},
y(x),type=numeric) :
L :=L,odeplot(rep,[x,y(x)],0..5,
view=[0..5,-8..8]) :od : od :
display(L) ;
```

$$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) \right) - 10 \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) + 25y(x) = -x$$

$$y(x) = -\frac{2}{125} - \frac{1}{25}x + C_1 e^{(5x)} + C_2 2e^{(5x)}$$



14

Le système équivaut à $X'(t) = AX(t)$ où :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A n'est pas diagonalisable.

$$\text{Pour } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{on a } P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Z = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

X est solution de (1) si, et seulement si, Z est solution de $Z' = TZ$.

Soit
$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + y_1 + z_1 \\ y_1' = -2y_1 - 3z_1 \\ z_1' = -2z_1 \end{cases} \quad (2)$$

D'où
$$\begin{cases} z_1(t) = \alpha e^{-2t} \\ y_1(t) = \beta e^{-2t} - 3\alpha t e^{-2t} \\ x_1(t) = \gamma e^{-2t} + (\alpha + \beta)t e^{-2t} - \frac{3}{2}\alpha t^2 e^{-2t} \end{cases}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. L'égalité $X = PZ$ donne les solutions de (1).

15

Sous forme résolue, l'équation s'écrit :

$$y' = -y \cotan x + \sin^2 x.$$

On la résout donc sur les intervalles :

$$I_n =]n\pi, (n+1)\pi[, n \in \mathbb{Z}.$$

On obtient :

$$y(x) = -\frac{1}{3} \sin x \cos x - \frac{2}{3} \cotan x + \frac{b}{\sin x} \cdot (b \in \mathbb{R}).$$

Recherche de solutions maximales

On fixe n dans $\mathbb{Z}$.

Avec les notations précédentes, si $b \neq \frac{2}{3}(-1)^n$:

$$y(x) \sim_{n\pi+} \frac{\left(b - \frac{2}{3}(-1)^n\right)}{\sin x}.$$

y a une limite finie en $n\pi^+$ si, et seulement si :

$$b = \frac{2}{3}(-1)^n.$$

L'étude en $n\pi^-$ prouve qu'en posant :

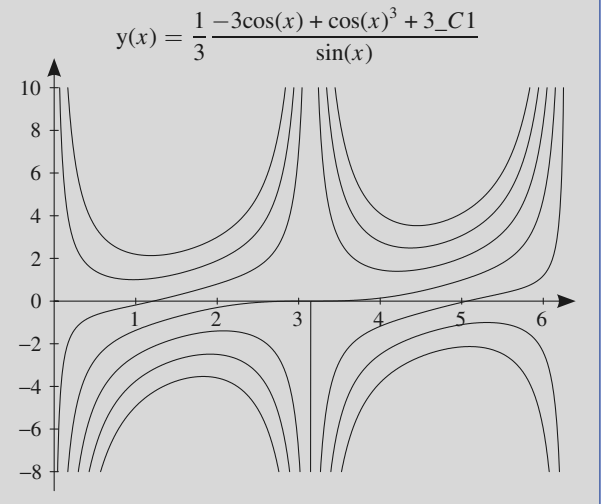
$$y(x) = -\frac{1}{3} \sin x \cos x - \frac{2}{3} \cotan x + \frac{2(-1)^n}{3 \sin x}$$

pour $x \in](n-1)\pi, (n+1)\pi[\setminus \{n\pi\}$ et $y(n\pi) = 0$, on a une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] (n-1)\pi, (n+1)\pi[$, solution de l'équation de départ sur cette intervalle.

Il n'y a pas d'autre recollement possible.

Avec Maple :

```
> with(plots) :
L :=[] :dsolve({sin(x)*D(y)(x)+cos(x)*
y(x)=(sin(x))^3, y(x)});
for k from -3 to 3 by 1 do
p := dsolve({sin(x)*D(y)(x)+cos(x)*
y(x)=(sin(x))^3, y(Pi/2)=-2/3+k},
y(x),type=numeric) :
L :=L,odeplot(p,[x,y(x)],0..Pi,
view=[0..Pi,-8..10],numpoints=500) : od :
for k from -3 to 3 by 1 do
p := dsolve({sin(x)*D(y)(x)+cos(x)*
y(x)=(sin(x))^3, y(3*Pi/2)=2/3+k},
y(x),type=numeric) :
L :=L,odeplot(p,[x,y(x)],Pi..2*Pi,
view=[Pi..2*Pi,-8..10],
numpoints=500) :od :display(L);
```



16

Soit $g = f + \alpha f'$. On a : $(f e^{\alpha t})' = g e^{\alpha t}$, donc :

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) = f(0)e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x} \int_0^x g(t)e^{\alpha t} dt.$$

On fixe $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que : $\forall t \geq A \quad |g(t)| \leq \varepsilon$. De plus, la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit :

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(0)|e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} + e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} \int_0^A \|g\|_{\infty} e^{\operatorname{Re}(\alpha)t} dt \\ &\quad + e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} \int_A^x \varepsilon e^{\operatorname{Re}(\alpha)t} dt \\ &\leq |f(0)|e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} + e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} \|g\|_{\infty} e^{\operatorname{Re}(\alpha)A} A + \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re}(\alpha)}. \end{aligned}$$

Cette inégalité permet de prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$.

17

Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme :

$$z(x) = a e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + b e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right), \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche les solutions de l'équation avec second membre de la forme :

$$y(x) = a(x)e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + b(x)e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

La méthode de variation des constantes donne $a'(x)$ et $b'(x)$. On obtient :

$$y(x) = 2\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-x/2} \left[-\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \int_0^x e^{u/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}u}{2}\right) \right.$$

$$\left. f(u) du + \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \int_0^x e^{u/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}u}{2}\right) f(u) du \right] + z(x).$$

On en déduit une majoration de $|y(x)|$ valable sur $\mathbb{R}^+$.

18 La matrice de ce système est une matrice de similitude (cf. exercice résolu).

Pour résoudre (S), on pose $z = x + iy$. On constate que (x, y) est solution de (S) si, et seulement si :

$$tz' = z(1 + it) \quad (E)$$

Sur un intervalle I ne contenant pas 0, (E) s'écrit sous forme résolue :

$$z' = \left(\frac{1}{t} + i\right) z \quad (H)$$

Une solution z de (H) sur I est de la forme :

$$z(t) = Ct e^{it} \quad \text{avec } C \in \mathbb{C}.$$

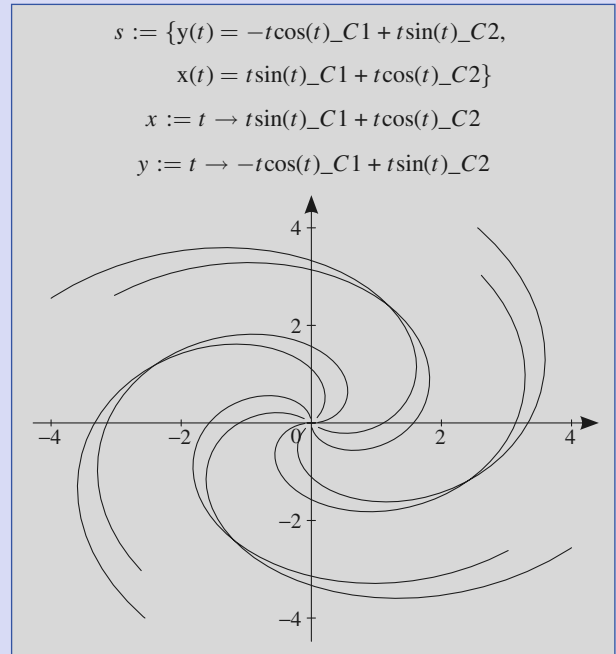
Les solutions réelles du système (S) sont de la forme :

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{Re}(z(t)) = t[\alpha \cos(t) - \beta \sin(t)] \\ y(t) = \operatorname{Im}(z(t)) = t[\alpha \sin(t) + \beta \cos(t)] \end{cases}$$

avec (α, β) dans $\mathbb{R}^2$.

Avec Maple :

```
> restart :with(plots) :
sys := t*diff(x(t),t)=x(t)-t*y(t),
t*diff(y(t),t)=t*x(t)+y(t) :
fcns := {x(t),y(t)} :
s := dsolve({sys}, fcns) :
assign(s) :
x := unapply(x(t),t) :
y := unapply(y(t),t) :
L := [] :
for _C1 from -1 to 1 do
for _C2 from -1 to 1 do
L := L, plot([x(t),y(t),t=0..1..4],
view=[-4..4,-4..4]) : od : od :
display(L) :
```



19 On effectue un changement de fonctions inconnues en posant :

$$u = x + y \quad \text{et} \quad v = x - y.$$

On obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} u'' = 2u' - u \\ v'' = v \end{cases}.$$

L'équation $v'' = v$ admet pour solutions les fonctions de la forme :

$$t \mapsto v(t) = a e^t + b e^{-t},$$

avec a et b réels quelconques.

L'équation $u'' = 2u' - u$ admet pour solutions les fonctions :

$$t \mapsto u(t) = c e^t + d t e^t,$$

avec c et d réels quelconques.

Finalement, les fonctions (x, y) , solutions de (S), sont telles que :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}[(a + c + d t)e^t + b e^{-t}] \\ y(t) &= \frac{1}{2}[(-a + c + d t)e^t - b e^{-t}] \end{aligned}$$

avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Chapitre 8

1 • On appelle G une primitive de g sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$f_1(x, y) = G(x + y) - G(\pi); \quad f_2(x, y) = G(x) - G(y).$$

Donc :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = g(x + y); \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = g(x).$$

et :

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = g(x + y); \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = -g(y).$$

• On note H une primitive de $t \mapsto tg(t)$. Alors :

$$f_3(x, y) = y(G(x) - G(2)) - (H(x) - H(2)).$$

Donc :

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) = yg(x) - xg(x)$$

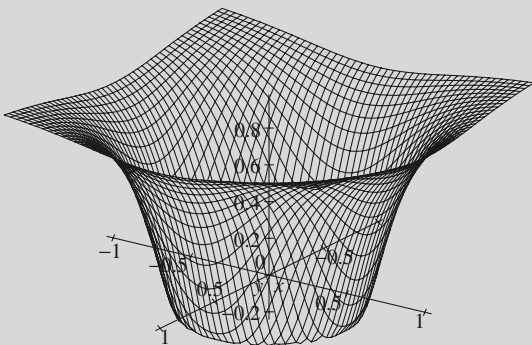
et :

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) = (G(x) - G(2)) = \int_2^x g(t) dt.$$

2 La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ car le sinus est borné.

Avec Maple :

```
> plot3d((x^2+y^2)*sin(1/(x^2+y^2)), x=-1..1,
y=-1..1, orientation=[35,59],
grid=[50,50], axes=normal);
```



Elle est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en tant que produit de telles fonctions.

Étude en $(0, 0)$.

$$\forall x \neq 0 \quad \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = x \sin \frac{1}{x^2}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0.$$

Donc, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right).$$

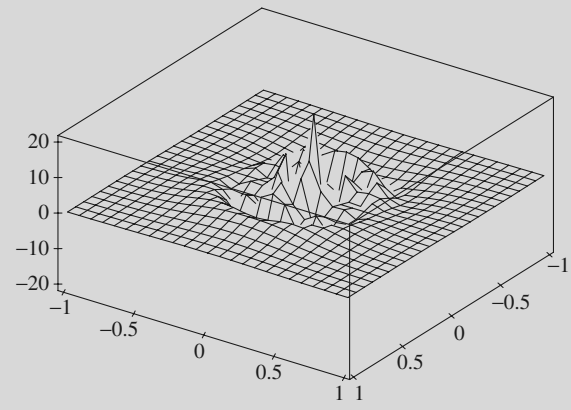
Cette fonction n'a pas de limite en $(0, 0)$ et f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Avec Maple :

```
> f := (x, y) -> if x=0 and y=0 then 0
else (x^2+y^2)*sin(1/(x^2+y^2))
fi;
>
> fx := D[1](f);
> plot3d(fx, -1..1, -1..1, axes=boxed,
orientation=[35,45]);

f := proc(x, y)
option operator, arrow;
if x = 0 and y = 0 then 0
else (x^2 + y^2) * sin(1/(x^2 + y^2)) fi
end

fx := proc(x, y)
option operator, arrow;
if x = 0 and y = 0 then 0
else 2 * x * sin(1/(x^2 + y^2))
- 2 * cos(1/(x^2 + y^2)) * x/(x^2 + y^2)
fi
end
```



3 Ces trois applications sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car leurs applications dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} df_1(x, y)(h_1, h_2) &= h_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + h_2 \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ &= (h_1 + h_2)g(x + y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df_2(x, y)(h_1, h_2) &= h_1 \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) + h_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \\ &= h_1 g(x) - h_2 g(y). \end{aligned}$$

$$df_3(x, y)(h_1, h_2) = h_1(y - x)g(x) + h_2 \int_2^x g(t) dt.$$

4 L'application f est linéaire. Elle est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et coïncide avec sa différentielle en tout point.

5 Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car ce sont des fonctions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

1) Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$.

Si f était différentiable en $(0, 0)$, on aurait :

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - (h+k)}{\|(h,k)\|} = 0.$$

En prenant $\|(h,k)\| = |h| + |k|$ et $h = k$, on voit que c'est faux. Donc f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

2) Montrer que $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$.

L'application g est différentiable en $(0, 0)$ si, et seulement si :

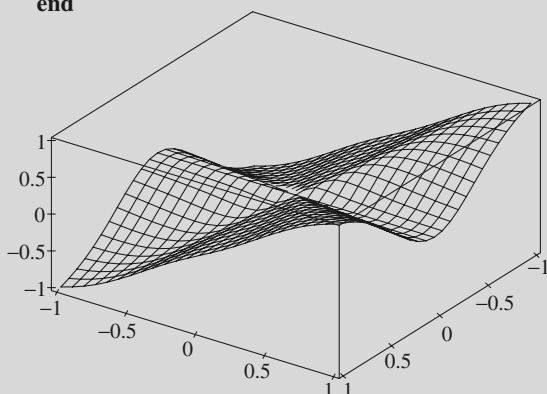
$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{g(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0.$$

Avec $\|(h,k)\| = \sqrt{h^2 + k^2}$, on trouve $\frac{|g(h,k)|}{\|(h,k)\|} \leq \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + k^2}$

Donc la fonction g est différentiable en $(0, 0)$.

Avec Maple :

```
> f := (x,y) -> if x=0 and y=0 then 0
else (x^3*y)/(x^2+y^2)
fi;
>
> fx := D[1](f);
> plot3d(fx, -1..1, -1..1, axes=boxed,
orientation=
[29,33]);
f :=
proc(x,y) option operator, arrow;
if x = 0 and y = 0 then 0
else x^3 * y/(x^2 + y^2)
fi
end
fx := proc(x,y)
option operator, arrow;
if x = 0 and y = 0 then 0
else 3 * x^2 * y/(x^2 + y^2) - 2 * x^4 * y/(x^2 + y^2)^2
fi
end
```



6 Ces trois applications sont de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Les matrices jacobiniennes sont dans $\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$

$$Jf_1(x, y) = \begin{pmatrix} g(x+y) & g(x+y) \end{pmatrix};$$

$$Jf_2(x, y) = \begin{pmatrix} g(x) & -g(y) \end{pmatrix}$$

$$Jf_3(x, y) = \begin{pmatrix} (y-x)g(x) & \int_2^x g(t) dt \end{pmatrix}.$$

7 On note a_1, a_2, a_3 les coordonnées de a dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$Jf(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Det } Jf(\vec{u}) = 0$$

8 Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$d(f^n)(\vec{u}) = n f^{n-1}(\vec{u}) d f(\vec{u});$$

$$\text{grad}(f^n)(\vec{u}) = n f^{n-1}(\vec{u}) \text{grad}(f)(\vec{u})$$

9 La fonction polynôme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

• Le domaine Δ_O est un ouvert. En un point de Δ_O où f admet un extrémum, le gradient de f est nul. Après calcul, on trouve un seul point de Δ_O où le gradient est nul : $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$$D = f\left(-\frac{1}{2} + h, \frac{1}{2} + k\right) - f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 3h^2 + 3k^2 + (k-h)^3.$$

En posant $(h, k) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, on trouve :

$$D = r^2 \left[3 + r(\cos \theta - \sin \theta)^3 \right]$$

Cette quantité est positive pour r suffisamment petit.

Donc f a un minimum local en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

• Δ_F est un compact. La fonction f est continue sur ce compact. Elle a au moins un minimum et un maximum sur Δ_F .

f a un minimum local en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ qui est intérieur à Δ_F .

On étudie f sur le triangle qui délimite ce domaine en posant :

$$C_1 = \{(x, 1) ; -1 \leq x \leq 1\};$$

$$C_2 = \{(x, x) ; -1 \leq x \leq 1\};$$

$$C_3 = \{(-1, y) ; -1 \leq y \leq 1\}$$

Le tableau suivant donne l'étude de f sur C_1 . Dresser ceux correspondant à C_2 et C_3 .

x	-1	$1 - \sqrt{2}$	1
$6x + (1-x)^3$	2		6
		$2(3 - 2\sqrt{2})$	

On en déduit que la fonction f atteint son maximum sur Δ_F aux points $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. Ce maximum vaut 6.

Les valeurs minimales de f sur C_1 , C_2 et C_3 sont toujours positives.

Donc le minimum de f sur Δ_F vaut $-\frac{1}{2}$. Il est atteint en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

10 Tout d'abord, g est une fonction polynôme des deux variables (x, y) , elle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$ et $[0, 1]^2$ est un compact de $\mathbb{R}^2$, donc g est bornée et atteint ses bornes sur ce compact. De plus :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 1 + 3x^2 > 0.$$

À y fixé, l'application $x \mapsto g(x, y)$, est strictement croissante. Donc :

$$\forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad g(0, y) \leq g(x, y) \leq g(1, y).$$

• Le maximum de g sur $[0, 1]^2$ est atteint en un point $(1, y)$.

Or, $g(1, y) = 2 - y + y^3$. Le maximum de cette fonction de y sur $[0, 1]$ est atteint pour $y = 0$ ou $y = 1$. Il vaut 2.

• Quant au minimum, il est atteint en un point $(0, y)$.

Or, $g(0, y) = -y + y^3$. Le minimum de cette fonction de y sur $[0, 1]$ est atteint pour $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Il vaut $g(0, \frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

11 La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Les dérivées partielles en $(0, 0)$ se calculent avec la définition :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = 0; \dots \end{aligned}$$

Les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en $(0, 0)$ sont toutes nulles.

En utilisant les coordonnées polaires, on trouve que les limites en $(0, 0)$ de toutes les dérivées partielles de f d'ordre 1 et 2 sont nulles. Ceci prouve que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

12 1) La fonction U est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction f vérifie : $f(x, t) = e^{-t}U(x, t)$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) - 2 \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \\ = e^{-t} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, t) + e^{-t} U(x, t) - e^{-t} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, t) = 0. \end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, t) + U(x, t) - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (E_2)$$

2) On pose $(a, b) = \varphi(x, t)$. Alors : $U = V \circ \varphi$.

De plus φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et bijective. Le calcul de φ^{-1} est aisé. Cette fonction, ainsi que $V = U \circ \varphi^{-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Le calcul des dérivées partielles donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(x, t) &= \frac{\partial V}{\partial a}(a, b) \frac{\partial a}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial V}{\partial b}(a, b) \frac{\partial b}{\partial x}(x, t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial a}(a, b) + \frac{\partial V}{\partial b}(a, b); \dots \end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'équation aux dérivées partielles :

$$2 \frac{\partial^2 V}{\partial b^2}(a, b) + V(a, b) = 0 \quad (E_3)$$

13 1) Les fonctions composantes de φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$2) J\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} f'(x) & 1 \\ 1 & f'(y) \end{pmatrix}$$

3) Le jacobien est :

$$\text{Det}(J\varphi(x, y)) = f'(x)f'(y) - 1.$$

L'hypothèse nous indique que ce déterminant ne s'annule pas.

Il reste à prouver que φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$.

On fixe (u, v) dans $\mathbb{R}^2$ et on cherche (x, y) tel que :

$$u = y + f(x) \quad \text{et} \quad v = x + f(y)$$

Nécessairement :

$$v = x + f(u - f(x)).$$

Étudier la fonction

$$g : x \mapsto g(x) = x + f(u - f(x))$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et de plus :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

Il existe un réel x tel que : $g(x) = v$.

On pose alors $y = u - f(x)$.

Ceci résout la question.

14 On a $g = f \circ \varphi$, avec :

$$\varphi(\rho, \theta) = (x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

L'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{**} \times \mathbb{R}$. Il en est de même de g .

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \sin \theta;$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \rho \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \rho \cos \theta.$$

1) On en déduit :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \rho^2 \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta).$$

Donc f est solution de (1), si et seulement si, g ne dépend que de θ

2) De même :

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\rho \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta).$$

Donc f est solution de (2) si, et seulement si, g ne dépend que de ρ .

3) L'application :

$$\varphi : \mathbb{R}^{**} \times]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^-\}$$

est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. La donnée de f de classe $\mathcal{C}^1$ sur V équivaut à celle de g de classe $\mathcal{C}^1$ sur U avec : $g = f \circ \varphi$. La fonction f est solution de (E) si, et seulement si, g vérifie :

$$\rho \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) - g(\rho, \theta) = -\rho^2.$$

À θ fixé, il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre pour la fonction $\rho \mapsto g(\rho, \theta)$.

D'où :

$$g(\rho, \theta) = C(\theta)\rho - \rho^2, \quad \text{avec } C \in \mathcal{C}^1(]-\pi, \pi[)$$

et :

$$f(x, y) = C \left(2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2)$$

15

1) La fonction φ définie ci-dessous est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

$$\varphi(x, y) = (X, Y) = (ax + by, cx + dy).$$

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ et $g = f \circ \varphi^{-1}$.

On a $f(x, y) = g(ax + by, cx + dy)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial X}(X, Y)a + \frac{\partial g}{\partial Y}(X, Y)c;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial X}(X, Y)b + \frac{\partial g}{\partial Y}(X, Y)d.$$

Curieusement f est solution de (E) si, et seulement si, g vérifie :

$$(aX + bY) \frac{\partial g}{\partial X}(X, Y) + (cX + dY) \frac{\partial g}{\partial Y}(X, Y) = 0.$$

2) La condition est : $4(a + d)(ad - bc) = 0$.

C'est-à-dire : $a = -d$.

3) Pour $a = b = c = -d = 1$, $f(x, y) = -x^2 + 2xy + y^2$ convient.

16

1) Immédiat.

2) • On suppose : $f(z) - f(z_0) = l(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$.

Puisque $F(x, y) = f(x + iy)$, on a :

$$F(x, y) - F(x_0, y_0)$$

$$= (x - x_0)l(z_0) + i(y - y_0)l(z_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}).$$

La fonction F est donc telle que :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = l(z_0); \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = il(z_0).$$

Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et f est holomorphe.

• Réciproquement, si f est holomorphe sur U , on a :

$$f(z) - f(z_0) = F(x, y) - F(x_0, y_0)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(z - z_0) + o(z - z_0).$$

Le quotient $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ admet une limite :

$$l(z_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0),$$

lorsque z tend vers z_0 . D'où la conclusion.

17

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}^{**})^2$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{a}{x^2} + \frac{y}{a^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{a}{y^2} + \frac{x}{a^2}$$

Donc :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (a, a).$$

$$f(a + h, a + k) - f(a, a) = \frac{h^2}{a(a + h)} + \frac{k^2}{a(a + k)} + \frac{hk}{a^2}$$

Choisissons h et k dans $]-\frac{a}{4}, \frac{a}{4}[$.

$$\frac{h^2}{a(a + h)} + \frac{k^2}{a(a + k)} \geq \frac{4h^2}{5a^2} + \frac{4k^2}{5a^2}; \quad \frac{hk}{a^2} \geq -\frac{1}{2} \frac{(h^2 + k^2)}{a^2};$$

$$f(a + h, a + k) - f(a, a) \geq \frac{4h^2}{5a^2} + \frac{4k^2}{5a^2} - \frac{1}{2} \frac{(h^2 + k^2)}{a^2} > 0.$$

Donc f admet un minimum local au point (a, a) .

Prouver que f atteint son minimum sur $(\mathbb{R}^{**})^2$. En déduire que ce minimum est atteint uniquement au point (a, a) .

18 L'application f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\sin x}{\operatorname{ch} y} g' \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y} \right);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\cos x \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch}^2 y} g' \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y} \right).$$

On calcule les dérivées partielles d'ordre 2 et :

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \\ &= -\frac{2 \cos x}{\operatorname{ch}^3 y} g' \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y} \right) + \frac{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}{\operatorname{ch}^4 y} g'' \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y} \right). \end{aligned}$$

On pose $u = \frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}$.

Lorsque (x, y) décrit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, u décrit $] -1, 1[$.

On a $\Delta f = 0$ si, et seulement si, g vérifie :

$$-2u g'(u) + (1 - u^2) g''(u) = 0.$$

Finalement :

$$g(u) = a \ln \left(\left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right) + b, \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Chapitre 9

1 On a : $x'(t) = (2 + t^2) \sin(t)$ et $y'(t) = (6t + t^3) \sin(t)$.

Les points stationnaires sont obtenus pour $t = k\pi$, avec k dans $\mathbb{Z}$.

En posant $t = k\pi + u$, on prouvera que :

$$\begin{aligned} x(k\pi + u) &= (-1)^k \left[-k^2 \pi^2 + \left(1 + \frac{k^2 \pi^2}{2} \right) u^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2k\pi}{3} u^3 + o(u^3) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(k\pi + u) &= (-1)^k \left[-k^3 \pi^3 + \left(3k\pi + \frac{k^3 \pi^3}{2} \right) u^2 \right. \\ &\quad \left. + (2 + k^2 \pi^2) u^3 + o(u^3) \right]. \end{aligned}$$

On a uniquement des rebroussements de première espèce.

2 Le domaine de définition de ρ est $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$ et ρ est 2π -périodique.

On effectue l'étude sur $\left[-\pi, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$.

Étude du signe de ρ

θ	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
ρ	0	-	0	+	0	-	0

Étude des branches infinies

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \rho(\theta) = -\infty; \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \rho(\theta) = +\infty.$$

On a une direction asymptotique verticale.

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \rho(\theta) \cos \theta = 2 \sin \theta (1 + \sin \theta) (1 + 2 \cos \theta) \\ &= 4 - 8 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + o \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Lorsque θ tend vers $\frac{\pi}{2}$:

- la droite d'équation $x = 4$ est asymptote à la courbe ;
- la courbe est à gauche de l'asymptote lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs supérieures ;
- la courbe est à droite de l'asymptote lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures.

Déterminons les points multiples. Ils s'obtiennent en résolvant :

$$\theta_1 \in [0, \pi]; \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi; \quad \rho(\theta_1) = -\rho(\theta_2).$$

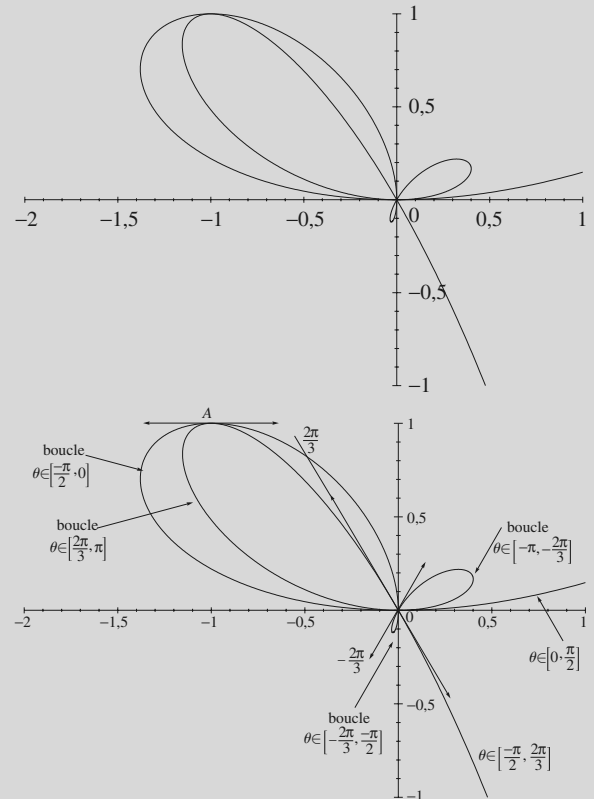
D'où :

$$\frac{\sin 2\theta_1 (1 + 2 \cos \theta_1)}{1 - \sin \theta_1} = -\frac{\sin 2\theta_1 (1 - 2 \cos \theta_1)}{1 + \sin \theta_1}$$

Si $\sin 2\theta_1 = 0$, $\theta_1 \in \{0, \pi, 3\frac{\pi}{2}\}$. C'est le point O .

Si $\sin 2\theta_1 \neq 0$, on obtient $\theta = -\frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$ et $A(-1, 1)$.

```
> with(plots) :
polarplot([sin(2*t)*(1+2*cos(t))
/(1-sin(t)),t,t=-Pi..Pi],
view=[-2..1,-1..1],numpoints=3000,
scaling=constrained);
```



3 En un point $M(x, e^x)$ du graphe, le rayon de courbure est :

$$R(x) = \frac{(1 + e^{2x})^{3/2}}{e^x}.$$

R atteint son minimum en $x = -\frac{1}{2} \ln 2$ et ce minimum est :

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

4 La fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x, y) = xe^y + y^2e^x$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus :

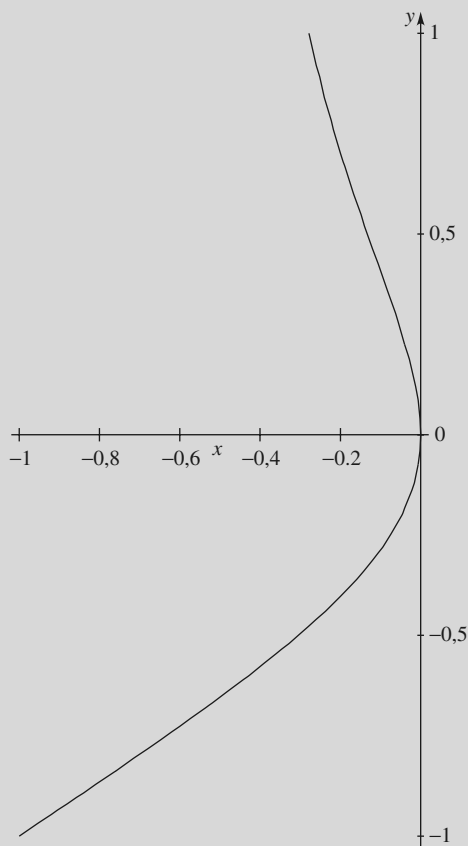
$$F(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{grad}} F(0, 0) = (1, 0).$$

La normale en $(0, 0)$ est dirigée par $(1, 0)$. Donc la tangente est verticale.

De plus $F(x, y) = 0 \Rightarrow x \leq 0$. La courbe est à gauche de la tangente.

Avec Maple :

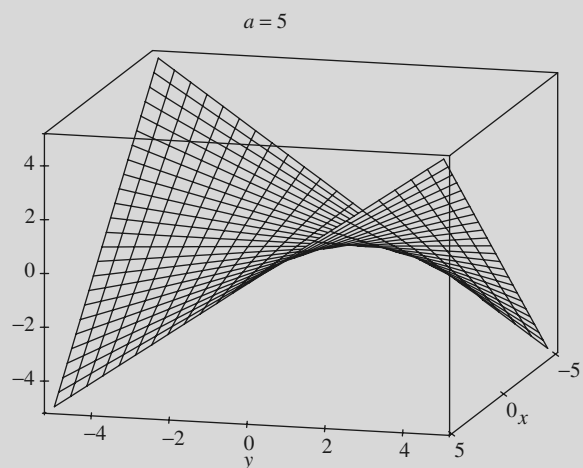
```
> restart :with(plots) :implicitplot
(x*exp(y)+y^2*exp(x), x=-1..1,
y=-1..1, scaling=constrained);
```



5 1)

Avec Maple :

```
> with(plots) :
plot3d(x*y/5, x=-5..5, y=-5..5,
title='a =5', orientation=[15,73],
axes=BOXED);
```



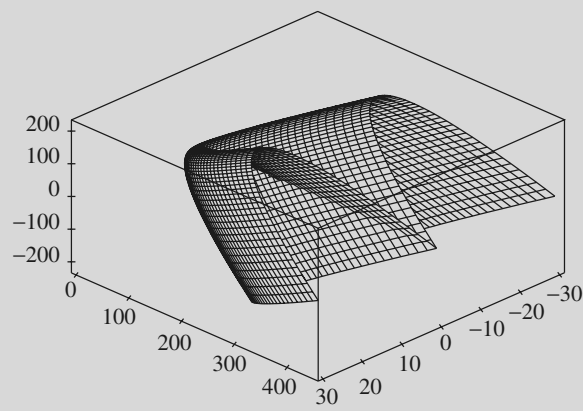
2) La surface (S) est définie par une équation cartésienne explicite. Tout point de (S) est régulier. Le plan T_0 tangent à S au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation :

$$xy_0 + yx_0 - az - x_0y_0 = 0.$$

6 1)

Avec Maple :

```
> with(plots) :
plot3d([u-v, u^2+v^2, u^2-v^2], u=-15..15,
v=-15..15, numpoints=4000, axes=BOXED);
```



2) Soit (u, v) et (u', v') deux couples distincts de réels tels que :

$$\varphi(u, v) = \varphi(u', v').$$

On trouve $u' = -u$ et $v' = -v$. L'ensemble des points multiples est la demi-droite $\{(0, y, 0); y > 0\}$.

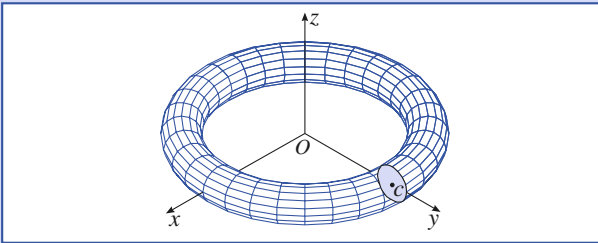
3) Les vecteurs :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = (1, 2u, 2u) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (-1, 2v, -2v)$$

forment une famille liée si, et seulement si, $u = v = 0$. Tous les points de S , hors O , sont réguliers. En un tel point, $\varphi(u, v)$, le plan tangent à S a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x - (u - v) & 1 & -1 \\ y - (u^2 + v^2) & 2u & 2v \\ z - (u^2 - v^2) & 2u & -2v \end{vmatrix} = 0.$$

7



On utilise les coordonnées cylindriques.

Dans le plan $O + \mathbb{R} \vec{u}(\theta) + \mathbb{R} \vec{k} = rOz$, la variable r joue le même rôle que y dans (yOz) .

Donc une équation du tore, en coordonnées cylindriques est :

$$\frac{(r - c)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Et son équation en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - 2c \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}.$$

8

Le domaine de définition et d'étude est $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Les dérivées sont

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{t^2(t-3)}{(t+1)^3(t-1)^2} \\ y'(t) = \frac{-2t}{(t+1)^2(t-1)^2} \end{cases}$$

Il y a un seul point stationnaire, pour $t = 0$.

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{2(t+1)}{t(t-3)}$. Ce point admet une tangente verticale.

C'est un point de rebroussement de première espèce.

t	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$
$x'(t)$	+		-		- 0 +	
$x(t)$	$-\infty$	$+\infty$		$+\infty$	$\frac{27}{32}$	1
$y'(t)$	+		+ 0 -		- -	
$y(t)$	1	$+\infty$	0	$+\infty$	$\frac{9}{8}$	1

Étude aux bornes du domaine

- $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = 1$. Ainsi $(1, 1)$ est un point asymptote.

Lorsque t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

La courbe tend vers le point $(1, 1)$ avec une tangente horizontale.

- $\lim_{t \rightarrow 1} |x(t)| = \lim_{t \rightarrow 1} |y(t)| = +\infty$. Puis :

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{y(t)}{x(t)} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 1} (y(t) - 2x(t)) = -\frac{1}{4}.$$

La droite d'équation $y = 2x - \frac{1}{4}$ est asymptote quand t tend vers 1.

- $\lim_{t \rightarrow -1} |x(t)| = \lim_{t \rightarrow -1} |y(t)| = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$.

La courbe a une branche parabolique de direction (Ox) .

On recherche une parabole asymptote d'axe parallèle à (Ox) .

Une telle parabole admet une équation de la forme :

$$x = ay^2 + by + c.$$

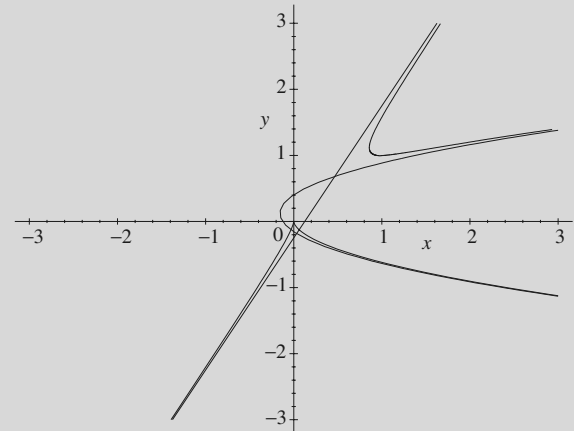
On trouve :

$$x(t) - 2y^2(t) + \frac{1}{2}y(t) + \frac{1}{8} = o(1).$$

La parabole d'équation $x = 2y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}$ est asymptote à la courbe.

Avec Maple :

```
> with (plots) :
G1 := plot([t^3/((t+1)^2*(t-1)), t^2/((t^2-1), t=-25..25], view=[-3..3, -3..3],
numpoints=3000) :
G2 := implicitplot(x-2*y^2+y/2+1/8=0,
x=-3..3, y=-3..3, numpoints=3000) :
display({G1, G2}) ;
```

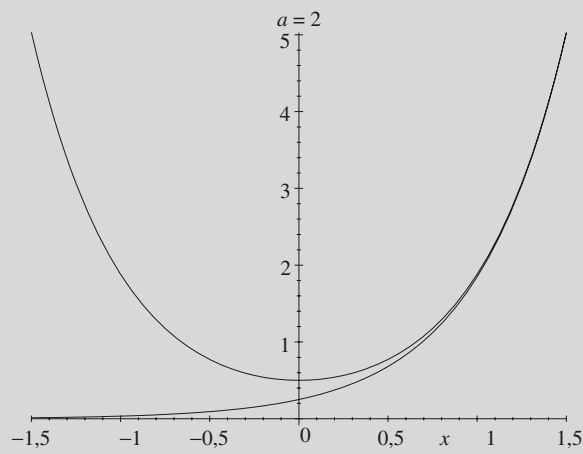


9

1) On peut supposer $a > 0$. La fonction est paire.

Avec Maple :

```
> restart :plot({exp(2*x)/4, cosh(2*x)/2},
x=-1.5..1.5, title='a=2');
```



2) $\frac{ds}{dx} = \text{ch}(ax)$, la longueur entre les points d'abscisse x_1 et

x_2 est :

$$L = \left| \int_{x_1}^{x_2} \text{ch}(ax) dx \right| = \left| \frac{\text{sh}(ax_2) - \text{sh}(ax_1)}{a} \right|.$$

3) Repère de Frénet et rayon de courbure en M sont donnés par :

$$\vec{T} = \left(\frac{1}{\text{ch}(ax)}, \text{th}(ax) \right); \quad \vec{N} = \left(-\text{th}(ax), \frac{1}{\text{ch}(ax)} \right);$$

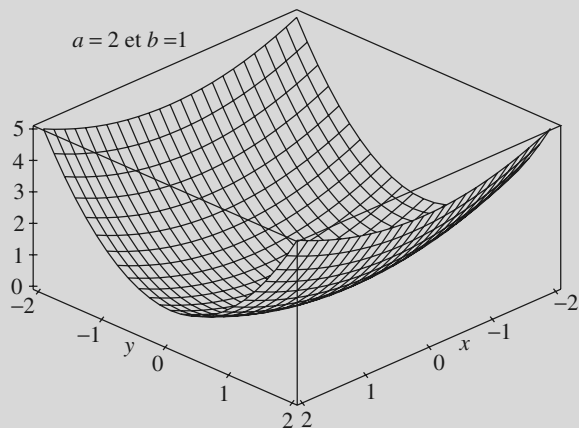
$$R(x) = \frac{\text{ch}^2(ax)}{a}.$$

10

1)

Avec Maple :

```
> with(plots) :
plot3d(x^2/4+y^2, x=-2..2, y=-2..2,
title='a=2 et b=1', axes=BOXED);
```



2) • L'intersection de S avec le plan (xOy) est $\{O\}$.

• L'intersection de S avec yOz est la parabole d'équation $z = \frac{y^2}{mb^2}$ de ce plan.

• L'intersection de S avec (xOz) est la parabole d'équation $z = \frac{x^2}{ma^2}$ de ce plan.

• L'intersection de S avec le plan d'équation $z = z_0$ est l'ellipse d'équation $mz_0 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ de ce plan. Lorsque $mz_0 < 0$, c'est $\emptyset$; lorsque $z_0 = 0$, elle est réduite à $\{O\}$.

3) • La projection de S sur le plan (yOz) est l'ensemble :

$$\left\{ (0, y, z); \exists x \in \mathbb{R} \quad mz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des points $(0, y, z)$ tels que $z \geq \frac{y^2}{mb^2}$.

C'est la partie convexe du plan (yOz) délimitée par la parabole d'équation $z = \frac{y^2}{mb^2}$.

• La projection de S sur le plan (xOy) est le plan (xOy) .

• La projection de S sur le plan (xOz) est la partie convexe du plan (xOz) délimitée par la parabole d'équation $z = \frac{mx^2}{a^2}$.

4) Le paraboloid elliptique est défini par une équation cartésienne explicite. Tout point est régulier. Le plan tangent en un point $M(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation :

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) - m(z - z_0) = 0.$$

11

1) Le calcul des coordonnées de $\vec{OM}(u, 2\pi - v)$ et $\vec{OM}(u, v)$, montre que le plan d'équation $y = 0$ est plan de symétrie.

2) La fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Elle admet une limite a , finie ou non, lorsque u tend vers $+\infty$. Vous vérifierez que cette limite n'est pas atteinte.

Si $z_0 < 0$ ou $z_0 \geq a$, alors $S_{a,f} \cap P_0 = \emptyset$.

Si $z_0 \in [0, a[$, il existe $u_0 \geq 1$ tel que :

$$f(u_0) = z_0.$$

$S_{a,f} \cap P_0$ est le cercle du plan P_0 de centre $(\alpha(u_0), 0, f(u_0))$ et de rayon u_0 .

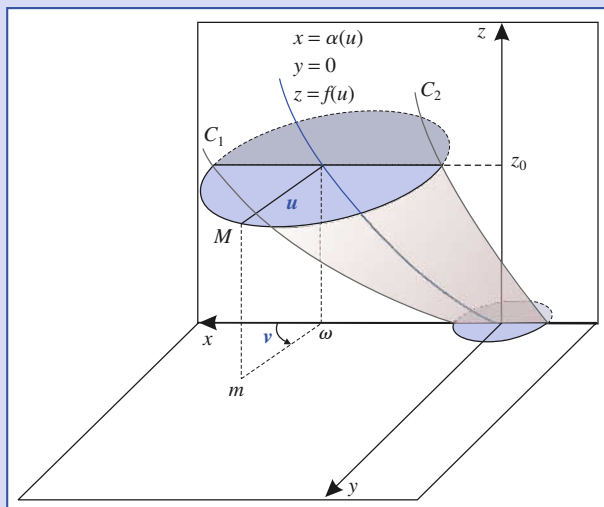
Soit $M(u, v)$ un point de $S_{a,f}$. Appelons z_0 l'ordonnée de M . Le paramètre u est le rayon du cercle C_0 intersection de $S_{a,f}$ avec le plan d'équation $z = z_0$. On a aussi $u = f^{-1}(z_0)$.

Soit m le projeté orthogonal de M sur le plan (xOy) et ω le projeté orthogonal, sur le même plan, du centre du cercle C_0 . Le paramètre v est la mesure dans $[0, 2\pi]$ de l'angle des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{\omega m}$.

3) $(y(u, v) = 0) \Leftrightarrow (v = 0 \text{ ou } v = \pi.)$

C_1 est définie par $\overrightarrow{OM}_1(u) = (\alpha(u) + u) \vec{i} + f(u) \vec{k}$.

C_2 est définie par $\overrightarrow{OM}_2(u) = (\alpha(u) - u) \vec{i} + f(u) \vec{k}$.



4) a) Pour $u > 1$:

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u, v) = \alpha'(u) \vec{i} + \vec{e}_v + f'(u) \vec{k} ; \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u, v) = u \vec{e}_{v+\pi/2}.$$

b) Par conséquent :

$$\begin{aligned} \vec{N}(u, v) &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u, v) \\ &= -u f'(u) \vec{e}_v + u(1 + \alpha'(u) \cos v) \vec{k}. \end{aligned}$$

c) On a :

$$\vec{N}(u, 0) = -u f'(u) \vec{i} + u(1 + \alpha'(u)) \vec{k}$$

et

$$\frac{d \overrightarrow{OM}_1}{d u}(u) = (\alpha'(u) + 1) \vec{i} + f'(u) \vec{k}.$$

Ces deux vecteurs sont orthogonaux. La tangente en un point de la courbe C_1 , tracée sur $S_{\alpha, f}$, est orthogonale à la normale à la surface $S_{\alpha, f}$ en ce point.

Il en est de même pour $\vec{N}(u, \pi)$ et $\frac{d \overrightarrow{OM}_2}{d u}(u)$.

12

Faire le schéma associé à ce problème.

1) Par sa définition, le cône cherché est un cône de révolution d'axe Oz . Son équation est :

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{a^2 - R^2} z^2.$$

2) Le *théorème de Thalès* permet de prouver que le rayon cherché est $d = R \frac{a - R}{a + R}$.

Index

A

- Abscisse curviligne, 276
- Adjoint d'un endomorphisme, 159
- Affinité, 95
- Algorithmes
 - de décomposition en produit de transpositions, 55
 - décomposition LU, 30
 - d'Euclide dans $\mathbb{N}$, 29
 - exponentiation rapide, 126
 - matrices tridiagonales et fonctions splines cubiques, 26
 - méthode de Jacobi, 186
 - orthonormalisation, 150
 - résolution d'équation différentielle, 226
- Application
 - bilinéaire, 63
 - continûment différentiable, 239
 - coordonnées, 236
 - différentiable, 242
 - différentiable de classe $\mathcal{C}^1$, 239
 - différentiable de classe $\mathcal{C}^2$, 256
 - linéaire tangente, 243
 - n -linéaire, 63
 - n -linéaire alternée, 63
 - partielle, 236
 - trilinéaire, 63
- Arc
 - paramétré, 271
 - régulier, 271
- Automorphisme orthogonal, 159

B

- Base, 39
 - adaptée à la décomposition $E = V \oplus W$, 11
 - adaptée à un sous-espace, 11
 - adaptée à une décomposition en somme directe, 41
 - anté-duale, 49
 - directe, 69
 - duale, 48
 - indirecte, 69

C

- Changement de paramétrage, 271
- Cofacteur, 78, 300
- Comatrice, 82
- Cône, 290
- Conique, 173
 - à centre, 174
 - non dégénérée, 176
- Coordonnées
 - polaires, 248, 252, 259, 261
 - sphériques, 248
- Courbe
 - intégrale, 199, 211, 215
 - paramétrée, 271
 - tracée sur une surface, 284, 286
- Courbure, 278
- Cycle, 52
- Cylindre, 289

D

- Déterminant, 63
 - de Gram, 152
 - d'un endomorphisme, 70
 - d'une matrice carrée, 71
 - dans une base d'une famille de vecteurs, 65
 - de Vandermonde, 85
- Dérivée
 - directionnelle, 237
 - partielle, 237
 - partielle d'ordre k , 256
- Différentiable (application), 242
- Différentielle, 241, 243
- Disques de Gerschgorin, 127
- Distance
 - associée à un produit scalaire, 134, 138
 - d'un point à un sous-espace, 148
- Dual d'un espace vectoriel, 48

E

- Égalité du parallélogramme, 135
- Ellipse, 174, 176
- Ellipsoïde, 179
- Endomorphisme
 - auto-adjoint, 159
 - canoniquement associé à une matrice, 10
 - diagonalisable 43, 95, 104, 108, 114
 - induit, 20
 - nilpotent, 33
 - symétrique, 157
 - trigonalisable, 23, 117
- Équation
 - caractéristique, 17, 205
 - cartésienne d'une courbe, 280
 - cartésienne d'une surface, 283
 - différentielle linéaire avec second membre, 195, 197, 202
 - différentielle linéaire homogène, 195, 197, 202
 - différentielle linéaire sans second membre, 195
 - différentielle scalaire, 195
 - différentielle sous forme résolue, 196
 - d'un hyperplan, 46
 - homogène associée à une équation linéaire, 6
 - linéaire, 6
 - paramétrique d'une conique, 176
- Espace préhilbertien
 - complexe, 137
 - réel, 133
- Espace vectoriel
 - euclidien, 133
 - hermitien, 137
- Extremum local, 254

F

- Famille
 - génératrice, 39
 - libre, 39
 - orthogonale, 144
 - orthonormée, 145
- Fonction
 - continûment différentiable, 239
 - différentiable, 242
- Forme
 - bilinéaire symétrique, 169
 - linéaire, 46
 - n -linéaire, 63
 - n -linéaire alternée, 63
 - polaire d'une forme quadratique, 171
 - quadratique, 171
- Formule de polarisation, 135
- Formules de Cramer, 75

G-H

- Génératrices
 - d'un cône, 290
 - d'un cylindre, 289
- Générateur d'un idéal, 121
- Gradient, 251
- Groupe
 - orthogonal, 163
 - symétrique, 50
- Hyperbole, 174, 176
- Hyperboloïde, 179, 180
- Hyperplan, 46

I-J-L

- Idéal, 120
- Inégalité
 - de Bessel, 149
 - de Cauchy-Schwarz, 134, 137
 - de Minkowski, 134
 - triangulaire, 134
- Interpolation
 - de Lagrange, 15
 - linéaire, 15
- Jacobien, 247
- Lignes de niveau, 280

M

- Matrice(s)
 - circulante, 112
 - complémentaire, 82
 - de passage, 11
 - diagonale par blocs, 42
 - diagonalisable, 101, 104, 108, 114
 - extraite, 84
 - jacobienne, 247
 - orthogonale, 161
 - semblable(s), 11, 82
 - symétrique, 168
 - tridiagonale, 26
- Maximum local, 254
- Mineur d'une matrice, 84
- Minimum local, 254
- Multiplicité (ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme), 107
- Multiplicité (ordre de multiplicité d'une valeur propre), 107

N-O

- Nilpotent, 33
- Normale à une surface, 285, 287
- Norme associée à un produit scalaire, 134, 138
- Orbite, 211, 215
- Ordre d'une équation différentielle, 195
- Orientation d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, 69
- Orthogonal d'un sous-espace, 140

P

- Parabole, 174, 176
- Paraboloïde, 180
- Paramétrage(s)
 - d'une courbe, 271
 - d'une surface, 286
 - de même sens, 272
 - de sens contraires, 272
 - normal, 276
- Partie linéaire d'une équation linéaire, 6
- Permutation, 50
 - impaire, 53
 - paire, 53
- Plan tangent à une surface, 285, 287
- Point
 - birégulier d'une courbe, 271
 - régulier d'une courbe, 271
 - régulier sur une surface, 281, 285, 286
 - singulier d'une surface, 281, 285
 - stationnaire d'une courbe, 271
- Polynôme(s)
 - annulateur d'un endomorphisme, 113
 - annulateur scindé à racines simples, 114
 - caractéristique, 97, 103
 - de Lagrange, 15
 - de matrice, 110
 - d'endomorphisme, 110
 - minimal d'un endomorphisme, 122
- Problème de Cauchy, 197, 202, 211
- Produit scalaire
 - complexe, 136
 - réel, 133
- Projecteur(s), 11, 14, 94
 - associé(s) à une décomposition en somme directe, 45
 - orthogonal(s), 141, 142, 147
- Propriété géométrique d'une courbe, 271

Q-R

- Quadrique, 178
 - de révolution, 181
- Rayon de courbure, 279
- Recollement, 199
- Réurrence linéaire d'ordre 2, 17
- Réflexion, 163
- Repère de Frénet, 277
- Ruban de Möbius, 304

S

- Second membre d'une équation linéaire, 6, 195, 215
- Semblables (matrices), 11, 82

- Signature d'une permutation, 54
- Solution
 - d'une équation différentielle, 195, 211, 215
 - maximale, 199
- Somme directe
 - de sous-espaces, 39
 - orthogonale, 140
- Sous-espace(s)
 - propre(s) d'un endomorphisme, 94
 - propre(s) d'une matrice, 96
 - orthogonal à un autre sous-espace, 140
 - stable par un endomorphisme, 20
- Spectre
 - d'un endomorphisme, 94
 - d'une matrice, 96, 97
- Spline cubique, 26
- Stable (sous-espace) par un endomorphisme, 20
- Suite récurrente linéaire, 17
- Support
 - d'une courbe, 271
 - d'une permutation, 50
 - d'une surface, 286
- Surface(s)
 - de révolution, 291
 - paramétrée, 286
 - tangente(s) en un point, 288
- Symétrie, 11, 15, 77, 94, 114
 - orthogonale, 163
- Système
 - de Cramer, 74
 - différentiel homogène, 215
 - différentiel linéaire, 211, 215
 - fondamental de solutions, 204, 216

T

- Tangente à une courbe, 272, 273, 281
- Théorème
 - d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, 149
 - de Cauchy-Lipschitz, 199, 203, 212
 - de Cayley-Hamilton, 123
 - de Pythagore, 139, 140
 - de Schwarz, 257
 - des fonctions implicites, 283
 - du rang, 9
- Trace
 - d'un endomorphisme, 14
 - d'une matrice carrée, 14
- Trajectoire, 271
- Transposition, 50
- Trigonalisable, 23, 117

V-W

Valeur propre

d'un endomorphisme, 93

d'une matrice, 96

double, 107

multiple, 107

simple, 107

Variation de la constante

pour une équation d'ordre 1, 197

pour une équation d'ordre 2, 208

Variation des constantes, 210, 219

Vecteur propre

d'un endomorphisme, 93

d'une matrice, 96

Vecteurs orthogonaux, 139

Vecteur unitaire, 145

Wronskien, 204, 216

Algèbre-Géométrie 2^e année PC-PC* PSI-PSI*

1. Compléments
2. Somme directe ; hyperplan et dual.
Groupe symétrique
3. Déterminants
4. Réduction
5. Espaces préhilbertiens
6. Espaces euclidiens
7. Équations différentielles linéaires
8. Fonctions de plusieurs variables
9. Courbes de surfaces

H^{Prépa} le savoir-faire Hachette au service des prépas

MATHÉMATIQUES

Algèbre-Géométrie MP-MP*

Analyse 1 MP-MP*

Analyse 2 MP-MP*

Algèbre-Géométrie PC-PC* PSI-PSI*

Analyse PC-PC* PSI-PSI*

PHYSIQUE

Optique ondulatoire MP-MP* PC-PC* PSI-PSI* PT-PT*

Ondes MP-MP* PC-PC* PSI-PSI* PT-PT*

Électromagnétisme MP-MP* PC-PC* PSI-PSI* PT-PT*

Thermodynamique MP-MP* PC-PC* PSI-PSI* PT-PT*

Mécanique du solide et des systèmes MP-MP* PC-PC*

Mécanique des fluides PC-PC* PSI-PSI*

Électronique PSI- PSI*

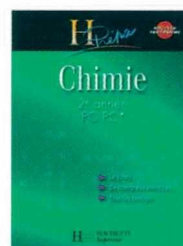
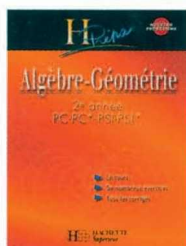
CHIMIE

Chimie PC-PC*

Chimie MP-MP* PT-PT*

Chimie PSI-PSI*

(parution janvier 2005)

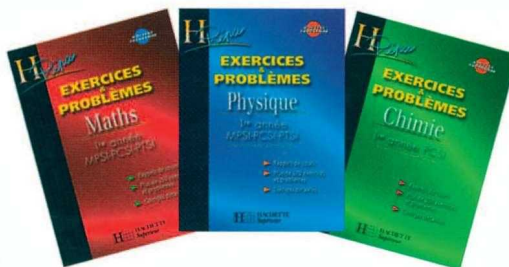


H^{Prépa}

EXERCICES & PROBLÈMES

Des rappels de cours et de nombreux exercices
corrigés pour s'entraîner toute l'année
et pour préparer les concours

**TOUT LE PROGRAMME
EN UN SEUL VOLUME**



www.hachette-education.com

14/5634/2

ISBN : 978-2-01-145634-2



9 782011 456342



HACHETTE
Supérieur