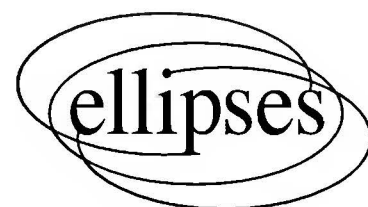


Mohamed Houimdi

Algèbre linéaire, algèbre bilinéaire

Cours et exercices corrigés



Références sciences

Algèbre linéaire, algèbre bilinéaire

Cours et exercices corrigés

Mohamed Houimdi



AVANT PROPOS

L'algèbre linéaire intervient dans la plupart des autres disciplines mathématiques, son langage universel et son formalisme sont nécessaires pour tout étudiant ayant la conviction de poursuivre des études avancées dans le domaine des mathématiques. Ses concepts et son formalisme servent aussi à décrire de nombreux phénomènes en d'autres domaines comme la mécanique, l'électronique, l'économie ou l'informatique.

Ce livre est le fruit de plusieurs années d'enseignement d'Algèbre générale, linéaire et bilinéaire à la deuxième année de l'ancien système à la section Mathématiques et Physique (MPII) et aux semestres 3 et 4 du nouveau système LMD à la filière Sciences Mathématiques et Applications (SMA). Il est essentiellement destiné aux étudiants en licence mathématiques, aux élèves de la section MP des classes préparatoires et ceux qui préparent les concours de l'enseignement.

Ce livre est organisé d'une manière hiérarchique sous forme de onze chapitres. Les démonstrations des théorèmes et des propositions sont détaillées et rédigées d'une manière simple et claire afin de permettre aux étudiants d'apprendre les techniques de raisonnement. Des exemples et quelques exercices résolus sont proposés dans chaque chapitre, afin d'illustrer et de faciliter la compréhension du contenu. A la fin de chaque chapitre une liste d'exercices est proposée avec solutions détaillées. Certains exercices classiques sont traités comme un complément de cours sous forme de propositions avec démonstrations détaillées. Les espaces vectoriels sont traités d'une manière abstraite et dans un cadre plus général, en considérant des corps commutatifs finis ou infinis de caractéristique quelconque. Une partie du chapitre sur les applications linéaires est consacrée pour des exemples d'endomorphismes classiques comme les projections, les symétries, les transvections, les dilatations et les affinités. Les déterminants sont introduits dans un cadre théorique à l'aide des formes multilinéaires alternées. Vu l'importance de la dualité en algèbre et en analyse fonctionnelle, nous avons présenté toutes les propriétés algébriques concernant ce sujet.

Je tiens à remercier les éditions ellipses de m'avoir permettre la publication de ce livre afin de partager mon expérience avec les étudiants et éventuellement avec d'autres enseignants.

Enfin, je dédie cet ouvrage à ma chère femme Raquia pour sa patience et pour son aide au quotidien. Sans elle ce travail n'aurait jamais vu le jour.

TABLE DES MATIÈRES

Avant propos	iii
1 Espaces vectoriels	1
1.1 Définitions et propriétés de base	1
1.2 Sous-espaces vectoriels	3
1.3 Espace vectoriel quotient	13
1.4 Partie génératrice – Partie libre – Base	14
1.5 Espaces vectoriels de dimension finie	19
1.6 Exercices	31
1.7 Solutions des exercices	36
2 Applications linéaires – Matrices	51
2.1 Applications linéaires – Isomorphisme d'espaces vectoriels	51
2.2 Endomorphismes – Automorphismes	61
2.3 Exemples d'endomorphismes remarquables	65
2.4 Matrices	71
2.5 Matrices et applications linéaires	79
2.6 Rang d'une application linéaire - Rang d'une matrice	86
2.7 Exercices	90
2.8 Solution des exercices	102
3 Formes linéaires – Dualité	131
3.1 Formes linéaires et hyperplans	131
3.2 Espace vectoriel dual	134
3.3 Base duale	136
3.4 Base préduale	141
3.5 Prolongement des formes linéaires	142
3.6 Orthogonalité	143
3.7 Bidual	148
3.8 Transposée d'une application linéaire	149

3.9 Exercices 152

3.10 Solution des exercices. 155

4 Formes multilinéaires – Déterminants 165

4.1 Formes multilinéaires 165

4.2 Déterminants 172

4.3 Exercices 187

4.4 Solutions des exercices. 190

5 Réduction des endomorphismes 199

5.1 Polynômes et endomorphismes 199

5.2 Diagonalisation 211

5.3 Trigonalisation 225

5.4 Endomorphismes nilpotents 229

5.5 Jordanisation d'un endomorphisme nilpotent 234

5.6 Décomposition de Dunford 241

5.7 Réduction de Jordan 245

6 Applications de la réduction 255

6.1 Calcul de l'exponentielle d'une matrice 255

6.2 Systèmes et équations différentiels linéaires 262

6.3 Equations différentielles linéaires à coefficients constants 270

6.4 Exercices 272

6.5 Solutions des exercices 285

7 Formes bilinéaires symétriques - Formes quadratiques 315

7.1 Formes bilinéaires symétriques 315

7.2 Formes quadratiques 327

7.3 Signature d'une forme bilinéaire symétrique 335

7.4 Exercices 339

7.5 Solution des exercices 344

8 Espaces euclidiens 359

8.1 Produit scalaire. 359

8.2 Inégalité de cauchy-Schwarz 364

8.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt 367

8.4 Changement de bases orthonormales - Orientation 369

8.5 Produit vectoriel 371

8.6 Exercices 376

8.7 Solution des exercices 382

9 Endomorphismes d'un espace euclidiens	397
9.1 Endomorphisme adjoint	397
9.2 Projection orthogonale	400
9.3 Symétrie orthogonale	408
9.4 Endomorphismes symétriques	410
9.5 Endomorphismes orthogonaux	417
9.6 Décomposition polaire	428
9.7 Décomposition QR	431
9.8 Exercices	432
9.9 Solution des exercices	450
10 Formes sesquilinéaires - Formes quadratiques hermitiennes	505
10.1 Formes sesquilinéaires - Formes hermitiennes	505
10.2 Formes quadratiques hermitiennes	513
10.3 Exercices	520
10.4 Solution des exercices	521
11 Espaces hermitiens	525
11.1 Produit hermitien	525
11.2 Inégalité de Cauchy-Schwartz	528
11.3 Endomorphismes d'un espace hermitien	529
11.4 Exercices	538
11.5 Solution des exercices	540
Bibliographie	547
Index	548

CHAPITRE 1

ESPACES VECTORIELS

1.1 Définitions et propriétés de base

1.1.1 Espace vectoriel sur un corps quelconque

Définition 1.1.1

Soient $(E, +)$ un **groupe commutatif** et $(K, +, \times)$ un **corps commutatif**. On dit que E est un K -espace vectoriel ou un espace vectoriel sur K , s'il existe une application de $K \times E$ vers E , appelée loi externe sur E , qui à $(\alpha, x) \in K \times E$ fait correspondre $\alpha \cdot x$, vérifiant les axiomes suivants :

- i) $\forall x \in E, 1_K \cdot x = x$.
- ii) $\forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \forall x \in E, (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.
- iii) $\forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \forall x \in E, (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.
- iv) $\forall \alpha \in K, \forall x \in E, \forall y \in E, \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

Dans ce cas, les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et se notent $x, y, z, \dots$, tandis que les éléments de K sont appelés des **scalaires** et se notent $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \dots$.

1.1.2 Conséquences de la définition

Soit E un K -espace vectoriel, alors on a les règles de calcul suivantes :

- a) $\forall x \in E, 0_K \cdot x = 0_E$.
- b) $\forall \lambda \in K, \lambda \cdot 0_E = 0_E$.
- c) $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, \lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E$.

Démonstration. a) D'après l'axiome ii) de la définition, nous avons

$$0_K \cdot x = (0_K + 0_K) \cdot x = 0_K \cdot x + 0_K \cdot x$$

donc $0_K \cdot x = 0_E$.

b) D'après l'axiome iv) de la définition, nous avons

$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$$

donc $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

c) ($\implies$) Supposons que $\lambda \cdot x = 0_E$ et $\lambda \neq 0_K$ et montrons que $x = 0_E$.

Puisque $\lambda \cdot x = 0_E$, alors $\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda^{-1} \cdot 0_E = 0_E$, or d'après l'axiome iii) de la définition, nous avons

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot x) = (\lambda^{-1} \lambda) \cdot x = 1_K \cdot x$$

donc d'après l'axiome i) de la définition, on a $x = 0_E$.

($\impliedby$) Déjà vu. □

1.1.3 Exemples fondamentaux

1. Soient $(L, +, \times)$ un corps commutatif et K un sous-corps de L , alors L peut-être considéré comme un K -espace vectoriel pour la loi externe définie comme suit,

$$\begin{aligned} K \times L &\longrightarrow L \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda \cdot x = \lambda \times x \end{aligned}$$

Par exemple, $L = \mathbb{C}$ et $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{Q}$ ou $L = \mathbb{C}$ et $K = \mathbb{Q}$. En particulier, tout corps K peut-être considéré comme un espace vectoriel sur lui-même.

2. Soit K un corps commutatif, alors pour tout entier $n \geq 1$, K^n est un K -espace vectoriel pour la loi externe,

$$\begin{aligned} K \times K^n &\longrightarrow K^n \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3. Soient K un corps commutatif et $K[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans K . Alors $K[X]$ est un K -espace vectoriel pour la loi externe,

$$\begin{aligned} K \times K[X] &\longrightarrow K[X] \\ (\lambda, P) &\longmapsto \lambda \cdot P = \sum_{i=1}^m (\lambda a_i) X^i \end{aligned}$$

où $P = \sum_{i=1}^m a_i X^i$.

4. Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des espaces vectoriels sur le même corps K . Alors le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est un K -espace vectoriel pour la loi externe définie par l'application de $K \times (E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n)$ vers $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ qui à $(\lambda, (x_1, x_2, \dots, x_n)) \in K \times (E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n)$ fait correspondre

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n)$$

$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ s'appelle l'espace vectoriel produit des K -espaces vectoriels $E_1, E_2, \dots, E_n$.

5. Soient E un K -espace vectoriel, A un ensemble non vide quelconque et E^A l'ensemble de toutes les applications de A vers E . Alors E^A est un K -espace vectoriel pour la loi externe,

$$\begin{aligned} K \times E^A &\longrightarrow E^A \\ (\lambda, f) &\longmapsto \lambda \cdot f \end{aligned}$$

où $\lambda \cdot f$ est l'application de A vers E définie par,

$$\forall a \in A, (\lambda \cdot f)(a) = \lambda \cdot f(a)$$

Rappelons aussi que si f et g sont deux applications de A vers E , alors $f + g$ est l'application de A vers E définie par,

$$\forall a \in A, (f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

1.2 Sous-espaces vectoriels

1.2.1 Définition et exemples

Définition 1.2.1

Soient E un K -espace vectoriel et F une partie de E . On dit que F est un sous-espace vectoriel de E , si

- i) $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$.
- ii) $\forall \lambda \in K, \forall x \in F, \lambda \cdot x \in F$.

Remarque 1

Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est un espace vectoriel pour la loi externe induite par celle de E :

$$\begin{aligned} K \times F &\longrightarrow F \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha \cdot x \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1

Soient E un K -espace vectoriel et F une partie de E . Alors F est un sous-espace vectoriel de E , si, et seulement si,

- i) $F \neq \emptyset$.
- ii) $\forall x \in F, \forall y \in F, x + y \in F$.
- iii) $\forall \lambda \in K, \forall x \in F, \lambda \cdot x \in F$.

Démonstration. $(\implies)$ Trivial.

$(\impliedby)$ Supposons que F vérifie i), ii) et iii) et montrons que $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$. Donc on doit vérifier que,

$$F \neq \emptyset.$$

$$\forall x \in F, \forall y \in F, x - y \in F.$$

Soient $x \in F$ et $y \in F$, puisque, par hypothèse $F \neq \emptyset$, alors il suffit de voir que $x - y \in F$.

D'après iii), $(-1_K) \cdot y \in F$ avec $(-1_K) \cdot y = -y$, donc d'après ii), $x + (-y) \in F$. $\square$

Remarque 2

Soit K un corps commutatif. Pour montrer qu'un ensemble F est un K -espace vectoriel, il suffit, dans la plupart des cas, de montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un K -espace vectoriel connu.

Exemples

1. Pour tout K -espace vectoriel E , les parties $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Soit K un corps commutatif. Pour tout entier $n \geq 0$, on désigne par $K_n[X]$ la partie de $K[X]$ définie par,

$$K_n[X] = \{P \in K[X] : \deg(P) \leq n\}$$

Alors $K_n[X]$ est un K -espace vectoriel.

Il suffit de vérifier que $K_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $K[X]$.

- i) Si on suppose que $\deg(0) = -\infty$, alors pour tout entier $n \geq 0$, $K_n[X]$ contient le polynôme nul, par suite $K_n[X] \neq \emptyset$.
- ii) On sait que pour tout $P \in K[X]$ et pour tout $Q \in K[X]$, on a

$$\deg(P + Q) \leq \sup(\deg(P), \deg(Q))$$

Donc si $\deg(P) \leq n$ et $\deg(Q) \leq n$, alors $\deg(P + Q) \leq n$ et par suite, on a $P + Q \in K_n[X]$.

iii) On sait, aussi, que pour tout $\lambda \in K$ et pour tout $P \in K[X]$,

$$\deg(\lambda P) \leq \deg(P) \text{ et si } \lambda \neq 0 \text{ alors } \deg(\lambda P) = \deg(P)$$

Donc si $\lambda \in K$ et $P \in K_n[X]$, alors $\lambda \cdot P \in K_n[X]$.

3. L'ensemble F des suites réelles qui tendent vers zéro à l'infini, est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,

$$F = \{(x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$$

Il suffit de montrer que F est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de I vers $\mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Il suffit de vérifier que $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$, l'espace vectoriel de toutes les applications de I vers $\mathbb{R}$.

1.2.2 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Intersection

Proposition 1.2.2

Soit E un K -espace vectoriel, alors l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E , où I est un ensemble d'indice quelconque et non vide. La vérification que $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E est laissée à titre d'exercice.

Rappelons que,

$$x \in \bigcap_{i \in I} F_i \iff \forall i \in I, x \in F_i$$

Réunion

La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas toujours un sous-espace vectoriel de E . Cependant on a la proposition suivante :

Proposition 1.2.3

Soient E un K -espace vectoriel quelconque, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E , si et seulement si, $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Démonstration. $(\implies)$ Supposons que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E et montrons que $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$. Pour cela, supposons, par absurde, que $F \not\subseteq G$ et $G \not\subseteq F$.

$$F \not\subseteq G \implies \exists x : x \in F \text{ et } x \notin G$$

$$G \not\subseteq F \implies \exists y : y \in G \text{ et } y \notin F$$

$F \cup G$ étant un sous-espace vectoriel, donc $x + y \in F \cup G$, par suite, on a

$$x + y \in F \text{ ou } x + y \in G$$

Si $x + y \in F$, puisque $y = (x + y) - x$, alors $y \in F$, ce qui est absurde, car $y \notin F$.

Si $x + y \in G$, puisque $x = (x + y) - y$, alors $x \in G$, ce qui est encore absurde, car $x \notin G$.

Donc notre supposition de départ est fausse, par suite, $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

$(\impliedby)$ Trivial. □

Remarque 3

La proposition précédente se généralise à un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E :

Proposition 1.2.4

Soient E un K -espace vectoriel quelconque et n un entier ≥ 2 . On suppose que K est un corps de caractéristique $\geq n$.

Soient $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E , alors $F_1 \cup F_2 \cdots \cup F_n$ est un sous-espace vectoriel de E , si et seulement si, il existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tel que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $F_j \subseteq F_i$.

Démonstration. $(\impliedby)$ Trivial.

($\Rightarrow$) On procède par récurrence sur $n \geq 2$.

Le cas $n = 2$ est déjà vu, car tout corps est de caractéristique ≥ 2 .

Supposons, donc que $n > 2$ et que la proposition est vérifiée pour tout entier $m < n$. Soient $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E , tel que $F_1 \cup F_2 \cdots \cup F_n$ soit un sous-espace vectoriel de E .

Supposons, par absurde, que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_j \not\subseteq F_i$, donc, en particulier, on a $\bigcup_{j=1}^{n-1} F_j \not\subseteq F_n$. D'autre part, d'après

l'hypothèse de récurrence, on peut supposer que $F_n \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{n-1} F_j$.

Soient $x \in F_n$ et $y \in \bigcup_{j=1}^{n-1} F_j$, tels que $x \notin \bigcup_{j=1}^{n-1} F_j$ et $y \notin F_n$.

$$(x \in F_n \text{ et } y \notin F_n) \Rightarrow \forall \lambda \in K, \lambda x + y \notin F_n$$

Or, $\bigcup_{j=1}^n F_j$ est un sous-espace vectoriel de E , donc pour tout $\lambda \in K$,

on a $\lambda x + y \in \bigcup_{j=1}^n F_j$. Remarquons que si $\lambda x + y \in F_j$, pour un certain

$j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, alors pour tout $\mu \neq \lambda$, $\mu x + y \notin F_j$, car sinon, on aura $x \in F_j$, ce qui est absurde. K est de caractéristique $\geq n$, donc l'ensemble $\{1_K, 21_K, \dots, (n-1)1_K\}$ est de cardinal $n-1$, par suite, d'après la remarque précédente, pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, il existe un unique λ_j , avec $\lambda_j \in \{1_K, 21_K, \dots, (n-1)1_K\}$, tel que,

$\lambda_j x + y \in F_j$. Or $y \in \bigcup_{i=1}^{n-1} F_j$, donc il existe $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, tel que, $y \in F_j$. donc $x \in F_j$, car $\lambda_j x + y \in F_j$ et $\lambda_j \neq 0$, ce qui est absurde, car $x \notin F_j$. $\square$

Somme

Soient E un K -espace vectoriel, $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E , avec $n \geq 2$. On définit la partie de E , notée $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$, par

$x \in F_1 + F_2 + \cdots + F_n$, si et seulement si, il existe

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$, tel que $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

Proposition 1.2.5

$F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est un sous-espace vectoriel de E , appelé sous-espace vectoriel somme des sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_n$.

Démonstration. La vérification que $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est un sous-espace vectoriel est laissée à titre d'exercice. $\square$

Somme directe

Définition 1.2.2

Soient E un K -espace vectoriel et $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . On dit que la somme $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est directe, si pour tout $x \in F_1 + F_2 + \dots + F_n$, il existe **un unique** $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$, tel que $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Notations

Dans le cas où la somme $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est directe, on la note,

$$F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n \quad \text{ou encore} \quad \bigoplus_{i=1}^n F_i$$

Lemme 1.2.1

La somme $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est directe, si et seulement si, pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$, on a

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \implies x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

Démonstration. $(\implies)$ Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$, tel que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. On doit vérifier que $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Comme la somme est directe et puisque on a $0 = 0 + 0 + \dots + 0$, alors d'après l'unicité de la décomposition, on a $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

$(\impliedby)$ Soit $x \in F_1 + F_2 + \dots + F_n$, tel que $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ et $x = y_1 + y_2 + \dots + y_n$. on doit alors montrer que

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n.$$

$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ et $x = y_1 + y_2 + \dots + y_n$, donc on aura

$$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \dots + (x_n - y_n) = 0$$

par suite, si on pose $z_1 = x_1 - y_1, z_2 = x_2 - y_2, \dots$ et $z_n = x_n - y_n$, alors on aura

$(z_1, z_2, \dots, z_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ et $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$, donc, par hypothèse, on a $z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0$. $\square$

Théorème 1.2.1

La somme $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est directe, si et seulement si,

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad F_i \cap (F_{i+1} + \dots + F_n) = \{0\}$$

Démonstration. $(\implies)$ Supposons que la somme est directe et soit

$x_i \in F_i \cap (F_{i+1} + \dots + F_n)$, avec $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

On a $x_i \in F_{i+1} + \dots + F_n$, donc il existe $(x_{i+1}, \dots, x_n) \in F_{i+1} \times \dots \times F_n$, tel que $x_i = x_{i+1} + \dots + x_n$, donc on aura $x_i + (-x_{i+1}) + \dots + (-x_n) = 0$.

Or la somme $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est directe, donc d'après le lemme précédent, on a $x_i = x_{i+1} = \dots = x_n = 0$, donc, en particulier, on a $x_i = 0$.

$(\impliedby)$ Supposons que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad F_i \cap (F_{i+1} + \dots + F_n) = \{0\}$.

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$, tel que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$.

Montrons que $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Pour cela, on a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 &\implies x_1 = -(x_2 + \dots + x_n) \\ &\implies x_1 \in F_1 \cap (F_2 + \dots + F_n) \\ &\implies x_1 = 0 \end{aligned}$$

Donc $x_2 + \dots + x_n = 0$. De la même manière on montre que $x_2 = 0$ et ainsi, par récurrence sur $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on montre que

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

Remarque 4

Soit E un K -espace vectoriel quelconque, alors d'après le théorème précédent,

- 1. La somme de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est directe, si et seulement si,*

$$F \cap G = \{0\}$$

- 2. La somme de trois sous-espaces vectoriels F , G et H de E est directe, si et seulement si,*

$$F \cap (G + H) = \{0\} \quad \text{et} \quad G \cap H = \{0\}$$

1.2.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 1.2.3

Soient E un K -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On dit que F et G sont supplémentaires dans E , si,

- i) La somme $F + G$ est directe.
- ii) $E = F \oplus G$.

Remarque 5

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G \\ \text{et} \\ \forall (x, y) \in F \times G, x + y = 0 \implies x = y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} E = F + G \\ \text{et} \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}$$

Exemples

1. Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, F l'ensemble des fonctions $f \in E$ qui sont paires et G l'ensemble des fonctions $f \in E$ qui sont impaires. Alors F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E .

En effet, Il est clair que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , car la somme de deux fonctions paires (resp. impaires) est une fonction paire (resp. impaire), ainsi que la multiplication d'une fonction paire (resp. impaire) est une fonction paire (resp. impaire).

Si $f \in F \cap G$, alors f est une fonction qui est à la fois paire et impaire, donc f est nulle, par suite, $F \cap G = \{0\}$.

Vérifions que $E = F + G$. Pour cela soit $f \in E$ et soient g et h les fonctions définies par,

$$\forall x \in E, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Alors g et h sont respectivement paire et impaire et on a $f = g + h$.

2. Soient $E = \mathcal{C}^m(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^m$ sur $\mathbb{R}$, F et G les parties de E définies par,

$$F = \{f \in E : f(0) = f'(0) = \dots = f^{(m)}(0) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathbb{R}_m[x]$$

où $\mathbb{R}_m[x]$ est l'ensemble des fonctions polynomiales de degré $\leq m$.

Rappelons que $f \in \mathbb{R}_m[x]$, si et seulement si, il existe

$(a_0, a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$.

Alors F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E .

En effet, soit $f \in F \cap G$. Puisque $f \in \mathbb{R}_m[x]$, alors d'après la formule de Taylor, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

et puisque $f \in F$, alors $\forall k \in \{0, 1, \dots, m\}$, $f^{(k)}(0) = 0$, donc f est nulle, par suite $F \cap G = \{0\}$.

Soit maintenant $f \in E$. Cherchons $(g, h) \in F \times G$, tel que $f = g + h$.

Pour cela, il suffit de considérer les fonction g et h définies pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $h(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ et $g(x) = f(x) - h(x)$. Alors $g \in F$, $h \in G$ et on a $f = g + h$.

3. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. On dit qu'un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique (resp. antisymétrique), si ${}^t A = A$ (resp. ${}^t A = -A$). On désigne, respectivement, par $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques et celui des matrices antisymétriques et on pose $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $G = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Alors F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E .

En effet, il est clair que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E et que si A est une matrice qui est à la fois symétrique et antisymétrique, alors $A = 0$, donc $F \cap G = \{0\}$. Pour vérifier que $E = F + G$, il suffit de remarquer que si $A \in E$, alors les matrices A_1 et A_2 définies par,

$$A_1 = \frac{A + {}^t A}{2} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{A - {}^t A}{2}$$

sont, respectivement, symétrique et antisymétrique et on a $A = A_1 + A_2$.

Théorème 1.2.2

Soit E un K -espace vectoriel quelconque. Alors tout sous-espace vectoriel de E possède au moins un supplémentaire.

Démonstration. Supposons d'abord que la dimension de E est finie.

Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels G de E , tels que $F \cap G = \{0\}$. Alors $\mathcal{M} \neq \emptyset$, car $\{0\} \in \mathcal{M}$.

Posons $M = \{\dim(G) : G \in \mathcal{M}\}$, alors M est une partie de $\mathbb{N}$, non vide et majorée par $\dim(E)$, donc M possède un plus grand élément noté p . Puisque $p \in M$, alors il existe au moins un $G \in \mathcal{M}$, tel que $\dim(G) = p$, donc, par définition $F \cap G = \{0\}$.

Vérifions que $E = F + G$, pour cela, supposons, par absurde, que $E \neq F + G$, donc il existe $x \in E$, tel que $x \notin F + G$. Soit $H = G + \{\lambda \cdot x : \lambda \in K\}$, alors H est un sous-espace vectoriel de E et on a $F \cap H = \{0\}$.

En effet, soit $y \in F \cap H$, alors il existe $g \in G$ et il existe $\lambda \in K$, tels que $y = g + \lambda \cdot x$.

Si $\lambda = 0$, alors $y \in G$ et puisque $F \cap G = \{0\}$, alors $y = 0$.

Si $\lambda \neq 0$, alors $x = \lambda^{-1} \cdot y - \lambda^{-1} \cdot g$, donc $x \in F + G$, ce qui est absurde, donc $\lambda = 0$ et ainsi $y = 0$.

Puisque $F \cap H = \{0\}$, donc $H \in \mathcal{M}$ avec $\dim(H) > \dim(G)$, absurde, car $\dim(G)$ est maximal.

Si, maintenant, la dimension de E est infinie alors la démonstration précédente ne marche plus. Donc, dans ce cas, on est obligé d'appliquer le fameux lemme de Zorn :

Lemme 1.2.2 (de Zorn)

Si $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné et si E est inductif, alors E possède au moins un élément maximal.

Remarque 6

Rappelons qu'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est dit inductif, si toute partie de E , non vide et totalement ordonnée, possède au moins un majorant dans E .

La démonstration de ce lemme est à admettre. En fait, on montre que le lemme de Zorn est équivalent à l'axiome suivant, dit axiome de choix :

Pour tout ensemble X non vide, il existe une application

$f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow X$, tel que pour tout $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$, on a $f(A) \in A$.
Intuitivement, l'axiome du choix signifie qu'à chaque fois qu'on a un ensemble A non vide, on peut toujours choisir un élément x qui appartient à cet ensemble.

Revenons à notre démonstration et considérons toujours l'ensemble $\mathcal{M}$ des sous-espaces vectoriels G de E , tels que $F \cap G = \{0\}$, ordonné par inclusion. Alors $\mathcal{M}$ est inductif, en effet :

i) $\mathcal{M} \neq \emptyset$, car $\{0\} \in \mathcal{M}$.

ii) Soit $\mathcal{A}$ une partie totalement ordonnée de $\mathcal{M}$ et soit $H = \bigcup_{G \in \mathcal{A}} G$.

Comme $\mathcal{A}$ est totalement ordonnée par inclusion, alors H est un sous-espace vectoriel de E et on a,

$$F \cap H = F \cap \left(\bigcup_{G \in \mathcal{A}} G \right) = \bigcup_{G \in \mathcal{A}} (F \cap G) = \{0\}$$

Par suite $H \in \mathcal{M}$ et H est un majorant de $\mathcal{A}$ pour l'inclusion.

Ainsi $(\mathcal{M}, \subseteq)$ est un ensemble inductif, donc d'après le lemme de Zorn, $\mathcal{M}$ possède au moins un élément maximal, noté G .

Vérifions que $E = F \oplus G$. Pour cela, comme $G \in \mathcal{M}$, alors on a

$F \cap G = \{0\}$ et de la même manière que dans le cas précédent, on montre que $F + G = E$. $\square$

1.3 Espace vectoriel quotient

Proposition 1.3.1

Soient E un K -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et E/F le groupe quotient de E par F . Alors E/F est un K -espace vectoriel pour la loi externe :

$$\begin{aligned} K \times E/F &\longrightarrow E/F \\ (\lambda, \bar{x}) &\longmapsto \lambda \cdot \bar{x} = \overline{\lambda \cdot x} \end{aligned}$$

appelé espace vectoriel quotient de E par F .

Démonstration. Il est facile de vérifier que la loi externe est bien définie, donc il suffit de vérifier les quatre axiomes de la définition d'un espace vectoriel :

i) $\forall x \in E, 1 \cdot \bar{x} = \overline{1 \cdot x} = \bar{x}$.

ii) $\forall \alpha \in K, \forall x \in E, \forall y \in E$, on a

$$\alpha \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \overline{\alpha \cdot (x + y)} = \overline{\alpha \cdot x + \alpha \cdot y} = \overline{\alpha \cdot x} + \overline{\alpha \cdot y} = \alpha \cdot \bar{x} + \alpha \cdot \bar{y}$$

iii) $\forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \forall x \in E$. on a

$$(\alpha + \beta) \cdot \bar{x} = \overline{(\alpha + \beta) \cdot x} = \overline{\alpha \cdot x + \beta \cdot x} = \overline{\alpha \cdot x} + \overline{\beta \cdot x} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{x}$$

iv) $\forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \forall x \in E$. on a

$$(\alpha \times \beta) \cdot \bar{x} = \overline{(\alpha \times \beta) \cdot x} = \overline{\alpha \cdot (\beta \cdot x)} = \alpha \cdot \overline{\beta \cdot x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{x})$$

1.4 Partie génératrice – Partie libre – Base

1.4.1 Combinaisons linéaires - Partie génératrice

Définition 1.4.1

Soient E un K -espace vectoriel et A une partie non vide de E . On dit qu'un élément x de E est une combinaison linéaire d'éléments de A , s'il existe $x_1, x_2, \dots, x_n$ éléments de A et il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ éléments de K , tels que

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

Proposition 1.4.1

Soient E un K -espace vectoriel et A une partie non vide de E . Alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments A est un sous-espace vectoriel de E , appelé sous-espace vectoriel engendré par A et se note $\text{Vect}(A)$.

Démonstration. Soient $x \in \text{Vect}(A)$ et $y \in \text{Vect}(A)$, alors par définition, on a

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^m \beta_j y_j$$

où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, on a $\alpha_i \in K$, $x_i \in A$, $\beta_j \in K$ et $y_j \in A$.

Pour chaque $k \in \{1, 2, \dots, n+m\}$, soient $\gamma_k \in K$ et $z_k \in A$ définis par,

$$\gamma_k = \begin{cases} \alpha_k & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ \beta_{k-n} & \text{si } n+1 \leq k \leq n+m \end{cases} \quad \text{et} \quad z_k = \begin{cases} x_k & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ y_{k-n} & \text{si } n+1 \leq k \leq n+m \end{cases}$$

Alors, on a $x+y = \sum_{k=1}^{n+m} \gamma_k z_k$, donc $x+y$ est une combinaison linéaire d'éléments de A , par suite, on a $x+y \in \text{Vect}(A)$. De la même manière, on montre que si $\lambda \in K$ et $x \in \text{Vect}(A)$, alors $\lambda \cdot x \in \text{Vect}(A)$. $\square$

Remarque 7

1. On vérifie facilement que $\text{Vect}(A)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A . Donc $\text{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A , c'est à dire, si F est un sous-espace vectoriel de E qui contient A , alors F contient aussi $\text{Vect}(A)$.
2. Puisque $\{0\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\emptyset$, alors on peut écrire $\text{Vect}(\emptyset) = \{0\}$. C'est pour cela qu'on convient d'écrire,

$$\sum_{i \in \emptyset} \alpha_i x_i = 0$$

Définition 1.4.2

Soient E un K -espace vectoriel et A une partie de E . On dit que A est une partie génératrice de E , si $\text{Vect}(A) = E$.

Exemples

1. $\emptyset$ est une partie génératrice de l'espace vectoriel nul $\{0\}$.
2. Pour tout K -espace vectoriel E , E est une partie génératrice de E .
3. $A = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une partie génératrice de K^n , où

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

4. $A = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$ est une partie génératrice de $K[X]$.
5. $A = \{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ est une partie génératrice de $K_n[X]$.

1.4.2 Partie libre**Définition 1.4.3**

Soient E un K -espace vectoriel et L une partie non vide de E .

- i) Si L est finie, $L = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on dit que L est libre, si pour tout $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$, on a

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

- ii) Si L est infinie, on dit que L est libre, si toute partie finie de L est libre.
- iii) Une partie de E qui n'est pas libre est dite liée.

Exemples

1. Toute partie contenant le vecteur nul est liée.
2. Par convention, $L = \emptyset$ est une partie libre.
3. Pour tout $x \neq 0$, $L = \{x\}$ est une partie libre.
4. $L = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ est une partie libre de K^n .
5. $L = \{1, X, \dots, X^n\}$ est une partie libre de $K_n[X]$.
6. $L = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$ est une partie libre de $K[X]$.
7. $L = \{x^{(m)} : m \in \mathbb{N}\}$, où $\forall m \in \mathbb{N}$, $x^{(m)} = (x_n^{(m)})_{n \geq 0}$ est la suite de K définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

est une partie libre de $K^{\mathbb{N}}$

8. Soit I un ensemble non vide quelconque, alors $L = \{f_y : y \in K^*\}$ est une partie libre du K -espace vectoriel K^I de toutes les applications de I vers K .

$$\text{où } \forall y \in K^*, \forall x \in K, f_y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

1.4.3 Base

Définition 1.4.4

Soient E un K -espace vectoriel et B une partie quelconque de E . On dit que B forme une **base** de E , si B est à la fois une partie libre et génératrice.

Remarque 8

1. En fait, une base de E est une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E , telle que, $B = \{x_i : i \in I\}$ soit une partie libre et génératrice de E .
2. Donc si une partie B forme une base de E , alors le "nombre" de bases qu'on peut former à partir de B est égal au nombre de permutation qu'on peut faire sur les éléments de B .
3. Par exemple si $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ forme une base de E , alors (x_1, x_2, x_3) , (x_1, x_3, x_2) , (x_2, x_1, x_3) , (x_2, x_3, x_1) , (x_3, x_1, x_2) et (x_3, x_2, x_1) sont six bases différentes de E .

Exemples

1. Par convention, $B = \emptyset$ est une base de l'espace vectoriel nul $\{0\}$.
2. $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ forme une base de K^n . Donc pour tout $\sigma \in S_n$, $(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ est une base de K^n . $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ s'appelle la base canonique de K^n .
3. $B = \{1, X, \dots, X^n\}$ forme une base de $K_n[X]$.
 $(1, X, \dots, X^n)$ s'appelle la base canonique de $K_n[X]$
4. $B = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$ forme une base de $K[X]$.

Lemme 1.4.1

Soient E un K -espace vectoriel, L une partie libre de E et $x \in E$, alors

$$x \notin \text{Vect}(L) \iff L \cup \{x\} \text{ est libre}$$

Démonstration. Par contraposée, il suffit de montrer que

$$x \in \text{Vect}(L) \iff L \cup \{x\} \text{ est liée}$$

($\implies$) Trivial.

($\impliedby$) Supposons que $L \cup \{x\}$ est liée, donc par définition, il existe $x_1, x_2, \dots$ éléments de $L \cup \{x\}$ et il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ éléments de K non tous nuls, tels que,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$$

Puisque L est libre, alors il existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, tel que $x_{i_0} = x$ et pour la même raison, puisque $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, on aura $\alpha_{i_0} \neq 0$. Donc

$$x = -\frac{1}{\alpha_{i_0}} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \alpha_i x_i$$

Par suite, $x \in \text{Vect}(L)$. □

Théorème 1.4.1 (Caractérisation d'une base)

Soient E un K -espace vectoriel et B une partie de E . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) B forme une **base** de E .
- ii) B est une partie **génératrice minimal** de E .
- iii) B est une partie **libre maximal** de E .

Démonstration. i) $\implies$ ii) Supposons que B forme une base de E . Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble de toutes les parties génératrices de E . On doit montrer que B est un élément minimal de $(\mathcal{G}, \subseteq)$.

Pour cela, soit A un élément de $\mathcal{G}$, tel que $A \subseteq B$, a-t-on $A = B$?

Supposons, par absurde, que $A \neq B$, donc il existe $x \in E$, tel que $x \in B$ et $x \notin A$. Comme A est une partie génératrice de E , alors il existe $x_1, x_2, \dots, x_n$ éléments de A et il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ éléments de K , tels que

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

Donc $\{x, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est liée avec $\{x, x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq B$, donc B est liée, ce qui est absurde, car B est libre. Ainsi on voit que B est un élément minimal de $(\mathcal{G}, \subseteq)$.

ii) $\implies$ iii) Supposons que B est une partie génératrice minimal de E . Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble de toutes les parties libres de E . On doit montrer que B est un élément maximal de $(\mathcal{L}, \subseteq)$.

Pour cela, montrons d'abord que B est libre. Supposons, par absurde, que B n'est pas libre, donc il existe $x_1, x_2, \dots, x_n$ éléments de B et il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ non tous nuls, tels que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$$

Comme $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, alors il existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, tel que $\alpha_{i_0} \neq 0$, par suite, on aura

$$x_{i_0} = -\frac{1}{\alpha_{i_0}} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^n \alpha_i x_i$$

On en déduit donc que $B \setminus \{x_{i_0}\}$ est une partie génératrice de E , avec $B \setminus \{x_{i_0}\} \subsetneq B$, ce qui contredit le fait que B est une partie génératrice

minimale, donc B est libre.

Montrons maintenant que B est un élément maximal de $\mathcal{L}$. Pour cela, soit L un élément de $\mathcal{L}$, tel que $B \subseteq L$, a-t-on $B = L$?

Supposons, par absurde, que $B \neq L$, donc il existe $x \in E$, tel que $x \in L$ et $x \notin B$. Or $x \in \text{Vect}(B)$, car B est une partie génératrice, donc, d'après le lemme précédent, $B \cup \{x\}$ est liée. Puisque $B \cup \{x\} \subseteq L$, alors L est liée, ce qui est absurde, car L est libre.

iii) $\implies$ i) Supposons que B est libre maximale et montrons que B forme une base de E . Pour cela, il suffit de montrer que $\text{Vect}(B) = E$.

Supposons, par absurde, que $\text{Vect}(B) \neq E$, soit $x \in E$, tel que $x \notin \text{Vect}(B)$, donc d'après le lemme précédent, on a

$$[x \notin \text{Vect}(B) \text{ et } B \text{ libre}] \implies B \cup \{x\} \text{ libre}$$

Ce qui est absurde, car $B \subsetneq B \cup \{x\}$ et B libre maximale. $\square$

Remarque 9

Le théorème précédent nous permet, en utilisant le lemme de Zorn, de montrer que tout espace vectoriel admet au moins une base.

1.5 Espaces vectoriels de dimension finie

1.5.1 Définition et exemples

Définition 1.5.1

*Soit E un K -espace vectoriel. On dit que E est de **dimension finie** sur K , si E possède au moins une partie génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie**.*

Exemples

1. Soit K un corps commutatif, alors pour tout entier $n \geq 1$, K^n est de dimension finie sur K .

En effet, soit $A = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$, alors A est une partie génératrice finie de K^n .

2. Pour tout corps commutatif K et pour tout entier $n \geq 1$, $K_n[X]$ est de dimension finie sur K .

$$K_n[X] = \{P \in K[X] : \deg(P) \leq n\}$$

$\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ est une partie génératrice finie de $K_n[X]$.

3. Si E est de dimension finie sur K , alors tout sous-espace vectoriel de E est aussi de dimension finie sur K . (Voir Corollaire 1.5.3)

4. Si E est de dimension finie sur K et si F est un sous-espace vectoriel de E , alors l'espace vectoriel quotient E/F est aussi de dimension finie sur K .

En effet, soit $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ une partie génératrice finie de E , alors il est facile de voir que $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\}$ est une partie génératrice finie de E/F .

5. Soient E un K -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . Si E/F et F sont de dimension finie sur K , alors E est aussi de dimension finie sur K .

En effet, soient $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\}$ une partie génératrice de E/F et $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ une partie génératrice de F . Soit $x \in E$, alors il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ éléments de K , tels que

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{x}_i$$

Donc $x - \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = \bar{0}$, par suite, $x - \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \in F$, donc il existe $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ éléments de K , tels que

$$x - \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = \sum_{j=1}^n \beta_j y_j$$

Ainsi on aura

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^n \beta_j y_j$$

On conclue que $\{x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ est une partie génératrice finie de E .

1.5.2 Théorème de la dimension finie

Lemme 1.5.1

Soient E un K -espace vectoriel, A et B deux parties de E et n un entier naturel, tels que

i) $\text{Card}(A) = n$ et $\text{Card}(B) = n + 1$.

ii) Tout élément de B est combinaison linéaire d'éléments de A ou autrement dit $B \subseteq \text{Vect}(A)$.

Alors B est liée.

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \geq 0$.

Pour $n = 0$, on a $A = \emptyset$ et $B = \{y\}$, donc $\text{Vect}(A) = \{0\}$ et comme $B \subseteq \text{Vect}(A)$, alors $y = 0$, par suite, B est liée.

Pour $n = 1$, on a $A = \{x_1\}$ et $B = \{y_1, y_2\}$ avec $y_1 = \alpha x_1$ et $y_2 = \beta x_1$, car $B \subseteq \text{Vect}(A)$. On constate que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, car sinon, on aura $y_1 = y_2 = 0$, ce qui est absurde, car $\text{Card}(B) = 2$.

$$\begin{aligned} y_1 = \alpha x_1 \text{ et } y_2 = \beta x_1 &\implies \beta y_1 - \alpha y_2 = 0 \\ &\implies \{y_1, y_2\} \text{ est lié (car } (\alpha, \beta) \neq (0, 0)) \\ &\implies B \text{ est liée} \end{aligned}$$

H.R : « Supposons que $n \geq 1$ et que le lemme est vrai pour tout entier $m < n$ ». Posons $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}\}$. Alors, par hypothèse, on a

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n, n+1\}, \quad y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j$$

Si $\forall i \in \{1, 2, \dots, n, n+1\}, \alpha_{in} = 0$, alors

$$\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subseteq \text{Vect}(\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\})$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ est liée, par suite, B est liée.

Si, maintenant, il existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, n, n+1\}$, tel que $\alpha_{i_0 n} \neq 0$, alors quitte à réordonner les éléments de B , on peut supposer que $\alpha_{n+1, n} \neq 0$. On a $y_{n+1} = \sum_{j=1}^n \alpha_{n+1, j} x_j$, avec $\alpha_{n+1, n} \neq 0$, donc on aura

$$x_n = \frac{1}{\alpha_{n+1, n}} \left(y_{n+1} - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{n+1, j} x_j \right)$$

Donc pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$y_i = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x_j + \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{n+1, n}} \left(y_{n+1} - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{n+1, j} x_j \right)$$

On en déduit que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$y_i - \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{n+1, n}} y_{n+1} = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\alpha_{ij} - \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{n+1, n}} \alpha_{n+1, j} \right) x_j$$

Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, posons $z_i = y_i - \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{n+1, n}} y_{n+1}$, alors on voit que tout élément de $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ est combinaison linéaire d'éléments de

$\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$. Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ est liée, par suite, il existe $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ éléments de K non tous nuls, tels que

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i z_i = 0$$

Donc, on aura

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i \left(y_i - \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{n+1,n}} y_{n+1} \right) = 0$$

Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, posons

$$\lambda_i = \gamma_i \text{ et } \lambda_{n+1} = -\frac{1}{\alpha_{n+1,n}} \sum_{i=1}^n \gamma_i \alpha_{in}$$

Alors $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ et on a

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i y_i = 0$$

Donc $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}\}$ est liée. □

Corollaire 1.5.1

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et A une partie génératrice finie de E . Alors pour toute partie libre L de E , on a

$$\boxed{\text{Card}(L) \leq \text{Card}(A)}$$

Démonstration. Posons $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et supposons, par absurde, que $\text{Card}(L) > \text{Card}(A)$. Soient $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$ $n + 1$ éléments de L deux à deux distincts. Puisque $E = \text{Vect}(A)$, alors on a

$$\{y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}\} \subseteq \text{Vect}(A)$$

Donc, d'après le lemme précédent, $\{y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}\}$ est liée, par suite, L est liée, ce qui est absurde, car L est libre. □

Corollaire 1.5.2

Soit E un K -espace vectoriel. Alors E est de dimension infinie, si et seulement si, E possède au moins une partie libre infinie.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que E est de dimension infinie.

Soit $x_1 \in E$ avec $x_1 \neq 0$, puisque E est de dimension infinie, alors $\text{Vect}(x_1) \neq E$. Soit $x_2 \in E$ avec $x_2 \notin \text{Vect}(x_1)$, donc $\{x_1, x_2\}$ est libre.

Comme E est de dimension infinie, alors $\text{Vect}(\{x_1, x_2\}) \neq E$.

Soit $x_3 \in E$ avec $x_3 \notin \text{Vect}(\{x_1, x_2\})$, donc $\{x_1, x_2, x_3\}$ est libre. Ainsi, par récurrence, on construit une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de E , tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la partie $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est libre. Donc on voit que $L = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ est une partie libre infinie de E .

($\Leftarrow$) Supposons que E possède une partie libre infinie L et supposons, par absurde, que E est de dimension finie. Soit A une partie génératrice finie de E , alors d'après le lemme précédent, $\text{Card}(L) \leq \text{Card}(A)$, ce qui est absurde. $\square$

Exemples

1. Pour tout corps commutatif K , $K[X]$ est un K -espace vectoriel de dimension infinie, car $L = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$ est une partie libre infinie de $K[X]$.

2. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de toutes les suites réelles est de dimension infinie, car

$$L = \{x^{(m)} : m \in \mathbb{N}\}$$

est une partie libre infinie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, où pour tout entier $m \geq 0$,

$x^{(m)} = (x_n^{(m)})_{n \geq 0}$ est la suite de $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

3. Si E possède un sous-espace vectoriel de dimension infinie, alors E est de dimension infinie. Par suite, si E est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de E est de dimension finie.

4. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, donc $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'espace vectoriel de toutes les applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, est de dimension infinie.

5. Un élément $\alpha \in \mathbb{R}$ est dit **algébrique**, s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{Q}[X]$, tel que $P(\alpha) = 0$. Si α n'est pas algébrique, on dit que α est **transcendant**. Il est facile de montrer, en utilisant le fait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable, que l'ensemble des nombres algébriques est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R}$ est non dénombrable, alors l'ensemble des nombres transcendants n'est pas vide et possède le même cardinal que $\mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre transcendant, alors par définition d'un nombre transcendant, $L = \{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \dots\}$ est une partie libre infinie de $\mathbb{R}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

Donc $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension infinie.

Remarque 10

L'ensemble des nombres transcendants est infini non dénombrable, cependant on ne connaît que peu de nombres transcendants. Par exemple π et e sont des nombres transcendants et si α est un nombre algébrique, alors d'après le théorème de Hermite-Lindemann, e^α est un nombre transcendant.

Corollaire 1.5.3

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de E est aussi de dimension finie.

Démonstration. Puisque E est de dimension finie, alors d'après le corollaire 1.5.1, toute partie libre de E est finie. Par suite, si F est un sous-espace vectoriel de E , alors toute partie libre de F est finie, donc, d'après le corollaire précédent, F est de dimension finie. $\square$

Corollaire 1.5.4

Tout espace vectoriel de dimension finie possède au moins une base.

Démonstration. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et A une partie génératrice finie de E .

Si $E = \{0\}$, alors, par convention, $B = \emptyset$ est une base de E , donc dans la suite on peut supposer que $E \neq \{0\}$

D'après le théorème de caractérisation d'une base, il suffit de montrer que E possède au moins une partie libre maximale. Pour cela, soit $\mathcal{L}$ l'ensemble de toutes les parties libres de E , alors $\mathcal{L} \neq \emptyset$, car

$$\forall x \in E, \quad x \neq 0 \implies \{x\} \in \mathcal{L}$$

Soit $\Lambda = \{\text{Card}(L) : L \in \mathcal{L}\}$, alors

i) $\Lambda \neq \emptyset$, car $1 \in \Lambda$.

ii) Λ est majorée, car $\forall L \in \mathcal{L}, \text{Card}(L) \leq \text{Card}(A)$.

Ainsi, Λ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée, donc Λ possède un plus grand élément noté m . Comme $m \in \Lambda$, alors il existe $B \in \mathcal{L}$, tel que

$\text{Card}(B) = m$ et puisque pour toute partie libre L de E , on a

$\text{Card}(L) \leq \text{Card}(B)$, alors B est une partie libre maximale de E , donc B forme une base de E . $\square$

Théorème 1.5.1 (Théorème de la dimension finie)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, alors

- i) *Toute base de E est de cardinal fini.*
- ii) *Toutes les bases de E ont même cardinal.*

Démonstration. i) Soit A une partie génératrice finie de E et soit B une base quelconque de E . Puisque B est libre, alors $\text{Card}(B) \leq \text{Card}(A)$, puisque A est finie alors B est finie.

- ii) Soient B_1 et B_2 deux bases de E . Puisque B_1 est génératrice et B_2 libre, alors

$$\text{Card}(B_2) \leq \text{Card}(B_1)$$

De la même manière on voit que $\text{Card}(B_1) \leq \text{Card}(B_2)$.

Donc $\text{Card}(B_1) = \text{Card}(B_2)$. □

Définition 1.5.2

*Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal commun à toutes les bases de E , s'appelle la **dimension** de E sur K et se note $\dim_K(E)$ ou tout simplement $\dim(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.*

Remarque 11

La dimension d'un K -espace vectoriel dépend du corps K . Par exemple on a

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1, \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}) = \infty$$

Corollaire 1.5.5

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, alors

- i) *Toute partie libre de E est de cardinal $\leq n$.*

$$L \text{ libre} \implies \text{Card}(L) \leq n$$

- ii) *Toute partie génératrice de E est de cardinal $\geq n$.*

$$A \text{ génératrice} \implies \text{Card}(A) \geq n$$

Démonstration. Soit B une base de E , alors on a $\text{Card}(B) = n$.

- i) Soit L une partie libre de E , puisque B est une partie génératrice, alors d'après le corollaire 1.5.1, on a $\text{Card}(L) \leq \text{Card}(B)$.
- ii) Soit A une partie génératrice de E , puisque B est une partie libre de E , alors d'après le corollaire 1.5.1, on a $\text{Card}(B) \leq \text{Card}(A)$. $\square$

Corollaire 1.5.6

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, alors

- i) *Toute partie libre de cardinal $= n$ est une base de E .*

$$[(L \text{ libre}) \text{ et } (\text{Card}(L) = n)] \implies L \text{ base de } E$$

- ii) *Toute partie génératrice de cardinal $= n$ est une base de E .*

$$[(A \text{ génératrice}) \text{ et } (\text{Card}(A) = n)] \implies A \text{ base de } E$$

Démonstration. i) Si L est une partie libre de cardinal $= n$, alors il est facile de voir que L est une partie libre maximale.

- ii) Si A est une partie génératrice de cardinal $= n$, alors il est facile de voir que A est une partie génératrice minimale. $\square$

1.5.3 Théorème de la base incomplète

Théorème 1.5.2

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, A une partie génératrice quelconque de E et L une partie libre de E , telle que $L \subseteq A$. Alors il existe une base B de E , telle que

$$L \subseteq B \subseteq A$$

Démonstration. On considère l'ensemble $\mathcal{A}$ de toutes les parties libres G de E , telles que $L \subseteq G \subseteq A$.

Or pour tout $G \in \mathcal{A}$, on a $\text{Card}(G) \leq \dim(E)$, donc $\mathcal{A}$ possède au moins un élément B dont le cardinal est maximal.

Supposons, par absurde, que $\text{Vect}(B) \neq E$, donc $A \not\subseteq \text{Vect}(B)$, car E est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A . Soit $x \in A$, tel que $x \notin \text{Vect}(B)$, alors on a

$$[x \notin \text{Vect}(B) \text{ et } B \text{ libre}] \implies B \cup \{x\} \text{ libre}$$

avec $B \cup \{x\} \in \mathcal{A}$ et $B \subsetneq B \cup \{x\}$, ce qui est absurde, car le cardinal de B est maximal.

Donc $\text{Vect}(B) = E$ et par suite, B est une base de E vérifiant $L \subseteq B \subseteq A$. $\square$

Corollaire 1.5.7

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie ≥ 1 . Alors

- i) *Toute partie libre de E peut-être complétée en une base de E .*
- ii) *De toute partie génératrice de E on peut extraire une base de E .*

Démonstration. i) Soit L une partie libre de E . Puisque E est une partie génératrice de E qui contient L , alors d'après le théorème précédent, il existe une base B de E , telle que,

$$L \subseteq B \subseteq E$$

- ii) Soit A une partie génératrice de E et soit $x \in A$ avec $x \neq 0$. Alors $L = \{x\}$ est une partie libre de E , telle que $L \subseteq A$, donc d'après le théorème précédent, il existe une base B de E , telle que,

$$L \subseteq B \subseteq A$$

1.5.4 Identités remarquables concernant la dimension

Proposition 1.5.1

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Alors

i) Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors on a

$$E = F \oplus G \implies \dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

ii) Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors on a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

iii) Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors on a

$$\dim(E/F) = \dim(E) - \dim(F)$$

Démonstration. i) Soient B_1 une base de F et B_2 une base de G , alors

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset, \text{ car } F \cap G = \{0\}.$$

$$B = B_1 \cup B_2 \text{ est une base de } E, \text{ car } F \cap G = \{0\} \text{ et } F + G = E. \quad \square$$

Donc on a

$$\dim(E) = \text{Card}(B) = \text{Card}(B_1) + \text{Card}(B_2) = \dim(F) + \dim(G)$$

ii) Soit H un supplémentaire de $F \cap G$ dans F , alors, d'après ce qui précède, on a

$$\dim(F) = \dim(H) + \dim(F \cap G)$$

Or, on voit facilement que $F + G = H \oplus G$, donc on aura,

$$\begin{aligned} \dim(F + G) &= \dim(H \oplus G) = \dim(H) + \dim(G) \\ &= \dim(F) - \dim(F \cap G) + \dim(G) \end{aligned}$$

iii) Soit G un supplémentaire de F dans E , alors on a

$$\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$$

Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ une base de G .

Nous allons vérifier que $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\}$ est une base de E/F .

Soit $x \in E$, alors on a $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$, donc $\bar{x} = \bar{z}$, car $\bar{y} = \bar{0}$. Comme $z \in G$, alors il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ éléments de K , tels que $z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$. Donc on aura

$$\bar{x} = \bar{z} = \overline{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_m \bar{x}_m$$

donc $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\}$ est une partie génératrice de E/F .

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K$, tels que $\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_m \bar{x}_m = \bar{0}$. Montrons que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$.

$$\begin{aligned} \alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_m \bar{x}_m = \bar{0} &\implies \overline{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m} = \bar{0} \\ &\implies \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m \in F \end{aligned}$$

Or $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m \in G$ et $F \cap G = \{0\}$, donc on a $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = 0$. Comme $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ est libre, alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, par suite $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\}$ est libre. Ainsi $\bar{B} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\}$ est une base de E/F , donc on a

$$\dim(E/F) = \text{Card}(\bar{B}) = \dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$$

Corollaire 1.5.8

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \text{et} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases}$$

Démonstration. $(\implies)$ D'après la proposition précédente.

$(\impliedby)$ Puisque $F \cap G = \{0\}$, alors d'après la proposition précédente, on aura

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$$

Donc $F + G = E$ et par conséquent, $E = F \oplus G$. □

Remarque 12

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . Alors on vérifie, par récurrence sur n , qu'on a toujours

$$\dim(F_1 + F_2 + \dots + F_n) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dots + \dim(F_n)$$

Corollaire 1.5.9

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n \iff \begin{cases} F_1 + F_2 + \dots + F_n = E \\ \text{et} \\ \dim(F_1) + \dots + \dim(F_n) = \dim(E) \end{cases}$$

Démonstration. $(\implies)$ Il suffit de montrer par récurrence sur $n \geq 2$ que $\dim(F_1) + \dim(F_2) + \dots + \dim(F_n) = \dim(E)$

D'après le corollaire précédent, la propriété est vraie pour $n = 2$

Supposons que $n > 2$ et que la propriété est vraie pour tout $m < n$.

Puisque $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$, alors $(F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1}) \cap F_n = \{0\}$, donc

$$\dim((F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1}) + F_n) = \dim(F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1}) + \dim(F_n)$$

Or $F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1}$ est une somme directe, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\dim(F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1}) = \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dots + \dim(F_{n-1})$$

Puisque $E = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ alors on a le résultat.

$(\impliedby)$ Il suffit de vérifier que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, F_i \cap (F_{i+1} + \dots + F_n) = \{0\}$$

Pour cela, supposons, par absurde, qu'il existe $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, tel que

$$F_i \cap (F_{i+1} + \dots + F_n) \neq \{0\}$$

Donc $\dim(F_i \cap (F_{i+1} + \dots + F_n)) \neq 0$, par suite, on aura

$$\dim(F_i + F_{i+1} + \dots + F_n) < \dim(F_i) + \dim(F_{i+1} + \dots + F_n) \quad (*)$$

D'autre part, pour $i \neq 1$, on a

$$\dim(F_1 + F_2 + \dots + F_n) \leq \dim(F_1 + F_2 + \dots + F_{i-1}) + \dim(F_i + \dots + F_n)$$

Donc d'après $(*)$, on aura

$$\dim(F_1 + F_2 + \dots + F_n) < \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dots + \dim(F_n)$$

Ce qui est absurde, car on a

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = E \quad \text{et} \quad \dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dots + \dim(F_n)$$

1.6 Exercices

Exercice 1

On munit $\mathbb{R}_+^*$ de la loi interne notée $\oplus$ et définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \oplus y = xy$$

et d'une loi externe définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda \cdot x = x^\lambda$$

Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On munit $(E^2, +)$ de la loi externe suivante,

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times E^2 &\longrightarrow E^2 \\ (\lambda, (x, y)) &\longmapsto \lambda \cdot (x, y) \end{aligned}$$

où pour $\lambda = a + ib$, on a $\lambda \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay)$.

Montrer que $(E^2, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Exercice 3

Soient $(E, +)$ un groupe commutatif et p un nombre premier.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que E soit un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel.

Exercice 4

On note F l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), tels que

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz = 0$$

Est-ce que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$?

Exercice 5

Soient E un K -espace vectoriel, F , G et H trois sous-espaces vectoriels de E .

1. Montrer que

$$H \subseteq F \cup G \implies H \subseteq F \text{ ou } H \subseteq G$$

2. Comparer les sous-espaces vectoriels suivants :

a) $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.

b) $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$.

3. Montrer que

$$F \cap (G + F \cap H) = (F \cap G) + (F \cap H)$$

4. Montrer que

$$G \subseteq F \implies [F \cap (G + H) = G + (F \cap H)]$$

Exercice 6

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, soit $F_n = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq n \implies f(x) = 0\}$.

- a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- b) Déterminer $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.
- c) Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 7

Soit E un K -espace vectoriel. On désigne par $\mathcal{V}$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de E ordonné par inclusion.

- a) Montrer que $\mathcal{V}$ possède un plus petit et un plus grand élément.
- b) Soient F et G deux éléments de $\mathcal{V}$. Montrer que $\{F, G\}$ possède un majorant et un minorant dans $\mathcal{V}$, que l'on déterminera.

Exercice 8

Soient F , G et H les parties de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{aligned} F &= \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0\}, \\ G &= \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 0\}, \\ \text{et } H &= \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} - 3u_n = 0\}. \end{aligned}$$

Déterminer $F \cap G$, $F \cap H$ et $G \cap H$.

Exercice 9

Soient E un K -espace vectoriel, F , G et H trois sous-espaces vectoriels de E , tels que

$$F \cap G = F \cap H, \quad F + G = F + H \quad \text{et} \quad G \subseteq H$$

Montrer que $G = H$. Sur des exemples bien choisis, montrer que cette égalité peut devenir fausse lorsque une au moins des trois hypothèses manque.

Si $F \oplus G = F \oplus H$ est-ce que $G = H$?

Exercice 10

Soient $A \in \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] : A \text{ divise } P\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres réels deux à deux distincts et soit F la partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par

$$F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n) = 0\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 12

Soit K un corps commutatif. Pour chaque $a \in K$, on pose

$$E_a = \{P \in K[X] : P(a) = 0\}$$

Montrer que

$$\forall a \in K, \forall b \in K, a \neq b \implies E_a + E_b = K[X]$$

La somme est-elle directe ?

Exercice 13

Soient E, F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par

$$E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0\},$$

$$F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = 0\},$$

$$\text{et } G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 2u_n = 0\}$$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E et que $E = F \oplus G$.

Exercice 14

Soient E un K -espace vectoriel, $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E , tels que $F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_n$. Pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, soit G_j un supplémentaire de F_j dans F_{j+1} . Montrer que la somme $G_1 + G_2 + \dots + G_{n-1}$ est directe et que $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_{n-1}$ est un supplémentaire de F_1 dans E .

Exercice 15

Soient E un K -espace vectoriel, A et B deux parties quelconques de E . Comparer les parties de E suivantes :

- a) $\text{Vect}(A \cap B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.
- b) $\text{Vect}(A \cup B)$ et $\text{Vect}(A) \cup \text{Vect}(B)$.
- c) $\text{Vect}(A \cup B)$ et $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

Exercice 16

Soit E un K -espace vectoriel quelconque.

- a) Soient x, y et z trois éléments de E . Montrer que $[\text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(x, z)]$ si et seulement si, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in K^3$, tel que

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \quad \text{et} \quad \beta\gamma \neq 0$$

- b) Soient F un sous-espace vectoriel de E , y et z deux éléments de E . Montrer que $F + \text{Vect}(y) = F + \text{Vect}(z)$, si et seulement si, il existe $x \in F$ et il existe $(\alpha, \beta) \in K^2$, tels que

$$x + \alpha y + \beta z = 0 \quad \text{et} \quad \alpha\beta \neq 0$$

Exercice 17

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient L_1 et L_2 les parties de E définies par

$$L_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{et} \quad L_2 = \{x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n + x_1\}$$

Montrer que

- a) Si n est pair, alors L_2 est liée.
b) Si n est impair, alors

$$L_1 \text{ est libre} \iff L_2 \text{ est libre}$$

Exercice 18

Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on désigne par f_a l'élément de E défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = |x - a|$$

Montrer que $\{f_a : a \in \mathbb{R}\}$ est une partie libre de E .

Exercice 19

Soit K un corps commutatif.

1. Soit $P_0, P_1, \dots, P_n$ des polynômes de $K[X]$, tel que $\deg(P_k) = k$, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est libre.
2. Soit $P \in K[X]$, avec $\deg(P) = n$. Montrer que $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est libre.

Exercice 20

Soient K un corps commutatif et F un sous-espace vectoriel de $K_n[X]$, tel que

$$\forall P \in F \subseteq \{0\}, \forall Q \in F \subseteq \{0\}, \quad \deg(P) = \deg(Q)$$

Montrer que $\dim(F) = 1$.

Exercice 21

Soit K un corps commutatif, P un polynôme non nul de $K[X]$ et (P) l'idéal engendré par P . Montrer que $K[X]/(P)$ est un K -espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.

Exercice 22

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$.

1. Si H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts de E . Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.
2. Si H est un hyperplan de E et si F est un sous-espace vectoriel de E , tel que $F \not\subseteq H$.
Déterminer la dimension de $F \cap H$.
3. Soient $H_1, H_2, \dots, H_m$ des hyperplans de E . Montrer que

$$\dim(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m) \geq n - m$$

Exercice 23

Dans chacun des cas suivant, montrer que E est un espace vectoriel et déterminer une base de E .

1. $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(X^2) = X^2 P(X)\}$.
2. $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(-1) = P(0)\}$.
3. $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y - z - t = 0\}$.
4. $E = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit E l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, telles que

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, f \text{ est constante sur } \left] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right[$$

Exercice 24

Soient E un K -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E , tels que $\dim(F) = \dim(G)$. Montrer que F et G possèdent un supplémentaire commun dans E .

Exercice 25

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour chaque $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, on définit la partie F_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$P \in F_i \iff [\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}, j \neq i \implies P(j) = 0]$$

Montrer que pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, F_i est un sous-espace vectoriel de E et que

$$E = F_0 \oplus F_1 \oplus \dots \oplus F_n$$

Exercice 26

Soient E un K -espace vectoriel, G un sous-espace vectoriel de E et $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de sous-espaces vectoriels de E .

a) On suppose G de dimension finie. Montrer que

$$\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) + G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_n + G)$$

b) Montrer, par un contre exemple, que la propriété précédente ne subsiste plus dans le cas où G est de dimension infinie.

1.7 Solutions des exercices**Exercice 1**

On sait que $\mathbb{R}_+^*$ muni de la multiplication est un groupe commutatif et comme la loi $\oplus$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, par $x \oplus y = xy$, alors $(\mathbb{R}_+^*, \oplus)$ est un groupe commutatif. La loi externe sur $\mathbb{R}_+^*$ est définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par $\lambda \cdot x = x^\lambda$, donc on a

i) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 \cdot x = x^1 = x$.

ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lambda \cdot (x \oplus y) = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = x^\lambda \oplus y^\lambda = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

iii) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(\alpha + \beta) \cdot x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = (\alpha \cdot x) \oplus (\beta \cdot x)$$

iv) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(\alpha\beta) \cdot x = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha = \alpha \cdot (x^\beta) = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$$

Ainsi, on voit que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 2

E est $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, donc $(E, +)$ est un groupe commutatif, par suite E^2 muni de la loi produit est un groupe commutatif.

La loi externe sur E^2 est définie pour $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $\lambda = a + ib$, et $(x, y) \in E^2$, par $\lambda \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay)$, donc on a

i) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $1 \cdot (x, y) = (x, y)$, car $1 = 1 + i0$.

- ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $\lambda = a + ib$, et pour tout $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E^2$, on a

$$\begin{aligned}\lambda \cdot ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= \lambda \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (a(x_1 + x_2) - b(y_1 + y_2), b(x_1 + x_2) + a(y_1 + y_2)) \\ &= (ax_1 - by_1 + ax_2 - by_2, bx_1 + ay_1 + bx_2 + ay_2) \\ &= (ax_1 - by_1, bx_1 + ay_1) + (ax_2 - by_2, bx_2 + ay_2) \\ &= \lambda \cdot (x_1, y_1) + \lambda \cdot (x_2, y_2)\end{aligned}$$

- iii) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, avec $\alpha = a + ib$ et $\beta = c + id$, et pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot (x, y) &= ((a + c)x - (b + d)y, (b + d)x + (a + c)y) \\ &= (ax - by, bx + ay) + (cx - dy, dx + cy) \\ &= \alpha \cdot (x, y) + \beta \cdot (x, y)\end{aligned}$$

- iv) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, avec $\alpha = a + ib$ et $\beta = c + id$, et soit $(x, y) \in E^2$. Comme $\alpha\beta = (ac - bd) + i(ad + bc)$, alors on a

$$\begin{aligned}(\alpha\beta) \cdot (x, y) &= ((ac - bd)x - (ad + bc)y, (ad + bc)x + (ac - bd)y) \\ &= (a(cx - dy) - b(dx + cy), b(cx - dy) + a(dx + cy)) \\ &= \alpha \cdot (cx - dy, dx + cy) = \alpha \cdot (\beta \cdot (x, y))\end{aligned}$$

On voit alors que $(E^2, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Exercice 3

Supposons que E est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel, alors en particulier, pour tout $x \in E$, avec $x \neq 0$, on a $\bar{0} \cdot x = 0_E$. Or, on a $\bar{0} = \bar{p} = \underbrace{\bar{1} + \bar{1} + \cdots + \bar{1}}_{p \text{ fois}}$, avec

$(\bar{1} + \bar{1} + \cdots + \bar{1}) \cdot x = px$. Comme p est premier, alors tout $x \in E$, avec $x \neq 0$, est d'ordre p dans le groupe $(E, +)$.

Réciproquement, supposons que tout élément non nul de E est d'ordre p et montrons que E est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel. Pour cela, pour tout $(\bar{m}, x) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on fait correspondre $\bar{m} \cdot x$, avec $\bar{m} \cdot x = mx$, alors cette correspondance définit bien une application. En effet, si $\bar{m} = \bar{n}$, alors p divise $m - n$ et comme $px = 0$, alors $(m - n)x = 0$, donc $mx = nx$, par suite, on a $\bar{m} \cdot x = \bar{n} \cdot x$. On a donc une loi externe sur E vérifiant les axiomes suivants :

- i) Pour tout $x \in E$, on a $\bar{1} \cdot x = 1x = x$.
ii) Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x, y \in E$, on a

$$\bar{m} \cdot (x + y) = m(x + y) = mx + my = \bar{m} \cdot x + \bar{m} \cdot y$$

iii) Pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in E$, on a

$$(\overline{m} \times \overline{n}) \cdot x = \overline{mn} \cdot x = (mn)x = m(nx) = \overline{m} \cdot (\overline{n} \cdot x)$$

iv) Pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in E$, on a

$$(\overline{m} + \overline{n}) \cdot x = \overline{m+n} \cdot x = (m+n)x = mx + nx = \overline{m} \cdot x + \overline{n} \cdot x$$

On en déduit donc que E est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel.

Exercice 4

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz\}$. On a $(2, i, -i) \in F$ et $(2, -i, i) \in F$, mais $(2, i, -i) + (2, -i, i) = (4, 0, 0)$, avec $(4, 0, 0) \notin F$, donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$.

Dans le cas de $\mathbb{R}^3$, on remarque d'abord que

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz = (x+y+z)^2 - (y+z)^2 + 2y^2 + 2z^2 = (x+y+z)^2 + (y-z)^2$$

Donc, on aura

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz = 0 \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Donc dans ce cas, on voit facilement que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5

1. Montrons que si $H \subseteq F \cup G$ alors $H \subseteq F$ ou $H \subseteq G$. Supposons par l'absurde que $H \subseteq F \cup G$ et que $H \not\subseteq F$ et $H \not\subseteq G$, donc il existe $x \in H$ tel que $x \notin F$ et il existe $y \in H$, tel que $y \notin G$.

On a $x, y \in H$, $H \subseteq F \cup G$, $x \notin F$ et $y \notin G$, donc $x \in G$ et $y \in F$. Comme H est un sous-espace vectoriel, alors $x+y \in H$, donc $x+y \in F$ ou $x+y \in G$. Si $x+y \in F$, alors tenant compte que $y \in F$, on aura $x \in F$ ce qui est absurde, car $x \notin F$, si $x+y \in G$ on voit de la même manière que $y \in G$ ce qui est absurde. Donc on a $H \subseteq F$ ou $H \subseteq G$.

2. a) Il est clair qu'on a toujours $F \cap G + F \cap H \subseteq F \cap (G + H)$, par contre l'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie. Par exemple, soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \text{Vect}(e_1 + e_2)$, $G = \text{Vect}(e_1, e_3)$ et $H = \text{Vect}(e_2, e_3)$, alors on $F \cap (G + H) = F$ et $F \cap G + F \cap H = \{0\} + \{0\} = \{0\}$.

- b) On a $F \subseteq (F + G) \cap (F + H)$ et $G \cap H \subseteq (F + G) \cap (F + H)$, donc $F + G \cap H \subseteq (F + G) \cap (F + H)$. Cependant, l'inclusion dans l'autre sens n'est pas toujours vraie, par exemple, soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \text{Vect}(e_1)$, $G = \text{Vect}(e_1, e_3)$ et $H = \text{Vect}(e_2)$, alors il est facile de voir que $F + G \cap H = \text{Vect}(e_1)$ et $(F + G) \cap (F + H) = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

3. Montrons que $F \cap (G + F \cap H) = (F \cap G) + (F \cap H)$.

On a $F \cap G \subseteq F$ et $F \cap H \subseteq F$, donc $(F \cap G) + (F \cap H) \subseteq F$, on a aussi $F \cap G \subseteq G$, donc $(F \cap G) + (F \cap H) \subseteq G + (F \cap H)$, par suite, on a $(F \cap G) + (F \cap H) \subseteq (F \cap G) + (F \cap H)$.

Réciproquement, soit $x \in F \cap (G + F \cap H)$, alors $x \in F$ et $x = y + z$, avec $y \in G$ et $z \in F \cap H$, donc $x - z \in G$ et on a aussi $x - z \in F$, par conséquent, on a $x - z \in F \cap G$ et comme $z \in F \cap H$, alors $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$.

4. Montrons que si $G \subseteq F$, alors $F \cap (G + H) = G + F \cap H$.

On a $G \subseteq F$ et $F \cap H \subseteq F$, donc $G + F \cap H \subseteq F$, on a aussi $F \cap H \subseteq H$, donc $G + F \cap H \subseteq G + H$, par suite, on a $G + F \cap H \subseteq F \cap (G + H)$.

Réciproquement, soit $x \in F \cap (G + H)$, donc $x \in F$ et $x = y + z$, avec $y \in G$ et $z \in H$. Comme $G \subseteq F$ et $y \in G$, alors $x - y \in F$, donc $z \in F \cap H$, par suite $x \in G + F \cap H$.

Exercice 6

a) Il est facile de vérifier que F_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

b) Soient $f \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$, $x \in \mathbb{R}$ et $n = \lfloor |x| \rfloor$ la partie entière de $|x|$. On a $f \in F_n$ et $|x| \geq n$, donc $f(x) = 0$ et ainsi, on voit que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{0\}$.

c) Pour montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{0\}$ est un sous-espace vectoriel, il suffit de montrer que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Soit $f \in F_n$ et soit $x \in \mathbb{R}$, tel que $|x| \geq n + 1$, alors on a $|x| \geq n$ et comme $f \in F_n$, alors $f(x) = 0$, par suite, on a $f \in F_{n+1}$.

Exercice 7

a) $\{0_E\}$ et E sont respectivement le plus petit élément et le plus grand élément de $\mathcal{V}$.

b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E , alors $F \cap G$ est un minorant de $\{F, G\}$ et $F + G$ est un majorant de $\{F, G\}$.

Exercice 8

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, avec $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors on a

$$\begin{aligned} u \in F \cap G &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0 \\ u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 0 \end{cases} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n \text{ et } u_{n+2} = 4u_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n \end{aligned}$$

Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite dont le terme général est défini par $v_n = (-2)^n$, alors $v \in F \cap G$ et pour tout $u \in F \cap G$, on a $u = u_0 v$, donc $F \cap G = \text{Vect}(v)$.

$$\begin{aligned} u \in F \cap H &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0 \\ u_{n+2} - 2u_{n+1} - 3u_n = 0 \end{cases} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n \text{ et } u_{n+2} = \frac{7}{3}u_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0 \end{aligned}$$

Donc $F \cap H = \{0\}$.

$$\begin{aligned} u \in G \cap H &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 0 \\ u_{n+2} - 2u_{n+1} - 3u_n = 0 \end{cases} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n \text{ et } u_{n+2} = 9u_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n \end{aligned}$$

Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite dont le terme général est défini par $v_n = 3^n$, alors $v \in G \cap H$ et pour tout $u \in G \cap H$, on a $u = u_0 v$, donc $G \cap H = \text{Vect}(v)$.

Exercice 9

Supposons que $F \cap G = F \cap H$, $F + G = F + H$ et $G \subseteq H$ et montrons que $G = H$. Soit $x \in H$, comme $F + G = F + H$, alors $x \in F + G$, donc $x = f + g$, avec $f \in F$ et $g \in G$. On a $G \subseteq H$, donc $x - g \in H$ et par suite $x - g \in F \cap H$ et puisque $F \cap G = F \cap H$, alors $x - g \in F \cap G$, donc $x - g \in G$. Comme $g \in G$ et $x - g \in G$, alors $x \in G$.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \text{Vect}(e_1)$, $G = \text{Vect}(e_2, e_3)$ et $H = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_1 + e_3)$, alors on a $F \cap G = F \cap H = \{0\}$ et

$F + G = F + H = \mathbb{R}^3$, mais $H \neq G$.

D'après l'exemple précédent, on a $F \oplus G = F \oplus H$, avec $G \neq H$.

Exercice 10

On a $F = \{P \in \mathbb{R}[X] : A \text{ divise } P\} = \{QA : Q \in \mathbb{R}[X]\}$, donc il est facile de vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors en faisant la division euclidienne de P par A , on aura $P = QA + R$, avec $\deg(R) < \deg(A)$, par suite, si on pose $n = \deg(A) - 1$, alors $R \in \mathbb{R}_n[X]$, où $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) \leq n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Donc si on pose $G = \mathbb{R}_n[X]$, alors on voit facilement que $F \cap G = \{0\}$ et $\mathbb{R}[X] = F + G$, donc $\mathbb{R}[X] = F \oplus G$.

Exercice 11

$F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n) = 0\}$, où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des réels deux à deux distincts. Il est aisé de vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on

considère pour chaque $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, la fonction polynôme de Lagrange L_i ,

défini par $L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - a_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)}$ et on pose $G = \text{Vect}(\{L_0, L_1, \dots, L_n\})$. Soit

$f \in F \cap G$, alors $f \in F$ et il existe $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, tel que $f = \sum_{j=0}^n \alpha_j L_j$.

Pour chaque $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a $L_i(a_j) = 0$, si $j \neq i$ et $L_i(a_i) = 1$, donc $f(a_i) = \alpha_i$. Puisque $f \in F$, alors pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a $f(a_i) = 0$, par suite on voit que $f = 0$ et donc $F \cap G = \{0\}$.

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et soit $g = f - \sum_{j=0}^n f(a_j) L_j$, alors pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a $g(a_i) = 0$, donc $g \in F$, par conséquent, on a $f \in F + G$. Ainsi on a établi que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F \oplus G$.

Exercice 12

Il est clair que E_a est un sous-espace vectoriel de $K[X]$.

Si $a \neq b$, alors $X - a$ et $X - b$ sont premiers entre eux, donc d'après Bezout, il existe $U, V \in K[X]$, tel que $U(X - a) + V(X - b) = 1$. Soit $P \in K[X]$ et soient $P_1 = U(X - a)P$ et $P_2 = V(X - b)P$, alors on a $P_1 \in E_a$, $P_2 \in E_b$ et $P = P_1 + P_2$, donc $K[X] = E_a + E_b$.

On a $(X - a)(X - b) \in E_a \cap E_b$, donc $E_a \cap E_b \neq \{0\}$ et par conséquent, la somme $E_a + E_b$ n'est pas directe.

Exercice 13

Il est facile de voir que E , F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc il suffit de montrer que $F \subseteq E$ et $G \subseteq E$. Soit $u \in F$, alors on a $u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = -2u_{n+1} - 2u_n = -2(u_{n+1} + u_n) = 0$, car $u_{n+1} + u_n = 0$, donc $u \in E$. Soit $u \in G$, alors on a $u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = u_{n+1} - 2u_n = 0$, car $u_{n+2} = 2u_{n+1}$, donc $u \in E$. Ainsi, F et G sont des sous-espaces vectoriels de E . Soit $u \in F \cap G$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = -u_n$ et $u_{n+1} = 2u_n$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 0$, par suite, $u = 0$, donc $F \cap G = \{0\}$.

Soit $u \in E$ et soient v et w les suites définies par $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ et $w_n = u_{n+1} + u_n$. Puisque $u \in E$, alors on a $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$, donc on a

$$v_{n+1} + v_n = (u_{n+2} - 2u_{n+1}) + (u_{n+1} - 2u_n) = u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0$$

et on a aussi

$$w_{n+1} - 2w_n = (u_{n+2} + u_{n+1}) - 2(u_{n+1} + u_n) = u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0$$

Il en résulte donc que $v \in F$, $w \in G$ et $u = -\frac{1}{3}v + \frac{1}{3}w$, donc $u \in F + G$ et par suite $E = F + G$.

Exercice 14

Montrons que la somme $G_1 + G_2 + \dots + G_{n-1}$ est directe.

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in G_1 \times G_2 \times \dots \times G_{n-1}$, tel que $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = 0$, on doit montrer que $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$. On a $x_1, \dots, x_{n-2} \in F_{n-1}$, car $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_{n-1}$, et comme $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = 0$, alors $x_{n-1} \in F_{n-1}$, donc $x_{n-1} \in F_{n-1} \cap G_{n-1}$, avec $F_{n-1} \cap G_{n-1} = \{0\}$, donc $x_{n-1} = 0$. Par suite, on a $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} = 0$, donc de la même manière on montre que $x_{n-2} = 0$. Ainsi, par induction, on montre que $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$. Puisque pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on a $F_{i+1} = F_i \oplus G_i$, alors on a

$$\begin{aligned} F_1 \oplus G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_{n-1} &= F_2 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_{n-1} \\ &= F_3 \oplus G_3 \oplus \dots \oplus G_{n-1} \\ &\vdots \\ &= F_{n-1} \oplus G_{n-1} = F_n = E \end{aligned}$$

Exercice 15

On a $A \cap B \subseteq A$ et $A \cap B \subseteq B$, donc $\text{Vect}(A \cap B) \subseteq \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$. L'inclusion dans l'autre sens n'est pas toujours vraie, par exemple, soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $A = \{e_1, e_2\}$ et $B = \{e_1 + e_2, e_3\}$, alors on a $A \cap B = \emptyset$, donc $\text{Vect}(A \cap B) = \{0\}$ et on a $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B) = \text{Vect}(e_1 + e_2)$.

On a $A \subseteq A \cup B$ et $B \subseteq A \cup B$, donc $\text{Vect}(A) \cup \text{Vect}(B) \subseteq \text{Vect}(A \cup B)$. L'inclusion réciproque est vraie, si et seulement si, $\text{Vect}(A) \subseteq \text{Vect}(B)$ ou $\text{Vect}(B) \subseteq \text{Vect}(A)$. En effet, supposons que $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) \cup \text{Vect}(B)$, alors $\text{Vect}(A) \cup \text{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel, donc $\text{Vect}(A) \subseteq \text{Vect}(B)$ ou $\text{Vect}(B) \subseteq \text{Vect}(A)$. Réciproquement, supposons, par exemple, que $\text{Vect}(B) \subseteq \text{Vect}(A)$, alors on a $A \cup B \subseteq \text{Vect}(A)$, donc $\text{Vect}(A \cup B) \subseteq \text{Vect}(A)$. Il est facile de voir que $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

Exercice 16

- a) Supposons que $\text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(x, z)$ et montrons qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in K$, tel que $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ et $\beta\gamma \neq 0$.

Si (x, y) est lié, alors (y, z) est aussi lié, car $\text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(x, z)$, donc il existe $a \in K$, tel que $z = by$, avec $b \neq 0$, car $z \neq 0$, par suite, on a $by = z = 0$. Il suffit donc de prendre $\alpha = 0$, $\beta = b$ et $\gamma = -1$.

Si (x, y) est libre, comme $\text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(x, z)$, alors (y, z) est aussi libre et $y \in \text{Vect}(x, z)$, donc il existe $a, b \in K$, tel que $y = ax + bz$, avec $b \neq 0$, car (x, y) est libre, donc $ax - y + bz = 0$. Il suffit de prendre $\alpha = a$, $\beta = -1$ et $\gamma = b$, alors $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ et $\beta\gamma \neq 0$, car $b \neq 0$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in K$, tel que

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \quad \text{et} \quad \beta\gamma \neq 0$$

alors on a $y = -\frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma z)$ et $z = -\frac{1}{\gamma}(\alpha x + \beta y)$, donc on aura $\text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(x, z)$.

Exercice 17

- a) On suppose n pair, avec $n = 2p$, on pose $v_k = x_k + x_{k+1}$ pour $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et $v_n = x_n + x_1$, alors on a

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} v_k = (x_1 + x_2) - (x_2 + x_3) + \dots + (x_{2p-1} + x_{2p}) - (x_{2p} + x_1) = 0$$

Donc $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est lié, par suite L_2 est lié.

- b) On suppose que n est impair, avec $n = 2p+1$, et que L_1 est libre. Pour montrons que L_2 est libre, soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, tel que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

on doit alors montrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Pour cela, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k &= \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (x_k + x_{k+1}) + \alpha_n (x_n + x_1) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_n) x_1 + \sum_{k=2}^n (\alpha_{k-1} + \alpha_k) x_k \end{aligned}$$

Puisque L_1 est libre, alors on aura

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_{2p+1} = 0 & (1) \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 & (2) \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 & (3) \\ \vdots \\ \alpha_{2p} + \alpha_{2p+1} = 0 & (2p+1) \end{cases}$$

On voit alors que $(1) + (2) - (3) + \dots + (2p) - (2p+1) = 2\alpha_1$, donc $\alpha_1 = 0$, par suite, on a $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Réciproquement, supposons que L_2 est libre et montrons que L_1 est libre. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, tel que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$.

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} v_k = (x_1 + x_2) - (x_2 + x_3) + \dots + (x_{2p+1} + x_1) = 2x_1$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2 + v_3 - \cdots - v_{2p} + v_{2p+1}) & (1) \\ x_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 - v_3 + v_4 - \cdots + v_{2p} - v_{2p+1}) & (2) \\ x_3 = \frac{1}{2}(-v_1 + v_2 + v_3 - v_4 + \cdots - v_{2p} + v_{2p+1}) & (3) \\ x_4 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2 + v_3 + v_4 - \cdots + v_{2p} - v_{2p+1}) & (4) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{2p} = \frac{1}{2}(v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \cdots + v_{2p-1} + v_{2p} - v_{2p+1}) & (2p) \\ x_{2p+1} = \frac{1}{2}(-v_1 + v_2 - v_3 + v_4 - \cdots - v_{2p-1} + v_{2p} + v_{2p+1}) & (2p+1) \end{cases}$$

On a $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$, donc en substituant les x_i à leurs valeurs et tenant compte que L_2 est libre, on aura

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \cdots + \alpha_{2p} - \alpha_{2p+1} & (1) \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \cdots - \alpha_{2p} + \alpha_{2p+1} & (2) \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \cdots + \alpha_{2p} - \alpha_{2p+1} & (3) \\ \vdots \\ \vdots \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \cdots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p} - \alpha_{2p+1} & (2p) \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \cdots - \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p} + \alpha_{2p+1} & (2p) \end{cases}$$

Il en résulte donc qu'on a

$$\begin{cases} (1) + (2) \implies \alpha_2 = 0 \\ (2) + (3) \implies \alpha_3 = 0 \\ \vdots \\ (2p) + (2p+1) \implies \alpha_{2p} = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on a $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2p+1} = 0$ et par suite L_1 est libre.

Exercice 18

1. Soit $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts et soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, tel que $\alpha_1 f_{a_1} + \alpha_2 f_{a_2} + \cdots + \alpha_n f_{a_n} = 0$. Quitte à réordonner les a_i , on peut supposer que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, donc pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et pour tout $x \in]a_k, a_{k+1}[$, on a

$$\alpha_1(x - a_1) + \cdots + \alpha_k(x - a_k) - \alpha_{k+1}(x - a_{k+1}) - \cdots - \alpha_n(x - a_n) = 0$$

Ainsi, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \cdots - \alpha_n = 0 & (1) \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \cdots - \alpha_n = 0 & (2) \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots - \alpha_n = 0 & (3) \\ \vdots \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} - \alpha_n = 0 & (n-1) \end{cases}$$

On en déduit donc que

$$\begin{cases} (1) - (2) \implies \alpha_2 = 0 \\ (1) - (3) \implies \alpha_3 = 0 \\ \vdots \\ (1) - (n-1) \implies \alpha_{n-1} = 0 \end{cases}$$

par suite, on $\alpha_1 - \alpha_n = 0$ et pour tout $x \in]a_n, +\infty[$, on a $\alpha_1(x - a_1) + \alpha_n(x - a_n) = 0$, donc $\alpha_1 + \alpha_n = 0$. par conséquent, on aura $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, donc $\{f_a : a \in \mathbb{R}\}$ est libre.

Exercice 19

1. Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, tel que $\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = 0$, on doit montrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Pour chaque $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on pose $P_k = a_{0,k} + a_{1,k}X + \cdots + a_{k,k}X^k$, avec $a_{k,k} \neq 0$, alors on a $P_k^{(k)} = k!a_{k,k}$ et $P_k^{(j)} = 0$, pour $j \geq k+1$, donc on a

$$\begin{aligned} \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = 0 &\implies (\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n)^{(n)} = 0 \\ &\implies n!a_{n,n}\alpha_n = 0 \end{aligned}$$

donc $\alpha_n = 0$, car $a_{n,n} \neq 0$, donc on a $\alpha_0 P_0 + \cdots + \alpha_{n-1} P_{n-1} = 0$, par suite, on a aussi

$$\begin{aligned} \alpha_0 P_0 + \cdots + \alpha_{n-1} P_{n-1} = 0 &\implies (\alpha_0 P_0 + \cdots + \alpha_{n-1} P_{n-1})^{(n-1)} = 0 \\ &\implies (n-1)!a_{n-1,n-1}\alpha_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

donc $\alpha_{n-1} = 0$, car $a_{n-1,n-1} \neq 0$. Ainsi, par induction, on montre que $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

2. P est un polynôme de degré n , donc pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a $\deg(P^{(n-k)}) = k$, donc si on pose $P_k = P^{(n-k)}$, alors d'après la question précédente, $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est libre.

Exercice 20

On suppose que $\deg(P) = n$ pour tout $P \in F$, avec $P \neq 0$. Soit $P \in F$ un polynôme non nul, tel que $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, avec $a_n \neq 0$ et $Q \in F$, avec $Q \neq 0$ et $Q = b_0 + b_1X + \dots + b_nX^n$, avec $b_n \neq 0$.

On a $\deg\left(\frac{1}{a_n}P - \frac{1}{b_n}Q\right) \leq n-1$ et $\frac{1}{a_n}P - \frac{1}{b_n}Q \in F$, donc $(\frac{1}{a_n}P - \frac{1}{b_n}Q = 0$, par suite, on a $Q = \frac{b_n}{a_n}P$. Il en résulte que $F = \text{Vect}(P)$, donc $\dim(F) = 1$.

Exercice 21

Soit $A \in K[X]/P$, en effectuant la division euclidienne de A par P , on aura $A = QP + R$, avec $\deg(R) < \deg(P)$. On a $QP \in (P)$, donc $\overline{QP} = \bar{0}$, par suite, on a $\bar{A} = \bar{R}$. Si on suppose $\deg(P) = n$, alors $\deg(R) \leq n-1$, par suite, il existe $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in K$, tel que $R = \alpha_0 + \alpha_1X + \dots + \alpha_{n-1}X^{n-1}$, donc $\bar{A} = \alpha_0\bar{1} + \alpha_1\bar{X} + \dots + \alpha_{n-1}\bar{X}^{n-1}$. On voit donc que $\{\bar{1}, \bar{X}, \dots, \bar{X}^{n-1}\}$ est une partie génératrice finie de $K[X]/P$, donc $K[X]/P$ est de dimension finie.

Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in K$, tel que $\alpha_0\bar{1} + \alpha_1\bar{X} + \dots + \alpha_{n-1}\bar{X}^{n-1} = \bar{0}$. On pose $Q = \alpha_0 + \alpha_1X + \dots + \alpha_{n-1}X^{n-1}$, alors on a $\bar{Q} = \bar{0}$, donc $Q \in (P)$, par suite, P divise Q , avec $\deg(Q) < \deg(P)$, donc $Q = 0$, par conséquent, on a $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. On voit donc que $(\bar{1}, \bar{X}, \dots, \bar{X}^{n-1})$ est une base de $K[X]/(P)$, donc $\dim(K[X]/(P)) = n$.

Exercice 22

1. H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts de E , donc $H_1 + H_2 = E$, par suite, $\dim(H_1 + H_2) = n$. D'autre part, on a

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2)$$

Comme $\dim(H_1) = \dim(H_2) = n-1$, donc $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$.

2. On a $F \not\subseteq H$ et H un hyperplan de E , donc $H + F = E$, par suite, $\dim(H + F) = n$. On a $\dim(H + F) = \dim(H) + \dim(F) - \dim(H \cap F)$ et comme $\dim(H) = n-1$, alors on en déduit que $\dim(F \cap H) = \dim(F) - 1$.

3. On procède par récurrence sur m , avec $m \geq 2$.

Pour $m = 2$, d'après la question 1), on a $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$, donc $\dim(H_1 \cap H_2) \geq n-2$.

Supposons que $\dim(\bigcap_{i=1}^m H_i) \geq n-m$. Soient $H_1, H_2, \dots, H_{m+1}$ des hyperplans de E . Si $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m \subseteq H_{m+1}$, alors on a

$$H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m \cap H_{m+1} = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m$$

donc d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\dim(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m \cap H_{m+1}) \geq n-m \geq n-(m+1)$$

Si $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m \not\subseteq H_{m+1}$, alors d'après la question 2), on a

$$\dim(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m \cap H_{m+1}) = \dim(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m) - 1$$

Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\dim(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m \cap H_{m+1}) \geq n - (m + 1)$$

Exercice 23

1. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(X^2) = X^2P(X)\}$ et soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, avec $P = a + bX + cX^2 + dX^3$, alors on a

$$\begin{aligned} P \in E &\iff a + bX^2 + cX^4 + dX^6 = aX^2 + bX^3 + cX^4 + dX^5 \\ &\iff a = 0, b = 0 \text{ et } d = 0 \\ &\iff P = cX^2 \end{aligned}$$

On voit donc que $E = \text{Vect}(X^2)$, donc E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 1.

2. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(0) = P(-1)\}$ et soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, avec $P = a + bX + cX^2 + dX^3$, alors on a

$$\begin{aligned} P \in E &\iff a = a - b + c - d \iff d = -b + c \\ &\iff P = a + b(X - X^3) + c(X^2 + X^3) \end{aligned}$$

donc $E = \text{Vect}(\{1, X - X^3, X^2 + X^3\})$. Il est facile de vérifier que $(1, X - X^3, X^2 + X^3)$ est libre, donc $(1, X - X^3, X^2 + X^3)$ est une base de E , par suite, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

3. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y - z - t = 0\}$ et soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit $v \in \mathbb{R}^4$, avec $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$, alors on a

$$\begin{aligned} v \in E &\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y - z - t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -3z - 3t \\ y = 2z + 2t \end{cases} \\ &\iff v = (-3z - 3t)e_1 + (2z + 2t)e_2 + ze_3 + te_4 \\ &\iff v = z(-3e_1 + 2e_2 + e_3) + t(-3e_1 + 2e_2 + e_4) \end{aligned}$$

donc $E = \text{Vect}(\{-3e_1 + 2e_2 + e_3, -3e_1 + 2e_2 + e_4\})$.

On vérifie facilement que $(-3e_1 + 2e_2 + e_3, -3e_1 + 2e_2 + e_4)$ est libre, donc $(-3e_1 + 2e_2 + e_3, -3e_1 + 2e_2 + e_4)$ est une base de E .

4. Soit $E = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$ et soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, avec $x = \sum_{i=0}^n x_i e_i$, alors on a

$$\begin{aligned} x \in E &\iff x_n = -(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) \\ &\iff x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_{n-1} e_{n-1} - (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) e_n \\ &\iff x = x_1(e_1 - e_n) + x_2(e_2 - e_n) + \dots + x_{n-1}(e_{n-1} - e_n) \end{aligned}$$

donc $E = \text{Vect}(\{e_1 - e_n, e_2 - e_n, \dots, e_{n-1} - e_n\})$.

On vérifie facilement que $(e_1 - e_n, e_2 - e_n, \dots, e_{n-1} - e_n)$ est libre, donc $(e_1 - e_n, e_2 - e_n, \dots, e_{n-1} - e_n)$ est une base de E .

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit E l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, telles que

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, f \text{ est constante sur }]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$$

Il est clair que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour déterminer une base de E , pour chaque $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on considère les fonctions φ_k et ψ_k , où φ_k est la fonction caractéristique de $] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} [$ et

$$\psi_k \text{ est définie sur } [0, 1] \text{ par } \psi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ où } a_k = \frac{k}{n}.$$

Pour $f \in E$ et pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, soit $c_k \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} [$, on a $f(x) = c_k$ et soit $b_k = f(a_k)$, alors on a

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \psi_k$$

Donc on voit que $E = \text{Vect}(\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}\})$.

On vérifie aisément que $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})$ est une base de E .

Exercice 24

Supposons que $\dim(F) = \dim(G) = p$ et montrons que F et G possède un supplémentaire commun dans E .

Soit F_1 et G_1 deux sous-espaces vectoriels de E , tels que $F = (F \cap G) \oplus F_1$ et $G = (F \cap G) \oplus G_1$. On a $\dim(F) = \dim(G)$, donc $\dim(F_1) = \dim(G_1)$. Soient $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ une base de F_1 et $(w_1, w_2, \dots, w_p)$ une base de G_1 . On pose $H = \text{Vect}(\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_p + w_p\})$, alors on a $F \cap H = G \cap H = \{0\}$, en effet, soit $x \in F \cap H$, alors on a $x \in F$ et $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i (v_i + w_i)$, avec

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in K$, donc $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^p \alpha_i w_i$, par suite, on a

$\sum_{i=1}^p \alpha_i w_i \in F \cap G$, avec $(F \cap G) \cap G_1 = \{0\}$, donc $\sum_{i=1}^p \alpha_i w_i = 0$. Comme $(w_1, w_2, \dots, w_p)$ est une base de G_1 , alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$, donc $x = 0$, par conséquent, on a $F \cap H = \{0\}$ et de la même manière on montre que $G \cap H = \{0\}$. On a aussi $F + G = F + H = G + H$, en effet, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, on a $w_i = -v_i + (v_i + w_i)$, donc $w_i \in F_1 + H$, par suite $G_1 \subseteq F_1 + H$, il en résulte que $(F \cap G) + F_1 + G_1 \subseteq (F \cap G) + F_1 + G$. On a $F + G = (F \cap G) + F_1 + G_1$, donc $F + G = F + H$ et de la même manière on montre que $F + G = F + H$. Soit L un supplémentaire de $F + G$ dans E , alors il est facile de voir que $F \oplus (H \oplus L) = G \oplus (H \oplus L) = E$.

Exercice 25

Soit $P \in F_i$, alors pour tout $j \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, on $P(j) = 0$, donc P possède n racines deux à deux distinctes et comme $\deg(P) \leq n$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $P = \alpha P_i$, où $P_i = \prod_{j \neq i} (X - j)$, par suite, $F_i = \text{Vect}(P_i)$.

Pour établir que $E = \bigoplus_{i=1}^n F_i$, il suffit de vérifier que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E . Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i = 0$, donc pour tout $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a $\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(j) = 0$. Or, on a $P_i(j) = 0$ pour $i \neq j$, donc on a $\alpha_j P_j(j) = 0$ et comme $P_j(j) \neq 0$, alors $\alpha_j = 0$. On en déduit donc que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est libre et comme $\dim(E) = n + 1$, alors $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E .

Exercice 26

Supposons que G est de dimension finie et montrons que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n + G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_n + G)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F_n$, donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n + G \subseteq F_n + G$, par suite, on a

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n + G \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_n + G)$$

Afin d'établir l'inclusion dans l'autre sens, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère un supplémentaire G_n de $F_n \cap G$ dans G . Comme $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, alors en utilisant une récurrence, on peut supposer que $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Il est facile de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_n + G = F_n \oplus G_n$, donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_n + G) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_n \oplus G_n)$. Puisque G est de dimension finie et puisque $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de G , alors $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire, donc il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq p$, on

a $G_n = G_p$. Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_n + G)$, alors pour tout $n \geq p$, on a $x \in F_n \oplus G_n$, donc $x = x_n + g_n$, avec $x_n \in F_n$ et $g_n \in G_n$. Il en résulte que pour tout $n \geq p$, on a $x_p - x_n = g_n - g_p$, avec $x_p - x_n \in F_p$ et $g_n - g_p \in G_p$, car $n \geq p$, donc $F_n \subseteq F_p$ et $G_n = G_p$. Pour tout $n \geq p$, on a $x_p = x_n$, donc $x_p \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ et comme $x = x_p + g_p$, alors $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n + G$.

CHAPITRE 2

APPLICATIONS LINÉAIRES – MATRICES

2.1 Applications linéaires – Isomorphisme d'espaces vectoriels

2.1.1 Définition et propriétés de base

Définition 2.1.1

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K . Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite *linéaire*, (ou parfois *K -linéaire*), si

i) $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y),$

ii) $\forall \alpha \in K, \forall x \in E, f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x).$

Si une application linéaire f est bijective, on dit que f est un **isomorphisme d'espaces vectoriels**

Remarque 13

D'après i) et ii), une application $f : E \longrightarrow F$ est linéaire, si et seulement si, pour tout $\alpha \in K$ et pour tout $x, y \in E$, on a $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$.

Notations

On désigne par $L_K(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications K -linéaires de E vers F .

Exemples

1. Soient E un K -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . On appelle **injection canonique** de F dans E , l'application $j : F \longrightarrow E$ définie par,

$$\forall x \in F, \quad j(x) = x$$

Alors j est une application linéaire.

2. Soient E un K -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . On appelle **surjection canonique** de E vers E/F , l'application définie par,

$$\begin{aligned} s : E &\longrightarrow E/F \\ x &\longmapsto s(x) = \bar{x} \end{aligned}$$

Alors s est une application linéaire.

3. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Alors l'application f définie par,

$$\begin{aligned} f : K^n &\longrightarrow E \\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &\longmapsto f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On en déduit donc que tout K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ est isomorphe à K^n .

Proposition 2.1.1

- i) Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur le même corps K .
 $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f$ est une application linéaire.
- ii) Soit $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors
 $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- iii) Deux espaces vectoriels de dimension finie et de même dimension sont isomorphes.

Démonstration. i) Soient $x \in E, y \in E$ et $\alpha \in K$, alors on a

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x + y) &= g(f(x + y)) \\ &= g(f(x) + f(y)) \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) \quad (\text{car } g \text{ est linéaire}) \\ &= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y) \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(\alpha x) &= g(f(\alpha x)) \\
 &= g(\alpha f(x)) \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\
 &= \alpha g(f(x)) \quad (\text{car } g \text{ est linéaire}) \\
 &= \alpha (g \circ f)(x)
 \end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est linéaire.

- ii) Supposons que $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Soient $x \in F$, $y \in F$ et $\alpha \in K$. Soient $a \in E$ et $b \in E$, tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. Comme f est linéaire, alors on a $f(a + b) = x + y$, donc on aura

$$f^{-1}(x + y) = f^{-1}(f(a + b)) = a + b = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$$

On a aussi

$$f^{-1}(\alpha x) = f^{-1}(\alpha f(a)) = f^{-1}(f(\alpha a)) = \alpha a = \alpha f^{-1}(x)$$

Donc f^{-1} est linéaire.

- iii) Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n , alors d'après l'exemple précédent, E et F sont isomorphes à K^n . Donc si $\varphi : E \longrightarrow K^n$ et $\psi : F \longrightarrow K^n$ sont deux isomorphismes d'espaces vectoriels, alors $\psi^{-1} \circ \varphi : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriel. $\square$

Proposition 2.1.2

Soient E et F deux K -espaces vectoriels. Pour f et g deux éléments de $L_K(E, F)$ et pour α élément de K , on définit $f + g$ et $\alpha \cdot f$, par

$$\forall x \in E, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

Alors $(L_K(E, F), +, \cdot)$ est un K -espace vectoriel.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $L_K(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^K le K -espace vectoriel de toutes les applications de E vers F . $\square$

Théorème 2.1.1

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie. Alors $L_K(E, F)$ est de dimension finie et on a

$$\dim(L_K(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

Démonstration. Soient $m = \dim(E)$, $n = \dim(F)$, $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ une base de E et $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ une base de F . Pour $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$, où pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{N}_p = \{1, 2, \dots, p\}$, on définit l'application $f_{ij} : E \rightarrow F$ par,

$$\forall x \in E, \quad f_{ij}(x) = x_j e'_i \quad \text{où } x = \sum_{j=1}^m x_j e_j$$

Alors, $B = \{f_{ij} : (i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n\}$ forme une base de $L_K(E, F)$. En effet,

Soit $f \in L_K(E, F)$, alors pour chaque $j \in \mathbb{N}_m$, on a $f(e_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e'_i$.

Donc pour tout $x \in E$ avec $x = \sum_{j=1}^m x_j e_j$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^m x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^m x_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e'_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} x_j e'_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_{ij}(x) \end{aligned}$$

Donc B est une partie génératrice finie de $L_K(E, F)$.

Il est facile de vérifier que B est une partie libre, en remarquant que

$$\forall k \in \mathbb{N}_m, \quad f_{ij}(e_k) = \begin{cases} e'_i & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

$\text{Card}(B) = \text{Card}(\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n) = m \times n$, donc $\dim(L_K(E, F)) = m \times n$. □

2.1.2 Noyau et image d'une application linéaire

Proposition 2.1.3

Soient E et F deux K -espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors,

- i) L'image par f d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F . En particulier, $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F , appelé **image** de f et noté Im .
- ii) L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E . En particulier, $f^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace vectoriel de E , appelé **noyau** de f et noté $\ker(f)$.

Démonstration. i) Soit A un sous-espace vectoriel de E . Alors,

$$f(A) \neq \emptyset, \text{ car } 0_F = f(0_E), \text{ donc } 0_F \in f(A).$$

Si $x \in A$, $y \in A$ et $\alpha \in K$, on a

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \text{ et } \alpha \cdot f(x) = f(\alpha \cdot x)$$

Comme $x + y \in A$ et $\alpha \cdot x \in A$, alors $f(x) + f(y) \in f(A)$ et $\alpha \cdot f(x) \in f(A)$. $\square$

ii) Soit, maintenant, B un sous-espace vectoriel de F . Alors

$$f^{-1}(B) \neq \emptyset, \text{ car } f(0_E) = 0_F \text{ et } 0_F \in B, \text{ donc } 0_E \in f^{-1}(B).$$

Si $x \in f^{-1}(B)$, $y \in f^{-1}(B)$ et $\alpha \in K$, alors on a $f(x) \in B$ et $f(y) \in B$ et comme B est un sous-espace vectoriel de F et f linéaire, alors $f(x + y) \in B$ et $f(\alpha \cdot x) \in B$, donc $x + y \in f^{-1}(B)$ et $\alpha \cdot x \in f^{-1}(B)$. Rappelons que

$$z \in f^{-1}(B) \iff f(z) \in B$$

Remarque 14

Soient E et F deux K -espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors

1.

$$\ker(f) = \{x \in E : f(x) = 0_F\}$$

$$x \in \ker(f) \iff f(x) = 0_F$$

2.

$$Im = \{f(x) : x \in E\}$$

$$y \in Im \iff \exists x \in E : y = f(x)$$

Théorème 2.1.2

Soient E et F deux K -espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors

- i) $f \text{ est injective} \iff \ker(f) = \{0_E\}$.
- ii) $f \text{ est surjective} \iff \text{Im} = F$.

Démonstration. i) ($\implies$) Supposons que f est injective et soit $x \in \ker(f)$.

On a $f(x) = 0_F$ et comme f est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$, donc $f(x) = f(0_E)$ et puisque f est injective, alors $x = 0_E$. Ainsi, $\ker(f) = \{0_E\}$.

($\impliedby$) Supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$.

Soient $x \in E$ et $y \in E$, tels que $f(x) = f(y)$, a-t-on $x = y$?

Comme f est linéaire et $f(x) = f(y)$, alors on a $f(x - y) = 0_F$, donc $x - y \in \ker(f)$, puis comme $\ker(f) = \{0_F\}$, alors on a $x = y$ et par suite, f est injective.

- ii) Trivial, car une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective, si et seulement si, $f(E) = F$. □

Proposition 2.1.4

Soient E et F deux K -espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors

- a) Pour tout sous-espace vectoriel G de E , on a

$$f^{-1}(f(G)) = G + \ker(f)$$

- b) f est injective, si et seulement si, pour tout sous-espace vectoriel G de E , on a

$$f^{-1}(f(G)) = G$$

- c) Pour tout sous-espace vectoriel H de F , on a

$$f(f^{-1}(H)) = H \cap \text{Im}$$

- d) f est surjective, si et seulement si, pour tout sous-espace vectoriel H de F , on a

$$f(f^{-1}(H)) = H$$

Démonstration. a) Soit $x \in E$, alors on a

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}(f(G)) &\iff f(x) \in f(G) \\
 &\iff \exists a \in G : f(x) = f(a) \\
 &\iff \exists a \in G : f(x - a) = 0 \\
 &\iff \exists a \in G : x - a \in \ker(f) \\
 &\iff \exists a \in G, \exists b \in \ker(f) : x = a + b \\
 &\iff x \in G + \ker(f).
 \end{aligned}$$

b) ($\implies$) Si on suppose que f est injective, alors $\ker(f) = \{0\}$, donc, d'après a), pour tout sous-espace vectoriel G de E , $f^{-1}(f(G)) = G$.

($\impliedby$) Si on suppose que pour tout sous-espace vectoriel G de E , on a $f^{-1}(f(G)) = G$, alors en particulier, on a $f^{-1}(f(\{0_E\})) = \{0_E\}$.

Or $f(\{0_E\}) = \{f(0_E)\} = \{0_F\}$, donc $\ker(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{0_E\}$.

c) Soit $y \in f(f^{-1}(H))$, alors il existe $x \in f^{-1}(H)$, tel que $y = f(x)$.

Comme $x \in f^{-1}(H)$, alors $f(x) \in H$, donc $y \in H \cap \text{Im}$.

Réciproquement, soit $y \in H \cap \text{Im}$, alors on a

$$\begin{aligned}
 y \in H \cap \text{Im} &\implies y \in H \text{ et } y \in \text{Im} \\
 &\implies y \in H \text{ et } \exists x \in E, : y = f(x) \\
 &\implies x \in f^{-1}(H) \text{ car } f(x) \in H \\
 &\implies f(x) \in f(f^{-1}(H)) \\
 &\implies y \in f(f^{-1}(H)).
 \end{aligned}$$

d) ($\implies$) Supposons que f est surjective, alors $\text{Im} = F$, donc pour tout sous-espace H de E , on a $f(f^{-1}(H)) = H \cap F = H$.

($\impliedby$) Supposons que pour tout sous-espace vectoriel H de F , on a $f(f^{-1}(H)) = H$, alors en particulier, on aura $f(f^{-1}(F)) = F$.

Or $f^{-1}(F) = E$, donc $f(E) = F$, par suite, f est surjective. $\square$

Remarque 15

Soient E un K -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et E/F le K -espace vectoriel quotient de E par F . Alors pour tout sous-espace vectoriel H de E/F , il existe un unique sous-espace vectoriel G de E contenant F , tel que $H = G/F$.

En effet, soit $s : E \longrightarrow E/F$ la surjection canonique et soit H un sous-espace vectoriel de E/F . Puisque s est linéaire, alors $s^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E et puisque $\bar{0} \in H$, alors $s^{-1}(\{\bar{0}\}) \subseteq s^{-1}(H)$, avec $s^{-1}(\{\bar{0}\}) = F$. Donc si on pose $G = s^{-1}(H)$ et si on tient compte que s est surjective, alors d'après le théorème pr^cédent, on aura $s(G) = s(s^{-1}(H)) = H$, puis comme $F \subseteq G$, alors $s(G) = G/F$.

2.1.3 Décomposition canonique - Théorème du rang

Théorème 2.1.3 (Décomposition canonique)

Soient E et F deux K -espaces vectoriels quelconques, $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, $j : \text{Im} \longrightarrow F$ l'injection canonique et $s : E \longrightarrow E/\ker(f)$ la surjection canonique. Alors il existe un isomorphisme canonique

$$\bar{f} : E/\ker(f) \longrightarrow \text{Im}$$

tel que $f = j \circ \bar{f} \circ s$,

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ s \downarrow & & \uparrow j \\ E/\ker(f) & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Im} \end{array}$$

Démonstration. Soit $\bar{f} : E/\ker(f) \longrightarrow \text{Im}$ la correspondance définie par

$$\forall x \in E, \quad \bar{f}(\bar{x}) = f(x)$$

Alors pour $x \in E$ et $y \in E$, on a

$$\begin{aligned} \bar{x} = \bar{y} &\iff \overline{x - y} = \bar{0}_E \\ &\iff x - y \in \ker(f) \\ &\iff f(x - y) = 0_F \\ &\iff f(x) = f(y) \end{aligned}$$

Ainsi, $\bar{f}$ est bien définie et $\bar{f}$ est injective. Puisque $\bar{f}$ est linéaire et surjective par construction, donc $\bar{f}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et on a

$$\forall x \in E, \quad (j \circ \bar{f} \circ s)(x) = (j \circ \bar{f})(s(x)) = (j \circ \bar{f})(\bar{x}) = j(\bar{f}(\bar{x})) = j(f(x)) = f(x)$$

Corollaire 2.1.1 (Théorème du rang)

Soient E un K -espace vectoriel de **dimension finie**, F un K -espace vectoriel quelconque et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors

$$\boxed{\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im})}$$

Démonstration. D'après le théorème précédent, on sait que $E/\ker(f)$ et Im sont isomorphes, donc

$$\dim(E/\ker(f)) = \dim(\text{Im})$$

Or, on sait que $\dim(E/\ker(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f))$, par suite, on aura

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im})$$

Corollaire 2.1.2

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de *dimension finie*, avec $\dim(E) = \dim(F)$, et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) f est injective.
- ii) f est surjective.
- iii) f est bijective.

Démonstration. i) $\implies$ ii) Supposons que f est injective.

$$\begin{aligned} f \text{ est injective} &\implies \ker(f) = \{0_E\} \\ &\implies \dim(\ker(f)) = 0 \\ &\implies \dim(E) = \dim(\text{Im}) \quad (\text{voir corollaire précédent}) \\ &\implies \text{Im} = E \end{aligned}$$

ii) $\implies$ iii) Supposons que f est surjective.

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective} &\implies \text{Im} = E \\ &\implies \dim(\text{Im}) = \dim(E) \\ &\implies \dim(\ker(f)) = 0 \quad (\text{voir corollaire précédent}) \\ &\implies \ker(f) = \{0_E\} \end{aligned}$$

Donc f est injective et par conséquent, f est bijective.

iii) $\implies$ i) Trivial. □

Remarque 16
Les équivalences du corollaire précédent ne sont plus vraies dans le cas de la dimension infinie, comme le montre l'exemple suivant :

Exemples

Soient K un corps commutatif et $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ un polynôme de $K[X]$. On définit le polynôme dérivé de P , qu'on note P' , par

$$P' = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}$$

Soit $f : K[X] \longrightarrow K[X]$ l'application qui à P fait correspondre P' . Alors f est une application linéaire surjective qui n'est pas injective.

$$\text{Im} = K[X] \quad \text{et} \quad \ker(f) = K$$

Soit $g : K[X] \longrightarrow K[X]$ définie par

$$\forall P \in K[X], P = \sum_{i=1}^n a_i X^i \implies g(P) = \sum_{i=1}^n a_i X^{i+1}$$

Alors g est une application linéaire injective qui n'est pas surjective.

$$\ker(g) = \{0\} \quad \text{et} \quad \text{Im}(g) = \{P \in K[X] : P(0) = 0\}$$

Exemples (Théorème d'interpolation de Lagrange)

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres réels deux à deux distincts et $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres réels quelconques, alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leq n$, tel que

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}, P(a_i) = \alpha_i$$

De plus, si on pose

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}, L_i = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X - a_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)}$$

Alors on aura

$$P = \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i$$

En effet, soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$$

Alors φ est une application linéaire et on a

$$P \in \ker(\varphi) \iff P(a_0) = P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$$

Donc P possède $n + 1$ racines deux à deux distinctes, par suite $P = 0$, car $\deg(P) \leq n$ et par suite, P possède au plus n racines deux à deux distinctes.

Ainsi, $\ker(\varphi) = \{0\}$, donc φ est injective. Comme $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$, alors, d'après le corollaire précédent, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Donc pour tout $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$, tel que $\varphi(P) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, par conséquent, on a

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad P(a_i) = \alpha_i$$

Soit $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour chaque $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, soit $L_i = \varphi^{-1}(e_i)$, alors on aura

$$\begin{cases} \forall j \in \{0, 1, \dots, n\}, j \neq i \implies L_i(a_j) = 0 \\ L_i(a_i) = 1 \end{cases}$$

Donc pour tout $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, avec $j \neq i$, a_j est une racine de L_i , donc le polynôme $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X - a_j)$ divise L_i avec $\deg(L_i) \leq n$, donc il existe $\alpha \in K$, tel que L_i s'écrit sous la forme $L_i = \alpha \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X - a_j)$.

Puisque $L_i(a_i) = 1$, alors $\alpha = \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j) \right)^{-1}$, donc on aura

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n+1\}, \quad L_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X - a_j)$$

Soit maintenant $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres réels quelconque et soit P l'unique polynôme de degré $\leq n$, tel que $\varphi(P) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, donc on aura

$$\begin{aligned} P &= \varphi^{-1}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &= \varphi^{-1} \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i e_i \right) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi^{-1}(e_i) = \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i \end{aligned}$$

On voit donc que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $K_n[X]$.

2.2 Endomorphismes – Automorphismes

Définition 2.2.1

Soit E un K -espace vectoriel.

- i) Une application linéaire $u : E \longrightarrow E$ s'appelle un *endomorphisme* de E .
- ii) Un endomorphisme bijectif s'appelle un *automorphisme* de E .

Notations

On désigne par $L_K(E)$ l'ensemble de tous les endomorphismes de E et par $GL_K(E)$ l'ensemble de tous les automorphismes de E .

Définition 2.2.2

Soient $(\mathcal{A}, +, \times)$ un anneau quelconque et K un corps commutatif. On dit que $\mathcal{A}$ est une K -algèbre (ou une algèbre sur K), s'il existe une loi externe,

$$\begin{aligned} K \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

telle que,

- i) $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un K -espace vectoriel.
- ii) $\forall \lambda \in K, \forall x \in \mathcal{A}, \forall y \in \mathcal{A}, \lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$

Exemples

Pour tout corps commutatif K , $(K[X], +, \times, \cdot)$ est une K -algèbre.

Proposition 2.2.1

Soit E un K -espace vectoriel. Alors

- i) $(L_K(E), +, \circ, \cdot)$ est une K -algèbre, appelée *algèbre des endomorphismes de E* .
- ii) $(GL_K(E), \circ)$ est un groupe, appelé *groupe linéaire de E* .

Démonstration. Exercice. □

Remarque 17

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . Alors d'après le théorème du rang, on sait que

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u))$$

Par contre, on a pas toujours $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$ comme le montre le théorème suivant :

Théorème 2.2.1

Soient E un K -espace vectoriel de *dimension finie* et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.
- ii) $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u^2)$.
- iii) $\ker(u) = \ker(u^2)$.
- iv) $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$.

Démonstration. i) $\implies$ ii) Supposons que $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$ et montrons que $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u^2)$. Pour cela, remarquons d'abord que tout $u \in L_K(E)$, on a $\operatorname{Im}(u^2) \subseteq \operatorname{Im}(u)$. Donc, il suffit de montrer que $\operatorname{Im}(u) \subseteq \operatorname{Im}(u^2)$. Pour cela, soit $y \in \operatorname{Im}(u)$, alors il existe $x \in E$, tel que $y = u(x)$. Puisque $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$, alors $x = x_1 + u(x_2)$, avec $x_1 \in \ker(u)$, donc $y = u^2(x_2)$, par suite, $y \in \operatorname{Im}(u^2)$.

ii) $\implies$ iii) Supposons que $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u^2)$ et montrons que $\ker(u) = \ker(u^2)$. Pour cela, remarquons aussi que tout $u \in L_K(E)$, on a $\ker(u) \subseteq \ker(u^2)$. Donc, il suffit de montrer que $\ker(u^2) \subseteq \ker(u)$. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \dim(\operatorname{Im}(u)) = \dim(\ker(u^2)) + \dim(\operatorname{Im}(u^2))$$

Puisque $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u^2)$ alors $\dim(\ker(u)) = \dim(\ker(u^2))$, par suite, on aura $\ker(u) = \ker(u^2)$.

iii) $\implies$ iv) Supposons que $\ker(u) = \ker(u^2)$ et montrons que $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$. Soit $y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} y \in \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) &\iff u(y) = 0 \text{ et } \exists x \in E : y = u(x) \\ &\implies u^2(x) = u(y) = 0 \\ &\implies x \in \ker(u^2) \\ &\implies x \in \ker(u) \\ &\implies u(x) = 0 \\ &\implies y = 0 \end{aligned}$$

iv) $\implies$ i) Trivial, car on sait que

$$E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u) \iff \begin{cases} \dim(\ker(u)) + \dim(\operatorname{Im}(u)) = \dim(E) \\ \text{et} \\ \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\} \end{cases}$$

Théorème 2.2.2 (Noyaux et images itérés)

Soient E un K -espace vectoriel de *dimension finie* et u un endomorphisme de E . Alors il existe un entier $p \geq 1$, tel que

i)

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq p \implies \ker(u^k) = \ker(u^p) \\ \text{et} \\ \ker(u^{p-1}) \subsetneq \ker(u^p) \end{cases}$$

ii)

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq p \implies \operatorname{Im}(u^k) = \operatorname{Im}(u^p) \\ \text{et} \\ \operatorname{Im}(u^p) \subsetneq \operatorname{Im}(u^{p-1}) \end{cases}$$

iii)

$$\boxed{E = \ker(u^p) \oplus \operatorname{Im}(u^p)}$$

Démonstration. i) Soit $\mathcal{A} = \{\dim(\ker(u^k)) : k \in \mathbb{N}^*\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\dim(\ker(u^k)) \leq \dim(E)$, donc $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide et majorée, par suite, $\mathcal{A}$ possède un plus grand élément, noté d . D'autre part, soit $\Lambda = \{k \in \mathbb{N}^* : \dim(\ker(u^k)) = d\}$, alors Λ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, donc Λ possède un plus petit élément noté p .

Pour $k \geq p$, on sait que $\ker(u^p) \subseteq \ker(u^k)$ et d'après ce qui précède, on sait que $\dim(\ker(u^k)) \leq \dim(\ker(u^p))$, donc $\ker(u^k) = \ker(u^p)$.

p est le plus petit élément de Λ , donc $p-1 \notin \Lambda$, par conséquent, on aura $\dim(\ker(u^{p-1})) < \dim(\ker(u^p))$, donc $\ker(u^{p-1}) \subsetneq \ker(u^p)$.

ii) Posons $\Delta = \{\dim(\operatorname{Im}(u^k)) : k \in \mathbb{N}^*\}$, alors Δ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, par suite, Δ possède un plus petit élément noté r .

Soit $\beta = \{k \in \mathbb{N}^* : \dim(\operatorname{Im}(u^k)) = r\}$, alors β est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc β possède un plus petit élément noté q .

Pour $k \geq q$, on sait que $\operatorname{Im}(u^k) \subseteq \operatorname{Im}(u^q)$ et d'après ce qui précède, on sait que $\dim(\operatorname{Im}(u^q)) \leq \dim(\operatorname{Im}(u^k))$, donc $\operatorname{Im}(u^k) = \operatorname{Im}(u^q)$.

q est le plus petit élément de β , donc $q-1 \notin \beta$, par suite, on aura $\dim(\operatorname{Im}(u^{q-1})) > \dim(\operatorname{Im}(u^q))$, donc $\operatorname{Im}(u^q) \subsetneq \operatorname{Im}(u^{q-1})$.

Vérifions maintenant que $q = p$. Pour cela, supposons, par absurde, que $q > p$, donc d'après ce qui précède, on a

$$\ker(u^q) = \ker(u^p) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(u^q) \subsetneq \operatorname{Im}(u^p)$$

Or d'après le théorème du rang, on a

$$\dim(E) = \dim(\ker(u^p)) + \dim(\operatorname{Im}(u^p)) = \dim(\ker(u^q)) + \dim(\operatorname{Im}(u^q))$$

Donc $\dim(\operatorname{Im}(u^q)) = \dim(\operatorname{Im}(u^p))$, ce qui est absurde, car $\operatorname{Im}(u^q) \subsetneq \operatorname{Im}(u^p)$, donc $q \leq p$.

De la même manière, on montre que $p \leq q$. □

iii) On a $\ker(u^{2p}) = \ker(u^p)$, donc d'après le théorème 2.2.1, on a

$$E = \ker(u^p) \oplus \operatorname{Im}(u^p)$$

Remarque 18

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E , N et I les parties de E définies par

$$N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker(u^k) \quad \text{et} \quad I = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Im}(u^k)$$

Alors, d'après le théorème précédent, N et I sont deux sous-espaces supplémentaires de E , appelés cœur et nilspace de u .

2.3 Exemples d'endomorphismes remarquables

2.3.1 Projection sur un sous-espace vectoriel - Projecteurs

Définition 2.3.1

Soient E un K -espace vectoriel quelconque, F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F dans E .

i) On appelle **projection** sur F parallèlement à G , (ou de direction G), l'application p_F définie par

$$\begin{aligned} p_F : E = F \oplus G &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto p_F(x) = x_1 \end{aligned}$$

ii) On appelle **projecteur** de E , tout endomorphisme u de E , vérifiant $u^2 = u \circ u = u$.

Remarque 19

Soit p_F la projection sur F parallèlement à G , alors

- i) p_F est un endomorphisme de E .
- ii) $\text{Im}(p_F) = F$ et $\ker(p_F) = G$.
- iii) $p_F \circ p_F = p_F$, donc p_F est un projecteur de E .

Réciproquement, on a le théorème suivant,

Théorème 2.3.1

Soient E un K -espace vectoriel et u un projecteur de E , alors on a

- i) $E = \text{Im}(u) \oplus \ker(u)$.
- ii) $\forall x \in E, x \in \text{Im}(u) \iff u(x) = x$
- iii) Si on pose $F = \text{Im}(u)$ et $G = \ker(u)$, alors u est la projection sur F parallèlement à G .

Démonstration. i) La dimension de E est quelconque, donc

$$E = \text{Im}(u) \oplus \ker(u) \iff \begin{cases} \text{Im}(u) + \ker(u) = E \\ \text{et} \\ \text{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y \in \text{Im}(u) \cap \ker(u) &\iff \exists x \in E : y = u(x) \text{ et } u(y) = 0 \\ &\implies u^2(x) = 0 \\ &\implies u(x) = 0 \quad (\text{car } u^2 = u) \\ &\implies y = 0 \end{aligned}$$

Donc $\text{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$.

Soit $x \in E$, alors on a $x = (x - u(x)) + u(x)$ avec $u(x) \in \text{Im}(u)$ et $x - u(x) \in \ker(u)$, (car $u(x - u(x)) = u(x) - u^2(x) = 0$), donc $E = \text{Im}(u) + \ker(u)$.

- ii) Soit $x \in E$. Comme $u^2 = u$, alors on a $x - u(x) = u(u(x) - x)$, donc $x - u(x) \in \text{Im}(u)$ et on a aussi $x - u(x) \in \ker(u)$, par suite, on a $x - u(x) \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$. Puisque $\text{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$, alors on a $u(x) = x$.

Réciproquement, si $u(x) = x$, alors $x \in \text{Im}(u)$.

- iii) On a $E = \text{Im}(u) \oplus \ker(u)$, donc, pour $x \in E$ avec $x = x_1 + x_2$, on a $u(x) = u(x_1) + u(x_2) = x_1$, car $x_1 \in \text{Im}(u)$, donc d'après ii), $u(x_1) = x_1$ et on a $x_2 \in \ker(u)$. Donc u est la projection sur $\text{Im}(u)$ parallèlement à $\ker(u)$. □

2.3.2 Symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel

Définition 2.3.2

Soient E un K -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F dans E .

- i) On appelle *symétrie par rapport à F parallèlement à G* , (ou de direction G), l'application s_F définie par,

$$\begin{aligned} s_F : E = F \oplus G &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto s_F(x) = x_1 - x_2 \end{aligned}$$

- ii) On appelle *symétrie vectorielle*, tout endomorphisme u de E , vérifiant $u^2 = u \circ u = Id_E$.

Remarque 20

1. Soit p_F la projection sur F parallèlement à G , alors $s_F = 2p_F - Id_E$.
2. Soit s_F la symétrie par rapport à F parallèlement à G , alors

- i) s_F est un endomorphisme de E .
- ii) $\ker(u - Id_E) = F$ et $\ker(u + Id_E) = G$.
- iii) $s_F^2 = Id_E$, donc s_F est une symétrie vectorielle de E .

Réciproquement, on a le théorème suivant :

Théorème 2.3.2

Soient E un K -espace vectoriel et u une symétrie vectorielle de E . Alors,

- i) $E = \ker(u - Id_E) \oplus \ker(u + Id_E)$.
- ii) Si on pose $F = \ker(u - Id_E)$ et $G = \ker(u + Id_E)$, alors u est la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Démonstration. i) Soit $x \in E$, avec $x \in \ker(u - Id_E) \cap \ker(u + Id_E)$, alors on a $u(x) = x$ et $u(x) = -x$, donc $x = 0$ et par suite, on a $\ker(u - Id_E) \cap \ker(u + Id_E) = \{0\}$.

Pour chaque $x \in E$, on pose $x_1 = \frac{x + u(x)}{2}$ et $x_2 = \frac{x - u(x)}{2}$, alors on a $x_1 \in \ker(u - Id_E)$, $x_2 \in \ker(u + Id_E)$ et $x = x_1 + x_2$. Donc $E = \ker(u - Id_E) + \ker(u + Id_E)$.

- ii) Pour $x \in E$, avec $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \ker(u - Id_E)$ et $x_2 \in \ker(u + Id_E)$, on a

$$u(x) = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = x_1 - x_2$$

Donc u est la symétrie par rapport à $\ker(u - Id_E)$ parallèlement à $\ker(u + Id_E)$. $\square$

2.3.3 Affinités - Dilatations - Transvections

Définition 2.3.3

Soient E un K -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E , G un supplémentaire de F dans E et $\lambda \in K$. On appelle **affinité** de base F , de direction G et de rapport λ , l'application u définie par,

$$\begin{aligned} u : E = F \oplus G &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto u(x) = x_1 + \lambda x_2 \end{aligned}$$

Remarque 21

Soit u une affinité de base F , de direction G et de rapport λ . Alors,

1. u est un endomorphisme de E .
2. Si $\lambda = 1$, alors $u = Id_E$.
3. Si $\lambda = 0$, alors u est la projection sur F de direction G .
4. Si $\lambda = -1$, alors u est la symétrie par rapport à F de direction G .
5. Si $\lambda \neq 0$, alors $u \in GL(E)$.
6. Si p_F est la projection sur F parallèlement à G , alors on a

$$u = \lambda Id_E + (1 - \lambda)p_F$$

7. Si $\lambda \neq 0$ et $\dim(G) = 1$, on dit que u est une **dilatation** de base F , de direction G et de rapport λ .

Définition 2.3.4

Soit E un K -espace vectoriel quelconque. On appelle **hyperplan** de E , tout sous-espace vectoriel H , tel que

$$\dim(E/H) = 1$$

Remarque 22

Soit E un K -espace vectoriel.

1. Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel maximal de E , c'est à dire, si H est un hyperplan de E et si F est un sous-espace vectoriel de E , tel que $F \neq E$ et $H \subseteq F$, alors $H = F$.
2. Soit H un sous-espace vectoriel de E . Alors H est un hyperplan de E , si et seulement si, tout supplémentaire de H dans E est de dimension égale à 1.
3. Si E est de dimension finie $= n$, alors H est un hyperplan de E , si et seulement si, $\dim(H) = n - 1$.
4. Si E est de dimension finie $= n$ et si H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts de E , alors

$$\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$$

En effet, puisque $H_1 \neq H_2$ alors $H_1 + H_2 = E$, donc $\dim(H_1 + H_2) = n$, par suite on a

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) = n - 2$$

Proposition 2.3.1

Soient E un K -espace vectoriel quelconque et u un endomorphisme de E , avec $u \neq Id_E$. Alors u est une dilatation de E , si et seulement si,

- i) $\ker(u - Id_E)$ est un hyperplan de E .
- ii) $E = \ker(u - Id_E) \oplus \text{Im}(u - Id_E)$.

Démonstration. $(\implies)$ Supposons que u est une dilatation de base F , de direction G et de rapport λ . Alors $E = F \oplus G$, $\dim(G) = 1$ et on a

$$\forall x \in E, \quad x = x_1 + x_2 \implies u(x) = x_1 + \lambda x_2$$

Puisque $u \neq Id_E$, alors $\ker(u - Id_E) = F$ et $\text{Im}(u - Id_E) = G$.

$(\impliedby)$ Supposons que $\ker(u - Id_E)$ est un hyperplan et que

$$E = \ker(u - Id_E) \oplus \text{Im}(u - Id_E)$$

donc $\dim(\text{Im}(u - \text{Id}_E)) = 1$. Soit $y_0 \in \text{Im}(u - \text{Id}_E)$ avec $y_0 \neq 0$, donc il existe $\lambda \in K$, tel que $u(y_0) = \lambda y_0$. Soit $x \in E$, avec $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in \ker(u - \text{Id}_E)$ et $x_2 \in \text{Im}(u - \text{Id}_E)$, donc $x_2 = \alpha y_0$, par suite, on a

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1) + u(x_2) = x_1 + u(\alpha y_0) = x_1 + \alpha u(y_0) \\ &= x_1 + \alpha(\lambda y_0) = x_1 + \lambda(\alpha y_0) = x_1 + \lambda x_2 \end{aligned}$$

On voit donc que u est la dilatation de base $\ker(u - \text{Id}_E)$, de direction $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$ et de rapport λ . $\square$

Définition 2.3.5

Soient E un K -espace vectoriel quelconque et u un endomorphisme de E . On dit que u est une **transvection** de E , s'il existe un hyperplan H de E , tel que,

- i) $\forall x \in H, u(x) = x$.
- ii) $\forall x \in E, u(x) - x \in H$.

Remarque 23

Soit E un K -espace vectoriel quelconque. Alors toute transvection de E est inversible.

En effet, si u est une transvection de E , alors par définition, pour tout $x \in E$, on a $u(u(x) - x) = u(x) - x$, donc pour tout $x \in E$, on a $u^2(x) - 2u(x) + x = 0$. On en déduit, donc, que $u^2 - 2u + \text{Id}_E = 0$, donc on a

$$u(2\text{Id}_E - u) = (2\text{Id}_E - u)u = \text{Id}_E$$

Ainsi, u est inversible et on a $u^{-1} = 2\text{Id}_E - u$.

Théorème 2.3.3

Soient E un K -espace vectoriel quelconque et u un endomorphisme de E avec $u \neq \text{Id}_E$. Alors u est une transvection de E , si et seulement si,

- i) $\ker(u - \text{Id}_E)$ est un hyperplan de E .
- ii) $(u - \text{Id}_E)^2 = 0$.

Démonstration. ($\implies$) Par définition, il existe un hyperplan H , tel que $H \subseteq \ker(u - \text{Id}_E)$, puisque $\ker(u - \text{Id}_E) \neq E$, alors $\ker(u - \text{Id}_E) = H$, donc $\ker(u - \text{Id}_E)$ est un hyperplan de E et puisque pour tout $x \in E$, on a $u(x) - x \in H$, alors $(u - \text{Id}_E)^2 = 0$.

($\impliedby$) Si on pose $H = \ker(u - \text{Id}_E)$, alors on aura

Pour tout $x \in H$, $u(x) = x$.

Pour tout $x \in H$, on a $u(x) - x \in H$, car $(u - \text{Id}_E)^2(x) = 0$, donc $(u - \text{Id}_E)(u(x) - x) = 0$. $\square$

Corollaire 2.3.1

Soient E un K -espace vectoriel quelconque et u une transvection de E . Alors u^{-1} est aussi une transvection de E .

Démonstration. Nous avons déjà vu que si u est une transvection, alors u est inversible et on a $u^{-1} = 2\text{Id}_E - u$. Donc $u^{-1} - \text{Id}_E = \text{Id}_E - u$, ainsi, on a

$$\ker(u^{-1} - \text{Id}_E) = \ker(u - \text{Id}_E) \quad \text{et} \quad (u^{-1} - \text{Id}_E)^2 = (u - \text{Id}_E)^2$$

Donc, d'après le théorème précédent, u^{-1} est une transvection.

2.4 Matrices

2.4.1 Opérations sur les matrices

Définition 2.4.1

Soit K un corps commutatif. Une matrice à coefficients dans K est une suite double finie $(a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ d'éléments de K .

Remarque 24

Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est représentée par un tableau de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ce tableau est constitué de m lignes et n colonnes. On dit, alors, que A est une matrice à m lignes et n colonnes ou que A est une (m, n) -matrice.

Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ et pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, i indique la $i^{\text{ème}}$ ligne et j indique la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A .

Si $m = n$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n .

Exemples

Pour tout corps commutatif K , les éléments de K^n peuvent être considérés comme des $(n, 1)$ -matrices ou comme des $(1, n)$ -matrices. Ainsi, tout $X \in K^n$ s'écrit, selon les situations, sous l'une des formes suivantes :

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{ou} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Notations

On désigne par $M_{m,n}(K)$ l'ensemble de toutes les (m, n) -matrices à coefficients dans K et par $M_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K . On munit $M_{m,n}(K)$ et $M_n(K)$ des opérations suivantes :

Addition : Pour $A \in M_{m,n}(K)$, avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, et pour $B \in M_{m,n}(K)$, avec $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, on définit $A + B$ par,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

Multiplication externe : Pour $A \in M_{m,n}(K)$ et $\lambda \in K$, avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, on définit $\lambda \cdot A$ par,

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

Produit matriciel : Pour $A \in M_{m,n}(K)$ et $B \in M_{n,p}(K)$, avec

$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, on définit le produit $A \times B$, qu'on note AB , par $AB = (c_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p}$,

$$\text{où } \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Remarque 25

1. Le produit AB de deux matrices A et B est bien défini, lorsque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

$$A \in M_{m,n}(K) \quad \text{et} \quad B \in M_{n,p}(K) \implies AB \in M_{m,p}(K)$$

2. La multiplication est une loi interne sur $M_n(K)$.

Proposition 2.4.1

Soit K un corps commutatif quelconque, n et m deux entiers quelconques. Alors,

- i) $(M_{m,n}(K), +, \cdot)$ est un K -espace vectoriel.
- ii) $(M_n(K), +, \times, \cdot)$ est une K -algèbre.

Démonstration. i) Il est facile de vérifier que $(M_{m,n}(K), +, \cdot)$ est un K -espace vectoriel et que l'élément neutre de l'addition est la matrice nulle dont tous les coefficients sont nuls.

ii) Il suffit de vérifier que la multiplication est associative.

Pour cela, soient A , B et C trois éléments de $M_n(K)$, on pose

$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, puis on pose aussi $AB = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $BA = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $A(BC) = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $(AB)C = (\beta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Alors on a :

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} q_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{l=1}^n b_{kl} c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

$$\beta_{ij} = \sum_{l=1}^n p_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

On constate, donc, que $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$, donc la multiplication est associative.

L'élément neutre de la multiplication est la matrice identité I définie par,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 26

On dit que $P \in M_n(K)$ est inversible, s'il existe $Q \in M_n(K)$, tel que

$PQ = QP = I$. On note $GL_n(K)$ l'ensemble de toutes les matrices inversibles de $M_n(K)$, alors $GL_n(K)$ muni de la multiplication des matrices est un groupe.

2.4.2 Matrices élémentaires

Soit K un corps commutatif. Pour $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ et pour $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on désigne par E_{ij} la matrice de $M_{m,n}(K)$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne qui est égal à 1.

Définition 2.4.2

Les matrices E_{ij} sont appelées les matrices élémentaires de $M_{m,n}(K)$.

Remarque 27

Soit $M_n(K)$ l'algèbre des matrices carrées à coefficients dans un corps commutatif K . Alors, il est facile de vérifier que

$$\forall (i, j, k, l) \in \{1, 2, \dots, n\}^4, \quad E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ E_{il} & \text{si } j = k \end{cases}$$

Donc, en particulier, on a

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, \quad E_{ij}^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ E_{ii} & \text{si } i = j \end{cases}$$

Proposition 2.4.2

Soit K un corps commutatif. Alors $\{E_{ij} : (i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n\}$ forme une base de $M_{m,n}(K)$, appelée base canonique de $M_{m,n}(K)$.

(où $\forall p \in \mathbb{N}^*, \mathbb{N}_p = \{1, 2, \dots, p\}$).

Démonstration.

Pour $A \in M_{m,n}(K)$ avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, on a

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$$

Donc $\{E_{ij} : (i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n\}$ est une partie génératrice de $M_{m,n}(K)$.

On a

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

donc, si

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij} = 0$$

alors $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n, a_{ij} = 0$.

Donc $\{E_{ij} : (i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n\}$ est une partie libre de $M_{m,n}(K)$. $\square$

2.4.3 Matrices de transvection - Matrices de dilatation - Génération de $GL_n(\mathbb{K})$

On désigne par $GL_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'ensemble de toutes les matrices inversibles d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, alors on sait que $GL_n(\mathbb{K})$ muni de la multiplication des matrices est un groupe, appelé groupe linéaire, dont l'élément neutre est la matrice identité qui sera notée I_n . On désigne aussi par $SL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des éléments de $GL_n(\mathbb{K})$ dont le déterminant est égal à 1, alors il est bien connu que $SL_n(\mathbb{K})$ est un sous groupe de $GL_n(\mathbb{K})$, appelé groupe linéaire spécial.

Définition 2.4.3

Soit n un entier ≥ 2 .

- i) Pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, avec $i \neq j$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit ce qu'on appelle une matrice de transvection, par

$$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$$

- ii) Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, on définit ce qu'on appelle une matrice de dilatation, par $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}$.

Remarque 28

1. Pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, avec $i \neq j$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\det(T_{ij}(\lambda)) = 1$ et $T_{ij}^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$.
2. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, on a $\det(D_i(\alpha)) = \alpha$ et $D_i(\alpha)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

Proposition 2.4.3 (Opérations élémentaires)

Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$, $L_1, L_2, \dots, L_n$ les lignes de A et $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de A . Alors la multiplication de A par les matrices de transvection ont pour effet des transformations sur les lignes et les colonnes :

- i) $T_{ij}(\lambda)A$ a pour effet de remplacer L_i par $L_i + \lambda L_j$.
- ii) $AT_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer C_j par $C_j + \lambda C_i$.
- iii) $T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)A$ a pour effet de remplacer la ligne L_i par L_j et L_j par $-L_i$.

Démonstration. On pose $A = (a_{kl})_{1 \leq k, l \leq n}$ et $T_{ij}(\lambda) = (\alpha_{kl})_{1 \leq k, l \leq n}$, alors on a $\alpha_{kk} = 1$, $\alpha_{ij} = \lambda$ et $\alpha_{kl} = 0$, si $k \neq i$ ou $l \neq j$.

- i) Posons $T_{ij}(\lambda)A = (c_{kl})_{1 \leq k, l \leq n}$, alors on a $c_{il} = \sum_{p=1}^n \alpha_{ip}a_{pl}$.

Pour $k = i$, on a $\alpha_{ii} = 1$, $\alpha_{ij} = \lambda$ et $\alpha_{ip} = 0$, pour $p \neq i$ et $p \neq j$, donc pour tout $l \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $c_{il} = a_{il} + \lambda a_{jl}$.

Pour $k \neq i$, on a $\alpha_{kp} = 0$, pour tout $p \neq k$, et $\alpha_{kk} = 1$, donc $c_{kl} = a_{kl}$.

- ii) Il suffit de remarquer que $AT_{ij}(\lambda) = {}^t[{}^t(T_{ij}(\lambda)A)] = {}^t[T_{ji}(\lambda){}^tA]$.

- iii) D'après i), $T_{ij}(1)A$ a pour effet de remplacer L_i par $L_i + L_j$, puis $T_{ji}(-1)T_{ij}(1)A$ a pour effet de remplacer L_j par $L_j - (L_i + L_j)$, avec $L_j - (L_i + L_j) = -L_j$ et enfin $T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)A$ a pour effet de remplacer $L_i + L_j$ par $(L_i + L_j) + (-L_j)$, avec $(L_i + L_j) + (-L_j) = L_i$.

□

Théorème 2.4.1

Le groupe $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par l'ensemble des matrices de transvection.

Démonstration. Soit $A \in SL_n(\mathbb{K})$. Comme A est inversible, alors $C_1 \neq 0$, avec

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

S'il existe $i \geq 2$, tel que $a_{i1} \neq 0$, alors en multipliant A à gauche par $T_{1i}(\lambda)$, où $\lambda = \frac{1 - a_{11}}{a_{i1}}$, le coefficient a_{11} sera remplacé par 1.

Si pour tout $i \geq 2$, on a $a_{i1} = 0$, alors $a_{11} \neq 0$, donc en multipliant A à gauche par $T_{21}(1)T_{12}(-1)T_{21}(1)$, le coefficient a_{21} sera remplacé par a_{11} et ainsi on retrouve le cas précédent. Après cette opération, on obtient une matrice dont le coefficient $(1,1)$ est égal à 1. Si pour tout $i \geq 2$ et pour tout $j \geq 2$, en multipliant la matrice obtenue successivement à gauche par $T_{i1}(-a_{i1})$ et à droite par $T_{1j}(-a_{1j})$, alors il existe des matrices de transvections $T_1, T_2, \dots, T_p$, $S_1, S_2, \dots, S_q$ et il existe une matrice A_1 , telles que

$$T_1 T_2 \cdots T_p A S_1 S_2 \cdots S_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

On a $\det(A_1) = \det(A) = 1$, donc par induction, en appliquant le même processus et en remarquant que si T est une matrice de transvection d'ordre $n - 1$, alors la matrice définie par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

est une matrice de transvection d'ordre n , on voit qu'il existe des matrices de transvections $U_1, U_2, \dots, U_r$ et $V_1, V_2, \dots, V_s$, telles que

$$U_1 U_2 \cdots U_r A V_1 V_2 \cdots V_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

donc $A = U_r^{-1} \cdots U_1^{-1} V_s^{-1} \cdots V_1^{-1}$. □

Corollaire 2.4.1

$GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par l'ensemble des matrices de transvection et de dilatation.

Démonstration. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et soit $D = D_{11}(\alpha)$, avec $\alpha = \frac{1}{\det(A)}$, alors $\det(DA) = 1$, donc d'après le théorème précédent, il existe des matrices de transvection $T_1, T_2, \dots, T_m$, telles que $DA = T_1 T_2 \cdots T_m$, donc $A = T_1 T_2 \cdots T_m D^{-1}$. $\square$

2.4.4 Trace d'une matrice carrée

Définition 2.4.4

Soit K un corps commutatif. Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, une matrice carrée à coefficients dans K , on définit la **trace** de A , qu'on note $\text{tr}(A)$, par

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Proposition 2.4.4

Soit K un corps commutatif. Alors

- i) $\forall A \in M_n(K), \forall B \in M_n(K), \text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.
- ii) $\forall \lambda \in K, \forall A \in M_n(K), \text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$.
- iii) $\forall A \in M_n(K), \forall B \in M_n(K), \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Démonstration. i) On sait que $A + B = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, où pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on a $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Donc on a

$$\text{tr}(A + B) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

ii) On sait aussi que $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, donc on aura,

$$\text{tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^n \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} = \lambda \text{tr}(A)$$

iii) On pose $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ $AB = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $BA = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Alors on sait que,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad \text{et} \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}$$

Donc on aura,

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} \right) = \sum_{k=1}^n d_{kk} = \text{tr}(BA) \end{aligned}$$

Définition 2.4.5

Deux matrices A et B de $M_n(K)$ sont dites **semblables**, s'il existe une matrice **inversible** P de $M_n(K)$, telle que $B = P^{-1}AP$.

Remarque 29

La relation $\mathcal{R}$ définie sur $M_n(K)$, par

$$A \mathcal{R} B \iff A \text{ et } B \text{ sont semblables}$$

est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence d'une matrice A , s'appelle la classe de similitude de A .

Corollaire 2.4.2

Deux matrices semblables de $M_n(K)$ ont même trace.

Démonstration. Soient A et B deux matrices semblables de $M_n(K)$. Alors, il existe une matrice inversible P , telle que $B = P^{-1}AP$. Donc on aura,

$$\text{tr}(B) = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(P^{-1}(AP)) = \text{tr}((AP)P^{-1}) = \text{tr}(A(P P^{-1})) = \text{tr}(A)$$

2.5 Matrices et applications linéaires

2.5.1 Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\beta' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_m)$ une base de F . Soit $f : E \longrightarrow F$ une

application linéaire, alors $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, il existe un unique m -uplet $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in K^m$, tel que

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i$$

On obtient, donc une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, où pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de A est formée par les composantes de $f(e_j)$ dans la base β' ,

$$A = \begin{matrix} & f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \\ \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Définition 2.5.1

La matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ s'appelle la matrice de f par rapport aux bases β et β' . On écrit $A = \text{Mat}(f, \beta, \beta')$.

Remarque 30

1. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et u un endomorphisme de E . Dans ce cas, on parle seulement de la matrice de u par rapport à la base β et on a

$$\text{Mat}(u, \beta) = \begin{matrix} & f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

2. Soient E un K -espace vectoriel de dimension $= n$, F un K -espace vectoriel de dimension $= m$, β une base de E et β' une base de F . Alors l'application,

$$\begin{aligned} L(E, F) &\longrightarrow M_{m,n}(K) \\ f &\longmapsto \text{Mat}(f, \beta, \beta') \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. Soient E un K -espace vectoriel de dimension $= n$ et β une base de E . Alors l'application,

$$\begin{aligned}\Phi : L(E) &\longrightarrow M_n(K) \\ u &\longmapsto \text{Mat}(u, \beta)\end{aligned}$$

est à la fois un isomorphisme d'espaces vectoriels et un isomorphisme d'anneaux. Dans ce cas, on dit que Φ est un isomorphisme d'algèbres. En effet, on vérifie facilement que,

- i) $\forall u \in L(E), \forall v \in L(E), \text{Mat}(u + v, \beta) = \text{Mat}(u, \beta) + \text{Mat}(v, \beta).$
- ii) $\forall \lambda \in K, \forall u \in L(E), \text{Mat}(\lambda u, \beta) = \lambda \text{Mat}(u, \beta).$
- iii) $\forall u \in L(E), \forall v \in L(E), \text{Mat}(u \circ v, \beta) = \text{Mat}(u, \beta) \times \text{Mat}(v, \beta).$

Proposition 2.5.1

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\beta' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_m)$ une base de F . Soient $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ la matrice de f par rapport aux bases β et β' . Soit $x \in E$ avec $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ et soit $y = f(x)$ avec $y = \sum_{i=1}^m y_i e'_i$, alors

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

Démonstration. Supposons que $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ et $y = \sum_{i=1}^m y_i e'_i$. Comme $y = f(x)$, alors on a

$$\begin{aligned}y &= f\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_j e'_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) e'_i\end{aligned}$$

On en déduit donc que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, on a $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ □

Remarque 31

1. Si on pose,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

alors on aura,

$$\boxed{y = f(x) \iff Y = AX}$$

où AX est le produit des matrices A et X qui est bien défini, car le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de X .

2. Soit K un corps commutatif et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ une matrice à coefficients dans K . Alors A peut-être considérée comme une application linéaire de K^n vers K^m ,

$$\begin{aligned} A : K^n &\longrightarrow K^m \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

Dans ce cas, les éléments de K^n et K^m sont considérés comme des matrices colonnes.

2.5.2 Matrice de passage – Changement de base

Matrice de passage

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et soient $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\beta' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E , alors on a,

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$$

Donc, on obtient une matrice carrée $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, où pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, la $j^{\text{ième}}$ colonne est formée par les composantes de e'_j dans la base β .

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Définition 2.5.2

$P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ s'appelle la matrice de passage de la base β à la base β' .

Remarque 32

1. Par définition, on voit que la matrice de passage P de la base β à la base β' est la matrice de l'endomorphisme p défini par

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad p(e_j) = e'_j$$

p transforme une base de E en une base de E , donc p est un automorphisme de E et par suite, la matrice P est inversible.

2. Soit E un K espace vectoriel de dimension $= n$, muni de deux bases $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\beta' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$.

Soit $x \in E$, alors x se décompose de deux manières différentes :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{et} \quad x = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$$

Soient $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de passage de la base β à la base β' , X et X' les matrices colonnes définies par,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Cherchons une relation entre P , X et X' . Pour cela on a

$$x = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \left(\sum_{i=1}^n p_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j \right) e_i$$

Donc, d'après l'unicité de la décomposition, on a

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j$$

Ainsi, on obtient la relation $\boxed{X = PX'}$.

Proposition 2.5.2

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , β et γ deux bases de E . Soient P la matrice de passage de la base β à la base γ et Q la matrice de passage de la base γ à la base β , alors on a $Q = P^{-1}$.

Démonstration. On pose $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $Q = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, on a

$$e_j = \sum_{k=1}^n q_{kj} v_k = \sum_{k=1}^n q_{kj} \left(\sum_{i=1}^n p_{ik} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n p_{ik} q_{kj} \right) e_i$$

Donc pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on a $\sum_{k=1}^n p_{ik} q_{kj} = \delta_{ij}$, ce qui prouve que $PQ = I$, donc $Q = P^{-1}$. □

Formule de changement de base**Théorème 2.5.1**

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Soient β et γ deux bases de E , β' et γ' deux bases de F , P la matrice de passage de β à γ et Q la matrice de passage de β' à γ' . Soient $A = \text{Mat}(f, \beta, \beta')$ et $B = \text{Mat}(f, \gamma, \gamma')$, alors on a

$$B = Q^{-1}AP$$

Démonstration. On pose $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $\beta' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ et $\gamma' = (v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$. Comme β et γ sont deux bases de E , alors tout $x \in E$, s'écrit sous la forme,

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{et} \quad x = \sum_{i=1}^n x'_i v_i$$

β' et γ' sont deux bases de F , donc pour tout $x \in E$, $f(x)$ s'écrit sous la forme,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n y_i e'_i \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{i=1}^n y'_i v'_i$$

Donc, si on pose

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

alors, d'après ce qui précède, on sait que

$$X = PX', \quad Y = QY', \quad Y = AX \quad \text{et} \quad Y' = BX'$$

Donc, en remplaçant X et Y dans $Y = AX$, on obtient,

$$\forall X' \in \mathbb{R}^n, \quad Y' = (Q^{-1}AP)X' \quad \text{et} \quad Y' = BX'$$

ceci n'est possible que si $B = Q^{-1}AP$. □

Corollaire 2.5.1

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . Soient β et γ deux bases de E , $A = \text{Mat}(u, \beta)$, $B = \text{Mat}(u, \gamma)$ et P la matrice de passage de la base β à la base γ . Alors on a

$$B = P^{-1}AP$$

Démonstration. C'est un cas particulier du théorème précédent. □

Remarque 33

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . Soient β et γ deux bases de E , $A = \text{Mat}(u, \beta)$, $B = \text{Mat}(u, \gamma)$. Alors, d'après le corollaire précédent, les matrices A et B sont semblables, donc elles ont la même trace. Ainsi, la trace de la matrice de u , par rapport à une base de E , ne dépend pas de la base choisie.

Ce qui justifie la définition suivante :

Définition 2.5.3

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E , β une base de E et $A = \text{Mat}(u, \beta)$. On définit la trace de u , qu'on note $\text{tr}(u)$, par

$$\text{tr}(u) = \text{tr}(A)$$

2.6 Rang d'une application linéaire - Rang d'une matrice

2.6.1 Définition et propriétés de base

Rappelons que si K est un corps commutatif, alors toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, peut-être considérée comme une application linéaire, notée encore A , de K^n vers K^m , définie par,

$$\forall X \in K^n, \quad A(X) = AX$$

où AX est le produit matriciel de la matrice A par la matrice colonne X .

Définition 2.6.1

- i) Soient E un K -espace vectoriel et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ un système de vecteurs de E . On définit le rang de $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, qu'on note $rg(v_1, v_2, \dots, v_n)$, par

$$rg(v_1, v_2, \dots, v_n) = \dim(\text{Vect}(\{v_1, v_2, \dots, v_n\}))$$

- ii) Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On définit le rang de f , qu'on note $rg(f)$, par

$$rg(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

- iii) Soit A une matrice de $M_{m,n}(K)$, alors par définition, le rang de A est égal au rang de l'application linéaire définie par A ,

$$rg(A) = \dim(\text{Im}(A))$$

Remarque 34

1. Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie, n et m respectivement.

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Alors on sait que

$$\text{Im} = \text{Vect}(\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\})$$

Donc

$$\boxed{rg(f) = \dim(\text{Vect}(\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}))}$$

2. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ une matrice de $M_{m,n}(K)$. Pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, soit v_j le vecteur de K^m défini par,

$$v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Alors $v_1, v_2, \dots, v_n$ sont appelés les vecteurs colonnes de la matrice A . Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n , alors on a

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad Ae_j = v_j$$

Donc, on en déduit que $\boxed{rg(A) = rg(v_1, v_2, \dots, v_n)}$.

3. Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie, $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, β une base de E , β' une base de F et $A = \text{Mat}(f, \beta, \beta')$. Alors

$$\boxed{rg(f) = rg(A)}$$

4. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, F un K -espace vectoriel quelconque et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors d'après le théorème du rang, on a

$$\boxed{rg(f) = \dim(E) - \dim(\ker(f))}$$

2.6.2 Rang et matrices équivalentes

Définition 2.6.2

Soit K un corps commutatif. Deux matrices A et B de $M_{m,n}(K)$ sont dites *équivalentes*, s'il existe deux matrices inversibles $P \in M_n(K)$ et $Q \in M_m(K)$, tel que

$$\boxed{B = QAP}$$

Remarque 35

La relation $\mathcal{R}$ définie sur $M_{m,n}(K)$ par

$$A \mathcal{R} B \iff A \text{ est équivalente à } B$$

est une relation d'équivalence sur $M_{m,n}(K)$.

Lemme 2.6.1

Soient K un corps commutatif, A une matrice non nul de $M_{m,n}(K)$ et r un entier ≥ 1 . Alors A est de rang r , si et seulement si, A est équivalente à la matrice en blocs $I(m, n, r)$ de $M_{m,n}(K)$, définie par,

$$I(m, n, r) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où I_r est la matrice identité d'ordre r .

Démonstration. $(\implies)$ Supposons que A est de rang r .

Soient $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n et

$\beta' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_m)$ celle de K^m .

Soit $f : K^n \longrightarrow K^m$ l'application linéaire de matrice A par rapport aux bases β et β' , donc $rg(f) = rg(A) = r$, par suite $\dim(\text{Im}) = r$.

Soit $(v'_1, v'_2, \dots, v'_r)$ une base de Im et soient $v'_{r+1}, \dots, v'_m$ des vecteurs de K^m , tels que $\gamma' = (v'_1, v'_2, \dots, v'_r, v'_{r+1}, \dots, v'_m)$ soit une base de K^m .

Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, soit $v_i \in K^n$, tel que $v'_i = f(v_i)$, alors il est facile de vérifier que $(v_1, v_2, \dots, v_r)$ est libre et que

$$\text{Vect}(\{v_1, v_2, \dots, v_r\}) \cap \ker(f) = \{0\}$$

Or, d'après le théorème du rang, on a $\dim(E) = r + \dim(\ker(f))$, par conséquent, on a

$$E = \text{Vect}(\{v_1, v_2, \dots, v_r\}) \oplus \ker(f)$$

Soit $(v_{r+1}, \dots, v_n)$ une base de $\ker(f)$, donc

$\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ est une base de K^n et on a

$$f(v_i) = \begin{cases} v'_i & \text{si } i \in \{1, 2, \dots, r\} \\ 0 & \text{si } i \in \{r+1, \dots, n\} \end{cases}$$

Donc la matrice B de f par rapport aux bases γ et γ' s'écrit sous la forme suivante :

$$B = \begin{matrix} & f(v_1) & \dots & f(v_r) & f(v_{r+1}) & \dots & f(v_n) \\ \begin{matrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_r \\ v'_{r+1} \\ \vdots \\ v'_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} = I(m, n, r)$$

Soit P la matrice de passage de la base β à la base γ et Q la matrice de passage de la base β' à la base γ' . Puisque $A = \text{Mat}(f, \beta, \beta')$ et $I(m, n, r) = \text{Mat}(f, \gamma, \gamma')$, alors d'après la formule de changement de base, on a $I(m, n, r) = Q^{-1}AP$. Donc A et $I(m, n, r)$ sont équivalentes.

($\Leftarrow$) Exercice. □

Théorème 2.6.1

Soient K un corps commutatif, A et B deux matrices de $M_{m,n}(K)$. Alors

$$\boxed{rg(A) = rg(B) \iff A \text{ et } B \text{ sont équivalentes}}$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que $rg(A) = rg(B) = r$, alors, d'après le lemme précédent, A et B sont équivalentes à $I(m, n, r)$, donc, par transitivité, A et B sont équivalentes.

($\Leftarrow$) On sait que $A : K^n \rightarrow K^m$ et $B : K^n \rightarrow K^m$ sont considérées comme des applications linéaires et que

$$rg(A) = \dim(A(K^n)) \text{ et } rg(B) = \dim(B(K^n))$$

Comme A et B sont équivalentes, alors il existe deux matrices inversibles inversibles P et Q , telles que $B = QAP$, donc on a

$$\begin{aligned} B(K^n) &= (QAP)(K^n) = (QA)(P(K^n)) \\ &= (QA)(K^n), \text{ car } P \text{ inversible, donc } P(K^n) = K^n \\ &= Q(A(K^n)) \end{aligned}$$

Q est une matrice inversible, donc $Q : K^m \longrightarrow K^m$ est un automorphisme, par suite, pour tout sous-espace vectoriel F de K^m , on a $\dim(F) = \dim(Q(F))$, donc, en particulier, on a

$$rg(B) = \dim(B(K^n)) = \dim(Q(A(K^n))) = \dim(A(K^n)) = rg(A)$$

2.7 Exercices

2.7.1 Noyau, image, isomorphisme, automorphisme, théorème du rang

Exercice 27

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , $F_1, F_2, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E , avec $k \geq 2$. Montrer que

$$\sum_{j=1}^k \dim(F_j) > n(k-1) \implies \bigcap_{j=1}^k F_j \neq \{0\}$$

Exercice 28

Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il existe un unique $P \in \mathbb{K}_n[X]$, tel que $Q = P + P' + \dots + P^{(n-1)}$.

Exercice 29

On considère le corps $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

- a) Trouver une base de $\mathbb{C}$.
- b) Montrer que pour tout endomorphisme f de $\mathbb{C}$, il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + a\bar{z}$$

- c) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit un automorphisme de $\mathbb{C}$.

Exercice 30

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E , avec $u^2 = -Id_E$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $\lambda = \alpha + i\beta$ et pour $x \in E$, on pose

$$\lambda \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot u(x)$$

- a) Montrer qu'on définit ainsi une structure de $\mathbb{C}$ -espace vectoriel sur E .
- b) Montrer que si E est de dimension finie, alors $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ est paire.

Exercice 31

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E , tel que $u^2 = -Id_E$. Pour chaque $x \in E$, avec $x \neq 0$, on pose $E_x = \text{Vect}(\{x, u(x)\})$.

1. Déterminer $\dim(E_x)$.
2. Soit F un sous-espace stable par u . Montrer que
 - a) $E_x \cap F = \{0\} \implies E_x \subseteq F$.
 - b) Si $x \notin F$ alors la somme $E_x + F$ est directe.
3. Montrer qu'il existe $x_1, x_2, \dots, x_m$ éléments de E , tels que

$$E = E_{x_1} \oplus E_{x_2} \oplus \dots \oplus E_{x_m}$$

4. En déduire que la dimension de E est paire et qu'il existe une base β de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit sous la forme diagonale en blocks,

$$A = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

5. Réciproquement, montrer que si $\dim(E)$ est paire, alors E possède au moins un endomorphisme u , tel que $u^2 = -Id_E$.
6. On suppose $K = \mathbb{R}$ et u un endomorphisme de E , tel que $u^2 = -Id_E$. Soit L la partie de $L(E)$ définie par $L = \{P(u) : P \in \mathbb{R}[X]\}$
 - a) Montrer que L est un corps commutatif isomorphe à $\mathbb{C}$ et que

$$\forall v \in L(E), \quad v \in L \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 : v = au + bId_E$$

- b) On munit E de la loi externe suivante :

$$\begin{aligned} K \times E &\longrightarrow E \\ (v, x) &\longmapsto v \cdot x = v(x) \end{aligned}$$

Montrer que E muni de cette loi externe est un L -espace vectoriel, qu'on note $\widehat{E}$.

- c) Montrer que $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2 \dim_L(\widehat{E})$.

Exercice 32

Soit $\mathbb{C}[x, y]$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions polynômes à deux variables sur $\mathbb{C}$ et soit E la partie de $\mathbb{C}[x, y]$ définie par

$$E = \{P \in \mathbb{C}[x, y] : \deg_x(P) \leq 2 \text{ et } \deg_y(P) \leq 2\}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[x, y]$. Quelle est la dimension de E ?
2. Soit u l'application définie sur E par

$$\forall P \in E, \quad u(P) = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}$$

Montrer que u est un endomorphisme de E et déterminer les dimensions de $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$.

Exercice 33

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

1. A quelle condition nécessaire et suffisante existe-t-il un endomorphisme u de E , tel que $\ker(u) = F$ et $\text{Im}(u) = G$?
2. On pose $\mathcal{G} = \{u \in L(E) : \text{Im}(u) = F \text{ et } \ker(u) = G\}$. Montrer que

$$(\mathcal{G}, \circ) \text{ est un groupe } \iff E = F \oplus G$$

Exercice 34

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E . Montrer que

1. $\dim(\ker(u + v)) \leq \dim(\ker(u) \cap \ker(v)) + \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v))$.
2. $\dim(\ker(u \circ v)) \leq \dim(\ker(u)) + \dim(\ker(v))$.

Exercice 35

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes non nuls de E , tel que $u^2 = v^2 = 0$ et $\ker(u) \cap \ker(v) = \{0\}$. Montrer que

- a) $\dim(\ker(u)) = \dim(\ker(v))$.
- b) $u + v$, $u - v$, $uv + vu$ et $uv - vu$ sont des automorphismes de E .
- c) $E = \ker(u) \oplus \ker(v)$.
- d) u et v sont semblables.

Exercice 36

Soient E , F et G trois K -espaces vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. Montrer que $f(\ker(g \circ f)) = \text{Im} \cap \ker(g)$ et que $g^{-1}(\text{Im}(g \circ f)) = \text{Im} + \ker(g)$

Exercice 37

Soient E et F deux K -espaces vectoriels. $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $\mathcal{E}$ la partie de $L(F, E)$ définie par

$$g \in \mathcal{E} \iff f \circ g \circ f = 0$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $L(F, E)$ et que

$$\forall g \in L(F, E), \quad g \in \mathcal{E} \iff g(\text{Im}) \subseteq \ker(f)$$

2. Montrer que

$$\mathcal{E} = \{0\} \iff f \text{ est bijective}$$

3. On suppose $\dim(E) = n$, $\dim(F) = p$ et $\text{rg}(f) = r$. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

Exercice 38

Soient E , F et G trois K -espace vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. Montrer que si F/Im et $G/\text{Im}(g)$ sont de dimension finie, alors $G/\text{Im}(g \circ f)$ est de dimension finie.

Exercice 39

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, où K est un corps de caractéristique différente de 2. Dans cet exercice, on se propose de montrer que tout endomorphisme f de E vérifie la propriété (P) suivante :

(P) : « f est la différence de deux automorphismes de E »

1. Montrer que si f est un automorphisme de E , alors $2f$ est un automorphisme de E . En déduire que tout automorphisme de E vérifie la propriété (P).
2. On suppose que f est un endomorphisme de E , non nul et non injectif et que $E = \ker(f) \oplus \text{Im}$.
 - a) Soit $\tilde{f} : \text{Im} \longrightarrow \text{Im}$ l'application qui à x fait correspondre $f(x)$. Montrer que $\tilde{f}$ est un automorphisme de Im et en déduire qu'il existe deux automorphismes f_1 et f_2 de Im , tels que $\tilde{f} = f_1 - f_2$.
 - b) Montrer que l'on peut prolonger f_1 et f_2 en deux automorphismes de E , g_1 et g_2 respectivement, tels que les restrictions de g_1 et g_2 à $\ker(f)$ coïncident.
 - c) En déduire que f possède la propriété (P).
3. Soit maintenant f un endomorphisme de E , non nul et non inversible. F un supplémentaire de Im dans E .
 - a) Justifier que $F \neq \{0\}$.

- b) Montrer qu'il existe un isomorphisme h_1 de F dans $\ker(f)$.
- c) Montrer que l'on peut prolonger h_1 en un automorphisme h de E .
- d) Montrer que $\ker(f \circ h) = F$ et $\text{Im}(f \circ h) = \text{Im}$.
- e) En déduire que l'endomorphisme $f \circ h$ vérifie la propriété (P).
- f) Déduire, de ce qui précède, que f vérifie la propriété (P).

2.7.2 Rang - Théorème du rang

Exercice 40

Soient E un K -espace vectoriel de **dimension finie**, F un K -espace vectoriel quelconque et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que

- a) Pour tout sous-espace vectoriel G de E , on a

$$\dim(G) = \dim(f(G)) + \dim(G \cap \ker(f))$$

- b) Pour tout sous-espace vectoriel H de F , on a

$$\dim(f^{-1}(H)) = \dim(H \cap \text{Im}) + \dim(\ker(f))$$

Exercice 41

Soient E , F et G trois K -espaces vectoriels de dimension finie, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. Montrer que

$$rg(f) + rg(g) - \dim(F) \leq rg(g \circ f) \leq \inf(rg(f), rg(g))$$

Exercice 42

Soient E et F deux K -espaces vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires. Montrer que

$$|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f + g) \leq rg(f) + rg(g)$$

Exercice 43

Soient E et F deux K -espaces vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires. Montrer que

$$rg(f + g) = rg(f) + rg(g) \iff \begin{cases} \text{Im} \cap \text{Im}(g) = \{0\} \\ E = \ker(f) + \ker(g) \end{cases}$$

Exercice 44

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E , tels que

$$E = \ker(u) + \ker(v) = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$$

Montrer que

- a) $E = \ker(u) \oplus \ker(v) = \operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Im}(v)$.
 b) $E = \operatorname{Im}(u + v)$ et $rg(u + v) = rg(u) + rg(v)$.

Exercice 45

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie, $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, E)$, tel que

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g$$

Montrer que

- a) $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$ et $E = \operatorname{Im} \oplus \ker(g)$
 b) $f, g, f \circ g$ et $g \circ f$ ont même rang.

Exercice 46

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E , tel que $u^3 = 0$.

- a) Montrer que $rg(u) + rg(u^2) \leq \dim(E)$.
 b) Montrer que $2rg(u^2) \leq rg(u)$.

Exercice 47

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E , tels que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \operatorname{GL}(E)$. Montrer que $rg(u) + rg(v) = \dim(E)$.

Exercice 48

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E . Montrer que

- a) $rg(v \circ u) = rg(v) \iff E = \operatorname{Im}(u) + \ker(v)$.
 b) $rg(v \circ u) = rg(u) \iff \operatorname{Im}(u) \cap \ker(v) = \{0\}$.

Exercice 49

Soient E et F deux K -espaces vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires.

- Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
 - $\operatorname{Im}(g) \subseteq \operatorname{Im}(f)$.
 - Il existe $h \in L(E)$, tel que $g = f \circ h$.
- Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
 - $\ker(g) \subseteq \ker(f)$.
 - Il existe $h \in L(F)$, tel que $f = h \circ g$.
- Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
 - $rg(g) \leq rg(f)$.
 - Il existe $h \in L(E)$ et il existe $k \in L(F)$, tels que $f \circ h = k \circ g$.

2.7.3 Projecteurs

Exercice 50

Soient E un K -espace vectoriel quelconque et u un projecteur de E .

1. Montrer que
 - a) $Id_E - u$ est aussi un projecteur de E .
 - b) $\text{Im}(u) = \ker(u - Id_E)$.
 - c) $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$.
 - d) Si E est de dimension finie, alors $rg(u) = tr(u)$.
2. Soit v un endomorphisme quelconque de E . Montrer que

$$u \circ v = v \circ u \iff v(\ker(u)) \subseteq \ker(u) \text{ et } v(\text{Im}(u)) \subseteq \text{Im}(u)$$

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que
 - a) $u^{-1}(F) = \ker(u) \oplus (F \cap \text{Im}(u))$.
 - b) F est stable par u , si et seulement si, $F = (F \cap \ker(u)) \oplus (F \cap \text{Im}(u))$.
4. Soit v un autre projecteur de E , tel que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que
 - a) $u \circ v$ et $u + v - u \circ v$ sont deux projecteurs de E .
 - b) $\text{Im}(u \circ v) = \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)$.
 - c) $\text{Im}(u + v - u \circ v) = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.

Exercice 51

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$. On suppose qu'il existe un projecteur p de E , tel que $p \circ u - u \circ p = u$.

- a) Montrer que $u(\ker(p)) \subseteq \text{Im}(p)$ et $\text{Im}(p) \subseteq \ker(u)$.
- b) En déduire que $u^2 = 0$.

Exercice 52

Soit un K -espace vectoriel.

1. Soient u et v deux projecteurs quelconques de E .
 - a) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $u + v$ soit un projecteur de E .
 - b) Dans le cas où $u + v$ est un projecteur de E , montrer que
 - i) $\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0\}$.
 - ii) $\ker(u + v) = \ker(u) \cap \ker(v)$.
 - iii) $\text{Im}(u + v) = \text{Im}(u) \oplus \text{Im}(v)$.
 - c) Montrons si u et v sont deux endomorphismes de E , tels que $u + v$ et v sont des projecteurs, alors u est un projecteur.

2. On suppose K de caractéristique nulle, (par exemple $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E de dimension finie. Soient $u_1, u_2, \dots, u_n$, $n \geq 2$, des projecteurs de E . Montrer que

a) Si $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ est un projecteur, alors

$$\text{Im}(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \text{Im}(u_1) \oplus \text{Im}(u_2) \oplus \dots \oplus \text{Im}(u_n)$$

b) $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ est un projecteur de E , si et seulement si,

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, \quad i \neq j \implies u_i \circ u_j = 0$$

Exercice 53

Soient E un K -espace vectoriel quelconque, u et v deux projecteurs de E , tels que $\text{Im}(u) = \text{Im}(v)$. Montrer que pour tout $\lambda \in K$, $(1 - \lambda)u + \lambda v$ est un projecteur de E .

Exercice 54

Soient E un K -espace vectoriel quelconque, u et v deux endomorphismes de E , tel que $u \circ v = \text{Id}_E$. Montrer que

a) $v \circ u$ est un projecteur de E .

b) $\text{Im}(v \circ u) = \text{Im}(v)$ et $\ker(v \circ u) = \ker(u)$.

Exercice 55

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u et v deux projecteurs de E , tels que $u + v - \text{Id}_E$ soit inversible. Montrer que $rg(u) = rg(v)$.

Exercice 56

Soient E un K -espace vectoriel et f un endomorphisme non nul de E . On pose

$$E_f = \{u \circ f : u \in L(E)\}$$

a) Vérifier que E_f est un sous-espace vectoriel de E .

b) Soit g un endomorphisme de E . Montrer que

$$g \in E_f \iff \ker(f) \subseteq \ker(g)$$

c) Montrer qu'il existe un projecteur non nul appartenant à E_f .

Exercice 57

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$.

a) Montrer qu'il existe un projecteur p et un automorphisme f de E , tels que $u = p \circ f$.

b) Montrer qu'il existe un projecteur q et un automorphisme g de E , tels que $u = g \circ q$.

Exercice 58

Soit E un K -espace vectoriel quelconque.

1. Soient p un projecteur de E et u un endomorphisme quelconque de E .
Montrer que
 - a) $\ker(u \circ p) = (\ker(u) \cap \operatorname{Im}(p)) \oplus \ker(p)$.
 - b) $\operatorname{Im}(p \circ u) = (\ker(p) + \operatorname{Im}(u)) \cap \operatorname{Im}(p)$.
2. Soient p et q deux projecteurs de E . Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E , si et seulement si,

$$\operatorname{Im}(p) \cap (\operatorname{Im}(q) + \ker(p)) \subseteq \operatorname{Im}(q) \oplus (\ker(p) \cap \ker(q))$$

3. On suppose que $\dim(E) = 3$ et soient p et q deux projecteurs de E , tels que $rg(p) = rg(q) = 1$.
 - a) A quelles conditions nécessaires et suffisantes, portant sur les images et les noyaux de p et q , $p \circ q$ est un projecteur de E .
 - b) Déterminer, dans ces conditions, le noyau et l'image de $p \circ q$ et $q \circ p$.

Exercice 59

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E .

1. On suppose qu'il existe un projecteur p de E , tel que $p \circ u - u \circ p = u$.
 - a) Montrer que $u \circ p = 0$.
 - b) En déduire que $u \circ u = 0$.
2. Réciproquement, on suppose que $u \circ u = 0$.
 - a) Montrer que $\operatorname{Im}(u) \subseteq \ker(u)$.
 - b) Soit F un sous-espace vectoriel de E , tel que $\operatorname{Im}(u) \subseteq F \subseteq \ker(u)$ et soit G un supplémentaire de F dans E . Soit q la projection sur F parallèlement à G , calculer $q \circ u - u \circ q$.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un projecteur p de E , tel que $p \circ u - u \circ p = u$. Cette condition étant supposée remplie, y-a-t-il toujours unicité du projecteur p ?
4. On prend $E = \mathbb{R}^2$ et u l'endomorphisme de E défini par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x, y) = (-2x + 4y, -x + 2y)$$

- a) Vérifier que $u \circ u = 0$.
- b) Déterminer un projecteur p de E , tel que $p \circ u - u \circ p = u$.

2.7.4 Matrices, applications linéaires de matrices

Exercice 60

Soient K un corps commutatif et $\mathcal{H} = \text{Vect}(\{AB - BA : (A, B) \in M_n(K)^2\})$.

1. Montrer que $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, i \neq j \implies E_{ij} \in \mathcal{H}$.
2. Montrer que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, E_{ii} - E_{nn} \in \mathcal{H}$.
3. En déduire que $\mathcal{H}$ est un hyperplan de $M_n(K)$ et que $\ker(\text{tr}) = \mathcal{H}$.

Exercice 61

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, telle que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 62

Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $M_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique, si

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, a_{ij} \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable pour la multiplication des matrices.
2. Déterminer les matrices A qui sont inversibles, telles que $A \in \mathcal{S}$ et $A^{-1} \in \mathcal{S}$.
3. Montrer que si A est une matrice stochastique, alors

$$\sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda I - A \text{ n'est pas inversible}\} = 1$$

et que ce sup est atteint.

Exercice 63

Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ avec $\text{tr}(A) \neq 0$ et $f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), f(M) = \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A$$

1. Montrer que f est endomorphisme de E .
2. Déterminer $\ker(f)$ et Im .

Exercice 64

Soient A une matrice non nulle de $M_n(\mathbb{C})$ et $f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), f(M) = M + \text{tr}(M)A$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.
2. Déterminer, en fonction de A , le noyau et l'image de f .
3. Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$, résoudre l'équation $X + \text{tr}(X)A = B$.

Exercice 65

Soit $f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ une application linéaire non constante, telle que

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{C})^2, \quad f(AB) = f(A)f(B)$$

1. Montrer que $f(I) = 1$ et $f(0) = 0$.
2. Montrer que si A est inversible, alors $f(A) \neq 0$.
3. Pour tout $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, soit $J_r \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$J_r = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, 0, \dots, 0)$$

- a) Montrer que pour tout $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on a $f(J_r) = 0$.
- b) En déduire que si A n'est pas inversible, alors $f(A) = 0$.

Exercice 66

Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $M_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), est dite magique, s'il existe une constante notée $s(A)$, telle que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = s(A) \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = s(A)$$

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble de toutes les matrices magiques de $M_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ et que l'application

$$\begin{aligned} s : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longmapsto s(A) \end{aligned}$$

est un homomorphisme d'algèbres.

2. Soit $J \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A \in \mathcal{M}$, si et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$, tel que $AJ = JA = \alpha J$.
3. Montrer que si A est une matrice magique inversible, alors A^{-1} est aussi magique.
4. Montrer que $\mathcal{M}$ est la somme directe du sous-espace vectoriel des matrices magiques symétriques et celui des matrices magiques antisymétriques.

5. On désigne par G et H les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ définis par

$$G = \text{Vect}((1, 1, \dots, 1))$$

$$H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$$

- Montrer que $A \in \mathcal{M}$, si et seulement si, G et H sont stables par A .
- En déduire la dimension de $\mathcal{M}$.

Exercice 67

Soient K un corps commutatif, $M_2(K)$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans K et J la matrice définie par $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Pour $T \in M_2(K)$, avec $T \neq 0$ et $T \neq I$, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes,
 - $T^2 = T$
 - Il existe $P \in \text{GL}_2(K)$, telle que $T = PJP^{-1}$
 - $\text{tr}(T) = 1$ et $\det(T) = 0$.
- On suppose que K est fini de cardinal q .
 - Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble de toutes les bases de K^2 et soit (e_1, e_2) la base canonique de K^2 . Montrer que l'application de $\text{GL}_2(K)$ vers $\mathcal{B}$, qui à T associe (Te_1, Te_2) , est bijective.
 - Sur $K^2 \setminus \{(0, 0)\}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par,

$$x \mathcal{R} y \iff \exists \alpha \in K : y = \alpha x$$

- Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
 - Pour $x \in K^2 \setminus \{(0, 0)\}$, déterminer le cardinal de la classe de x modulo la relation $\mathcal{R}$.
 - Quel est le nombre des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$?
- Déduire, de ce qui précède, le cardinal de $\text{GL}_2(K)$.
- On pose $\mathcal{G} = \{P \in \text{GL}_2(K) : PJP^{-1} = J\}$
 - Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $\text{GL}_2(K)$.
 - Montrer que

$$P \in \mathcal{G} \iff P \text{ est une matrice diagonale}$$

- Quel est le cardinal de $\mathcal{G}$?
- Déduire, de ce qui précède, le cardinal de l'ensemble suivant

$$\{T \in M_2(K) : T^2 = T\}$$

2.8 Solution des exercices

Exercice 27

On considère l'application $f : E \longrightarrow E/F_1 \times E/F_2 \times \cdots \times E/F_k$ définie pour tout $x \in E$, par $f(x) = (\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$, alors il est clair que f est linéaire et que $\ker(f) = \bigcap_{i=1}^k F_i$. Pour conclure, il suffit de montrer que f n'est pas injective.

Pour cela, comme $\dim(F_1 \times E/F_2 \times \cdots \times E/F_k) = nk - \sum_{i=1}^k \dim(F_i)$ et comme $\sum_{i=1}^k \dim(F_i) > n(k-1)$, alors $\dim(F_1 \times E/F_2 \times \cdots \times E/F_k) < n$, ce qui justifie que f n'est pas injective.

Exercice 28

On considère l'application $f : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X]$, définie pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, par $f(P) = P + P' + \cdots + P^{(n-1)}$, alors il est clair que f est linéaire et que $\ker(f) = \{0\}$, donc f est injective. Comme $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie, alors f est bijective, donc pour tout $Q \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{K}_n[X]$, tel que $Q = f(P) = P + P' + \cdots + P^{(n-1)}$.

Exercice 29

- a) $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$, c'est la base canonique de $\mathbb{C}$.
 b) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}$. On pose

$$a = \frac{if(1) + f(i)}{2i} \quad \text{et} \quad b = \frac{if(1) - f(i)}{2i}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $z = x + iy$, alors on a

$$f(z) = xf(1) + yf(i) = x(a + b) + yi(a - b) = az + b\bar{z}$$

- c) f est un automorphisme, si et seulement si, $\ker(f) = \{0\}$. Soit $z \in \mathbb{C}$, tel que $f(z) = 0$, alors on a $az + b\bar{z} = 0$, donc on a aussi $\bar{b}z + \bar{a}\bar{z} = 0$. En multipliant la première équation par $\bar{a}$ et la deuxième par b et faisant la différence, on obtient $(|a|^2 - |b|^2)z = 0$, donc si $|a| \neq |b|$, alors $z = 0$, donc f est injective. Réciproquement, supposons que f n'est pas injective et montrons que $|a| = |b|$. Si $f(i) = 0$, alors $a = b$, donc $|a| = |b|$, si $f(i) \neq 0$, puisque f est non injective, alors $(f(1), f(i))$ est lié, donc $\frac{f(1)}{f(i)} \in \mathbb{R}$, par suite, on a $f(1)\overline{f(i)} = \overline{f(1)}f(i)$.

On a alors $-i(a + b)(\bar{a} - \bar{b}) = i(\bar{a} + \bar{b})(a - b)$, donc en développant, on obtient $|a|^2 - |b|^2 = 0$, ce qui donne $|a| = |b|$.

Exercice 30

- a) Soient $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, avec $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ et $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, alors on a $1 \cdot x = x$,

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot x &= (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2)u(x) \\ &= (\alpha_1 x + \alpha)u(x) + (\beta_1 x + \beta)u(x) = \alpha \cdot x + \beta \cdot x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha\beta) \cdot x &= (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2)x + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)u(x) \\ &= \alpha_1(\beta_1 x + \beta_2 u(x)) + \alpha_2(\beta_1 u(x) - \beta_2 x) \\ &= \alpha_1(\beta_1 x + \beta_2 u(x)) + \alpha_2 u(\beta_1 x + \beta_2 u(x)) = \alpha \cdot (\beta \cdot x) \\ &\quad (\text{car } u^2 = -Id_E)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (x + y) &= \alpha_1(x + y) + \alpha_2 u(x + y) \\ &= (\alpha_1 x + \alpha_2 u(x)) + (\alpha_1 y + \alpha_2 u(y)) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y\end{aligned}$$

On voit donc que E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

- b) On suppose E est de dimension finie sur $\mathbb{R}$, alors E est aussi de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit $n = \dim_{\mathbb{C}}(E)$ et soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Montrons que $(e_1, e_2, \dots, e_n, u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base de E . Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$, tel que

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + \beta_1 u(e_1) + \dots + \beta_n u(e_n) = 0$$

alors on a $(\alpha_1 e_1 + \beta_1 u(e_1)) + \dots + (\alpha_n e_n + \beta_n u(e_n)) = 0$, donc si pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on pose $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$, alors on aura $\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = 0$ et comme $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, par suite, on aura

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_n = 0$$

Soit $x \in E$, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i$.

Donc on a $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^n \beta_i u(e_i)$, où $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$, par conséquent, $\{e_1, e_2, \dots, e_n, u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)\}$ est une partie génératrice de E . Ainsi, on voit que $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2n$.

Exercice 31

1. Soit $x \in E$, avec $x \neq 0$. Supposons que $(x, u(x))$ est lié, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $u(x) = \alpha x$, car $x \neq 0$ et $u(x) \neq 0$. Comme $u^2 = -Id_E$, alors on a $\alpha - x = \alpha u(x) = \alpha^2 x$ et comme $x \neq 0$, alors $\alpha^2 = -1$, ce qui est absurde, donc $(x, u(x))$ est libre, par suite $\dim(E_x) = 2$.

2. Supposons que F est un sous-espace stable par u .
- a) Supposons que $E_x \cap F \neq \{0\}$ et soit $y \in E_x \cap F$, avec $y \neq 0$. F est stable par u , donc $u(y) \in F$, par suite, $E_y \subseteq F$. On a aussi $y \in E_x$, donc $E_y \subseteq E_x$. D'après la question précédente, on a $\dim(E_x) = \dim(E_y) = 2$, donc $E_y = E_x$, par suite $E_x \subseteq F$.
- b) Supposons que $x \notin F$, alors $u(x) \notin F$, car F est stable et $u^2 = -Id_E$, donc $E_x \cap F = \{0\}$, par suite, $E_x + F$ est directe.
3. Soit $x_1 \in E$, avec $x_1 \neq 0$. Si $E = E_{x_1}$ c'est terminé, sinon il existe $x_2 \in E$, tel que $x_2 \notin E_{x_1}$, donc d'après la question précédente, on a $E_{x_1} \cap E_{x_2} = \{0\}$, car E_{x_2} est stable par u . Si $E = E_{x_1} + E_{x_2}$, c'est terminé, sinon il existe $x_3 \in E$, tel que $x_3 \notin E_{x_1} + E_{x_2}$, comme $E_{x_1} + E_{x_2}$ est stable par u , alors d'après la question précédente, on a $E_{x_3} \cap (E_{x_1} + E_{x_2}) = \{0\}$. Puisque E est de dimension finie, alors il existe $m \in \mathbb{N}$, avec $m \geq 2$, tel que $E = E_{x_1} \oplus E_{x_2} \oplus \cdots \oplus E_{x_m}$.
4. D'après la question précédente, il existe $x_1, x_2, \dots, x_m \in E$, tel que $E = E_{x_1} \oplus E_{x_2} \oplus \cdots \oplus E_{x_m}$, où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, E_{x_i} est stable par u . Soit v_i l'endomorphisme induit par u sur E_{x_i} et soit A_i la matrice de v_i par rapport à la base $(x_i, u(x_i))$, puisque $u^2 = -Id_E$, alors $A_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit A la matrice de u par rapport à la base $(x_1, u(x_1), x_2, u(x_2), \dots, x_m, u(x_m))$, alors on a

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_m \end{pmatrix}$$

5. Si la dimension de E est paire, on considère l'endomorphisme u de E dont la matrice par rapport à une base de E est égale à la matrice A de la question précédente, alors $u^2 = -Id_E$.
6. Soit $L = \{P(u) : P \in \mathbb{R}[X]\}$.

a) Il est aisé de vérifier que L est un sous-anneau de $L(E)$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, tel que $P(u) \neq 0$ et soit $Q = X^2 + 1$, alors Q ne divise pas P , car $Q(u) = 0$ et $P(u) \neq 0$, et comme Q est irréductible sur $\mathbb{R}$, alors P et Q sont premiers entre eux. En appliquant le théorème de Bezout, il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$, tel que $AP + BQ = 1$, donc $A(u)P(u) = Id_E$, par suite $P(u)^{-1} = A(u)$, donc $P(u)^{-1} \in L$. Nous avons donc établi que tout élément non nul de L possède un inverse dans L , donc L est un corps commutatif.

Soit $v \in L$, alors il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, tel que $v = P(u)$. Faisant la

division euclidienne de P par $X^2 + 1$, alors on a $P = (X^2 + 1)Q + R$, avec $\deg(R) \leq 1$, donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$, tel que $R = aX + b$. Comme $u^2 + Id_E = 0$, alors $v = P(u) = au + bId_E$.

b) On doit vérifier les axiomes de la définition d'un espace vectoriel :

i) Pour tout $x \in E$, on a $Id_E \cdot x = Id_E(x) = x$.

ii) Pour $v, w \in L$ et $x \in E$, on a

$$(v + w) \cdot x = (v + w)(x) = v(x) + w(x) = v \cdot x + w \cdot x$$

iii) Pour $v, w \in L$ et $x \in E$, on a

$$(vw) \cdot x = (vw)(x) = v(w(x)) = v \cdot (w \cdot x)$$

iv) Pour $v \in L$ et $x, y \in E$, on a

$$v \cdot (x + y) = v(x + y) = v(x) + v(y) = v \cdot x + v \cdot y$$

On voit alors que E est L -espace vectoriel.

c) E est de dimension finie, donc $\widehat{E}$ est aussi de dimension finie, car si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , alors pour tout $x \in E$, il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, tel que

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i Id_E) \cdot x$$

donc $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une partie génératrice de $\widehat{E}$, par suite, $\widehat{E}$ est de dimension finie. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de $\widehat{E}$ et soit $x \in E$, alors il existe $v_1, v_2, \dots, v_p \in L$, tel que

$$x = \sum_{i=1}^p v_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^p v_i(e_i)$$

Or, d'après la question a), pour $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, on a $v_i = a_i + b_i u$, il en résulte que

$$x = \sum_{i=1}^p (a_i e_i + b_i u(e_i)) = \sum_{i=1}^p a_i e_i + \sum_{i=1}^p b_i u(e_i)$$

donc $\{e_1, e_2, \dots, e_p, u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)\}$ est une partie génératrice de E et il est facile de vérifier que cette partie est libre, donc $(e_1, e_2, \dots, e_p, u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base de E , par conséquent, on a $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2 \dim_L(\widehat{E})$.

Exercice 32

1. Soient $P_1 \in E$ et $P_2 \in E$, alors on a

$$\deg_x(P_1 + P_2) \leq \max(\deg_x(P_1), \deg_x(P_2))$$

et on a aussi

$$\deg_y(P_1 + P_2) \leq \max(\deg_y(P_1), \deg_y(P_2))$$

donc $P_1 + P_2 \in E$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E$, alors on a

$$\deg_x(\lambda P) \leq \deg_x(P) \text{ et } \deg_y(\lambda P) \leq \deg_y(P)$$

donc $\lambda P \in E$, par suite, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[x, y]$.

On vérifie facilement que $(1, x, y, xy, x^2, y^2)$ est une base de E , donc $\dim(E) = 6$.

2. Soit $P \in E$, avec $P(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2$, alors on a $\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(x, y) = a_3$, donc $P \in \ker(u)$, si et seulement si, $a_3 = 0$. On en déduit donc que $\ker(u) = \text{Vect}(\{1, x, y, x^2, y^2\})$. On a $\dim(\ker(u)) = 5$, donc $\dim(\text{Im}(u)) = 1$ et comme $u(xy) = 1$, alors $\text{Im}(u) = \text{Vect}(1) = \mathbb{C}$.

Exercice 33

1. Supposons qu'il existe un endomorphisme u de E , tel que $\ker(u) = F$ et $\text{Im}(u) = G$. Comme E est de dimension finie, alors d'après le théorème du rang, on a $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
Réciproquement, supposons que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et soit H un supplémentaire de G dans E , alors on a $\dim(G) = \dim(H)$, donc il existe un isomorphisme v de H vers G . Soit p la projection sur H parallèlement à F et soit u l'endomorphisme de E défini pour tout $x \in E$, par $u(x) = v(p(x))$, alors il est facile de voir que $\ker(u) = F$ et $\text{Im}(u) = G$.
2. Supposons que $(\mathcal{G}, \circ)$ est un groupe, où $\mathcal{G}$ est défini par

$$\mathcal{G} = \{v \in L(E) : \ker(v) = F \text{ et } \text{Im}(v) = G\}$$

Soit u l'élément neutre de $\mathcal{G}$, alors on a $u \circ u = u$, donc u est un projecteur et comme $\ker(u) = F$ et $\text{Im}(u) = G$, alors $E = F \oplus G$.

Réciproquement, supposons que $E = F \oplus G$ et considérons la projection p sur G parallèlement à F . Soit $v \in \mathcal{G}$ et soit $x \in E$, alors on a $x = (x - p(x)) + p(x)$, avec $x - p(x) \in F$ et $p(x) \in G$, donc on a $v(x) = v(p(x))$, car $\ker(v) = F$, donc on voit que $v \circ p = v$. On a aussi $v(x) \in G$ et p est une projection sur G , donc $p(v(x)) = v(x)$, par suite,

on a $p \circ v = v$. Nous avons donc établi que p est un élément neutre de $\mathcal{G}$. Cherchons $w \in \mathcal{G}$, tel que $v \circ w = w \circ v = p$. Comme $E = F \oplus G$ et $G = \text{Im}(v)$, alors pour tout $z \in G$, il existe un unique $y \in G$, tel que $z = v(y)$. Soit $x \in E$, comme $p(x) \in G$, alors il existe un unique $y \in G$, tel que $p(x) = v(y)$, on pose $w(x) = y$, alors il est clair que w est linéaire, $\ker(w) = F$ et $\text{Im}(w) \subseteq G$. On a $\dim(\text{Im}(w)) = \dim(\ker(w)) - \dim(E)$ et $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$, donc $\dim(w(G)) = \dim(G)$, par suite $w(G) = G$. On voit alors que $w \in \mathcal{G}$ et $v \circ w = p$, on a aussi $w \circ v = p$, car pour $x \in E$, on a $v(x) \in G$, donc $p(v(x)) = v(x) = v(p(x))$, donc, par définition de w , on a $w(v(x)) = p(x)$.

Exercice 34

1. Soit $w : \ker(u + v) \rightarrow E$ la restriction de u à $\ker(u + v)$, alors on a $\ker(w) = \ker(u) \cap \ker(u + v) = \ker(u) \cap \ker(v)$. Soit $y \in \text{Im}(w)$, alors il existe $x \in \ker(u + v)$, tel que $y = w(x) = u(x)$, on a $(u + v)(x) = 0$, donc $u(x) = -v(x)$, par suite, on a $u(x) \in \text{Im}(v)$, donc $x \in u^{-1}(\text{Im}(v))$. donc on a $\text{Im}(w) \subseteq u(u^{-1}(\text{Im}(v)))$.

Or, on a $u(u^{-1}(\text{Im}(v))) = \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)$, donc d'après le théorème du rang, on a

$$\begin{aligned} \dim(\ker(u + v)) &= \dim(\ker(w)) + \dim(\text{Im}(w)) \\ &\leq \dim(\ker(u) \cap \ker(v)) + \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)) \end{aligned}$$

2. $w : \ker(u \circ v) \rightarrow E$ la restriction de v à $\ker(u \circ v)$, alors on a $\ker(w) = \ker(v) \cap \ker(u \circ v) = \ker(v)$. Soit $y \in \text{Im}(w)$, alors il existe $x \in \ker(u \circ v)$, tel $y = v(x)$, avec $u(v(x)) = 0$, donc $x \in v^{-1}(\ker(u))$, par suite $y \in v(v^{-1}(\ker(u)))$, réciproquement, on voit facilement que si $y \in v(v^{-1}(\ker(u)))$, alors $y \in \text{Im}(w)$, donc $\text{Im}(w) = v(v^{-1}(\ker(u)))$.

On a $v(v^{-1}(\ker(u))) = \ker(u) \cap \text{Im}(v)$, donc $\dim(\text{Im}(w)) \leq \dim(\ker(u))$, par suite, d'après le théorème du rang, on a

$$\begin{aligned} \dim(\ker(u \circ v)) &= \dim(\ker(w)) + \dim(\text{Im}(w)) \\ &\leq \dim(\ker(v)) + \dim(\ker(u)) \end{aligned}$$

Exercice 35

- a) Soit $w : \ker(u) \rightarrow E$ la restriction de v à $\ker(u)$, alors on a $\ker(w) = \ker(u) \cap \ker(v) = \{0\}$, donc $\dim(\ker(u)) = \dim(v(\ker(u)))$. Or, on a $\dim(v(\ker(u))) = \dim(\ker(u)) - \dim(\ker(u) \cap \ker(v)) = \dim(\ker(u))$, par suite, on a $\dim(\ker(u)) = \dim(\ker(u))$.
- b) Soit $x \in \ker(u + v)$, alors on a $u(x) + v(x) = 0$, donc $u(v(x)) = 0$, car $u^2 = 0$, donc $v(x) \in \ker(u)$. On a $v^2 = 0$, donc $\text{Im}(v) \subseteq \ker(v)$ et comme $\ker(u) \cap \ker(v) = \{0\}$, alors $v(x) = 0$, donc on a aussi $u(x) = 0$,

par suite, $x \in \ker(u) \cap \ker(v)$, donc $x = 0$. Ainsi, $\ker(u + v) = \{0\}$ et puisque E est de dimension finie, alors $u + v$ est un automorphisme. Comme $u^2 = v^2 = 0$, alors $(u + v)^2 = uv + vu$, donc $uv + vu$ est aussi un automorphisme.

On a $(-v)^2 = 0$ et $\ker(u) \cap \ker(-v) = \ker(u) \cap \ker(v) = \{0\}$, donc, d'après ce qui précède, $u - v$ est un automorphisme.

On a $uv - vu = (u + v)(v - u)$, car $u^2 = v^2 = 0$, donc $uv - vu$ est un automorphisme.

- c) Puisque $\ker(u) \cap \ker(v) = \{0\}$, donc il suffit de vérifier que $E = \ker(u) + \ker(v)$. D'après la question précédente, $u + v$ est un automorphisme, donc $E = \text{Im}(u + v)$, donc pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$, tel que $x = u(y) + v(y)$, avec $u(y) \in \ker(u)$ et $v(y) \in \ker(v)$, donc $x \in \ker(u) + \ker(v)$. D'où le résultat.
- d) On a $u^2 = v^2 = 0$, donc $u(u + v) = (u + v)v$, avec $u + v$ inversible, donc $v = (u + v)^{-1}u(u + v)$, par suite, u et v sont semblables.

Exercice 36

Soit $y \in f(\ker(g \circ f))$, alors il existe $x \in \ker(g \circ f)$, tel que $y = f(x)$, on a $g(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in \ker(g)$, par suite, $x \in f^{-1}(\ker(g))$, donc on a $y \in f(f^{-1}(\ker(g)))$, avec $f(f^{-1}(\ker(g))) = \text{Im} \cap \ker(g)$. Réciproquement, soit $y \in \text{Im} \cap \ker(g)$, alors il existe $x \in E$, tel que $y = f(x)$ et $g(y) = 0$, donc $(g \circ f)(x) = 0$, par conséquent, $y \in \ker(g \circ f)$.

On a $g^{-1}(\text{Im}(g \circ f)) = g^{-1}(g(\text{Im})) = \text{Im} + \ker(g)$, car on sait que pour tout sous-espace vectoriel H de F , on a $g^{-1}(g(H)) = H + \ker(g)$.

Exercice 37

1. Soit $g \in L(F, E)$, alors on a

$$\begin{aligned} g \in \mathcal{E} &\iff f \circ g \circ f = 0 \\ &\iff \forall x \in E, f((f \circ g)(x)) = 0 \\ &\iff \forall x \in E, f(g(x)) \in \ker(f) \\ &\iff f(\text{Im}(g)) \subseteq \ker(f) \end{aligned}$$

2. Si f est bijective et $f \circ g \circ f = 0$, alors il est clair que $g = 0$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{E} = \{0\}$ et montrons que f est bijective. Supposons, que f n'est pas bijective, alors f n'est pas injective ou f n'est pas surjective. Si f n'est pas injective, alors $\ker(f) \neq \{0\}$. Soit G un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E , alors Im et G sont isomorphes. Soient $u : \text{Im} \rightarrow G$ un isomorphisme, H un supplémentaire de Im dans F , p la projection sur $\ker(f)$ parallèlement à G et $g : F \rightarrow E$ l'application définie pour tout $x \in F$, avec $x = y + z$, où $y \in \text{Im}$ et $z \in H$, par $g(x) = p(u(y))$, alors il est facile de voir que $g \neq 0$ et $f \circ g \circ f = 0$.

Si f n'est pas surjective, alors $\text{Im} \neq F$. Soient H un supplémentaire de Im dans F , $u : H \rightarrow E$ un endomorphisme non nul et $g : F \rightarrow E$ l'application définie pour tout $x \in F$, avec $x = y + z$, où $y \in \text{Im}$ et $z \in H$, par $g(x) = u(z)$, alors il est facile de voir que $g \neq 0$ et $f \circ g \circ f = 0$. Ainsi, par contraposée f est bijective.

3. Soit G un supplémentaire de Im dans F et soit

$$\Phi : L(\text{Im}, \ker(f)) \times L(G, E) \rightarrow \mathcal{E}$$

l'application qui à $(u, v) \in L(\text{Im}, \ker(f)) \times L(G, E)$ fait correspondre $g \in \mathcal{E}$, où g est définie pour $x \in F$, avec $x = y + z$, par $g(x) = u(y) + v(z)$, alors il est facile de voir que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, donc on en déduit que $\dim(\mathcal{E}) = r(n - r) + n(p - r) = np - r^2$.

Exercice 38

On sait que si H est un sous-espace vectoriel de E , alors E/H est de dimension finie, si et seulement si, F admet un supplémentaire dans E de dimension finie. Soit H un supplémentaire de Im dans F , avec H de dimension finie et soit L un supplémentaire de $\text{Im}(g)$ dans G , avec L de dimension finie. Soit $x \in G$, alors il existe $y \in F$, tel que $x = g(y) + l$, avec $l \in L$, et il existe $z \in E$, tel que $y = f(z) + h$, avec $h \in H$. Donc on a $x = (g \circ f)(z) + g(h) + l$, par suite $x \in \text{Im}(g \circ f) + g(H) + L$, donc $G = \text{Im}(g \circ f) + g(H) + L$. On en déduit donc que $\text{Im}(g \circ f)$ possède un supplémentaire M dans G , tel que $M \subseteq g(H) + L$. Comme H est de dimension finie et g linéaire, alors $g(H)$ est de dimension finie, par suite, $g(H) + L$ est de dimension finie, donc M est de dimension finie. Ainsi, $E/\text{Im}(g \circ f)$ est de dimension finie.

Exercice 39

- Si f est un automorphisme de E , alors $2f$ est un automorphisme de E , car la caractéristique de K est $\neq 2$, donc $2 \neq 0_K$.
On a $f = 2f - f$, donc f possède la propriété (P).
- a) On a $\ker(\tilde{f}) = \ker(f) \cap \text{Im} = \{0\}$, car $E = \ker(f) \oplus \text{Im}$, donc $\ker(f) \cap \text{Im} = \{0\}$. $\ker(\tilde{f}) = \{0\}$ et $\dim(\text{Im}) < +\infty$, donc $\tilde{f}$ est un automorphisme de Im , par suite, d'après la question précédente, il existe deux automorphismes f_1 et f_2 de Im , tel que $\tilde{f} = f_1 - f_2$.
b) Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $g_i : E = \text{Im} \oplus \ker(f) \rightarrow E$ l'application définie pour $x \in E$, avec $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \text{Im}$ et $x_2 \in \ker(f)$, par $g_i(x) = f_i(x_1) + x_2$, alors il est facile de voir que g_1 et g_2 sont deux automorphismes et que g_1 et g_2 coïncident sur $\ker(f)$.
c) Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} g_1(x) - g_2(x) &= f_1(x_1) - f_2(x_1) = \tilde{f}(x_1) \\ &= f(x_1) = f(x_1 + x_2) = f(x) \quad (\text{car } f(x_2) = 0) \end{aligned}$$

Donc $f = g_1 - g_2$, par suite, f vérifie la propriété (P).

3. a) f est non inversible et E de dimension finie, donc $\text{Im} \neq E$, par conséquent, $F \neq \{0\}$.
- b) D'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(f)) = \dim(F)$, donc $\ker(f)$ et F sont isomorphes, par suite il existe un isomorphisme $h_1 : F \rightarrow \ker(f)$.
- c) Soit G un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E , alors on a

$$\dim(G) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) = \dim(\text{Im})$$

donc il existe un isomorphisme $h_2 : \text{Im} \rightarrow G$.

Soit $h : F \oplus \text{Im} \rightarrow \ker(f) \oplus G$ l'application qui à $x = x_1 + x_2$ fait correspondre $h(x) = h_1(x_1) + h_2(x_2)$, alors il est facile de voir que $\ker(h) = \{0\}$, donc h est un automorphisme de E de plus la restriction de h à F est égale à h_1 .

- d) On a $\ker(f \circ h) = h^{-1}(\ker(f)) = F$ et on a $\text{Im}(f \circ h) = f(h(E)) = f(E) = \text{Im}$.
- e) On a $E = \ker(f \circ h) \oplus \text{Im}(f \circ h)$, donc d'après la question 2)c), $f \circ h$ possède la propriété (P).
- f) D'après la question précédente, $f \circ h$ possède la propriété (P), donc il existe deux automorphismes φ_1 et φ_2 de E , tel que $f \circ h = \varphi_1 - \varphi_2$, donc $f = f_1 - f_2$, où $f_1 = \varphi_1 \circ h^{-1}$ et $f_2 = \varphi_2 \circ h^{-1}$ sont deux automorphismes de E , donc f possède la propriété (P).

Exercice 40

- a) Soit g la restriction de f à G , alors $g : G \rightarrow F$ est une application linéaire et on a

$$\ker(g) = G \cap \ker(f) \quad \text{et} \quad \text{Im}(g) = f(G)$$

donc, d'après le théorème du rang, on a

$$\dim(G) = \dim(f(G)) + \dim(G \cap \ker(f))$$

- b) Soit h la restriction de f à $f^{-1}(H)$, alors $h : f^{-1}(H) \rightarrow F$ est une application linéaire et on a

$$\ker(h) = \ker(f) \cap f^{-1}(H) = \ker(f) \quad \text{et} \quad \text{Im}(h) = f(f^{-1}(H)) = H \cap \text{Im}$$

donc, d'après le théorème du rang, on a

$$\dim(f^{-1}(H)) = \dim(H \cap \text{Im}) + \dim(\ker(f))$$

Exercice 41

On sait que pour tout sous-espace vectoriel H de F , on a

$$\dim(g(H)) = \dim(H) - \dim(H \cap \ker(g))$$

Donc, en particulier, on a

$$\dim((g \circ f)(E)) = \dim(g(f(E))) = \dim(f(E)) - \dim(\ker(g) \cap f(E))$$

Ainsi, on aura,

$$\begin{aligned} rg(g \circ f) &= \dim((g \circ f)(E)) \\ &= \dim(f(E)) - \dim(\ker(g) \cap f(E)) \\ &\geq \dim(f(E)) - \dim(\ker(g)) \\ &= \dim(f(E)) - (\dim(F) - \dim(g(F))) \\ &= \dim(f(E)) + \dim(g(F)) - \dim(F) \\ &= rg(f) + rg(g) - \dim(F). \end{aligned}$$

On sait que pour tout sous-espace vectoriel H de F , on a $\dim(g(H)) \leq \dim(H)$, donc, en particulier,

$$\dim(g(f(E))) \leq \dim(f(E))$$

Donc $rg(g \circ f) \leq rg(f)$.

D'autre part, on a $f(E) \subseteq F$, donc $g(f(E)) \subseteq g(F)$, donc

$$\dim(g(f(E))) \leq \dim(g(F))$$

par suite, $rg(g \circ f) \leq rg(g)$.

Exercice 42

Il est facile de voir que $(f + g)(E) \subseteq f(E) + g(E)$, donc on aura,

$$\dim((f + g)(E)) \leq \dim(f(E) + g(E)) \leq \dim(f(E)) + \dim(g(E))$$

Par conséquent, on a

$$rg(f + g) \leq rg(f) + rg(g)$$

$$\begin{aligned} f &= (f + g) - g \implies rg(f) = rg((f + g) - g) \\ &\implies rg(f) \leq rg(f + g) + rg(-g) \\ &\implies rg(f) \leq rg(f + g) + rg(g) \quad \text{car } rg(-g) = rg(g) \\ &\implies rg(f) - rg(g) \leq rg(f + g) \end{aligned}$$

De la même manière, en remarquant que $g = (f + g) - f$, on montre que $rg(g) - rg(f) \leq rg(f + g)$. Donc

$$|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f + g)$$

Exercice 43

($\Rightarrow$) On suppose que $rg(f + g) = rg(f) + rg(g)$, donc

$$\dim((f + g)(E)) = \dim(f(E)) + \dim(g(E))$$

Or, on sait que

$$\dim(f(E) + g(E)) = \dim(f(E)) + \dim(g(E)) - \dim(f(E) \cap g(E))$$

donc $\dim((f + g)(E)) \geq \dim(f(E) + g(E))$.

Comme $(f + g)(E) \subseteq f(E) + g(E)$, alors on a

$$\dim((f + g)(E)) = \dim(f(E) + g(E))$$

Ainsi, on aura $\dim(f(E) + g(E)) = \dim(f(E)) + \dim(g(E))$, donc $\dim(f(E) \cap g(E)) = 0$, par suite $\text{Im} \cap \text{Im}(g) = \{0\}$.

Puisque $\text{Im} \cap \text{Im}(g) = \{0\}$, alors il est facile de voir que

$\ker(f + g) = \ker(f) \cap \ker(g)$. On a alors

$$\begin{aligned} \dim(\ker(f) + \ker(g)) &= \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) - \dim(\ker(f) \cap \ker(g)) \\ &= \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) - \dim(\ker(f + g)) \end{aligned}$$

D'autre part, d'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\ker(f + g)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f + g))$$

et par hypothèse, on a

$$\dim(\text{Im}(f + g)) = \dim(\text{Im}) + \dim(\text{Im}(g))$$

Donc en tenant compte qu'on a

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) + \dim(\text{Im}) + \dim(\text{Im}(g)) = 2 \dim(E)$$

on en déduit que

$$\dim(\ker(f) + \ker(g)) = 2 \dim(E) - \dim(E) = \dim(E)$$

Donc $\ker(f) + \ker(g) = E$.

($\Leftarrow$) Supposons que $E = \ker(f) + \ker(g)$ et $\text{Im} \cap \text{Im}(g) = \{0\}$, donc on aura

$$\dim(\ker(f) + \ker(g)) = \dim(E) \quad \text{et} \quad \ker(f + g) = \ker(f) \cap \ker(g)$$

Or, d'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\text{Im}) + \dim(\text{Im}(g)) = 2 \dim(E) - (\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g))) \quad (1)$$

On a aussi

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) = \dim(\ker(f) + \ker(g)) + \dim(\ker(f) \cap \ker(g))$$

Comme $\dim(\ker(f) + \ker(g)) = \dim(E)$ et $\ker(f + g) = \ker(f) \cap \ker(g)$, alors on a

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) = 2 \dim(E) - \dim(\operatorname{Im}(f + g)) \quad (2)$$

De (1) et (2) on déduit que $rg(f) + rg(g) = rg(f + g)$.

Exercice 44

a) On pose $n = \dim(E)$, alors on a

$$\begin{aligned} n &= \dim(\ker(u)) + \dim(\ker(v)) - \dim(\ker(u) \cap \ker(v)) \\ &= \dim(\operatorname{Im}(u)) + \dim(\operatorname{Im}(v)) - \dim(\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Im}(v)) \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème du rang, on a

$$2n = 2n - (\dim(\ker(u) \cap \ker(v)) + \dim(\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Im}(v)))$$

On en déduit donc que $\dim(\ker(u) \cap \ker(v)) + \dim(\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Im}(v)) = 0$, donc $\dim(\ker(u) \cap \ker(v)) = \dim(\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Im}(v)) = 0$, par suite, on a $E = \ker(u) \oplus \ker(v) = \operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Im}(v)$.

b) E est de dimension finie, donc $\operatorname{Im}(u + v) = E$, si et seulement si, $\ker(u + v) = \{0\}$. Soit $x \in \ker(u + v)$, alors on a $u(x) = -v(x)$ et comme $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Im}(v) = \{0\}$, alors on a $u(x) = v(x) = 0$ et puisque $\ker(u) \cap \ker(v) = \{0\}$, alors $x = 0$. Par conséquent, on a $E = \operatorname{Im}(u + v)$. On voit donc que $rg(u + v) = n$ et d'après la question précédente, on a $n = rg(u) + rg(v)$, donc $rg(u + v) = rg(u) + rg(v)$.

Exercice 45

Supposons que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

a) Montrons que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$ et $F = \operatorname{Im} \oplus \ker(g)$.

Soit $y \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(g)$, alors on a $f(y) = 0$ et $y = g(x)$, avec $x \in F$, donc on aura $(g \circ f \circ g)(x) = 0$, par suite, $g(x) = 0$, donc $y = 0$, d'où $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0\}$. Soit $x \in E$, alors on a $f(x) = f((g \circ f)(x))$, donc $f(x - (g \circ f)(x)) = 0$, il en résulte que $x - g(f(x)) \in \ker(f)$, donc $x \in \ker(f) + \operatorname{Im}(g)$, donc $E = \ker(f) + \operatorname{Im}(g)$. Nous avons donc établi que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$ et comme f et g jouent un rôle symétrique, alors de la même manière on montre que $F = \operatorname{Im} \oplus \ker(g)$.

b) D'après la question précédente, on a $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + rg(g)$ et d'après le théorème du rang, on a $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + rg(f)$, donc on a $rg(f) = rg(g)$. On a $f \circ g \circ f = f$, donc $(f \circ g)(\operatorname{Im}) = \operatorname{Im}$, par suite, on a $\operatorname{Im} \subseteq \operatorname{Im}(f \circ g)$ et comme $\operatorname{Im}(f \circ g) \subseteq \operatorname{Im}(f)$, alors on a $\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im}(f)$. De la même manière on montre que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g)$.

Exercice 46

- a) On a $u^3 = 0$, donc pour tout $x \in E$, on a $u(u^2(x)) = 0$, par suite, on a $\text{Im}(u^2) \subseteq \ker(u)$, donc on en déduit que $rg(u^2) \leq \dim(E) - rg(u)$, donc $rg(u) + rg(u^2) \leq \dim(E)$.
- b) Soit $v : \text{Im}(u) \rightarrow E$ l'application définie pour tout $x \in \text{Im}(u)$, par $v(x) = u(x)$, alors on a $\ker(v) = \ker(u) \cap \text{Im}(u)$ et $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^2)$, donc d'après le théorème du rang, on a

$$rg(u) = \dim(\ker(u) \cap \text{Im}(u)) + rg(u^2)$$

avec $\text{Im}(u^2) \subseteq \ker(u) \cap \text{Im}(u)$, donc $rg(u) \geq 2rg(u^2)$.

Exercice 47

On a $u \circ v = 0$, donc $\text{Im}(v) \subseteq \ker(u)$. Comme $\ker(u + v) = \{0\}$, alors on a $\ker(u) \cap \ker(v) = \{0\}$, or on a

$$\dim(\ker(u)) = \dim(v(\ker(u))) + \dim(\ker(u) \cap \ker(v))$$

par suite, on a $\dim(\ker(u)) = \dim(v(\ker(u)))$ et comme $v(\ker(u)) \subseteq \ker(u)$, alors $\ker(u) = v(\ker(u))$, avec $v(\ker(u)) \subseteq \text{Im}(v)$, donc on a $\ker(u) = \text{Im}(v)$. On en déduit donc que $rg(u) + rg(v) = \dim(E)$.

Exercice 48

1. Soit $x \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} x \in \ker(v \circ u) &\iff v(u(x)) = 0 \\ &\iff u(x) \in \ker(v) \\ &\iff x \in u^{-1}(\ker(v)) \end{aligned}$$

donc $\ker(v \circ u) = u^{-1}(\ker(v))$. Or, on a

$$\dim(u^{-1}(\ker(v))) = \dim(\ker(u)) + \dim(\text{Ker}(v) \cap \text{Im}(u))$$

donc on en déduit que $n - rg(v \circ u) = n - rg(u) + \dim(\text{Ker}(v) \cap \text{Im}(u))$, par suite, on a $rg(v \circ u) = rg(u) - \dim(\text{Ker}(v) \cap \text{Im}(u))$.

2. En utilisant la question précédente, on aura

a)

$$\begin{aligned} rg(v \circ u) = rg(v) &\iff rg(v) = rg(u) - \dim(\ker(v) \cap \text{Im}(u)) \\ &\iff n - \dim(\ker(v)) = rg(u) - \dim(\ker(v) \cap \text{Im}(u)) \\ &\iff \dim(\ker(v)) + rg(u) - \dim(\ker(v) \cap \text{Im}(u)) = n \\ &\iff \dim(\ker(v) + \text{Im}(u)) = n \\ &\iff \ker(v) + \text{Im}(u) = E \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 rg(v \circ u) = rg(u) &\iff rg(u) = rg(u) - \dim(\ker(v) \cap \text{Im}(u)) \\
 &\iff \dim(\ker(v) \cap \text{Im}(u)) = 0 \\
 &\iff \ker(v) \cap \text{Im}(u) = \{0\}
 \end{aligned}$$

Exercice 49

1. Supposons que $\text{Im}(g) \subseteq \text{Im}$ et considérons un supplémentaire G de $\ker(f)$ dans E , alors pour tout $z \in \text{Im}$, il existe un unique $y \in G$, tel que $z = f(y)$. Soit $x \in E$, alors on a $g(x) \in \text{Im}$, car $\text{Im}(g) \subseteq \text{Im}$, donc il existe un unique $y \in G$, tel que $g(x) = f(y)$. On pose $h(x) = y$, alors il est facile de voir que h est linéaire et que pour tout $x \in E$, on a $g(x) = f(h(x))$, donc $g = f \circ h$.

Réciproquement, si $g = f \circ h$, alors il est clair que $\text{Im}(g) \subseteq \text{Im}$.

2. Supposons que $\ker(g) \subseteq \ker(f)$ et considérons un supplémentaire H de $\text{Im}(g)$ dans F . Soit $h : F = \text{Im}(g) \oplus H \rightarrow F$ l'application qui à $x \in F$, avec $x = g(y) + h$, fait correspondre $h(x) = f(y)$, alors h est bien définie, car si $x = g(y_1) + h = g(y_2) + h$, alors on a $g(y_1 - y_2) = 0$, donc $f(y_1 - y_2) = 0$, car $\ker(g) \subseteq \ker(f)$, donc $f(y_1) = f(y_2)$, de plus il est facile de voir que h est linéaire et pour tout $x \in F$, on a $h(g(x)) = f(x)$, donc $h \circ g = f$.

Réciproquement, si $f = h \circ g$, alors il est clair que $\ker(g) \subseteq \ker(f)$.

Exercice 50

1. Si u est un projecteur, alors on sait que $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$ et que $\ker(u) = \text{Im}(Id_E - u)$, donc on a

$$\dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(Id_E - u)) = \dim(E) \leq \dim(E)$$

Réciproquement, supposons que $rg(u) + rg(Id_E - u) \leq \dim(E)$. Soit $x \in E$, alors on a $x = u(x) + (x - u(x))$, donc $x \in \text{Im}(u) + \text{Im}(Id_E - u)$, par suite, on a $E = \text{Im}(u) + \text{Im}(Id_E - u)$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 \dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(Id_E - u)) &= \\
 \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(Id_E - u)) - \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(Id_E - u))
 \end{aligned}$$

Puis comme $E = \text{Im}(u) + \text{Im}(Id_E - u)$, alors on a

$$\dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(Id_E - u)) = n$$

on a aussi $\dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(Id_E - u)) \leq \dim(E)$, donc on aura $\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(Id_E - u)) \leq 0$, par suite, on a

$\text{Im}(u) \cap \text{Im}(Id_E - u) = \{0\}$ et ainsi $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Im}(Id_E - u)$. Soit p la

projection sur $\text{Im}(u)$ parallèlement à $\text{Im}(Id_E - u)$ et soit $x \in E$, avec $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \text{Im}(u)$ et $x_2 \in \text{Im}(Id_E - u)$, alors d'après l'unicité de la décompose, on a $x_1 = u(x)$ et $x_2 = x - u(x)$, donc $u(x) = p(x)$, par conséquent, on a $u = p$, donc u est un projecteur.

2. Si $u \circ v = v \circ u$, alors il est clair que $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v . Réciproquement, supposons que $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v . Comme u est un projecteur, alors $E = \text{Im}(u) \oplus \ker(u)$, donc pour tout $x \in E$, on a $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \text{Im}(u)$ et $x_2 \in \ker(u)$, par suite, on a $u(v(x)) = u(v(x_1)) + u(v(x_2))$. Puisque $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v , alors on a $u(v(x)) = v(x_1)$. On a aussi $v(u(x)) = v(u(x_1)) = v(x_1)$, donc $(u \circ v)(x) = (v \circ u)(x)$.

3. a) On a $\ker(u) \subseteq u^{-1}(F)$ et $F \cap \text{Im}(u) \subseteq F$, donc on a

$$\ker(u) + F \cap \text{Im}(u) \subseteq u^{-1}(F)$$

D'autre part, comme $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$ et $\ker(u) \subseteq u^{-1}(F)$, alors $u^{-1}(F) \subseteq \ker(u) + F \cap \text{Im}(u)$, donc on a

$$u^{-1}(F) = \ker(u) + F \cap \text{Im}(u)$$

On sait que $\dim(u^{-1}(F)) = \dim(\ker(u)) + \dim(F \cap \text{Im}(u))$, donc on en déduit que $u^{-1}(F) = \ker(u) \oplus F \cap \text{Im}(u)$.

- b) Supposons que F est stable par u et montrons que

$$F = (\ker(u) \cap F) \oplus (F \cap \text{Im}(u))$$

On a $u(F) \subseteq F$, donc $F \subseteq u^{-1}(F)$, donc d'après la question précédente, pour $x \in F$, on a $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \ker(u)$ et $x_2 \in F \cap \text{Im}(u)$. On a $x_1 = x - x_2$, avec $x_2 \in F$, donc on a $x_1 \in \ker(u) \cap F$. il en résulte que $F = \ker(u) \cap F + \text{Im}(u) \cap F$ et comme $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$, alors on a $F = \ker(u) \cap F \oplus \text{Im}(u) \cap F$.

4. a) On a $uv = vu$, donc $(uv)^2 = u^2v^2 = uv$, donc uv est un projecteur. On a aussi

$$\begin{aligned} (u + v - uv)^2 &= (u + v)^2 + (uv)^2 - uv(u + v) - (u + v)uv \\ &= u + v + 2uv + uv - uv - uv - uv - uv \\ &= u + v - uv \quad (\text{car } uv = vu) \end{aligned}$$

donc $u + v - uv$ est un projecteur.

- b) On a $uv = vu$, donc $\text{Im}(uv) \subseteq \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)$.

Soit $z \in \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)$, alors on a $z = u(x)$ et $z = v(y)$, donc on a $u(x) = v(y)$, donc $u(x) = u(v(y))$, par suite, on a $z = (uv)(y)$, donc $z \in \text{Im}(uv)$, d'où $\text{Im}(uv) = \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)$.

c) $u + v - uv$ est un projecteur, donc pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} x \in \text{Im}(u + v - uv) &\iff (u + v - uv)(x) = x \\ &\iff x = u(x - v(x)) + v(x) \\ &\implies x \in \text{Im}(u) + \text{Im}(v) \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $x \in \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$, alors on a $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \text{Im}(u)$ et $x_2 \in \text{Im}(v)$, donc on a

$$(u + v - uv)(x) = u(x_1) + v(x_1) - u(v(x_1)) + u(x_2) + v(x_2) - u(v(x_2))$$

avec $u(x_1) = x_1$, $u(v(x_1)) = v(u(x_1)) = v(x_1)$, $v(x_2) = x_2$ et $(uv)(x_2) = u(x_2)$, donc $(u + v - uv)(x) = x$, par suite on a $x \in \text{Im}(u + v - uv)$, il en résulte donc que

$$\text{Im}(u + v - uv) = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$$

Exercice 51

a) Soit $x \in \ker(p)$, alors on a $u(x) = p(u(x)) - u(p(x)) = p(u(x))$, donc $u(x) \in \text{Im}(p)$, par suite, $u(\ker(p)) \subseteq \text{Im}(p)$.

Soit $x \in \text{Im}(p)$, alors on a $u(x) = p(u(x)) - u(p(x)) = p(u(x)) - u(x)$, avec $p(u(x)) - u(x) \in \ker(p)$ et comme $u(x) = p(u(x))$, alors on a $u(x) \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$, donc $u(x) = 0$, par suite, $x \in \ker(u)$.

b) Soit $x \in E$, alors on a $u(x) = p(u(x))$, car $\text{Im}(p) \subseteq \ker(u)$ et on a $p(x) \in \text{Im}(p)$, donc $u^2(x) = u(p(u(x))) = 0$, car $p(u(x)) \in \text{Im}(p)$.

Exercice 52

1. Supposons que u et v sont deux projecteurs, alors on a

a)

$$\begin{aligned} u + v \text{ est un projecteur} &\iff (u + v)^2 = u + v \\ &\iff u + v + uv + vu = u + v \\ &\iff uv + vu = 0 \end{aligned}$$

b) On suppose que $u + v$ est un projecteur.

i) Soit $x \in \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)$, alors on a $u(x) = x$ et $v(x) = x$, donc $(uv)(x) = x$ et $(vu)(x) = x$. Puisque $vu = -uv$, alors $x = 0$, donc $\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0\}$.

ii) Il est clair qu'on a $\ker(u) \cap \ker(v) \subseteq \ker(u + v)$. Soit $x \in \ker(u + v)$, alors on a $u(x) + v(x) = 0$, donc $u(x) \in \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)$, par suite, d'après la question précédente, on a $u(x) = 0$ et de même on voit que $v(x) = 0$, donc $x \in \ker(u) \cap \ker(v)$.

- iii) Montrons que $\text{Im}(u + v) = \text{Im}(u) \oplus \text{Im}(v)$. D'après la question précédente, il suffit de montrer que $\text{Im}(u + v) = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$. Il est clair que $\text{Im}(u + v) \subseteq \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$. Réciproquement, soit $x \in \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$, comme $u + v$ est un projecteur, alors $x \in \text{Im}(u + v)$, si et seulement si, $(u + v)(x) = x$. On a $x \in \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$, donc $x = u(y) + v(z)$, par suite, on a $(u + v)(x) = u(y) + (vu)(y) + v(z) + (uv)(z)$. Comme $uv + vu = 0$, alors on a

$$(vu)(y) + (uv)(z) = u(v(z) - v(y)) = v(u(y) - u(z))$$

donc $(vu)(y) + (uv)(z) \in \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)$, ce qui prouve que $(vu)(y) + (uv)(z) = 0$, donc $(u + v)(x) = x$.

- c) Supposons que $u + v$ et v sont des projecteurs. On a $u = (u + v) - v$, donc $u^2 = (u + v) + v - (u + v)v - v(u + v) = u - (uv + vu)$ et on a $(u + v)^2 = u^2 + v + uv + vu = u + v$, donc $u - (uv + vu) = u^2$, par suite, on a $u^2 = u$, donc u est un projecteur.
2. a) Supposons que $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ est un projecteur et montrons que

$$\text{Im}(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \text{Im}(u_1) \oplus \text{Im}(u_2) \oplus \dots \oplus \text{Im}(u_n)$$

On procède par récurrence sur n , avec $n \geq 2$.

Pour $n = 2$, le résultat est vrai d'après la question 1)b)iii).

Supposons que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre n .

Soient $u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}$ des projecteurs, tels que

$u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1}$ soit un projecteur, alors d'après la question précédente, $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ est un projecteur, donc on a

$$\text{Im}(u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1}) = \text{Im}(u_1 + u_2 + \dots + u_n) \oplus \text{Im}(u_{n+1})$$

par suite, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\text{Im}(u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1}) = \text{Im}(u_1) \oplus \text{Im}(u_2) \oplus \dots \oplus \text{Im}(u_{n+1})$$

- b) Montrons que si $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ est un projecteur, alors pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, avec $i \neq j$, on a $u_i u_j = 0$. Fixons $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $x \in E$ et soit $y = u_j(x)$, donc on a $u_j(y) = y$. Comme $\text{Im}(u_j) \subseteq \text{Im}(u_1 + u_2 + \dots + u_n)$, alors on a $y \in \text{Im}(u_1 + u_2 + \dots + u_n)$, donc $y = u_1(y) + u_2(y) + \dots + u_n(y)$. Ainsi, par unicité de la décomposition, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, avec $i \neq j$, on a $u_i(y) = 0$, donc $(u_i u_j)(x) = 0$, donc on a $u_i u_j = 0$.

Exercice 53

On a $\text{Im}(u) = \text{Im}(v)$ et comme u et v sont des projecteurs, alors pour tout $x \in E$, on a $u(v(x)) = v(x)$ et $v(u(x)) = v(x)$, donc on a $uv = v$ et $vu = u$. Montrons alors que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(1 - \lambda)u + \lambda v$ est un projecteur. Soit $x \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} ((1 - \lambda)u + \lambda v)^2 &= (1 - \lambda)^2 u + \lambda^2 v + \lambda(1 - \lambda)(uv + vu) \\ &= u + \lambda^2 u - 2\lambda u + \lambda^2 v + \lambda u + \lambda v - \lambda^2 u - \lambda^2 v \\ &= (1 - \lambda)u + \lambda v \end{aligned}$$

donc $(1 - \lambda)u + \lambda v$ est un projecteur.

Exercice 54

a) On a $(v \circ u)^2 = (v \circ u) \circ (v \circ u) = v \circ (u \circ v) \circ u$, avec $u \circ v = \text{Id}_E$, donc on a $(v \circ u)^2 = v \circ u$, par suite, $v \circ u$ est un projecteur.

b) Il est clair que $\text{Im}(v \circ u) \subseteq \text{Im}(v)$.

Réciproquement, soit $y \in \text{Im}(v)$, alors il existe $x \in E$, tel que $y = v(x)$, comme $u \circ v = \text{Id}_E$, alors on a $y = (u \circ v)(v(x)) = (u \circ v)(x)$, donc $y \in \text{Im}(v \circ u)$. Aussi il est clair que $\ker(u) \subseteq \ker(v \circ u)$.

Réciproquement, soit $x \in \ker(v \circ u)$, alors on a $v(u(x)) = 0$, donc $(u \circ v)(u(x)) = 0$, par suite, on a $u(x) = 0$, car $u \circ v = \text{Id}_E$, donc $x \in \ker(u)$.

Exercice 55

On pose $w = u + v - \text{Id}_E$, alors on a $wu = vu$, car $u^2 = u$, donc $u = w^{-1}vu$, par conséquent, on a $\text{Im}(u) = w^{-1}(\text{Im}(vu))$. Il en résulte donc que $rg(u) = \dim(w^{-1}(\text{Im}(vu))) = rg(vu)$, avec $rg(vu) \leq rg(v)$, donc on a $rg(u) \leq rg(v)$. De la même manière en remarquant que $wv = uv$, on montre que $rg(v) \leq rg(u)$, donc on a $rg(u) = rg(v)$.

Exercice 56

a) Il est facile de vérifier que E_f est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

b) Ce résultat est déjà démontré dans l'exercice 46.

c) Soit G un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E et soit p la projection sur G parallèlement à $\ker(f)$. Alors p est un projecteur et on a $\ker(p) = \ker(f)$, donc d'après la question précédente, on a $p \in E_f$.

Exercice 57

a) Soit G un supplémentaire de $\ker(u)$ dans E et soit $\varphi : G \rightarrow \text{Im}(u)$ l'application qui à $x \in G$ fait correspondre $\varphi(x) = u(x)$, alors il est clair que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Soit H un supplémentaire de $\text{Im}(u)$ dans E , alors on a $\dim(H) = \dim(\ker(u))$, donc

il existe un isomorphisme $\psi : \ker(u) \longrightarrow H$.

Soit $f : \ker(u) \oplus G \longrightarrow H \oplus \text{Im}(u)$ l'application définie pour tout $x \in E$, avec $x = x_1 + x_2$, par $f(x) = \psi(x_1) + \varphi(x_2)$, alors f est automorphisme de E . Soit p la projection sur $\text{Im}(u)$ parallèlement à H , alors pour tout $x \in E$, on a $p(f(x)) = \varphi(x_2) = u(x_2) = u(x)$, donc $u = p \circ f$.

- b) Considérons maintenant la projection q sur G parallèlement à $\ker(u)$, alors pour tout $x \in E$, avec $x = x_1 + x_2$, on a

$$f(q(x)) = f(x_2) = \varphi(x_2) = u(x_2) = u(x)$$

par conséquent, $u = f \circ q$.

Exercice 58

1. a) Soit $x \in \ker(u) \cap \text{Im}(p)$, alors on a $u(x) = 0$ et $p(x) = x$, donc $u(p(x)) = 0$, par suite $x \in \ker(u \circ p)$, donc $\ker(u) \cap \text{Im}(p) \subseteq \ker(u \circ p)$. On a au aussi $\ker(p) \subseteq \ker(u \circ p)$, donc on a

$$\ker(u) \cap \text{Im}(p) + \ker(p) \subseteq \ker(u \circ p)$$

D'autre part, on a $\ker(u \circ p) = p^{-1}(\ker(u))$, donc on a

$$\dim(\ker(u \circ p)) = \dim(\ker(p)) + \dim(\ker(u) \cap \text{Im}(p))$$

Comme $(\ker(u) \cap \text{Im}(p)) \cap \ker(p) = \{0\}$, alors on a

$$\ker(u \circ p) = \ker(u) \cap \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$$

- b) Soit $x \in (\ker(p) + \text{Im}(u)) \cap \text{Im}(p)$, alors on a $x \in \text{Im}(p)$, donc $p(x) = x$, et on a $x = x_1 + u(x_2)$, avec $x_1 \in \ker(p)$, donc on a $x = p(x) = p(u(x_2))$, par suite $x \in \text{Im}(p \circ u)$, donc on a

$$(\ker(p) + \text{Im}(u)) \cap \text{Im}(p) \subseteq \text{Im}(p \circ u)$$

On a $\text{Im}(p \circ u) = p(\text{Im}(u))$, donc on a

$$\dim(\text{Im}(p \circ u)) = \dim(\text{Im}(u)) - \dim(\ker(p) \cap \text{Im}(u))$$

D'autre part, si on pose $F = \ker(p) + \text{Im}(u)$ et $G = \text{Im}(p)$, alors $F + G = \ker(p) + \text{Im}(u) + \text{Im}(p) = E$, car $\ker(p) + \text{Im}(p) = E$, donc on a

$$\begin{aligned} \dim((\ker(p) + \text{Im}(u)) \cap \text{Im}(p)) &= \dim(F \cap G) \\ &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) \\ &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(E) \end{aligned}$$

avec $\dim(F) = \dim(\ker(p)) + \dim(\operatorname{Im}(u)) - \dim(\ker(p) \cap \operatorname{Im}(u))$, et comme $\dim(\ker(u)) + \dim(\operatorname{Im}(u)) = \dim(E)$, alors on a

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(E) + \dim(\operatorname{Im}(u)) - \dim(\ker(p) \cap \operatorname{Im}(u))$$

Ce qui prouve qu'on a

$$\begin{aligned} \dim((\ker(p) + \operatorname{Im}(u)) \cap \operatorname{Im}(p)) &= \dim(\operatorname{Im}(u)) - \dim(\ker(p) \cap \operatorname{Im}(u)) \\ &= \dim(\operatorname{Im}(p \circ u)) \end{aligned}$$

On en déduit donc que $(\ker(p) + \operatorname{Im}(u)) \cap \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Im}(p \circ u)$.

2. Supposons que $p \circ q$ est un projecteur. Pour $x \in \operatorname{Im}(p) \cap (\operatorname{Im}(q) + \ker(p))$, on pose $x = y + z$, avec $y \in \operatorname{Im}(q)$ et $z \in \ker(q)$. D'après la question précédente, on a $(\ker(p) + \operatorname{Im}(q)) \cap \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Im}(p \circ q)$, donc $x \in \operatorname{Im}(p \circ q)$ et comme $p \circ q$ est un projecteur, alors on a $(p \circ q)(x) = x$, donc on a $x = p(y)$. Or, $x \in \operatorname{Im}(p)$, donc $p(x) = x$, par suite, on en déduit que $p(z) = x - p(y) = 0$, donc $z \in \ker(p) \cap \ker(q)$ et ainsi on aura $x \in \operatorname{Im}(q) \oplus (\ker(p) \cap \ker(q))$, donc on voit que

$$\operatorname{Im}(p) \cap (\operatorname{Im}(q) + \ker(p)) \subseteq \operatorname{Im}(q) \oplus (\ker(p) \cap \ker(q))$$

Réciproquement, supposons que

$$\operatorname{Im}(p) \cap (\operatorname{Im}(q) + \ker(p)) \subseteq \operatorname{Im}(q) \oplus (\ker(p) \cap \ker(q))$$

Soit $x \in E$, alors d'après la question précédente, on a $(p \circ q)(x) = y + z$, avec $y \in \operatorname{Im}(q)$ et $z \in \ker(p) \cap \ker(q)$, donc on a

$$(p \circ q)^2(x) = p(q(y)) = p(y) = p(q(x)) \quad (\text{car } q(y) = q(x))$$

Donc $(p \circ q)^2 = p \circ q$, ce qui prouve que $p \circ q$ est un projecteur.

3. a) Si $(\ker(p) + \operatorname{Im}(q)) \cap \operatorname{Im}(q) = \{0\}$, alors d'après la question 1)b), on a $p \circ q = 0$.

Si $(\ker(p) + \operatorname{Im}(q)) \cap \operatorname{Im}(q) \neq \{0\}$, comme $\dim(\operatorname{Im}(p)) = 1$, alors on a $(\ker(p) + \operatorname{Im}(q)) \cap \operatorname{Im}(q) = \operatorname{Im}(p)$, donc $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im}(p)$, par suite, on a $\dim(\ker(p \circ q)) = 2$.

D'après la question 1)a), on a $\ker(p \circ q) = (\ker(p) \cap \operatorname{Im}(q)) \oplus \ker(q)$, avec $\dim(\ker(q)) = 2$, car $\operatorname{rg}(q) = 1$, donc $\dim(\ker(p) \cap \operatorname{Im}(q)) = 0$, par suite, $\ker(p) \cap \operatorname{Im}(q) = \{0\}$. On a $\dim(\ker(p)) + \dim(\operatorname{Im}(q)) = 3$, donc $E = \ker(p) + \operatorname{Im}(q)$.

En utilisant la question 2), on en déduit que $p \circ q$ est un projecteur, si et seulement si,

$$\operatorname{Im}(p) \subseteq \operatorname{Im}(q) \oplus (\ker(p) \cap \ker(q))$$

b) On utilisant ce qui précède on voit facilement que

$$\ker(p \circ q) = \ker(q) \text{ et } \operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im}(p)$$

$$\ker(q \circ p) = \ker(p) \text{ et } \operatorname{Im}(q \circ p) = \operatorname{Im}(q)$$

Exercice 59

1. a) Soit $x \in \operatorname{Im}(p)$, alors on a $p(x) = x$, donc $u(x) = p(u(x)) - u(x)$, donc $u(x) = 0$, car p est un projecteur, par suite $x \in \ker(u)$. On voit donc que $\operatorname{Im}(p) \subseteq \ker(u)$, donc $u \circ p = 0$.

b) On a $u \circ p = 0$, donc $u = p \circ u$, par conséquent, on a

$$u^2 = u \circ (p \circ u) = (u \circ p) \circ u$$

avec $u \circ p = 0$, donc $u^2 = 0$.

2. a) Supposons que $u^2 = 0$, alors pour tout $x \in E$, on a $u(u(x)) = 0$, donc $\operatorname{Im}(u) \subseteq \ker(u)$.

b) Soit $x \in E$, alors on a $(q \circ u - u \circ q)(x) = q(u(x)) - u(q(x))$. On a $u(x) \in \operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Im}(u) \subseteq F$, donc $q(u(x)) = u(x)$, et on a $q(x) \in F$ et $F \subseteq \ker(u)$, donc $u(q(x)) = 0$. On en déduit donc que $q \circ u - u \circ q = u$.

3. D'après les questions 1) et 2), on a $u^2 = 0$, si et seulement si, il existe un projecteur p , tel que $p \circ u - u \circ p = u$.

D'après la question 2), pour construire p on considère un supplémentaire de F dans E et comme F admet une infinité de supplémentaires, alors p n'est pas unique.

4. a) Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit A la matrice de u par rapport à la base (e_1, e_2) , alors on a $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, donc $A^2 = 0$, par suite, on a $u^2 = 0$.

b) On a $\ker(u) = \operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}(2e_1 + e_2)$. D'après la question 2), pour construire p , on pose $F = \operatorname{Vect}(2e_1 + e_2)$ et on considère un supplémentaire G de F dans E . Donc si on prend, par exemple, $G = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2)$, et si p est la projection sur F parallèlement à G alors la matrice B de p par rapport à la base (e_1, e_2) est définie par $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 60

1. Pour $i \neq j$, on a $E_{ij} = E_{ik}E_{kj} - E_{kj}E_{ik}$, donc $E_{ij} \in \mathcal{H}$.

2. On a $E_{ii} - E_{nn} = E_{in}E_{ni} - E_{ni}E_{in}$, donc $E_{ii} - E_{nn} \in \mathcal{H}$.
 3. On pose $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ et soit

$$L = \{E_{ij} : (i, j) \in \mathbb{N}_n^2 \text{ et } i \neq j\} \cup \{E_{ii} - E_{nn} : i \in \mathbb{N}_n \text{ et } i \neq n\}$$

Alors il est clair que L est libre et que L a pour cardinal $n^2 - 1$, donc $\dim(\text{Vect}(L)) = n^2 - 1$, par suite $\text{Vect}(L)$ est un hyperplan de $M_n(K)$. On a $\text{Vect}(L) \subseteq \mathcal{H}$, avec $\mathcal{H} \neq M_n(K)$, car $I \notin \mathcal{H}$, donc $\mathcal{H} = \text{Vect}(L)$. On sait que pour tout $A, B \in M_n(K)$, on a $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, donc $\text{tr}(AB - BA) = 0$, par suite, $\mathcal{H} \subseteq \ker(\text{tr})$. Or, tr est une forme linéaire non nulle, donc $\ker(\text{tr})$ est un hyperplan de $M_n(K)$, par conséquent, on a $\ker(\text{tr}) = \mathcal{H}$.

Exercice 61

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, tel que

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \text{ où } \mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

Supposons que A est non inversible, alors il existe $x \in \mathbb{C}^n$, avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $x \neq 0$, tel que $x \in \ker(A)$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on a $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$. On suppose que $\max_{i \in \mathbb{N}_n} |x_i| = |x_{i_0}|$, alors on a

$$a_{i_0, i_0}x_{i_0} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n a_{ij}x_j$$

donc on obtient

$$|a_{i_0, i_0}||x_{i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{ij}||x_j| < \max_{\substack{j \in \mathbb{N}_n \\ j \neq i_0}} |x_j| |a_{i_0, i_0}|$$

par suite, on a $|x_{i_0}| < \max_{\substack{j \in \mathbb{N}_n \\ j \neq i_0}} |x_j|$, ce qui est absurde, donc A est inversible.

Exercice 62

1. Soient $A \in \mathcal{S}$ et $B \in \mathcal{S}$, avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. On pose $AB = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on a $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$, donc $c_{ij} \geq 0$, car pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, on a $a_{ik}b_{kj} \geq 0$. D'autre part, pour $i \neq j$, on a

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{j=1}^n b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} = 1$$

On en déduit que $AB \in \mathcal{S}$.

2. Supposons que A est inversible et que $A \in \mathcal{S}$ et $A^{-1} \in \mathcal{S}$.

Posons $A^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, avec $i \neq j$, on a $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = 0$ et comme $a_{ik}b_{kj} \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, alors on a $a_{ik}b_{kj} = 0$, par suite, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \forall i \in \mathbb{N}_n, \forall j \in \mathbb{N}, i \neq j \implies a_{ik}b_{kj} = 0$$

Fixons $k \in \mathbb{N}_n$, puisque $\sum_{k=1}^n b_{kj} = 1$ et $b_{kj} \geq 0$, alors il existe j_0 , tel que $b_{kj_0} \neq 0$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, avec $i \neq j_0$, on a $a_{ik}b_{kj_0} = 0$ et comme $\sum_{k=1}^n a_{kj} = 1$, alors on a $a_{ik} = 0$ pour tout $i \neq j_0$, et $a_{j_0k} = 1$. Nous avons donc établi que les coefficients de chaque colonne de la matrice A sont tous nuls sauf l'un d'entre eux qui vaut 1. Comme A est inversible, alors A est une matrice de permutation.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, avec $x = (1, 1, \dots, 1)$, alors on voit facilement que $Ax = x$, donc $A - I$ n'est pas inversible. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $A - \lambda I$ n'est pas inversible, alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$, avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $x \neq 0$, tel que $Ax = \lambda x$. On suppose que $\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = |x_i|$, puisque $\lambda x = Ax$, alors en particulier, on a $\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ et comme $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$, alors $|\lambda||x_i| \leq \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$, donc $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 63

- La trace est linéaire donc il est facile de voir que f est linéaire.
- Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$, alors $M \in \ker(f)$, si et seulement si, $M = \frac{\text{tr}(M)}{\text{tr}(A)}A$, donc on voit que $M \in \text{vect}(A)$, donc $\ker(f) = \text{Vect}(A)$, car $f(A) = 0$. On remarque que si $\text{tr}(M) = 0$, alors $f(M) = M$, donc $M \in \text{Im}$, par suite, on a $\ker(\text{tr}) \subseteq \text{Im}$. On a $\text{Im} \neq M_n(\mathbb{C})$ et $\ker(\text{tr})$ est un hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$, donc $\text{Im} = \ker(\text{tr})$.

Exercice 64

- Il est facile de vérifier que f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.
- On a $f(A) = (1 + \text{tr}(A))A$, donc deux cas sont possibles :
Si $\text{tr}(A) = -1$, alors on a $A \in \ker(f)$, donc $\text{Vect}(A) \subseteq \ker(f)$.
Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$, tel que $\text{tr}(M) = 0$, alors on a $f(M) = M$, donc $M \in \text{Im}(f)$, par suite, on a $\ker(f) \subseteq \text{Im}(f)$. Réciproquement, soit $N \in \text{Im}(f)$, alors il existe $M \in M_n(\mathbb{C})$, tel que $N = M + \text{tr}(M)A$, donc on a $\text{tr}(N) = (1 + \text{tr}(A))\text{tr}(M) = 0$ et ainsi on voit que $\text{Im}(f) = \ker(\text{tr})$ et par conséquent, on a $\ker(f) = \text{Vect}(A)$.

Si $\text{tr}(A) \neq -1$ et si $M \in \ker(f)$, alors $M + \text{tr}(M)A = 0$, donc $(1 + \text{tr}(A))\text{tr}(M) = 0$, par suite, on a $\text{tr}(M) = 0$, donc $M = 0$.
Donc dans ce cas, on a $\ker(f) = \{0\}$ et $\text{Im}(f) = M_n(\mathbb{C})$.

3. Si $\text{tr}(A) = -1$ et $\text{tr}(B) = 0$, alors $S = B + \text{Vect}(A)$.

Si $\text{tr}(A) = -1$ et $\text{tr}(B) \neq 0$, alors $S = \emptyset$.

Si $\text{tr}(A) \neq -1$, alors $S = \left\{ B - \frac{\text{tr}(B)}{1 + \text{tr}(A)} A \right\}$.

Exercice 65

1. On a $I^2 = I$, donc $f(I)^2 = f(I)$, par suite, on a $f(I) = 1$ ou $f(I) = 0$.
Si $f(I) = 0$, alors pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $f(A) = f(I)f(A) = 0$, ce qui est impossible, car f est non nulle, donc $f(I) = 1$.

On a aussi $f(0)^2 = f(0)$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Si $f(0) = 1$, alors pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $f(0) = f(0)f(A) = f(A)$, ce qui est impossible, car f n'est pas constante, donc $f(0) = 0$.

2. Supposons que A est inversible, alors il existe $B \in M_n(\mathbb{C})$, tel que $AB = I$, donc $f(A)f(B) = f(I) = 1$, par suite, on a $f(A) \neq 0$.

3. a) Remarquons d'abord que pour tout $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on a $J_r^2 = J_r$, donc $f(J_r) = 1$ ou $f(J_r) = 0$.

Pour montrer que $f(J_r) = 0$, on procède par récurrence sur r .

Pour $r = 1$, on suppose que $f(J_1) \neq 0$ et soit $L_1 = \text{diag}(0, 1, 0, \dots, 0)$, alors L_1 est de rang 1, donc L_1 et J_1 sont deux matrices équivalentes. Il existe donc deux matrices inversibles P et Q de $M_n(\mathbb{C})$, tel que $L_1 = PJ_1Q$, donc $f(L_1) = f(P)f(J_1)f(Q)$, par suite, on a $f(L_1) \neq 0$. On a $J_1L_1 = 0$, donc $f(J_1)f(L_1) = 0$, ce qui est absurde, car $f(J_1) \neq 0$ et $f(L_1) \neq 0$, donc $f(J_1) = 0$. Donc si $n = 2$, alors la question est résolue, on peut supposer alors que $n \geq 3$.

Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre r , avec $r < n-1$ et supposons par l'absurde que $f(J_{r+1}) \neq 0$.

Soit $L = \text{diag}(I_r, 0, 1, 0, \dots, 0, 0)$, alors L est de rang $r+1$, donc L est équivalente à J_{r+1} , par suite, on a $f(L) \neq 0$. Or, on a $J_{r+1}L = J_r$ et d'après l'hypothèse de récurrence, on a $f(J_r) = 0$, donc on a $f(J_{r+1})f(L) = 0$, ce qui est absurde, car $f(J_{r+1}) \neq 0$ et $f(L) \neq 0$, donc $f(J_{r+1}) = 0$.

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice non inversible et soit $r = \text{rg}(A)$, alors on a $r \leq n-1$. Comme $\text{rg}(A) = r$, alors A est équivalente à J_r et comme $f(J_r) = 0$, alors $f(A) = 0$.

Exercice 66

1. Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$, $B \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$,

$B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $AB = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors on a

$$\sum_{i=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} + \sum_{i=1}^n b_{ij} = s(A) + s(B)$$

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} + \sum_{j=1}^n b_{ij} = s(A) + s(B)$$

$$\sum_{i=1}^n c_{ij} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} \right) b_{kj} = s(A) s(B)$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{j=1}^n b_{kj} \right) = s(A) s(B)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda a_{ij} = \sum_{j=1}^n \lambda a_{ij} = \lambda s(A)$$

On voit alors que $A + B \in \mathcal{M}$, $AB \in \mathcal{M}$ et $\lambda A \in \mathcal{M}$ de plus on a $s(A + B) = s(A) + s(B)$, $s(AB) = s(A)s(B)$ et $s(\lambda A) = \lambda s(A)$, ce qui prouve que $\mathcal{M}$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ et que s est un homomorphisme d'algèbres.

2. On pose $AJ = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $JA = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Supposons que $A \in \mathcal{M}$, alors on a $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} = s(A)$ et $d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} = s(A)$, donc on voit que $AJ = JA = s(A)J$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$, tel que $AJ = JA = \alpha J$, alors on voit facilement que $A \in \mathcal{M}$ et $s(A) = \alpha$.

3. Supposons que A est une matrice magique inversible. D'abord puisque $s(I) = 1$ et s est homomorphisme d'algèbres, alors $s(A) \neq 0$ puis comme A est magique, alors on a $AJ = JA = s(A)J$, donc $J = A^{-1}JA$ et $J = s(A)A^{-1}J$, par suite, on a $JA^{-1} = A^{-1}J = \frac{1}{s(A)}J$, donc d'après la question précédente, on a $A^{-1} \in \mathcal{M}$ et $s(A^{-1}) = \frac{1}{s(A)}$.

4. Remarquons d'abord que si $A \in \mathcal{M}$, alors ${}^tA \in \mathcal{M}$.

Donc on a $A + {}^tA \in \mathcal{M}$ et $A - {}^tA \in \mathcal{M}$ et on a

$$A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}$$

A est donc somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique et si A est une matrice à la fois symétrique et antisymétrique, alors $A = 0$. On en déduit donc que $\mathcal{M}$ est la somme directe du sous-espace vectoriel des matrices magiques symétriques et celui des matrices magiques antisymétriques.

5. a) Posons $v = (1, 1, \dots, 1)$ et supposons que A est magique, alors on a $Av = s(A)v$, donc $G = \text{Vect}(v)$ est stable par A . Soit $x \in H$ et soit $y = Ax$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on a $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, donc on a

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) x_j = s(A) \sum_{j=1}^n x_j$$

Comme $x \in H$, alors $\sum_{j=1}^n x_j = 0$, donc on a $\sum_{i=1}^n y_i = 0$, par suite, on a $Ax \in H$, donc H est stable par A .

- b) H est un hyperplan de $\mathbb{K}^n$, donc $\dim(H) = n - 1$, par suite, on a $\dim(G) + \dim(H) = n$ et on a $G \cap H = \{0\}$, donc on en déduit que $\mathbb{K}^n = G \oplus H$. Pour $A \in L(G)$ et $B \in L(H)$, on définit $C \in L(\mathbb{K}^n)$, par $Cx = Ax_1 + Bx_2$, où $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in G$ et $x_2 \in H$, alors G et H sont stables par C , donc d'après la question précédente, on a $C \in \mathcal{M}$. considérons l'application $\Phi : L(G) \times L(H) \rightarrow \mathcal{M}$ définie pour $(A, B) \in L(G) \times L(H)$, par $\Phi(A, B) = C$, alors Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

En effet, il est clair que Φ est linéaire. Soient $(A, B) \in \ker(\Phi)$, $x \in G$, $y \in H$ et $z = x + y$, donc on a $Cz = 0$, par suite, on a $Ax + By = 0$. Comme $G \cap H = \{0\}$, alors on a $Ax = By = 0$, donc $A = B = 0$, par suite, Φ est injective. Soit $C \in \mathcal{M}$, alors d'après la question précédente, G et H sont stables par C . Soient $(A, B) \in L(G) \times L(H)$, définies pour $(x, y) \in G \times H$, par $Ax = Cx$ et $By = Cy$, alors on a $C = \Phi(A, B)$, donc Φ est surjective. Il en résulte donc que $\dim(\mathcal{M}) = \dim(L(G) \times L(H)) = 1 + (n - 1)^2$.

Exercice 67

1. i) $\Rightarrow$ ii) Supposons que $T^2 = T$, donc T est une matrice de projection, par suite, on a $K^2 = \text{Im}(T) \oplus \ker(T)$. Soit (v_1, v_2) une base de K^2 , avec $e_1 \in \text{Im}(T)$ et $e_2 \in \ker(T)$, alors on a $Tv_1 = v_1$ et $Tv_2 = 0$, donc T est semblable à J .
 - ii) $\Rightarrow$ iii) On suppose que $T = P^{-1}JP$, donc $\text{tr}(T) = \text{tr}(J) = 1$ et $\det(T) = \det(J) = 0$.
 - iii) $\Rightarrow$ iv) Supposons que $\text{tr}(T) = 1$ et $\det(T) = 0$, alors T n'est pas inversible, donc T est semblable à la matrice $S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$. Comme $\text{tr}(T) = 1$, alors $a = 1$, donc $S^2 = S$, par suite, $T^2 = T$.
2. On suppose que K est un corps fini de cardinal q .
 - a) Soit $\Phi : \text{GL}_2(K) \rightarrow \mathcal{B}$ l'application définie par $\Phi(T) = (Te_1, Te_2)$, où (e_1, e_2) est la base canonique de K^2 . Soit $S, T \in \text{GL}_2(K)$, tel que

$\Phi(S) = \Phi(T)$, alors on a $Te_1 = Se_1$ et $Te_2 = Se_2$ et comme (e_1, e_2) est une base, alors $S = T$, donc Φ est injective. Soit $(v_1, v_2) \in \mathcal{B}$ et soit $T \in M_2(K)$ définie par $Te_1 = v_1$ et $Te_2 = v_2$, alors T transforme une base en une base, donc $T \in \text{GL}_2(K)$ et on a $\Phi(T) = (v_1, v_2)$, par suite, Φ est surjective.

- b) i) Il est facile de vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
 ii) Soit $x \in K^2 \setminus \{(0, 0)\}$, alors on $\text{cl}(x) = \{\alpha x : \alpha \in K^*\}$, donc on voit facilement que $\text{Card}(\text{cl}(x)) = q - 1$.
 iii) Soit m le nombre des classes d'équivalence. Puisque toutes les classes d'équivalence ont même cardinal égal à $q - 1$ et puisque les classes d'équivalence forment une partition de $K^2 \setminus \{(0, 0)\}$, alors on a $\text{Card}(K^2 \setminus \{(0, 0)\}) = m(q - 1)$. Il en résulte donc que
- $$m = \frac{q^2 - 1}{q - 1} = q + 1.$$
- c) On note $C_1, C_2, \dots, C_{q+1}$ les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$, alors pour $(x, y) \in K^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a $(x, y) \in \mathcal{B}$, si et seulement si, il existe $(i, j) \in \{1, 2, \dots, q + 1\}^2$, avec $i \neq j$, tel que $(x, y) \in C_i \times C_j$, donc on en déduit que

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\substack{1 \leq i, j \leq q+1 \\ i \neq j}} C_i \times C_j$$

De plus pour $(i, j) \neq (k, l)$, on a $(C_i \times C_j) \cap (C_k \times C_l) = \emptyset$, il en résulte donc que

$$\begin{aligned} \text{Card}(\text{GL}_2(K)) &= \text{Card}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq q+1 \\ i \neq j}} \text{Card}(C_i \times C_j) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq q+1 \\ i \neq j}} (q - 1)^2 = ((q + 1)^2 - (q + 1))(q - 1)^2 \\ &= q(q + 1)(q - 1)^2 \end{aligned}$$

3. a) Il est facile de vérifier que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $\text{GL}_2(K)$.

- b) Soit $P \in \mathcal{G}$, avec $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Comme $P \in \mathcal{G}$ $PJ = JP$, alors on a

$PJ = JP$, donc $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, par suite, on a $b = c = 0$, donc P est diagonale. Réciproquement, si P est diagonale, alors on voit facilement que $P \in \mathcal{G}$.

- c) D'après la question précédente, on a $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : (a, b) \in K^{*2} \right\}$, donc on en déduit que $\text{Card}(\mathcal{G}) = (q - 1)^2$.

- d) On pose $\mathcal{P} = \{T \in M_2(K) : T^2 = T\}$, alors d'après la question 1), on a $\mathcal{P} = \{PJP^{-1} : P \in \text{GL}_2(K)\}$. Soit $f : \text{GL}_2(K) \longrightarrow \mathcal{P}$ l'application définie pour tout $P \in \text{GL}_2(K)$, par $f(P) = PJP^{-1}$, alors il est clair que f est surjective. On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur $\text{GL}_2(K)$, par $P \mathcal{R} Q$, si et seulement si, $f(P) = f(Q)$, alors on voit facilement que pour tout $P \in \text{GL}_2(K)$, on a $\text{cl}(P) = \{PA : A \in \mathcal{G}\}$, car $f(P) = f(Q)$, si et seulement si, $(P^{-1}Q)J(P^{-1}Q)^{-1} = J$. On en déduit donc que pour tout $P \in \text{GL}_2(K)$, on a $\text{Card}(\text{cl}(P)) = \text{Card}(\mathcal{G}) = (q-1)^2$, par conséquent, on a

$$\text{Card}(\text{GL}_2(K)/\mathcal{R}) = \frac{q(q+1)(q-1)^2}{(q-1)^2} = q(q+1)$$

En faisant la décomposition canonique de f , on voit que $\text{GL}_2(K)/\mathcal{R}$ est équipotent à $\mathcal{P}$, donc $\text{Card}(\mathcal{P}) = q(q+1)$.

CHAPITRE 3

FORMES LINÉAIRES – DUALITÉ

3.1 Formes linéaires et hyperplans

Définition 3.1.1

Soit E un K -espace vectoriel. Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E vers K .

Remarque 36

Rappelons que si E est un K -espace vectoriel, on dit que H est un hyperplan de E , si $\dim(E/H) = 1$. Donc si E est de dimension finie, alors

$$H \text{ est un hyperplan de } E \iff \dim(H) = \dim(E) - 1$$

Proposition 3.1.1

Soit E un K -espace vectoriel. Alors

- i) Le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E est un hyperplan de E .
- ii) Tout hyperplan de E est le noyau d'au moins une forme linéaire non nulle de E .
- iii) Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles de E . Alors

$$\ker(\varphi) = \ker(\psi) \iff \exists \lambda \in K : \psi = \lambda\varphi$$

Démonstration. i) Soit φ une forme linéaire non nul sur E , alors on sait que $E/\ker(\varphi)$ est isomorphe à $\text{Im}(\varphi)$. Puisque $\varphi \neq 0$, alors $\text{Im}(\varphi) \neq \{0_K\}$, donc $\text{Im}(\varphi) = K$. Par suite, $E/\ker(\varphi)$ est isomorphe à K , donc $\dim(E/\ker(\varphi)) = 1$. Ainsi, $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E .

ii) ($\implies$) Supposons que $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$ et soit $x_0 \in E$, tel que $x_0 \notin \ker(\varphi)$, alors on aura $E = \ker(\varphi) \oplus \text{Vect}(x_0)$. Soit $x \in E$ avec $x = y_0 + \alpha x_0$, alors $\varphi(x) = \alpha\varphi(x_0)$ et $\psi(x) = \alpha\psi(x_0)$. Comme $\varphi(x_0) \neq 0$, alors on a $\psi(x) = \frac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}\varphi(x)$ et ceci pour tout $x \in E$, donc on aura

$$\psi = \frac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}\varphi$$

($\impliedby$) Trivial. □

Remarque 37

Le résultat ii) de la proposition précédente se généralise de la manière suivante :

Proposition 3.1.2

Soient E un K -espace vectoriel quelconque, φ et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires non nulles sur E . Alors

$$\bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi) \iff \exists(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n \text{ tel que } \varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$$

Démonstration. ($\implies$) Supposons que $\bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi)$ et montrons que $\varphi \in \text{Vect}(\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$.

Pour cela, on procède par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, le résultat est vrai d'après la proposition précédente.

Supposons que $n > 1$ et la propriété vraie pour tout entier $m < n$.

Première méthode : Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, soit ψ_i la restriction de φ_i à $\ker(\varphi_n)$ et soit ψ la restriction de φ à $\ker(\varphi_n)$, alors $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ et ψ sont des formes linéaires de $\ker(\varphi_n)$ et on a $\ker(\psi) = \ker(\varphi) \cap \ker(\varphi_n)$ et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on a $\ker(\psi_i) = \ker(\varphi_i) \cap \ker(\varphi_n)$, donc on a

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} \ker(\psi_i) \subseteq \ker(\psi)$$

Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ éléments de K , tels que $\psi = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \psi_i$. Soit β la forme linéaire de E définie par

$$\beta = \varphi - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \varphi_i$$

Alors pour $x \in \ker(\varphi_n)$, on a

$$\beta(x) = \varphi(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \varphi_i(x) = \psi(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \psi_i(x) = 0$$

Donc $\ker(\varphi_n) \subseteq \ker(\beta)$, donc d'après la proposition précédente, il existe $\lambda_n \in K$, tel que $\beta = \lambda_n \varphi_n$, par suite, on a $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$.

Deuxième méthode : On peut supposer que $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont linéairement indépendants, car sinon, il existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, tel que $\varphi_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \alpha_i \varphi_i$. Donc quitte à réordonner les éléments, on peut

supposer que $i_0 = n$, donc on aura $\varphi_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varphi_i$.

Ainsi, on aura $\bigcap_{i=1}^{n-1} \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi_n)$ donc $\bigcap_{i=1}^{n-1} \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi)$, par suite, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ éléments de K , tel que $\varphi = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \varphi_i$.

Supposons, donc, que $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est libre, donc d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \ker(\varphi_j) \not\subseteq \ker(\varphi_i)$$

Donc pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, il existe $y_i \in E$, avec $y_i \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \ker(\varphi_j)$

et $y_i \notin \ker(\varphi_i)$. Posons $x_i = \frac{y_i}{\varphi_i(y_i)}$, alors $\varphi_i(x_i) = 1$ et pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, avec $j \neq i$, on a $\varphi_j(x_i) = 0$. Donc pour tout $x \in E$, on a

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \varphi_i(x - \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) x_j) = \varphi_i(x) - \varphi_i(x) = 0$$

Donc $x - \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) x_j \in \bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i)$ et par suite, on a

$$\forall x \in E, \quad x - \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) x_j \in \ker(\varphi)$$

Donc

$$\forall x \in E, \varphi(x) = \sum_{j=1}^n \varphi(x_j) \varphi_j(x)$$

Donc, si on pose pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\lambda_j = \varphi(x_j)$, on aura

$$\varphi = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j$$

($\Leftarrow$) Trivial. □

3.2 Espace vectoriel dual

Définition 3.2.1

Soit E un K -espace vectoriel. On appelle **espace vectoriel dual** de E , qu'on note E^* , l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires sur E .

On a alors $E^* = L(E, K)$

Notations

Pour $x \in E$ et pour $\varphi \in E^*$, on pose $\varphi(x) = \langle x, \varphi \rangle$.

Remarque 38

Si E est de dimension finie, alors on sait que $L(E, K)$ est de dimension finie et on a

$$\dim(L(E, K)) = \dim(E) \times \dim(K) = \dim(E)$$

Donc si E est de dimension finie, alors E^* est de dimension finie et on a

$$\dim(E^*) = \dim(E)$$

Donc, en particulier, si E est de dimension finie, alors E et E^* sont isomorphes. Par contre, si E n'est pas de dimension finie, E^* peut ne pas être isomorphe à E . (Voir remarque 39, page 100).

Exemples

1. Soit K un corps commutatif, pour tout $a \in K^n$ avec $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, soit φ_a l'application définie par,

$$\forall x \in K^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \implies \varphi_a(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

Alors φ_a est une forme linéaire sur K^n .

Réciproquement, soit φ une forme linéaire sur K^n , alors il existe un unique $a \in K^n$, tel que $\varphi = \varphi_a$.

En effet, soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n et pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, soit $a_i = \varphi(e_i)$, alors pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, on a

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \varphi_a(x)$$

2. Soit K un corps commutatif, pour chaque $x = (x_n)_{n \geq 0}$ élément de $K^{\mathbb{N}}$, soit φ_x l'application définie sur $K[X]$ par,

$$\forall P \in K[X], \quad P = \sum_{i=1}^p a_i X^i \implies \varphi_x(P) = \sum_{i=1}^p a_i x_i$$

Alors pour tout $x \in K^{\mathbb{N}}$, φ_x définit une forme linéaire sur $K[X]$.

Réciproquement, soit φ une forme linéaire sur $K[X]$, alors il existe un unique $x = (x_n)_{n \geq 0}$ élément de $K^{\mathbb{N}}$, tel que $\varphi = \varphi_x$.

En effet, soit $(1, X, X^2, \dots, X^n, \dots)$ la base canonique de $K[X]$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n = \varphi(X^n)$, alors pour $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$, on a

$$\varphi(P) = \varphi\left(\sum_{i=1}^p a_i X^i\right) = \sum_{i=1}^p a_i \varphi(X^i) = \sum_{i=1}^p a_i x_i = \varphi_x(P)$$

Donc, l'application $f : K^{\mathbb{N}} \longrightarrow (K[X])^*$ qui à $x \in K^{\mathbb{N}}$ fait correspondre φ_x est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. Soient K un corps commutatif et $E = M_n(K)$, le K -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K . Pour $M \in M_n(K)$, avec $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, on sait que la trace de M , notée $\text{tr}(M)$, est définie par $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii}$. L'application $\varphi : M_n(K) \longrightarrow K$ qui à M associe $\text{tr}(M)$ est une forme linéaire sur $M_n(K)$.

Réciproquement, soit φ une forme linéaire sur $M_n(K)$, alors il existe un unique $A \in M_n(K)$, tel que

$$\forall M \in M_n(K), \quad \varphi(M) = \text{tr}(AM)$$

En effet, pour chaque $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, soit E_{ij} la matrice de $M_n(K)$, dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne qui est égal à 1. Alors pour chaque $M \in M_n(K)$, avec $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, on a

$$M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} E_{ij}$$

Soit φ une forme linéaire sur $M_n(K)$.

Pour $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, soit $a_{ij} = \varphi(E_{ji})$, alors on a

$$\begin{aligned} \forall M \in M_n(K), \varphi(M) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} E_{ij}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \varphi(E_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} a_{ji} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} a_{ji}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n c_{ii} \quad \text{où } MA = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= \text{tr}(MA) = \text{tr}(AM) \end{aligned}$$

Remarque 39

Le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{Q}[X]$ n'est pas isomorphe à son dual $(\mathbb{Q}[X])^*$.

En effet, pour chaque entier $n \geq 0$, soit $E_n = \{P \in \mathbb{Q}[X] : \deg(P) \leq n\}$, alors on sait que E_n est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension finie, avec $\dim(E_n) = n + 1$, donc E_n est isomorphe à $\mathbb{Q}^{n+1}$. Or on sait que pour tout entier $m \geq 1$, $\mathbb{Q}^m$ est dénombrable, donc pour tout $n \geq 0$, E_n est dénombrable.

Comme $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ et comme une réunion dénombrables d'ensembles dénombrables est dénombrable, alors $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.

D'après l'exemple précédent, on sait que $(\mathbb{Q}[X])^*$ est isomorphe à $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, donc si on suppose que $\mathbb{Q}[X]$ est isomorphe à son dual, alors $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ serait dénombrable. Ce qui est absurde, car on sait que $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

3.3 Base duale

Proposition 3.3.1

Soient E un K -espace vectoriel de dimension $= n$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base quelconque de E . Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on définit $e_i^* \in E^*$, par

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \langle e_j, e_i^* \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Alors $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* , appelée base duale de E .

Démonstration. On a $\dim(E^*) = n$, donc il suffit de montrer que $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est libre.

Pour cela, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$, tel que $\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \dots + \alpha_n e_n^* = 0$. Montrons que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* = 0 &\implies \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \langle e_j, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* \rangle = 0 \\ &\implies \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle e_j, e_i^* \rangle = 0 \\ &\implies \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \alpha_j = 0 \quad (\text{car } \langle e_j, e_i^* \rangle = \delta_{ij}) \end{aligned}$$

Proposition 3.3.2

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale, alors

i)

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i^* \rangle e_i$$

ii)

$$\forall \varphi \in E^*, \quad \varphi = \sum_{i=1}^n \langle e_i, \varphi \rangle e_i^*$$

Démonstration. i) Soit $x \in E$ avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$\langle x, e_j^* \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i, e_j^* \rangle = x_j \quad (\text{car } \langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{ij})$$

ii) Soit $\varphi \in E^*$ avec $\varphi = \sum_{i=1}^n y_i e_i^*$, alors pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$\langle e_j, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n y_i \langle e_j, e_i^* \rangle = y_j \quad (\text{car } \langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{ij})$$

Exemples

1. Soient K un corps commutatif et $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n . Alors la base duale $\beta^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est définie par

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall x \in K^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \implies e_i^*(x) = x_i$$

Donc pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, e_i^* est la $i^{\text{ième}}$ projection de K^n sur K .

2. Soit $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on pose $e_i^* = dx_i$, donc dx_i est la $i^{\text{ième}}$ projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in K^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \implies dx_i(x) = x_i$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable au point $x_0 \in \Omega$. Alors on sait que la différentielle $f'(x_0)$ au point x_0 est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et on a

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)(h) + o(\|h\|)$$

D'après la proposition précédente, on a

$$f'(x_0) = \sum_{i=1}^n \langle e_i, f'(x_0) \rangle dx_i$$

Or, on sait que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(x_0 + te_i) - f(x_0) = t \langle e_i, f'(x_0) \rangle + o(1)$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = \langle e_i, f'(x_0) \rangle + o(1)$$

Ainsi, on aura

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = \langle e_i, f'(x_0) \rangle$$

On sait que la $i^{\text{ième}}$ dérivée partielle au point x_0 est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

Ainsi, on retrouve l'écriture canonique de $f'(x_0)$,

$$f'(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) dx_i$$

3. Soient K un corps commutatif et $\beta = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $K_n[X]$. Alors sa base duale $\beta^* = (e_0^*, e_1^*, \dots, e_n^*)$ est définie par,

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}, \forall P \in K_n[X], P = \sum_{k=1}^n a_k X^k \implies e_i^*(P) = a_i$$

Pour chaque $a \in K$, soit φ_a la forme linéaire définie sur $K_n[X]$ par,

$$\forall P \in K_n[X], \varphi_a(P) = P(a)$$

Alors, d'après la proposition précédente, on a

$$\varphi_a = \sum_{i=0}^n \langle X^i, \varphi_a \rangle e_i^* = \sum_{i=1}^n a^i e_i^*$$

4. Soient K un corps commutatif et $\beta = (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $M_n(K)$. Alors sa base duale $\beta^* = (E_{ij}^*)_{1 \leq i, j \leq n}$ est définie par,

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, \forall A \in M_n(K), E_{ij}^*(A) = \text{tr}(E_{ji}A) = a_{ij}$$

Proposition 3.3.3

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. Soit u un endomorphisme de E et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de u par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, alors

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, a_{ij} = \langle u(e_j), e_i^* \rangle$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, on a

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, u(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_j), e_i^* \rangle e_i$$

Donc, si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de u par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, alors

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, a_{ij} = \langle u(e_j), e_i^* \rangle$$

Proposition 3.3.4

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. pour chaque $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, on désigne par $e_i \otimes e_j^*$ l'endomorphisme de E défini par,

$$\forall x \in E, (e_i \otimes e_j^*)(x) = \langle x, e_j^* \rangle e_i$$

Alors $\mathcal{A} = \{e_i \otimes e_j^* : (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2\}$ forme une base de $L(E)$ et on a

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, \text{Mat}(e_i \otimes e_j^*, (e_1, e_2, \dots, e_n)) = E_{ij}$$

où les E_{ij} sont les matrices élémentaires de $M_n(K)$.

Démonstration. Puisque $\dim(L(E)) = n^2$, alors il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est une partie génératrice de $L(E)$. Pour cela, soit $u \in L(E)$ et soit

$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de u par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Pour x élément quelconque de E , on sait que $x = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j^* \rangle e_j$, donc, on aura

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{j=1}^n \langle x, e_j^* \rangle u(e_j) = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j^* \rangle \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \langle x, e_j^* \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_i \otimes e_j^*)(x) \end{aligned}$$

On voit donc que $u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} e_i \otimes e_j^*$ et par suite, $\mathcal{A}$ est une partie génératrice de $L(E)$.

Soit $M = (m_{kl})_{1 \leq k, l \leq n}$ la matrice de $e_i \otimes e_j^*$ par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, alors, d'après la proposition précédente, on a

$$\forall (k, l) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, m_{kl} = \langle (e_i \otimes e_j^*)(e_l), e_k^* \rangle = \langle e_l, e_j^* \rangle \langle e_i, e_k^* \rangle$$

Donc on a $m_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{si } k \neq i \text{ ou } l \neq j \end{cases}$, ce qui prouve que $M = E_{ij}$. $\square$

3.4 Base préduale

Lemme 3.4.1

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ deux bases de E , $\beta^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ et $\gamma^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$ leurs bases duales.
Soit P la matrice de passage de β à γ et Q celle de β^* à γ^* . Alors on a

$$Q = {}^t(P^{-1}) = ({}^tP)^{-1}$$

Démonstration. On pose $P^{-1} = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $Q = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Alors, d'après la proposition 3.3.3, pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, on a $q_{ij} = \langle e_i, v_j^* \rangle$. D'autre part, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $e_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} v_k$. Par conséquent, pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, on aura

$$q_{ij} = \langle e_i, v_j^* \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} v_k, v_j^* \right\rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \langle v_k, v_j^* \rangle = \alpha_{ji}$$

Théorème 3.4.1

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ une base de E^* et Q la matrice de passage de la base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ à la base duale β^* . Alors

- i) Il existe une base unique $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de E , appelée base préduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, telle que $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $v_j^* = \varphi_j$.
- ii) Si P est la matrice de passage de la base β à la base γ , alors $P = ({}^tQ)^{-1} = {}^t(Q^{-1})$.

Démonstration. i) $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est libre, donc d'après la proposition 3.1.2, on a

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \ker(\varphi_i) \not\subseteq \ker(\varphi_j)$$

Donc, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, il existe $x_j \in E$, avec $x_j \in \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \ker(\varphi_i)$ et $x_j \notin \ker(\varphi_j)$. Pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, soit $v_j = \frac{x_j}{\varphi_j(x_j)}$, et soit $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$, tel que $\sum_{j=1}^n a_j v_j = 0$, alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $\varphi_i(\sum_{j=1}^n a_j v_j) = 0$. Comme pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$, alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $a_i = 0$. Donc $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ est libre et puisque $\dim(E) = n$, alors γ est une base de E et pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $v_j^* = \varphi_j$.

ii) Conséquence du lemme précédent. □

3.5 Prolongement des formes linéaires

Théorème 3.5.1

Soient E un K -espace vectoriel quelconque et F un sous-espace vectoriel de E . Alors toute forme linéaire sur F se prolonge en une forme linéaire de E .

Démonstration. Soit ψ une forme linéaire sur F et soit G un supplémentaire de F dans E . Soit φ la forme linéaire définie sur E , par

$$\begin{aligned} \varphi : E = F \oplus G &\longrightarrow K \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto \varphi(x) = \psi(x_1) \end{aligned}$$

Alors φ est un prolongement de ψ à E □

Corollaire 3.5.1

Soit E un K -espace vectoriel quelconque. Alors pour tout $x \in E$, avec $x \neq 0$, il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$, tel que $\langle x, \varphi \rangle = 1$.

Démonstration. Soit $F = \text{Vect}(x)$ et soit ψ la forme linéaire définie sur F par,

$$\forall y \in F, \quad y = \alpha x \implies \psi(y) = \alpha$$

D'après le théorème précédent, ψ se prolonge en une forme linéaire φ sur E et on a $\varphi(x) = \psi(x) = 1$. □

3.6 Orthogonalité

Définition 3.6.1

Soit E un K -espace vectoriel.

- i) Pour toute partie non vide A de E , l'orthogonal de A , qu'on note $A^\perp$, est la partie de E^* définie par

$$\forall \varphi \in E^*, \quad \varphi \in A^\perp \iff \forall x \in A, \langle x, \varphi \rangle = 0$$

- ii) Pour toute partie non vide B de E , le pré-orthogonal de B , qu'on note B° , est la partie de E définie par

$$\forall x \in E, \quad x \in B^\circ \iff \forall \varphi \in B, \langle x, \varphi \rangle = 0$$

Remarque 40

$$A^\perp = \{\varphi \in E^* : \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$$

$$B^\circ = \{x \in E : \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\}$$

Proposition 3.6.1

Soit E un K -espace vectoriel. Alors

- a) Pour toute partie A de E et Pour toute partie B de E , on a

$$A \subseteq B \implies B^\perp \subseteq A^\perp$$

- b) Pour toute partie A de E , $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E^* .
c) Pour toute partie A de E , $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.
d) Pour toute partie B de E^* , B° est un sous-espace vectoriel de E .
e) Pour toute partie B de E^* , $B^\circ = (\text{Vect}(B))^\circ$.
f) $E^\perp = \{0_{E^*}\}$ et $E^{*\circ} = \{0_E\}$

Démonstration. a) Supposons que $A \subseteq B$ et soit $\varphi \in E^*$, alors on a

$$\begin{aligned}\varphi \in B^\perp &\implies \forall x \in B, \varphi(x) = 0 \\ &\implies \forall x \in A, \varphi(x) = 0 \quad \text{car } A \subseteq B \\ &\implies \varphi \in A^\perp\end{aligned}$$

b) Pour chaque $x \in E$, soit $\tilde{x} : E^* \longrightarrow K$ l'application définie par

$$\forall \varphi \in E^*, \quad \tilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$$

Alors $\tilde{x}$ est une forme linéaire sur E^* et on a $A^\perp = \bigcap_{x \in A} \ker(\tilde{x})$.

Donc $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

c) $A \subseteq \text{Vect}(A)$, donc d'après a), $\text{Vect}(A)^\perp \subseteq A^\perp$.

Soit $\varphi \in A^\perp$ et soit $x \in \text{Vect}(A)$ avec $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$, où $x_i \in A$, alors on

a $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi(x_i) = 0$. Donc $\varphi \in (\text{Vect}(A))^\perp$.

d) On remarque que si B est une partie de E^* , alors on a $B^\circ = \bigcap_{\varphi \in B} \ker(\varphi)$.

Donc B° est un sous-espace vectoriel de E .

e) Se démontre de la même manière que c).

f) Si $\varphi \in E^\perp$, alors $\forall x \in E, \varphi(x) = 0$, donc $\varphi = 0$.

Supposons, par absurde que $E^{\circ\circ} \neq \{0_E\}$, donc il existe $x \neq 0$, tel que pour tout $\varphi \in E^*$, on a $\varphi(x) = 0$, ce qui est absurde, car on sait que si $x \neq 0$, alors il existe $\varphi \in E^*$, telle que $\varphi(x) = 1$. $\square$

Proposition 3.6.2

Soient E un K -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . Alors

i) F^* est canoniquement isomorphe à $E^*/F^\perp$.

ii) $(E/F)^*$ est canoniquement isomorphe à $F^\perp$.

Démonstration. i) Soit $\Phi : E^* \longrightarrow F^*$ l'application qui à chaque $\varphi \in E^*$ fait correspondre sa restriction à F . Alors Φ est linéaire et d'après le théorème de prolongement, Φ est surjective.

$$\begin{aligned}\varphi \in \ker(\Phi) &\iff \forall x \in F, \varphi(x) = 0 \\ &\iff \varphi \in F^\perp\end{aligned}$$

Donc, $\ker(\Phi) = F^\perp$. On sait que $E^*/\ker(\Phi)$ est isomorphe à $\text{Im}(\Phi)$, d'où le résultat.

- ii) Soit $s : E \longrightarrow E/F$ la surjection canonique et soit $\Psi : (E/F)^* \longrightarrow E^*$ l'application définie par

$$\forall \varphi \in (E/F)^*, \quad \Psi(\varphi) = \varphi \circ s$$

Alors, il est clair que Ψ est linéaire et que Ψ est injective.
Pour conclure, montrons que $\text{Im}(\Psi) = F^\perp$.

$$\begin{aligned} \psi \in \text{Im}(\Psi) &\implies \exists \varphi \in (E/F)^* : \psi = \varphi \circ s \\ &\implies \forall x \in F, \quad \psi(x) = \varphi(s(x)) = 0 \quad \text{car } \forall x \in F, \quad s(x) = 0 \\ &\implies \psi \in F^\perp \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $\psi \in F^\perp$ et soit $\varphi : (E/F) \longrightarrow K$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \varphi(s(x)) = \psi(x)$$

Alors φ est bien définie, car si $s(x) = s(y)$, alors $x - y \in F$, donc $\psi(x - y) = 0$ et par suite, $\psi(x) = \psi(y)$, donc $\varphi(s(x)) = \varphi(s(y))$.

Ainsi, $\varphi \in (E/F)^*$ et on a $\psi = \varphi \circ s$.

Donc $\psi \in \text{Im}(\Psi)$ et par suite, $(E/F)^*$ est isomorphe à $F^\perp$. $\square$

Corollaire 3.6.1

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Alors pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$$

Démonstration. Conséquence directe du théorème précédent. $\square$

Lemme 3.6.1

Soient E un K -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$ avec $x \notin F$. Alors, il existe une forme linéaire φ sur E , telle que

$$\langle x, \varphi \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \forall y \in F, \quad \langle y, \varphi \rangle = 0$$

Démonstration. Soit G un supplémentaire de $\text{Vect}(x) + F$ dans E et soit $H = F + G$, alors on a $E = \text{Vect}(x) \oplus H$ et $F \subseteq H$. Soit φ la forme linéaire définie par

$$\begin{aligned}\varphi : E = \text{Vect}(x) \oplus H &\longrightarrow K \\ z = \alpha x + y &\longmapsto \varphi(z) = \alpha\end{aligned}$$

Alors $\varphi(x) = 1$ et $\forall y \in F, \varphi(y) = 0$. □

Théorème 3.6.1

Soient E un K -espace vectoriel. Alors,

- i) *Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $(F^\perp)^\circ = F$*
- ii) *Si E est de dimension finie, alors pour tout sous-espace vectoriel G de E , on a $(G^\circ)^\perp = G$*

Démonstration. i) Par définition de l'orthogonalité, on voit facilement que $F \subseteq (F^\perp)^\circ$, donc il suffit de montrer que $(F^\perp)^\circ \subseteq F$.

Pour cela, supposons, par absurde, qu'il existe $x \in E$, tel que $x \in (F^\perp)^\circ$ et $x \notin F$. Donc d'après le lemme précédent, il existe $\varphi \in E^*$, telle que $\varphi(x) = 1$ et $\forall y \in F, \varphi(y) = 0$.

Ainsi, $\varphi \in F^\perp$ et puisque $x \in (F^\perp)^\circ$, alors, par définition de l'orthogonal, on a $\varphi(x) = 0$, ce qui est absurde, car $\varphi(x) = 1$.

- ii) On voit facilement que $G \subseteq (G^\circ)^\perp$, donc il suffit de montrer que $(G^\circ)^\perp \subseteq G$. Pour cela, nous allons utiliser le fait que G est de dimension finie, donc il existe $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$, tels que $G = \text{Vect}(\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\})$. Soit, maintenant, $\varphi \in (G^\circ)^\perp$ et soit $x \in E$, tel que

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \dots = \varphi_m(x) = 0$$

Puisque $G = \text{Vect}(\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\})$, alors $\forall \psi \in G, \psi(x) = 0$, par suite $x \in G^\circ$ et puisque $\varphi \in (G^\circ)^\perp$, alors $\varphi(x) = 0$. Ainsi, nous avons montré que $\bigcap_{i=1}^m \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi)$, donc d'après la proposition 3.1.2, $\varphi \in \text{Vect}(\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\})$. □

Corollaire 3.6.2

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de codimension p , $p = \dim(E) - \dim(F)$, alors il existe p formes linéaires, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, linéairement indépendantes, telles que

$$F = \bigcap_{i=1}^p \ker(\varphi_i)$$

Démonstration. F est de codimension p , donc $\dim(F^\perp) = p$.

Soit $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ une base de $F^\perp$, alors on aura,

$$(F^\perp)^\circ = \text{Vect}(\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p\})^\circ = \bigcap_{i=1}^p \ker(\varphi_i)$$

D'autre part, d'après le théorème précédent, on a $(F^\perp)^\circ = F$.

D'où le résultat. □

Remarque 41

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E , F un sous-espace vectoriel de E de codimension p et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ les formes linéaires linéairement indépendantes, telles que $F = \bigcap_{i=1}^p \ker(\varphi_i)$.

Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ et chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on pose $a_{ij} = \varphi_i(e_j)$, alors

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \implies \varphi_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

Donc $x \in F$, si et seulement si, les composantes, $x_1, x_2, \dots, x_n$, de x dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, vérifient le système (S) suivant, de p équations à n inconnues,

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

Ce système qui est de rang p , car $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ est libre, s'appelle une représentation cartésienne du sous-espace vectoriel F .

Exemples

E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$.

1. Tout sous-espace vectoriel de E de dimension p possède une représentation cartésienne sous forme d'un système de rang $n - p$ et de $n - p$ équations.
2. Une droite vectorielle de E possède une représentation cartésienne sous forme d'un système de rang $n - 1$ et de $n - 1$ équations.
3. Un hyperplan de E possède une représentation cartésienne sous-forme d'une seule équation sous la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \quad \text{avec} \quad (a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

3.7 Bidual

Définition 3.7.1

Soit E un K -espace vectoriel, on appelle **bidual** de E , qu'on note E^{**} , le dual de E^* .

$$E^{**} = (E^*)^* = L(E^*, K)$$

Remarque 42

Considérons l'application $j : E \longrightarrow E^{**}$ définie par,

$$\forall x \in E, \forall \varphi \in E^*, \quad \langle \varphi, j(x) \rangle = \langle x, \varphi \rangle$$

Alors, il est facile de voir que j est linéaire injective. Donc E s'identifie canoniquement à un sous-espace vectoriel de E^{**} .

En particulier, si E est de dimension finie, alors j est un isomorphisme, donc, dans ce cas, E s'identifie canoniquement à E^{**} .

Proposition 3.7.1

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $j : E \longrightarrow E^{**}$ l'isomorphisme canonique entre E et E^{**} . Alors

- i) Pour toute base β de E , on a $j(\beta) = \beta^{**}$, où $\beta^{**} = (\beta^*)^*$ est la base duale de β^* dans E^{**} .
- ii) Si γ est une base de E^* , γ^* sa base duale dans E^{**} et β est sa base préduale dans E , alors

$$\beta = j^{-1}(\gamma^*)$$

Démonstration. i) Soit $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E , alors on a

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall l \in \{1, 2, \dots, n\}, \langle e_l^*, j(e_k) \rangle = \langle e_k, e_l^* \rangle = \delta_{kl}$$

Donc $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, j(e_k) = (e_k^*)^*$.

ii) Puisque $\beta^* = \gamma$, alors, d'après i), $j(\beta) = \gamma^*$, donc $\beta = j^{-1}(\gamma^*)$. $\square$

3.8 Transposée d'une application linéaire

Définition 3.8.1

Soient E et F deux K -espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle **application transposée** de f , qu'on note ${}^t f$, l'application linéaire de F^* dans E^* définie par,

$$\forall \varphi \in F^*, {}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$$

Remarque 43

Par définition de l'application transposée d'une application linéaire f , on a

$$\boxed{\forall x \in E, \forall \varphi \in F^*, \langle x, {}^t f(\varphi) \rangle = \langle f(x), \varphi \rangle}$$

De plus, ${}^t f$ est l'unique application linéaire de F^* vers E^* vérifiant cette relation. En effet, soit $g : F^* \longrightarrow E^*$ une application linéaire telle que

$$\forall x \in E, \forall \varphi \in F^*, \langle x, g(\varphi) \rangle = \langle f(x), \varphi \rangle$$

Alors, il est clair que $\forall \varphi \in F^*, g(\varphi) = \varphi \circ f$, donc $g = {}^t f$.

Proposition 3.8.1

Soient E, F et G trois K -espaces vectoriels. Alors

$$a) \forall f \in L(E, F), \forall g \in L(E, F), {}^t(f + g) = {}^t f + {}^t g.$$

$$b) \forall \lambda \in K, \forall f \in L(E, F), {}^t(\lambda f) = \lambda {}^t f.$$

$$c) \forall f \in L(E, F), \forall g \in L(F, G), {}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g.$$

Démonstration. a) Soit $\varphi \in F^*$, alors on a

$${}^t(f+g)(\varphi) = \varphi \circ (f+g) = \varphi \circ f + \varphi \circ g = {}^tf(\varphi) + {}^tg(\varphi)$$

$$\text{Donc } {}^t(f+g) = {}^tf + {}^tg.$$

b) Soit $\varphi \in F^*$, alors on a

$${}^t(\lambda f)(\varphi) = \varphi \circ (\lambda f) = \lambda(\varphi \circ f) = \lambda {}^tf(\varphi)$$

$$\text{Donc } {}^t(\lambda f) = \lambda {}^tf.$$

c) Soit $\varphi \in G^*$, alors on a

$${}^t(g \circ f)(\varphi) = \varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f = {}^tg(\varphi) \circ f = {}^tf({}^tg(\varphi)) = ({}^tf \circ {}^tg)(\varphi)$$

$$\text{Donc } {}^t(g \circ f) = {}^tf \circ {}^tg. \quad \square$$

Théorème 3.8.1

Soient E et F deux K -espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors,

- i) $\ker({}^tf) = (\text{Im})^\perp.$
- ii) $\text{Im}({}^tf) = (\ker(f))^\perp.$

Démonstration. i) Soit $\varphi \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} \varphi \in \ker({}^tf) &\iff {}^tf(\varphi) = 0 \\ &\iff \varphi \circ f = 0 \\ &\iff \forall x \in E, \langle f(x), \varphi \rangle = 0 \\ &\iff \varphi \in (\text{Im})^\perp \end{aligned}$$

ii) Soit $\psi \in \text{Im}({}^tf)$, alors il existe $\varphi \in F^*$, telle que $\psi = {}^tf(\varphi)$, donc pour tout $x \in \ker(f)$, on a

$$\langle x, \psi \rangle = \langle x, {}^tf(\varphi) \rangle = \langle f(x), \varphi \rangle = 0$$

donc $\psi \in (\ker(f))^\perp$, par suite, $\text{Im}({}^tf) \subseteq (\ker(f))^\perp$.

Réciproquement, soit $\psi \in (\ker(f))^\perp$ et soit G un supplémentaire de Im dans F . Soit $\varphi : F \longrightarrow K$ la correspondance définie par,

$$\begin{aligned} \varphi : F = \text{Im} \oplus G &\longrightarrow K \\ y = f(x) + z &\longmapsto \psi(x) \end{aligned}$$

Alors φ définit bien une application, car si $y = f(x) + z = f(x') + z$, alors $x - x' \in \ker(f)$, donc $\psi(x - x') = 0$, par suite, on a $\psi(x) = \psi(x')$. De plus pour tout $x \in E$, on a $\varphi(f(x)) = \psi(x)$, donc $\psi = \varphi \circ f = {}^t f(\varphi)$.
 $\square$

Théorème 3.8.2

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et β^* sa base duale. Alors pour tout endomorphisme u de E , on a

$$\text{Mat}({}^t u, \beta^*) = {}^t \text{Mat}(u, \beta)$$

Démonstration. Soient $A = \text{Mat}(u, \beta)$ et $B = \text{Mat}({}^t u, \beta^*)$ avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors on sait que pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, on a $a_{ij} = \langle u(e_j), e_i^* \rangle$. D'autre part, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a ${}^t u(e_j^*) = \sum_{k=1}^n b_{kj} e_k^*$. Donc pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, on a

$$a_{ji} = \langle u(e_i), e_j^* \rangle = \langle e_i, {}^t u(e_j^*) \rangle = \sum_{k=1}^n b_{kj} \langle e_i, e_k^* \rangle = b_{ij}$$

On en déduit donc que $B = {}^t A$. $\square$

Proposition 3.8.2 (Dualité et stabilité)

Soient E un K -espace vectoriel, u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E . Alors,

$$F \text{ est stable par } u \iff F^\perp \text{ est stable par } {}^t u$$

Démonstration. $(\implies)$ Supposons que F est stable par u . Alors pour tout $\varphi \in F^\perp$ et pour tout $x \in F$, on a $\langle x, {}^t u(\varphi) \rangle = \langle u(x), \varphi \rangle = 0$, car $u(x) \in F$ et $\varphi \in F^\perp$.
 Donc ${}^t u(\varphi) \in F^\perp$ et par suite, $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

($\Longleftarrow$) Supposons que $F^\perp$ est stable par ${}^t u$. Alors pour $x \in F$, on a

$$\begin{aligned} x \in F &\implies \forall \varphi \in F^\perp, \langle x, {}^t u(\varphi) \rangle = 0 \quad (\text{car } {}^t u(\varphi) \in F^\perp) \\ &\implies \forall \varphi \in F^\perp, \langle u(x), \varphi \rangle = 0 \\ &\implies u(x) \in (F^\perp)^\circ \\ &\implies u(x) \in F \quad (\text{car, d'après le théorème 3.6.1, } (F^\perp)^\circ = F) \end{aligned}$$

Donc F est stable par u . □

3.9 Exercices

Exercice 68

Pour chaque entier $n \geq 1$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$. Soit φ l'application définie par,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto \int_0^1 P(t) dt \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour chaque $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, soit φ_i l'application définie par,

$$\begin{aligned} \varphi_i : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto P\left(\frac{i}{n}\right) \end{aligned}$$

Montrer que $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, φ_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et que $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $(\mathbb{R}[X])^*$.

3. En déduire qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$, tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 P(t) dt = \sum_{i=0}^n a_i P\left(\frac{i}{n}\right)$$

Exercice 69

$E = \mathbb{R}_3[X]$ est muni de sa base canonique (e_0, e_1, e_2, e_3) , où $e_0 = 1$, $e_1 = X$, $e_2 = X^2$ et $e_3 = X^3$. Soit F la partie de E définie par,

$$P \in F \iff P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P''(0) = 0$$

- a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base de F .
- b) Montrer que pour tout $\varphi \in E^*$, on a

$$\varphi \in F^\perp \iff \varphi(e_0) = \varphi(e_1) = \varphi(e_3)$$

- c) Soient $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ et φ_3 les formes linéaires définies sur E par $\varphi_0 = e_2^*$, $\varphi_1 = e_0^* + e_1^* + e_3^*$, $\varphi_2 = e_1^* - e_2^*$ et $\varphi_3 = e_2^* - e_3^*$. Vérifier que $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* et déterminer sa base préduale (v_0, v_1, v_2, v_3) .

Exercice 70

On considère les formes linéaires $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ définies pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ par, $\varphi_0(P) = P(0)$, $\varphi_1(P) = P(1)$, $\varphi_2(P) = P'(0)$ et $\varphi_3(P) = P'(1)$.

- Montrer que $\gamma = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbb{R}_3[X])^*$.
- Déterminer la base préduale β de γ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
- Soit φ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par,

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \varphi(P) = \int_0^1 P(t) dt$$

Déterminer les composantes de φ dans la base γ .

Exercice 71

On désigne par (e_0, e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$. Rappelons que

$$e_0 = 1, \quad e_1 = X \text{ et } e_2 = X^2$$

- Soient a, b et c trois points deux à deux distincts de $\mathbb{C}$. On pose

$$P_1 = (X - b)(X - c), \quad P_2 = (X - a)(X - c) \text{ et } P_3 = (X - a)(X - b)$$

Montrer (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$ et trouver les coordonnées d'un polynôme P dans cette base.

- Déterminer la base duale (P_1^*, P_2^*, P_3^*) de (P_1, P_2, P_3) .
- Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}_2[X]$ défini par ;

$$\forall P \in \mathbb{C}_2[X], \quad u(P) = XP' + P$$

Déterminer ι_u .

Exercice 72

Pour chaque $a \in \mathbb{R}$, on considère la forme linéaire φ_a définie sur $\mathbb{R}_2[X]$, par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \varphi_a(P) = P(a)$$

- Montrer que $(\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$ est une base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.
- En déduire qu'il existe des constantes α, β et γ ; tels que,

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \int_{-1}^1 P(t) dt = \alpha P(-1) + \beta P(0) + \gamma P(1)$$

(Formule des trois niveaux)

3. Déterminer la base préduale de $(\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$.
4. Calculer les constantes α, β et γ .

Exercice 73

$E = \mathbb{K}_n[X]$ et φ une forme linéaire sur E .

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{K}$, tel que

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad \varphi((X - a)P) = 0$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$, tel que $\forall P \in E, \quad \varphi(P) = \alpha P(a)$.

2. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{K}$, tel que

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad \varphi((X - a)^2 P) = 0$$

Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, tels que

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = \alpha P(a) + \beta P'(a)$$

Exercice 74

Soient K un corps commutatif et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, $n \geq 2$, les formes linéaires sur K^n définies par :

$$\forall x \in K^n, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \implies \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \varphi_i(x) = x_i + x_{i+1} \\ \varphi_n(x) = x_1 + x_n \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de n , $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ forme une base de $(K^n)^*$?
2. Dans le cas où $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ forme une base de $(K^n)^*$, déterminer sa base préduale.

Exercice 75

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, φ et ψ deux formes linéaires non nulles sur E . Montrer qu'il existe $x \in E$, tel que $\varphi(x)\psi(x) \neq 0$.

Exercice 76

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ un système de vecteurs de E , tels que,

$$\forall \varphi \in E^*, \quad \varphi(e_1) = \varphi(e_2) = \dots = \varphi(e_n) = 0 \implies \varphi = 0$$

Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E .

Exercice 77

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E .

On suppose qu'il existe $x \neq 0$, tel que $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0$.

Montrer que la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est liée.

Exercice 78

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension infinie.

Montrer que si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont des formes linéaires sur E , alors on a les propriétés suivantes :

- i) $\bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i) \neq \{0\}$.
- ii) $\bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i)$ est de codimension finie.

Exercice 79

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et p un entier ≥ 1 . On suppose qu'il existe p formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, telles que

$$\forall x \in E, \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \dots = \varphi_p(x) = 0 \implies x = 0$$

Montrer que E est de dimension finie $\leq p$.

Exercice 80

Soient E et F deux K -espaces vectoriels, V un sous-espace de E et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que

$$f(V)^\perp = ({}^t f)^{-1}(V^\perp)$$

Exercice 81

Soient E un K -espace vectoriel, F et G deux sous-espace vectoriels de E , tels que $E = F \oplus G$. Montrer que $E^* = F^\perp \oplus G^\perp$.

3.10 Solution des exercices**Exercice 68**

1. Il est aisé de vérifier que φ est linéaire.
2. Il est clair que pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, φ_i est linéaire.

Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, tel que $\alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \dots + \alpha_n\varphi_n = 0$, on doit montrer que $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. D'après le théorème d'interpolation de Lagrange, pour chaque $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, il existe un polynôme P_i , tel que $P_i(\frac{i}{n}) = 1$ et $P_i(\frac{j}{n}) = 0$ pour $j \neq i$, donc on a

$$(\alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \dots + \alpha_n\varphi_n)(P_i) = \alpha_i$$

Il en résulte donc que $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, donc le système $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre et comme $\dim((\mathbb{R}_n[X])^*) = n + 1$, alors $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

3. On a $\varphi \in (\mathbb{R}[X])^*$ et $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $(\mathbb{R}[X])^*$, donc il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, tel que $\varphi = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i$, par suite, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\int_0^1 P(t)dt = \varphi(P) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(P) = \sum_{i=1}^n a_i P\left(\frac{i}{n}\right)$$

Exercice 69

- a) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, avec $P = a_0 + a_1X + a_2X^3 + a_3X^3$, alors on a

$$\begin{aligned} P \in F &\iff \begin{cases} P(1) = 0 \\ P''(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff P = a_0(1 - X^3) + a_1(X - X^3) \\ &\iff P \in \text{Vect}(1 - X^3, X - X^3) \end{aligned}$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$, c'est le sous-espace vectoriel engendré par $\{1 - X^3, X - X^3\}$. On vérifie facilement que $(1 - X^3, X - X^3)$ est libre, donc $(1 - X^3, X - X^3)$ est une base de F .

- b) On a $F = \text{Vect}(1 - X^3, X - X^3)$, donc $F^\perp = \{1 - X^3, X - X^3\}^\perp$, par suite, pour tout $\varphi \in E^*$, on a

$$\begin{aligned} \varphi \in F^\perp &\iff \varphi(1 - X^3) = 0 \text{ et } \varphi(X - X^3) = 0 \\ &\iff \varphi(1) = \varphi(X) = \varphi(X^3) \end{aligned}$$

- c) Soit $\beta = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ la base préduale de $\gamma = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Soient P et Q les matrices de passage de la base (e_0, e_1, e_2, e_3) à la base β et de la base $(e_0^*, e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ à la base γ , alors on sait que $P = {}^t(Q^{-1})$.

On a

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour inverser la matrice Q on considère le système suivant :

$$\begin{cases} y = X \\ y + z = Y \\ x - z + t = Z \\ y - t = T \end{cases} \quad \text{qui admet pour solution} \quad \begin{cases} x = -2X + Y + Z + T \\ y = X \\ z = -X + Y \\ t = X - T \end{cases}$$

On en déduit donc que

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Par suite, on a } \begin{cases} v_0 = -2e_0 + e_1 + e_2 + e_3 = -2 + X + X^2 + X^3 \\ v_1 = e_0 = 1 \\ v_2 = -e_0 + e_1 = -1 + X \\ v_3 = e_0 - e_3 = 1 - X^3 \end{cases}$$

Exercice 70

- a) Soient $\beta = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\beta^* = (e_0^*, e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ sa base duale, alors pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on a

$$\varphi_i = \langle e_0, \varphi_i \rangle e_0^* + \langle e_1, \varphi_i \rangle e_1^* + \langle e_2, \varphi_i \rangle e_2^* + \langle e_3, \varphi_i \rangle e_3^*$$

Ainsi, on aura

$$\begin{cases} \varphi_0 = e_0^* \\ \varphi_1 = e_0^* + e_1^* + e_2^* + e_3^* \\ \varphi_2 = e_1^* \\ \varphi_3 = e_1^* + 2e_2^* + 3e_3^* \end{cases}$$

Soit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, tel que $\alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3 = 0$, alors on a $\alpha_0 + \alpha_1 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$ et $\alpha_1 + 3\alpha_3 = 0$, ce qui donne $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Donc $\gamma = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre et comme $\dim((\mathbb{R}_3[X])^*) = 4$, alors γ est une base de $(\mathbb{R}_3[X])^*$.

- b) Soit (v_0, v_1, v_2, v_3) la base préduale de γ et soit P la matrice de passage de β à (v_0, v_1, v_2, v_3) , alors on sait que $P = {}^t(Q^{-1})$, où Q est la de passage de β^* à γ . On a

$$\begin{cases} e_0^* = \varphi_0 \\ e_1^* = \varphi_2 \\ e_2^* = -3\varphi_0 + 3\varphi_1 - 2\varphi_2 - \varphi_3 \\ e_3^* = 2\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \end{cases}$$

Donc on en déduit que

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a $v_0 = e_0 - 3e_2 + 2e_3$, $v_1 = 3e_2 - 2e_3$, $v_2 = e_1 - 2e_2 + e_3$ et $v_3 = -e_2 + e_3$.

c) $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est la base duale de (v_0, v_1, v_2, v_3) , donc on a

$$\begin{aligned}\varphi &= \langle \varphi, v_0 \rangle \varphi_0 + \langle \varphi, v_1 \rangle \varphi_1 + \langle \varphi, v_2 \rangle \varphi_2 + \langle \varphi, v_3 \rangle \varphi_3 \\ &= \frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{12}\varphi_2 - \frac{1}{12}\varphi_3\end{aligned}$$

Exercice 71

a) Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, tel que $\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0$, alors on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ (b+c)\alpha + (a+c)\beta + (a+b)\gamma = 0 \\ (bc)\alpha + (ac)\beta + (ab)\gamma = 0 \end{cases}$$

ce qui amène, après échelonnement, au système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ (a-b)\beta + (a-c)\gamma = 0 \\ (a-c)(b-c)\gamma = 0 \end{cases}$$

et comme a, b et c sont deux à deux distincts, alors on a $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On en déduit donc que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

Soit $P \in \mathbb{C}_2[X]$, avec $P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$, alors on a

$P(a) = \alpha(a-b)(a-c)$, $P(b) = \beta(b-a)(b-c)$ et $P(c) = \gamma(c-a)(c-b)$, donc on a

$$P = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)}P_1 + \frac{P(b)}{(b-a)(b-c)}P_2 + \frac{P(c)}{(c-a)(c-b)}P_3$$

b) Soit Q la matrice de passage de la base (e_0^*, e_1^*, e_2^*) à la base (P_1^*, P_2^*, P_3^*) et soit P la matrice de passage de la base (e_0, e_1, e_2) , alors on sait que $Q = {}^t(P^{-1})$. On a

$$P = \begin{pmatrix} bc & ac & ab \\ -(b+c) & -(a+c) & -(a+b) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant le calcul on trouve

$$P^{-1} = \frac{1}{(a-b)(a-c)(b-c)} \begin{pmatrix} b-c & a(b-c) & a^2(b-c) \\ a-c & b(a-c) & b^2(a-c) \\ a-b & c(a-b) & c^2(a-b) \end{pmatrix}$$

- c) Soit A la matrice de u par rapport à (e_0, e_1, e_2) et soit B la matrice de ${}^t u$ par rapport à (e_0^*, e_1^*, e_2^*) , alors on sait que $B = {}^t A$.

$$\text{On a } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ donc } B = A.$$

Exercice 72

- Il est facile de vérifier que $(\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$ est une base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.
- $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, par $\varphi(P) = \int_{-1}^1 P(t)dt$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$, donc $\varphi \in (\mathbb{R}_2[X])^*$, par suite, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tel que $\varphi = \alpha\varphi_{-1} + \beta\varphi_0 + \gamma\varphi_1$. Ainsi on aura

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_{-1}^1 P(t)dt = \alpha P(-1) + \beta P(0) + \gamma P(1)$$

- Soit (v_1, v_2, v_3) la base préduale de $(\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$. Soient P la matrice de passage de la base canonique (e_0, e_1, e_2) à (v_1, v_2, v_3) et Q la matrice de passage de (e_0^*, e_1^*, e_2^*) à $(\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$, alors on sait que $P = {}^t(Q^{-1})$. Pour tout $i \in \{-1, 0, 1\}$, on a

$$\varphi_i = \langle e_0, \varphi_i \rangle e_0^* + \langle e_1, \varphi_i \rangle e_1^* + \langle e_2, \varphi_i \rangle e_2^*$$

donc on en déduit que $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En faisant le calcul on trouve

$$Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc on a}$$

$$v_1 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2), \quad v_2 = e_0 - e_2 \quad \text{et} \quad v_3 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$$

- $(\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$ est la base duale de (v_1, v_2, v_3) , alors on a

$$\varphi = \langle v_1, \varphi \rangle \varphi_{-1} + \langle v_2, \varphi \rangle \varphi_0 + \langle v_3, \varphi \rangle \varphi_1$$

Donc on a

$$\begin{cases} \alpha = \langle v_1, \varphi \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (-t + t^2) dt = \frac{1}{3} \\ \beta = \langle v_2, \varphi \rangle = \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = \frac{4}{3} \\ \gamma = \langle v_3, \varphi \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t + t^2) dt = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Exercice 73

- a) Soit ψ la forme linéaire définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, par $\psi(P) = P(a)$. Soit $P \in \ker(\psi)$, alors on a $P(a) = 0$, donc il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, tel que $P = (X - a)Q$, par suite, on a $\varphi(P) = \varphi((X - a)Q) = 0$, donc $P \in \ker(\varphi)$. On a donc établi que $\ker(\psi) \subseteq \ker(\varphi)$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $\varphi = \alpha\psi$.
- ii) Soient φ_1 et φ_2 les formes linéaires définies pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, par $\varphi_1(P) = P(a)$ et $\varphi_2(P) = P'(a)$. Soit $P \in \ker(\varphi_1) \cap \ker(\varphi_2)$, alors on a $P(a) = P'(a) = 0$, donc a est une racine de P de multiplicité au moins égale à 2, par suite, il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, tel que $P = (X - a)^2Q$, donc $\varphi(P) = \varphi((X - a)^2Q) = 0$. Nous avons donc $\ker(\varphi_1) \cap \ker(\varphi_2) \subseteq \ker(\varphi)$, par suite, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tel que $\varphi = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$.

Exercice 74

1. Soient $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\beta^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale, alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on a $\varphi_i = e_i^* + e_{i+1}^*$ et on a $\varphi_n = e_1^* + e_n^*$. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i = 0$, alors on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_n = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0 \end{cases} \quad \text{qui est équivalent à} \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_n = 0 \\ \alpha_2 = -\alpha_1 \\ \alpha_3 = \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n = (-1)^{n+1} \alpha_1 \end{cases}$$

Donc si n est pair, alors ce système est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_1 \\ \alpha_3 = \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n = -\alpha_1 \end{cases}$$

Donc si pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on pose $\alpha_i = (-1)^i$, alors on a $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i = 0$, donc dans ce cas le système $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est lié.

Si n est impair, alors le système précédent est équivalent au système

suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_n = 0 \\ \alpha_2 = -\alpha_1 \\ \alpha_3 = \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n = \alpha_1 \end{cases}$$

On a donc $\alpha_1 + \alpha_n = 0$ et $\alpha_n = \alpha_1$, donc $\alpha_1 = 0$, par suite, on a $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, donc dans ce cas, $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est libre.

2.

3. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ la base préduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ et soit P la matrice de passage de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ à $(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Soit Q la matrice de passage de $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ à $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, alors on sait que $P = {}^t(Q^{-1})$. On a

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant le calcul on trouve

$$Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 1 & -1 & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 75

Si $\ker(\varphi) \cup \ker(\psi) = E$, alors on a $\ker(\varphi) \subseteq \ker(\psi)$ ou $\ker(\psi) \subseteq \ker(\varphi)$. Comme φ et ψ sont non nuls, alors $\ker(\varphi)$ et $\ker(\psi)$ sont des hyperplans, donc $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$. Soit $x \in E$, avec $x \notin \ker(\varphi)$, alors on a $\varphi(x)\psi(x) \neq 0$.

Si $\ker(\varphi) \cup \ker(\psi) \neq E$, alors dans ce cas, il suffit de prendre $x \in E$, tel que $x \notin \ker(\varphi) \cup \ker(\psi)$, donc on aura $\varphi(x)\psi(x) \neq 0$.

Exercice 76

On considère l'application $\Phi : E^* \longrightarrow K^n$ définie pour tout $\varphi \in E^*$, par $\Phi(\varphi) = (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))$, alors il est clair que Φ est linéaire et que

$\ker(\Phi) = \{0\}$, car par hypothèse, on a

$$\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = \dots = \varphi(e_n) = 0 \implies \varphi = 0$$

Comme $\dim(E^*) = \dim(K^n)$, alors Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Soit $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ la base canonique de K^n et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

soit $\varphi_i = \Phi^{-1}(v_i)$, alors pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $\varphi_i(e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$.

Φ est un isomorphisme, donc l'image réciproque d'une base de K^n est une base de E^* , par suite, $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* . Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ la base préduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$e_i = \sum_{j=1}^n \langle e_i, \varphi_j \rangle u_j = u_i \quad (\text{car } \langle e_i, \varphi_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases})$$

Donc $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base, c'est la base préduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$.

Exercice 77

Supposons qu'il existe $x \neq 0$, tel que $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0$ et supposons par l'absurde que $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est libre, donc $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* . Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ la base préduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, alors on a $x = \sum_{i=1}^n \langle x, \varphi_i \rangle v_i = 0$, ce qui est absurde, car $x \neq 0$.

Exercice 78

On considère l'application $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{K}^n$ définie pour tout $x \in E$, par $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$, alors il est clair que Φ est linéaire. Comme E est de dimension infinie, alors $\ker(\Phi) \neq \{0\}$, car $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie. On a $\ker(\Phi) = \bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i)$, donc $\bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i) \neq \{0\}$. On a aussi $E/\ker(\Phi)$ isomorphe à $\text{Im}(\Phi)$, avec $\text{Im}(\Phi)$ de dimension finie, donc $E/\ker(\Phi)$ est de dimension finie, par suite $\bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i)$ est de codimension finie.

Exercice 79

On considère l'application $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{K}^p$ définie pour tout $x \in E$, par $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_p(x))$, alors il est clair que Φ est linéaire. Par hypothèse, si $\Phi(x) = 0$, alors $x = 0$, donc $\ker(\Phi) = \{0\}$, donc E est isomorphe $\Phi(E)$ et comme $\Phi(E)$ est de dimension finie et $\dim(\Phi(E)) \leq p$, alors E est de dimension finie et on a $\dim(E) \leq p$.

Exercice 80

Soit $\varphi \in E^*$, alors on a

$$\begin{aligned}
 \varphi \in ({}^t f)^{-1}(V^\perp) &\iff ({}^t f)(\varphi) \in V^\perp \\
 &\iff \forall x \in V, \langle x, ({}^t f)(\varphi) \rangle = 0 \\
 &\iff \forall x \in V, \langle f(x), \varphi \rangle = 0 \\
 &\iff \varphi \in f(V)^\perp
 \end{aligned}$$

Donc on voit que $({}^t f)^{-1}(V^\perp) = f(V)^\perp$.

Exercice 81

Soit $\varphi \in F^\perp \cap G^\perp$ et soit $x \in E$, avec $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$, alors on a $\varphi(x) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = 0$, donc $\varphi = 0$, par suite $F^\perp \cap G^\perp = \{0\}$. Soit $\varphi \in E^*$ et soient φ_1 et φ_2 les formes linéaires définies pour tout $x \in E$, avec $x = x_1 + x_2$, par $\varphi_1(x) = \varphi(x_2)$ et $\varphi_2(x) = \varphi(x_1)$, alors on a $\varphi_1 \in F^\perp$, $\varphi_2 \in G^\perp$ et $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, donc $E^* = F^\perp + G^\perp$.

CHAPITRE 4

FORMES MULTILINÉAIRES – DÉTERMINANTS

4.1 Formes multilinéaires

4.1.1 Définitions et propriétés de base

Définition 4.1.1

Soient E un K -espace vectoriel et p un entier ≥ 1 , une forme p -linéaire sur E est une application,

$$\begin{aligned} f : E^p &\longrightarrow K \\ (x_1, x_2, \dots, x_p) &\longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_p) \end{aligned}$$

telle que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, l'application $f_i : E \longrightarrow K$ définie par

$$\forall x \in E, f_i(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_p)$$

soit une forme linéaire sur E .

Remarque 4.4

1. Soit f une forme p -linéaire sur E . On suppose qu'il existe $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ tel que $x_i = 0$, alors $f(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$.
2. Une forme 1-linéaire sur E est tout simplement une forme linéaire.

3. Une forme 2-linéaire sur E s'appelle une forme bilinéaire sur E .
4. Si on note $L_p(E)$ l'ensemble de toutes les formes p -linéaire sur E , alors $L_p(E)$ est un K -espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les applications de E^p vers K .

Notations

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ et on note $\mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)$ l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{N}_p$ vers $\mathbb{N}_n$.

On rappelle que toute application de $\mathbb{N}_p$ vers $\mathbb{N}_n$ est déterminé par un unique p -uplet de $\mathbb{N}_n^p$, autrement dit, l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n) &\longrightarrow \mathbb{N}_n^p \\ \varphi &\longmapsto (\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(p)) \end{aligned}$$

est une bijection.

Rappelons aussi, qu'on appelle permutation toute bijection de $\mathbb{N}_n$ vers $\mathbb{N}_n$, que l'ensemble de toutes les permutations de $\mathbb{N}_n$ vers $\mathbb{N}_n$ se note S_n et que S_n muni de la composition des applications est un groupe, appelé groupe symétrique.

Règles de calcul

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E , p un entier ≥ 1 et $f : E^p \longrightarrow K$ une forme p -linéaire.

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ un élément de E^p , tel que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, on a $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, alors on a

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_p) &= f\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_p=1}^n a_{i_p p} e_{i_p}\right) \\ &= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p) \in \mathbb{N}_n^p} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_p p} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}) \end{aligned}$$

Pour chaque $(i_1, i_2, \dots, i_p) \in \mathbb{N}_n^p$, soit $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)$ définie par :

$$\varphi(1) = i_1, \varphi(2) = i_2, \dots, \varphi(p) = i_p$$

alors on aura,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sum_{\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)} a_{\varphi(1), 1} a_{\varphi(2), 2} \cdots a_{\varphi(p), p} f(e_{\varphi(1)}, e_{\varphi(2)}, \dots, e_{\varphi(p)})$$

4.1.2 Formes multilinéaires alternées

Définition 4.1.2

Soient E un K -espace vectoriel, p un entier ≥ 1 et $f : E^p \longrightarrow K$ une forme p -linéaire sur E .

- i) On dit que f est **symétrique** si pour tout $\sigma \in S_p$ et pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$, on a

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

- ii) On dit que f est **antisymétrique** si pour tout $\sigma \in S_p$ et pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$, on a

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

- iii) On dit que f est **alternée** si pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$, on a

$$\forall i \in \mathbb{N}_p, \forall j \in \mathbb{N}_p, [i \neq j \text{ et } x_i = x_j] \implies f(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$

Remarque 45

Soit f une forme bilinéaire sur E , alors

- i) f est symétrique, si, et seulement si,

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x, y) = f(y, x)$$

- ii) f est antisymétrique, si, et seulement si,

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x, y) = -f(y, x)$$

- iii) f est alternée, si, et seulement si,

$$\forall x \in E, f(x, x) = 0$$

Théorème 4.1.1

Soient E un K -espace vectoriel, où K est un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$, et f une forme p -linéaire sur E . Alors f est antisymétrique, si, et seulement si, f est alternée.

Démonstration. ($\implies$) Supposons que f est antisymétrique.

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$, tel qu'il existe $i \in \mathbb{N}_p$ et $j \in \mathbb{N}_p$ avec $i \neq j$ et $x_i = x_j$. Montrons que $f(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$.

Comme $i \neq j$, alors on peut supposer que $i < j$. Soit τ la transposition qui échange i et j , rappelons que τ est la permutation de $\mathbb{N}_p$ définie par :

$$\tau(i) = j, \tau(j) = i \text{ et } \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{i, j\}, \tau(k) = k$$

Puisque f est antisymétrique, alors on aura,

$$\begin{aligned} f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(i)}, \dots, x_{\tau(j)}, \dots, x_{\tau(p)}) \\ = \varepsilon(\tau) f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \end{aligned}$$

et comme τ est une transposition, alors $\varepsilon(\tau) = -1$, donc on a

$$\begin{aligned} f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(i)}, \dots, x_{\tau(j)}, \dots, x_{\tau(p)}) \\ = -f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $x_i = x_j$, alors, on aura

$$\begin{aligned} f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(i)}, \dots, x_{\tau(j)}, \dots, x_{\tau(p)}) \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Donc on constate que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$$

Par suite,

$$2_K f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0_K$$

Puisque K est de caractéristique $\neq 2$, alors $2_K \neq 0_K$,

donc $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0$, par suite, f est alternée.

($\impliedby$) Supposons que f est alternée et montrons que f est antisymétrique.

Puisque S_p est engendré par les transpositions, alors il suffit de montrer que pour toute transposition τ de S_p , on a

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p, \quad f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(p)}) = -f(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

Soit $\tau = (i, j)$ une transposition de S_p , avec $i < j$. Puisque f est alternée, alors on a

$$f(x_1, x_2, \dots, \overbrace{x_i + x_j}^i, \dots, \overbrace{x_i + x_j}^j, \dots, x_n) = 0$$

D'autre part, puisque f est p -linéaire et f alternée, alors on aura,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, \overbrace{x_i + x_j}^i, \dots, \overbrace{x_i + x_j}^j, \dots, x_n) = \\ f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) + f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Donc f est antisymétrique. $\square$

Remarque 46

1. Si K est un corps de caractéristique $= 2$, alors toute forme alternée sur E est antisymétrique, cependant, la réciproque n'est pas toujours vraie. Par exemple, si on prend $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $E = K^n$ et f la forme bilinéaire définie par :

$$\text{Si } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ alors } f(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

alors f est à la fois symétrique et antisymétrique, mais f n'est pas alternée.

2. Si on note $\mathcal{A}_p(E)$ l'ensemble de toutes les formes p -linéaire alternées sur E , alors $\mathcal{A}_p(E)$ est un K -espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de $L_p(E)$.

Théorème 4.1.2

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\Delta : E^n \rightarrow K$ l'application définie pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de E^n , par

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

où pour tout $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, x_j , on a $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. Alors on a

- i) Pour tout entier $p > n$, $\mathcal{A}_p(E) = \{0\}$.
- ii) $\mathcal{A}_n(E)$ est de dimension 1 et on a

$$\forall f \in \mathcal{A}_n(E), f = f(e_1, e_2, \dots, e_n) \Delta$$

Démonstration. i) Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et soit f une forme p -linéaire sur E , avec $p > n$.

Montrons que f est nulle. Pour cela, soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^p$, tel que

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_j$$

Alors, on sait que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)} a_{\varphi(1),1} a_{\varphi(2),2} \cdots a_{\varphi(p),p} f(e_{\varphi(1)}, e_{\varphi(2)}, \dots, e_{\varphi(p)})$$

Puisque $p > n$, alors tout $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)$ est non injective.

Donc pour tout $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)$, il existe $i \in \mathbb{N}_p$ et il existe $j \in \mathbb{N}_p$, tels que $i \neq j$ et $\varphi(i) = \varphi(j)$. comme f est alternée, alors on a $f(e_{\varphi(1)}, e_{\varphi(2)}, \dots, e_{\varphi(p)}) = 0$ et ceci pour tout $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)$, par suite, f est nulle.

ii) Supposons, maintenant, que $p = n$, alors $\mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n) = \mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n)$.

Donc pour $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, on aura

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n)} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

Appliquons le fait que $\sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n)$ est bijective, si et seulement si, σ est injective. Ainsi, si $\sigma \notin S_n$, alors σ n'est pas injective, donc, il existe $i \in \mathbb{N}_p$ et il existe $j \in \mathbb{N}_p$, tels que $i \neq j$ et $\varphi(i) = \varphi(j)$. Puisque f est alternée, alors on a

$$\forall \sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n), \quad \sigma \notin S_n \implies f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = 0$$

Par suite, pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, on aura

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

Puisque f est alternée, alors f est antisymétrique, donc pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, on a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} f(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

Posons $\alpha = f(e_1, e_2, \dots, e_n)$, alors on a $f = \alpha \Delta$.

Pour conclure, nous allons vérifier que $\Delta \in \mathcal{A}_n(E)$. Pour cela, il est clair que Δ est n -linéaire, donc il reste à vérifier que Δ est alternée.

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, tel qu'il existe $i \in \mathbb{N}_n$, $j \in \mathbb{N}_n$ avec $i < j$ et

$x_i = x_j$. On doit montrer que $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

Soit A_n le sous-groupe de S_n formé des permutations paires, alors on sait que pour toute transposition τ de S_n ,

$$(S_n \setminus A_n)\tau = \{\sigma\tau : \sigma \in S_n \setminus A_n\} = A_n$$

Soit τ la transposition qui échange i et j , alors on a

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(i),i} \cdots a_{\sigma(j),j} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in A_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(i),i} \cdots a_{\sigma(j),j} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in S_n \setminus A_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(i),i} \cdots a_{\sigma(j),j} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in A_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in S_n \setminus A_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(\tau(j)),i} \cdots a_{\sigma(\tau(i)),j} \cdots a_{\sigma(n),n} \end{aligned}$$

Donc, si on pose $\varphi = \sigma\tau$, alors $\varepsilon(\varphi) = \varepsilon(\sigma\tau) = -\varepsilon(\sigma)$ et si σ décrit $S_n \setminus A_n$, alors φ décrit $(S_n \setminus A_n)\tau$ avec $(S_n \setminus A_n)\tau = A_n$. Donc on obtient,

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in A_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &\quad - \sum_{\varphi \in A_n} \varepsilon(\varphi) a_{\varphi(1),1} a_{\varphi(2),2} \cdots a_{\varphi(j),i} \cdots a_{\varphi(i),j} \cdots a_{\varphi(n),n} \end{aligned}$$

Or, $x_i = x_j$, donc $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $a_{ki} = a_{kj}$, par conséquent, on aura

$$a_{\varphi(j),i} = a_{\varphi(j),j} \quad \text{et} \quad a_{\varphi(i),j} = a_{\varphi(i),i}$$

donc on obtient,

$$\sum_{\varphi \in A_n} \varepsilon(\varphi) a_{\varphi(1),1} \cdots a_{\varphi(j),i} \cdots a_{\varphi(i),j} \cdots a_{\varphi(n),n} = \sum_{\varphi \in A_n} \varepsilon(\varphi) a_{\varphi(1),1} \cdots a_{\varphi(n),n}$$

par conséquent, on a

$$\sum_{\sigma \in A_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} - \sum_{\varphi \in A_n} \varepsilon(\varphi) a_{\varphi(1),1} a_{\varphi(2),2} \cdots a_{\varphi(n),n} = 0$$

Ainsi, on a $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ et par suite, Δ est une forme n -linéaire alternée sur E et on a

$$\forall f \in \mathcal{A}_n(E), \quad f = f(e_1, e_2, \dots, e_n) \Delta$$

Donc $\mathcal{A}_n(E) = \text{Vect}(\Delta)$, avec $\Delta \neq 0$, car $\Delta(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$, par suite, on a $\dim(\mathcal{A}_n(E)) = 1$. $\square$

Exemples

On suppose $\dim(E) = 2$. Soient (e_1, e_2) une base de E et f une forme bilinéaire alternée sur E . Donc d'après ce qui précède, on sait que $f = f(e_1, e_2)\Delta$.

Soient $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$, alors on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \\ &= x_1y_1f(e_1, e_1) + x_1y_2f(e_1, e_2) + x_2y_1f(e_2, e_1) + x_2y_2f(e_2, e_2) \end{aligned}$$

comme $f(e_1, e_1) = f(e_2, e_2) = 0$ et $f(e_2, e_1) = -f(e_1, e_2)$, alors on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x_1y_2f(e_1, e_2) - x_2y_1f(e_1, e_2) \\ &= f(e_1, e_2)(x_1y_2 - x_2y_1) = f(e_1, e_2) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

4.2 Déterminants

4.2.1 Déterminant d'un système de vecteurs

Définition 4.2.1

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et soit $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, tel que,

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$$

On définit le déterminant de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, par :

$$\det_{\beta}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Remarque 47

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Alors

1. L'application,

$$\det_\beta : E^n \longrightarrow K$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \det_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

est une forme n -linéaire alternée sur E .

2. Si f est une forme n -linéaire alternée quelconque, alors pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, on a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(e_1, e_2, \dots, e_n) \det_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

En particulier, si $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une autre base de E , alors $f = \det_\gamma$ est une forme n -linéaire sur E , par suite, on aura

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n, \quad \det_\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det_\gamma(\beta) \det_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Théorème 4.2.1

Soient E un k -espace vectoriel de dimension finie, β et γ deux bases de E , alors on a $\det_\beta(\gamma) \det_\gamma(\beta) = 1$.

Démonstration. D'après la remarque précédente, on a

$$1 = \det_\gamma(\gamma) = \det_\gamma(\beta) \det_\beta(\gamma)$$

Théorème 4.2.2

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un système de n vecteurs. Alors $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de E , si et seulement si, il existe une base β de E , telle que $\det_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$.

Démonstration. $(\implies)$ Si $\beta = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de E , alors on sait que

$$\det_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

($\Leftarrow$) Supposons, par absurde, que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est lié, alors on peut supposer, par exemple, qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ dans K , tels que

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i$$

Puisque le déterminant est multilinéaire, alors on aura

$$\det_{\beta}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \det_{\beta}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_i)$$

Puisque le déterminant est alterné, alors

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad \det_{\beta}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_i) = 0$$

Donc $\det_{\beta}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, ce qui est absurde, car, par hypothèse, on a $\det_{\beta}(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$. $\square$

4.2.2 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 4.2.1

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et u un endomorphisme quelconque de E , alors la quantité

$$\det_{\beta}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$$

ne dépend pas de la base β choisie.

Démonstration. Soit $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une autre base de E . Montrons que,

$$\det_{\gamma}(u(v_1), u(v_2), \dots, u(v_n)) = \det_{\beta}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$$

Pour cela, considérons l'application f définie sur E^n , par :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n, \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det_{\beta}(u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n))$$

Alors, il est clair que f est une forme n -linéaire alternée sur E , donc, d'après ce qui précède, pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, on aura,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(e_1, e_2, \dots, e_n) \det_{\beta}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \det_{\beta}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \det_{\beta}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Donc, en particulier, on a

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det_{\beta}(u(v_1), u(v_2), \dots, u(v_n)) \quad (4.1)$$

$$= \det_{\beta}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \det_{\beta}(\gamma) \quad (4.2)$$

D'autre part, on sait que

$$\det_{\beta}(u(v_1), u(v_2), \dots, u(v_n)) = \det_{\beta}(\gamma) \det_{\gamma}(u(v_1), u(v_2), \dots, u(v_n)) \quad (4.3)$$

Donc, d'après (4.2) et (4.3), on a

$$\det_{\gamma}(u(v_1), u(v_2), \dots, u(v_n)) = \det_{\beta}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$$

Définition 4.2.2

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base quelconque de E et u un endomorphisme de E . On définit le déterminant de u , par :

$$\det(u) = \det_{\beta}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$$

Remarque 48

1. La définition précédente a un sens, car $\det(u)$ ne dépend pas de la base choisie.
2. Supposons que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $e_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, alors on a

$$\det(u) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Théorème 4.2.3

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Alors

- i) $\det(\text{Id}_E) = 1$.
- ii) $\forall u \in L(E), \forall v \in L(E), \det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$.
- iii) $u \in L(E)$ est inversible, si et seulement si, $\det(u) \neq 0$.
- iv) Si u est un endomorphisme inversible, alors on a

$$\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$$

Démonstration. Soit $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

- i) $\det(Id_E) = \det_{\beta}(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$.
- ii) Soit f l'application définie pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, par :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det_{\beta}(u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n))$$

Alors f est une forme n -linéaire alternée sur E , donc pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, on a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(e_1, e_2, \dots, e_n) \det_{\beta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

En particulier, en remplaçant $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par $(v(x_1), v(x_2), \dots, v(x_n))$, on obtient

$$\begin{aligned} & \det_{\beta}(u(v(x_1)), u(v(x_2)), \dots, u(v(x_n))) \\ &= \det_{\beta}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \det_{\beta}(v(x_1), v(x_2), \dots, v(x_n)) \end{aligned}$$

D'où $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$.

- iii) Soit u un endomorphisme de E , alors on a

$$\begin{aligned} u \text{ inversible} &\iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \text{ est une base de } E \\ &\iff \det_{\beta}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \neq 0 \\ &\iff \det(u) \neq 0 \end{aligned}$$

- iv) On a $u \circ u^{-1} = Id_E$, donc $1 = \det(Id_E) = \det(u \circ u^{-1}) = \det(u) \det(u^{-1})$. $\square$

4.2.3 Déterminant d'une matrice

Définition 4.2.3

Soient K un corps commutatif et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K . On définit le déterminant de A , par :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Remarque 49 (Règles de calcul)

1. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K et $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n . Pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, soit v_j le vecteur défini par $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. Alors $v_1, v_2, \dots, v_n$ s'appellent les vecteurs colonnes de la matrice A et on a

$$\det(A) = \det_{\beta}(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Par conséquent, puisque le déterminant est une forme n -linéaire alternée, on obtient les règles de calcul suivantes :

Règle 1 : Si l'on effectue une permutation σ sur les colonnes de la matrice A , alors $\det(A)$ est remplacé par $\varepsilon(\sigma) \det(A)$.

Donc, en particulier, si l'on permute deux colonnes de A , alors $\det(A)$ se change en $-\det(A)$.

Règle 2 : Le déterminant ne change pas de valeur, si l'on ajoute à une colonne de A une combinaison linéaire quelconque des autres colonnes de A .

Règle 3 : Pour tout $\lambda \in K$, on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Règle 4 : Si les vecteurs colonnes de A forment un système lié, alors on a $\det(A) = 0$.

2. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et u un endomorphisme de E . Soit A la matrice de u par rapport à la base β , alors on a $\det(u) = \det(A)$. En effet, nous avons $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, donc

$$\begin{aligned} \det(u) &= \det_{\beta}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = \det(A) \end{aligned}$$

3. En pratique, le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, se note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Théorème 4.2.4

Soient K un corps commutatif, A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K et I_n la matrice identité. Alors

- i) $\det(I_n) = 1$.
- ii) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- iii) A est inversible, si et seulement si, $\det(A) \neq 0$.

Démonstration. i) Trivial

- ii) Soient u et v les endomorphismes de K^n de matrices A et B dans la base canonique de K^n . Alors $u \circ v$ a pour matrice AB par rapport à la base canonique de K^n , par suite, on aura

$$\det(AB) = \det(u \circ v) = \det(u)\det(v) = \det(A)\det(B)$$

- iii) Soit u l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de K^n , alors on a

$$\begin{aligned} A \text{ inversible} &\iff u \text{ inversible} \\ &\iff \det(u) \neq 0 \\ &\iff \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

Remarque 50

Si A est une matrice inversible, alors $\det(A) \neq 0$ et on a $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Proposition 4.2.2

Pour toute matrice carrée A , on a $\det(A) = \det({}^tA)$.

Démonstration. Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors on a ${}^tA = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, avec $b_{ij} = a_{ji}$, donc on aura

$$\begin{aligned} \det({}^tA) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \cdots b_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1),1} a_{\sigma^{-1}(2),2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n),n} \end{aligned}$$

Posons $\varphi = \sigma^{-1}$, alors φ décrit S_n , lorsque σ décrit S_n et on a $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$, par suite, on aura

$$\det({}^tA) = \sum_{\varphi \in S_n} \varepsilon(\varphi) b_{\varphi(1),1} b_{\varphi(2),2} \cdots b_{\varphi(n),n} = \det(A)$$

4.2.4 Développement d'un déterminant

Définition 4.2.4

Soient K un corps commutatif et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K . On appelle mineur relativement au coefficient a_{ij} , qu'on note Δ_{ij} , le déterminant de la matrice d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant dans la matrice A la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Remarque 51

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Théorème 4.2.5 (Développement suivant une colonne)

Soient K un corps commutatif et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K . Alors pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

Démonstration. Pour la démonstration on a besoin des lemmes suivants : $\square$

Lemme 4.2.1

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice triangulaire, alors on a

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

Démonstration. On suppose par exemple que A est triangulaire supérieure, alors on aura

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, i > j \implies a_{ij} = 0$$

On a aussi

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Or, pour chaque $\sigma \in S_n$, avec $\sigma \neq Id$, il existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, tel que $\sigma(k) > k$. En effet, supposons qu'il existe $\sigma \in S_n$, avec $\sigma \neq Id$, tel que $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $\sigma(k) \leq k$. Comme $\sigma \neq Id$, alors il existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, tel que $\sigma(k) \neq k$, et comme $\sigma(k) \leq k$, alors $\sigma(k) < k$, donc pour tout $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, on a $\sigma(j) \leq j \leq k-1$. Comme $\sigma(k) \leq k-1$, alors on a $\sigma(\{1, 2, \dots, k\}) \subseteq \{1, 2, \dots, k-1\}$ et comme σ est bijective, alors le cardinal de $\sigma(\{1, 2, \dots, k\})$ est égal à k , donc $k \leq k-1$, ce qui est absurde. Ainsi pour tout $\sigma \in S_n$, avec $\sigma \neq Id$, on $a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = 0$, d'où le résultat. $\square$

Lemme 4.2.2

Soient K un corps commutatif et M une matrice carrée d'ordre $n + p$ à coefficients dans K , avec $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où A est une matrice carrée d'ordre n et B une matrice carrée d'ordre p . Alors on a

$$\det(M) = \det(A) \det(B)$$

Démonstration. Ecrivons la matrice M sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & \dots & c_{np} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{p1} & \dots & b_{pp} \end{pmatrix}$$

On considère l'application $f : E^p \longrightarrow K$ définie pour chaque $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ élément de E^n par

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} & c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} & c_{n1} & \dots & c_{np} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{p1} & \dots & b_{pp} \end{vmatrix}$$

où $E = K^n$ et pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}$ sont les composantes de v_i dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Alors on voit facilement que f est une forme multilinéaire alternée sur E , donc d'après le théorème 4.1.2, pour tout $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ on a

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = f(e_1, e_2, \dots, e_n) \det(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Par conséquent, on a $\det(M) = f(e_1, e_2, \dots, e_n) \det(A)$, avec

$$f(e_1, e_2, \dots, e_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & c_{n1} & \dots & c_{np} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{p1} & \dots & b_{pp} \end{vmatrix}$$

Considérons maintenant l'application $g : E^p \longrightarrow K$ définie pour chaque $(v_1, v_2, \dots, v_p) \in E^p$ par

$$g(v_1, v_2, \dots, v_p) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & c_{n1} & \dots & c_{np} \\ 0 & \dots & 0 & v_{11} & \dots & v_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & v_{p1} & \dots & v_{pp} \end{vmatrix}$$

où $E = K^p$ et pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ip}$ sont les composantes de v_i dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_p)$. Alors g est une forme multilinéaire alternée sur E , donc d'après le théorème 4.1.2, pour tout $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ on a

$$g(v_1, v_2, \dots, v_p) = g(e_1, e_2, \dots, e_p) \det(v_1, v_2, \dots, v_p)$$

Par conséquent, on a $f(e_1, e_2, \dots, e_n) = g(e_1, e_2, \dots, e_p) \det(B)$, avec

$$g(e_1, e_2, \dots, e_p) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & c_{n1} & \dots & c_{np} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$g(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est un déterminant triangulaire donc d'après le lemme précédent, on a $g(e_1, e_2, \dots, e_p) = 1$, par suite, on aura $f(e_1, e_2, \dots, e_n) = \det(B)$. On en déduit donc que $\det(M) = f(e_1, e_2, \dots, e_n) \det(A)$ et par suite, on a $\det(M) = \det(A) \det(B)$. $\square$

Preuve du théorème. Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n , $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n et $v_1, v_2, \dots, v_n$ les vecteurs colonnes de A , donc pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. Fixons $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, alors on a

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det_{\beta}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n) \\ &= \det_{\beta}(v_1, \dots, v_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i, v_{j+1}, \dots, v_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \det_{\beta}(v_1, \dots, v_{j-1}, e_i, v_{j+1}, \dots, v_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} a_{ij} \det_{\beta}(e_i, v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) \end{aligned}$$

Donc si pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on pose

$D_i = \det_\beta(e_i, v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n)$, alors on aura

$$D_i = \begin{vmatrix} 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 1 & a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Dans la matrice ci-dessus, faisons permuter la $i^{\text{ème}}$ ligne avec $(i-1)^{\text{ème}}$ ligne puis avec la $(i-2)^{\text{ème}}$ ligne et ainsi de suite jusqu'à la $1^{\text{ère}}$ ligne, alors on obtient la matrice suivante :

$$D_i = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Ainsi, d'après le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} D_i &= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i-1} \Delta_{ij} \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j-2} a_{ij} \Delta_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

Remarque 52

Comme $\det(A) = \det({}^t A)$, alors on peut aussi développer un déterminant par rapport à n'importe quelle ligne, c'est à dire, on a

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j-2} a_{ij} \Delta_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

Définition 4.2.5

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n et soit Δ_{ij} le mineur associé à a_{ij} , pour chaque $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Alors

- i) $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ s'appelle le **cofacteur** de a_{ij} .
- ii) La matrice dont les coefficients sont les cofacteurs des a_{ij} s'appelle la **comatrice** de A et se note $\text{com}(A)$, donc on a $\text{com}(A) = ((-1)^{i+j} \Delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.
- iii) La matrice transposée de $\text{com}(A)$, ${}^t\text{com}(A)$, s'appelle la matrice **adjointe** de A et se note $\tilde{A}$.

4.2.5 Inverse d'une matrice**Théorème 4.2.6**

Soient K un corps commutatif, A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K et $\tilde{A}$ la matrice adjointe de A . Alors

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det(A)I_n$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n .

Démonstration. Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $\tilde{A} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $A\tilde{A} = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrons que $c_{ii} = \det(A)$ et pour $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, avec $i \neq j$, $c_{ij} = 0$. Pour cela, on a

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, b_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ji} \text{ et } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{ik} \Delta_{jk}$$

En particulier, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a_{ik} \Delta_{ik} = \det(A) \quad (\text{d'après le théorème précédent})$$

Pour $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, avec $i \neq j$, on considère la matrice B obtenue en remplaçant dans la matrice A la $i^{\text{ème}}$ ligne par la $j^{\text{ème}}$ ligne. Donc dans

la matrice B la i^{ieme} et la j^{ieme} ligne sont identiques, par suite $\det(B) = 0$. Puisque pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $a_{ik} = a_{jk}$, alors on a

$$\det(B) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{jk} \Delta_{jk} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \Delta_{jk}$$

D'autre part, pour $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, avec $i \neq j$, on a

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \Delta_{jk} = \det(B) = 0$$

D'où le résultat. □

Remarque 53

Soient K un corps commutatif et A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K . Si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}$.

Exemples

Soit A une matrice d'ordre 2, avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\det(A) = ad - bc$ et si

A est inversible alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

4.2.6 Déterminant de Vandermonde

Proposition 4.2.3

Soient K un corps commutatif, n un entier, avec $n \geq 2$, et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des éléments de K deux à deux distincts. On appelle déterminant de Vandermonde associé à $a_1, a_2, \dots, a_n$, l'élément de K défini par :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Alors $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

Démonstration. Établissons d'abord une relation de récurrence entre $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$, où $n > 2$. Pour cela, on considère le

polynôme $P(X)$ défini par

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & \dots & X^{n-2} & X^{n-1} \end{vmatrix}$$

Alors pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on a $P(a_k) = 0$, car $P(a_k)$ est un déterminant qui contient deux lignes identiques. En développant par rapport à la dernière ligne, on voit que $\deg(P) \leq n-1$ et comme P admet $n-1$ racines deux à deux distinctes, alors il existe $\alpha \in K$, tel que $P(X) = \alpha \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i)$.

Or, α est le coefficient de X^{n-1} , donc en développant par rapport à la dernière ligne, on aura

$$\alpha = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

Par suite, pour tout $n \geq 2$, on a

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

Montrons maintenant par récurrence que pour tout $n \geq 2$, on a

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Pour $n = 2$, on a $V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)$.

Donc la propriété est vérifiée pour $n = 2$.

H.R : « Supposons que $n > 2$ et que la propriété est vérifiée pour tout entier $m < n$ ».

D'après ce qui précède, on a $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ et d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)$$

par suite, on a

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

4.3 Exercices

Exercice 82

Soit M la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ défini par $m_{ij} = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i = j \\ a & \text{si } i < j, \text{ avec } a \neq b. \\ b & \text{si } i > j \end{cases}$.

1. Pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on désigne par C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice M et soit V le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1. Calculer

$$P(x) = \det(C_1 + xV, C_2 + xV, \dots, C_n + xV)$$

2. En déduire une expression de $\det(M)$.

Exercice 83

1. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre $2n$, où A, B, C et D sont des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$, avec $DC = CD$.

- a) On suppose que D est inversible et on pose $T = \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$.

Calculer MT et en déduire que $\det(M) = \det(AD - BC)$.

- b) Soit P le polynôme défini par $P(X) = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D - XI_n \end{vmatrix}$.

En remarquant que le polynôme Q défini par $Q(X) = \det(D - XI_n)$ n'a qu'un nombre fini de racines, déduire que $\det(M) = \det(AD - BC)$.

- c) Montrer que si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\det(\lambda I - AB) = \det(\lambda I - BA)$

2. Montrer que si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, alors

- a) $\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} \geq 0$.

- b) En déduire que si $AB = BA$, alors $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

- c) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $AB \neq BA$ et calculer $\det(A^2 + B^2)$.

3. $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A + B) \det(A - B)$.

Exercice 84

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $n \geq 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Déterminer le rang de la comatrice de A en fonction du rang de A .
2. Montrer que $\det(\text{com}(A)) = \det(A)^{n-1}$.
3. Montrer que si A est inversible, alors $\text{com}(A)$ est inversible et on a $\text{com}(A)^{-1} = \text{com}(A^{-1})$.
4. Montrer que si A est inversible, alors $\text{com}(\text{com}(A)) = \det(A)^{n-2}A$.
5. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I$, alors $\text{com}(A)^p = I$.

Exercice 85

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère le déterminant Δ_n défini par

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \dots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 4$, on a $\Delta_n = (a+b)\Delta_{n-1} - ab\Delta_{n-2}$.
2. En déduire que pour tout $n \neq 2$, on a $\Delta_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$, avec $a \neq b$.

Exercice 86

Soit $a \in \mathbb{R}$, on désigne par Δ_n le déterminant défini par

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1} .
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $\Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2$.

Exercice 87 (Déterminant de Vandermonde généralisé)

Soient K un corps commutatif, $a_1, a_2, \dots, a_n$ des éléments deux à deux distincts de K , avec $n \geq 2$, et $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ des polynômes unitaires de $K[X]$, tels que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on a $\deg(P_k) = k$. On appelle déterminant de Vandermonde généralisé associé à $a_1, a_2, \dots, a_n$, l'élément de K défini par :

$$\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & P_1(a_1) & \dots & P_{n-1}(a_1) \\ 1 & P_1(a_2) & \dots & P_{n-1}(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & P_1(a_n) & \dots & P_{n-1}(a_n) \end{vmatrix}$$

Montrer que

$$\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n) = V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Exercice 88

Soient n un entier ≥ 2 , $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n - 1$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ définie par $a_{ij} = P(i + j)$.

1. En appliquant la formule de Taylor, montrer que $A = BC$, où B et C sont deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont définies par $b_{ij} = P^{(j-1)}(i)$ et $c_{ij} = \frac{j^{i-1}}{(i-1)!}$.
2. En déduire la valeur de $\det(A)$.

Exercice 89

Soient a, b, c et d quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\det(d, b, c)a + \det(a, d, c)b + \det(a, b, d)c = \det(a, b, c)d$$

Exercice 90

Soient $a, b, x_1, x_2, \dots, x_n$, avec $n \geq 2$. On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & a & \dots & \dots & a \\ b & x_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & \dots & b & x_n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que si $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ et $a = b$, alors on a

$$\det(A) = (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}$$

2. Soit J la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients valent 1. Montrer que le polynôme $\det(A + XJ)$ est de degré 1.
3. Calculer $\det(A - aJ)$ et $\det(A - bJ)$.
4. On suppose $a \neq b$ et on pose

$$P(X) = (-1)^n (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n)$$

Montrer que $\det(A) = \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a}$.

5. En déduire que si $a = b$, alors $\det(A) = P(a) - aP'(a)$

Exercice 91

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et f un endomorphisme de E . Montrer que pour tout $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in E^n$, on a

$$\sum_{i=1}^n \det(v_1, \dots, f(v_i), \dots, v_n) = \text{Tr}(f) \det(v_1, \dots, v_n)$$

4.4 Solutions des exercices**Exercice 82**

1. On a

$$\begin{aligned} P(x) &= \det(C_1 + xV, C_2 + xV, \dots, C_n + xV) \\ &= \det(C_1 + xV, C_2 - C_1, \dots, C_n - C_1) \\ &= \det(C_1, C_2 - C_1, \dots, C_n - C_1) + \det(xV, C_2 - C_1, \dots, C_n - C_1) \\ &= \det(C_1, C_2 - C_1, \dots, C_n - C_1) + x \det(V, C_2 - C_1, \dots, C_n - C_1) \\ &= \det(M) + x \det(V, C_2 - C_1, \dots, C_n - C_1) \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, on a $\deg(P) \leq 1$, donc on a

$$P(x) = \det(M) + \alpha x.$$

Donc si $a \neq b$, alors on a $P(-a) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i - a)$ et $P(-b) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i - b)$, donc on obtient

$$\alpha = \frac{P(-a) - P(-b)}{b - a} = \frac{\prod_{i=1}^n (\alpha_i - a) - \prod_{i=1}^n (\alpha_i - b)}{b - a}$$

On en déduit donc que $\det(M) = P(-a) + \alpha a$, ce qui donne

$$\det(M) = \frac{b \prod_{i=1}^n (\alpha_i - a) - a \prod_{i=1}^n (\alpha_i - b)}{b - a}$$

On remarque que si dans la formule précédente on fixe a et on fait tendre b vers a , alors on aura $\det(M) = P(a) - aP'(a)$, avec $P(x) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i - x)$.

Exercice 83

1. a) On a $MT = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$, donc

$$\det(MT) = \det(M) \det(T) = \det(AD - BC)$$

avec $\det(T) = \det(D) \det(D^{-1}) = 1$, donc $\det(M) = \det(AD - BC)$.

- b) Dans cette question on ne suppose plus que D est inversible. Le nombre de racines de Q est fini, donc il existe $r > 0$, tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, avec $0 < |\lambda| < r$, $(D - \lambda I)$ est inversible, donc d'après la question précédente, on a $\det(P(\lambda)) = \det(A(D - \lambda I) - BC)$, Donc en faisant tendre λ vers 0, on aura $\det(M) = \det(AD - BC)$.
- c) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} A & I \\ \lambda I & B \end{pmatrix}$, alors d'après la question précédente, on a $\det(M) = \det(AB - \lambda I)$.

On a ${}^tM = \begin{pmatrix} {}^tA & \lambda I \\ I & {}^tB \end{pmatrix}$, donc on a

$$\det({}^tM) = \det({}^tA {}^tB - \lambda I) = \det({}^t(BA - \lambda I)) = \det(BA - \lambda I)$$

Comme $\det({}^tM) = \det(M)$, alors on a $\det(BA - \lambda I) = \det(AB - \lambda I)$.

2. a) On pose $L = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ et on considère L comme une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$, alors on a $\det(L) = \begin{vmatrix} A + iB & B \\ -B + iA & A \end{vmatrix}$. En multipliant les n première lignes de ce déterminant par i , on aura

$$\det(L) = (-i)^n \begin{vmatrix} iA - B & iB \\ -B + iA & A \end{vmatrix} = (-i)^n \begin{vmatrix} iA - B & iB \\ 0 & A - iB \end{vmatrix}$$

En multipliant maintenant les n première lignes par $-i$, on aura

$$\det(L) = (-i)^n (i)^n \begin{vmatrix} A + iB & B \\ 0 & A - iB \end{vmatrix} = \det(A + iB) \det(A - iB)$$

Or, pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\overline{\det(M)} = \det(\overline{M})$, donc on en déduit que $\det(L) = |\det(A + iB)|^2$, par suite, on a $\det(L) \geq 0$.

- b) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$. Comme $AB = BA$, alors d'après la première question, on a $\det(M) = \det(A^2 + B^2)$, donc d'après la question précédente, on a $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.
- c) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, alors on a $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, donc $AB \neq BA$. On a $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, donc on a $\det(A^2 + B^2) = -3$.

3. On a

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + B & B \\ B + A & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + B & B \\ 0 & A - B \end{vmatrix} = \det(A + B) \det(A - B)$$

Exercice 84

1. On sait que les coefficients de la comatrice sont tous des déterminants d'ordre $n - 1$ qui sont extraits de A , donc si $rg(A) \leq n - 2$, alors on a $\text{com}(A) = 0$, donc $rg(\text{com}(A)) = 0$.

Si $rg(A) = n - 1$, alors l'un au moins des déterminants d'ordre $n - 1$ extrait de A est non nul, donc $\text{com}(A) \neq 0$.

On sait que $A\tilde{A} = \det(A)I$, où $\tilde{A} = {}^t(\text{com}(A))$ est la matrice adjointe de A et comme $rg(A) < n$, alors $\det(A) = 0$, donc $A\tilde{A} = 0$, par suite, on a $\text{Im}(\tilde{A}) \subseteq \ker(A)$. Il en résulte que $rg(\text{com}(A)) = rg(\tilde{A}) \leq n - rg(A)$, avec $rg(A) = n - 1$, donc on en déduit que $rg(\text{com}(A)) = 1$, car $\text{com}(A) \neq 0$.

Si $rg(A) = n$, alors A est inversible, donc $\text{com}(A)$ est aussi inversible, par suite, on a $rg(\text{com}(A)) = n$.

2. On a $A\tilde{A} = \det(A)I$, donc on a

$$\det(A) \det(\tilde{A}) = \det(\det(A)I) = \det(A)^n$$

Si $\det(A) = 0$, alors A n'est pas inversible, donc $\text{com}(A)$ n'est pas inversible, par suite, on a $\det(\text{com}(A)) = 0$.

Si $\det(A) \neq 0$, alors on a $\det(\text{com}(A)) = \det(\tilde{A}) = \det(A)^{n-1}$.

3. On suppose que A est inversible, alors on a $A^{-1} = (\det(A))^{-1}\tilde{A}$, donc $\tilde{A} = \det(A)\widetilde{A^{-1}}$. On a aussi $A = (A^{-1})^{-1} = \det(A)\widetilde{A^{-1}}$, donc on a $\widetilde{A^{-1}} = \tilde{A}^{-1}$, il s'en suit donc que $\text{com}(A^{-1}) = \text{com}(A)^{-1}$.

4. On a $\text{com}(A) = \det(A){}^t(A^{-1})$, donc on a

$$\begin{aligned} \text{com}(\text{com}(A)) &= \text{com}(\det(A)A^{-1}) = \det(A)^{n-1} \text{com}({}^t(A^{-1})) \\ &= \det(A)^{n-1} \text{com}({}^tA)^{-1} = \det(A)^{n-1} ({}^t \text{com}(A))^{-1} \\ &= \det(A)^{n-1} \tilde{A}^{-1} = \det(A)^{n-2} A \end{aligned}$$

5. Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^p = I$, alors on a $\det(A)^p = 1$, donc $A\tilde{A} = \tilde{A}A = I$, par suite, on a $\tilde{A}^p = I$, donc $\text{com}(A)^p = I$.

Exercice 85

1. En développant Δ_n par rapport à la première ligne, on aura

$$\begin{aligned} \Delta_n &= (a+b)\Delta_{n-1} - a \begin{vmatrix} b & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a+b & a & \ddots & \vdots \\ 0 & b & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & b & a+b \end{vmatrix} \\ &= (a+b)\Delta_{n-1} - ab\Delta_{n-2} \end{aligned}$$

2. On pose $V_n = \Delta_n - b\Delta_{n-1}$, alors d'après la relation précédente, on a $V_n = aV_{n-1}$, donc on a $V_n = a^{n-2}V_2$. On a $V_2 = \Delta_2 - b\Delta_1 = a^2$, donc on a $V_n = a^n$. On en déduit donc que $\Delta_n = b\Delta_{n-1} + a^n$, puis à l'aide d'une démonstration par récurrence on voit facilement que

$$\Delta_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \quad \text{avec } a \neq b$$

Exercice 86

1. En développant Δ_n par rapport à la première ligne, on obtient

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} + (-1)^{n+1}(n-1) \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a \\ n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Puis en développant par rapport à la première colonne, on aura

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - (n-1)^2 a^{n-2}$$

2. Montrons par récurrence sur n , avec $n \geq 2$, que $\Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2$.

Pour $n = 2$, on a $\Delta_2 = a^2 - 1$ et $a^n - a^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = a^2 - 1$, donc la formule est vraie pour $n = 2$.

Supposons que la formule est vraie jusqu'à l'ordre n , alors pour $n + 1$, on a

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= a\Delta_n - n^2 a^{n-1} = a^{n+1} - a^{n-1} \sum_{k=1}^n k^2 - n^2 a^{n-1} \\ &= a^{n+1} - a^{n-1} \sum_{k=1}^n k^2 \end{aligned}$$

Exercice 87

On pose $\Delta = V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et soit $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ les vecteurs colonnes de Δ , alors on a $\Delta = \det(C_0, C_1, \dots, C_{n-1})$. Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on pose $P_i = X^i + \alpha_{i,i-1}X^{i-1} + \dots + \alpha_{i,1}X + \alpha_{i,0}$, alors on a

$$\begin{aligned} \Delta &= \det(C_0, C_1, \dots, C_{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \alpha_{n-1,j} C_j) \\ &= \det(C_0, C_1, \dots, C_{n-2} + \sum_{j=0}^{n-3} \alpha_{n-2,j} C_j, C_{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \alpha_{n-1,j} C_j) \end{aligned}$$

Donc par induction on obtient

$$\Delta = \det(C_0, C_1 + \alpha_{1,0}, \dots, C_{n-2} + \sum_{j=0}^{n-3} \alpha_{n-2,j} C_j, C_{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \alpha_{n-1,j} C_j)$$

Ainsi, on obtient le résultat.

Exercice 88

1. D'après la formule de Taylor, on a

$$P(i+j) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(i)}{k!} j^k = \sum_{k=1}^n P^{(k-1)}(i) \frac{j^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^n b_{ik} c_{kj}$$

Il en résulte que $A = BC$.

2. On a $A = BC$, donc $\det(A) = \det(B) \det(C)$. On a

$$\det(B) = \begin{vmatrix} P(1) & P'(1) & \dots & P^{(n-1)}(1) \\ P(2) & P'(2) & \dots & P^{(n-1)}(2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P(n) & P'(n) & \dots & P^{(n-1)}(n) \end{vmatrix}$$

En appliquant la permutation $\sigma = (1, n)(2, n-1) \dots (p, p+1)$, où $p = E\left(\frac{n}{2}\right)$, et en factorisant par les coefficients dominants des polynômes $P, P', \dots, P^{n-1}$, on aura

$$(-1)^{E(\frac{n}{2})} a^n \frac{((n-1)!)^n}{2!3! \dots (n-1)!} \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & Q_1(1) & \dots & Q_{n-1}(1) \\ 1 & Q_1(2) & \dots & Q_{n-1}(2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & Q_1(n) & \dots & Q_{n-1}(n) \end{vmatrix}$$

où a est le coefficient dominant de P et pour $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, Q_i est un polynôme unitaire, avec $\deg(Q_i) = i$, donc on reconnaît un déterminant de Vandermonde généralisé, par suite, d'après l'exercice précédent, on a

$$\begin{aligned} \det(B) &= (-1)^{E(\frac{n}{2})} a^n \frac{((n-1)!)^n}{2!3! \dots (n-1)!} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \\ &= (-1)^{E(\frac{n}{2})} a^n \frac{((n-1)!)^n}{2!3! \dots (n-1)!} 2!3! \dots (n-1)! \\ &= (-1)^{E(\frac{n}{2})} a^n ((n-1)!)^n \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \det(C) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2!3! \dots (n-1)!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Donc on en déduit que $\det(A) = (-1)^{L(\frac{n}{2})} a^n ((n-1)!)^n$.

Exercice 89

a, b, c et d sont quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et on a $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc le système (a, b, c, d) est lié. Si $rg(a, b, c, d) \leq 2$, alors on a

$$\det(d, b, c) = \det(a, d, c) = \det(a, b, d) = \det(a, b, c) = 0$$

Donc dans ce cas le résultat est trivial. On suppose donc que $rg(a, b, c, d) = 3$ et on pose $\Delta_1 = \det(d, b, c)$, $\Delta_2 = \det(a, d, c)$, $\Delta_3 = \det(a, b, d)$ et $\Delta = \det(a, b, c)$, donc on a $(\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \neq (0, 0, 0, 0)$.

Si $\Delta \neq 0$, alors (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$, donc il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, tel que $d = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c$, donc on a $\det(d, a, b) = \alpha_3 \det(c, a, b)$,

$\det(d, a, c) = \alpha_2 \det(b, a, c)$ et $\det(d, b, c) = \alpha_1 \det(a, b, c)$. On en déduit donc

que $\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $\alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ et $\alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, par suite on a $\Delta_1 a + \Delta_2 b + \Delta_3 c = \Delta d$.

Si $\Delta = 0$, alors (a, b, c) est lié, donc il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ non tous nuls, tel que $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$, donc on a

$$\begin{cases} 0 = \det(\alpha a + \beta b + \gamma c, a, d) = -\beta \Delta_3 + \gamma \Delta_2 \\ 0 = \det(\alpha a + \beta b + \gamma c, b, d) = \alpha \Delta_3 - \gamma \Delta_1 \\ 0 = \det(\alpha a + \beta b + \gamma c, c, d) = -\alpha \Delta_2 + \beta \Delta_1 \end{cases}$$

On a $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \neq (0, 0, 0)$, donc on peut supposer, par exemple, que $\Delta_1 \neq 0$, par suite, on a $\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \alpha$ et $\gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \alpha$. On a $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, donc $\alpha \neq 0$, par suite, on a $\Delta_1 a + \Delta_2 b + \Delta_3 c = 0$.

Exercice 90

1. Supposons que $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ et $a = b$, alors on a

$$A = \begin{pmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & x \end{pmatrix}$$

Si pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on remplace la colonne C_i par $C_i - C_{i+1}$, on aura

$$\det(A) = (x-a)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & a \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 1 & a \\ 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = (x-a)^{n-1} \Delta_n$$

En développant Δ_n par rapport à la première ligne, on voit facilement que $\Delta_n = \Delta_{n-1} + a$, donc on en déduit que

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + (-1)^{n+1}a(-1)^{n-1} = \Delta_{n-1} + a = \Delta_2 + (n-2)a$$

Donc on a $\Delta_n = x + (n-1)a$, par suite, on a

$$\det(A) = (x-a)^{n-1}(x + (n-1)a)$$

2. Soit V le vecteur dont tous les composantes sont égales à 1, alors on a

$$\begin{aligned} \det(A + XJ) &= \det(C_1 + XV, C_2 + XV, \dots, C_n + XV) \\ &= \det(C_1 + XV, C_2 - C_1, \dots, C_n - C_1) \\ &= \det(C_1, C_2 - C_1, \dots, C_n - C_1) + X \det(V, C_2, \dots, C_n) \\ &= \det(C_1, C_2, \dots, C_n) + X \det(V, C_2, \dots, C_n) \\ &= \det(A) + X \det(V, C_2, \dots, C_n) \end{aligned}$$

Soit $Q(X) = \det(A + XJ)$, alors on a $\deg(Q) \leq 1$.

3. On a $Q(-a) = \prod_{i=1}^n (x_i - a)$ et $Q(-b) = \prod_{i=1}^n (x_i - b)$.
4. On pose $\alpha = \det(A)$ et $\beta = \det(V, C_2, \dots, C_n)$, alors on a $Q(X) = \alpha + \beta X$, donc d'après la question précédente, on a

$$\begin{cases} \alpha - a\beta = \prod_{i=1}^n (x_i - a) \\ \alpha - b\beta = \prod_{i=1}^n (x_i - b) \end{cases}$$

On en déduit donc que $\det(A) = \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a}$, avec $a \neq b$.

5. Fixons a dans l'expression précédente et faisons tendre b vers a , alors on a $\det(A) = P(a) - aP'(a)$.

Exercice 91

On pose $L = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, alors les trois suivants sont possibles :

Si $\text{rg}(L) = n$ est libre, alors L est une base de E . Soit A la matrice de f par rapport à L , alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$\begin{aligned} \det(v_1, \dots, f(v_i), \dots, v_n) &= \det(v_1, \dots, \sum_{k=1}^n a_{ki} v_k, \dots, v_n) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ki} \det(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n) \\ &= a_{ii} \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) \end{aligned}$$

Il en résulte donc que

$$\sum_{i=1}^n \det(v_1, \dots, f(v_i), \dots, v_n) = \text{tr}(f) \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

Si $\text{rg}(L) \leq n - 2$, alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$\det(v_1, \dots, f(v_i), \dots, v_n) = 0$$

donc dans ce cas le résultat est trivial.

Si $\text{rg}(L) = n - 1$, alors on peut supposer que $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ est libre et comme L est lié, alors il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, tel que $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k v_k$.

Donc pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, on a

$$\begin{aligned} \det(v_1, \dots, f(v_i), \dots, v_n) &= \det(v_1, \dots, f(v_i), \dots, \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k v_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \det(v_1, \dots, f(v_i), \dots, v_k) \\ &= \alpha_i \det(v_1, \dots, f(v_i), \dots, v_i) \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
 \det(v_1, \dots, v_{n-1}, f(v_n)) &= \det(v_1, \dots, v_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f(v_i)) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \det(v_1, \dots, v_{n-1}, f(v_i)) \\
 &= - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \det(v_1, \dots, v_{i-1}, f(v_i), v_{i+1}, \dots, v_{n-1}, v_i)
 \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\sum_{i=1}^n \det(v_1, \dots, f(v_i), \dots, v_n) = 0$$

CHAPITRE 5

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

5.1 Polynômes et endomorphismes

5.1.1 Notations et définitions

Soit E un K -espace vectoriel. Pour tout endomorphisme u de E et pour tout entier $m \geq 0$, on définit u^m par récurrence de la manière suivante :

- i) Pour $m = 0$, on pose $u^0 = Id_E$.
- ii) Pour $m \geq 1$, $u^m = u \circ u^{m-1} = u^{m-1} \circ u$

Autrement dit, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u^m = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{m \text{ fois}}$$

Soit, maintenant, P un polynôme de $K[X]$, avec $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$. On définit l'endomorphisme $P(u)$, appelé polynôme en u , par :

$$P(u) = a_0Id_E + a_1u + \cdots + a_nu^n = \sum_{i=1}^n a_iu^i$$

On obtient alors les propriétés mentionnées dans la proposition suivante :

Proposition 5.1.1

- i) Si $P = 1$ alors $P(u) = Id_E$.
- ii) $\forall P \in K[X], \forall Q \in K[X], (P + Q)(u) = P(u) + Q(u)$.
- iii) $\forall P \in K[X], \forall Q \in K[X], (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

Démonstration. La démonstration est laissée à titre d'exercice. □

Remarque 54

Soient E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme de E .

1. Pour tout $A \in M_n(K)$ et pour tout $P \in K[X]$, avec $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$, la matrice $P(A)$ est définie par :

$$P(A) = a_0I + a_1A + \cdots + a_mA^m = \sum_{j=1}^m a_jA^j$$

2. $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, u^m \circ u^n = u^n \circ u^m = u^{m+n}$.
3. $\forall P \in K[X], \forall Q \in K[X], P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
4. On suppose que E est de dimension finie $= n$. Soit $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et soit $A = Mat(u, \beta)$, alors

$$\forall P \in K[X], Mat(P(u), \beta) = P(A)$$

5.1.2 Polynôme minimal**Théorème 5.1.1**

Soit E un K -espace vectoriel de **dimension finie** $= n$, avec $n \geq 1$. Alors pour tout endomorphisme u de E , il existe un unique polynôme $P \in K[X]$, non constant et unitaire, tel que

- i) $P(u) = 0$.
- ii) Si Q est un autre polynôme de $K[X]$, vérifiant $Q(u) = 0$, alors P divise Q .

Dans ce cas, P s'appelle le polynôme minimal de u et se note M_u .

Démonstration. Puisque E est de dimension finie $= n$, alors on sait que $L(E)$ est aussi de dimension finie $= n^2$.

On considère le système $\mathcal{S} = (Id_E, u, u^2, \dots, u^{n^2})$, alors $\mathcal{S}$ est un système de $L(E)$ dont le cardinal est égal à $n^2 + 1$ qui est strictement supérieur à n^2 , donc $\mathcal{S}$ est nécessairement un système lié. Par suite, il existe $(a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \in K^{n^2+1}$, avec $(a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \neq (0, 0, \dots, 0)$, tel que $\sum_{i=0}^{n^2} a_i u^i = 0$. Soit T le polynôme

de $K[X]$ défini par $T = \sum_{i=1}^{n^2} a_i X^i$, alors

- i) $T \neq 0$, car $(a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \neq (0, 0, \dots, 0)$.
- ii) $T(u) = 0$.
- iii) $\deg(T) \geq 1$, car sinon, on aura $T = a_0$, et comme $T(u) = 0$, alors on aura $a_0 Id_E = 0$ et puisque $a_0 \neq 0$, alors $Id_E = 0$, ce qui est absurde car $E \neq \{0\}$.

Soit $\mathcal{A}$ la partie de $\mathbb{N}$ définie par :

$$\mathcal{A} = \{\deg(S) : S \in K[X], S(u) = 0 \text{ et } \deg(S) \geq 1\}$$

Alors $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, car $\deg(T) \in \mathcal{A}$, en conséquence, $\mathcal{A}$ possède un plus petit élément noté p . Puisque $p \in \mathcal{A}$, alors, il existe $S \in K[X]$, tel que $S(u) = 0$, $\deg(S) \geq 1$ et $\deg(S) = p$.

Posons $S = b_0 + b_1 X + \dots + b_p X^p$, avec $b_p \neq 0$ et soit $P = b_p^{-1} S$, alors

- i) Alors P est un polynôme unitaire de degré ≥ 1 .
- ii) $P(u) = 0$
- iii) Si $S \in K[X]$, vérifiant $S(u) = 0$, alors P divise S .

En effet, faisons la division euclidienne de S par P , on aura

$$S = QP + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(S)$$

Donc, en appliquant les deux membres de l'égalité précédente à u , on obtient $R(u) = 0$. Donc $\deg(R) \leq 0$, car sinon, on aura $\deg(R) \in \mathcal{A}$, ce qui est absurde, car $\deg(R) < \deg(S)$ et $\deg(S)$ est le plus petit élément de $\mathcal{A}$. Donc $R = \alpha$ avec $\alpha \in K$ et puisque $R(u) = 0$, alors $\alpha Id_E = 0$, donc $\alpha = 0$, par suite, $R = 0$. $\square$

Remarque 55

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$.

1. Le polynôme minimal M_u de u est caractérisé par :

$$\begin{cases} M_u(u) = 0 \\ \text{Si } Q \text{ est un autre polynôme de } K[X] \text{ vérifiant } Q(u) = 0, \\ \text{alors } M_u \text{ divise } Q \end{cases}$$

2. $\forall u \in L(E), \deg(M_u) \geq 1$

Exemples

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$.

1. Si $u = 0$ alors $M_u = X$.

2. Si $u = Id_E$ alors $M_u = X - 1$.

3. Si u est un projecteur, avec $u \neq 0$ et $u \neq Id_E$, alors $M_u = X^2 - X$.

En effet, puisque u est un projecteur, alors, par définition, $u^2 = u$, donc $u^2 - u = 0$. Soit $P = X^2 - X$, alors $P(u) = 0$, donc M_u divise P et puisque $\deg(M_u) \geq 1$, alors $M_u = X$, $M_u = X - 1$ ou $M_u = X^2 - X$. Nous avons supposé que $u \neq 0$ et $u \neq Id_E$, donc $M_u = X^2 - X$.

Proposition 5.1.2

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et P un polynôme non constant de $K[X]$, alors

- i) $P(u)$ est inversible, si et seulement si, P et M_u sont premiers entre eux.
- ii) Dans le cas où $P(u)$ est inversible, $P(u)^{-1}$ est un polynôme en u .

Démonstration. ($\implies$) Supposons que $P(u)$ est inversible et montrons que P et M_u sont premiers entre eux. Soit Δ le plus grand commun diviseur de P et M_u , alors Δ divise P et Δ divise M_u , donc il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 de $K[X]$, tels que $P = Q_1\Delta$ et $M_u = Q_2\Delta$.

$P = Q_1\Delta$, donc $P(u) = Q_1(u) \circ \Delta(u)$. Puisque $P(u)$ est inversible et E de dimension finie, alors $Q_1(u)$ et $\Delta(u)$ sont inversibles.

D'autre part, on a $M_u = Q_2\Delta$, donc $M_u(u) = Q_2(u) \circ \Delta(u)$.

Or $M_u(u) = 0$ et $\Delta(u)$ est inversible, donc $Q_2(u) = 0$, par suite M_u divise Q_2 , donc $\deg(M_u) \leq \deg(Q_2)$. On a aussi $\deg(Q_2) \leq \deg(M_u)$, car Q_2 divise M_u , donc $\deg(Q_2) = \deg(M_u)$. Par conséquent $\deg(\Delta) = 0$, donc $\Delta = 1$, car Δ est un polynôme unitaire.

($\impliedby$) Supposons P et M_u sont premiers entre eux et montrons que $P(u)$ est inversible et que $P(u)^{-1}$ est un polynôme en u . Comme P et M_u sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes A et B de $K[X]$, tels que $AP + BM_u = 1$.

$$\begin{aligned} AP + BM_u = 1 &\implies A(u) \circ P(u) + B(u) \circ M_u(u) = Id_E \\ &\implies A(u) \circ P(u) = Id_E \quad (\text{car } M_u(u) = 0) \end{aligned}$$

E est de dimension finie, donc $P(u)$ est inversible et on a $P(u)^{-1} = A(u)$. $\square$

Remarque 56

D'après la proposition précédente, un endomorphisme u de E est inversible, si et seulement si, X et M_u sont premiers entre eux.

Donc u est inversible, si et seulement si, $M_u(0) \neq 0$.

5.1.3 Polynôme caractéristique

Soient K un corps commutatif et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K . On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $K[X]$, notée $XI - A$, où $XI - A = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, tel que

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \forall j \in \mathbb{N}_n, b_{ij} = \begin{cases} X - a_{ii} & \text{si } i = j \\ -a_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Comme $XI - A$ est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $K[X]$, alors $\det(XI - A)$ est un élément de $K[X]$.

Définition 5.1.1

$\det(XI - A)$ s'appelle le polynôme caractéristique de A et se note χ_A .

Remarque 57

En pratique, χ_A s'écrit sous la forme :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{n,n-1} & X - a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemples

Soient K un corps commutatif et $A \in M_2(K)$, avec $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X - a & -c \\ -b & X - d \end{vmatrix} \\ &= (X - a)(X - d) - bc \\ &= X^2 - (a + d)X + (ad - bc) \\ &= \boxed{X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)} \end{aligned}$$

Proposition 5.1.3

Soit K un corps commutatif. Alors pour toute matrice $A \in M_n(K)$, le polynôme caractéristique χ_A de A est un polynôme unitaire de degré n .

Démonstration. Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $XI - A = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, avec

$$b_{ij} = \begin{cases} X - a_{ii} & \text{si } i = j \\ -a_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}. \text{ Alors on a}$$

$$\det(XI - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \cdots b_{\sigma(n),n}$$

Donc, si on désigne par e l'élément neutre de S_n , on aura

$$\begin{aligned} \det(XI - A) &= (X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn}) \\ &\quad + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq e}} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \cdots b_{\sigma(n),n} \end{aligned}$$

Pour chaque $\sigma \neq e$, il existe $i_0 \in \mathbb{N}_n$, tel que $\sigma(i_0) \neq i_0$, donc $\deg(b_{\sigma(i_0),i_0}) \leq 0$, car $b_{\sigma(i_0),i_0} = -a_{\sigma(i_0),i_0}$, par suite, on aura

$$\deg(\epsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \cdots b_{\sigma(n),n}) \leq n - 1$$

Ainsi, on obtient,

$$\deg \left(\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq e}} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \cdots b_{\sigma(n),n} \right) \leq n - 1$$

Puisque $(X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn})$ est un polynôme unitaire de degré n , alors $\det(XI - A)$ est un polynôme unitaire de degré n . $\square$

Proposition 5.1.4

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Démonstration. Soient A et B deux matrices semblables, donc par définition, il existe une matrice inversible P , telle que $B = P^{-1}AP$, donc on a

$$\begin{aligned} \chi_B &= \det(XI - B) = \det(XI - P^{-1}AP) \\ &= \det[P^{-1}(XI - A)P] = \det(XI - A) = \chi_A \end{aligned}$$

Définition 5.1.2

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E , u un endomorphisme de E et A la matrice de u par rapport à la base β . Alors le polynôme caractéristique de u , noté χ_u est défini par

$$\chi_u = \det(XI - A) = \chi_A$$

Remarque 58

1. La définition précédente a un sens, car si B est la matrice de u par rapport à une autre base de E , alors on sait que A et B sont semblables, donc d'après la proposition précédente, A et B ont même polynôme caractéristique.
2. Si $\dim(E) = n$, alors pour tout $u \in L(E)$, $\deg(\chi_u) = n$.
3. Le polynôme minimal d'un endomorphisme est loin d'être son polynôme caractéristique.

Exemples

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $u \in L(E)$.

1. Si $u = 0$ alors $M_u = X$ et $\chi_u = X^n$.
2. Si $u = Id_E$ alors $M_u = X - 1$ et $\chi_u = (X - 1)^n$.
3. On suppose, maintenant que u est un projecteur, avec $u \neq 0$ et $u \neq Id_E$, alors on sait que

$$E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u) \text{ et } \forall x \in \text{Im}(u), u(x) = x$$

Soit $p = \dim(\ker(u))$ et soit $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E , telle que $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ soit une base de $\ker(u)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de $\text{Im}(u)$. Soit M la matrice de u par rapport à la base β , puisque $\forall j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $u(e_j) = 0$ et $\forall j \in \{p+1, \dots, n\}$, $u(e_j) = e_j$, alors M s'écrit sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

par suite, on a

$$\chi_u = \det(XI_n - M) = \det \left(\begin{pmatrix} XI_p & 0 \\ 0 & (X-1)I_{n-p} \end{pmatrix} \right) = X^p (X-1)^{n-p}$$

Donc, si u est un projecteur, avec $u \neq 0$ et $u \neq Id_E$, alors on a $M_u = X(X-1)$ et $\chi_u = X^p (X-1)^{n-p}$, où $p = \dim(\ker(u))$.

5.1.4 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 5.1.2

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme quelconque de E . Alors M_u divise χ_u .

Démonstration. On sait que

$$\forall P \in K[X], (M_u \text{ divise } P) \iff P(u) = 0$$

Donc, il suffit de montrer que $\chi_u(u) = 0$. Pour cela, nous avons besoin des résultats suivants : □

Définition 5.1.3

Soient E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme de E . On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u , si $u(F) \subseteq F$.

Remarque 59

F est stable par u , si et seulement si,

$$\forall x \in E, x \in F \implies u(x) \in F$$

Exemples

Soient E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme de E , alors

1. $\{0\}$ et E sont toujours stables par u .
2. $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont toujours stables par u .
3. Soit v un autre endomorphisme de E . Si $u \circ v = v \circ u$, alors $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v .
En effet, soit $x \in \ker(u)$, alors on a $u(x) = 0$, donc $v(u(x)) = 0$. Puisque $u \circ v = v \circ u$, alors $u(v(x)) = 0$, donc $v(x) \in \ker(u)$. Donc $\ker(u)$ est stable par v .

Pour la stabilité de $\text{Im}(u)$ par v , on remarque que

$$v(\text{Im}(u)) = v(u(E)) = (v \circ u)(E) = (u \circ v)(E) = u(v(E))$$

Puisque $v(E) \subseteq E$, alors $u(v(E)) \subseteq u(E)$, donc $v(\text{Im}(u)) \subseteq \text{Im}(u)$.

Lemme 5.1.1

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E , stable par u . Soit v l'endomorphisme induit par u sur F , alors χ_v divise χ_u .

Soit $p = \dim(F)$ et soit G un supplémentaire de F dans E .

Soit $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E , telle que $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ soit une base de F et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de G et soient A la matrice de v par rapport à $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ et M la matrice de u par rapport à β , alors M s'écrit sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ avec } B \in M_{n-p}(K) \text{ et } C \in M_{p, n-p}(K)$$

Donc, on aura

$$\chi_u = \det(XI_n - M) = \det \left(\begin{pmatrix} XI_p & -C \\ 0 & XI_{n-p} - B \end{pmatrix} \right)$$

Donc, d'après le lemme 4.2.2, on a

$$\chi_u = \det(XI_p - A) \times \det(XI_{n-p} - B) = \chi_v \times \det(XI_{n-p} - B)$$

par suite, χ_v divise χ_u .

Lemme 5.1.2

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . Alors pour tout $x \in E$, avec $x \neq 0$, il existe un unique polynôme $M_x \in K[X]$, non constant et unitaire, tel que

i) $M_x(u)(x) = 0$.

ii) $\forall P \in K[X], P(u)(x) = 0 \implies M_x \text{ divise } P$

Démonstration. Soit J la partie de $K[X]$ définie par :

$$J = \{P \in K[X] : P(u)(x) = 0\}$$

Alors, il est facile de vérifier que J est un idéal de $K[X]$ et que J est non nul, car $M_x \in J$. Puisque $K[X]$ est un anneau principal, alors il existe un unique polynôme unitaire $Q \in K[X]$, tel que $J = (Q)$. Donc, il suffit de prendre $M_x = Q$. □

Lemme 5.1.3

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et $x \in E$, avec $x \neq 0$.

On suppose que $M_x = a_0 + a_1X + \cdots + a_{p-1}X^{p-1} + X^p$ et on pose $F_x = \text{Vect}(\{x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\})$. Alors, on a

- i) $\dim(F_x) = \deg(M_x) = p$.
- ii) F_x est stable par u .
- iii) Soit v l'endomorphisme induit par u sur F_x , alors $\chi_v = M_x$.

Démonstration. i) Puisque $F_x = \text{Vect}(\{x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\})$, alors il suffit de montrer que le système $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre. Pour cela, on suppose que ce système est lié, donc il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in K^p$, tel que $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0$. Soit $P = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i X^i$, donc $P(u)(x) = 0$, par suite, M_x divise P , ce qui est absurde, car $\deg(P) < \deg(M_x)$.

- ii) Comme $F_x = \text{Vect}(\{x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\})$, alors F_x est stable par u , si et seulement si, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, on a $u(u^i(x)) \in F_x$. Si $i \in \{0, 1, \dots, p-2\}$, alors $u(u^i(x)) = u^{i+1}(x)$, donc $u(u^i(x)) \in F_x$. Si $i = p-1$, puisque $M_x(u) = 0$, alors on a

$$a_0x + a_1u(x) + \cdots + a_{p-2}u^{p-2}(x) + u^{p-1}(x) = 0$$

donc $u^{p-1}(x) = -(a_0x + a_1u(x) + \cdots + a_{p-2}u^{p-2}(x))$, par suite, on a $u^{p-1}(x) \in F_x$.

- iii) Soit v l'endomorphisme induit par u sur F_x et soit A la matrice de v par rapport à la base $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$, alors A s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Il est facile d'établir, par récurrence sur p , que $\det(XI - A) = M_x$, donc $\chi_v = M_x$. $\square$

Preuve du théorème : Pour montrer que $\chi_u(u) = 0$, il suffit de montrer que

$$\forall x \in E, x \neq 0 \implies \chi_u(u)(x) = 0$$

Soit $x \in E$, avec $x \neq 0$ et soit v l'endomorphisme induit par u sur F_x , alors d'après le lemme 5.1.2, $\chi_v = M_x$, donc $\chi_v(u)(x) = 0$. Or, d'après le lemme 5.1.3, χ_v divise χ_u , donc $\chi_u(u)(x) = 0$. $\square$

5.1.5 Théorème de décomposition des noyaux

Théorème 5.1.3

Soient E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe deux polynômes P_1 et P_2 , tels que

- i) P_1 et P_2 sont premiers entre eux, ($P_1 \wedge P_2 = 1$).
- ii) $(P_1 P_2)(u) = 0$.

$$\text{Alors } E = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u))$$

Démonstration. On sait que

$$E = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u)) \iff \begin{cases} E = \ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u)) \\ \ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u)) = \{0\} \end{cases}$$

P_1 et P_2 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes A et B de $K[X]$, tels que $AP_1 + BP_2 = 1$.

$$\begin{aligned} AP_1 + BP_2 = 1 &\implies (AP_1 + BP_2)(u) = 1(u) \\ &\implies A(u) \circ P_1(u) + B(u) \circ P_2(u) = Id_E \\ &\implies \forall x \in E, x = (A(u) \circ P_1(u))(x) + (B(u) \circ P_2(u))(x) \end{aligned}$$

Si pour tout $x \in E$, on pose $x_1 = (B(u) \circ P_2(u))(x)$ et $x_2 = (A(u) \circ P_1(u))(x)$, alors on a $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \ker(P_1(u))$ et $x_2 \in \ker(P_2(u))$.

Donc $E = \ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u))$.

Montrons maintenant que $\ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u)) = \{0\}$.

Soit $x \in \ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u)) = \{0\}$, alors on a

$$\begin{aligned} x &= (A(u) \circ P_1(u))(x) + (B(u) \circ P_2(u))(x) \\ &= A(u)(P_1(u)(x)) + B(u)(P_2(u)(x)) \end{aligned}$$

Donc $x = 0$, car $P_1(u)(x) = P_2(u)(x) = 0$. $\square$

Corollaire 5.1.1

Soient E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe des polynômes $P_1, P_2, \dots, P_m$ de $K[X]$, ($m \geq 2$), tels que

- i) Les polynômes $P_1, P_2, \dots, P_m$ sont deux à deux premiers entre eux.
- ii) $(P_1 P_2 \dots P_m)(u) = 0$. Alors

$$E = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u)) \oplus \dots \oplus \ker(P_m(u)) = \bigoplus_{i=1}^m \ker(P_i(u))$$

Exercice. On procède par récurrence sur $m \geq 2$. □

Corollaire 5.1.2

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe deux polynômes P_1 et P_2 , tels que

- i) P_1 et P_2 sont premiers entre eux, ($P_1 \wedge P_2 = 1$).
- ii) $(P_1 P_2)(u) = 0$.

Alors $E = \ker(P_1(u)) \oplus \operatorname{Im}(P_1(u)) = \ker(P_2(u)) \oplus \operatorname{Im}(P_2(u))$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} (P_1 P_2)(u) = 0 &\implies P_2(u) \circ P_1(u) = 0 \\ &\implies \forall x \in E, P_2(u)(P_1(u)(x)) = 0 \\ &\implies \forall x \in E, P_1(u)(x) \in \ker(P_2(u)) \\ &\implies \operatorname{Im}(P_1(u)) \subseteq \ker(P_2(u)) \end{aligned}$$

D'autre part, d'après le théorème de décomposition, $E = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u))$ donc

$$\dim(E) = \dim(\ker(P_1(u))) + \dim(\ker(P_2(u)))$$

et d'après le théorème du rang, on a

$$\dim(E) = \dim(\ker(P_1(u))) + \dim(\operatorname{Im}(P_1(u)))$$

Donc, on voit que $\dim(\ker(P_2(u))) = \dim(\operatorname{Im}(P_1(u)))$. Comme $\operatorname{Im}(P_1(u)) \subseteq \ker(P_2(u))$, alors $\operatorname{Im}(P_1(u)) = \ker(P_2(u))$. □

5.2 Diagonalisation

5.2.1 Valeurs propres - Vecteurs propres

Définition 5.2.1

Soient E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme de E . On dit que $\lambda \in K$ est une valeur propre de u , s'il existe $x \in E$, avec $x \neq 0$, tel que $u(x) = \lambda x$.

Dans ce cas, x s'appelle un vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Remarque 60

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et $\lambda \in K$, alors

1.

$$\begin{aligned} (\lambda \text{ est une valeur propre de } u) &\iff \ker(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0\} \\ &\iff u \text{ n'est pas injectif} \end{aligned}$$

2. Si de plus E est de dimension finie, alors

$$\begin{aligned} (\lambda \text{ est une valeur propre de } u) &\iff \ker(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0\} \\ &\iff u \text{ n'est pas injectif} \\ &\iff u \text{ n'est pas bijectif} \\ &\iff \det(\lambda \text{Id}_E - u) = 0 \end{aligned}$$

Théorème 5.2.1

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E , alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) $\lambda \in K$ est une valeur propre de u .
- ii) λ est une racine de M_u .
- iii) λ est une racine de χ_u .

Démonstration. i) $\implies$ ii) Supposons que λ est une valeur propre de u et montrons que $M_u(\lambda) = 0$. Puisque λ est une valeur propre, alors il

existe $x \in E$, avec $x \neq 0$, tel que $u(x) = \lambda x$.

$u(x) = \lambda x$, donc pour tout entier $n \geq 0$, $u^n(x) = \lambda^n x$.

Posons $M_u = a_0 + a_1X + \cdots + a_{m-1}X^{m-1} + X^m$, alors on aura

$$\begin{aligned} M_u(u)(x) &= a_0x + a_1\lambda x + \cdots + a_{m-1}\lambda^{m-1}x + \lambda^m x \\ &= (a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \lambda^m)x \\ &= M_u(\lambda)x \end{aligned}$$

Or, on a $M_u(u)(x) = 0$ et $x \neq 0$, alors $M_u(\lambda) = 0$.

ii) $\implies$ iii) Supposons que $M_u(\lambda) = 0$ et montrons que $\chi_u(\lambda) = 0$.

M_u divise χ_u et $M_u(\lambda) = 0$, donc $\chi_u(\lambda) = 0$.

iii) $\implies$ i) Supposons $\chi_u(\lambda) = 0$ et montrons que λ est une valeur propre de u . On a $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda Id_E - u)$, donc $\det(\lambda Id_E - u) = 0$, par suite $Id_E - u$ n'est pas inversible. Comme E est de dimension finie, alors $Id_E - u$ n'est pas injectif, donc λ est une valeur propre de u . $\square$

Remarque 61

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Alors pour tout endomorphisme u de E , le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de u ont mêmes racines sur K .

$$\boxed{\forall \lambda \in K, \chi_u(\lambda) = 0 \iff M_u(\lambda) = 0}$$

5.2.2 Sous-espaces propres

Définition 5.2.2

Soit E un K -espace vectoriel, u un endomorphisme de E et $\lambda \in K$ une valeur propre de u . On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ , le sous-espace vectoriel de E , noté E_λ et défini par :

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda Id_E)$$

Remarque 62

1. $\forall x \in E, x \in E_\lambda \iff u(x) = \lambda x$.
2. $(x \in E \text{ est un vecteur propre de } u) \iff (x \in E_\lambda \text{ et } x \neq 0)$.
3. Si λ est une valeur propre de u , alors E_λ est stable par u .
4. Si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes de u , alors on a $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.

Proposition 5.2.1

Soient E un K -espace vectoriel, u un endomorphisme de E et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u , alors la somme $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_m}$ est directe.

Démonstration. On pose $Q = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$ et $F = \ker(Q(u))$, alors F est stable par u , car $Q(u)$ et u commutent. Soit v l'endomorphisme induit par u sur F , alors on a $Q(v) = 0$ et comme les λ_i sont deux à deux différents, alors d'après le corollaire 5.1.1, on a

$$F = \bigoplus_{i=1}^m \ker(v - \lambda_{\lambda_i} \text{Id}_F) = \bigoplus_{i=1}^m \ker(u - \lambda_{\lambda_i} \text{Id}_E) = \bigoplus_{i=1}^m E_{\lambda_i}$$

Donc la somme de $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_m}$ est directe. □

Définition 5.2.3

Soient K un corps commutatif, P un polynôme de $K[X]$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que $\lambda \in K$ est une racine de P de multiplicité m , s'il existe $Q \in K[X]$, tel que $P = (X - \lambda)^m Q$ et $Q(\lambda) \neq 0$.

Rappelons que si $P \in K[X]$, avec $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n$, on définit le polynôme dérivé de P , noté P' , par :

$$P' = a_1 + 2a_2 X + \dots + (n-1)a_{n-1} X^{n-2} + a_n X^{n-1}$$

Théorème 5.2.2

Soient K un corps commutatif, P un polynôme de $K[X]$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) $\lambda \in K$ est une racine de P de multiplicité m .
- ii) $P(\lambda) = P'(\lambda) = \dots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0$ et $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$.

Démonstration. i) $\Rightarrow$ ii) Supposons que λ est racine de P de multiplicité m , alors il existe $Q \in K[X]$, tel que $P = (X - \lambda)^m Q$.

Montrons que $P(\lambda) = P'(\lambda) = \dots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0$ et $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$.

Pour cela, supposons que $\deg(P) = n$ et appliquons la formule de Taylor aux polynômes P et Q , alors on aura

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!} (X - \lambda)^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^{n-m} \frac{Q^{(k)}(\lambda)}{k!} (X - \lambda)^k$$

Donc on obtient,

$$\begin{aligned} (X - \lambda)^m Q &= (X - \lambda)^m \sum_{k=0}^{n-m} \frac{Q^{(k)}(\lambda)}{k!} (X - \lambda)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-m} \frac{Q^{(k)}(\lambda)}{k!} (X - \lambda)^{k+m} \\ &= \sum_{k=m}^n \frac{Q^{(k-m)}(\lambda)}{(k-m)!} (X - \lambda)^k \end{aligned}$$

On a $P = (X - \lambda)^m Q$, donc d'après ce qui précède, on a

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!} (X - \lambda)^k + \sum_{k=m}^n \left(\frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!} - \frac{Q^{(k-m)}(\lambda)}{(k-m)!} \right) (X - \lambda)^k = 0$$

puis comme le système $(1, (X - \lambda), \dots, (X - \lambda)^m)$ est libre, alors on a

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = \dots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\lambda) = m!Q(\lambda)$$

Puisque $Q(\lambda) \neq 0$, alors $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$.

ii) $\Rightarrow$ i) Supposons que $P(\lambda) = P'(\lambda) = \dots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0$ et $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$, alors d'après la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=m}^n \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!} (X - \lambda)^k = \sum_{k=0}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(\lambda)}{(k+m)!} (X - \lambda)^{k+m} \\ &= (X - \lambda)^m \sum_{k=0}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(\lambda)}{(k+m)!} (X - \lambda)^k \end{aligned}$$

Donc $P = (X - \lambda)^m Q$, où $Q = \sum_{k=0}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(\lambda)}{(k+m)!} (X - \lambda)^k$, avec

$Q(\lambda) = \frac{P^{(m)}(\lambda)}{m!}$. Ainsi, λ est une racine de P de multiplicité m . $\square$

Proposition 5.2.2

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et u un endomorphisme de E . On suppose que $\lambda \in K$ est une racine de χ_u de multiplicité m , alors on a $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m$.

Démonstration. λ est une racine de multiplicité m , donc il existe $Q \in K[X]$, tel que $\chi_u = (X - \lambda)^m Q$, avec $Q(\lambda) \neq 0$. Soit $p = \dim(E_\lambda)$, il s'agit donc de montrer que $p \leq m$.

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E_λ , v l'endomorphisme induit par u sur E_λ et A la matrice de u par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, on a $v(e_i) = \lambda e_i$, donc $A = \lambda I_p$, par suite, on a $\chi_v = (X - \lambda)^p$. Or on sait que χ_v divise χ_u , donc $(X - \lambda)^p$ divise $(X - \lambda)^m Q$. On a $Q(\lambda) \neq 0$, donc les polynômes avec $X - \lambda$ et Q sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, $(X - \lambda)^p$ divise $(X - \lambda)^m$, par suite, on a $p \leq m$. $\square$

5.2.3 Endomorphismes diagonalisables**Définition 5.2.4**

Soit K un corps commutatif. On dit qu'un polynôme $P \in K[X]$ a toutes ses racines dans K (ou que P est scindé sur K), si P s'écrit sous la forme :

$$P = a(X - \lambda_1)^{m_1}(X - \lambda_2)^{m_2} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont les racines deux à deux distinctes de P dans K .

Remarque 63

1. Si K est un corps algébriquement clos, alors tout polynôme P de $K[X]$ est scindé sur K .
2. D'après le théorème de D'Alembert, le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est algébriquement clos, donc tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ est scindé.

Définition 5.2.5

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E . On dit que u est diagonalisable sur K , si

- i) Le polynôme caractéristique de u est scindé sur K .
- ii) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale.

Remarque 64

1. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , u un endomorphisme diagonalisable de E et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de u , deux à deux distinctes, alors il existe une base β dans laquelle la matrice de u s'écrit sous la forme :

$$\text{Mat}(u, \beta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, λ_i apparaît sur la diagonale autant de fois que sa multiplicité.

2. Une matrice $A \in M_n(K)$ est dite diagonalisable sur K , s'il existe une matrice inversible P et il existe une matrice diagonale D , avec $P \in M_n(K)$ et $D \in M_n(K)$, tel que $A = PDP^{-1}$.

Théorème 5.2.3

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et u un endomorphisme de E . On suppose que χ_u est scindé sur K et soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les racines deux à deux distinctes de χ_u dans K de multiplicités respectives $m_1, m_2, \dots, m_r$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) u est diagonalisable sur K .
- ii) M_u n'a que des racines simples sur K .
- iii) $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$.
- iv) $\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, \dim(E_{\lambda_i}) = m_i$.

Démonstration. i) $\implies$ ii) Supposons que u est diagonalisable et montrons que M_u n'a que des racines simples. Pour cela, considérons le polynôme $P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_r)$, puisque $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont des racines deux à deux distinctes de M_u , alors P divise M_u , donc pour conclure, il suffit de montrer que M_u divise P .

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base formée de vecteurs propres de u . Montrons que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $P(u)(e_i) = 0$.

Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, il existe $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, tel que

$(u - \lambda_j \text{Id}_E)(e_i) = 0$. Or $P = (X - \lambda_j)Q$, où $Q = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r (X - \lambda_i)$, donc on

a $P(u)(e_i) = Q(u)((u - \lambda_j)(e_i)) = Q(u)(0) = 0$.

Ainsi, on a $P(u) = 0$, donc M_u divise P .

ii) $\implies$ iii) Supposons que $M_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_r)$ et montrons que $E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$. Pour cela, pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, posons $P_i = X - \lambda_i$. Puisque $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont deux à deux distinctes, alors $P_1, P_2, \dots, P_r$ sont deux à deux premiers entre eux, donc d'après le théorème de décomposition, on a

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E) = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}$$

iii) $\implies$ iv) Supposons que $E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}$ et montrons que pour tout

$i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$.

Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, soit $p_i = \dim(E_{\lambda_i})$, alors on sait que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a $p_i \leq m_i$. Or on a $E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}$, donc

$p_1 + p_2 + \cdots + p_r = n$, où $n = \dim(E)$.

D'autre part, comme

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{m_2} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

et comme $\deg(\chi_u) = n$, alors $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$. Donc, si on suppose qu'il existe un $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, tel que $p_i < m_i$, alors on aura

$$n = p_1 + p_2 + \cdots + p_r < m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$$

ce qui est absurde, donc $\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $p_i = m_i$.

iv) $\implies$ i) Supposons que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$ et montrons que u est diagonalisable. D'après la proposition 5.2.1, on sait que la somme $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_r}$ est directe et puisque

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) + \cdots + \dim(E_{\lambda_r}) = m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$$

alors $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$. Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, soit $(e_{i,1}, e_{i,2}, \dots, e_{i,m_i})$ une base de E_{λ_i} , alors

$$(e_{1,1}, e_{1,2}, \dots, e_{1,m_1}, e_{2,1}, e_{2,2}, \dots, e_{2,m_2}, \dots, e_{r,1}, e_{r,2}, \dots, e_{r,m_r})$$

est une base de E formée de vecteurs propres de u . □

Corollaire 5.2.1

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . On suppose que χ_u est scindé sur K et que χ_u n'a que des racines simples. Alors u est diagonalisable.

Démonstration. On sait que M_u divise χ_u et puisque χ_u n'a que des racines simples, alors M_u n'a aussi que des racines simples. Donc, d'après le théorème précédent, u est diagonalisable. □

Corollaire 5.2.2

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E . On suppose que u possède n valeurs propres deux à deux distinctes, alors u est diagonalisable.

Démonstration. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u , donc $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des racines du polynôme caractéristique χ_u de u . Or χ_u est de degré n , donc on a

$$\chi_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n)$$

Par suite, χ_u n'a que des racines simples, donc d'après le corollaire précédent, u est diagonalisable. □

Remarque 65

1. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un projecteur de E , alors u est diagonalisable.

En effet, puisque $u^2 = u$, alors $P(u) = 0$, où $P = X(X - 1)$, donc M_u divise P . Par suite, M_u n'a que des racines simples.

2. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, m un entier ≥ 2 et u un endomorphisme de E , tel que $u^m = \text{Id}_E$, alors u est diagonalisable. En effet, soit $P = X^m - 1$, alors $P(u) = 0$, donc M_u divise P . Il suffit donc de montrer que P n'a que des racines simples. Pour cela, supposons que P possède une racine $\lambda \in \mathbb{C}$ qui n'est pas simple. Donc on doit avoir $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$, avec $P' = mX^{m-1}$, donc $\lambda = 0$. Ce qui est absurde, car $P(0) \neq 0$.
3. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et $\lambda \in K$ une valeur propre de u , avec $\lambda \neq 0$. Alors $E_\lambda \subseteq \text{Im}(u)$.
4. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme diagonalisable de E , alors $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$, car on voit facilement que $\text{Im}(u) = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres de u non nuls et deux à deux distinctes.
5. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme diagonalisable de E et F un sous-espace vectoriel stable par u . Soit v l'endomorphisme induit par u sur F , alors v est un endomorphisme diagonalisable de F .

Exercice 5.2.1

Soit $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorphisme vérifiant $u^3 - 2u^2 - u + 2\text{Id} = 0$, avec $n \geq 2$. Montrer que u est diagonalisable.

Solution

Soit $P = X^3 - 2X^2 - X + 2$. On remarque que $P(1) = 0$, donc $X - 1$ divise P et en faisant la division euclidienne de P par $X - 1$, on aura

$$P = (X - 1)(X^2 - X - 2) = (X - 1)(X + 1)(X - 2)$$

On a $P(u) = 0$, donc M_u divise P et comme P n'a que des racines simples, alors aussi M_u n'a que des racines simples, par suite, u est diagonalisable.

Exercice 5.2.2

Soient K un corps fini de cardinal q , E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme de E . Montrer que u est diagonalisable, si et seulement si, $u^q - u = 0$.

Solution

Comme K est un corps fini de cardinal q , alors $K^* = K \setminus \{0_K\}$ est un groupe d'ordre $q - 1$ et d'élément neutre 1_K , donc pour tout $\alpha \in K^*$, on a $\alpha^{q-1} = 1_K$. Par conséquent, pour tout $\alpha \in K$, on a $\alpha^q = \alpha$, donc tout $\alpha \in K$ est racine du polynôme $P = X^q - X$. Or P est de degré q ayant q racines deux à deux distinctes, donc P n'a que des racines simples.

($\Rightarrow$) Supposons que u est diagonalisable et soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ les valeurs propres de u . Comme u est diagonalisable, alors on a

$M_u = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_r)$, avec $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\} \subseteq K$, donc M_u divise P et par suite, on a $P(u) = 0$.

($\Leftarrow$) Supposons que $P(u) = 0$, alors M_u divise P et comme P n'a que des racines simples, alors M_u n'a que des racines simples, donc u est diagonalisable.

Exercice 5.2.3

Soient a un paramètre réel et A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de a , la matrice A est diagonalisable ? Dans le cas où A est diagonalisable, déterminer P inversible et D diagonale, telles que $A = PDP^{-1}$.

Solution

On commence par déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A :

$$\chi_A = \det(XI - A) = \begin{vmatrix} X+1 & 0 & -a-1 \\ -1 & X+2 & 0 \\ 1 & -1 & X-a \end{vmatrix} = (X+1)^2(X-a+1)$$

Donc si $a = 0$, alors $\chi_A = (X+1)^3$, par suite A est diagonalisable, si seulement si, $M_A = X + 1$. Ceci n'est possible que si $A = -I$. On a $A \neq -I$, donc A n'est pas diagonalisable.

Si $a \neq 0$, alors les valeurs propres de A sont λ_1 et λ_2 , avec $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = a-1$. Donc A est diagonalisable, si et seulement si, $(A+I)(A-(a-1)I) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

$$\begin{aligned} (A+I)(A-(a-1)I) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & 0 & a+1 \\ 1 & -1-a & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a-1 & a+1 & a+1 \\ -a-1 & a+1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc A est diagonalisable, si et seulement si, $a = -1$.

On suppose $a = -1$, alors $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -2$ sont les valeurs propres de A . Soient E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés respectivement à -1 et -2 et soit $x \in \mathbb{R}^3$, avec $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique

de $\mathbb{R}^3$, alors on a

$$\begin{aligned} x \in E_1 &\iff (A + I)x = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x_2 = x_3 \end{aligned}$$

Donc $E_1 = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_3)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^3$, avec $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, on a aussi

$$\begin{aligned} x \in E_2 &\iff (A + 2I)x = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x_1 = 0 \text{ et } x_3 = -x_2 \end{aligned}$$

Donc $E_2 = \text{Vect}(e_2 - e_3)$.

Soient $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, alors on a $A = PDP^{-1}$.

Exercice 5.2.4

Soient m un paramètre réel et A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par,

$$A = \begin{pmatrix} 3 - m & m - 5 & m \\ -m & m - 2 & m \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de m , la matrice A est diagonalisable ? Dans le cas où A est diagonalisable, déterminer P inversible et D diagonale, telles que $A = PDP^{-1}$.

Solution

$$\chi_A = \det(XI - A) = \begin{vmatrix} X - 3 + m & -m + 5 & -m \\ m & X - m + 2 & -m \\ -5 & 5 & X + 2 \end{vmatrix} = (X - 3)(X + 2)^2$$

Donc A est diagonalisable, si et seulement si, $(A - 3I)(A + 2I) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

$$\begin{aligned} (A - 3I)(A + 2I) &= \begin{pmatrix} -m & m - 5 & m \\ -m & m - 5 & m \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 - m & m - 5 & m \\ -m & m & m \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5m & -5m & -5m \\ 5m & -5m & -5m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc A est diagonalisable, si et seulement si, $m = 0$.

On suppose $m = 0$. Soient E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés respectivement à -2 et 3 et soit $x \in \mathbb{R}^3$, avec $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors on a

$$\begin{aligned} x \in E_1 &\iff (A + 2I)x = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Donc $E_1 = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_3)$. On a aussi

$$\begin{aligned} x \in E_2 &\iff (A - 3I)x = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x_2 = 0 \text{ et } x_1 = x_3 \end{aligned}$$

Donc $E_2 = \text{Vect}(e_1 + e_3)$.

Soient $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors on a $A = PDP^{-1}$.

Exercice 5.2.5

Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, avec $\text{tr}(A) \neq 0$, et u l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), u(M) = \text{tr}(A)M + \text{tr}(M)A$$

- Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.
- En déduire que u est diagonalisable.
- Déterminer le polynôme caractéristique, le polynôme minimal, le déterminant et la trace de u .

Solution

- On a $u(A) = 2\text{tr}(A)A$ et que si $\text{tr}(M) = 0$, alors $u(M) = \text{tr}(A)M$, donc $\lambda_1 = \text{tr}(A)$ et $\lambda_2 = 2\text{tr}(A)$ sont des valeurs propres de u . Soient E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 , donc pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} M \in E_1 &\iff u(M) = \text{tr}(A)M \\ &\iff \text{tr}(A)M + \text{tr}(M)A = \text{tr}(A)M \\ &\iff \text{tr}(M)A = 0 \\ &\iff \text{tr}(M) = 0 \quad (\text{car } \text{tr}(A) \neq 0 \text{ donc } A \neq 0) \end{aligned}$$

Ainsi, on a $E_1 = \ker(\text{tr})$, où $\text{tr} : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire non nulle, donc $\ker(\text{tr})$ est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$. Comme $\text{tr}(A) \neq 0$, alors $A \notin \ker(\text{tr})$, et comme $\ker(\text{tr})$ est un hyperplan, alors $M_n(\mathbb{R}) = \ker(\text{tr}) \oplus \text{Vect}(A) = E_1 \oplus E_2$.

- b) D'après la question précédente, on a $M_n(\mathbb{R}) = E_1 \oplus E_2$, donc u est diagonalisable.
- c) D'après la question a), on a $\dim(E_1) = n^2 - 1$ et $\dim(E_2) = 1$. Comme u est diagonalisable, alors $\text{tr}(A)$ est une racine de χ_u de multiplicité $n^2 - 1$ et $2\text{tr}(A)$ une racine simple, par suite, on a $\chi_u = (X - \text{tr}(A))^{n^2-1}(X - 2\text{tr}(A))$.
 u est diagonalisable donc M_u n'a que des racines simples, par conséquent, on a $M_u = (X - \text{tr}(A))(X - 2\text{tr}(A))$.
 u est diagonalisable donc il existe une base dans laquelle la matrice de u s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \text{tr}(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \text{tr}(A) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2\text{tr}(A) \end{pmatrix}$$

par suite, on a $\det(u) = 2\text{tr}(A)^{n^2}$ et $\text{tr}(u) = (n^2 + 1)\text{tr}(A)$.

5.2.4 Diagonalisation simultannée

Lemme 5.2.1

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E et $\lambda \in K$ une valeur propre de u . On suppose que $uov = vou$, alors E_λ est stable par v .

Démonstration. Soit $x \in E_\lambda$, on doit montrer que $v(x) \in E_\lambda$. Pour cela, on a

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$$

ainsi, on a $u(v(x)) = \lambda v(x)$, donc $v(x) \in E_\lambda$. □

Théorème 5.2.4

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E deux à deux commutant, où I est un ensemble quelconque ayant au moins deux éléments. Alors il existe une base β de E , tel que pour tout $i \in I$, la matrice de u_i est une matrice diagonale.

Démonstration. Faisons une démonstration par récurrence sur $n = \dim(E)$. Pour $n = 1$, on a $\dim(E) = 1$, par suite, tout endomorphisme de E est une homothétie, donc dans ce cas, il n'y a rien à démontrer.

Supposons que $n > 1$ et que la propriété est vraie pour tout K -espace vectoriel de dimension m , avec $m < n$.

Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E deux à deux commutant.

Si pour tout $i \in I$, u_i est une homothétie, alors le résultat est trivial.

On suppose donc qu'il existe $i \in I$, tel que u_i ne soit pas une homothétie.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distincts de u_i . Comme u_i est diagonalisable, alors on a $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$.

D'après le lemme précédent, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ et pour tout $j \in I$, E_{λ_k} est stable par u_j , donc l'endomorphisme v_j induit par u_j sur E_{λ_k} est un endomorphisme de E_{λ_k} . Or u_i n'est pas une homothétie, donc pour tout $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a $\dim(E_{\lambda_k}) < n$ et comme $(v_j)_{j \in I}$ est une famille d'endomorphismes diagonalisables deux à deux commutant, alors d'après l'hypothèse de récurrence, pour chaque $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, il existe une base β_k de E_{λ_k} formée de vecteurs propres de u_j , pour chaque $j \in I$. Soit $\beta = \bigcup_{k=1}^r \beta_k$, alors β est une de E formée de vecteurs propres de u_j , pour chaque $j \in I$. $\square$

Remarque 66

Soient K un corps commutatif et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de matrices diagonalisables deux à deux commutant, où I est un ensemble quelconque ayant au moins deux éléments. Alors il existe une matrice inversible P , telle que pour tout $i \in I$, la matrice $P^{-1}A_iP$ est diagonale.

Corollaire 5.2.3

Soient E est un K -espace vectoriel de dimension finie, $u_1, u_2, \dots, u_r$, $r \geq 2$, des endomorphismes diagonalisables de E et deux à deux commutant. Alors pour tout $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in K$, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r$ est diagonalisable.

Démonstration. Comme $u_1, u_2, \dots, u_r$ sont diagonalisables et deux à deux commutant, alors d'après le théorème précédent, il existe une base β de E formée de vecteurs propres communs à $u_1, u_2, \dots, u_r$. On voit donc que β est une base formée de vecteurs propres de

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r$. □

5.3 Trigonalisation**Définition 5.3.1**

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E . On dit que u est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit sous la forme triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Remarque 67

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme trigonalisable de E . Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice B de u s'écrit sous la forme triangulaire inférieure :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n1} & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{pmatrix}$$

En effet, comme u est trigonalisable, alors il existe une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de u s'écrit sous la forme triangulaire supérieure.

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ la base de E définie pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ par $v_j = e_{n-j+1}$, autrement dit, on $v_1 = e_n, v_2 = e_{n-1}, \dots, v_n = e_1$.

Soit $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de u par rapport à la base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, alors pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $b_{ij} = a_{n-i+1, n-j+1}$, donc il est facile de voir que B est une matrice triangulaire inférieure.

Théorème 5.3.1

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E . Alors u est trigonalisable, si et seulement si, le polynôme caractéristique de u est scindé sur K .

Démonstration. $(\implies)$ Supposons que u est trigonalisable, donc, par définition, il existe une base de E dans laquelle la matrice A de u est triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Donc le polynôme caractéristique χ_u de u est donné par :

$$\chi_u = \det(XI - A) = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & X - a_{nn} \end{vmatrix}$$

Donc $\chi_u = (X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn})$ et comme $\deg(\chi_u) = n$, alors χ_u a toutes ses racines dans K .

$(\impliedby)$ Supposons que χ_u a toutes ses racines dans K et montrons que u est trigonalisable. Pour cela, on procède par récurrence sur n , avec $n = \dim(E)$.

Pour $n = 2$, comme χ_u est scindé sur K , alors χ_u possède au moins une racine $\alpha \in K$, donc α est une valeur propre de u . Soit $e_1 \in E$, avec

$e_1 \neq 0$, tel que $u(e_1) = \alpha e_1$ et soit $e_2 \in E$, tel que $e_2 \notin \text{Vect}(e_1)$, alors (e_1, e_2) est une base de E . On pose $u(e_2) = \beta e_1 + \gamma e_2$, alors on a

$$\text{Mat}(u, (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Par conséquent, u est trigonalisable.

Supposons que $n > 2$ et que la propriété est vraie pour tout endomorphisme d'un K -espace vectoriel de dimension m , avec $m < n$.

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur K . Soit $\lambda \in K$ une racine de χ_u et soit $v : E^* \rightarrow E^*$ la transposée de u . On sait que si β est une base de E et si A est la matrice de u par rapport à β , alors ${}^tA$ est la matrice de v par rapport à la base duale de β , on en déduit donc que $\chi_v = \chi_u$. Comme $\chi_u(\lambda) = 0$, alors $\chi_v(\lambda) = 0$, donc il existe $\varphi \in E^*$, avec $\varphi \neq 0$, tel que $v(\varphi) = \lambda\varphi$. Soit $F = \ker(\varphi)$, comme φ est une forme linéaire non nulle, alors $\dim(F) = n - 1$. Montrons que F est stable par u , pour cela, soit $x \in F$, alors on a

$$\langle u(x), \varphi \rangle = \langle x, v(\varphi) \rangle = \langle x, \lambda\varphi \rangle = \lambda \langle x, \varphi \rangle$$

Puisque $x \in F$ et $F = \ker(\varphi)$, alors $\langle x, \varphi \rangle = 0$, donc $\langle u(x), \varphi \rangle = 0$, par suite, $u(x) \in F$. On en déduit donc que F est stable par u .

Soit w l'endomorphisme induit par u sur F , alors w est un endomorphisme de F . On sait que χ_w divise χ_u , donc χ_w est aussi scindé sur K et comme $\dim(F) = n - 1$ alors d'après l'hypothèse de récurrence, w est trigonalisable. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ une base de F dans laquelle la matrice de w est triangulaire supérieure.

Soit $x \in E$, avec $x \notin F$, et soit $e_n = x$, alors la matrice de u par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est triangulaire supérieure, donc u est trigonalisable. $\square$

Remarque 68

1. *Tout endomorphisme diagonalisable est trigonalisable.*
2. *Si K est un corps algébriquement clos et si E est un K -espace vectoriel, alors tout endomorphisme de E est trigonalisable. Donc en particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est trigonalisable.*
3. *Si u est un endomorphisme trigonalisable et si A est une matrice triangulaire qui représente u dans une base de E , alors les éléments dia-*

gonaux de A sont les valeurs propres de u , c'est à dire, on a

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres non nécessairement deux à deux distinctes de u . On voit donc que le déterminant et la trace de u s'expriment uniquement en fonction des valeurs propres :

$$\det(u) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{et} \quad \text{tr}(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

4. En particulier, si χ_u est scindé sur K et si

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{m_2} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

alors on a

$$\begin{cases} \det(u) = \prod_{k=1}^r \lambda_k^{m_k} = \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \dots \lambda_r^{m_r} \\ \text{et} \\ \text{tr}(u) = \sum_{k=1}^r m_k \lambda_k = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_r \lambda_r \end{cases}$$

Proposition 5.3.1

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et u un endomorphisme de E , tel que $\chi_u = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$. Alors on a

$$\det(u) = (-1)^n a_0 \quad \text{et} \quad \text{tr}(u) = -a_{n-1}$$

Démonstration. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, alors tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$, donc en particulier, χ_u est scindé sur $\mathbb{C}$, par suite, u est trigonalisable. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres, non nécessairement deux à deux distinctes, de u , alors on a

$$\chi_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_n) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

Or, d'après la remarque précédente, on a $\det(u) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ et $\text{tr}(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et par un développement de $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_n)$, on obtient $(-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i = a_0$

et $-\sum_{i=1}^n \lambda_i = a_{n-1}$, d'où le résultat.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère la matrice A de u dans une base de E et on considère l'endomorphisme $v : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On a alors $\chi_u = \chi_v$, $\det(u) = \det(A) = \det(v)$ et $\text{tr}(u) = \text{tr}(A) = \text{tr}(v)$ et comme v est un $\mathbb{C}$ -endomorphisme, alors on aura le résultat. $\square$

Exercice 5.3.1

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et u un endomorphisme de E dont le polynôme minimal M_u s'écrit sous la forme $M_u = a + bX + X^2$, où a et b sont deux réels tels que $b^2 - 4a < 0$

- Montrer que n est pair.
- Montrer que $\det(u) = a^{\frac{n}{2}}$ et $\text{tr}(u) = -\frac{nb}{2}$.

Solution

- Supposons, par absurde, que n est impair, donc le polynôme caractéristique de u est de degré impair et par suite, ce polynôme possède au moins une racine réelle λ , donc λ est une racine de M_u , car M_u et χ_u ont mêmes racines. Ce qui est absurde, car M_u n'a aucune racine réelle.
- Soit β une base de E et soit $A = \text{mat}(u, \beta)$, donc $A \in M_n(\mathbb{R})$. Puisque $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, alors $A \in M_n(\mathbb{C})$ et on a $\chi_A = \chi_u$ et $M_A = M_u$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de M_A , puisque $M_A \in \mathbb{R}[X]$, alors $\bar{\lambda}$ est aussi une racine de M_A .

On sait que χ_A et M_A ont mêmes racines et comme $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, alors on a $\chi_A = (X - \lambda)^p (X - \bar{\lambda})^p$, donc on aura,

$$\det(A) = \lambda^p \bar{\lambda}^p = (\lambda \bar{\lambda})^p \quad \text{et} \quad \text{tr}(A) = p\lambda + p\bar{\lambda} = p(\lambda + \bar{\lambda})$$

Or λ et $\bar{\lambda}$ sont les racines du polynôme de second degré $X^2 + bX + a$ donc $\lambda \bar{\lambda} = a$ et $\lambda + \bar{\lambda} = -b$.

5.4 Endomorphismes nilpotents

Définition 5.4.1

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E . On dit que u est nilpotent, s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, tel que $u^m = 0$.

Remarque 69

1. L'endomorphisme nul est nilpotent.
2. Si u est un endomorphisme nilpotent et si v est un endomorphisme quelconque, tel que $uv = vu$, alors uv est nilpotent.
En effet, soit $m \in \mathbb{N}^*$, tel que $u^m = 0$, alors on a $(uv)^m = u^m v^m$, car $uv = vu$, donc $(uv)^m = 0$.
3. Soient u et v deux endomorphismes nilpotents, tels que $uv = vu$, alors $u + v$ est nilpotent.
En effet, soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, tels que $u^p = 0$ et $u^q = 0$, alors on a

$$\begin{aligned}
 (u + v)^{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} C_{p+q}^k u^k v^{p+q-k} \quad (\text{car } uv = vu) \\
 &= \sum_{k=0}^p C_{p+q}^k u^k v^{p+q-k} + \sum_{k=p+1}^{p+q} C_{p+q}^k u^k v^{p+q-k} = 0 + 0 = 0
 \end{aligned}$$

car pour $k \in \{0, 1, \dots, p\}$, on a $p + q - k \geq q$, donc $v^{p+q-k} = 0$,
et pour $k \in \{p + 1, \dots, p + q\}$, on a $k > p$, donc $u^k = 0$.

4. Si u est nilpotent, alors $\ker(u) \neq \{0\}$.
5. Une matrice $A \in M_n(K)$ est dite nilpotente, s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^m = 0$.

Proposition 5.4.1

Soit u un endomorphisme nilpotent, alors il existe $q \in \mathbb{N}^*$, tel que $u^q = 0$ et $u^{q-1} \neq 0$. Dans ce cas, q s'appelle l'indice de nilpotence de u .

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = \{m \in \mathbb{N}^* / u^m = 0\}$, comme u est nilpotent, alors $\mathcal{A}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc $\mathcal{A}$ admet un plus petit élément, noté q . On a $q \in \mathcal{A}$, donc $u^q = 0$, aussi on a $q - 1 \notin \mathcal{A}$, car q est le plus petit élément de $\mathcal{A}$, donc $u^{q-1} \neq 0$. □

Remarque 70

Soient E un K -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E nilpotent non nul d'indice q . Alors on a $\boxed{2 \leq q \leq n}$.

Proposition 5.4.2

Soient E un K -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) u est nilpotent.
- ii) $M_u = X^q$, où q est l'indice de nilpotence de u .
- iii) $\chi_u = X^n$.

Démonstration. i) $\implies$ ii) Supposons que u est nilpotent d'indice q , alors on a $u^q = 0$, donc M_u divise X^q , par suite, $M_u = X^r$, avec $r \leq q$. Comme $u^{q-1} \neq 0$, alors $r = q$, donc $M_u = X^q$.

ii) $\implies$ iii) Supposons que $M_u = X^q$. Puisque M_u et χ_u ont les mêmes racines, alors 0 est l'unique racine de χ_u et comme $\deg(\chi_u) = n$, alors $\chi_u = X^n$.

iii) $\implies$ i) Supposons que $\chi_u = X^n$, donc d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $u^n = 0$, donc u est nilpotent. $\square$

Notations

Dans la suite, E désigne un K -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme nilpotent non nul d'indice q .

Pour chaque $i \in \{0, 1, 2, \dots, q\}$, on pose $E_i = \ker(u^i)$, alors on a

$$\{0\} = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \dots \subseteq E_{q-1} \subseteq E_q = E$$

Lemme 5.4.1

- i) $E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \dots \subsetneq E_{q-1} \subsetneq E_q$.
- ii) Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, on a $u(E_{i+1}) \subseteq E_i$.

Démonstration. i) Il suffit de montrer que pour tout $i \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, on a $E_{i+1} \neq E_i$. Pour cela, supposons par absurde qu'il existe $i \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, tel que $E_{i+1} = E_i$. Soit $x \in E$, puisque $u^q(x) = 0$, alors $u^{i+1}(u^{q-i-1}(x)) = 0$, donc $u^{q-i-1}(x) \in E_{i+1}$. Comme $E_{i+1} = E_i$, alors $u^{q-i-1}(x) \in E_i$, donc on aura $u^{q-1}(x) = u^i(u^{q-i-1}(x)) = 0$ et ceci pour tout $x \in E$, donc $u^{q-1} = 0$, ce qui est absurde, car $u^{q-1} \neq 0$.

- ii) Soit $x \in E_{i+1}$, alors on a $u^{i+1}(x) = 0$, donc $u^i(u(x)) = 0$, par suite $u(x) \in E_i$. $\square$

Lemme 5.4.2

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On suppose qu'il existe $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, tel que $F \cap E_i = \{0\}$, alors on a

- i) $u(F) \cap E_{i-1} = \{0\}$.
- ii) Si v l'endomorphisme induit par u sur F , alors $v : F \longrightarrow u(F)$ est un isomorphisme.

Démonstration. i) Soit $y \in u(F) \cap E_{i-1}$, alors il existe $x \in F$, tel que $y = u(x)$ et on a $y \in E_{i-1}$, par suite, on aura $u^i(x) = u^{i-1}(y) = 0$. Ainsi, on a $x \in F \cap E_i$, donc $x = 0$, car $F \cap E_i = \{0\}$, par conséquent, $y = 0$, donc $u(F) \cap E_{i-1} = \{0\}$.

ii) Il suffit de montrer que $\ker(v) = \{0\}$. Soit $x \in \ker(v)$, alors on a $u(x) = 0$ et $x \in F$, donc $x \in F \cap E_1$. Or, on a $F \cap E_i = \{0\}$, donc $x = 0$, car $E_1 \subseteq E_i$. $\square$

Lemme 5.4.3

Il existe des sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_q$ de E , tels que

- a) Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, on a
 - i) $E_i = E_{i-1} \oplus F_i$.
 - ii) $u(F_i) \subseteq F_{i-1}$.
 - iii) Si u_i est la restriction de u à F_i , alors $u_i : F_i \longrightarrow F_{i-1}$ est injective.
- b) $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_q$.

Démonstration. D'après le lemme 5.4.1, on a $E_{q-1} \subsetneq E_q$. Soit F_q un supplémentaire de E_{q-1} dans E_q , alors on a $E = E_q = E_{q-1} \oplus F_q$. On a aussi $E_{q-1} \cap F_q = \{0\}$, donc d'après le lemme précédent, on a $E_{q-2} \cap u(F_q) = \{0\}$ et $u(F_q) \subseteq u(E_q) \subseteq E_{q-1}$. Donc $u(F_q)$ et E_{q-2} sont deux sous-espaces vectoriels de E_{q-1} , tels que $u(F_q) \cap E_{q-2} = \{0\}$, par suite, il existe

un supplémentaire de E_{q-2} dans E_{q-1} qui contient $u(F_q)$. Ce supplémentaire sera noté F_{q-1} , alors on a

$$E_{q-1} = E_{q-2} \oplus F_{q-1} \quad \text{et} \quad u(F_q) \subseteq F_{q-1}$$

Puis de la même manière, on voit que

$$E_{q-3} \cap u(F_{q-1}) = \{0\} \quad \text{et} \quad u(F_{q-1}) \subseteq u(E_{q-1}) \subseteq E_{q-2}$$

et on choisit un supplémentaire de E_{q-3} dans E_{q-2} qui contient $u(F_{q-1})$. Ce supplémentaire sera noté F_{q-2} , alors on a

$$E_{q-2} = E_{q-3} \oplus F_{q-2} \quad \text{et} \quad u(F_{q-1}) \subseteq F_{q-2}$$

Ainsi, par récurrence sur $k \in \{1, 2, \dots, q-1\}$, on construit $F_q, F_{q-1}, \dots, F_1$, tel que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, q-1\}$, on a

$$E_{q-k} = E_{q-k-1} \oplus F_{q-k} \quad \text{et} \quad u(F_{q-k+1}) \subseteq F_{q-k}$$

Donc en éliminant les E_k , pour $k \in \{1, 2, \dots, q-1\}$, on obtient

$$\begin{aligned} E &= E_{q-1} \oplus F_q = E_{q-2} \oplus F_{q-1} \oplus F_q \\ &\vdots \\ &= E_0 \oplus F_1 \oplus \dots \oplus F_q = F_1 \oplus \dots \oplus F_q \quad (\text{car } E_0 = \{0\}) \end{aligned}$$

Soit u_i la restriction de u à F_i , alors d'après le lemme précédent, $u_i : F_i \longrightarrow u(F_i)$ est un isomorphisme et comme $u(F_i) \subseteq F_{i-1}$, alors $u_i : F_i \longrightarrow F_{i-1}$ est injective. □

Remarque 71

1. On a $F_1 = \ker(u)$.
2. On a $\dim(F_1) \geq \dim(F_2) \geq \dots \geq \dim(F_q)$.
3. Si $q = n$, alors on a $\dim(F_1) = \dim(F_2) = \dots = \dim(F_n) = 1$.
4. Si $n \geq 3$ et $q = n-1$, alors on a $\dim(F_1) = 2$ et $\dim(F_2) = \dots = \dim(F_{n-1}) = 1$.
5. Si $n \geq 4$ et $q = n-2$, alors deux cas sont possibles :
 - i) $\dim(F_1) = 3$ et $\dim(F_2) = \dim(F_3) = \dots = \dim(F_{n-2}) = 1$.
 - ii) $\dim(F_1) = \dim(F_2) = 2$ et $\dim(F_3) = \dots = \dim(F_{n-2}) = 1$.
6. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u est un endomorphisme nilpotent de E d'indice n . Alors $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$, donc

il existe $x_0 \in E$, tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$. Pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, soit $e_j = u^{n-j}(x_0)$, alors on a

$$e_1 = u^{n-1}(x_0), e_2 = u^{n-2}(x_0), \dots, e_{n-1} = u(x_0) \text{ et } e_n = x_0$$

Il est donc facile de vérifier que $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , que $u(e_1) = u^n(x_0) = 0$ et que pour $j \in \{2, \dots, n\}$, on a

$$u(e_j) = u^{n-j+1}(x_0) = u^{n-(j-1)}(x_0) = e_{j-1}$$

Soit A la matrice de u par rapport à la base β , alors on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.5 Jordanisation d'un endomorphisme nilpotent

Définition 5.5.1

On appelle matrice nilpotente de Jordan, toute matrice carrée qui s'écrit sous la forme suivante :

$$N = \begin{pmatrix} \boxed{N_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{N_2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{N_r} \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a

$$N_i = (0) \text{ ou } N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemples

Si $n = 3$, alors, à similitude près, il y a deux types de matrice nilpotente de Jordan :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Théorème 5.5.1

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E non nul et nilpotent d'indice q . Alors il existe une base de E , appelée base de Jordan de u , dans laquelle la matrice de u est une matrice nilpotente de Jordan.

Démonstration. u est un endomorphisme nilpotent d'indice q , donc d'après le lemme précédent, il existe des sous-espaces $F_1, F_2, \dots, F_q$ de E , tels que

a) Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, on a

i) $E_i = E_{i-1} \oplus F_i$.

ii) $u(F_i) \subseteq F_{i-1}$.

iii) Si u_i est la restriction de u à F_i , alors $u_i : F_i \longrightarrow F_{i-1}$ est injective.

b) $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_q$.

Soit $\beta_q = (x_{q,1}, x_{q,2}, \dots, x_{q,m_q})$ une base de F_q . Comme $u_q : F_q \longrightarrow F_{q-1}$ est injective, alors $(u(x_{q,1}), u(x_{q,2}), \dots, u(x_{q,m_q}))$ est une partie libre de F_{q-1} , donc on peut la compléter en une base de F_{q-1} qu'on note

$\beta_{q-1} = (x_{q-1,1}, x_{q-1,2}, \dots, x_{q-1,m_{q-1}})$, alors on a

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m_q\}, \quad x_{q-1,i} = u(x_{q,i})$$

$\beta_{q-1} = (x_{q-1,1}, x_{q-1,2}, \dots, x_{q-1,m_{q-1}})$ est une base de F_{q-1} et

$u_{q-1} : F_{q-1} \longrightarrow F_{q-2}$ est injective, donc $(u(x_{q-1,1}), u(x_{q-1,2}), \dots, u(x_{q-1,m_{q-1}}))$ est une partie libre de F_{q-2} , donc on peut la compléter en une base de F_{q-2} qu'on note $\beta_{q-2} = (x_{q-2,1}, x_{q-2,2}, \dots, x_{q-2,m_{q-2}})$, alors on a

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m_{q-1}\}, \quad x_{q-2,i} = u(x_{q-1,i})$$

Ainsi par induction, pour tout $j \in \{2, \dots, q\}$, à partir d'une base

$\beta_j = (x_{j,1}, \dots, x_{j,m_j})$ de F_j on obtient une base $\beta_{j-1} = (x_{j-1,1}, \dots, x_{j-1,m_{j-1}})$ de F_{j-1} , telle que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m_j\}, \quad x_{j-1,i} = u(x_{j,i})$$

On a $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_q$, alors $\beta = \bigcup_{j=1}^q \beta_j$ forme une base de E . Ecrivons les éléments de β dans un tableau, que nous appelons tableau de Jordan de u , de la manière suivante :

F_q	$x_{q,1}$	$x_{q,2}$	$\dots$	x_{q,m_q}				
F_{q-1}	$x_{q-1,1}$	$x_{q-1,2}$	$\dots$	x_{q-1,m_q}	$\dots$	$x_{q-1,m_{q-1}}$		
$\vdots$								
$\vdots$								
$\vdots$								
F_1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\dots$	x_{1,m_q}	$\dots$	$x_{1,m_{q-1}}$	$\dots$	x_{1,m_1}
	G_1	G_2	$\dots$	G_{m_q}	$\dots$	$G_{m_{q-1}}$	$\dots$	G_{m_1}

Dans ce tableau, pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$, G_i est le sous-espace vectoriel de E , engendré par les vecteurs de la i^{ieme} colonnes qui forment un système libre, donc ce système constitue une base γ_i de G_i . Ecrivons les éléments de γ_i en commençant du bas de la colonne vers le haut, on aura alors $\gamma_i = (e_{i,1}, e_{i,2}, \dots, e_{i,r_i})$ et on aura

$$\begin{cases} u(e_{i,1}) = 0 \\ u(e_{i,j}) = e_{i,j-1}, \text{ pour } j \in \{2, \dots, r_i\} \end{cases}$$

Soit v_i l'endomorphisme induit par u sur G_i . Comme G_i est stable par u , alors v_i est un endomorphisme de G_i et la matrice N_i de v_i par rapport à la base γ_i s'écrit sous la forme

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $E = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_{m_1}$, donc $\gamma = \bigcup_{i=1}^{m_1} \gamma_i$ est une base de E et la matrice N de u par rapport à cette base s'écrit sous la forme suivante :

$$N = \begin{pmatrix} \boxed{N_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{N_2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{N_{m_1}} \end{pmatrix}$$

D'où le résultat. □

Remarque 72

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E non nul et nilpotent d'indice q . Rappelons que si $F_1, F_2, \dots, F_q$ sont les sous-espaces définis dans le lemme précédent, alors on a

$$F_1 = \ker(u). \\ \dim(F_1) \geq \dim(F_2) \geq \dots \geq \dim(F_q).$$

1. Si $q = n$, alors dans ce cas, on a

$$\dim(E_{n-1}) = \dim(E_{n-2}) = \dots = \dim(E_1) = 1$$

Soit $x_0 \in E$, tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$, alors le tableau de Jordan de u est défini par

F_n	x_0
F_{n-1}	$u(x_0)$
$\vdots$	
$\vdots$	
F_2	$u^{n-2}(x_0)$
F_1	$u^{n-1}(x_0)$

Donc une base de Jordan $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est définie pour tout

$j \in \{1, 2, \dots, n\}$, par $e_j = u^{n-j}(x_0)$, donc on a

$e_1 = u^{n-1}(x_0)$, $e_2 = u^{n-2}(x_0)$, ..., $e_n = x_0$, et la matrice N de u par rapport à cette base est définie par

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Si $n \geq 3$ et $q = n - 1$, alors dans ce cas on a $\dim(E_1) = 2$ et

$$\dim(E_{n-1}) = \dim(E_{n-2}) = \dots = \dim(E_2) = 1$$

Soit $x_0 \in E$, tel que $u^{n-2}(x_0) \neq 0$ et soit $y \in \ker(u)$, tel que $(u^{n-2}(x_0), y)$

soit une base de $\ker(u)$, alors le tableau de Jordan de u est défini par

F_{n-1}	x_0	
F_{n-2}	$u(x_0)$	
$\vdots$		
$\vdots$		
F_2	$u^{n-3}(x_0)$	
F_1	$u^{n-2}(x_0)$	y

Donc une base de Jordan $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de u est définie par

$$e_1 = u^{n-2}(x_0), \ e_2 = u^{n-3}(x_0), \ \dots, \ e_{n-1} = x_0, \ e_n = y$$

et la matrice N de u dans cette base est définie par

$$N = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

3. Si $n \geq 4$ et $q = n - 2$, alors deux cas sont possibles :

- i) $\dim(F_1) = \dim(F_2) = 2$ et $\dim(F_3) = \dots = \dim(F_{n-2}) = 1$.
Soit $x_0 \in E$, tel que $u^{n-3}(x_0) \neq 0$ et soit $y \in \ker(u^2)$, tel que $y \notin \ker(u)$ et tel que le système $(u^{n-4}(x_0), y)$ soit libre, alors le tableau de Jordan de u est défini par

F_{n-2}	x_0	
F_{n-3}	$u(x_0)$	
$\vdots$		
$\vdots$		
F_2	$u^{n-4}(x_0)$	y
F_1	$u^{n-3}(x_0)$	$u(y)$

Donc une base de Jordan $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de u est définie par

$$e_1 = u^{n-3}(x_0), \ e_2 = u^{n-4}(x_0), \ \dots, \ e_{n-2} = x_0, \ e_{n-1} = u(y), \ e_n = y$$

et la matrice N de u dans cette base est définie par

$$N = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & \\ \hline & & 0 & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ii) $\dim(F_1) = 3$ et $\dim(F_2) = \dots = \dim(F_{n-2}) = 1$.

Soit $x_0 \in E$, tel que $u^{n-3}(x_0) \neq 0$ et soient $y, z \in \ker(u)$, tels que $(u^{n-3}(x_0), y, z)$ soit une base de $\ker(u)$, alors le tableau de Jordan de u est défini par

F_{n-2}	x_0		
F_{n-3}	$u(x_0)$		
$\vdots$			
$\vdots$			
F_2	$u^{n-4}(x_0)$		
F_1	$u^{n-3}(x_0)$	y	z

Donc une base de Jordan $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de u est définie par

$$e_1 = u^{n-3}(x_0), e_2 = u^{n-4}(x_0), \dots, e_{n-2} = x_0, e_{n-1} = y, e_n = z$$

et la matrice N de u dans cette base est définie par

$$N = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & \\ \hline & & 0 & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Exemples

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E non nul et nilpotent d'indice q . Rappelons qu'on a $2 \leq q \leq n$.

1. Si $n = 2$, alors $q = 2$, donc d'après la remarque précédente, si $x_0 \in E$, est tel que $u(x_0) \neq 0$, alors $(u(x_0), x_0)$ est une base de Jordan de u et la matrice A de u dans cette base est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Si $n = 3$, alors $q = 3$ ou $q = 2$.

Si $\dim(\ker(u)) = 1$, alors $q = 3$, donc d'après la remarque précédente, si $x_0 \in E$, tel que $u^2(x_0) \neq 0$, alors $(u^2(x_0), u(x_0), x_0)$ est une base de Jordan de u et la matrice A de u dans cette base est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\dim(\ker(u)) = 2$, alors $q = 2$, donc d'après la remarque précédente, si $x_0 \in E$, tel que $u(x_0) \neq 0$, et si $y \in \ker(u)$, tel que $(u(x_0), y)$ soit une base de $\ker(u)$, alors $(u(x_0), x_0, y)$ est une base de Jordan de u et la matrice A de u dans cette base est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Si $n = 4$, alors $q \in \{2, 3, 4\}$.

Si $\dim(\ker(u)) = 1$, alors $q = 4$, donc d'après la remarque précédente, si $x_0 \in E$, tel que $u^3(x_0) \neq 0$, alors $(u^3(x_0), u^2(x_0), u(x_0), x_0)$ est une base de Jordan de u et la matrice A de u dans cette base est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\dim(\ker(u)) = 2$, alors $q = 3$ ou $q = 2$.

Si $q = 3$, alors d'après la remarque précédente, si $x_0 \in E$, tel que $u^2(x_0) \neq 0$, et si $y \in \ker(u)$, tel que $(u^2(x_0), y)$ soit une base de $\ker(u)$, alors $(u^2(x_0), u(x_0), x_0, y)$ est une base de Jordan de u et la matrice A de u dans cette base est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $q = 2$, alors d'après la remarque précédente, si $x_0 \in E$, tel que $u(x_0) \neq 0$, et si $y \in E$, tel que $y \notin \ker(u)$ et tel que le système (x_0, y) soit libre, alors $(u(x_0), x_0, u(y), y)$ est une base de Jordan de u et la matrice A de u dans cette base est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\dim(\ker(u)) = 3$, alors $q = 2$, donc d'après la remarque précédente, si $x_0 \in E$, tel que $u(x_0) \neq 0$, et si $y, z \in \ker(u)$, tels que $(u(x_0), y, z)$ soit une base de $\ker(u)$, alors $(u(x_0), x_0, y, z)$ est une base de Jordan de u et la matrice A de u dans cette base est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.6 Décomposition de Dunford

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur K , tel que

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{m_2} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont les racines deux à deux distinctes de χ_u . Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on pose $P_i = (X - \lambda_i)^{m_i}$ et on pose $N_i = \ker(P_i(u))$, alors pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, N_i s'appelle le **sous-espace caractéristique** associé à la valeur propre λ_i et on a le théorème suivant, appelé théorème des projecteurs spectraux :

Théorème 5.6.1 (projecteurs spectraux)

- i) Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, N_i est stable par u
- ii) $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_r$.
- iii) Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $\dim(N_i) = m_i$
- iv) Si pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on désigne par π_i la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r N_j$, alors π_i est un polynôme en u et on a $\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_r = Id_E$.

Définition 5.6.1

Les endomorphismes $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$, définis dans le théorème précédent, sont appelés les projecteurs spectraux associés à u .

Démonstration. **i)** Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $P_i(u)$ commute avec u , donc $\ker(P_i(u))$ est stable par u , par suite, N_i est stable par u .

ii) D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $(P_1 P_2 \cdots P_r)(u) = 0$, où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $P_i = (X - \lambda_i)^{m_i}$, et comme les P_i sont deux à deux premiers entre eux, alors d'après le théorème de décomposition des noyaux, on a

$$E = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u)) \oplus \cdots \oplus \ker(P_r(u)) = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_r$$

iii) Posons $n_i = \dim(N_i)$ et soit u_i l'endomorphisme induit par u sur N_i , on a alors $(u_i - \lambda_i)^{m_i} = 0$, donc λ_i est l'unique racine du polynôme caractéristique χ_{u_i} de u_i et comme $\deg(\chi_{u_i}) = n_i$, alors on a $\chi_{u_i} = (X - \lambda_i)^{n_i}$. Or, on sait que χ_{u_i} divise χ_u , donc d'après le théorème de Gauss, $(X - \lambda_i)^{n_i}$ divise $(X - \lambda_i)^{m_i}$, par suite, on a $n_i \leq m_i$. D'autre part, d'après ii), on a $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ et on a aussi $n = \deg(\chi_u) = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$. On en déduit donc, par absurde, que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a $n_i = m_i$.

iv) Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on pose $Q_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r P_j$, alors les Q_i sont premiers entre eux ou premiers dans leur ensemble, donc d'après le théorème de Bezout, il existe $V_1, V_2, \dots, V_r$ dans $K[X]$, tels que

$$V_1 Q_1 + V_2 Q_2 + \cdots + V_r Q_r = 1$$

Ainsi, on aura

$$(V_1 Q_1)(u) + (V_2 Q_2)(u) + \cdots + (V_r Q_r)(u) = Id_E$$

donc pour tout $x \in E$, on a

$$x = [(V_1 Q_1)(u)](x) + [(V_2 Q_2)(u)](x) + \cdots + [(V_r Q_r)(u)](x)$$

Par conséquent, si pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on pose $x_i = [(V_i Q_i)(u)](x)$ alors on aura

$$P_i(u)(x_i) = [(V_i P_i Q_i)(u)](x) = [(V_i \chi_u)(u)](x) = 0$$

par suite, on a $x_i \in N_i$.

Comme $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$, alors, d'après l'unicité de la décomposition dans une somme directe, pour tout $x \in E$, on a

$\pi_i(x) = x_i = [(V_i Q_i)(u)](x)$, par conséquent, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a $\pi_i = (V_i Q_i)(u)$. $\square$

Remarque 73 (détermination pratique des projecteurs spectraux)

D'après la démonstration précédente, la détermination des projecteurs spectraux $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$ est liée à la détermination des polynômes $V_1, V_2, \dots, V_r$, tels que $V_1 Q_1 + V_2 Q_2 + \cdots + V_r Q_r = 1$. En pratique, afin d'avoir les polynômes $V_1, V_2, \dots, V_r$, on effectue la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\chi_u}$. Comme

$\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$, alors on aura

$$\frac{1}{\chi_u} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{ik}}{(X - \lambda_i)^k} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{ik} (X - \lambda_i)^{m_i-k}}{(X - \lambda_i)^{m_i}}$$

Or pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a $Q_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r P_j$, donc on a

$$1 = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} a_{ik} (X - \lambda_i)^{m_i-k} Q_i = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{k=1}^{m_i} a_{ik} (X - \lambda_i)^{m_i-k} \right) Q_i$$

On en déduit donc que pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a

$$V_i = \sum_{k=1}^{m_i} a_{ik} (X - \lambda_i)^{m_i-k}$$

Ainsi, pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a

$$\pi_i = (V_i Q_i)(u) = \left(\sum_{k=1}^{m_i} a_{ik} (u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i-k} \right) \circ Q_i(u)$$

Théorème 5.6.2 (décomposition de Dunford)

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , avec $n \geq 1$, et u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur K . Alors il existe un unique endomorphisme diagonalisable d et un unique endomorphisme nilpotent ν , tels que

i) $u = d + \nu$.

ii) $d \circ \nu = \nu \circ d$.

De plus d et ν soient des polynômes en u .

Démonstration. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u et soient $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$ les projecteurs spectraux associés à u . Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, π_i est une projection, donc π_i est diagonalisable et comme π_i est un polynôme en u , alors $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$ sont deux à deux commutants.

Donc, si on pose $d = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 + \dots + \lambda_r \pi_r$, alors d'après le corollaire 5.2.3, d est diagonalisable et comme $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$ sont des polynômes en u , alors d est aussi un polynôme en u .

Soit $\nu = u - d$, alors on a $u = d + \nu$ et ν est un polynôme en u , car d est un polynôme en u , il suffit donc de montrer que ν est nilpotent. Pour cela, soit $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ et soit $x \in N_i$, alors on a $\nu(x) = (u - d)(x) = (u - \lambda_i \text{Id}_E)(x)$, car pour tout $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, avec $j \neq i$, on a $\pi_j(x) = 0$, donc pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\nu^m(x) = (u - \lambda_i \text{Id}_E)^m(x)$. On en déduit donc que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^r x_i$, on a

$$\nu^m(x) = \sum_{i=1}^r \nu^m(x_i) = \sum_{i=1}^r (u - \lambda_i \text{Id}_E)^m(x_i)$$

Soit $m = \max(m_1, m_2, \dots, m_r)$, alors on a $\nu^m = 0$, donc ν est nilpotent.

Supposons qu'il existe d' et ν' vérifiant les conditions du théorème, alors on aura $u = d + \nu = d' + \nu'$, donc $d - d' = \nu' - \nu$. Comme d et d' sont des polynômes en u , alors d et d' commutent et comme d et d' sont diagonalisables, alors d'après le corollaire 5.2.3, $d - d'$ est diagonalisable. On a aussi ν et ν' des polynômes en u , donc ν et ν' commutent et comme ν et ν' sont nilpotents, alors $\nu' - \nu$ est nilpotent. On a $d - d' = \nu' - \nu$, donc $\nu' - \nu$ est à la fois nilpotent et diagonalisable, donc $\nu' - \nu = 0$, par suite $d - d' = 0$. $\square$

Remarque 74

Soient K un corps commutatif et A une matrice carrée à coefficients dans K . On suppose que le polynôme caractéristique de A est scindé sur K , alors il existe une matrice diagonalisable D et une matrice nilpotente N à coefficients dans K , tel que

i) $A = D + N$.

ii) D et N sont des polynômes en A .

iii) $DN = ND$.

De plus D et N sont des polynômes en A .

5.7 Réduction de Jordan

5.7.1 Base et matrice de Jordan

Théorème 5.7.1

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur K . On suppose que $\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1}(X - \lambda_2)^{m_2} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont les racines deux à deux distinctes de χ_u . Alors il existe une base de E , appelée base de Jordan de u , dans laquelle la matrice J de u , s'écrit sous la forme suivante :

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{J_r} \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a

$$J_i = \begin{pmatrix} \boxed{J_{i,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{J_{i,r_i}} \end{pmatrix}$$

et où pour tout $j \in \{1, \dots, r_i\}$, on a

$$J_{i,j} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Démonstration. Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, soit N_i le sous-espace caractéristique associé à λ_i et soit u_i l'endomorphisme induit par u sur N_i . Comme $N_i = \ker(P_i(u))$, où $P_i = (X - \lambda_i)^{m_i}$, alors $(u_i - \lambda_i)^{m_i} = 0$, donc $u_i - \lambda_i$ est un endomorphisme nilpotent de N_i . D'après le théorème 5.5.1, il existe une

base $\beta_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,m_i})$ de N_i dans laquelle la matrice A_i est une matrice nilpotente de Jordan qui s'écrit sous la forme :

$$A_i = \begin{pmatrix} \boxed{A_{i,1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{A_{i,r_i}} \end{pmatrix}$$

où pour tout $j \in \{1, \dots, r_i\}$, $A_{i,j}$ s'écrit sous la forme :

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or, on a $u_i = (u_i - \lambda_i) + \lambda_i Id_{N_i}$, donc si J_i est la matrice de u_i par rapport à β_i , alors on aura $J_i = A_i + \lambda_i I$, donc J_i est sous la forme :

$$J_i = \begin{pmatrix} \boxed{J_{i,1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{J_{i,r_i}} \end{pmatrix}$$

et où pour tout $j \in \{1, \dots, r_i\}$, on a

$$J_{i,j} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

On sait que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_r$, donc la matrice J de u par rapport à la base $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$ est sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{J_r} \end{pmatrix}$$

D'où le résultat. □

Remarque 75

La matrice J décrite dans le théorème précédent, s'appelle une matrice de Jordan. Donc d'après le théorème précédent, une matrice de Jordan s'écrit sous la forme suivante :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on a $\alpha_i \in \{0, 1\}$ et où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u non nécessairement distinctes et chaque λ_i est écrit sur la diagonale de J autant de fois que sa multiplicité.

Corollaire 5.7.1

Pour toute matrice carrée A de $M_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice de Jordan J et il existe une matrice inversible P , telles que $A = PJP^{-1}$.

5.7.2 Technique de jordanisation en petites dimensions

Soient E un K -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E , tel que pour tout $\lambda \in K$, $u - \lambda Id_E \neq 0$. On suppose que le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur K et que

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{m_2} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont les racines deux à deux distinctes de χ_u . On désigne par $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

Cas où $n = 2$

Dans ce cas on a $\chi_u = (X - \lambda)^2$ ou $\chi_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

- a) Si $\chi_u = (X - \lambda)^2$, soit $x_0 \in E$, tel que $(u - \lambda Id_E)(x_0) \neq 0$. On pose $v_1 = (u - \lambda Id_E)(x_0)$ et $v_2 = x_0$, alors (v_1, v_2) est une base de Jordan de u et la matrice J de u par rapport (v_1, v_2) est sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- b) Si $\chi_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors u est diagonalisable. Donc si v_1 et v_2 sont deux vecteurs non nuls, tels que $u(v_1) = \lambda_1 v_1$ et $u(v_2) = \lambda_2 v_2$, alors (v_1, v_2) est une base formée de vecteurs propres de u et la matrice D par rapport à (v_1, v_2) est sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Cas où $n = 3$

Dans ce cas on a

$$\chi_u = (X - \lambda)^3, \chi_u = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2) \text{ ou } \chi_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$$

- a) Si $\chi_u = (X - \lambda)^3$, on commence par déterminer le sous-espace propre E_λ associé à λ , alors deux cas sont possibles :
- Si $\dim(E_\lambda) = 1$, alors $(u - \lambda Id_E)^2 \neq 0$, donc on peut choisir x_0 , tel que $(u - \lambda Id_E)^2(x_0) \neq 0$. On pose $v_1 = (u - \lambda Id_E)^2(x_0)$, $v_2 = (u - \lambda Id_E)(x_0)$ et $v_3 = x_0$, alors (v_1, v_2, v_3) est une base de Jordan de u et la matrice J par rapport à (v_1, v_2, v_3) est sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- Si $\dim(E_\lambda) = 2$, alors $(u - \lambda Id_E)^2 = 0$. Dans ce cas, on choisit x_0 , tel que $(u - \lambda Id_E)(x_0) \neq 0$ et on choisit $y \in E_\lambda$, tel que $((u - \lambda Id_E)(x_0), y)$ soit une base de E_λ . On pose $v_1 = (u - \lambda Id_E)(x_0)$, $v_2 = x_0$ et $v_3 = y$, alors (v_1, v_2, v_3) est une base de Jordan de u et la matrice J par rapport à (v_1, v_2, v_3) est sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- b) Si $\chi_u = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors on commence par déterminer les sous-espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2} . Deux cas sont donc possibles :
- Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 2$, alors u est diagonalisable. On choisit une base (v_1, v_2) de E_{λ_1} et un vecteur non nul v_3 de E_{λ_2} , alors (v_1, v_2, v_3) est une base formée de vecteurs propres et la matrice D de u par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$, alors u n'est pas diagonalisable. On choisit un vecteur x_0 , tel que $(u - \lambda_1)^2(x_0) = 0$ et $(u - \lambda_1)(x_0) \neq 0$, puis on pose $v_1 = (u - \lambda_1)^2(x_0)$, $v_2 = (u - \lambda_1)(x_0)$ et on choisit un vecteur non nul v_3 de E_{λ_2} , alors (v_1, v_2, v_3) est une base de Jordan de u et la matrice J par rapport à (v_1, v_2, v_3) est sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- c) Si $\chi_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, alors dans ce cas u est diagonalisable. On choisit trois vecteurs non nuls v_1, v_2 et v_3 , tels que $v_1 \in E_{\lambda_1}$, $v_2 \in E_{\lambda_2}$ et $v_3 \in E_{\lambda_3}$, alors (v_1, v_2, v_3) est une base formée de vecteurs propres et la matrice D de u par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Cas où $n = 4$

Dans ce cas, le polynôme caractéristique χ_u s'écrit sous l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} \chi_u &= (X - \lambda)^4 \\ \chi_u &= (X - \lambda_1)^3(X - \lambda_2) \\ \chi_u &= (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)^2 \\ \chi_u &= (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)(X - \lambda_3) \\ \chi_u &= (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)(X - \lambda_4) \end{aligned}$$

- a) Si $\chi_u = (X - \lambda)^4$, on commence par chercher le sous-espace propre E_λ , alors trois cas sont possibles :

Si $\dim(E_\lambda) = 1$, alors $(u - \lambda Id_E)^3 \neq 0$. On choisit alors $x_0 \in E$, tel que $(u - \lambda Id_E)^3(x_0) \neq 0$, puis on pose $v_1 = (u - \lambda Id_E)^3(x_0)$, $v_2 = (u - \lambda Id_E)^2(x_0)$, $v_3 = (u - \lambda Id_E)(x_0)$ et $v_4 = x_0$ alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de Jordan de u et la matrice J par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- Si $\dim(E_\lambda) = 2$ alors $(u - \lambda Id_E)^3 = 0$, donc deux cas sont possibles :
 - Si $(u - \lambda Id_E)^2 = 0$, on choisit deux vecteurs x_0 et y_0 , tels que le système (x_0, y_0) soit libre, $(u - \lambda Id_E)(x_0) \neq 0$ et $(u - \lambda Id_E)(y_0) \neq 0$, puis on pose

$$v_1 = (u - \lambda Id_E)(x_0), v_2 = x_0, v_3 = (u - \lambda Id_E)(y_0) \text{ et } v_4 = y_0$$

alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de Jordan de u et la matrice J par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- Si $(u - \lambda Id_E)^2 \neq 0$, on choisit x_0 , tel que $(u - \lambda Id_E)^2(x_0) \neq 0$ et on choisit $y \in E_\lambda$, tel que $((u - \lambda Id_E)^2(x_0), y)$ soit une base de E_λ , puis on pose

$$v_1 = (u - \lambda Id_E)^2(x_0), v_2 = (u - \lambda Id_E)(x_0), v_3 = x_0 \text{ et } v_4 = y$$

alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de Jordan de u et la matrice J par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- Si $\dim(E_\lambda) = 3$ alors $(u - \lambda Id_E)^2 = 0$. On choisit $x_0 \in E$, tel que $(u - \lambda Id_E)(x_0) \neq 0$ et on choisit deux vecteurs y et z dans E_λ , tels que $((u - \lambda Id_E)(x_0), y, z)$ soit une base de E_λ , puis on pose

$$v_1 = (u - \lambda Id_E)(x_0), v_2 = x_0, v_3 = y \text{ et } v_4 = z$$

alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de Jordan de u et la matrice J par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- b)** Si $\chi_u = (X - \lambda_1)^3(X - \lambda_2)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on commence par chercher le sous-espace propre E_{λ_1} , alors trois cas sont possibles :

Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 3$, alors u est diagonalisable, donc si (v_1, v_2, v_3) est une base de E_{λ_1} et si v_4 est un vecteur non nul de E_{λ_2} , alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de E formée de vecteurs propres de u . La matrice D de u par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 2$, alors u n'est pas diagonalisable. On choisit x_0 , tel que $(u - \lambda Id_E)^2(x_0) = 0$ et $(u - \lambda Id_E)(x_0) \neq 0$ et on choisit $y \in E_{\lambda_1}$, tel que $((u - \lambda Id_E)(x_0), y)$ soit une base de E_{λ_1} , puis on pose

$$v_1 = (u - \lambda Id_E)(x_0), \quad v_2 = x_0, \quad v_3 = y \quad \text{et} \quad v_4 \in E_{\lambda_2}, \quad \text{avec} \quad v_4 \neq 0$$

alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de Jordan de u et la matrice J par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$, soit $x_0 \in E$, tel que $(u - \lambda Id_E)^3(x_0) = 0$ et $(u - \lambda Id_E)^2(x_0) \neq 0$, puis on pose $v_1 = (u - \lambda Id_E)^2(x_0)$, $v_2 = (u - \lambda Id_E)(x_0)$, $v_3 = x_0$ et $v_4 \in E_{\lambda_2}$, $v_4 \neq 0$, alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de Jordan de u et la matrice J par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- c) Si $\chi_u = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)^2$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on commence par chercher les sous-espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2} , alors trois cas sont possibles :

Si $\dim(E_{\lambda_1}) = \dim(E_{\lambda_2}) = 2$, alors u est diagonalisable, donc si (v_1, v_2) est une base de E_{λ_1} et si (v_3, v_4) est une base de E_{λ_2} , alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de E formée de vecteurs propres de u . La matrice D de u par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$ et $\dim(E_{\lambda_2}) = 2$, alors u n'est pas diagonalisable. On choisit x_0 , tel que $(u - \lambda_1 \text{Id}_E)^2(x_0) = 0$ et $(u - \lambda_1 \text{Id}_E)(x_0) \neq 0$ et on choisit une base (v_3, v_4) de E_{λ_2} , puis on pose

$$v_1 = (u - \lambda_1 \text{Id}_E)(x_0) \text{ et } v_2 = x_0$$

alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de Jordan de u et la matrice J par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Si $\dim(E_{\lambda_1}) = \dim(E_{\lambda_2}) = 1$, soit $x_0 \in E$, avec $(u - \lambda_1 \text{Id}_E)^2(x_0) = 0$ et $(u - \lambda_1 \text{Id}_E)(x_0) \neq 0$, et soit $y_0 \in E$, tel que $(u - \lambda_2 \text{Id}_E)^2(y_0) = 0$ et $(u - \lambda_1 \text{Id}_E)(y_0) \neq 0$, alors on pose

$$v_1 = (u - \lambda_1 \text{Id}_E)(x_0), v_2 = x_0, v_3 = (u - \lambda_2 \text{Id}_E)(y_0) \text{ et } v_4 = y_0$$

alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de Jordan de u et la matrice J par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- d) Si $\chi_u = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, on commence par chercher les sous-espaces propres E_{λ_1} , E_{λ_2} et E_{λ_3} , alors deux cas sont possibles :

Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 2$, alors u est diagonalisable. Donc si on choisit une base (v_1, v_2) de E_{λ_1} , un vecteur non nul de E_{λ_2} et un vecteur non nul de E_{λ_3} , alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de E formée de vecteurs propres de u . La matrice D de u par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$, alors u n'est pas diagonalisable. On choisit un vecteur x_0 , tel que $(u - \lambda_1 \text{Id}_E)^2(x_0) = 0$ et $(u - \lambda_1 \text{Id}_E)(x_0) \neq 0$ et on choisit deux vecteurs non nuls $v_3 \in E_{\lambda_2}$ et $v_4 \in E_{\lambda_3}$, puis on pose $v_1 = (u - \lambda_1 \text{Id}_E)(x_0)$ et $v_2 = x_0$, alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une

base de Jordan de u et la matrice J par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- e) Si $\chi_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)(X - \lambda_4)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4$, alors u est diagonalisable. On choisit quatre vecteurs non nuls v_1, v_2, v_3 et v_4 , tels que $v_1 \in E_{\lambda_1}$, $v_2 \in E_{\lambda_2}$, $v_3 \in E_{\lambda_3}$ et $v_4 \in E_{\lambda_4}$, alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de E formée de vecteurs propres de u . La matrice D de u par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

CHAPITRE 6

APPLICATIONS DE LA RÉDUCTION

6.1 Calcul de l'exponentielle d'une matrice

6.1.1 Norme d'une matrice

Proposition 6.1.1

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose

$$N(A) = \sup \left(\left\{ \frac{\|AX\|}{\|X\|} : X \in \mathbb{C}^n, \text{ avec } X \neq 0 \right\} \right) = \sup_{\substack{X \in \mathbb{C}^n \\ X \neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

où $\|\cdot\|$ est l'une des normes usuelle de $\mathbb{C}^n$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$. Alors

i) Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $N(A) = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$.

ii) L'application $N : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.

iii) $N(I) = 1$, où I est la matrice identité.

iv) $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \forall B \in M_n(\mathbb{C}), N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Démonstration. i) Comme $N(A) = \sup_{\substack{X \in \mathbb{C}^n \\ X \neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$, alors $\sup_{\|X\|=1} \|AX\| \leq N(A)$.

Soit $X \in \mathbb{C}^n$, tel que $X \neq 0$, on pose $Y = \frac{X}{\|X\|}$, alors $\|Y\| = 1$, donc

$\|AY\| \leq \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$. On en déduit que $\frac{\|AX\|}{\|X\|} \leq \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$, ceci pour tout $X \neq 0$, donc $N(A) \leq \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$.

ii) Si $N(A) = 0$, alors pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, on a $\|AX\| = 0$, donc pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, on a $AX = 0$, par suite, $A = 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors on a

$$N(\lambda A) = \sup_{\|X\|=1} \|(\lambda A)X\| = |\lambda| \sup_{\|X\|=1} \|AX\| = |\lambda|N(A)$$

Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B \in M_n(\mathbb{C})$, alors on a

$$\begin{aligned} N(A+B) &= \sup_{\|X\|=1} \|AX + BX\| \\ &\leq \sup_{\|X\|=1} \|AX\| + \sup_{\|X\|=1} \|BX\| \leq N(A) + N(B) \end{aligned}$$

iii) Pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, on a $IX = X$, donc $N(I) = 1$.

iv) Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$, $B \in M_n(\mathbb{C})$ et $X \in \mathbb{C}^n$, alors on a

$$\|ABX\| = \|A(BX)\| \leq N(A)\|BX\| \leq N(A)N(B)\|X\|$$

on en déduit donc que $N(AB) \leq N(A)N(B)$. □

Remarque 76

1. Dans la suite, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $N(A) = \|A\|$.
2. $(M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ est donc une algèbre normée de dimension finie, donc $M_n(\mathbb{C})$ est complet, c'est à dire, $M_n(\mathbb{C})$ est une algèbre de Banach.
3. Rappelons qu'une suite $(A_k)_{k \geq 0}$ de $M_n(\mathbb{C})$ est dite de Cauchy, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, (k \geq N \text{ et } m \geq N) \implies \|A_k - A_m\| \leq \varepsilon$$

6.1.2 Exponentielle d'une matrice

Rappelons que la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ comme étant la fonction réciproque du logarithme, puis grace à la formule de Taylor, on montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Pour $z \in \mathbb{C}$, par analogie, en utilisant les séries entières, on définit l'exponentielle de z par $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Dans la suite, nous allons utiliser la même analogie pour définir l'exponentielle d'une matrice.

Proposition 6.1.2

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est convergente.

Démonstration. Comme $M_n(\mathbb{C})$ est un espace normé complet, alors toute série de $M_n(\mathbb{C})$ absolument convergente est convergente. On a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$$

puis comme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente, donc elle est convergente. $\square$

Définition 6.1.1

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on définit l'exponentielle de A , par

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Exemples

1. Si N est une matrice nilpotente d'indice q , alors on a

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{k!}$$

2. Si D est une matrice diagonale, avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors on a

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

3. Si A est une matrice diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P , telles que $A = PDP^{-1}$. Dans ce cas, on voit facilement que $\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$.
4. Si A est une matrice carrée d'ordre n n'admettant qu'une seule valeur propre λ , alors on a $\chi_A = (X - \lambda)^n$, donc d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A - \lambda I$ est une matrice nilpotente. Comme $A = \lambda I + (A - \lambda I)$, alors d'après la proposition 6.1.3 ci-dessous, on a

$$\exp(A) = \exp(\lambda I) \exp(A - \lambda I) = e^\lambda \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} (A - \lambda I)^k$$

où m est l'indice de nilpotence de $A - \lambda I$ et où $\exp(\lambda I) = \exp(\lambda)I$.

5. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, telle que $A^2 - 3A + 2I = 0$. On se propose de déterminer $\exp(A)$ en calculant A^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. Pour cela, on fait la division euclidienne de X^k par $X^2 - 3X + 2$, alors on a

$$X^k = (X^2 - 3X + 2)Q_k + R_k, \text{ avec } \deg(R_k) < 2$$

Comme $\deg(R_k) < 2$, alors il existe $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, tel que $R_k = a_k X + b_k$. On a $A^2 - 3A + 2I = 0$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k = a_k A + b_k I$. Pour le calcul de a_k et b_k on remarque que 1 et 2 sont racines de $X^2 - 3X + 2$, puis en substituant X à 1 et 2, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 1 = a_k + b_k \\ 2^k = 2a_k + b_k \end{cases}$$

on en déduit donc que $a_k = 2^k - 1$ et $b_k = 2 - 2^k$, par suite on aura

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k - 1}{k!} \right) A + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 - 2^k}{k!} \right) I$$

Ainsi, on aura $\exp(A) = (e^2 - e)A + (2e - e^2)I$

Proposition 6.1.3

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$, telles que $AB = BA$, alors on a

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$$

Démonstration. Rappelons que le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ d'une algèbre de Banach, est la série de terme général w_n est défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p}$$

Rappelons aussi que si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ est convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right)$$

Donc en particulier, si on pose $u_n = \frac{A^n}{n!}$ et $v_n = \frac{B^n}{n!}$, alors d'après la proposition 6.1.2, les séries $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ sont absolument convergentes et comme $M_n(\mathbb{C})$ est une algèbre de Banach, alors leur produit de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ est convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \right) = \exp(A) \exp(B)$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$w_n = \sum_{p=0}^n \frac{A^p}{p!} \frac{B^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} A^p B^{n-p}$$

Et comme $AB = BA$, alors on a $\sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} A^p B^{n-p} = (A+B)^n$, on en déduit donc que $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \exp(A+B)$ et ainsi on a $\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$. $\square$

Remarque 77

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors A possède une décomposition de Dunford sous la forme $A = D + N$, où D est une matrice diagonalisable et N une matrice nilpotente, telles que $DN = ND$. Donc d'après la proposition précédente, on a

$$\exp(A) = \exp(D) \exp(N)$$

Proposition 6.1.4

Soit K un corps commutatif. Pour toute matrice $A \in M_n(K)$, on pose $K[A] = \{P(A) : P \in K[X]\}$. Alors $K[A]$ est un K -espace vectoriel de dimension finie, avec $\dim(K[A]) = m$, où m est le degré du polynôme minimal de A .

Démonstration. Il est facile de vérifier que $K[A]$ est un K -espace vectoriel. Soit M_A le polynôme minimal de A et soit $B \in K[A]$, alors il existe $P \in K[X]$, tel que $B = P(A)$. Faisons la division euclidienne de P par M_A , alors on a $P = QM_A + R$, avec $\deg(R) < \deg(M_A)$. Soit $m = \deg(M_A)$, alors $R = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{m-1} X^{m-1}$, avec $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in K$. Comme $M_A(A) = 0$, alors $B = R(A) = \alpha_0 + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{m-1} A^{m-1}$. On en déduit donc que $\{I, A, \dots, A^{m-1}\}$ est une partie génératrice de $K[A]$, de plus si on suppose que $\alpha_0 + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{m-1} A^{m-1} = 0$, alors $R(A) = 0$, par suite M_A divise R , avec $\deg(R) < \deg(M_A)$, donc $R = 0$ et par conséquent, on aura $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$. Ainsi, on voit que $(I, A, \dots, A^{m-1})$ est une base de $K[A]$, donc $\dim(K[A]) = m$. $\square$

Corollaire 6.1.1

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, il existe un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, tel que $\exp(A) = P(A)$.

Démonstration. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et soit $(A_p)_{p \geq 0}$ la suite définie pour tout $p \in \mathbb{N}$ par $A_p = \sum_{n=0}^p \frac{A^n}{n!}$. On a $\exp(A) = \lim_{p \rightarrow \infty} A_p$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $A_p \in \mathbb{C}[A]$, avec $\mathbb{C}[A]$ fermé, car $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace de dimension finie, par suite, $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$, donc il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que $\exp(A) = P(A)$. $\square$

Remarque 78

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et soit $\chi_A = (X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{m_2} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont deux à deux distincts. Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on pose $P_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r (X - \lambda_j)^{m_j}$, alors $P_1, P_2, \dots, P_r$ sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bezout, il existe $Q_1, Q_2, \dots, Q_r \in \mathbb{C}[X]$, tels que

$$Q_1 P_1 + Q_2 P_2 + \cdots + Q_r P_r = 1$$

Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on pose $\Pi_i = Q_i(A)P_i(A)$, alors d'après le théorème 5.6.1, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, Π_i est la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r N_j$, où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a $N_i = \ker[(A - \lambda_i I)^{m_i}]$.

1. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a

$$(A - \lambda_i I)^{m_i} \Pi_i = (A - \lambda_i I)^{m_i} P_i(A) Q_i(A) = Q_i(A) \chi_A(A) = 0$$

Donc pour tout $k \geq m_i$, on a $(A - \lambda_i I)^k \Pi_i = 0$, par suite, on aura

$$\exp(A - \lambda_i I) \Pi_i = \left(\sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{(A - \lambda_i I)^k}{k!} \right) \Pi_i$$

On en déduit donc que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a

$$\begin{aligned} \exp(A) \Pi_i &= \exp(\lambda_i I + (A - \lambda_i I)) \Pi_i = e^{\lambda_i} \exp(A - \lambda_i I) \Pi_i \\ &= e^{\lambda_i} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{(A - \lambda_i I)^k}{k!} \Pi_i \end{aligned}$$

Or, on a $\Pi_1 + \Pi_2 + \dots + \Pi_r = I$, donc on a

$$\exp(A) = \exp(A) \Pi_1 + \exp(A) \Pi_2 + \dots + \exp(A) \Pi_r$$

par conséquent, on a

$$\boxed{\exp(A) = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{(A - \lambda_i I)^k}{k!} \Pi_i}$$

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, en considérant la matrice tA au lieu de A , alors tA a pour valeurs propres $t\lambda_1, t\lambda_2, \dots, t\lambda_r$ de plus A et tA ont mêmes projecteurs spectraux, donc on aura

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tA) = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k (A - \lambda_i I)^k}{k!} \Pi_i}$$

3. Dans le cas où A n'a qu'une seule valeur propre λ , on a $\chi_A = (X - \lambda)^n$. Donc d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $(A - \lambda I)^n = 0$, par suite, $A - \lambda I$ est une matrice nilpotente. Soit q l'indice de nilpotence de $A - \lambda I$, alors en remarquant que $A = \lambda I + (A - \lambda I)$, on aura

$$\exp(A) = e^{\lambda} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(A - \lambda I)^k}{k!}$$

par suite, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(tA) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k}{k!}$$

6.2 Systèmes et équations différentiels linéaires

6.2.1 Définition d'un système différentiel

Définition 6.2.1

Un système différentiel est un système d'équations différentielles s'écrivant sous la forme suivante :

$$(S) : \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

où pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction inconnue de classe C^1 et où $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Remarque 79

Posons

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

alors $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est une fonction inconnue de classe C^1 et le système (S) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$$

Par analogie à la dimension 1, on montre que la solution générale de ce système s'écrit sous la forme suivante :

$$X(t) = \exp(tA)X_0, \text{ avec } X_0 \in \mathbb{C}^n$$

6.2.2 Résolution pratique d'un système différentiel

Méthode utilisant directement l'exponentielle

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de A , deux à deux distincts, de multiplicités respectives $m_1, m_2, \dots, m_r$, alors d'après la remarque 6.3, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(tA)X_0 = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k (A - \lambda_i I)^k}{k!} \Pi_i X_0$$

où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, Π_i est la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r N_j$, où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a $N_i = \ker[(A - \lambda_i I)^{m_i}]$.

Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ et pour chaque $k \in \{1, 2, \dots, m_i - 1\}$, on pose

$$X_k = \frac{(A - \lambda_i I)^k}{k!} \Pi_i X_0$$

alors on a $X_k \in N_i$, donc la solution général du système s'écrit sous la forme :

$$X(t) = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} P_i(t)$$

où pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $P_i(t) = \sum_{k=0}^{m_i-1} t^k X_k$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $m_i - 1$ et à coefficients dans N_i .

Remarque 80

1. Si A est une matrice diagonalisable et si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres de A , deux à deux distincts, alors la solution générale du système $X'(t) = AX(t)$ s'écrit sous la forme :

$$X(t) = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} V_i$$

où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, V_i est un vecteur propre quelconque associé à la valeur propre λ_i . Donc si pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $(V_{ij})_{1 \leq j \leq m_i}$ est une base de E_{λ_i} , le sous-espace propre associé à λ_i , et si on pose

$V_i = \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} V_{ij}$, alors on a

$$X(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} e^{\lambda_i t} V_{ij}$$

De plus pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ et pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, m_i\}$, il est facile de voir que $e^{\lambda_i t} V_{ij}$ est une solution du système et que $(e^{\lambda_i t} V_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq m_i}}$ est une base de l'ensemble des solutions du système.

2. Si A n'est pas diagonalisable, et si pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on considère une base $(V_{ij})_{1 \leq j \leq m_i}$ de N_i , le sous-espace caractéristique associé à λ_i , et pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, m_i\}$, on pose

$$X_{ij}(t) = e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k (A - \lambda_i I)^k}{k!} V_{ij}$$

alors il est facile de voir que chaque X_{ij} est une solution du système et $(X_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq m_i}}$ est une base de l'ensemble des solutions du système. Ainsi

pour toute solution X du système, il existe $(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m_1}, \dots, \alpha_{r1}, \dots, \alpha_{rm_r}) \in \mathbb{R}^n$, tel que

$$X(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} X_{ij}(t)$$

Les α_{ij} sont déterminés à l'aide de la condition initiale $X(0) = X_0$.

Exemples

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, alors A possède deux valeurs propres distinctes 1 et 2, donc A est diagonalisable. La solution du système $X'(t) = AX(t)$ est sous la forme $X(t) = e^t V_1 + e^{2t} V_2$, où V_1 et V_2 sont des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 1 et 2. On effectuant le calcul on voit que $V_1 = \alpha e_1$ et $V_2 = \beta(e_1 + e_2)$, où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose $X(0) = x_0 e_1 + y_0 e_2$, donc on a $X(0) = x_0 e_1 + y_0 e_2 = (\alpha + \beta)e_1 + \beta e_2$. On en déduit donc que $\alpha = x_0 - y_0$ et $\beta = y_0$, par suite, on a

$$X(t) = (x_0 e^t + y_0 (e^{2t} - e^t))e_1 + y_0 e^{2t} e_2$$

En particulier, on a

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

2. Soit A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminons la solution du système différentiel homogène $X'(t) = AX(t)$ et déduisons $\exp(tA)$.

On a $\chi_A = (X - 2)^2(X - 1)$, $(e_1 + e_3, e_2 + e_3)$ une base de E_2 et $e_1 + e_2 + 3e_3$ une base de E_1 . Donc d'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} X(t) &= \alpha e^{2t}(e_1 + e_3) + \beta e^{2t}(e_2 + e_3) + \gamma e^t(e_1 + e_2 + 3e_3) \\ &= (\alpha e^{2t} + \gamma e^t)e_1 + (\beta e^{2t} + \gamma e^t)e_2 + (\alpha e^{2t} + \beta e^{2t} + 3\gamma e^t)e_3 \end{aligned}$$

On pose $X(0) = x_0e_1 + y_0e_2 + z_0e_3$, donc on a

$$X(0) = x_0e_1 + y_0e_2 + z_0e_3 = (\alpha + \gamma)e_1 + (\beta + \gamma)e_2 + (\alpha + \beta + 3\gamma)e_3$$

par suite, on a

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = x_0 \\ \beta + \gamma = y_0 \\ \alpha + \beta + 3\gamma = z_0 \end{cases}$$

On en déduit que $\alpha = 2x_0 + y_0 - z_0$, $\beta = x_0 + 2y_0 - z_0$ et $\gamma = -x_0 - y_0 + z_0$.
Donc on a $X(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3$, avec

$$\begin{cases} x(t) = (2e^{2t} - e^t)x_0 + (e^{2t} - e^t)y_0 + (e^t - e^{2t})z_0 \\ y(t) = (e^{2t} - e^t)x_0 + (2e^{2t} - e^t)y_0 + (e^t - e^{2t})z_0 \\ z(t) = (3e^{2t} - 3e^t)x_0 + (3e^{2t} - 3e^t)y_0 + (3e^t - 2e^{2t})z_0 \end{cases}$$

Comme $X(t) = \exp(tA)X_0$, alors on a

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

3. Soit A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminons la solution du système différentiel homogène $X'(t) = AX(t)$ et déduisons $\exp(tA)$. On a $\chi_A = (X - 2)^2(X - 1)$ et on a

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc en effectuant le calcul, on voit que $2e_1 + e_3$ est une base de E_1 , $2e_1 + e_2 + e_3$ est une base de E_2 , donc A n'est pas diagonalisable. On

voit facilement que $(e_1, e_2 + e_3)$ est une base de $\ker[(A - 2I)^2]$ donc d'après ce qui précède, on a $X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t) + \gamma X_3(t)$, avec

$$\begin{cases} X_1(t) = e^t(2e_1 + e_3) \\ X_2(t) = e^{2t}(e_1 + t(A - 2I)e_1) = e^{2t}(e_1 + t(-2e_1 - e_2 - e_3)) \\ X_3(t) = e^{2t}(e_2 + e_3 + t(A - 2I)(e_2 + e_3)) \\ \quad = e^{2t}(e_2 + e_3 + t(4e_1 + 2e_2 + 2e_3)) \end{cases}$$

Ainsi, on a $X(t) = x_1(t)e_1 + x_2(t)e_2 + x_3(t)e_3$, avec

$$\begin{cases} x_1(t) = 2\alpha e^t + \beta e^{2t} - 2\beta t e^{2t} + 4\gamma t e^{2t} \\ x_2(t) = -\beta t e^{2t} + \gamma e^{2t} + 2\gamma t e^{2t} \\ x_3(t) = \alpha e^t - \beta t e^{2t} + \gamma e^{2t} + 2\gamma t e^{2t} \end{cases}$$

On a $X(0) = X_0 = x_0 e_1 + y_0 e_2 + z_0 e_3 = (2\alpha + \beta)e_1 + \gamma e_2 + (\alpha + \gamma)e_3$, par suite, on obtient

$$\alpha = z_0 - y_0, \quad \beta = x_0 + 2y_0 - 2z_0 \text{ et } \gamma = y_0$$

et on en déduit que

$$\begin{cases} x_1(t) = (e^{2t} - 2te^{2t})x_0 + (2e^{2t} - 2e^t)y_0 + (2e^t - 2e^{2t} + 4te^{2t})z_0 \\ x_2(t) = -te^{2t}x_0 + e^{2t}y_0 + 2te^{2t}z_0 \\ x_3(t) = -te^{2t}x_0 + (e^{2t} - e^t)y_0 + (e^t + 2te^{2t})z_0 \end{cases}$$

Comme $X(t) = \exp(tA)X_0$, alors on a

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{2t} - 2te^{2t} & 2e^{2t} - 2e^t & 2e^t - 2e^{2t} + 4te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t} & 2te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t} - e^t & e^t + 2te^{2t} \end{pmatrix}$$

Méthode utilisant la réduction de Jordan

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, avec $\chi_A = (X - \lambda_1)^{m_1}(X - \lambda_2)^{m_2} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$. Alors d'après le théorème de Jordan, il existe une matrice de Jordan J et une matrice inversible P , telles que $A = PJP^{-1}$.

On considère le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ et on pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$, alors on aura

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}(AX(t)) = (P^{-1}AP)Y(t) = JY(t)$$

Ainsi, on obtient le nouveau système $Y'(t) = JY(t)$, avec

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A non nécessairement distinctes et où chaque λ_i apparaît sur la diagonale autant de fois que sa multiplicité, et où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$. Ainsi le nouveau système différentiel s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) + \alpha_1 y_2(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}'(t) = \lambda_{n-1} y_{n-1}(t) + \alpha_{n-1} y_n(t) \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases}$$

Pour la résolution de ce système, on commence par la dernière équation et on remonte, puis on aura $X(t) = PY(t)$.

Exemples

Reprenons la matrice A de l'exemple précédent :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour la résolution de $X'(t) = AX(t)$, on commence par la jordanisation de A . On a $\chi_A = (X - 2)^2(X - 1)$, $2e_1 + e_3$ une base de E_1 et e_1 est un vecteur, tel que $(A - 2I)^2(e_1) = 0$ et $(A - 2I)(e_1) \neq 0$, donc si on pose $v_1 = (A - 2I)(e_1)$, $v_2 = e_1$ et $v_3 = 2e_1 + e_3$, alors on aura $A = PJP^{-1}$, avec

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient alors le système suivant

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) \\ y_3'(t) = y_3(t) \end{cases}$$

La solution de ce système est donc définie par

$$\begin{cases} y_1(t) = \alpha e^{2t} + \beta t e^{2t} \\ y_2(t) = \beta e^{2t} \\ y_3(t) = \gamma e^t \end{cases}$$

On a $X(t) = PY(t)$, donc on aura

$$\begin{cases} x_1(t) = -2y_1(t) + y_2(t) + 2y_3(t) = -2\alpha e^{2t} - 2\beta t e^{2t} + \beta e^{2t} + 2\gamma e^t \\ x_2(t) = -y_1(t) = -\alpha e^{2t} - \beta t e^{2t} \\ x_3(t) = -y_1(t) + y_3(t) = -\alpha e^{2t} - \beta t e^{2t} + \gamma e^t \end{cases}$$

On a alors $X_0 = x_0 e_1 + y_0 e_2 + z_0 e_3 = (-2\alpha + \beta + 2\gamma)e_1 - \alpha e_2 + (\gamma - \alpha)e_3$, donc on trouve $\alpha = -y_0$, $\beta = x_0 - 2z_0$ et $\gamma = z_0 - y_0$. On en déduit donc que

$$\begin{cases} x_1(t) = (e^{2t} - 2te^{2t})x_0 + (2e^{2t} - 2e^t)y_0 + (2e^t - 2e^{2t} + 4te^{2t})z_0 \\ x_2(t) = -te^{2t}x_0 + e^{2t}y_0 + 2te^{2t}z_0 \\ x_3(t) = -te^{2t}x_0 + (e^{2t} - e^t)y_0 + (e^t + 2te^{2t})z_0 \end{cases}$$

Comme $X(t) = \exp(tA)X_0$, alors on a

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{2t} - 2te^{2t} & 2e^{2t} - 2e^t & 2e^t - 2e^{2t} + 4te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t} & 2te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t} - e^t & e^t + 2te^{2t} \end{pmatrix}$$

6.2.3 Solutions réelles

Soit P un polynôme à coefficients réels et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, alors on a $P(\bar{\lambda}) = \overline{P(\lambda)}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $P^{(k)}(\bar{\lambda}) = \overline{P^{(k)}(\lambda)}$. Donc si λ est une racine de P de multiplicité m , alors $\bar{\lambda}$ est une racine de P de multiplicité m .

On considère le système différentiel $(S) : X'(t) = AX(t)$, où A est une matrice réelle dont le polynôme caractéristique χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de χ_A de multiplicité m et soit $(v_1, \dots, v_m)$ une base de $\ker[(A - \lambda I)^m]$, alors on voit aisément que $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$ est une base de $\ker[(A - \bar{\lambda} I)^m]$, alors d'après ce qui précède, on sait que tout $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, X_i et $\bar{X}_i$ sont deux solutions complexes de (S) , avec

$$X_i(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k v_i}{k!} \quad \text{et} \quad \bar{X}_i(t) = e^{\bar{\lambda} t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k \bar{v}_i}{k!}$$

Donc $Y_i = \frac{X_i + \bar{X}_i}{2}$ et $Z_i = \frac{X_i - \bar{X}_i}{2i}$ sont des solutions réelles de (S) , ce sont la partie réelle et la partie imaginaire de X_i . Donc si on pose $\lambda = \alpha + i\beta$ et

$v_i = v_{i1} + iv_{i2}$, où α, β sont des nombres réels et v_{i1}, v_{i2} sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors on aura

$$Y_i(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k v_{i1}}{k!} - e^{\alpha t} \sin(\beta t) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k v_{i2}}{k!}$$

et $Z_i(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k v_{i1}}{k!} + e^{\alpha t} \cos(\beta t) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k v_{i2}}{k!}$

Ainsi pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $aY_i + bZ_i$ est une solution réelle qui s'écrit sous la forme :

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k (av_{i1} + bv_{i2})}{k!} + e^{\alpha t} \sin(\beta t) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k (bv_{i1} - av_{i2})}{k!}$$

Cette expression peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$aY_i(t) + bZ_i(t) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) P_i(t) + \sin(\beta t) Q_i(t))$$

où P_i et Q_i sont deux polynômes de degré $\leq m - 1$ et à coefficients dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les racines complexes non réelles de χ_A et soit $\mu_1, \dots, \mu_q$ les racines réelles de χ_A , alors on a

$$\chi_A = (X - \lambda_1)^{m_1} (X - \overline{\lambda_1})^{m_1} \dots (X - \lambda_p)^{m_p} (X - \overline{\lambda_p})^{m_p} (X - \mu_1)^{n_1} \dots (X - \mu_q)^{n_q}$$

Alors la solution réelle générale de (S) s'écrit sous la forme suivante :

$$X(t) = \sum_{i=1}^p e^{\alpha_i t} (\cos(\beta_i t) P_i(t) + \sin(\beta_i t) Q_i(t)) + \sum_{i=1}^q e^{\mu_i t} R_i(t)$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on a $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$.

6.3 Equations différentielles linéaires à coefficients constants

6.3.1 Equation homogène

Définition 6.3.1

Une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants s'écrit sous la forme suivante :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

où $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ et où $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction inconnue.

Résolution pratique

On considère l'équation différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants

$$(E) : y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

Soit $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction définie par $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ et soit A la matrice

carrée d'ordre n définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors l'équation (E) est équivalente au système différentiel $Y' = AY$. En effet on a

$$Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AY = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ -a_0y - a_1y' - \dots - a_{n-1}y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Donc $Y' = AY$, si et seulement si, $y^{(n)} = -a_0y - a_1y' - \dots - a_{n-1}y^{(n-1)}$.
En faisant un calcul par récurrence sur n , on obtient le polynôme caractéristique χ_A de A . On a alors

$$\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

Définition 6.3.2

L'équation $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$ s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$.

Remarque 81

1. Si $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$ n'a que des racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ de multiplicités respectives $m_1, m_2, \dots, m_p$, alors d'après ce qui précède, la solution générale de l'équation $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$ s'écrit sous la forme suivante :

$$y(t) = \sum_{i=1}^p e^{\lambda_i t} P_i(t)$$

où pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, P_i est un polynôme à coefficients réels, avec $\deg(P_i) \leq m_i - 1$.

2. Si les racines de $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$ ne sont pas toutes réelles, alors $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$ s'écrit sous la forme :

$$(r - \lambda_1)^{m_1} (r - \bar{\lambda}_1)^{m_1} \dots (r - \lambda_p)^{m_p} (r - \bar{\lambda}_p)^{m_p} (r - \mu_1)^{n_1} \dots (r - \mu_q)^{n_q} = 0$$

donc d'après ce qui précède, la solution réelle du système s'écrit sous la forme :

$$X(t) = \sum_{i=1}^p e^{\alpha_i t} (\cos(\beta_i t) P_i(t) + \sin(\beta_i t) Q_i(t)) + \sum_{i=1}^q e^{\mu_i t} R_i(t)$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on a $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$, P_i et Q_i sont des polynômes à coefficients réels, avec $\deg(P_i) \leq m_i - 1$ et $\deg(Q_i) \leq m_i - 1$. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, $\deg(R_i) \leq n_i - 1$.

Exemples

L'équation $y'' + by' + cy = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4c$, alors trois cas sont possibles :

$\Delta > 0$, alors $r^2 + br + c = 0$ possède deux racines réelles λ_1 et λ_2 , par suite la solution générale est définie par

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$$

$\Delta = 0$, alors $r^2 + br + c = 0$ possède une racine double λ , par suite la solution générale est définie par

$$y(t) = (\alpha t + \beta) e^{\lambda t}$$

$\Delta < 0$, alors $r^2 + br + c = 0$ possède deux racines complexes λ et $\bar{\lambda}$, donc si on pose $\lambda = \alpha + i\beta$, alors la solution réelle est définie par

$$y(t) = (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) e^{\alpha t}$$

6.4 Exercices

Exercice 92

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$, tel que $P(u) = 0$. On suppose que $P = QR$, avec Q et R premiers entre eux. Montrer que $\ker(Q(u)) = \text{Im}(R(u))$.

Exercice 93

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, tel que $P(u) = 0$, $P'(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$.

Exercice 94

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et P un polynôme non constant de $K[X]$.

1. Montrer que $P(u)$ est inversible, si et seulement si, P et M_u sont premiers entre eux.
2. Dans le cas où $P(u)$ est inversible, montrer que $P(u)^{-1}$ est un polynôme en u .
3. On suppose que K est algébriquement clos et que v est un autre endomorphisme de E . Montrer que

$$\chi_u(v) \text{ est inversible } \iff Sp(u) \cap Sp(v) = \emptyset$$

où pour tout endomorphisme w , $Sp(w)$ désigne le spectre de w , c'est l'ensemble de toutes les valeurs propres de w .

Exercice 95

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E dont le polynôme minimal s'écrit sous la forme

$$M_u = a_0 + a_1X + \cdots + a_{m-1}X^{m-1} + X^m$$

On dit que u est irréductible, si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u sont $\{0\}$ et E . Dans la suite on se propose de montrer que u est irréductible, si et seulement si, le polynôme caractéristique de u est irréductible sur K .

1. On suppose que u est irréductible.
 - a) Montrer que u est inversible.
 - b) Montrer que le polynôme minimal M_u de u est irréductible.
 - c) Soit $x \in E$, avec $x \neq 0$. Montrer que $(u^{m-1}(x), \dots, u(x), x)$ est un système générateur de E et en déduire que $\chi_u = M_u$.
2. On suppose que χ_u est irréductible. Montrer que $\chi_u = M_u$ et en déduire que u est irréductible.

Exercice 96

Soient K un corps commutatif de caractéristique nulle, E un K -espace vectoriel, u et v deux endomorphismes de E , tels que $u \circ v - v \circ u = Id_E$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u \circ v^n - v^n \circ u = nv^{n-1}$.
2. Montrer que pour tout polynôme $P \in K[X]$, on a

$$u \circ P(v) - P(v) \circ u = P'(v)$$

3. On suppose que E est de dimension finie. Montrer par un choix convenable de $P \in K[X]$, qu'il n'existe aucun couple (u, v) d'endomorphismes, tel que $u \circ v - v \circ u = Id_E$.

Exercice 97

Soit B la matrice de $M_{2n}(\mathbb{C})$ défini par $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$, où $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Déterminer χ_B en fonction de χ_A .

Exercice 98

Soient E un K -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E .

1. Soit F un sous-espace stable par u et soit $\bar{u}$ l'application définie par

$$\begin{aligned} \bar{u} : E/F &\longrightarrow E/F \\ \bar{x} &\longmapsto \bar{u}(\bar{x}) = \overline{u(x)} \end{aligned}$$

- a) Vérifier que $\bar{u}$ est bien définie et que $\bar{u}$ est un endomorphisme de E/F .

- b) Soit $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m)$ une base de E/F . Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ est libre et que $E = F \oplus \text{Vect}(\{e_1, e_2, \dots, e_m\})$.
2. On suppose que u est non inversible puis on prend $F = \ker(u)$ et on considère l'endomorphisme $\bar{u} : E/\ker(u) \rightarrow E/\ker(u)$ définie dans la question précédente. Soient $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m)$ une base de $E/\ker(u)$, A la matrice de $\bar{u}$ par rapport à cette base et M la matrice de u par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$, où $(e_{m+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\ker(u)$.
- a) Vérifier que $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$, où $A \in M_m(K)$ et $B \in M_{n-m,m}(K)$.
- b) Vérifier que $\chi_u = X^{n-m}\chi_{\bar{u}}$.
- c) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $M^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ BA^{k-1} & 0 \end{pmatrix}$.
- d) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\text{tr}(u^k) = \text{tr}(\bar{u}^k)$.
- e) Montrer par récurrence sur $n = \dim(E)$, $n \geq 2$, que si pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\text{tr}(u^k) = 0$, alors $\chi_u = X^n$.

Exercice 99

Soit K un corps commutatif et soient A et B deux matrices de $M_n(K)$.

- Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.
- a) Montrer que si A ou B est inversible, et si λ est une valeur propre de AB , alors les sous-espaces propres de AB et BA associés à λ ont même dimension.
b) En déduire que si A ou B est inversible et si AB est diagonalisable, alors BA est aussi diagonalisable.
- Trouver un exemple de matrices A et B , telles que $AB = 0$ et $BA \neq 0$. Que peut-on conclure?

Exercice 100

Soient $E = \mathbb{R}^3$ et u un endomorphisme non nul de E vérifiant $u^3 + u = 0$.

- Montrer que $E = \ker(u) \oplus \ker(u^2 + \text{Id}_E)$.
- Montrer que si $x \notin \ker(u)$, alors $(x, u(x))$ est libre.
- Montrer que $\dim(\ker(u)) = 1$.
- En déduire qu'il existe une base (v_1, v_2, v_3) dans laquelle la matrice A de u est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Quel est l'ensemble des solutions non nulles, dans $M_3(\mathbb{R})$, de l'équation matricielle $X^3 + X = 0$?

Exercice 101

Soit f l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall A \in M_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \implies f(A) = \begin{pmatrix} b & -a + 2c + d \\ -2b & -b \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice M de f par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $M_2(\mathbb{R})$. Rappelons que

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer le polynôme caractéristique de f .
 3. Déterminer les sous-espaces propres de f .
 4. Montrer que f est diagonalisable et déterminer une base (v_1, v_2, v_3, v_4) formée de vecteurs propres de f .

Exercice 102

1. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E .
 a) Montrer que si u est diagonalisable, alors u^2 est diagonalisable.
 b) Montrer que si u^2 est diagonalisable, alors u est diagonalisable, si et seulement si, $\ker(u) = \ker(u^2)$.
 2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A suivante soit diagonalisable :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_n \\ \vdots & \ddots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 103

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n , avec $n \geq 3$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et u l'endomorphisme de E défini par

$$\begin{cases} u(e_i) = ie_n \text{ pour } i \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ u(e_n) = \sum_{i=1}^n ie_i \end{cases}$$

1. Vérifier que $(e_n, u(e_n))$ est une base de $\text{Im}(u)$.

2. Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$. Déterminer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme v .
3. Quelle est la dimension de $\ker(u)$?
4. Montrer que le polynôme caractéristique P de u s'écrit sous la forme $P = X^{n-2}(X^2 + aX + b)$ et déterminer a et b .
5. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 104

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, avec $AB = BA$ et soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & BP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

2. Enoncer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit diagonalisable.

Exercice 105

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A , par rapport à la base canonique, est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}, \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de u .
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles u est diagonalisable.
3. On suppose que $m = 2$.
 - a) Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonalisable D , tel que $A = PDP^{-1}$.
 - b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n .
4. On suppose que $m = 1$. Trouver une base de Jordan de u puis résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x - y + z \end{cases}$$

Exercice 106

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3-m & m-5 & m \\ -m & m-2 & m \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

où m est un paramètre réel.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de u .
2. Pour quelles valeurs de m , l'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. On suppose que u est diagonalisable.
 - a) Quel est le polynôme minimal de u ?
 - b) Trouver une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de u .
 - c) Trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P , telles que $A = PDP^{-1}$.
4. On suppose $m = 1$.
 - a) Trouver une base (w_1, w_2, w_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice J de u est une matrice de Jordan.
 - b) Ecrire la matrice J , puis trouver une matrice inversible Q , telle que $A = QJQ^{-1}$.

Exercice 107

Soit $B \in M_{2n}(\mathbb{C})$ la matrice définie par $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que B est diagonalisable, si et seulement si, A est inversible et A diagonalisable.

Exercice 108

Soient A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, avec $\text{tr}(A) \neq 0$, et g l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), g(M) = \text{tr}(A)M + \text{tr}(M)A$$

1. Calculer $g(A)$ puis $g(M)$ lorsque $\text{tr}(M) = 0$.
En déduire que g possède deux valeurs propres α_1 et α_2 , avec $\alpha_2 = 2\alpha_1$.
2. On désigne par E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés respectivement à α_1 et α_2 .
 - a) Déterminer E_1 et E_2 avec leurs dimensions.
 - b) g est-il diagonalisable ?
 - c) Quel est le polynôme caractéristique de g ?
 - d) Calculer $\text{tr}(g)$ et $\det(g)$ en fonction de n et $\text{tr}(A)$.

Exercice 109

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
 - a) Montrer que si λ est une valeur propre de A , alors on a $\lambda = 0$ ou $\lambda = \text{tr}(A)$.
 - b) Si E est un sous-espace propre de A , déterminer la dimension de E .
 - c) Montrer que A est diagonalisable, si et seulement si, $\text{tr}(A) \neq 0$.
2. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices non nulles et soit f l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), f(M) = \text{tr}(AM)B$$

- a) Montrer que f est de rang 1.
- b) Montrer que f est diagonalisable, si et seulement si, $\text{tr}(AB) \neq 0$.

Exercice 110

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E .

- a) Montrer que si u est diagonalisable, alors tout sous-espace vectoriel de E stable par u possède un supplémentaire stable.
- b) Montrer que si K est algébriquement clos, alors la réciproque est vraie.

Exercice 111

Soit $V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur non nul de composantes $v_1, v_2, \dots, v_n$ et soit $A = V^t V$.

1. Pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, exprimer a_{ij} en fonction de $v_1, v_2, \dots, v_n$. Que vaut la trace de A ?
2. Exprimer les vecteurs colonnes de A en fonction de $v_1, v_2, \dots, v_n$ et V .
3. En déduire le rang de A .
4. Montrer que $\ker(A) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : {}^t V X = 0\}$.
5. Montrer que ${}^t V V$ est une valeur propre de A dont on déterminera le sous-espace propre et sa dimension.
6. Déduire que A est diagonalisable.

Exercice 112

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles, tel que

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

A quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) , ces trois suites sont-elles convergentes?

Exercice 113

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A par rapport à la base canonique est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 2a-5 & 5-a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A .
2. Déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel a , les valeurs propres de u avec leurs multiplicités.
3. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme u est-t-il diagonalisable ?
4. On suppose que $a = 3$.
 - a) Quel est le polynôme minimal de u ?
 - b) En utilisant la division euclidienne, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe deux réels a_n et b_n , tels que $A^n = a_n A + b_n I$.
 - c) Calculer a_n et b_n .
5. On suppose que $a = 1$ et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de u avec $\lambda_1 > \lambda_2$.
 - a) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de u .
 - b) Trouver une base de Jordan (v_1, v_2, v_3) de u et écrire la matrice J de u par rapport à cette base.
 - c) Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = z \\ z' = -3y + 4z \end{cases}$.

Exercice 114

1. Soient K un corps commutatif, $A \in M_n(K)$ et $P \in K[X]$.
 - a) Montrer que si λ est une valeur propre de A , alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$.
 - b) Montrer que si A est diagonalisable, alors $P(A)$ est diagonalisable.
2. On considère les matrices A et M de $M_{n+1}(\mathbb{C})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

- a) Montrer que A est diagonalisable.
- b) Montrer que $M = a_0 + a_1 A + \cdots + a_n A^n$ et en déduire que M est diagonalisable.
- c) Quelles sont les valeurs propres de M ?

Exercice 115

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n et u l'endomorphisme de E dont la matrice A , par rapport à une base de E , est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. Montrer que $u^2 = Id_E$ et en déduire que u est diagonalisable.
- 2. Déterminer la dimension de $\ker(u - Id_E)$ et en déduire l'expression du polynôme caractéristique de u . (On discutera les cas n pair et n impair)
- 3. Trouver une base de E formée de vecteurs propres de u .

Exercice 116

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, par rapport à la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, est définie par :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad a_{ij} = \frac{i}{j}$$

- a) Pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, exprimer $u(e_j)$ et $u^2(e_j)$ dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.
- b) En déduire l'expression du polynôme minimal de u . u est-t-il diagonalisable ?
- c) Quel est le rang de u ? En déduire le polynôme caractéristique de u ?

Exercice 117

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et u un endomorphisme de E dont le polynôme minimal M_u s'écrit sous la forme $M_u = a + bX + X^2$, où a et b sont deux réels tels que $b^2 - 4a < 0$

- a) Montrer que n est pair.
- b) Montrer que $\det(u) = a^{\frac{n}{2}}$ et $tr(u) = -\frac{nb}{2}$.

Exercice 118

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'un endomorphisme u de E est une transvection, si $u \neq Id_E$ et s'il existe un hyperplan H de E , tel que

- i) $\forall x \in H, u(x) = x.$
 ii) $\forall x \in E, u(x) - x \in H.$

Dans ce cas, on dit que u est une transvection d'hyperplan H . Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que u est une transvection de E d'hyperplan H

1. Quelle est la dimension de $\ker(u - Id_E)$?
2. Montrer qu'il existe $y_0 \in H$, tel que $\forall x \in E, u(x) - x \in \text{Vect}(y_0).$
3. Montrer que si $y_0 = (u - Id_E)(x_0)$, alors $x_0 \notin H.$
4. Montrer qu'il existe une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E , telle que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, e_{n-1}\}, u(e_i) = e_i \text{ et } u(e_n) = e_{n-1} + e_n$$

5. Déterminer les polynômes caractéristique et minimal de u . u est-t-il diagonalisable?
6. Montrer que u est inversible et que u^{-1} est une transvection de E .

Exercice 119

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 3$, dont la matrice A par rapport à la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\ker(u - Id_E).$
2. Déterminer une base de $\text{Im}(u - Id)$ et calculer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u - Id).$
3. Déterminer le polynôme caractéristique de u et montrer que u est diagonalisable.

Exercice 120

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = (-1)^{i+j}.$

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer A^k et en déduire $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}.$
2. Déterminer le polynôme minimal de A et en déduire que A est diagonalisable.
3. Déterminer la dimension de $\ker(A)$ et en déduire l'expression du polynôme caractéristique de $A.$

4. Soit $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$b_{ij} = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ (-1)^{i+j}b & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

où a et b sont deux nombres réels, avec $b \neq 0$.

- Montrer que B est un polynôme en A .
- En déduire que B est diagonalisable.
- Déterminer les sous-espaces propres de B et en déduire l'expression du polynôme caractéristique de B .

Exercice 121

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par

$$u(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$$

- Déterminer la matrice A de u par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 122

Soient E un K -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme nilpotent de u d'indice q . Montrer que si $\dim(\ker(u)) = 1$, alors $q = n$.

Exercice 123

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, G un groupe fini et $f : G \rightarrow \text{GL}(E)$ un homomorphisme de groupes.

- Montrer que pour tout $a \in G$, $f(a)$ est diagonalisable.
- Soit $\Phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie pour tout $a \in G$ par $\Phi(a) = \text{tr}(f(a))$. Montrer que pour tout $a \in G$, on a $\Phi(a^{-1}) = \overline{\Phi(a)}$.

Exercice 124

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- On suppose que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$. Montrer que $\det(A) = 1$.
- On suppose que $A^3 - A - I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.
- On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.
- On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est pair.
- On suppose que $A^4 = 7A^3 - 12A^2$. Montrer que $\text{tr}(A) \in \mathbb{N}$ et que $\text{tr}(A) \leq 4n$.
- On suppose que $n = 6$ et que $A^2 - 3A + 2I_6 = 0$ et $\text{tr}(A) = 8$. Déterminer le polynôme caractéristique de A et montrer que A est diagonalisable.

Exercice 125

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et u un endomorphisme nilpotent, non nul, d'indice q . Soit $x \in E$, tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$ et soit $F = \text{Vect}(\{x, u(x), \dots, u^{q-1}(x)\})$.

1. Montrer que $\dim(F) = q$ et que F est stable par u .
2. a) Montrer que ${}^t u$, l'application transposée de u , est un endomorphisme nilpotent de E^* , d'indice q .
 b) Justifier qu'il existe $\varphi \in E^*$, tel que $\varphi(u^{q-1}(x)) \neq 0$.
 c) Soit $G = \text{Vect}(\{\varphi, {}^t u(\varphi), \dots, ({}^t u)^{q-1}(\varphi)\})$. Montrer que $\dim(G) = q$ et que G est stable par ${}^t u$.
 d) Montrer que ${}^\perp G$ est stable par u et que $E = F \oplus {}^\perp G$.
3. Montrer par récurrence sur n , où $n = \dim(E)$, qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice J de u est une matrice nilpotente de Jordan :

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_r} \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 126

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice A , par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) est définie par :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u .
 b) Calculer $(u - Id)^2(e_1)$ et $(u - 2Id)^2(e_1 - e_2)$ et en déduire une base de Jordan (v_1, v_2, v_3, v_4) de u .

2. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 + x_3 + 3x_4 \\ x'_2 = 3x_2 - x_4 \\ x'_3 = -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ x'_4 = x_2 + x_4 \end{cases}$$

Exercice 127

Soient K un corps commutatif et A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K . On suppose que le polynôme caractéristique de A est scindé sur K et que la décomposition de Dunford de A s'écrit sous la forme $A = D + N$, où D est diagonalisable et N nilpotente.

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer la décomposition de Dunford de A^p en fonction de celle de A .
2. On suppose que A est inversible.
 - a) Montrer que D est inversible.
 - b) On pose $N' = D^{-1}N$. Montrer $I + N'$ est inversible et déterminer son inverse.
 - c) Montrer que $A^{-1} = (I + N')^{-1}D^{-1}$ et en déduire la décomposition de Dunford de A^{-1} .

Exercice 128

En utilisant la réduite de Jordan, montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est semblable à sa transposée.

Exercice 129

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de A , alors la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ s'écrit sous la forme $D' + N'$, avec $D' = \exp(D)$ et $N' = (\exp(N) - I)\exp(D)$.
2. Montrer que $\exp(A)$ est diagonalisable, si et seulement si, A est diagonalisable.
3. En déduire l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$, telles que $\exp(A) = I_n$.

Exercice 130

Soient A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres complexes deux à deux distinctes de A . Le rayon spectrale de A , qu'on note $\rho(A)$ est défini par $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq r} |\lambda_i|$. Pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $\|M\| = \sup_{\|x\|=1} \|Mx\|$,

alors on sait que l'application $\|\cdot\| : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{C})$ et que pour tout $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\|MN\| \leq \|M\|\|N\|$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$.
2. Montrer que si A est diagonalisable, alors il existe $\alpha > 0$, tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \alpha^{\frac{1}{k}} \rho(A)$ et en déduire que

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$$

3. Si A est quelconque, en utilisant la décomposition de Dunford, montrer qu'il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $k \geq n$, on a $\|A^k\| \leq 2^k \delta \|D^{k-n}\|$.
En déduire que $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$.

Exercice 131

Montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$.

Exercice 132

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\exp({}^t A) = {}^t \exp(A)$.
2. Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite antisymétrique, si ${}^t M = -M$ et elle est dite orthogonale, si ${}^t M M = I$.
 - a) Montrer que si A est antisymétrique, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA)$ est orthogonale.
 - b) Calculer la dérivée $\frac{d}{dt} [{}^t \exp(tA) \exp(tA)]$.
 - c) En déduire que si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA)$ est orthogonal, alors A est antisymétrique.

6.5 Solutions des exercices

Exercice 92

On a $P = QR$ et $P(u) = 0$, alors $Q(u)R(u) = 0$, donc $\operatorname{Im}(R(u)) \subseteq \ker(Q(u))$. Comme Q et R sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de décomposition des noyaux, on a $E = \ker(Q(u)) \oplus \ker(R(u))$, donc d'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\ker(R(u)) + \dim(\operatorname{Im}(R(u))) = \dim(\ker(Q(u))) + \dim(\ker(R(u)))$$

Donc on voit que $\dim(\operatorname{Im}(R(u))) = \dim(\ker(Q(u)))$. On en déduit donc que $\operatorname{Im}(R(u)) = \ker(Q(u))$.

Exercice 93

On a $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$, donc 0 est une racine simple de P , par suite on a $P = XQ$, avec $Q(0) \neq 0$. Comme $Q(0) \neq 0$, alors X et Q sont premiers entre eux et comme $P(u) = 0$, alors d'après l'exercice précédent, on a $\operatorname{Im}(u) = \ker(Q(u))$, donc on a $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.

Exercice 94

1. On suppose que P et M_u sont premiers entre eux, alors d'après Bezout, il existe $A, B \in K[X]$, tels que $AP + BM_u = 1$. Comme $M_u(u) = 0$, alors on a $A(u)P(u) = Id_E$ donc $P(u)$ est inversible.

Réciproquement, supposons que $P(u)$ est inversible et montrons que P et M_u sont premiers entre eux. Supposons, par l'absurde, que P et M_u ne sont pas premiers entre eux et soit Δ le pgcd de P et M_u , alors on $\deg(\Delta) \geq 1$. On a $P = Q\Delta$ et $M_u = R\Delta$, avec $Q, R \in K[X]$, donc on a $P(u) = Q(u)\Delta(u)$ et comme $P(u)$ est inversible, alors $\Delta(u)$ est inversible. On a aussi $0 = M_u(u) = R(u)\Delta(u)$ puis comme $\Delta(u)$ est inversible, alors $R(u) = 0$, avec $\deg(R) < \deg(M_u)$, car $\deg(\Delta) \geq 1$, ce qui est absurde, car on doit avoir M_u divise R .

2. D'après la question précédente, on a $P(u)^{-1} = A(u)$, donc $P(u)^{-1}$ est un polynôme en u .

3. Montrons par contraposée que $Sp(u) \cap Sp(v) \neq \emptyset$, si et seulement si, $\chi_u(v)$ n'est pas inversible. Supposons que $Sp(u) \cap Sp(v) \neq \emptyset$ et soit $\lambda \in Sp(u) \cap Sp(v)$, alors $X - \lambda$ divise χ_u et $X - \lambda$ divise M_v , donc χ_u et M_v ne sont pas premiers entre eux, par suite, d'après la question 1), $\chi_u(v)$ n'est pas inversible.

Réciproquement, supposons que $\chi_u(v)$ n'est pas inversible, alors d'après la question 1), χ_u et M_v ne sont pas premiers entre eux. Comme K est algébriquement clos, alors il existe $\lambda \in K$, tel que $\chi_u(\lambda) = M_v(\lambda) = 0$, donc $\lambda \in Sp(u) \cap Sp(v)$, par suite, $Sp(u) \cap Sp(v) \neq \emptyset$.

Exercice 95

1. a) On suppose que u est irréductible, alors $u \neq 0$, car si $u = 0$, alors tout sous-espace vectoriel de E est stable par u . Comme $\ker(u)$ est stable par u , alors on a $\ker(u) = \{0\}$ ou $\ker(u) = E$, comme $u \neq 0$, alors $\ker(u) = \{0\}$ et comme E est de dimension finie, alors u est inversible.

- b) Supposons, par l'absurde, que M_u n'est pas irréductible, alors il existe deux polynômes non constants de $K[X]$, tel que $M_u = AB$, donc on a $A(u) \neq 0$, car $\deg(A) < \deg(M_u)$, par suite, on a $\ker(A(u)) \neq E$. On a aussi $B(u) \neq 0$ et $A(u)B(u) = 0$, donc $A(u)$ est non inversible, par suite, on a $\ker(A(u)) \neq \{0\}$. Or, on sait que $\ker(A(u))$ est stable par u , ce qui est absurde, donc M_u est irréductible.

- c) Soit $F = \text{Vect}(\{u^{m-1}(x), \dots, u(x), x\})$.

Comme $u^m(x) = - \sum_{k=1}^{m-1} a_k u^k(x)$, alors F est stable par u et comme u est irréductible, alors on a $F = \{0\}$ ou $F = E$. On a $x \neq 0$ et $x \in F$, donc $F \neq \{0\}$, par conséquent, on a $F = E$.

$(u^{m-1}(x), \dots, u(x), x)$ est un système générateur de E , donc son cardinal $\geq n$, où $n = \dim(E)$, il en résulte que $m \geq n$. Or, on sait que $\deg(M_u) \leq n$, donc $m = n$.

On en déduit que $\deg(M_u) = \deg(\chi_u)$, et comme M_u divise χ_u , alors on a $M_u = \chi_u$, car M_u et χ_u sont unitaires.

2. Supposons que χ_u est irréductible, alors on a $M_u = \chi_u$, car M_u est un polynôme non constant qui divise χ_u .

Supposons, par l'absurde, que u n'est pas irréductible, alors il existe un sous-espace vectoriel F stable par u , tel que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. Soit v l'endomorphisme induit par u sur F , comme $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$, alors on a $1 \leq \deg(\chi_v) < n$, or on sait que χ_v divise χ_u , ce qui est absurde, car χ_u est irréductible.

Exercice 96

1. On procède par récurrence sur n , avec $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, on a $uv - vu = Id_E = v^0$, donc la propriété est vraie.

Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre n , alors pour $n + 1$, on a

$$\begin{aligned} uv^{n+1} - v^{n+1}u &= uv^{n+1} - vuv^n + vuv^n - v^{n+1}u \\ &= (uv - vu)v^n + v(uv^n - v^n u) \\ &= v^n + (n-1)v^n = (n+1)v^n \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $uv^n - v^n u = nv^{n-1}$.

2. Soit $P \in K[X]$, avec $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$, alors on a

$$u \circ P(v) - P(v) \circ u = \sum_{k=1}^m a_k (uv^k - v^k u) = \sum_{k=1}^m k a_k v^{k-1} = P'(v)$$

3. Supposons que E est de dimension finie et qu'il existe $u, v \in L(E)$, tel que $uv - vu = Id_E$, alors d'après la question précédente, pour tout $P \in K[X]$, on a $u \circ P(v) - P(v) \circ u = P'(v)$. Donc si on considère le polynôme minimal P de v , on aura $P'(v) = 0$, ce qui est absurde, car $\deg(P') < \deg(P)$.

Exercice 97

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors M possède deux valeurs propres 3

et -1 , donc M est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

alors on voit facilement que $MP = PD$.

Soit maintenant $Q = \begin{pmatrix} 2I_n & -2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$, alors il est facile de voir que Q est inversible et que $BQ = Q\Delta$, où $\Delta = \begin{pmatrix} 3I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$. Il en résulte que B et Δ sont semblables, donc ils ont le même polynôme caractéristique, par suite on a

$$\chi_B = \det(XI_n - 3A) \det(XI_n + A) = (-1)^n 3^n \chi_A(-X) \chi_A\left(\frac{X}{3}\right)$$

Exercice 98

1. a) Soit $x, y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} \bar{x} = \bar{y} &\implies x - y \in F \\ &\implies u(x) - u(y) \in F \quad (\text{car } F \text{ est stable et } u \text{ linéaire}) \\ &\implies \overline{u(x)} = \overline{u(y)} \end{aligned}$$

donc $\bar{u}$ est bien définie.

b) On suppose que $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m)$ est une base de E/F , alors il est facile de voir que $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ est libre.

Soit $G = \text{Vect}(\{e_1, e_2, \dots, e_m\})$, alors on a $\dim(G) = n - \dim(F)$ et il est facile de voir que $F \cap G = \{0\}$, donc on en déduit que $E = F \oplus G$.

2. a) Pour $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, on a $u(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij} e_i$ et pour $j \geq m+1$, on a $u(e_j) = 0$, donc on a $\bar{u}(\bar{e}_j) = \sum_{i=1}^m m_{ij} \bar{e}_i$. Il s'en suit donc que pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, on a $m_{ij} = a_{ij}$, par suite on aura $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$.

b) On a $\chi_u = \begin{vmatrix} XI_m - A & 0 \\ -B & XI_{n-m} \end{vmatrix} = X^{n-m} \chi_{\bar{u}}(X)$.

c) Il est facile de vérifier par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ BA^{k-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

d) D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\text{tr}(u^k) = \text{tr}(M^k) = \text{tr}(A^k) = \text{tr}(\bar{u}^k)$$

e) Pour $n = 2$, on sait que $\chi_u = X^2 - \text{tr}(u)X + \det(u)$, comme $\text{tr}(u) = 0$ et $\det(u) = 0$, car u est supposé non inversible, alors on a $\chi_u = X^2$. Supposons que $n > 2$ et la propriété est vraie pour tout espace vectoriel de dimension $< n$. Soit E un K -espace vectoriel de dimension

n et u un endomorphisme non inversible de E , tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{tr}(u^k) = 0$. D'après la question d), pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{tr}(\bar{u}^k) = 0$ et comme $\ker(u) \neq \{0\}$, alors on a $\dim(E/\ker(u)) < n$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, on a $\chi_{\bar{u}} = X^m$. Or, d'après la question b), on a $\chi_u = X^{n-m}\chi_{\bar{u}}$, donc on voit que $\chi_u = X^n$.

Exercice 99

1. Considérons les matrices en blocs M et N définies par $M = \begin{pmatrix} XI_n & -B \\ -A & I_n \end{pmatrix}$

et $N = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & XI_n \end{pmatrix}$, alors on a

$$MN = \begin{pmatrix} XI_n & 0 \\ -A & XI_n - AB \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad NM = \begin{pmatrix} XI_n - BA & 0 \\ -XA & XI_n \end{pmatrix}$$

Comme $\det(MN) = \det(NM)$, alors on a

$$X^n \det(XI - AB) = X^n \det(XI - BA)$$

donc on a $\det(XI - AB) = \det(XI - BA)$, par conséquent, A et B ont même polynôme caractéristique.

2. a) Supposons, par exemple, que A est inversible. Soit λ une valeur propre de AB , donc d'après 1), λ est aussi une valeur propre de BA . Soient E_λ et F_λ les sous-espaces propres de AB et BA associés à λ . Soit $X \in E_\lambda$, avec $X \neq 0$, alors on a $(AB)X = \lambda X$, donc $BX = \lambda(A^{-1}X)$, par suite, on a

$$(BA)(A^{-1}X) = BX = \lambda(A^{-1}X)$$

il en résulte que $A^{-1}X \in F_\lambda$, donc $X \in A(F_\lambda)$ et ainsi on a $E_\lambda \subseteq A(F_\lambda)$. Réciproquement, soit $X \in F_\lambda$, avec $X \neq 0$, alors on a $(BA)X = \lambda X$, donc $(AB)(AX) = \lambda(AX)$, donc $AX \in E_\lambda$, par suite, on a $A(F_\lambda) \subseteq E_\lambda$. Nous avons donc établi que $A(F_\lambda) = E_\lambda$ et comme A est inversible, alors on a $\dim(E_\lambda) = \dim(F_\lambda)$.

b) Si A ou B est inversible, alors d'après a), les sous-espaces propres de AB et BA ont même dimension. Donc si AB est diagonalisable, alors la dimension de chaque sous-espace propre de AB ou BA est égale à la multiplicité de la valeur propre associée, donc on en déduit que BA est diagonalisable.

c) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors on a

$$AB = 0 \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc on voit que AB est diagonalisable, mais BA n'est pas diagonalisable. On conclue que le résultat de la question précédente n'est plus valable si les deux matrices sont non inversibles.

Exercice 100

1. On pose $P = X$ et $Q = X^2 + 1$, alors P et Q sont premiers entre eux et on a $(PQ)(u) = 0$, donc d'après le théorème de décomposition des noyaux, on a $E = \ker(u) \oplus \ker(u^2 + Id_E)$.
2. On suppose que $x \notin \ker(u)$ et on suppose que $(x, u(x))$ est lié, alors il existe $\alpha \neq 0$, tel que $u(x) = \alpha x$, car $u(x) \neq 0$. Comme $u^3 + u = 0$ et $x \neq 0$, alors on a $\alpha^3 + \alpha = 0$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, donc $\alpha = 0$, ce qui est absurde, car $\alpha \neq 0$.
3. Soit $x \in \ker(u^2 + Id_E)$, avec $x \neq 0$, alors $x \notin \ker(u)$, donc d'après la question précédente, $\{x, u(x)\}$ est une partie libre de $\ker(u^2 + Id_E)$, par suite, on a $\dim(\ker(u^2 + Id_E)) \geq 2$. On a $E = \ker(u) \oplus \ker(u^2 + Id_E)$, donc $\dim(\ker(u)) \leq 1$. Comme 3 est impair et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, alors u possède au moins une valeur propre réelle λ , donc λ est racine de $X^3 + X$, donc $\lambda = 0$, par conséquent, on a $\dim(\ker(u)) \geq 1$.
4. Soient $x \in \ker(u)$, avec $x \neq 0$ et soit $y \in \ker(u^2 + Id_E)$, avec $y \neq 0$. D'après la question 2), $(y, u(y))$ est une base de $\ker(u^2 + Id_E)$, donc $x, y, u(y)$ est une base de E . On pose $v_1 = x$, $v_2 = y$ et $v_3 = u(y)$, alors on a $u(v_1) = 0$, $u(v_2) = v_3$ et $u(v_3) = -v_3$, donc si A est la matrice de u par rapport à la base (v_1, v_2, v_3) , alors on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. D'après ce qui précède, tout endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ est semblable à la matrice A ci-dessus, donc l'équation $X^3 + X = 0$ a pour solution dans $M_3(\mathbb{R})$, $S = \{P^{-1}AP : P \in GL_3(\mathbb{R})\}$.

Exercice 101

1. On a $f(e_1) = -e_3$, $f(e_2) = e_1 - 2e_2 - e_4$, $f(e_3) = 2e_3$ et $f(e_4) = e_3$, donc on a

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Un calcul simple donne $\chi_f = X^2(X - 2)(X + 2)$.

3. Les valeurs propres de f sont 0, 2 et -2 , on note E_0 , E_2 et E_{-1} les sous-espaces propres correspondants. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, avec $A = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$, alors on a

$$\begin{aligned} A \in E_0 &\iff f(A) = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff b = 0 \text{ et } a - 2c - d = 0 \\ &\iff A = c(2e_1 + e_3) + d(e_1 + e_4) \end{aligned}$$

Donc $E_0 = \text{Vect}(2e_1 + e_3, e_1 + e_4)$, avec $(2e_1 + e_3, e_1 + e_4)$ libre, donc $\dim(E_0) = 2$.

Comme 2 est une valeur propre de multiplicité 1, alors on a $\dim(E_2) = 1$. On a $e_3 \in E_2$, donc $E_2 = \text{Vect}(e_3)$.

$$\begin{aligned} A \in E_{-2} &\iff (f + 2Id_E)(A) = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff 2a + b = 0, a - 4c - d = 0, \text{ et } b - 2d = 0 \\ &\iff A = c(4e_1 - 8e_2 + e_3 - 4e_4) \end{aligned}$$

Donc $E_{-1} = \text{Vect}(4e_1 - 8e_2 + e_3 - 4e_4)$.

Comme $\dim(E_0) = 2$, alors u est diagonalisable. Soient $v_1 = 2e_1 + e_3$, $v_2 = e_1 + e_4$, $v_3 = e_3$ et $v_4 = 4e_1 - 8e_2 + e_3 - 4e_4$, alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de E formée de vecteurs propres de f .

Exercice 102

1. a) Si u est diagonalisable alors il existe une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres de u , donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on a $u^2(e_i) = \lambda_i^2 e_i$, par suite $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base formée de vecteurs propres de u^2 , donc u^2 est diagonalisable.
- b) Supposons que u^2 est diagonalisable, donc le polynôme minimal P de u^2 n'a que des racines simples. Soit $Q(X) = P(X^2)$ et soit λ une racine de Q , donc λ^2 est une racine simple de P , par suite, on a $P'(\lambda^2) \neq 0$. On a $Q'(X) = 2XP'(X^2)$, donc si λ est une racine non nulle de Q , alors $Q'(\lambda) \neq 0$, donc λ est une racine simple de Q .
On a $Q(u) = 0$, donc M_u divise Q , donc si u est inversible, alors

M_u n'a que des racines simples, donc u est diagonalisable.

Si u n'est pas inversible, alors il suffit de montrer que 0 est une racine simple de M_u . On pose $M_u = X^p Q(X)$, avec $p \geq 1$ et $Q(0) \neq 0$, alors pour tout $x \in E$, on a $u^p(Q(u)(x)) = 0$, donc on a $Q(u)(x) \in \ker(u^p)$. Comme $\ker(u^2) = \ker(u)$, alors $\ker(u^p) = \ker(u)$, donc $Q(u)(x) \in \ker(u)$, par conséquent, on a $(uQ(u))(x) = 0$. Il en résulte que $M_u = XQ$, donc 0 est une racine simple de M_u , par suite u est diagonalisable.

2. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et soit u l'endomorphisme associé canoniquement à la matrice A , alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on a $u(e_i) = \alpha_i e_{n-i+1}$, donc on a $u^2(e_i) = \alpha_i \alpha_{n-i+1} e_i$. Il en résulte que u^2 est diagonalisable, donc d'après la question précédente, u est diagonalisable, si et seulement si, $\ker(u) = \ker(u^2)$.

Si pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\alpha_i \neq 0$, alors u est inversible, donc d'après la question précédente, u est diagonalisable.

S'il existe $i \in \mathbb{N}_n$, tel que $\alpha_i = 0$, alors u n'est pas inversible. Soit $p = \dim(\ker(u))$, alors le nombre des i tel que $\alpha_i = 0$ est égal à p , on peut alors supposer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$. Donc pour $i \leq p$, on a $u^2(e_i) = 0$ et on a aussi $u^2(e_n) = \alpha_1 \alpha_n e_n = 0$, donc on en déduit que $\dim(\ker(u^2)) \geq p + 1$, par suite, on a $\ker(u) \neq \ker(u^2)$, donc dans ce cas u n'est pas diagonalisable.

Exercice 103

1. On a $\text{Im}(u) = \text{Vect}(\{u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)\})$, donc on a $\text{Im}(u) = \text{Vect}(e_n, u(e_n))$. Il est facile de vérifier que $(e_n, u(e_n))$ est libre, donc $(e_n, u(e_n))$ est une base de $\text{Im}(u)$.
2. On pose $u_1 = e_n$ et $u_2 = u(e_n)$, alors on a $v(u_1) = u_2$ et $v(u_2) = \alpha u_1$, où $\alpha = \sum_{k=1}^n k^2$, donc on en déduit que $\chi_v = \begin{vmatrix} X & -\alpha \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 - \alpha$.
3. On a $\dim(\text{Im}(u)) = 2$, donc d'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(u)) = n - 2$.
4. Comme $\dim(\ker(u)) = n - 2$, alors 0 est une racine de χ_u de multiplicité au moins égale à $n - 2$, par suite, il existe $a, b \in \mathbb{R}$, tel que $\chi_u = X^{n-2}(X^2 + aX + b)$. On sait que χ_v divise χ_u , donc $X^2 - \alpha$ divise $X^{n-2}(X^2 + aX + b)$ et comme $\alpha \neq 0$, alors X^{n-2} et $X^2 - \alpha$ sont premiers entre eux, donc d'après Bezout, $X^2 - \alpha$ divise $X^2 + aX + b$. Les deux polynômes sont unitaires et de même degré, donc $X^2 + aX + b = X^2 - \alpha$, par suite, on a $a = 0$ et $b = -\alpha$.
5. On a $\alpha > 0$, donc $\pm\sqrt{\alpha}$ sont deux racines simples de χ_u et comme $\dim(\ker(u)) = n - 2$, alors u est diagonalisable.

Exercice 104

1. Il est facile de vérifier par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kBA^{k-1} \\ & A^k \end{pmatrix}$$

Donc on en déduit que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & BP'(A) \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

2. Supposons que M est diagonalisable et soit P le polynôme minimal de M , alors P n'a que des racines simples et d'après la question précédente, on a $P(A) = 0$ et $P'(A)B = 0$. Soit M_A le polynôme minimal de A , alors M_A divise P et comme les racines de P sont simples, alors les racines de M_A le sont aussi, donc A est diagonalisable. Puisque les racines de P sont simples, alors P et P' sont premiers entre eux, il en résulte que $P'(A)$ est inversible et comme $P'(A)B = 0$, alors $B = 0$. Réciproquement, on suppose que A est diagonalisable et $B = 0$, alors M_A n'a que des racines simples. Puisque $B = 0$, alors on a $M_A(M) = 0$, donc M est diagonalisable.

Exercice 105

1. Un calcul simple donne $\chi_u = (X - 1)(X - 2)(X - m)$.
2. Si $m \neq 1$ et $m \neq 2$, alors χ_u n'a que des racines simples, donc u est diagonalisable.
Si $m = 1$, alors 1 est une racine double, donc u est diagonalisable, si et seulement si, $(A - I_n)(A - 2I_n) = 0$. On vérifie facilement que $(A - I_n)(A - 2I_n) \neq 0$, donc pour $m = 1$, u n'est pas diagonalisable.
Si $m = 2$ alors 2 est une racine double, donc u est diagonalisable, si et seulement si, $(A - I_n)(A - 2I_n) = 0$. On vérifie facilement que $(A - I_n)(A - 2I_n) = 0$, donc pour $m = 2$, u est diagonalisable.
3. a) Soit E_1 et E_2 les sous-espaces propres correspondants aux valeurs propres 1 et 2. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $x \in \mathbb{R}^3$, avec $x = ae_1 + be_2 + ce_3$, alors on a

$$\begin{aligned} x \in E_1 &\iff (u - Id_E)(x) = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff c = 0 \text{ et } -a + b = 0 \\ &\iff x = a(e_1 + e_2) \end{aligned}$$

donc on a $E_1 = \text{Vect}(e_1 + e_2)$.

$$\begin{aligned} x \in E_2 &\iff (u - 2Id_E)(x) = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff -a + c = 0 \\ &\iff x = a(e_1 + e_3) + be_2 \end{aligned}$$

donc $E_2 = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2)$.

On pose $v_1 = e_1 + e_2$, $v_2 = e_1 + e_3$ et $v_3 = e_2$, alors (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de u . Soit P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (v_1, v_2, v_3) , alors on a $A = PDP^{-1}$, avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) On a $A = PDP^{-1}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. En faisant le calcul on trouve

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

4. Si $m = 1$, alors en faisant le calcul, on trouve $E_1 = \text{Vect}(e_1 + e_2)$ et $E_2 = \text{Vect}(e_1 + e_3)$. Pour jordaniser u on doit trouver un vecteur x_0 , tel que $(u - Id_E)(x_0) \neq 0$ et $(u - Id_E)^2(x_0) = 0$. Pour cela, on remarque que si $x_0 = e_3$, alors on aura le résultat.

On pose alors $v_1 = (u - Id_E)(e_3) = e_1 + e_2$, $v_2 = e_3$ et $v_3 = e_1 + e_3$, alors (v_1, v_2, v_3) est une base de Jordan de u et on a $A = PJP^{-1}$, avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Pour la résolution du système (S) défini par
$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x - y + z \end{cases},$$

on pose $V = xe_1 + ye_2 + ze_3$ et $W = P^{-1}V = Xe_1 + Ye_2 + Ze_3$, alors on aura

$$\frac{dW}{dt} = P^{-1} \frac{dV}{dt} = P^{-1}AV = (P^{-1}AP)W = JW$$

On obtient alors le système suivant $\begin{cases} X' = X + Y \\ Y' = Y \\ Z' = 2Z \end{cases}$ dont la solution

est donnée par $X = (C_1 + C_2 t)e^t$, $Y = C_2 e^t$ et $Z = C_3 e^{2t}$, donc la solution général de (S) est définie par

$$\begin{cases} x(t) = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t} \\ y(t) = C_2 e^t \\ z(t) = C_3 e^{2t} \end{cases}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Exercice 106

1. On a

$$\begin{aligned} \chi_u &= \begin{vmatrix} X+m-3 & 5-m & -m \\ m & X-m+2 & -m \\ -5 & 5 & X+2 \end{vmatrix} \\ &= (X-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & X-m+2 & -m \\ -5 & 5 & X+2 \end{vmatrix} \quad (L1 \leftarrow L1 + L2) \\ &= (X-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & X+2 & -m \\ -5 & 0 & X+2 \end{vmatrix} \quad (C2 \leftarrow C1 + C2) \\ &= (X-3)(X+2)^2 \end{aligned}$$

2. On a $\chi_u = (X-3)(X+2)^2$, donc u est diagonalisable, si et seulement si, $(A-3I_n)(A+2I_n) = 0$. On a

$$(A - I_n)(A + 2I_n) = \begin{pmatrix} 5m & -5m & -5m \\ 5m & -5m & -5m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc u est diagonalisable, si et seulement si, $m = 0$.

3. Si u est diagonalisable, alors d'après la question précédente, $m = 0$.

a) On a $\chi_u = (X-3)(X+2)^2$ et u diagonalisable, donc on a $M_u = (X-3)(X+2)$.

b) Un calcul simple donne

$$E_3 = \text{Vect}(2e_1 + 5e_3) \quad \text{et} \quad E_{-2} = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_3)$$

Donc si on pose $v_1 = 2e_1 + 5e_3$, $v_2 = e_1 + e_2$ et $v_3 = e_3$, alors (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de u .

- c) Soit P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (v_1, v_2, v_3) , alors on a $A = PDP^{-1}$, avec

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Si $m = 1$, alors d'après la question 2), u n'est pas diagonalisable.

- a) Un calcul simple donne $E_3 = \text{Vect}(e_1 + e_3)$ et $E_{-2} = \text{Vect}(e_1 + e_2)$. En examinant la matrice $A + 2I_n$, on remarque facilement que $(u + 2Id_E)(e_3) = e_1 + e_2$, donc on a $e_3 \notin E_{-2}$ et $(u + 2Id_E)(e_3) \in E_{-2}$, donc si on pose $w_1 = e_1 + e_3$, $w_2 = (u + 2Id_E)(e_3) = e_1 + e_2$ et $w_3 = e_3$, alors (w_1, w_2, w_3) est une base de Jordan de u .
- b) Soit Q la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (w_1, w_2, w_3) , alors on a $A = QJQ^{-1}$, avec

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 107

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\det(\lambda I_{2n} - B) = \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ -I_n & XI_n \end{vmatrix}$, donc d'après l'exercice 79,

on a $\det(\lambda I_{2n} - B) = \det(\lambda^2 I_n - A)$, il en résulte que $\chi_B(X) = \chi_A(X^2)$. Supposons que B est diagonalisable et montrons d'abord que A est inversible. Supposons, par l'absurde que A n'est pas inversible, donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$, tel que $\chi_A(X) = X^p Q(X)$, avec $Q(0) \neq 0$, donc $\chi_B(X) = X^{2p} Q(X^2)$, puis comme B est diagonalisable, alors $\dim(\ker(B)) = 2p$.

D'autre part, soit $(X_1, X_2) \in \mathbb{C}^{2n}$, alors on a $(X_1, X_2) \in \ker(B)$, si et seulement si $AX_2 = 0$ et $X_1 = 0$, donc on en déduit que $\ker(B) = \{0\} \times \ker(A)$. Ainsi, on a $\dim(\ker(B)) = \dim(\ker(A))$, avec $\dim(\ker(A)) \leq p$, ce qui est absurde, donc A est inversible.

Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est une valeur propre de B on note $E(B, \lambda)$ le sous-espace propre de B associé à λ et $E(A, \lambda^2)$ le sous-espace propre de A associé à λ^2 . Soit $(X_1, X_2) \in \mathbb{C}^{2n}$, alors on a $(X_1, X_2) \in E(B, \lambda)$, si et seulement si $AX_2 = \lambda^2 X_2$ et $X_1 = \lambda X_2$, donc on en déduit que

$$E(B, \lambda) = \{(\lambda X, X) : X \in E(A, \lambda^2)\}$$

Donc si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $E(\lambda^2, A)$, alors $((\lambda e_1, e_1), \dots, (\lambda e_p, e_p))$ est une base de $E(B, \lambda)$, par suite, pour toute valeur propre de B , on a $\dim(E(B, \lambda)) = 2 \dim(E(A, \lambda^2))$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A et pour chaque i , soit $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ les deux racines carrées

de λ_i , alors α_i et β_i sont deux valeurs propres de B . Réciproquement, si μ est une valeur propre de B , alors μ^2 est une valeur propre de A , donc il existe i , tel que $\mu^2 = \lambda_i$, par suite, on a $\mu = \alpha_i$ ou $\mu = \beta_i$, on en déduit que les valeurs propres de B sont $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_p, \beta_p$, avec $p \leq r$. Comme B est diagonalisable, alors on a

$$\sum_{i=1}^p \dim(E(B, \alpha_i)) + \sum_{i=1}^p \dim(E(B, \beta_i)) = 2n$$

Or, on a $\dim(E(B, \alpha_i)) = \dim(E(B, \beta_i)) = \dim(E(A, \lambda_i))$, donc il en résulte que $2 \sum_{i=1}^r \dim(E(A, \lambda_i)) \geq 2n$ et comme $\sum_{i=1}^r \dim(E(A, \lambda_i)) \leq n$, alors on a

$\sum_{i=1}^r \dim(E(A, \lambda_i)) = n$, donc A est diagonalisable.

Supposons que A est diagonalisable et A inversible et soit M_A le polynôme minimal de A . Il est facile de vérifier par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$B^{2n} = \begin{pmatrix} A^n & 0 \\ 0 & A^n \end{pmatrix}$, donc si on pose $Q(X) = M_A(X^2)$, alors on a $Q(B) = 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ une racine de Q , puisque $Q'(\lambda) = 2\lambda M'_A(\lambda^2)$, alors $Q'(\lambda) \neq 0$, car $\lambda \neq 0$ et $M'_A(\lambda^2) \neq 0$, donc les racines non nuls de Q sont simples. Or, B est inversible, car A est inversible, donc toutes les racines de M_B sont non nuls et comme M_B divise Q , alors M_B n'a que des racines simples, donc B est diagonalisable.

Exercice 108

1. On a $g(A) = 2\text{tr}(A)A$ et si $\text{tr}(M) = 0$, alors $g(M) = \text{tr}(A)M$. Comme $A \neq 0$, alors $\alpha_1 = \text{tr}(A)$ et $\alpha_2 = 2\text{tr}(A)$ sont deux valeurs propres de g .
2. a) On a $\ker(\text{tr}) \subseteq E_2$ et $E_2 \neq E$, car $A \notin E_2$, donc $E_2 = \ker(\text{tr})$, par suite, $\dim(E_2) = n - 1$, il s'ensuit donc que $\dim(E_1) = 1$, car on a $\dim(E_1) + \dim(E_2) \leq n$, donc $E_1 = \text{Vect}(A)$.
- b) On a $\dim(E_1) + \dim(E_2) = n$, donc g est diagonalisable.
- c) On a $\dim(E_2) = n - 1$ et g diagonalisable, donc α_2 est racine de χ_g de multiplicité $n - 1$, donc on a $\chi_g = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)^{n-1}$.
- d) α_2 est de multiplicité $n - 1$, donc on a

$$\begin{aligned} \text{tr}(g) &= \alpha_1 + (n - 1)\alpha_2 = (2n - 1)\text{tr}(A) \\ \det(g) &= \alpha_1 \alpha_2^{n-1} = 2^{n-1} \text{tr}(A)^n \end{aligned}$$

Exercice 109

1. a) Soit λ une valeur propre non nulle de A , alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$, tel que $Ax = \lambda x$. Comme A est de rang 1, alors $\dim(\ker(A)) = n - 1$, donc si on pose $e_1 = x$ et si $(e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\ker(A)$,

alors $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , donc A est semblable à la matrice M définie par

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on conclue que $\lambda = \text{tr}(A)$.

- b) Soit E un sous-espace propre de A . Si $E = \ker(A)$, alors $\dim(E) = n - 1$, donc si $E \neq \ker(A)$, alors $\dim(E) = 1$.
 - c) Si $\text{tr}(A) \neq 0$, alors d'après la question a), A est diagonalisable. Réciproquement, si A est diagonalisable, alors A possède au moins une valeur propre non nulle λ , car $A \neq 0$, donc d'après la question a), on a $\text{tr}(A) \neq 0$.
2. a) On a $A \neq 0$ et $B \neq 0$, donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}(B)$, par suite, f est de rang 1.
- b) On a $\text{tr}(f) = \text{tr}(AB)$, donc f est diagonalisable, si et seulement si, $\text{tr}(AB) \neq 0$.

Exercice 110

- a) Supposons que u est diagonalisable et soit v l'endomorphisme induit par u sur F , alors v est diagonalisable. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u , alors quitte à réordonner les éléments, on peut supposer que v a pour valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, avec $s \leq r$. Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, soit F_i le sous-espace propre de v associé à λ_i , alors on a $F = \bigoplus_{i=1}^s F_i$ et $F_i \subseteq E_i$, où le sous-espace propre de u associé à λ_i . Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, soit G_i un supplémentaire de $F \cap E_i$ dans E_i et soit $G = \bigoplus_{i=1}^r G_i$, alors on vérifie facilement que G est stable par u et que $E = F \oplus G$.
- b) Montrons par récurrence sur n , où $n = \dim(E)$, que u est diagonalisable.
 Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.
 Supposons $n > 1$ et la propriété vraie pour tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $< n$.
 On suppose que E est de dimension n . Comme K est algébriquement clos, alors u possède au moins une valeur propre λ . Soit E_λ le sous-espace propre associé à λ . Si $E_\lambda = E$, alors $u = \lambda \text{Id}_E$, donc u est diagonalisable.

Si $E_\lambda \neq E$, comme E_λ est stable par u , alors E_λ possède un supplémentaire G stable par u . Soit v l'endomorphisme induit par u sur G . Comme $\dim(G) < n$, alors d'après l'hypothèse de récurrence, v est diagonalisable. Donc si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres de v deux à deux distinctes, alors $G = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}$, donc on en déduit que $E = E_\lambda \oplus E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$, donc u est diagonalisable.

Exercice 111

1. Il est facile de voir que $a_{ij} = v_i v_j$ et que $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n v_i^2$.
2. Soient $C_1, C_2, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A , alors d'après la question précédente, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, on a $C_j = v_j V$.
3. D'après la question précédente, on a $\text{Im}(A) = \text{Vect}(V)$, avec $V \neq 0$, donc A est de rang 1.
4. Pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, soit $Y = AX$, alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $y_i = \sum_{j=1}^n v_i v_j x_j = v_i \sum_{j=1}^n v_j x_j = v_i {}^t V X$, donc on voit que $AX = ({}^t V X)V$. Comme $V \neq 0$, alors $X \in \ker(A)$, si et seulement si, ${}^t V X = 0$.
5. On a $AV = ({}^t V V)V$ et $V \neq 0$, donc ${}^t V V$ est une valeur propre de A . On a ${}^t V V \neq 0$, car $V \neq 0$, et comme A est de rang 1, alors le sous-espace propre associé à ${}^t V V$ est de dimension 1.
6. D'après ce qui précède on voit facilement que A est diagonalisable.

Exercice 112 $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, alors on a $X_{n+1} A X_n$, donc

on en déduit que $X_n = A^n X_0$. Nous sommes donc amenés à déterminer A^n , pour cela nous allons déterminer le polynôme minimal de A .

Un calcul simple donne $\chi_A = (X - 1)(X + 2)^2$, puis on vérifie facilement que $(A - I)(A + 2I) = 0$, donc $M_A = (X - 1)(X + 2)$. En faisant la division euclidienne de X^n par M_A , on aura $X^n = Q_n M_A + R_n$, avec $\deg(R_n) \leq 1$, donc il existe $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$, tel que $R_n = \alpha_n + \beta_n X$. On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = \alpha_n I + \beta_n A$. On a $M_A(1) = M_A(-2) = 0$, donc il en résulte que $\alpha_n + \beta_n = 1$ et $\alpha_n - 2\beta_n = (-2)^n$, donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\alpha_n = \frac{1 + 2(-2)^n}{3}$ et $\beta_n = \frac{1 - (-2)^n}{3}$, par suite on a

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2(-2)^n & 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 + 2(-2)^n & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n & 1 + 2(-2)^n \end{pmatrix}$$

On en déduit alors qu'on a

$$\begin{cases} u_n = \frac{u_0 + v_0 = w_0}{3} + \frac{(2u_0 - v_0 - w_0)}{3}(-2)^n \\ v_n = \frac{u_0 + v_0 = w_0}{3} + \frac{(-u_0 + 2v_0 - w_0)}{3}(-2)^n \\ w_n = \frac{u_0 + v_0 = w_0}{3} + \frac{(-u_0 - v_0 + 2w_0)}{3}(-2)^n \end{cases}$$

Il en résulte que les suites $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ convergent, si et seulement si, on a

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 113

1. En faisant le calcul on trouve $\chi_u = (X - 1)(X - a)(X + a - 4)$.
2. Si $a = 1$ ou $a = 3$, alors $\chi_u = (X - 1)^2(X - 3)$, donc les valeurs propres sont 1 de multiplicité 2 et 3 de multiplicité 1.
Si $a = 2$, alors $\chi_u = (X - 1)(X - 2)^2$, donc les valeurs propres sont 1 de multiplicité 1 et 2 de multiplicité 2.
Si $a \notin \{1, 2, 3\}$, alors 1, a et $4 - a$ sont trois valeurs propres simples.
3. Si $a \notin \{1, 2, 3\}$, alors toutes les valeurs propres sont simples, donc u est diagonalisable.
Si $a = 1$, alors on a $(A - I)(A - 3I) \neq 0$, donc u n'est pas diagonalisable.
Si $a = 3$, alors on a $(A - I)(A - 3I) = 0$, donc u est diagonalisable.
Si $a = 2$, alors on a $(A - I)(A - 2I) \neq 0$, donc u n'est pas diagonalisable.
4. On suppose $a = 3$.
 - a) Comme u est diagonalisable et $\chi_u = (X - 1)^2(X - 3)$, alors on a $M_u = (X - 1)(X - 3)$.
 - b) En faisant la division euclidienne de X^n par M_A , on aura $X^n = Q_n M_A + R_n$, avec $\deg(R_n) \leq 1$, donc il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, tel que $R - n = a_n X + b_n$.
Comme $M_A(A) = 0$, alors $A^n = R_n(A) = a_n A + b_n I$.
 - c) On a $M_A(1) = M_A(3) = 0$, donc on a $a_n + b_n = 1$ et $3a_n + b_n = (3)^n$, ce qui donne $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$ et $b_n = \frac{3 - 3^n}{2}$.
5. On suppose $a = 1$, donc u n'est pas diagonalisable.
 - a) On remarque que $e_1 \in E_1$ et comme u n'est pas diagonalisable, alors $\dim(E_1) = 1$, donc $E_1 = \text{Vect}(e_1)$, puis un simple calcul donne $E_3 = \text{Vect}(e_1 + e_2 + 3e_3)$.

- b) On vérifie que $(u - Id_E)(e_2 + e_3) \neq 0$ et $(u - Id_E)^2(e_2 + e_3) = 0$, donc si on pose $v_1 = (u - Id_E)(e_2 + e_3) = 2e_1$, $v_2 = e_2 + e_3$ et $v_3 = e_1 + e_2 + 3e_3$, alors (v_1, v_2, v_3) est une base de Jordan de u et la matrice J de u dans cette base s'écrit sous la forme suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- c) On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $Z(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$, où P est la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3) , alors on a $X'(t) = AX(t)$, par conséquent, on a

$$Z'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = (P^{-1}AP)Z(t) = JZ(t)$$

On obtient alors le système suivant $\begin{cases} a'(t) = a(t) + b(t) \\ b'(t) = b(t) \\ c'(t) = 3c(t) \end{cases}$ dont la

solution est définie par $\begin{cases} a(t) = (C_1 + C_2t)e^t \\ b(t) = C_2e^t \\ c(t) = C_3e^{3t} \end{cases}$

Comme $X(t) = PZ(t)$, alors le système de départ a pour solution

$$\begin{cases} x(t) = (C_1 + C_2t)e^t + C_3e^{3t} \\ y(t) = C_2e^t + C_3e^{3t} \\ z(t) = C_2e^t + 3C_3e^{3t} \end{cases}$$

Exercice 114

- a) On pose $Q(X) = P(X) - P(\lambda)$, alors on a $Q(\lambda) = 0$, donc on a $Q(X) = (X - \lambda)R(X)$, avec $R \in K[X]$, par suite, on a $P(A) - P(\lambda)I = (A - \lambda I)R(A)$. Donc si $A - \lambda I$ n'est pas inversible, alors $P(A) - P(\lambda)I$ est aussi n'est pas inversible, par conséquent, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$.
- c) Si on suppose que A est diagonalisable, alors il existe Q inversible et D diagonale, tel que $A = QDQ^{-1}$. Donc on a $P(A) = QP(D)Q^{-1}$, avec $P(D)$ diagonale, par suite, $P(D)$ est diagonalisable.
- a) En développant $\det(XI - A)$ par rapport à la première colonne, on voit facilement que $\chi_A = X^{n+1} - 1$. Les racines de χ_A sont les racines $(n+1)^{\text{ième}}$ de l'unité qui sont toutes des racines simples de χ_A , donc A est diagonalisable.

- b) Soit $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$. On vérifie facilement, par récurrence sur k , que pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ et pour tout

$$j \in \mathbb{N}_{n+1}, \text{ on a } A^k e_j = \begin{cases} e_{n+j-k+1} & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ e_{j-k} & \text{si } k+1 \leq j \leq n+1 \end{cases}.$$

On pose $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, donc pour tout $j \in \mathbb{N}_{n+1}$, on a

$$P(A)e_j = \begin{cases} a_0 e_1 + \sum_{k=1}^n e_{n+2-k} & \text{si } j = 1 \\ a_0 e_j + \sum_{k=1}^{j-1} e_{j-k} + \sum_{k=j}^n e_{n+j-k+1} & \text{si } j \geq 2 \end{cases}$$

On voit donc que $M = P(A)$, donc d'après la question 1)b), M est diagonalisable.

- c) D'après la question 1)a), α est une valeur propre de M , si et seulement si, $\alpha = P(\lambda)$, où λ est une racine $(n+1)^{\text{ième}}$ de l'unité.

Exercice 115

- Il est facile de voir que $u^2 = Id_E$, puis comme $u \neq \pm Id_E$, alors $M_u = X^2 - 1$. Comme les racines de $X^2 - 1$ sont simples, alors u est diagonalisable.
- Soit $x \in \mathbb{R}^n$, avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, alors on a

$$x \in \ker(u - Id_E) \iff \forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\}, x_{n-j} = x_{j+2}$$

Nous sommes donc amené à distinguer les cas où n est pair et n impair. Si donc $n = 2m$ est pair, alors on a

$$x \in \ker(u - Id_E) \iff \begin{cases} x_n = x_2 \\ x_{n-1} = x_3 \\ \vdots \\ x_{m+2} = x_m \end{cases}$$

donc dans ce cas, on a $\dim(\ker(u - Id_E)) = m+1$, puis comme u est diagonalisable, alors $\chi_u = (X-1)^{m+1}(X+1)^{m-1}$.

Si $n = 2m+1$ est impair, alors on a

$$x \in \ker(u - Id_E) \iff \begin{cases} x_n = x_2 \\ x_{n-1} = x_3 \\ \vdots \\ x_{m+2} = x_{m+1} \end{cases}$$

Donc dans ce cas, on a $\dim(\ker(u - Id_E)) = m+1$ et le fait que u est diagonalisable, donne $\chi_u = (X-1)^{m+1}(X+1)^m$.

3. Si $n = 2m$, on pose

$$\begin{cases} v_1 = e_1, v_2 = e_2 + e_n, v_3, \dots, v_m = e_m + e_{m+2}, v_{m+1} = e_{m+1} \\ w_1 = e_2 - e_n, w_2 = e_3 - e_{n-1}, \dots, w_{m-1} = e_m - e_{m+2} \end{cases}$$

Alors $(v_1, \dots, v_{m+1}, w_1, \dots, w_{m-1})$ est une base formée de vecteurs propres de u .

Si $n = 2m + 1$, on pose

$$\begin{cases} v_1 = e_1, v_2 = e_2 + e_n, \dots, v_{m+1} = e_{m+1} + e_{m+2} \\ w_1 = e_2 - e_n, w_2 = e_3 - e_{n-1}, \dots, w_m = e_{m+1} - e_{m+2} \end{cases}$$

Alors $(v_1, \dots, v_{m+1}, w_1, \dots, w_m)$ est une base formée de vecteurs propres de u .

Exercice 116

a) Pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, on voit facilement que

$$u(e_j) = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^n i e_i \quad \text{et} \quad u^2(e_j) = n u(e_j)$$

b) Soit $P = X^2 - X$, alors d'après la question précédente, on a $P(u) = 0$. Comme $u \neq 0$ et $u \neq Id_E$, alors on a $M_u = X^2 - X$. M_u n'a que des racines simples, donc u est diagonalisable.

c) D'après la question a), on a $\text{Im}(u) = \text{Vect}(v)$, où $v = \sum_{i=1}^n i e_i$, donc $rg(u) = 1$, par suite $\dim(\ker(u)) = n - 1$. Comme u est diagonalisable, alors 0 est une racine de χ_u de multiplicité $n - 1$, donc on en déduit que $\chi_u = X^{n-1}(X - 1)$.

Exercice 117

a) Si on suppose que n est impair, alors tout polynôme de degré n de $\mathbb{R}[X]$, admet au moins une racine réelle. Comme χ_u est de degré n , alors χ_u possède au moins une racine réelle λ et comme M_u et χ_u ont les mêmes racines, alors λ est aussi une racine de M_u . Or M_u est un polynôme de degré 2 à discriminant strictement négatif, donc M_u n'admet aucune racine réelle, ce qui est absurde, donc n est pair.

b) Soit A la matrice de u par rapport à une base de E , alors $A \in M_n(\mathbb{R})$, donc A peut-être considérée comme une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. On a donc $M_A = a + bX + X^2$ qui possède deux racines complexes z et $\bar{z}$, donc z et $\bar{z}$ sont les seules racines de χ_A et elles ont la même multiplicité, donc $\chi_A = (X - z)^{\frac{n}{2}}(X - \bar{z})^{\frac{n}{2}}$. On a alors $\det(u) = \det(A) = (z\bar{z})^{\frac{n}{2}}$ et $\text{tr}(u) = \text{tr}(A) = \frac{n}{2}(z + \bar{z})$, avec $z\bar{z} = a$ et $z + \bar{z} = -b$, car z et $\bar{z}$ sont racines de $X^2 + bX + a$, donc on a $\det(u) = a^{\frac{n}{2}}$ et $\text{tr}(u) = -\frac{n}{2}b$.

Exercice 118

1. Pour tout $x \in H$, on a $u(x) = x$, $H \subseteq \ker(u - Id_E)$ et comme $u \neq Id_E$ et H un hyperplan de E , alors $\ker(u - Id_E) = H$.
2. On a $\dim(\ker(u - Id_E)) = n - 1$, donc $\dim(\text{Im}(u - Id_E)) = 1$, par suite, il existe $y_0 \in E$, tel que $\text{Im}(u - Id_E) = \text{Vect}(y_0)$. Il existe $x_0 \in E$, tel que $y_0 = u(x_0) - x_0$, donc on a $y_0 \in H$ et pour tout $x \in E$, on a $u(x) - x \in \text{Vect}(y_0)$.
3. On suppose, par l'absurde, que $y_0 = (u - Id_E)(x_0)$ et $x_0 \in H$, donc on a $(u - Id_E)(x_0) = 0$, donc $y_0 = 0$, par suite, on a $u = Id_E$, ce qui est absurde, car $u \neq Id_E$, donc $x_0 \notin H$.
4. Comme $y_0 \in H$ et $y_0 \neq 0$, alors on peut choisir une base $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ de H , tel que $e_{n-1} = y_0$. On a $x_0 \notin H$, donc si on pose $e_n = x_0$, alors $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n)$ est une base de E , vérifiant

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, e_{n-1}\}, u(e_i) = e_i \text{ et } u(e_n) = e_{n-1} + e_n$$

5. Pour tout $x \in E$, on a $u(x) - x \in H$, donc $u(u(x) - x) = u(x) - x$, par suite, on a $u^2(x) - 2u(x) + x = 0$, avec $u^2(x) - 2u(x) + x = (u - Id_E)^2(x)$, donc on en déduit que $(u - Id_E)^2 = 0$. On a $u \neq Id_E$ et $(u - Id_E)^2 = 0$, donc $M_u = (X - 1)^2$ et comme χ_u et M_u ont les mêmes racines, alors on a $\chi_u = (X - 1)^n$. On a $u \neq Id_E$, donc u n'est pas diagonalisable.
6. D'après la question précédente, on a $u^2 - 2u + Id_E = 0$, donc u est inversible et on a $u^{-1} = 2Id_E - u$.
Pour $x \in H$, on a $u^{-1}(x) = 2x - u(x) = x$ et pour $x \in E$, on a $u^{-1}(x) - x = x - u(x)$, donc $u^{-1}(x) - x \in H$. Il en résulte que u^{-1} est aussi une transvection d'hyperplan H .

Exercice 119

1. Soit $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors on a

$$x \in \ker(u - Id_E) \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 + \dots + x_n = 0 \end{cases}$$

On en déduit donc que $\ker(u - Id_E) = \text{Vect}(\{e_2 - e_n, \dots, e_{n-1} - e_n\})$.

2. On voit facilement que $\text{Im}(u - Id_E) = \text{Vect}(e_1, e_2 + \dots + e_n)$, donc si on pose $v_1 = e_1$ et $v_2 = e_2 + \dots + e_n$, alors (v_1, v_2) est une base de $\text{Im}(u - Id_E)$. On a $v(v_1) = v_1 + v_2$ et $v(v_2) = (n - 1)v_1 + v_2$, donc la matrice B de v par rapport à (v_1, v_2) est définie par $B = \begin{pmatrix} 1 & n - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc on en déduit que $\chi_v = X^2 - 2X + 2 - n$.

3. On a $\dim(\ker(u - Id_E)) = n - 2$, donc 0 est une racine de χ_u de multiplicité $\geq n - 2$ et comme χ_v divise χ_u et $\chi_v(1) \neq 0$, alors on a $\chi_u = (X - 1)^{n-2}(X^2 - 2X + 2 - n)$. On a $\Delta' = n - 1$, donc $\Delta' > 0$, par suite, $X^2 - 2X + 2 - n$ possède deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2 . On voit donc que 1, λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de u , avec λ_1 et λ_2 simples et $\dim(E_1) = n - 2$, donc u est diagonalisable.

Exercice 120

1. Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $A^2 = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors on a

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} (-1)^{k+j} = n(-1)^{i+j} = n a_{ij}$$

donc $A^2 = nA$. Une simple récurrence montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k = n^{k-1}A$, donc on a

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k-1} t^k}{k!} A = \frac{1}{n} e^{nt} A$$

2. Soit $P = X^2 - nX$, alors d'après la question précédente, on a $P(A) = 0$, donc M_A divise P . On a $A \neq 0$ et $A \neq nI$, donc $M_A = X(X - n)$. Les racines de M_A sont simples donc A est diagonalisable.
3. On remarque que pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, on a $Ae_j = (-1)^{j+1} Ae_1$, donc $\text{Im}(A) = \text{Vect}(Ae_1)$ et comme $Ae_1 \neq 0$, alors $\text{rg}(A) = 1$, par suite, on a $\dim(\ker(A)) = n - 1$. Il en résulte donc que $\chi_A = X^{n-1}(X - n)$.
4. On vérifie facilement que $B = (a - 1)I + bA$, donc $B = P(A)$, où $P = (a - 1) + bX$.
5. Comme A est diagonalisable et $B = P(A)$, alors B est diagonalisable. (voir exercice 110).
6. D'abord les valeurs propres de B sont $P(0) = a - 1$ et $P(n) = a - 1 + bn$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors on a

$$\begin{aligned} Bx &= (a - 1)x \iff bAx = 0 \\ &\iff Ax = 0 \quad (\text{car } b \neq 0) \end{aligned}$$

donc $\ker(A)$ est le sous-espace propre de B associé à $a - 1$, de la même manière on voit que $\ker(A - nI)$ est le sous-espace propre de B associé à $a - 1 + bn$. Comme $\dim(\ker(A)) = n - 1$, $\dim(\ker(A - nI)) = 1$ et B diagonalisable, alors on a $\chi_B = (X - a + 1)^{n-1}(X - a - bn + 1)$.

Exercice 121

1. On a $u(1) = 0$, $u(X) = 1 + 2X$ et pour $j \geq 2$, on a

$$u(X^j) = -j(j-1)X^{j-2} + jX^{j-1} + j(j+1)X^j$$

donc on en déduit que la matrice A de u est sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

2. On a $\chi_u = X \prod_{j=1}^n (X - j(j+1))$, donc toutes les racines de χ_u sont simples, par suite, u est diagonalisable.

Exercice 122

On procède par récurrence sur n , où $n = \dim(E)$.

Si $n = 2$, comme $\dim(\ker(u)) = 1$, alors $u \neq 0$, donc $q = 2$.

Supposons $n > 2$ et la propriété vraie pour tout endomorphisme nilpotent d'un K -espace vectoriel de dimension $< n$.

Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et soit u un endomorphisme nilpotent de E d'indice q , tel que $\dim(\ker(u)) = 1$. Puisque $u^q = 0$, alors $\text{Im}(u^{q-1}) \subseteq \ker(u)$ et comme $u^{q-1} \neq 0$ et $\dim(\ker(u)) = 1$, alors on a $\dim(\text{Im}(u^{q-1})) = 1$, donc $\dim(\ker(u^{q-1})) = n - 1$. Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\ker(u^{q-1})$, alors v est un endomorphisme nilpotent de $\ker(u^{q-1})$ d'indice $q - 1$ et on a $\ker(v) = \ker(u)$, donc $\dim(\ker(v)) = 1$. Ainsi d'après l'hypothèse de récurrence, on a $q - 1 = n - 1$, donc $q = n$.

Exercice 123

1. Soit $n = |G|$ l'ordre de G , alors pour tout $a \in G$, on a $a^n = e$, où e est l'élément neutre de G , comme f est un homomorphisme, alors on a $f(a)^n = \text{Id}_E$. Soit $P = X^n - 1$, alors P n'a que des racines simples et puisque $P(f(a)) = 0$, alors $f(a)$ est diagonalisable.
2. d'après la question précédente, on a $P(f(a)) = 0$, donc toute valeur propre de $f(a)$ est de module 1. Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ les valeurs propres de $f(a)$ non nécessairement deux à deux distinctes, alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on a $z_i^{-1} = \bar{z}_i$, il s'ensuit donc que $f(a)^{-1}$ a pour valeurs propres $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n$, donc on a

$$\Phi(a^{-1}) = \text{tr}(f(a)^{-1}) = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i = \overline{\sum_{i=1}^n z_i} = \overline{\text{tr}(f(a))} = \overline{\Phi(a)}$$

Exercice 124

1. Soit $P = X^3 - X^2 + X - 1$, alors on a $P = (X - 1)(X^2 + 1)$. Puisque $P(A) = 0$, alors les valeurs propres possibles de A , considérée comme matrice à coefficients complexes, sont 1, i et $-i$, donc les racines possibles de χ_A sont 1 de multiplicité p , avec $0 \leq p \leq n$, i et $-i$ qui ont la même multiplicité q , avec $0 \leq 2q \leq n$ et $p + 2q = n$. Il en résulte que $\det(A) = 1^p i^q (-i)^q = 1$.
2. On pose $P = X^3 - X - 1$, alors le tableau de variation de la fonction polynôme f associée à P est défini par :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$2\frac{\sqrt{3}}{3}-1 < 0$	$-2\frac{\sqrt{3}}{3}-1$	$+\infty$	

- Donc d'après ce tableau P possède une unique racine réelle α , avec $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{3} > 0$. Donc $P = (X - \alpha)(X^2 + bX + a)$, avec $b^2 - 4a < 0$, par suite, les valeurs propres possibles de A , considérée comme une matrice complexe, sont α de multiplicité p , avec $0 \leq p \leq n$, z et $\bar{z}$ de même multiplicité q , avec $0 \leq 2q \leq n$ et $p + 2q = n$. On en déduit que $\det(A) = \alpha^p z^q \bar{z}^q = \alpha^p |z|^q$, donc $\det(A) > 0$.
3. On pose $P = X^2 + X + 1$ et on suppose que n est impair, donc tout polynôme de degré n possède au moins une racine réelle. On a $\deg(\chi_A) = n$, donc χ_A possède au moins une racine réelle α . On a $P(A) = 0$, donc M_A divise P , avec $M_A \in \mathbb{R}[X]$, donc $M_A = P$ et comme M_A et χ_A ont les mêmes racines, alors α est une racine de P , ce qui est absurde, car P n'a aucune racine réelle.
4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A et soit v l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$. Puisque $u^3 + u^2 + u = 0$, alors on voit facilement que $v^2 + v + Id_{\text{Im}(u)} = 0$, par suite, d'après la question précédente, $rg(u)$ est pair, donc $rg(A)$ est pair.
5. Soit $P = X^4 - 7X^3 + 12X^2$, alors on a $P = X^2(X - 3)(X - 4)$. Puisque $P(A) = 0$, alors les valeurs propres possibles de A sont 0, 3 et 4 de multiplicités respectives r, p, q , avec $0 \leq r, p, q \leq n$ et $r + p + q = n$. Donc on a $\text{tr}(A) = 3p + 4q$, avec $p + q \leq n$, donc on a $\text{tr}(A) \leq 4n - p$, ce qui prouve que $\text{tr}(A) \leq 4n$.

6. Soit $P = X^2 - 3X + 2$, alors on a $P = (X-1)(X-2)$. Puisque $P(A) = 0$, alors les racines possibles de χ_A sont 1 et 2 de multiplicités respectives p et q , avec $0 \leq p, q \leq 6$ et $p + q = 6$. Comme $\text{tr}(A) = 8$, alors on a $2 + 2q = 8$ et comme $p + q = 6$, alors on a $p = 4$ et $q = 2$, donc on en déduit que $\chi_A = (X-1)^4(X-2)^2$. On a $P(A) = 0$ et les racines de P sont simples, donc A est diagonalisable.

Exercice 125

1. Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1} \in K$, tel que $\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \dots + \alpha_{q-1} u^{q-1}(x) = 0$. Puisque $u^q = 0$, alors en appliquant u^{q-1} , on aura $\alpha_0 u^{q-1}(x) = 0$, donc $\alpha_0 = 0$, car $u^{q-1}(x) \neq 0$. On a alors $\alpha_1 u(x) + \dots + \alpha_{q-1} u^{q-1}(x) = 0$, donc en appliquant u^{q-2} , on aura $\alpha_1 u^{q-1}(x) = 0$, donc $\alpha_1 = 0$, car $u^{q-1}(x) \neq 0$. Ainsi, par induction, on a $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{q-1} = 0$, donc $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre, par suite, on a $\dim(F) = q$.

Soit $x \in F$, avec $x = \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i u^i(x)$, alors on a

$$u(x) = \sum_{i=1}^q \alpha_{i-1} u^i(x) = \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_{i-1} u^i(x) \quad (\text{car } u^q(x) = 0)$$

donc $u(x) \in F$, par suite, F est stable par u .

2. a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a ${}^t(u^m) = ({}^t u)^m$, donc $({}^t u)^m = 0$, si et seulement si, $u^m = 0$. On en déduit que si u est nilpotent d'indice q , alors ${}^t u$ est aussi nilpotent d'indice q .
- b) Comme $u^{q-1}(x) \neq 0$, alors il existe $\varphi \in E^*$, tel que $\varphi(u^{q-1}(x)) = 1$.
- c) De la même manière que la question 1), on montre que $\dim(G) = q$ et G stable par ${}^t u$.
- d) Rappelons que ${}^\perp G = \{x \in E : \forall \psi \in G, \langle x, \psi \rangle = 0\}$. Soit $x \in {}^\perp G$ et soit $\psi \in G$, alors on a $\langle u(x), \psi \rangle = \langle x, {}^t u(\psi) \rangle$, comme G est stable par ${}^t u$, alors on a $\langle u(x), \psi \rangle = 0$, donc $u(x) \in {}^\perp G$, par suite, ${}^\perp G$ est stable par u . On a $\dim(G) = q$, donc $\dim({}^\perp G) = n - q$, par suite, on a $\dim(F) + \dim({}^\perp G) = n$, donc il suffit de montrer que $F \cap {}^\perp G = \{0\}$. Soit $y \in F \cap {}^\perp G$, alors $y \in F$ et $y \in {}^\perp G$, donc $y = \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i u^i(x)$ et $\langle y, ({}^t u)^{q-1}(\varphi) \rangle = 0$, car $({}^t u)^{q-1}(\varphi) \in G$.
On a $\langle y, ({}^t u)^{q-1}(\varphi) \rangle = \langle u^{q-1}(y), \varphi \rangle$ et $u^q = 0$, donc on voit que $\alpha_0 \langle u^{q-1}(x), \varphi \rangle = 0$, avec $\langle u^{q-1}(x), \varphi \rangle \neq 0$, donc $\alpha_0 = 0$. Donc $y = \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i u^i(x)$ et comme $\langle y, ({}^t u)^{q-2}(\varphi) \rangle = 0$, alors on a $\alpha_1 = 0$, ainsi par induction, on montre que $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{q-1} = 0$, donc $y = 0$. Nous avons donc établi que $E = F \oplus {}^\perp G$.

3. Pour $n = 2$, on a $q = 2$, car $u \neq 0$. Soit $x \in E$, tel que $u(x) \neq 0$, alors $(u(x), x)$ est une base de E dans laquelle la matrice J de u s'écrit sous la forme $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc la propriété est vraie pour $n = 2$.

Supposons que $n > 2$ et que la propriété est vraie pour tout endomorphisme u d'un K -espace vectoriel de dimension $< n$.

Soit u un endomorphisme nilpotent, non nul, d'indice q d'un K -espace vectoriel de dimension $< n$ et soit $F = \text{Vect}(\{x, u(x), \dots, u^{q-1}(x)\})$.

Si $F = E$, alors la matrice J de u dans la base $(u^{n-1}(x), \dots, u(x), x)$ s'écrit sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $F \neq E$, on considère le sous-espace ${}^\perp G$, alors d'après la question précédente, on a $E = F \oplus {}^\perp G$, avec F et ${}^\perp G$ stables par u . Soient v et w les endomorphismes induit par u respectivement sur F et ${}^\perp G$, comme $\dim(F) < n$ et $\dim({}^\perp G) > n$, alors il existe une base β de F et une base γ de ${}^\perp G$, telles que les matrices de v et w par rapport aux bases β et γ respectivement sont des matrices de Jordan. On en déduit que la matrice de u par rapport à la base (β, γ) est une matrice de Jordan.

Exercice 126

- a) Un simple calcul donne $\chi_u = (X - 1)^2(X - 2)^2$. Soit $x \in \mathbb{R}^4$, avec $x = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$, alors on a

$$\begin{aligned} x \in E_1 &\iff \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff a = c \text{ et } b = d = 0 \end{aligned}$$

Donc on a $E_1 = \text{Vect}(e_1 + e_3)$.

$$\begin{aligned} x \in E_2 &\iff \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff a = b = d \text{ et } c = 0 \end{aligned}$$

Donc on a $E_2 = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_4)$.

b) Un simple calcul donne $(u - Id_E)^2(e_1) = 0$ et $(u - 2Id_E)^2(e_1 - e_2) = 0$.
On a $(u - Id_E)(e_1) \neq 0$ et $(u - 2Id_E)(e_1 - e_2) = 0$, donc si on pose

$$\begin{cases} v_1 = (u - Id_E)(e_1) = -e_1 - e_3 \\ v_2 = e_1 \\ v_3 = (u - 2Id_E)(e_1 - e_2) = -e_1 - e_2 - e_4 \\ v_4 = e_1 - e_2 \end{cases}$$

alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de Jordan de u et la matrice J de u dans cette base s'écrit sous la forme

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3, e_4) à (v_1, v_2, v_3, v_4) , alors on a

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$ et $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix}$, alors on voit

facilement que $Y'(t) = JY(t)$, on obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = 2y_3 + y_4 \\ y_4' = 2y_4 \end{cases} \quad \text{qui admet pour solution} \quad \begin{cases} y_1(t) = (C_1 + C_2t)e^t \\ y_2(t) = C_2e^t \\ y_3(t) = (C_3 + C_4t)e^{2t} \\ y_4(t) = C_4e^{2t} \end{cases}$$

On en déduit que $X'(t) = AX(t)$ a pour solution $X(t) = PY(t)$.

Exercice 127

- On a $A = D + N$, donc $A^p = D^p + \sum_{k=1}^p C_p^k D^{p-k} N^k$. Comme N est nilpotent, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, N^k est nilpotent et comme $ND = DN$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $D^{p-k} N^k = N^k D^{p-k}$, donc $D^{p-k} N^k$ est nilpotent. On pose $\Delta = D^p$ et $\nu = \sum_{k=1}^p C_p^k D^{p-k} N^k$, alors Δ est diagonalisable, car D est diagonalisable, et ν est une somme de nilpotents deux à deux commutant, donc ν est nilpotent. Ainsi, comme $\Delta\nu = \nu\Delta$, alors d'après l'unicité de la décomposition de Dunford, on a $A^p = \Delta + \nu$.

2. a) On a $D = A - N = A(I - A^{-1}N)$, puis comme $A^{-1}N = NA^{-1}$, alors $A^{-1}N$ est nilpotent, donc 1 n'est pas valeur propre de $A^{-1}N$, par suite, $I - A^{-1}N$ est inversible. On en déduit donc que D est inversible.

b) Soit q l'indice de nilpotence de N' , alors on a

$$I = I - (-N')^q = (I + N') \sum_{k=0}^{q-1} (-N')^k$$

donc $I + N'$ est inversible et on a $(I + N')^{-1} = \sum_{k=0}^{q-1} (-N')^k$.

c) On a $(I + N')^{-1}D^{-1} = (D(I + N'))^{-1}$ et on a $N' = D^{-1}N$, donc $(I + N')^{-1}D^{-1} = (D + N)^{-1} = A^{-1}$.

On a $(I + N')^{-1} = \sum_{k=0}^{q-1} (-N')^k$, donc $A^{-1} = D^{-1} + \sum_{k=1}^{q-1} (-N')^k$, D^{-1}

diagonalisable, $\sum_{k=1}^{q-1} (-N')^k$ nilpotent et D^{-1} commute avec $\sum_{k=1}^{q-1} (-N')^k$ donc d'après l'unicité de la décomposition de Dunford, on voit que

$$A^{-1} = D^{-1} + \sum_{k=1}^{q-1} (-1)^k D^{-k} N^k$$

est bien la décomposition de Dunford de A^{-1} .

Exercice 128

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, alors χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, donc d'après le théorème de Jordan, il existe une matrice de Jordan J et une matrice inversible P , telles que $A = PJP^{-1}$. Donc pour montrer que A et ${}^tA$ sont semblables, il suffit de montrer que J et ${}^tJ$ sont semblables. On sait que $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r)$, où chaque J_i , $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, est une cellule de Jordan :

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a ${}^tJ = \text{diag}({}^tJ_1, {}^tJ_2, \dots, {}^tJ_r)$, donc il suffit de montrer que toute cellule de Jordan J est semblable à sa transposée. Pour cela, il suffit de considérer la

matrice P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

alors on voit facilement que $P^2 = I$ et que $PJP = {}^tJ$, donc J et ${}^tJ$ sont semblables.

Exercice 129

1. On a D est diagonalisable, donc $D' = \exp(D)$ est diagonalisable.
Soit q l'indice de nilpotence de N , alors on a

$$\exp(N) - I = \sum_{k=1}^{q-1} N^k = N \left(\sum_{k=0}^{q-1} N^{k-1} \right) = \left(\sum_{k=0}^{q-1} N^{k-1} \right) N$$

puisque $N^q = 0$, alors $(\exp(N) - I)^q = 0$, donc $\exp(N) - I$ est nilpotent.
On a $ND = DN$, donc $(\exp(N) - I)\exp(D) = \exp(D)(\exp(N) - I)$,
par suite, $(\exp(N) - I)\exp(D)$ est nilpotent.
On en déduit que $\exp(D) + N'$, avec $N' = (\exp(N) - I)\exp(D)$, est la décomposition de Dunford de $\exp(A)$.

2. On a $A = D + N$ et $\exp(A) = \exp(D) + N'$, donc on a

$$\begin{aligned} A \text{ est diagonalisable} &\iff N = 0 \\ &\iff N' = 0 \quad (\text{car } N' = \exp(N) - I) \\ &\iff \exp(A) \text{ est diagonalisable} \end{aligned}$$

3. On pose $\mathcal{A} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \exp(A) = I\}$ et soit $A \in \mathcal{A}$, alors d'après la question précédente, A est diagonalisable, car $\exp(A)$ est diagonalisable. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres, non nécessairement deux à deux distinctes, de A et soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. On a alors $\exp(A) = I$, si et seulement si, $\exp(D) = I$, donc $\exp(A) = I$, si et seulement si, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $e^{\lambda_j} = 1$. On en déduit donc que $\mathcal{A} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \text{Sp}(A) \subseteq 2i\pi\mathbb{Z}\}$.

Exercice 130

1. Soit λ une valeur propre de A , alors il existe $x \in \mathbb{C}^n$, avec $x \neq 0$, tel que $Ax = \lambda x$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $A^k x = \lambda^k x$, donc $\|A^k x\| = |\lambda|^k \|x\|$, puis comme $x \neq 0$, alors $|\lambda|^k \leq \|A^k\|$, donc $|\lambda| \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$. Il en résulte donc que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$.

2. On suppose que A est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P , tel que $A = PDP^{-1}$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\|A^k\| \leq \|P\| \|P^{-1}\| \|D^k\|$. Comme D^k est diagonale et comme les valeurs propres de D^k sont $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_r^k$, alors on a $\|D^k\| = \max_{1 \leq i \leq r} |\lambda_i|^k = \rho(A)^k$, donc $\|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \alpha^{\frac{1}{k}} \rho(A)$, où $\alpha = \|P\| \|P^{-1}\|$.
Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \alpha^{\frac{1}{k}} \rho(A)$. Puisque $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^{\frac{1}{k}} = 1$, alors on a $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.
3. D'après la décomposition de Dunford, on a $A = D + N$, avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$, donc pour $k \geq n$, on a

$$A^k = \sum_{j=0}^k C_k^j N^j D^{k-j} = D^{k-n} \sum_{j=0}^n C_k^j N^j D^{n-j} \quad (\text{car } N^j = 0 \text{ pour } j \geq n)$$

Donc pour $k \geq n$, on a

$$\begin{aligned} \|A^k\| &\leq \|D^{k-n}\| \max_{1 \leq j \leq n} \|N^j D^{n-j}\| \sum_{j=0}^n C_k^j \\ &\leq \|D^{k-n}\| \max_{1 \leq j \leq n} \|N^j D^{n-j}\| \sum_{j=0}^k C_k^j \\ &\leq 2^k \delta \|D^{k-n}\| \quad \text{où } \delta = \max_{1 \leq j \leq n} \|N^j D^{n-j}\| \end{aligned}$$

Pour tout $k \geq n$, on a $\rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq 2\delta^{\frac{1}{k}} \|D^{k-n}\|^{\frac{1}{k}}$. D est diagonalisable et $\rho(D) = \rho(A)$, donc d'après la question précédente, on a $\lim_{k \rightarrow \infty} \|D^{k-n}\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$, donc on en déduit que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

Exercice 131

D'après la décomposition de Dunford, on a $A = D + N$, avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$, donc on a $\exp(A) = \exp(D) \exp(N)$.

Puisque N est nilpotente, alors 1 est l'unique valeur propre de $\exp(N)$, donc $\det(\exp(N)) = 1$.

Puisque D est diagonalisable, alors il existe P inversible et il existe Δ diagonale, telles que $\exp(D) = P \exp(\Delta) P^{-1}$, donc on a $\det(\exp(D)) = \det(\exp(\Delta))$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A , non nécessairement deux à deux distinctes, alors $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, sont aussi les valeurs propres de D , donc on a

$$\det(\exp(D)) = \det(\exp(\Delta)) = \prod_{i=1}^n \exp(\lambda_i) = \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) = \exp(\text{tr}(D))$$

Comme $\text{tr}(D) = \text{tr}(A)$, alors d'après ce qui précède, on a

$$\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$$

Exercice 132

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a ${}^t(A^k) = ({}^tA)^k$, donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^N \frac{({}^tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^N \frac{{}^t(A^k)}{k!} = {}^t \left(\sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right)$$

L'application qui à M fait correspondre ${}^tM$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$, donc on

$$\exp({}^tA) = \lim_{N \rightarrow \infty} {}^t \left(\sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right) = {}^t \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right) = {}^t \exp(A)$$

2. a) Si A est antisymétrique, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$${}^t \exp(tA) \exp(tA) = \exp(t{}^tA) \exp(tA) = \exp(t({}^tA + A)) = \exp(0) = I$$

donc $\exp(tA)$ est une matrice orthogonale.

- b) On pose $\varphi(t) = {}^t \exp(tA) \exp(tA)$, alors on voit facilement que $\varphi'(t) = ({}^tA + A)\varphi(t)$.
- c) Si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA)$ est orthogonal, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(t) = I$, donc φ est constante, par suite, $\varphi' = 0$. On en déduit donc que ${}^tA + A = 0$, donc A est antisymétrique.

CHAPITRE 7

FORMES BILINÉAIRES SYMÉTRIQUES - FORMES QUADRATIQUES

7.1 Formes bilinéaires symétriques

7.1.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 7.1.1

Soit E un K -espace vectoriel, où K est un corps commutatif.

a) On dit qu'une application $f : E \times E \longrightarrow K$ est une forme bilinéaire sur E , si

i) Pour tout $y \in E$, l'application,

$$\begin{aligned}\varphi_y : E &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto \varphi_y(x) = f(x, y)\end{aligned}$$

est une forme linéaire sur E .

ii) Pour tout $x \in E$, l'application,

$$\begin{aligned}\varphi_x : E &\longrightarrow K \\ y &\longmapsto \varphi_x(y) = f(x, y)\end{aligned}$$

est une forme linéaire sur E .

b) Une forme bilinéaire f sur E est dite *symétrique*, si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, f(y, x) = f(x, y)$$

c) Une forme bilinéaire f sur E est dite *antisymétrique*, si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, f(y, x) = -f(x, y)$$

Remarque 82

1. Si f est une forme bilinéaire quelconque, alors

$$\forall x \in E, \forall y \in E, f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y)$$

$$\forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \forall x \in E, \forall y \in E, f(\alpha x, \beta y) = \alpha \beta f(x, y)$$

2. Si f est une forme bilinéaire *symétrique*, alors

$$\forall x \in E, \forall y \in E, f(x + y, x + y) = f(x, x) + 2f(x, y) + f(y, y)$$

3. Si f est *antisymétrique*, alors

$$\forall x \in E, f(x, x) = 0$$

Notations

On désigne par $\mathcal{L}_2(E)$ l'ensemble de toutes les formes bilinéaires sur E , $\mathcal{S}_2(E)$ l'ensemble de toutes les formes bilinéaires *symétriques* sur E et $\mathcal{A}_2(E)$ celui de toutes les formes bilinéaires *antisymétriques* sur E

Proposition 7.1.1

Soit E un K -espace vectoriel quelconque, alors

- i) $\mathcal{L}_2(E)$ est un K -espace vectoriel.
- ii) Si K est un corps de caractéristique $\neq 2$, alors on a

$$\mathcal{L}_2(E) = \mathcal{S}_2(E) \oplus \mathcal{A}_2(E)$$

Démonstration. i) Il est facile de vérifier que la somme de deux formes linéaires et la multiplication d'une forme linéaire par un scalaire sont aussi des formes linéaires, donc $\mathcal{L}_2(E)$ est un sous-espace vectoriel du K -espace vectoriel de toutes les applications de $E \times E$ vers K .

- ii) Remarquons d'abord que si K est un corps de caractéristique $= 2$, alors $1_K = -1_K$, donc dans ce cas $\mathcal{S}_2(E) = \mathcal{A}_2(E)$.
 Supposons, maintenant que K est un corps de caractéristique $\neq 2$. Soit f une forme bilinéaire qui est à la fois symétrique et antisymétrique, alors on aura

$$\forall (x, y) \in E \times E, f(x, y) = f(y, x) \text{ et } f(x, y) = -f(y, x)$$

Donc $\forall (x, y) \in E \times E, 2_K f(x, y) = 0_K$, puisque $2_K \neq 0_K$, alors on a,

$$\forall (x, y) \in E \times E, f(x, y) = 0_K$$

Donc $\mathcal{S}_2(E) \cap \mathcal{A}_2(E) = \{0\}$.

Soit $f \in \mathcal{L}_2(E)$ et soient g et h les applications de $E \times E$ vers K définies pour tout $(x, y) \in E \times E$, par

$$g(x, y) = \frac{f(x, y) + f(y, x)}{2} \text{ et } h(x, y) = \frac{f(x, y) - f(y, x)}{2}$$

Alors, il est facile de vérifier que g est bilinéaire symétrique, que h est bilinéaire antisymétrique et que $f = g + h$. Donc on a $\mathcal{L}_2(E) = \mathcal{S}_2(E) + \mathcal{A}_2(E)$. □

Dans toute la suite, sauf indication du contraire, on suppose que K est un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$.

7.1.2 Matrice d'une forme bilinéaire

Définition 7.1.2

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et f une forme bilinéaire sur E . On appelle matrice de f par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ définie par

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, a_{ij} = f(e_i, e_j)$$

Remarque 83

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

1. Si f est une forme bilinéaire, alors $A = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice de f par rapport à la base β .

2. Réciproquement, soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K et soit $f : E \times E \rightarrow K$, l'application définie par :

$$\forall (x, y) \in E \times E, f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

où $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, alors f définit une forme bilinéaire sur

E , dont la matrice par rapport à la base β est égale à A .

Signalons que l'expression, ci-dessus, de $f(x, y)$ peut aussi s'écrire sous la forme :

$$f(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i y_j$$

ou encore sous la forme :

$$f(x, y) = \sum_{(i, j) \in \mathbb{N}_n^2} a_{ij} x_i y_j \quad (\text{où } \mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\})$$

3. Si f est une forme bilinéaire sur E et si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice de f par rapport à la base β , alors

i) f est symétrique $\iff {}^t A = A$.

Donc, si f est symétrique, alors pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on a $a_{ij} = a_{ji}$, par suite, dans ce cas, l'expression de $f(x, y)$ s'écrit sous la forme :

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (x_i y_j + x_j y_i)$$

Donc, en particulier, si f est symétrique, alors,

$$\forall x \in E, f(x, x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

ii) f est antisymétrique $\iff {}^t A = -A$.

7.1.3 Ecriture matricielle

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E , $f : E \times E \rightarrow K$ une forme bilinéaire sur E et A la matrice de f par rapport à la base β . Pour chaque $x \in E$ avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on pose

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{donc } {}^t X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Alors f possède une expression matricielle sous la forme :

$$\forall (x, y) \in E \times E, f(x, y) = {}^tXAY$$

7.1.4 Changement de base

Proposition 7.1.2

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\beta' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E , f une forme bilinéaire sur E , A et B sont respectivement les matrices de f par rapport aux bases β et β' . Soit P la matrice de passage de la base β à la base β' , alors on a

$$B = {}^tPAP$$

Démonstration. En utilisant l'écriture matricielle par rapport aux bases β et β' , alors pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a $f(x, y) = {}^tXAY = {}^tX'BY'$, avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i = \sum_{i=1}^n y'_i e'_i$.

Soit P la matrice de passage de la base β à la base β' , alors on sait que $X = PX'$ et $Y = PY'$, par suite, on a

$${}^tXAY = {}^t(PX')A(PY') = {}^tX'{}^tPAPY' = {}^tX'({}^tPAP)Y'$$

La multiplication des matrices est associative, donc pour tout $X' \in K^n$ et pour tout $Y' \in K^n$, on a ${}^tX'BY' = {}^tX'({}^tPAP)Y'$, donc d'après l'unicité de la matrice d'une forme bilinéaire par rapport à une base, on a $B = {}^tPAP$. $\square$

7.1.5 Rang d'une forme bilinéaire

Rappelons que deux matrices carrées A et B sont dites équivalentes, s'il existe deux matrices inversibles P et Q , telles que $B = QAP$. Rappelons aussi que deux matrices sont équivalentes, si et seulement si, elles ont le même rang.

Définition 7.1.3

Soit K un corps commutatif. Deux matrices carrées A et B à coefficients dans K sont dites **congruentes**, s'il existe une matrice inversible P , tel que $B = {}^tPAP$.

Remarque 84

1. Deux matrices sont donc congruentes, si elles représentent la même forme bilinéaire par rapport à deux bases de E .
2. Deux matrices congruentes sont équivalentes, donc deux matrices congruentes ont même rang. Ainsi, la définition suivante est justifiée :

Définition 7.1.4

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E , $f : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire sur E et A la matrice de f par rapport à la base β . On définit le rang de f , noté $rg(f)$, par :

$$rg(f) = rg(A)$$

7.1.6 Formes bilinéaires symétriques non dégénérées**Définition 7.1.5**

Soient E un K -espace vectoriel quelconque et f une forme bilinéaire symétrique sur E . On considère l'application $\Phi : E \longrightarrow E^*$ définie par :

$$\forall y \in E, \Phi(y) = \varphi_y \text{ où } \forall x \in E, \varphi_y(x) = f(x, y)$$

Si Φ est injective, on dit que f est non dégénérée.

Remarque 85

D'après la définition précédente, f est non dégénérée, si et seulement si, pour tout $y \in E$, on a

$$[\forall x \in E, f(x, y) = 0] \implies y = 0$$

Cela signifie que si pour un certain $y \in E$, on a $f(x, y) = 0$ pour tout $x \in E$, alors nécessairement, on a $y = 0$.

Proposition 7.1.3

Soient E un K -espace vectoriel de *dimension finie*, β une base de E , f une forme bilinéaire symétrique sur E et A la matrice de f par rapport à la base β . Alors,

$$[f \text{ est non dégénérée}] \iff \det(A) \neq 0$$

Démonstration. On considère l'application $\Phi : E \longrightarrow E^*$ qui à chaque y fait correspondre φ_y . Posons $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et soit $\beta^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de β . Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de Φ par rapport aux bases β et β^* , alors pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $\Phi(e_j) = \sum_{k=1}^n m_{kj} e_k^*$. Donc pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$f(e_i, e_j) = \Phi(e_j)(e_i) = \sum_{k=1}^n m_{kj} e_k^*(e_i) = m_{ij} \quad (\text{car } e_k^*(e_i) = \delta_{ik})$$

On en déduit donc que $M = A$. Ainsi, on aura,

$$\begin{aligned} f \text{ est non dégénérée} &\iff \Phi \text{ est injective} \quad (\text{par définition}) \\ &\iff \Phi \text{ est bijective} \quad (\text{car } E \text{ et } E^* \text{ ont même dimension}) \\ &\iff \det(M) \neq 0 \\ &\iff \det(A) \neq 0 \quad (\text{car } M = A) \end{aligned}$$

7.1.7 Orthogonalité

Définition 7.1.6

Soient E un K -espace vectoriel quelconque, f une forme bilinéaire symétrique sur E . Soit A une partie non vide de E , on définit l'orthogonale de A , par rapport à la forme bilinéaire f , noté $A^\perp$, par :

$$\forall y \in E, y \in A^\perp \iff \forall x \in A, f(x, y) = 0$$

Remarque 86

1. Pour chaque $x \in E$, soit $\varphi_x \in E^*$ définie pour tout $y \in E$, par $\varphi_x(y) = f(x, y)$. Soit A une partie non vide de E , alors on voit facilement que pour tout $y \in E$, on a

$$y \in A^\perp \iff y \in \bigcap_{x \in A} \ker(\varphi_x)$$

On en déduit, donc, que $A^\perp = \bigcap_{x \in A} \ker(\varphi_x)$. Donc pour toute partie non vide A de E , même si A n'est pas un sous-espace vectoriel de E , $A^\perp$ est toujours un sous-espace vectoriel de E .

2. Si A et B sont deux parties non vides de E et si $A \subseteq B$, alors $B^\perp \subseteq A^\perp$.
3. Pour toute partie non vide A de E , on a $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.
En effet, on a $A \subseteq \text{Vect}(A)$, donc, d'après la remarque précédente $\text{Vect}(A)^\perp \subseteq A^\perp$. Soit $y \in A^\perp$ et soit $x \in \text{Vect}(A)$, alors, par définition, il existe $x_1, x_2, \dots, x_m$ éléments de A et il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ dans K , tels que $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, on a $f(x_i, y) = 0$, donc on aura

$$f(x, y) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y) + \dots + \alpha_m f(x_m, y) = 0$$

par suite, $y \in \text{Vect}(A)^\perp$.

4. D'après la remarque précédente, on pose, par convention,

$$\emptyset^\perp = \text{Vect}(\emptyset)^\perp = \{0\}^\perp = E$$

5. $E^\perp$ s'appelle le noyau de f , on le note N_f , donc on a

$$x \in N_f \iff \forall y \in E, f(x, y) = 0$$

Soit $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de f par rapport à β . Comme $E = \text{Vect}(\beta)$, alors on a

$E^\perp = \beta^\perp$, donc pour tout $x \in E$, avec $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, on a

$$\begin{aligned} x \in N_f &\iff \forall j \in \mathbb{N}_n, f(x, e_j) = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = 0 \\ &\iff x \in \ker(A) \quad (\text{car } {}^t A = A) \end{aligned}$$

On en déduit donc que $N_f = \ker(A)$.

Proposition 7.1.4

Soient E un K espace vectoriel de dimension finie et f une forme bilinéaire symétrique sur E , alors pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a

- i) $\dim(F) + \dim(F^\perp) \geq \dim(E)$.
- ii) *Si de plus f est non dégénérée, alors on a*

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$$

Démonstration. On considère l'application $\Psi : E \longrightarrow F^*$ définie par :

$$\forall y \in E, \forall x \in F, \quad \Psi(y)(x) = f(x, y)$$

Alors, il est clair que Ψ est linéaire et que $\ker(\Psi) = F^\perp$.

- i) D'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(\Psi)) + \dim(\text{Im}(\Psi)) = \dim(E)$.
On a aussi $\text{Im}(\Psi) \subseteq F^*$, donc $\dim(\text{Im}(\Psi)) \leq \dim(F^*)$. Or, on sait que $\dim(F^*) = \dim(F)$, donc on a $\dim(F^\perp) + \dim(F) \geq \dim(E)$.
- ii) Supposons que f est non dégénérée et montrons que $\text{Im}(\Psi) = F^*$.

Soit $\varphi \in F^*$, existe-t-il $y \in E$, tel que $\Psi(y) = \varphi$?

$\varphi \in F^*$, donc, d'après le théorème de prolongement des formes linéaires, il existe $\psi \in E^*$, tel que pour tout $x \in F$, on a $\psi(x) = \varphi(x)$. Or f est non dégénérée et E de dimension finie, donc l'application $\Phi : E \longrightarrow E^*$, où pour tout $z \in E$ et pour tout $x \in E$, on a $\Phi(z)(x) = f(x, z)$ est bijective. On a $\psi \in E^*$, donc il existe $z \in E$, tel que $\Phi(z) = \psi$, par conséquent, on a

$$\forall x \in F, \quad \Psi(z)(x) = f(x, z) = \Phi(z)(x) = \psi(x) = \varphi(x)$$

On en déduit donc que $\Psi(z) = \varphi$, donc Ψ est surjective et ainsi on a $\text{Im}(\Psi) = F^*$. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(F^\perp) + \dim(F) = \dim(E)$$

Corollaire 7.1.1

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E . Alors pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $F^{\perp\perp} = F$.

Démonstration. Puisque f est non dégénérée, alors on a

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(F^\perp) + \dim(F^{\perp\perp}) = \dim(E)$$

donc, $\dim(F^\perp) = \dim(F^{\perp\perp})$. Comme $F \subseteq F^{\perp\perp}$, alors on a $F = F^{\perp\perp}$. $\square$

Remarque 87

1. Si f est une forme bilinéaire symétrique quelconque sur E , où E est de dimension finie, alors pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $F^{\perp\perp} = F + N$, où N le noyau de f . (Voir exercice 133)
2. Si f est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E , où E est de dimension finie, alors pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$$

Par contre, même si f est non dégénérée, on a pas toujours $E = F \oplus F^\perp$. Par exemple, on prend $E = \mathbb{R}^2$ muni de la forme bilinéaire f définie pour tout $(x, y) \in E^2$, par $f(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$, où $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$. Soient (e_1, e_2) la base canonique de E et A la matrice de f par rapport à (e_1, e_2) , alors on a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Donc $\det(A) = -1 \neq 0$, par suite f est non dégénérée.

Soit $F = \text{Vect}(e_1 + e_2)$ et soit $y \in E$, avec $y = (y_1, y_2)$, alors on voit facilement que $F^\perp = F$.

7.1.8 Isotropie

Définition 7.1.7

E un K -espace vectoriel et f une forme bilinéaire symétrique sur E .

- i) On dit que deux vecteurs x et y de E sont **orthogonaux**, si $f(x, y) = 0$.
- ii) On dit qu'un vecteur $x \in E$ est **isotrope**, si $f(x, x) = 0$.
- iii) Un sous-espace vectoriel F de E est dit **isotrope**, si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$.
- iv) Un sous-espace vectoriel F de E est dit **totalelement isotrope**, si $F \subseteq F^\perp$.

Remarque 88

On désigne par $\mathcal{I}$ l'ensemble de tous les vecteurs isotropes de E , alors on a

- a) $0 \in \mathcal{I}$.

b) $\forall \lambda \in K, \forall x \in \mathcal{I}, \lambda x \in \mathcal{I}$.

Par contre $\mathcal{I}$ n'est pas stable pour l'addition. Par exemple, si on prend $E = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$, $x = e_1 + e_2$ et $y = e_1 - e_2$, alors on aura,

$$f(x, x) = f(y, y) = 0 \text{ et } f(x + y, x + y) = 2$$

Théorème 7.1.1

Soient E un K -espace vectoriel quelconque, f une forme bilinéaire symétrique sur E et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors

$$E = F \oplus F^\perp \iff F \text{ est non isotrope}$$

Démonstration. $(\implies)$ Trivial.

$(\impliedby)$ Supposons que F est non isotrope, donc $F \cap F^\perp = \{0\}$. Il suffit donc de montrer que $F + F^\perp = E$. Pour cela, on considère l'application $g : F \times F \longrightarrow K$ définie pour tout $(x, y) \in F \times F$, par $g(x, y) = f(x, y)$, alors g est une forme bilinéaire symétrique sur F . Soit $y \in F$, tel que pour tout $x \in F$, on a $g(x, y) = 0$, alors $y \in F \cap F^\perp$, donc $y = 0$, car F est non isotrope. On en déduit donc que g est non dégénérée.

Soit maintenant $y \in E$, montrons qu'il existe $(y_1, y_2) \in F \times F^\perp$, tel que $y = y_1 + y_2$. Pour cela, on considère la forme linéaire φ_y définie pour tout $x \in F$ par $\varphi_y(x) = f(x, y)$. Puisque g est non dégénérée et F de dimension finie, alors l'application $\Psi : F \longrightarrow F^*$ définie pour tout $z \in F$ et pour tout $x \in F$ par $\Psi(z)(x) = g(x, z)$ est bijective. On a $\varphi_y \in F^*$, donc il existe $y_1 \in F$, tel que $\Psi(y_1) = \varphi_y$.

Montrons que $y - y_1 \in F^\perp$. Pour cela, soit $x \in F$, alors on a

$$\begin{aligned} f(x, y - y_1) &= f(x, y) - f(x, y_1) \\ &= f(x, y) - g(x, y_1) \quad (\text{car } (x, y_1) \in F \times F) \\ &= \varphi_y(x) - \Psi(y_1)(x) = 0 \quad (\text{car } \Psi(y_1) = \varphi_y) \end{aligned}$$

Donc $y - y_1 \in F^\perp$. Par suite, si on pose $y_2 = y - y_1$, alors $y = y_1 + y_2$.

□

7.1.9 Bases orthogonales

Définition 7.1.8

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et f une forme bilinéaire symétrique sur E . On dit qu'une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est **orthogonale**, si

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j \implies f(e_i, e_j) = 0$$

Remarque 89

Supposons que E possède une base orthogonale $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de f par rapport à β , donc pour $i \neq j$, on a $a_{ij} = f(e_i, e_j) = 0$. Donc A est une matrice diagonale et on a pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, $f(x, y) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i y_i$. Donc, en particulier, pour tout $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $f(x, x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2$.

Dans la suite on se propose de montrer que toute forme bilinéaire symétrique possède au moins une base orthogonale.

Lemme 7.1.1

Soient E un K -espace vectoriel et f une forme bilinéaire symétrique sur E . Alors

$$f \text{ est identiquement nulle} \iff \forall x \in E, f(x, x) = 0$$

Démonstration. $(\implies)$ Trivial.

$(\impliedby)$ Supposons que pour tout $x \in E$, $f(x, x) = 0$ et montrons que f est identiquement nulle. Soient $(x, y) \in E \times E$, alors on a $f(x+y, x+y) = 0$. On a aussi $f(x+y, x+y) = f(x, x) + 2f(x, y) + f(y, y) = 2f(x, y)$, donc $f(x, y) = 0$, car K est un corps de caractéristique $\neq 2$. $\square$

Théorème 7.1.2

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Alors toute forme bilinéaire symétrique f sur E , possède au moins une base orthogonale.

Démonstration. Si f est identiquement nulle, alors toute base de E est orthogonale. On peut donc supposer que $f \neq 0$, donc d'après le lemme précédent, il existe au moins un $x_0 \in E$, tel que $f(x_0, x_0) \neq 0$.

Posons $F = \text{Vect}(x_0)$, puisque $f(x_0, x_0) \neq 0$ alors F est non isotrope, donc d'après le théorème 7.1.1, on a $E = F \oplus F^\perp$. Donc pour montrer l'existence d'une base orthogonale, nous sommes amenés à procéder par récurrence sur $n = \dim(E)$, avec $n \geq 2$.

Pour $n = 2$, soient $e_1 = x_0$ et e_2 un vecteur quelconque de $F^\perp$, avec $e_2 \neq 0$, alors (e_1, e_2) est une base orthogonale de E .

H.R « Supposons que $n > 2$ et que toute forme bilinéaire symétrique sur un K -espace vectoriel de dimension $< n$, possède au moins une base orthogonale ». Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et soit g la restriction de f à $F^\perp \times F^\perp$, alors g est une forme bilinéaire symétrique sur $F^\perp$, avec $\dim(F^\perp) = n - 1$. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $F^\perp$ possède au moins une base orthogonale $(e_1, \dots, e_{n-1})$.

On déduit donc que $(e_1, \dots, e_{n-1}, x_0)$ est une base orthogonale de E . $\square$

7.2 Formes quadratiques

7.2.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 7.2.1

*Soit E un K -espace vectoriel. On dit qu'une application $q : E \longrightarrow K$ est une **forme quadratique** sur E , s'il existe une forme bilinéaire f , telle que*

$$\forall x \in E, q(x) = f(x, x)$$

Exemples

*Si f est une forme bilinéaire symétrique sur E , alors l'application $q : E \longrightarrow K$ définie pour tout $x \in E$, par $q(x) = f(x, x)$ est une forme quadratique sur E , appelée **forme quadratique associée** à la forme bilinéaire symétrique f .*

Réciproquement, à toute forme quadratique, on peut associer une forme bilinéaire symétrique unique, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 7.2.1

Soient E un K -espace vectoriel et q une forme quadratique sur E . Alors il existe une forme bilinéaire symétrique unique f sur E , telle que

$$\forall x \in E, q(x) = f(x, x)$$

Dans ce cas, f s'appelle la forme polaire associée à la forme quadratique q et on a la relation suivante :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, f(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

Démonstration. q est une forme quadratique sur E , donc, par définition, il existe une forme bilinéaire g sur E , telle que pour tout $x \in E$, on a $q(x) = g(x, x)$. Soit $f : E \times E \longrightarrow K$ l'application définie par :

$$\forall (x, y) \in E \times E, f(x, y) = \frac{g(x, y) + g(y, x)}{2}$$

Alors f est une forme bilinéaire symétrique sur E et on a

$$\forall x \in E, f(x, x) = \frac{g(x, x) + g(x, x)}{2} = g(x, x) = q(x)$$

Puisque f est symétrique, alors pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a

$$q(x+y) = f(x+y, x+y) = f(x, x) + 2f(x, y) + f(y, y) = q(x) + 2f(x, y) + q(y)$$

donc pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

Cette relation entre q et f assure l'unicité de f . □

Remarque 90

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, q une forme quadratique sur E et f la forme polaire associée à q .

1. Soit β une base de E et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de f par rapport à β . Alors A s'appelle aussi la matrice de q par rapport à β et on a

$$\forall x \in E, q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j$$

On voit alors que pour chaque $i \in \mathbb{N}_n$, on a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^n a_{ij}x_j$$

donc si on pose $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, alors on a

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \forall j \in \mathbb{N}_n, a_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_i}(e_j)$$

D'autre part, comme q est un polynôme homogène de degré 2 et comme la matrice A est symétrique, alors d'après la formule de Taylor, on a

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2}(0)x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_i x_j$$

Ainsi, on voit que

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \forall j \in \mathbb{N}_n, a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2}(0) & \text{si } i = j \\ \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j}(0) & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

2. Pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial q}{\partial x_j}(x)y_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial q}{\partial y_i}(y)x_i$$

3. Puisque f est symétrique, alors f possède au moins une base orthogonale β , appelé aussi base q -orthogonale. Dans ce cas, q s'écrit, par rapport à cette base, sous la forme réduite suivante :

$$\forall x \in E, q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2$$

4. Le rang d'une forme quadratique est défini comme étant le rang de sa forme polaire associée.

Théorème 7.2.1 (Réduction d'une forme quadratique)

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et q une forme quadratique sur E de rang r . Alors il existe des formes linéaires $l_1, l_2, \dots, l_r$, linéairement indépendantes et il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, non nuls, tels que

$$\forall x \in E, q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i l_i(x)^2$$

Démonstration. Fixons une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E , alors pour tout $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$.

D'après le théorème 7.1.8, q possède au moins une base q -orthogonale

$(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Soit A la matrice de q par rapport à cette base, donc A est une matrice diagonale de rang r , par suite le nombre des coefficients diagonaux non nuls est égal à r . Donc quitte à réordonner les vecteurs de la base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, on peut supposer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a $a_{ii} \neq 0$. Donc si pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on pose $\lambda_i = a_{ii}$, alors pour chaque $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^n X_i v_i$, on a $q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i X_i^2$. Soit $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de passage de la base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ à la base $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, alors on sait que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, X_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j$$

Soit $\beta^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de β , alors, par définition, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $x_j = e_j^*(x)$, donc si pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on pose $l_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} e_j^*$, alors $\det_{\beta^*}(l_1, l_2, \dots, l_n) \neq 0$, donc $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ est une base de E^* , par suite, $(l_1, l_2, \dots, l_r)$ est libre et on a

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, X_i = l_i(x)$$

7.2.2 Méthode de Gauss de réduction d'une forme quadratique

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $q : E \rightarrow K$ une forme quadratique non nulle. Alors on sait que pour

tout $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$. Nous allons appliquer la méthode de Gauss pour décomposer q sous forme de carrés. Pour cela, on procède par récurrence sur n , avec $n \geq 2$.

Pour $n = 2$, toute formes quadratique sur s'écrit sous la forme

$$q(x) = ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2$$

Si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors on peut supposer, par exemple, que $a \neq 0$, puis on procède de la manière suivante :

$$\begin{aligned} q(x) &= ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2 \\ &= a\left[x_1^2 + \frac{2c}{a}x_1x_2\right] + bx_2^2 = a\left[\left(x_1 + \frac{c}{a}x_2\right)^2 - \frac{c^2}{a^2}x_2^2\right] + bx_2^2 \\ &= a\left(x_1 + \frac{c}{a}x_2\right)^2 + \left(b - \frac{c^2}{a}\right)x_2^2 \end{aligned}$$

Si $a = 0$ et $b = 0$, alors q s'écrit sous la forme :

$$q(x) = 2cx_1x_2 = \frac{c}{2}(x_1 + x_2)^2 - \frac{c}{2}(x_1 - x_2)^2$$

Supposons que $n > 2$ et que la méthode de Gauss s'applique à toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension $< n$.

Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension n , alors deux cas sont possibles :

- i) Il existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, tel que $a_{i_0} \neq 0$, alors quitte à réordonner les a_i , on peut supposer que $a_1 \neq 0$. Dans ce cas, en regroupant tous les termes contenant x_1 , (si à la place de a_1 on prend a_{i_0} , on doit regrouper tous les termes contenant x_{i_0}), on aura,

$$q(x) = a_1x_1^2 + 2 \sum_{j=2}^n a_{1j}x_1x_j + \sum_{i=2}^n a_ix_i^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j$$

Donc si pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$, on pose $\alpha_j = \frac{a_{1j}}{a_1}$, alors on a

$$\begin{aligned} q(x) &= a_1 \left[x_1^2 + 2 \left(\sum_{j=2}^n \alpha_j x_j \right) x_1 \right] + \sum_{i=2}^n a_ix_i^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j \\ &= a_1 \left[\left(x_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j x_j \right)^2 - \left(\sum_{j=2}^n \alpha_j x_j \right)^2 \right] \\ &\quad + \sum_{i=2}^n a_ix_i^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j \\ &= a_1 \left(x_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j x_j \right)^2 + Q(x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

où $Q(x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=2}^n a_i x_i^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j - \left(\sum_{j=2}^n \alpha_j x_j \right)^2$ est une forme quadratique en $x_2, x_3, \dots, x_n$, donc on peut considérer Q comme une forme quadratique sur un K -espace vectoriel de dimension $n-1$ et on applique, alors, l'hypothèse de récurrence à Q .

Comme $q(x) = a_1 \left(x_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j x_j \right)^2 + Q(x_2, \dots, x_n)$, alors on remarque que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_1} = a_1 \left(x_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j x_j \right) = a_1 x_1 + \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j$$

- ii) Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a_i = 0$, alors on a $q(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j$. $q \neq 0$, donc l'un au moins des coefficients α_{ij} est non nul, donc pour simplifier on peut supposer que $\alpha_{12} \neq 0$, puis on regroupe tous les termes contenant x_1 et tous les termes contenant x_2 . Ainsi, on aura

$$\begin{aligned} q(x) &= \left[\alpha_{12} x_1 x_2 + \left(\sum_{j=3}^n \alpha_{1j} x_j \right) x_1 + \left(\sum_{j=3}^n \alpha_{2j} x_j \right) x_2 \right] \\ &\quad + \sum_{3 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j \\ &= \alpha_{12} \left[x_1 x_2 + \left(\sum_{j=3}^n \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{12}} x_j \right) x_1 + \left(\sum_{j=3}^n \frac{\alpha_{2j}}{\alpha_{12}} x_j \right) x_2 \right] \\ &\quad + \sum_{3 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j \\ &= \alpha_{12} \left(x_1 + \sum_{j=3}^n \frac{\alpha_{2j}}{\alpha_{12}} x_j \right) \left(x_2 + \sum_{j=3}^n \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{12}} x_j \right) + Q(x_3, \dots, x_n) \\ &= \frac{\alpha_{12}}{4} \left(x_1 + x_2 + \sum_{j=3}^n \frac{\alpha_{2j} + \alpha_{1j}}{\alpha_{12}} x_j \right)^2 \\ &\quad - \frac{\alpha_{12}}{4} \left(x_1 - x_2 + \sum_{j=3}^n \frac{\alpha_{2j} - \alpha_{1j}}{\alpha_{12}} x_j \right)^2 + Q(x_3, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Pour conclure, on applique l'hypothèse de récurrence à Q .

Exemples

1. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + 16z^2 - 4xy + 6xz - 16yz$$

Déterminons une base q -orthogonale. Pour cela, décomposons q sous forme de carrés. On a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x} = x - 2y + 3z$$

donc on a

$$\begin{aligned} q(x) &= (x - 2y + 3z)^2 - 4y^2 + 12yz - 9z^2 + 6y^2 + 16z^2 - 16yz \\ &= (x - 2y + 3z)^2 + 2y^2 + 7z^2 - 4yz \\ &= (x - 2y + 3z)^2 + 2(y - z)^2 + 5z^2 \\ \text{car } \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (2y^2 + 7z^2 - 4yz) &= 2(y - z) \end{aligned}$$

Donc pour déterminer une base q -orthogonale, on pose

$$\begin{cases} X = x - 2y + 3z \\ Y = y - z \\ Z = z \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x = X + 2Y - Z \\ y = Y + Z \\ z = Z \end{cases}$$

Donc une base q -orthogonale (v_1, v_2, v_3) est déterminée par sa matrice de passage P de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (v_1, v_2, v_3) :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, on aura

$$\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = 2e_1 + e_2 \\ v_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

2. Mettre sous forme de carrés la forme quadratique de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$q(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$$

puis déterminer une base q -orthogonale.

$$\begin{aligned} q(x, y, z, t) &= xy + yz + zt + tx \\ &= (x + z)(y + t) \\ &= \frac{1}{4}(x + y + z + t)^2 - \frac{1}{4}(x - y + z - t)^2 \\ &= \frac{1}{4}(x + y + z + t)^2 - \frac{1}{4}(x - y + z - t)^2 + 0z^2 + 0t^2 \end{aligned}$$

Donc, pour obtenir une base q -orthogonale, on pose

$$\begin{cases} X = x + y + z + t \\ Y = x - y + z - t \\ Z = z \\ T = t \end{cases}$$

Donc, on aura

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y - Z \\ y = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y - T \\ z = Z \\ t = T \end{cases}$$

Une base q -orthogonale est déterminée par la matrice de passage P , définie par :

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc, si on pose

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \\ v_2 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 \\ v_3 = -e_1 + e_3 \\ v_4 = -e_2 + e_4 \end{cases}$$

Alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base q -orthogonale.

3. Mettre sous forme de carrés la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$q(x, y, z, t) = xy + xz + xt - yz + yt + 2zt$$

En regroupant les termes en x et ceux en y , on aura

$$\begin{aligned} q(x, y, z, t) &= (xy + xz + xt - yz + yt) + 2zt \\ &= [xy + x(z + t) + y(t - z)] + 2zt \\ &= [(x + (t - z))(y + (z + t)) - (t - z)(t + z)] + 2zt \\ &= \frac{1}{4} [(x + y + 2t)^2 - (x - y - 2z)^2] - (t - z)(t + z) + 2zt \\ &= \frac{1}{4}(x + y + 2t)^2 - \frac{1}{4}(x - y - 2z)^2 + (z^2 + 2zt) - t^2 \\ &= \frac{1}{4}(x + y + 2t)^2 - \frac{1}{4}(x - y - 2z)^2 + (z + t)^2 - 2t^2 \end{aligned}$$

Donc, pour obtenir une base q -orthogonale, on pose

$$\begin{cases} X = x + y + 2t \\ Y = x - t - 2z \\ Z = z + t \\ T = t \end{cases}$$

Donc, on aura

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y + Z - 2T \\ y = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y - Z \\ z = Z - T \\ t = T \end{cases}$$

Donc une base q -orthogonale est déterminée par la matrice de passage P , définie par :

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc, si on pose

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \\ v_2 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 \\ v_3 = e_1 - e_2 + e_3 \\ v_4 = -2e_1 - e_3 + e_4 \end{cases}$$

alors, (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base q -orthogonale.

7.3 Signature d'une forme bilinéaire symétrique

7.3.1 bases orthonormales

Définition 7.3.1

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et f une forme bilinéaire symétrique sur E . Une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E , si

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, f(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Remarque 91

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et f une forme bilinéaire symétrique sur E . On suppose que f possède une base orthonormale β , alors la matrice de f par rapport à β est égale à la matrice identité, donc f est non dégénérée. La condition f non dégénérée est donc une condition nécessaire pour l'existence d'une base orthonormale.

Nous allons voir par la suite que cette condition n'est pas toujours suffisante.

Proposition 7.3.1

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$. Alors toute forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E , possède au moins une base orthonormale.

Démonstration. On sait que toute forme bilinéaire symétrique sur un K -espace vectoriel de dimension finie, possède au moins une base orthogonale.

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie E et soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base orthogonale de f .

Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, soit $\alpha_i = f(v_i, v_i)$, puisque $\mathbb{C}$ est algèbreiquement clos, alors le polynôme $X^2 - \alpha_i$ possède au moins une racine $a_i \in \mathbb{C}$, donc $a_i^2 = \alpha_i$. Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, posons $e_i = \frac{1}{a_i} v_i$, alors $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et on a

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}, f(e_i, e_j) = \frac{1}{a_i a_j} f(v_i, v_j) = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{a_i^2} = 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Donc $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est orthonormale. □

Proposition 7.3.2

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E . Alors f possède une base orthonormale, si, et seulement si,

$$\forall x \in E, x \neq 0 \implies f(x, x) > 0$$

Démonstration. $(\implies)$ Supposons que f possède une base orthonormale

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$, donc pour chaque $x \in E$, avec $x \neq 0$ et $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$,

on a $f(x, x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$.

($\Leftarrow$) Supposons que pour tout $x \in E$, avec $x \neq 0$, on a $f(x, x) > 0$. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base orthogonale de f , donc, par hypothèse, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $f(v_i, v_i) > 0$. Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, soit $a_i = \sqrt{f(v_i, v_i)}$ et soit $e_i = \frac{1}{a_i}v_i$, alors $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de f . $\square$

7.3.2 Théorème d'inertie de Sylvester

Théorème 7.3.1

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme bilinéaire symétrique sur E de rang r et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthogonale de E . Soit p le nombre des $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tels que $f(e_i, e_i) > 0$ et soit q le nombre des $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tels que $f(e_i, e_i) < 0$. Alors le couple (p, q) ne dépend pas de la base orthogonale choisie et on a $p + q = r$. Dans ce cas, (p, q) s'appelle la signature de f .

Démonstration. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une autre base orthogonale de E et soient p' le nombre des $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tels que $f(v_i, v_i) > 0$ et q' le nombre des $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tels que $f(v_i, v_i) < 0$. Pour simplifier, quitte à réordonner les éléments des deux bases, on peut supposer que $f(e_i, e_i) > 0$ pour $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ et $f(v_i, v_i) > 0$ pour $i \in \{1, 2, \dots, p'\}$. Puisque f est de rang r et puisque la matrice M de f par rapport à une base orthogonale est une matrice diagonale, alors le nombre des éléments diagonaux non nuls de M est égal à r , car $rg(A) = rg(f) = r$, on en déduit donc que $p + q = p' + q' = r$. Montrons maintenant que $p = p'$ et $q = q'$, pour cela, considérons le système $\mathcal{S} = (e_1, \dots, e_p, v_{p'+1}, \dots, v_n)$ et montrons que ce système est libre. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{n-p'}$ des nombres réels, tels que

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p + \beta_1 v_{p'+1} + \dots + \beta_{n-p'} v_n = 0$$

Posons $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p = -(\beta_1 v_{p'+1} + \dots + \beta_{n-p'} v_n)$, alors, d'une part, on a

$$f(x, x) = \alpha_1^2 f(e_1, e_1) + \dots + \alpha_p^2 f(e_p, e_p) \geq 0$$

et d'autre part, on a

$$f(x, x) = \beta_1^2 f(v_{p'+1}, v_{p'+1}) + \dots + \beta_{n-p'}^2 f(v_n, v_n) \leq 0$$

Donc on en déduit que $f(x, x) = 0$ et puisque pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, on a $f(e_i, e_i) > 0$ alors on a $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$. Donc $\beta_1 = \dots = \beta_{n-p'} = 0$, car $(v_{p'+1}, \dots, v_n)$ est libre. Comme $\mathcal{S}$ est un système libre, alors le nombre d'éléments de $\mathcal{S}$ est $\leq \dim(E)$, par suite, on a $p + (n - p') \leq n$, donc $p \leq p'$. Puisque p et p' jouent un rôle symétrique, alors de la même manière, on montre que $p' \leq p$. $\square$

Remarque 92

La signature d'une forme quadratique q est égale à celle de sa forme pôlaire associée. En pratique pour déterminer la signature d'une forme quadratique q on applique la méthode de Gauss pour décomposer q sous forme d'une somme de carrés. Donc si on obtient $q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i l_i(x)^2$, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont non nuls, alors q est de rang r et de signature (α, β) , où α est le nombre des i , tel que $\lambda_i > 0$ et β le nombre des i , tel que $\lambda_i < 0$.

Exemples

Soient $a \in \mathbb{R}$ et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad q(x, y, z) = ax^2 - 3y^2 - z^2 - 2xy + 4xz + 4yz$$

On se propose de déterminer, suivant les valeurs de a , le rang et la signature de q . Pour cela, nous appliquons la méthode de Gauss à la forme quadratique q . Le paramètre a est quelconque, donc il peut être nul, par contre les coefficients de y^2 et z^2 ne sont pas nuls. On choisit par exemple z^2 , alors on a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial z}(x, y, z) = -z + 2x + 2y$$

donc on a

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= -(2x + 2y - z)^2 + (a + 4)x^2 + y^2 + 6xy \\ &= (a - 5)x^2 + (y + 3x)^2 - (2x + 2y - z)^2 \end{aligned}$$

On est donc amené à discuter les cas suivants :

- i) Si $a < 5$, alors $\text{sign}(q) = (1, 2)$ et $\text{rg}(q) = 3$.
- ii) Si $a = 5$, alors $\text{sign}(q) = (1, 1)$ et $\text{rg}(q) = 2$
- iii) Si $a > 5$, alors $\text{sign}(q) = (2, 1)$ et $\text{rg}(q) = 3$

7.4 Exercices

Exercice 133

Soit f la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{R}^3$ par,

$$f(x, y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 56x_3y_3 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) + 7(x_1y_3 + x_3y_1) - 18(x_2y_3 + x_3y_2)$$

1. Ecrire la matrice de f par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) .
2. Soit (e'_1, e'_2, e'_3) le système de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$e'_1 = e_1, \quad e'_2 = 2e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad e'_3 = -3e_1 + 2e_2 + e_3$$

Vérifier que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de f par rapport à cette base.

Exercice 134

Soit f la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 13x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 - 5x_2y_3 - 5x_3y_2$$

1. Donner la forme quadratique q associée à f .
2. Ecrire la matrice de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Préciser le rang et le noyau de f .

Exercice 135

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, f et g deux formes bilinéaires symétriques. On suppose que g est non dégénérée et qu'il existe $u \in L(E)$, tel que

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad f(x, y) = g(u(x), y)$$

1. Soient β une base de E , $M = \text{Mat}(f, \beta)$, $N = \text{Mat}(g, \beta)$ et $A = \text{Mat}(u, \beta)$. Déterminer A en fonction de M et N .
2. Montrer que si x et y sont deux vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes, alors $f(x, y) = g(x, y) = 0$.

Exercice 136

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire symétrique f . On note N le noyau de f et on rappelle que $N = E^\perp$.

1. Montrer que f est non dégénérée, si et seulement si, $N = \{0_E\}$.
2. Soit F un autre espace vectoriel sur K et soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire.
 - a) Montrer que si G est un sous-espace vectoriel de E , alors $u^{-1}(u(G)) = G + \ker(u)$.

- b) Montrer que u est injective, si et seulement si, pour tout sous-espace vectoriel G de E , on a $u^{-1}(u(G)) = G$.
 - c) Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de F , alors $u(u^{-1}(H)) = H \cap \text{Im}(u)$.
 - d) Montrer que u est surjective, si et seulement si, pour tout sous-espace vectoriel H de F , on a $u(u^{-1}(H)) = H$.
3. On suppose que u est surjective et que $\ker(u) \subseteq N$. Pour $x' \in F$ et $y' \in F$ avec $x' = u(x)$ et $y' = u(y)$, on pose $g(x', y') = f(x, y)$.
- a) Montrer que g définit bien une application sur $F \times F$ et que g est bilinéaire symétrique.
 - b) Montrer que g est non dégénérée, si et seulement si, $\ker(u) = N$.
 - c) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E , alors $u(G^\perp) = u(G)^\perp$.
 - d) Montrer que si $\ker(u) = N$, alors pour tout sous-espace vectoriel G de E , on a $u(G^{\perp\perp}) = u(G)$.
4. Dédire de ce qui précède que si G est un sous-espace vectoriel de E , alors $G^{\perp\perp} = G + N$.
(On pourra considérer le K -espace vectoriel quotient $F = E/N$.)

Exercice 137

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $f; E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire sur E , telle que

$$\forall (x, y) \in E \times E, f(x, y) = 0 \implies f(y, x) = 0$$

Montrer que f est ou bien symétrique ou bien antisymétrique.

Exercice 138

Soit f la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2, f(P, Q) = \frac{1}{2} (P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1))$$

1. Déterminer la matrice A de f par rapport à la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Appliquer la méthode de Gauss à la forme quadratique associée à f et en déduire le rang et la signature de q .
3. Trouver une base f -orthogonale et donner la matrice B de f par rapport à cette base.
4. Déterminer le cône C_q des vecteurs isotropes de q . C_q est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$? Justifier votre réponse.

5. Déterminer une base de vecteurs isotropes. Quelle est la matrice C de f par rapport à cette base ? Quelle est la relation entre B et C ?
6. Déterminer le noyau $N(f)$ de f .
7. Soit $P = 1 + X - X^2$. Déterminer $\{P\}^\perp$ et $\{P\}^{\perp\perp}$.

Exercice 139

Soient a un nombre réel et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, q(x) = x_1^2 + (a+5)x_2^2 + (a^2+a+2)x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2(a+3)x_2x_3$$

1. Déterminer la matrice de q par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. En appliquant l'algorithme de Gauss, décomposer q sous forme de carrés.
3. Déterminer, suivant les valeurs du paramètre a , le rang et la signature de q .
4. Déterminer une base q -orthogonale.
5. On suppose $a = 0$, déterminer le cône C_q des vecteurs isotropes de q .

Exercice 140

Soient $a \in \mathbb{R}$ et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, q(x, y, z) = ax^2 - 3y^2 - z^2 - 2xy + 4xz + 4yz$$

1. Déterminer la matrice A de q par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. En appliquant la méthode de Gauss, décomposer q sous forme de carrés.
3. Déterminer, suivant les valeurs de a , le rang et la signature de q .
Pour quelle(s) valeur(s) de a , q est dégénérée ?
4. Soit $F = \text{Vect}(e_1 - e_2)^\perp$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
 - a) Déterminer une base de F .
 - b) Pour quelles valeurs de a , a-t-on $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^3$?
5. On suppose $a = 5$.
 - a) Déterminer un sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}^3$, tel que $\dim(G) + \dim(G^\perp) > 3$.
 - b) Déterminer le cône C_q des vecteurs isotropes de q .
 - c) C_q est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.
 - d) Trouver une base formée de vecteurs isotropes. Quelle est la matrice B de q par rapport à cette base ?

Exercice 141

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ et soit $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, par $q(x) = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Montrer que q définit une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, si et seulement si, P est un polynôme homogène de degré 2.

Exercice 142

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, a un vecteur non nul de E , q une forme quadratique sur E et φ la forme polaire associée. Soit $Q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in E, \quad Q(x) = q(a)q(x) - (\varphi(a, x))^2$$

1. Montrer que Q est une forme quadratique et déterminer la forme polaire associée.
2. Déterminer le noyau et le rang de Q .

Exercice 143

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application $q : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définit une forme quadratique dont on déterminera le rang et la signature :

- a) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \quad q(A) = \text{tr}(A^2),$
- b) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \quad q(A) = \text{tr}(A)^2,$
- c) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \quad q(A) = \text{tr}({}^tAA).$

Exercice 144

Soient a un nombre réel et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par,

$$q(x, y, z) = x^2 + (1 + a)y^2 + (1 + a + a^2)z^2 + 2xy - 2ayz$$

1. Décomposer q sous forme de carrés.
2. Donner, suivant les valeurs de a , le rang et la signature de q .

Exercice 145

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, q une forme quadratique sur E et f la forme polaire associée à q . On note $C(q)$ le cône des vecteurs isotropes pour q et N le noyau de f . Rappelons qu'on a

$$C(q) = \{x \in E : q(x) = 0\} \quad \text{et} \quad N = E^\perp = \{y \in E : \forall x \in E, f(x, y) = 0\}$$

1. On suppose que q garde un signe constant, c'est à dire,

$$\forall x \in E, \quad q(x) \geq 0 \quad \text{ou} \quad \forall x \in E, \quad q(x) \leq 0$$

Montrer que $C(q) = N$, en déduire, que dans ce cas, $C(q)$ est un sous-espace vectoriel de E .

(On pourra étudier le signe de $q(x + \lambda y)$, pour $x \in C(q)$, $y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$).

2. On ne suppose plus que q garde un signe constant. Soient x_0 et y_0 deux vecteurs de E , tels que $q(x_0) > 0$ et $q(y_0) < 0$.
 - a) Montrer que (x_0, y_0) est libre.
 - b) Montrer qu'il existe deux réels distincts λ_1 et λ_2 , tels que,

$$q(x_0 + \lambda_1 y_0) = q(x_0 + \lambda_2 y_0) = 0$$

- c) En déduire que $C(q)$ n'est pas un sous-espace vectoriel.
3. Déduire, de ce qui précède, que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - i) q garde un signe constant.
 - ii) $C(q)$ est un sous-espace vectoriel de E .
 - iii) $C(q) = N$.

Exercice 146

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, q une forme quadratique sur E de signature $(n-1, 1)$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p . On suppose qu'il existe $x_0 \in F$, tel que $q(x_0) < 0$.

1. Montrer que $E = \text{Vect}(x_0) \oplus \text{Vect}(x_0)^\perp$.
2. Montrer que pour tout $x \in \text{Vect}(x_0)^\perp$, avec $x \neq 0$, on a $q(x) > 0$.
3. Montrer que $F \cap \text{Vect}(x_0)^\perp$ est de dimension $p-1$.
4. Quelle est la signature de la restriction de q à F ?
5. Montrer que $E = F \oplus F^\perp$.

Exercice 147

Soient K un corps commutatif quelconque, σ un automorphisme non nul de K et E un K -espace vectoriel de dimension n sur K . On dit qu'une application $f : E \times E \rightarrow K$ est une forme σ -sesquilinéaire sur E , si

- i) $\forall (x_1, x_2) \in E \times E, \forall y \in E, f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y),$
- ii) $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, \forall y \in E, f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y),$
- iii) $\forall x \in E, \forall (y_1, y_2) \in E \times E, f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2),$
- iv) $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, \forall y \in E, f(x, \lambda y) = \sigma(\lambda) f(x, y).$

1. Soit f un automorphisme non nul de $\mathbb{R}$.
 - a) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a $f(r) = r$.
 - b) Montrer que si $x \geq 0$, alors $f(x) \geq 0$. En déduire que si $0 \leq x \leq y$, alors $0 \leq f(x) \leq f(y)$.
 - c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) = x$.
 - d) En déduire que le seul automorphisme non nul de $\mathbb{R}$ est l'identité. Conclure.

2. Une forme σ -sesquilinéaire f est dite alternée si

$$\forall x \in E, \quad f(x, x) = 0$$

Montrer que si f est alternée non identiquement nulle, alors $\sigma = Id_K$ et f antisymétrique.

3. Une forme σ -sesquilinéaire f est dite hermitienne si

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad f(y, x) = \sigma(f(x, y))$$

Montrer que si f est hermitienne non nulle, alors $\sigma^2 = Id_K$.

7.5 Solution des exercices

Exercice 133

1. On a $q(x) = x_1^2 + 6x_2^2 + 56x_3^2 - 4x_1x_2 + 14x_1x_3 - 36x_2x_3$, donc on a

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_1} = x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_2} = -2x_1 + 6x_2 - 18x_3 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_3} = 7x_1 - 18x_2 + 56x_3 \end{cases}$$

Soit A la matrice de q par rapport à (e_1, e_2, e_3) , alors on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -2 & 6 & -18 \\ 7 & -18 & 56 \end{pmatrix}$$

2. Soit B la matrice de q par rapport à (e'_1, e'_2, e'_3) et soit P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e'_1, e'_2, e'_3) , alors on a

$$\begin{aligned} B = {}^tPAP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -2 & 6 & -18 \\ 7 & -18 & 56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 134

1. On a $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 13x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3$.

2. On a

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_1} = x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_2} = -x_1 + 2x_2 - 5x_3 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_3} = 3x_1 - 5x_2 + 13x_3 \end{cases}$$

Soit A la matrice de q par rapport à la base canonique, alors on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 13 \end{pmatrix}$$

3. Soit B la matrice échelonnée de A , alors on a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que $rg(A) = 2$, donc $rg(q) = 2$.

Soit N_f le noyau de f , alors on a $N_f = \ker(A) = \text{Vect}(e_1 - 2e_2 - e_3)$.

Exercice 135

1. Pour tout $x, y \in E$, on a $f(x, y) = g(u(x), y)$, donc on a pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, {}^tXMY = {}^t(AX)NY = {}^tX({}^tAN)Y$$

Il en résulte que $M = {}^tAN$ et comme g est non dégénérée, alors N est inversible, donc on a $A = {}^t(MN^{-1})$.

2. Supposons que $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$, avec $\lambda \neq \mu$, alors on a

$$f(x, y) = \lambda g(x, y)$$

et comme f et g sont symétriques, alors on a aussi

$$f(x, y) = f(y, x) = \mu g(y, x) = \mu g(x, y)$$

On voit donc que $(\lambda - \mu)g(x, y) = 0$ et puisque $\lambda \neq \mu$, alors on a $g(x, y) = f(x, y) = 0$.

Exercice 136

1. Soit A la matrice de f par rapport à une base de E , alors on sait que $N = \ker(A)$. D'autre part, on sait que f est non dégénérée, si et seulement si, $\det(A) \neq 0$, donc il en résulte que f est non dégénérée, si et seulement si, $N = \{0\}$.

2. a) Soit $x \in E$, alors on a

$$\begin{aligned}
 x \in u^{-1}(u(G)) &\iff u(x) \in u(G) \\
 &\iff \exists y \in G \text{ tel que } u(x) = u(y) \\
 &\iff \exists y \in G \text{ tel que } x - y \in \ker(u) \\
 &\iff x \in G + \ker(u)
 \end{aligned}$$

Donc on a $u^{-1}(u(G)) = G + \ker(u)$.

b) Supposons que u est injective, alors on a $\ker(u) = \{0\}$, donc d'après la question précédente, pour tout sous-espace vectoriel G de E , on a $u^{-1}(u(G)) = G$. Réciproquement, supposons que pour tout sous-espace vectoriel G de E , on a $u^{-1}(u(G)) = G$, alors en particulier, on a $u^{-1}(u(\{0\})) = \{0\}$, donc on a $\ker(u) = u^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, par suite, u est injective.

c) On a $u(u^{-1}(H)) \subseteq H$ et $u(u^{-1}(H)) \subseteq \text{Im}(u)$, donc on a

$$u(u^{-1}(H)) \subseteq H \cap \text{Im}(u)$$

Réciproquement, soit $y \in H \cap \text{Im}(u)$, alors on a $Y \in H$ et il existe $x \in E$, tel que $y = u(x)$, donc $x \in u^{-1}(H)$, par conséquent, on a $y \in u(u^{-1}(H))$.

d) Si u est surjective, alors $\text{Im}(u) = F$, donc d'après la question précédente, pour tout sous-espace vectoriel H de F , on a $u(u^{-1}(H)) = H$. Réciproquement, si pour tout sous-espace vectoriel H de F , on a $u(u^{-1}(H)) = H$, alors en particulier, on a $u(u^{-1}(F)) = F$, avec $u^{-1}(F) = E$, donc $\text{Im}(u) = F$, par suite, u est surjective.

3. a) On suppose que $x' = u(x_1) - u(x_2)$ et $y' = u(y_1) - u(y_2)$, alors on a $x_1 - x_2 \in \ker(u)$ et $y_1 - y_2 \in \ker(u)$. Comme $\ker(u) \subseteq N$, alors on a $f(x_1 - x_2, y_1) = 0$ et $f(y_1 - y_2, x_2) = 0$, donc il en résulte que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_1)$ et $f(x_2, y_2) = f(y_1, x_2)$, et comme f est symétrique, alors on a $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Ainsi, nous avons établi que g est bien définie, et puisque f est bilinéaire symétrique, alors il est facile de voir que g est aussi bilinéaire symétrique.

b) Soit N_g le noyau de g , alors on sait que g est non dégénérée, si et seulement si, $N_g = \{0\}$. Soit $x' \in F$, avec $x' = u(x)$, puisque $F = u(E)$, alors on a

$$\begin{aligned}
 x' \in N_g &\iff \forall y \in E, g(u(x), u(y)) = 0 \\
 &\iff \forall y \in E, f(x, y) = 0 \\
 &\iff x \in N
 \end{aligned}$$

Donc on a $N_g = u(N)$, par suite g est non dégénérée, si et seulement si, $N \subseteq \ker(u)$. Par hypothèse on a $\ker(u) \subseteq N$, donc g est non dégénérée, si et seulement si, $N = \ker(u)$.

c) Soit $z \in F$, avec $z = u(y)$, alors on a

$$\begin{aligned} z \in u(G)^\perp &\iff \forall x \in G, g(u(x), u(y)) = 0 \\ &\iff \forall x \in G, f(x, y) = 0 \\ &\iff y \in G^\perp \\ &\implies z \in u(G^\perp) \quad (\text{car } z = u(y)) \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $z \in u(G^\perp)$, alors il existe $y \in G^\perp$, tel que $z = u(y)$, donc on a

$$\begin{aligned} y \in G^\perp &\implies \forall x \in G, f(x, y) = 0 \\ &\implies \forall x \in G, g(u(x), u(y)) = 0 \\ &\implies z \in u(G)^\perp \quad (\text{car } z = u(y)) \end{aligned}$$

d) De la question précédente, on déduit que pour tout sous-espace vectoriel G de E , on a $u(G^{\perp\perp}) = u(G)^{\perp\perp}$. Puisque $\ker(u) = N$, alors d'après la question b), g est non dégénérée, donc $u(G)^{\perp\perp} = u(G)$, par suite, on a $u(G^{\perp\perp}) = u(G)$.

4. Dans cette question on considère le K -espace vectoriel E/N et on applique ce qui précède à la surjection canonique $u : E \rightarrow E/N$. On a u surjective et $\ker(u) = N$, donc d'après la question 3), pour tout sous-espace vectoriel G de E , on a $u(G^{\perp\perp}) = u(G)$. D'autre part, on a $u^{-1}(u(G^{\perp\perp})) = G^{\perp\perp} + N = G^{\perp\perp}$, car $N \subseteq G^{\perp\perp}$, ainsi, on aura $G^{\perp\perp} = u^{-1}(u(G)) = G + N$.

Exercice 137

Remarquons d'abord qu'on a

$$(f \text{ est symétrique}) \iff (f \text{ possède une base orthogonale})$$

$$(f \text{ est antisymétrique}) \iff (\forall x \in E, f(x, x) = 0)$$

Supposons donc que f n'est pas antisymétrique, alors il existe $x_0 \in E$, tel que $f(x_0, x_0) \neq 0$, puis montrons que f est symétrique.

Dans la suite, on considère la forme linéaire φ_{x_0} définie par

$$\forall x \in E, \varphi_{x_0}(x) = f(x_0, x)$$

On pose $F = \ker(\varphi_{x_0})$, alors F est un hyperplan de E et on a $x_0 \notin F$, donc $E = \text{Vect}(x_0) \oplus F$.

Montrons par récurrence sur n , où $n = \dim(E)$, que f est symétrique.

Pour $n = 2$, on a donc $\dim(E) = 2$ et $\dim(F) = 1$. Soit $y_0 \in F$, avec $y_0 \neq 0$, comme $E = \text{Vect}(x_0) \oplus F$, alors (x_0, y_0) est libre, donc (x_0, y_0) est une base de E . On a $f(x_0, y_0) = 0$, donc par hypothèse on a aussi $f(y_0, x_0) = 0$, donc (x_0, y_0) est une base orthogonale et ainsi f est bilinéaire.

Supposons que $n > 2$ et que la propriété est vraie pour tout K -espace vectoriel de dimension $< n$.

Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et soit $x_0 \in E$, avec $f(x_0, x_0) \neq 0$, alors on a $E = \text{Vect}(x_0) \oplus F$. Soit g la restriction de f à $F \times F$, alors g est une forme bilinéaire sur F et on a

$$\forall (x, y) \in F \times F, g(x, y) = 0 \implies g(y, x) = 0$$

Si $g = 0$, alors toute base de F est orthogonale pour g , donc si $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base quelconque de F , alors $(e_1, \dots, e_{n-1}, x_0)$ est une base de E orthogonale pour f , par suite, f est symétrique.

Si $g \neq 0$, alors deux cas sont possibles :

Si pour tout $y \in F$, on a $g(y, y) = 0$, alors g est antisymétrique et comme $g \neq 0$, alors g est surjective, donc il existe $(x_1, y_1) \in F^2$, tel que $g(x_1, y_1) = f(x_0, x_0)$.

Ainsi on aura

$$\begin{aligned} f(x_0 + y_1, x_0 + x_1) &= f(x_0, x_0) + f(x_0, x_1) + f(y_1, x_0) + f(y_1, x_1) \\ &= f(x_0, x_0) + f(y_1, x_1) \end{aligned}$$

car on a $f(x_0, x_1) = 0$ et $f(x_0, y_1) = 0$, donc on a aussi $f(y_1, x_0) = 0$

Or, g est antisymétrique, donc $f(y_1, x_1) = -f(x_1, y_1)$, par suite on a

$$f(x_0 + y_1, x_0 + x_1) = 0$$

donc par hypothèse on aura aussi $f(x_0 + x_1, y_0 + x_1) = 0$. Ainsi on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} f(x_0, x_0) - f(x_1, y_1) = 0 \\ f(x_0, x_0) + f(x_1, y_1) = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $2f(x_0, x_0) = 0$, donc $f(x_0, x_0) = 0$, car le corps K est de caractéristique $\neq 2$. Ce qui est absurde, car $f(x_0, x_0) \neq 0$, donc ce cas ne peut pas se produire.

S'il existe $y_0 \in F$, tel que $g(y_0, y_0) \neq 0$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, F possède une base orthogonale pour g , qu'on note $(e_1, \dots, e_{n-1})$, donc $(e_1, \dots, e_{n-1}, x_0)$ est une base de E orthogonale pour f , donc f est symétrique.

Exercice 138

1. Soit q la forme quadratique et soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, avec $P = a + bX + cX^2$, alors on a $q(P) = P(1)P(-1) = (a+b+c)(a-b+c) = a^2 - b^2 + c^2 + 2ac$.

On en déduit que la matrice A par rapport à $(1, X, X^2)$ est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On voit facilement que $q(P) = (a + c)^2 - b^2$, donc on a $rg(q) = 2$ et q a pour signature $(1, 1)$.
3. D'après la question précédente, si on pose $a' = a + c$, $b' = b$ et $c' = c$, alors on a $a = a' - c'$, $b = b'$ et $c = c'$, donc on en déduit que $(1, X, -1 + X^2)$ est une base orthogonale et la matrice B de q par rapport à cette base est définie par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, avec $P = a + bX + cX^2$, alors on a

$$\begin{aligned} P \in C_q &\iff P(1) = 0 \text{ ou } P(-1) = 0 \\ &\iff a + b + c = 0 \text{ ou } a - b + c = 0 \end{aligned}$$

Donc on voit que $C_q = H \cup L$, avec $H = \text{Vect}(1 - X^2, X - X^2)$ et $L = \text{Vect}(1 - X^2, X + X^2)$. H et L sont deux hyperplans distincts, donc $H \cup L$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, par suite C_q n'est pas un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

5. D'après la question précédente, on a $\{1 - X^2, X - X^2, X + X^2\} \subseteq C_q$, de plus on vérifie facilement que $(1 - X^2, X - X^2, X + X^2)$ est libre, donc $\beta = (1 - X^2, X - X^2, X + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs isotropes. Soit C la matrice de q par rapport à β et soit Q la matrice de passage de la base canonique à la base β , alors on sait que $C = {}^tQAQ$, donc on a

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base orthogonale de la question 3), alors on $B = {}^tPAP$, donc on en déduit que

$$C = {}^t(P^{-1}Q)BP^{-1}Q$$

6. On sait que $N(f) = \ker(A) = \text{Vect}(1 - X^2)$.

7. Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, alors on voit facilement que $Q \in \{P\}^\perp$, si et seulement si, $Q(1) = Q(-1)$, donc on en déduit que $\{P\}^\perp = \text{Vect}(1, X^2)$. On voit aussi que $Q \in \{P\}^{\perp\perp}$, si et seulement si, $Q(1) = -Q(-1)$, donc on en déduit que $\{P\}^{\perp\perp} = \text{Vect}(X, 1 - X^2)$.

Exercice 139

1. On a

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_1}(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_2}(x) = 2x_1 + (a+5)x_2 + (a+3)x_3 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_3}(x) = x_1 + (a+3)x_2 + (a^2+a+2)x_3 \end{cases}$$

Donc si A est la matrice de q par rapport à la base canonique, alors on aura

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a+5 & a+3 \\ 1 & a+3 & a^2+a+2 \end{pmatrix}$$

2. D'après l'algorithme de Gauss, on a

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (a+1)x_2^2 + (a^2+a+1)x_3^2 + 2(a+1)x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (a+1)(x_2 + x_3)^2 + a^2x_3^2 \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

Si $a = -1$ ou $a = 0$, alors $rg(q) = 2$ et q a pour signature $(2, 0)$.

Si $a \neq 0$ et $a < -1$, alors $rg(q) = 3$ et q a pour signature $(2, 1)$.

Si $a \neq 0$ et $a > -1$ alors $rg(q) = 3$ et q a pour signature $(3, 0)$

3. On pose $\begin{cases} X_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ X_2 = x_2 + x_3 \\ X_3 = x_3 \end{cases}$, alors on a $\begin{cases} x_1 = X_1 - 2X_2 + X_3 \\ x_2 = X_2 - X_3 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit (v_1, v_2, v_3) la base q -

orthogonale recherchée, alors on a $\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = -2e_1 + e_2 \\ v_3 = e_1 - e_2 + e_3 \end{cases}$.

4. Si $a = 0$, alors $q(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, avec $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, on a

$$x \in C_q \iff (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 = 0$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = x_1(e_1 - e_2 + e_3)$$

On a alors $C_q = \text{Vect}(e_1 - e_2 + e_3)$.

Exercice 140

1. On a

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x}(x, y, z) = ax - y + 2z \\ \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_2}(x, y, z) = -x - 3y + 2z \\ \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_3}(x, y, z) = 2x + 2y - z \end{cases}$$

donc la matrice A de q est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. En appliquant l'algorithme de Gauss, on aura

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= ax^2 - 3y^2 - z^2 - 2xy + 4xz + 4yz \\ &\quad - [z^2 - 2(2x + 2y)z] + ax^2 - 3y^2 - 2xy \\ &= -(2x + 2y - z)^2 + (a + 4)x^2 + y^2 + 6xy \\ &= (a - 5)x^2 + (3x + y)^2 - (2x + 2y - z)^2 \end{aligned}$$

3. On a $q(x, y, z) = (a-5)x^2 + (3x+y)^2 - (2x+2y-z)^2$, donc les cas suivants sont possibles : Si $a = 5$, alors $rg(q) = 2$ et $\text{signature}(q) = (1, 1)$.

Si $a < 5$, alors $rg(q) = 3$ et $\text{signature}(q) = (1, 2)$.

Si $a > 5$, alors $rg(q) = 3$ et $\text{signature}(q) = (2, 1)$.

On sait que q est non dégénérée, si et seulement si, $rg(q) = 3$, donc q est non dégénérée, si et seulement si, $a \neq 5$.

4. a) Soit $v \in \mathbb{R}^3$, avec $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$, alors on a

$$\begin{aligned} v \in F^\perp &\iff f(v, e_1 - e_2) = 0 \\ &\iff (a + 1)x + 2y = 0 \end{aligned}$$

donc on voit facilement que $(2e_1 - (a+1)e_2, e_3)$ est une base de $F^\perp$.

b) On sait que $E = F \oplus F^\perp$, si et seulement si, $F \cap F^\perp = \{0\}$. Comme $\dim(F) = 1$, alors $F \cap F^\perp = \{0\}$, si et seulement si, $e_1 - e_2 \notin F^\perp$. On a $\det(e_1 - e_2, 2e_1 - (a+1)e_2, e_3) = -a + 1$, donc $E = F \oplus F^\perp$, si et seulement si, $a \neq 1$.

5. a) Soit N le noyau de q , alors on a $N = \ker(A) = \text{Vect}(e_1 - 3e_2 - 4e_3)$. Donc si on prend, par exemple, $G = N$, alors on a $N^\perp = E$, donc

on a $\dim(G) + \dim(G^\perp) = 4$, avec $4 > 3$. On peut aussi prendre $G = \text{Vect}(v, e_1 - 3e_2 - 4e_3)$, pour n'importe quel vecteur v , tel que $(v, e_1 - 3e_2 - 4e_3)$ soit libre.

b) On a $q(x, y, z) = (3x + y)^2 - (2x + 2y - z)^2$, donc on a

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in C_q &\iff (3x + y)^2 - (2x + 2y - z)^2 = 0 \\ &\iff (x - y + z)(5x + 3y - z) = 0 \\ &\iff x - y + z = 0 \text{ ou } 5x + 3y - z = 0\end{aligned}$$

On en déduit que $C_q = H \cup L$, avec $H = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_2 + e_3)$ et $L = \text{Vect}(e_1 + 5e_3, e_2 + 3e_3)$.

c) On a H et L sont deux hyperplans de $\mathbb{R}^3$ et on a $H \neq L$, donc C_q n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

d) D'après la question précédente, on a $\{e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_2 + 3e_3\} \subseteq N_q$ et comme $\det(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_2 + 3e_3) = 2$, alors

$$\beta = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_2 + 3e_3)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs isotropes.

Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base β et soit B la matrice de q par rapport à β , alors on sait que $B = {}^tPAP$, donc on a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 141

Supposons que q est une forme quadratique, alors pour $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$. Donc on en déduit que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $P(\lambda X_1, \lambda X_2, \dots, \lambda X_n) = \lambda^2 P(X_1, X_2, \dots, X_n)$, par suite, P est un polyôme homogène de degré 2.

Réciproquement, supposons que P est un polyôme homogène de degré 2, alors on a $P = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n}$, avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$,

donc on a ou bien $\alpha = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0, \dots, 0)$, dans ce cas on pose $a_\alpha = a_{ij}$, ou bien $\alpha = (0, \dots, 0, \overset{i}{2}, 0, \dots, 0)$, dans ce cas on pose $a_\alpha = a_{ii}$. Ainsi, on aura $P = \sum_{i=1}^n a_{ii} X_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} + a_{ji}) X_i X_j$. Donc si pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on pose $b_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} x_i x_j$$

Puisque pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on a $b_{ij} = b_{ji}$, alors q est une forme quadratique.

Exercice 142

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} Q(\lambda x) &= q(a)q(\lambda x) + (\varphi(a, \lambda x))^2 \\ &= \lambda^2 Q(x) \quad (\text{car } q(\lambda x) = \lambda^2 q(x) \text{ et } \varphi(a, \lambda x) = \lambda \varphi(a, x)) \end{aligned}$$

donc Q est fonction polynomiale homogène de degré 2, donc d'après l'exercice précédent, Q est une forme quadratique.

Soit f la forme polaire associée à Q , alors pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a

$$\begin{aligned} 2f(x, y) &= Q(x + y) - Q(x) - Q(y) \\ &= q(a)(q(x + y) - q(x) - q(y)) \\ &\quad + (\varphi(a, x + y))^2 - \varphi(a, x)^2 - \varphi(a, y)^2 \\ &= 2q(a)\varphi(x, y) + 2\varphi(a, x)\varphi(a, y) \end{aligned}$$

donc $f(x, y) = q(a)\varphi(x, y) + \varphi(a, x)\varphi(a, y)$.

2. Remarquons d'abord que si $a \in N_\varphi$, alors $Q = 0$, donc dans la suite on peut supposer que $a \notin N_\varphi$.

Soit $y \in E$ et soit N_f le noyau de f , alors on a

$$y \in N_f \iff \forall x \in E, q(a)\varphi(x, y) + \varphi(a, x)\varphi(a, y) = 0$$

Donc en particulier pour $x = a$, on aura $q(a)\varphi(a, y) = 0$, ainsi nous sommes amenés à discuter les cas où $q(a) = 0$ et où $q(a) \neq 0$.

Si $q(a) = 0$, alors $f(x, y) = \varphi(a, x)\varphi(a, y)$, puis comme $a \notin N_\varphi$, alors il existe $x_0 \in E$, tel que $\varphi(a, x_0) \neq 0$ et comme $\varphi(a, x_0)\varphi(a, y) = 0$, alors $y \in \{a\}^\perp$. Donc dans ce cas, on a $N_f = \{a\}^\perp$.

Puisque $a \notin N_\varphi$, alors l'application φ_a qui à $x \in E$ fait correspondre $\varphi_a(x) = \varphi(a, x)$ est une forme linéaire non nulle sur E .

On a $\ker(\varphi_a) = \{a\}^\perp$, donc $\dim(N_f) = \dim(\{a\}^\perp) = n - 1$ et puisque on a $rg(f) = n - \dim(N_f)$, alors $rg(f) = 1$.

Si $q(a) \neq 0$, alors $f(a, y) = 0$, car $q(a)f(a, y) = 0$, donc $y \in \{a\}^\perp$. Ainsi pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x, y) = 0$, donc $y \in N_\varphi$. Comme $N_\varphi \subseteq \{a\}^\perp$, alors $N_\varphi \cap \{a\}^\perp = N_\varphi$, donc on a $N_f = N_\varphi$, par suite, $rg(f) = rg(\varphi)$.

Exercice 143

1. On a $q(A) = \text{tr}(A^2)$, donc si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors $q(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji}$,

par suite, q est un polynôme en les coefficients de A . Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a $q(\lambda A) = \lambda^2 q(A)$, donc q est homogène

de degré 2, par suite, q est une forme quadratique.

Soient $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques, alors on sait que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$. Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

avec $A \neq 0$, on a $q(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$, donc $q(A) > 0$. Pour $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,

avec $A \neq 0$, on a $q(A) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$, donc $q(A) < 0$.

Soit f la forme polaire associée à q , alors pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} f(A, B) &= \text{tr}(AB) = \text{tr}({}^t(AB)) = \text{tr}({}^tB {}^tA) \\ &= -\text{tr}(BA) = -\text{tr}(AB) = -f(A, B) \end{aligned}$$

Donc $f(A, B) = 0$, par suite, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$.

On pose $k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $l = \frac{n(n-1)}{2}$. Soit $(A_1, A_2, \dots, A_{n^2})$ une base orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$, telle que $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ soit une base orthogonale de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $(A_{k+1}, \dots, A_{n^2})$ une base orthogonale de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors d'après le théorème d'inertie de Sylvester, on a $rg(q) = n^2$ et $\text{signature}(q) = (k, l)$.

2. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, on a

$$q(A) = \left(\sum_{i=1}^n a_{ii} \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ii} a_{jj}$$

donc on voit facilement que q est une forme quadratique.

Pour tout $A \in \ker(\text{tr})$, on a $q(A) = 0$ et on a $q(I) > 0$, donc d'après le théorème d'inertie de Sylvester, on a $rg(q) = 1$ et $\text{signature}(q) = (1, 0)$.

3. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, on a

$$q(A) = \text{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

donc q est une forme quadratique dont la matrice par rapport à la base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $M_n(\mathbb{R})$ est égale à la matrice identité d'ordre n^2 , donc on a $rg(q) = n^2$ et $\text{signature}(q) = (n^2, 0)$.

Exercice 144

1. En appliquant l'algorithme de Gauss, on aura

$$\begin{aligned} q(x) &= (x+y)^2 + ay^2 - 2ayz + (1+a+a^2)z^2 \\ &= (x+y)^2 + a(y-z)^2 + (1+a^2)z^2 \end{aligned}$$

2. Si $a = 0$, alors $rg(q) = 2$ et $\text{signature}(q) = (2, 0)$.
 Si $a < 0$, alors $rg(q) = 3$ et $\text{signature}(q) = (2, 1)$.
 Si $a > 0$, alors $rg(q) = 3$ et $\text{signature}(q) = (3, 0)$.

Exercice 145

1. Il est clair que $N \subseteq C(q)$. Soit $x \in C(q)$ et soit $y \in E$, on doit montrer que $f(x, y) = 0$. Pour cela, on suppose, par exemple, que $q \geq 0$, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $q(x + \lambda y) \geq 0$. On a

$$q(x + \lambda y) = q(x) + 2f(x, y)\lambda + q(y)\lambda^2$$

Comme $q(x) = 0$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $q(y)\lambda^2 + 2f(x, y)\lambda \geq 0$, donc $f(x, y)^2 \leq 0$, par suite, on a $f(x, y) = 0$. On a $C(q) = N$, donc $C(q)$ est un sous-espace vectoriel de E , car N est un sous-espace vectoriel de E .

2. a) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tel que $\alpha x_0 + \beta y_0 = 0$, alors on a $f(\alpha x_0 + \beta y_0, x_0) = 0$ et $f(\alpha x_0 + \beta y_0, y_0) = 0$. On obtient alors le système homogène, en α et β , suivant :

$$\begin{cases} q(x_0)\alpha + f(x_0, y_0)\beta = 0 \\ f(x_0, y_0)\alpha + q(y_0)\beta = 0 \end{cases}$$

Ce système a pour déterminant $\Delta = q(x_0)q(y_0) - f(x_0, y_0)^2$, puis puisque $q(x_0)q(y_0) < 0$, alors $\Delta < 0$, donc $\Delta \neq 0$, par suite, on a $\alpha = \beta = 0$ et par conséquent, (x_0, y_0) est libre.

- b) Il s'agit de résoudre l'équation $q(x_0 + \lambda y_0) = 0$. On a

$$q(x_0 + \lambda y_0) = q(y_0)\lambda^2 + 2f(x_0, y_0)\lambda + q(x_0)$$

L'équation a pour discriminant $\Delta' = f(x_0, y_0)^2 - q(x_0)q(y_0)$, avec $q(x_0)q(y_0) < 0$, donc $\Delta' > 0$, par suite, il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tel que

$$q(x_0 + \lambda_1 y_0) = q(x_0 + \lambda_2 y_0) = 0$$

- c) D'après la question précédente, il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tel que $x_0 + \lambda_1 y_0 \in C(q)$ et $x_0 + \lambda_2 y_0 \in C(q)$. Donc si on suppose que $C(q)$ est un sous-espace vectoriel, alors on aura $(\lambda_1 - \lambda_2)y_0 \in C(q)$ et puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $y_0 \in C(q)$, ce qui est absurde, car $q(y_0) \neq 0$.
3. iii) $\Rightarrow$ ii) Trivial, car N est un sous-espace vectoriel de E .
 ii) $\Rightarrow$ i) Conséquence de la question 2).
 i) $\Rightarrow$ iii) Conséquence de la question 1).

Exercice 146

1. On a $q(x_0) \neq 0$, donc $\text{Vect}(x_0) \cap \text{Vect}(x_0)^\perp = \{0\}$, par suite, on a $E = \text{Vect}(x_0) \oplus \text{Vect}(x_0)^\perp$, car $\text{Vect}(x_0)$ est non isotrope.
2. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base orthogonale de $\text{Vect}(x_0)^\perp$, alors $(e_1, \dots, e_{n-1}, x_0)$ est une base orthogonale de E . Puisque la signature de q est $(n-1, 1)$ et puisque $q(x_0) < 0$, alors d'après le théorème d'inertie de Sylvester, pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, on a $q(e_i) > 0$. Soit $x \in \text{Vect}(x_0)^\perp$, avec $x \neq 0$ et $x = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i$, alors on a $q(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 q(e_i)$, donc on en déduit que $q(x) > 0$.
3. On a $E = \text{Vect}(x_0) \oplus \text{Vect}(x_0)^\perp$ et on a $\text{Vect}(x_0) \subseteq F$, donc on voit facilement que $F = \text{Vect}(x_0) \oplus F \cap \text{Vect}(x_0)^\perp$. Il en résulte donc que $\dim(F \cap \text{Vect}(x_0)^\perp) = p-1$.
4. Soit $(e_1, \dots, e_{p-1})$ une base orthogonale de $F \cap \text{Vect}(x_0)^\perp$, alors $(e_1, \dots, e_{p-1}, x_0)$ est une base orthogonale de F . D'après 2), pour tout $i \in \mathbb{N}_{p-1}$, on a $q(e_i) > 0$, et comme $q(x_0) < 0$, alors la restriction de q à F a pour signature $(p-1, 1)$.
5. Soit $x \in F \cap F^\perp$, on doit montrer que $x = 0$. On a $x \in F$ et on a $F = \text{Vect}(x_0) \oplus F \cap \text{Vect}(x_0)^\perp$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et il existe $y \in F \cap \text{Vect}(x_0)^\perp$, tel que $x = \alpha x_0 + y$. On a $y \in \text{Vect}(x_0)^\perp$, donc si f est la forme polaire associée à q , alors on a $f(\alpha x_0 + y, y) = q(y)$ et comme $f(x, y) = 0$, alors on a $q(y) = 0$. On a $y \in \text{Vect}(x_0)^\perp$ et $q(y) = 0$, donc d'après la question 2), on a $y = 0$, donc $x = \alpha x_0$, par suite, on a $q(x) = \alpha^2 q(x_0)$. On a $q(x) = 0$ et $q(x_0) \neq 0$, donc $\alpha = 0$. donc on voit que $x = 0$. On a $F \cap F^\perp = \{0\}$, donc F est non isotrope, par suite, on a $E = F \oplus F^\perp$.

Exercice 147

1. a) D'abord, puisque f est un automorphisme de corps non nul, alors $f(1) = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f(n) = f(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{f(1)+f(1)+\dots+f(1)}_{n \text{ fois}} = n$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(-n) = -f(n) = -n$, donc on en déduit que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a $f(m) = m$. Aussi pour $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1 = f\left(\frac{q}{q}\right) = f(q)f\left(\frac{1}{q}\right)$$

donc on a $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}$. Pour $r \in \mathbb{Q}$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et il existe $q \in \mathbb{N}^*$,

tel que $r = \frac{p}{q}$, donc $f(r) = f(p)f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q} = r$.

b) Pour $x \geq 0$, on a $x = (\sqrt{x})^2$, donc $f(x) = f(\sqrt{x})^2$, par suite, on a $f(x) \geq 0$. Si $0 \leq x \leq y$, alors $y - x \geq 0$, donc $f(x - y) \geq 0$, avec $f(x - y) = f(x) - f(y)$, par suite on a $0 \leq f(x) \leq f(y)$.

c) Supposons, par absurde, qu'il existe $x \in \mathbb{R}^+$, tel que $f(x) \neq x$, donc deux cas sont possibles :

i) Premier cas : $x < f(x)$.

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors il existe $r \in \mathbb{Q}$, tel que $x < r < f(x)$ et comme $x < r$, alors d'après la question précédente, $f(x) \leq f(r)$. Or $r \in \mathbb{Q}$, donc d'après la question a), $f(r) = r$ et ainsi on aura $f(x) \leq r < f(x)$, ce qui est absurde.

ii) Deuxième cas : $f(x) < x$.

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors il existe $r \in \mathbb{Q}$, tel que $f(x) < r < x$. On a $r < x$, donc d'après la question précédente, $f(r) \leq f(x)$, avec $f(r) = r$, ainsi on aura $f(x) < r \leq f(x)$, ce qui est absurde.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geq 0$, alors d'après la question précédente, on a $f(x) = x$. Si $x < 0$, alors on a $f(x) = -f(-x) = -(-x) = x$. Il en résulte que le seul automorphisme de $\mathbb{R}$ est l'identité.

On en déduit donc que toute forme σ -sesquilinéaire d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel est nulle.

2. Supposons que f est alternée, alors d'après i) et iii) de la définition, pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a $0 = f(x + y, x + y) = f(x, y) + f(y, x)$, donc on a $f(y, x) = -f(x, y)$, par suite, f est antisymétrique.

Comme f est non nulle, alors il existe $(x, y) \in E \times E$, tel que $f(x, y) \neq 0$, donc pour tout $\lambda \in K$, on a

$$f(x, \lambda y) = -f(\lambda y, x) = -\lambda f(y, x) = \lambda f(x, y)$$

Comme $f(x, \lambda y) = \sigma(\lambda)f(x, y)$ et comme $f(x, y) \neq 0$, alors on voit que pour tout $\lambda \in K$, on a $\sigma(\lambda) = \lambda$, donc $\sigma = Id_K$.

3. Supposons que f est hermitienne non nulle et soit $(x, y) \in E \times E$, tel que $f(x, y) \neq 0$, alors pour tout $\lambda \in K$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda x, y) &= \sigma(f(y, \lambda x)) = \sigma(\sigma(\lambda)f(y, x)) \\ &= \sigma^2(\lambda)\sigma(f(y, x)) = \sigma^2(\lambda)f(x, y) \end{aligned}$$

Comme $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$ et comme $f(x, y) \neq 0$, alors pour tout $\lambda \in K$, on a $\sigma^2(\lambda) = \lambda$, donc $\sigma^2 = Id_K$.

CHAPITRE 8

ESPACES EUCLIDIENS

8.1 Produit scalaire

8.1.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 8.1.1

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique f .

- i) On dit que f est **positif**, si pour tout $x \in E$, on a $f(x, x) \geq 0$
- ii) On dit que f est **définie positive**, si

$$\forall x \in E, x \neq 0 \implies f(x, x) > 0$$

- iii) On appelle **produit scalaire** sur E , toute forme bilinéaire symétrique définie positive.
- iv) Un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire s'appelle un **espace préhilbertien réel**.
- v) Un espace préhilbertien réel de dimension finie s'appelle un **espace euclidien**.

Remarque 93

1. Tout produit scalaire est non dégénéré.

En effet, soit f un produit scalaire et soit $y \in E$, tel que,

$$\forall x \in E, f(x, y) = 0$$

Donc, en particulier, pour $x = y$, on a $f(y, y) = 0$, donc $y = 0$.

2. Une forme quadratique q sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est dite *positive* (resp. *définie positive*), si la forme polaire associée à q est positive (resp. *définie positive*). Donc, on aura

$$\begin{aligned} q \text{ est positive} &\iff \forall x \in E, \quad q(x) \geq 0 \\ (q \text{ est définie positive}) &\iff (\forall x \in E, \quad x \neq 0 \implies q(x) > 0) \end{aligned}$$

3. Une matrice symétrique réelle A est dite *positive* (resp. *définie positive*), si la forme quadratique définie par la matrice A est positive (resp. *définie positive*). Donc, pour une matrice **symétrique** $A \in M_n(\mathbb{R})$ on aura,

$$\begin{aligned} A \text{ est positive} &\iff \forall X \in \mathbb{R}^n, \quad {}^tXAX \geq 0 \\ (A \text{ est définie positive}) &\iff (\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad X \neq 0 \implies {}^tXAX > 0) \end{aligned}$$

4. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, q une forme quadratique sur E et A la matrice de q par rapport à une base de E . Alors q est positive (resp. *définie positive*), si et seulement si, A est positive (resp. *définie positive*).

Exemples

1. Le produit scalaire usuelle sur $\mathbb{R}^n$ est défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad f(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Donc $\mathbb{R}^n$ muni de ce produit scalaire est un espace euclidien.

2. Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R}), \quad f(A, B) = \text{tr}({}^tAB)$$

Alors, f définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

En effet, il est facile de vérifier que f est une forme bilinéaire.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, avec $A \neq 0$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors on a

$$f(A, A) = \text{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}^2$$

On en déduit donc que $f(A, A) > 0$.

3. $l_2(\mathbb{R}) = \{(x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ est un espace préhilbertien réel pour le produit scalaire défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, f(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_n y_n$$

avec $x = (x_n)_{n \geq 0}$ et $y = (y_n)_{n \geq 0}$.

Ici, f est bien définie, car $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n y_n| \leq \frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)$.

4. $C([a, b], \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, est un espace préhilbertien réel pour le produit scalaire suivant :

$$\forall f \in C([a, b], \mathbb{R}), \forall g \in C([a, b], \mathbb{R}), \varphi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

Il est clair que φ définit une forme bilinéaire symétrique positive sur $C([a, b], \mathbb{R})$. Reste à vérifier que φ est définie positive, pour cela, soit $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, tel que $f \neq 0$. Comme $f \neq 0$ et f continue, alors

$$\int_a^b f^2(t)dt > 0$$

5. Soit $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Pour chaque $x_0 \in \Omega$, la matrice hessienne $H(x_0)$ au point x_0 est définie par :

$$H(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

On sait, d'après le théorème de Schwartz, que $H(x_0)$ est une matrice symétrique et que si $H(x_0)$ est définie positive, alors x_0 est un minimum local de f . Rappelons que la forme quadratique q déterminée par la matrice $H(x_0)$ est définie par :

$$\forall (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n, q(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j$$

Proposition 8.1.1

Soit E un espace euclidien. Alors,

- i) E possède au moins une base orthonormale.
- ii) Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $E = F \oplus F^\perp$.
- iii) Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $F^{\perp\perp} = F$.

Démonstration. i) Soit f un produit scalaire sur E , puisque f est une forme bilinéaire symétrique sur E , alors E possède au moins une base orthogonale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et puisque f est définie positive, alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $f(e_i, e_i) > 0$. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ le système défini pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, par $v_i = \frac{1}{\sqrt{f(e_i, e_i)}} e_i$, alors $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base orthonormale de E .

ii) Il suffit de vérifier que F est non isotrope.

Soit $x \in F \cap F^\perp$, alors $f(x, x) = 0$, donc $x = 0$, car f est définie positive.

iii) Un produit scalaire est non dégénéré, donc $F^{\perp\perp} = F$. $\square$

8.1.2 Notations et règles de calcul

Notations

Soit E un espace préhilbertien complexe muni d'un produit scalaire f . Dans toute la suite, nous adoptons les notations suivantes :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \text{ on pose } f(x, y) = \langle x, y \rangle \text{ et } f(x, x) = \|x\|^2$$

Règles de calcul

i)

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

ii)

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

iii) Identité du parallélogramme :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

iv) Identité de polarisation :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \forall y \in E, \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \end{aligned}$$

Remarque 94

Notons que si $\langle x, y \rangle = 0$, alors on aura

$$\|x + y\|^2 = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

8.1.3 Utilisation des bases orthonormales

Proposition 8.1.2

Soit E un espace euclidien de dimension n , muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Alors on a

1.

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

2.

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$$

3.

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (\langle x, e_i \rangle)^2$$

4. Si u est un endomorphisme de E et si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de u par rapport à la base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, alors on a

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, a_{ij} = \langle u(e_j), e_i \rangle$$

Démonstration. 1. Soit $x \in E$ avec $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$\langle x, e_i \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \langle e_k, e_i \rangle = x_i \quad (\text{car } \langle e_k, e_i \rangle = \delta_{ki})$$

2. Exercice.

3. Exercice.

4. $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \text{Mat}(u, (e_1, e_2, \dots, e_n))$, donc pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a $u(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k$, par suite, pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, on a

$$\langle u(e_j), e_i \rangle = \sum_{k=1}^n a_{kj} \langle e_k, e_i \rangle = a_{ij} \quad (\text{car } \langle e_k, e_i \rangle = \delta_{ki})$$

8.2 Inégalité de cauchy-Schwarz

Théorème 8.2.1

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique *positive*, alors on a

$$\forall x \in E, \forall y \in E, |f(x, y)| \leq \sqrt{f(x, x)} \sqrt{f(y, y)}$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$, puisque f est positif, alors on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x + y, \lambda x + y) = f(x, x)\lambda^2 + 2f(x, y)\lambda + f(y, y) \geq 0$$

il s'agit donc d'un polynôme de second degré en λ qui garde un signe constant, donc son discriminant est négatif. Donc on a

$$f(x, y)^2 - f(x, x)f(y, y) \leq 0$$

D'où le résultat. □

Corollaire 8.2.1

Soit E un espace préhilbertien réel, alors on a

$$\forall x \in E, \forall y \in E, |< x, y >| \leq \|x\| \|y\|$$

Démonstration. On sait que tout produit scalaire est une forme bilinéaire définie positive, donc, en particulier, tout produit scalaire est positive, donc, d'après le théorème précédent, on a le résultat. □

Proposition 8.2.1

Soit E un espace préhilbertien réel, alors on a

$$|< x, y >| = \|x\| \|y\| \iff (x, y) \text{ est lié}$$

Démonstration. Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors le résultat est trivial. Donc on peut supposer que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

($\Rightarrow$) Supposons que $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, alors le discriminant du polynôme en λ :

$$P(\lambda) = \|\lambda x - y\|^2 = \|x\|^2 \lambda^2 - 2\langle x, y \rangle \lambda + \|y\|^2$$

est nul, donc il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, tel que $P(\lambda_0) = 0$, donc on aura

$$\|\lambda_0 x - y\|^2 = P(\lambda_0) = 0$$

Donc $\lambda_0 x - y = 0$, par conséquent, (x, y) est lié.

($\Leftarrow$) Supposons que (x, y) est lié. Comme $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $y = \alpha x$, donc on a

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle x, \alpha x \rangle| = |\alpha| \|x\|^2 = \|x\| \|y\|$$

Exemples

1. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel, alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

2. On considère $l_2(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $(x_n)_{n \geq 0} \in l_2(\mathbb{R})$ et pour tout $(y_n)_{n \geq 0} \in l_2(\mathbb{R})$, on a

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

3. On considère $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b])$ et pour tout $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on a

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

4. On considère l'application $\Phi : (\mathbb{R}_+^*)^n \longrightarrow \mathbb{R}^*$ définie pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, par

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

Alors Φ possède un minimum et ce minimum est atteint par une infinité d'éléments de $(\mathbb{R}_+^*)^n$.

En effet, pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, posons $y_i = \sqrt{x_i}$ et $z_i = \frac{1}{\sqrt{z_i}}$, alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$(y_1 z_1 + y_2 z_2 + \dots + y_n z_n)^2 \leq (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2)$$

On en déduit aisément que pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a $n^2 \leq \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$. D'autre part, on remarque que

$\Phi(1, 1, \dots, 1) = n^2$, donc n^2 est un minimum de Φ . De plus pour tout $a > 0$, on a $\Phi(a, a, \dots, a) = n^2$.

Définition 8.2.1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E , toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0$,
- ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$,
- iii) $\forall x \in E, \forall y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Dans ce cas, on dit que le couple (E, N) est un espace normé.

Notations

Soit (E, N) un espace normé, alors pour tout $x \in E$, on pose $\|x\| = N(x)$ et on lit "norme de x ".

Si plusieurs normes sont définies sur E , on les désigne par $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \dots$.

Exemples

Les normes usuelles de $\mathbb{R}^n$ sont définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

En utilisant les propriétés de la valeur absolue, il est facile de vérifier que les applications $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$, par contre, pour établir l'inégalité triangulaire concernant l'application $\|\cdot\|_2$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, comme le montre le corollaire suivant :

Corollaire 8.2.2

Soit E un espace préhilbertien réel, alors l'application définie par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

est une norme sur E , appelée norme euclidienne sur E .

Démonstration. Vérifions les trois propriétés de la définition d'une norme.

i) Un produit scalaire est défini positif, donc on a

$$\forall x \in E, \quad \langle x, x \rangle > 0 \iff x \neq 0$$

Donc, par contraposée, pour tout $x \in E$, on a

$$x = 0 \iff \|x\| = 0$$

ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $x \in E$, alors on a

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|$$

iii) Soient $x \in E$ et $y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Donc $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. □

8.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**Théorème 8.3.1**

Soient E un espace euclidien de dimension n et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base quelconque de E . Alors il existe une base orthonormale unique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E , telle que :

i) *Pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a*

$$\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_j) = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_j)$$

ii) *Pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\langle v_j, e_j \rangle > 0$.*

Démonstration. On construit les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ e'_2 &= v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 \text{ et } e_2 = \frac{e'_2}{\|e'_2\|} \\ &\vdots \\ e'_{j+1} &= v_{j+1} - \sum_{k=1}^j \langle v_{j+1}, e_k \rangle e_k \text{ et } e_{j+1} = \frac{e'_{j+1}}{\|e'_{j+1}\|} \\ &\vdots \\ e'_n &= v_n - \sum_{k=1}^j \langle v_n, e_k \rangle e_k \text{ et } e_n = \frac{e'_n}{\|e'_n\|} \end{aligned}$$

Puisque pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $\langle v_j, e_j \rangle = \langle e'_j, e_j \rangle = \|e'_j\|$, alors pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $\langle v_j, e_j \rangle > 0$. $\square$

Remarque 95

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base orthonormale de E , obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt au système $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, alors pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $v_j = \sum_{i=1}^j \langle v_j, e_i \rangle e_i$. Donc, si P est la matrice de passage de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ à $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, alors P est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont définis par :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad p_{ii} = \langle v_i, e_i \rangle$$

Proposition 8.3.1 (Inégalité d'Hadamard)

Soient E un espace euclidien orienté de dimension n et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ un système de vecteurs de E , alors

$$|\det(v_1, v_2, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \|v_2\| \cdots \|v_n\|$$

Démonstration. Si $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$, alors l'inégalité est triviale.

Si $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$, alors $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base de E .

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base orthonormale de E , obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt au système $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, alors d'après la remarque

précédente, on a

$$\begin{aligned} |\det(v_1, v_2, \dots, v_n)| &= |< v_1, e_1 > < v_2, e_2 > \cdots < v_n, e_n >| \\ &\leq \|v_1\| \|v_2\| \cdots \|v_n\| \quad (\text{d'après Cauchy-Schwarz}) \end{aligned}$$

8.4 Changement de bases orthonormales - Orientation

Lemme 8.4.1

Soit E un espace euclidien de dimension n , muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ un système quelconque de vecteurs de E , tels que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. Soit A la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, alors on a

$${}^tAA = (< v_i, v_j >)_{1 \leq i, j \leq p}$$

Démonstration. Puisque $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale, alors pour tout $x \in E$, on a $x = \sum_{i=1}^n < x, e_i > e_i$, donc, en particulier, on a

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, p\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad a_{ij} = < v_j, e_i >$$

Posons, maintenant, ${}^tAA = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$, alors pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, p\}^2$, on a

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \sum_{k=1}^n < v_i, e_k > < v_j, e_k > = < v_i, v_j >$$

car pour tout $x, y \in E$, on a $< x, y > = \sum_{k=1}^n < x, e_k > < y, e_k >$. □

Théorème 8.4.1

Soient E un espace euclidien de dimension n , β et γ deux bases orthonormales de E et P la matrice de passage de β à γ , alors on a

$${}^tPP = P{}^tP = I$$

Démonstration. Posons $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ et $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, on a $v_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$, donc, d'après le lemme précédent, on a

$${}^t P P = (< v_i, v_j >)_{1 \leq i, j \leq n} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Donc ${}^t P P = I$, par suite on a aussi $P {}^t P = I$. □

Définition 8.4.1

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si ${}^t A A = I$.

Remarque 96

1. Si A est orthogonale, alors A est inversible et on a $A^{-1} = {}^t A$.
2. Si A est orthogonale, alors $\det(A) = \pm 1$.
En fait, on a ${}^t A A = I$, donc $\det({}^t A A) = \det(I) = 1$, donc $\det(A)^2 = 1$.
3. Fixons une base orthonormale β de E et soit γ une autre base orthonormale de E . Soit P la matrice de passage de β à γ , alors d'après le lemme précédent, P est orthogonale, donc on a $\det_\beta(\gamma) = \det(P) = \pm 1$.

Proposition 8.4.1

Fixons une base orthonormale β de E et considérons la relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble $\mathcal{B}$ de toutes les bases orthonormales de E , par :

$$\beta_1 \mathcal{R} \beta_2 \iff \det_\beta(\beta_1) = \det_\beta(\beta_2)$$

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ayant deux classes d'équivalence $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ définies par :

$$\mathcal{C}_1 = \{\gamma \in \mathcal{B} : \det_\beta(\gamma) = 1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 = \{\gamma \in \mathcal{B} : \det_\beta(\gamma) = -1\}$$

Démonstration. La démonstration est laissée à titre d'exercice. □

Définition 8.4.2

- i) *Un espace euclidien orienté est un couple (E, β) , où E est un espace euclidien et β une base orthonormale de E fixée.*
- ii) *Si (E, β) est un espace euclidien orienté et si γ est une base orthonormale de E , tel que $\det_\beta(\gamma) = 1$, on dit que γ est une base orthonormale directe. Dans le cas contraire, on dit que γ est une base orthonormale indirecte.*

Remarque 97

1. *En pratique, pour simplifier, on dit soit E un espace euclidien orienté, donc, sous-entendu, E est muni d'une base orthonormale β .*
2. *Soit E un espace euclidien orienté de dimension n et soit $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ un système de n vecteurs de E . Alors le déterminant de S ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie. En effet, soit γ une base orthonormale directe, alors on a*

$$\det_\beta(S) = \det_\beta(\gamma) \det_\gamma(S) = \det_\gamma(S) \quad (\text{car } \det_\beta(\gamma) = 1)$$

Donc, dans un espace euclidien orienté, $\det(S)$ désigne le déterminant de S par rapport à n'importe quelle base orthonormale directe.

8.5 Produit vectoriel

8.5.1 Formes linéaires d'un espace euclidien

Proposition 8.5.1

Soit E un espace euclidien, alors pour toute forme linéaire φ de E , il existe un unique $y \in E$, tel que pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$.

Démonstration. On sait que le produit scalaire sur E est non dégénéré, donc l'application $\Phi : E \longrightarrow E^*$ définie par :

$$\forall y \in E, \forall x \in E, \quad \Phi(y)(x) = \langle x, y \rangle$$

est bijective. Soit $\varphi \in E^*$, alors il existe un unique $y \in E$, tel que $\Phi(y) = \varphi$, donc on a

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \Phi(y)(x) = \langle x, y \rangle$$

8.5.2 Définition et propriétés du produit vectoriel

Théorème 8.5.1

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Alors pour tout couple de vecteurs (u, v) de E , il existe un unique vecteur w de E , tel que

$$\forall x \in E, \quad \det(u, v, x) = \langle x, w \rangle$$

Dans ce cas, w s'appelle le produit vectoriel de u et v et se note $u \wedge v$.

Démonstration. Considérons l'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \det(u, v, x)$$

Puisque le déterminant est une forme multilinéaire, alors φ est une forme linéaire sur E , donc d'après le théorème précédent, il existe un unique $w \in E$, tel que

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \det(u, v, x) = \langle x, w \rangle$$

Remarque 98

1. Le produit vectoriel $u \wedge v$ de deux vecteurs u et v est caractériser par

$$\forall x \in E, \quad \det(u, v, x) = \langle x, u \wedge v \rangle$$

2. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale de E , alors on sait que

$$\forall x \in E, \quad x = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2 + \langle x, e_3 \rangle e_3$$

Donc, en particulier, pour tout $(u, v) \in E^2$, on a

$$\begin{aligned} u \wedge v &= \langle u \wedge v, e_1 \rangle e_1 + \langle u \wedge v, e_2 \rangle e_2 + \langle u \wedge v, e_3 \rangle e_3 \\ &= \det(u, v, e_1) e_1 + \det(u, v, e_2) e_2 + \det(u, v, e_3) e_3 \end{aligned}$$

Donc si $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$ et $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$, alors $w = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3$, où w_1, w_2, w_3 sont déterminés par

$$w_1 = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \quad w_2 = - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

3. Si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale directe de E , alors on a

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1 \quad \text{et} \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} e_1 \wedge e_2 &= \det(e_1, e_2, e_1)e_1 + \det(e_1, e_2, e_2)e_2 + \det(e_1, e_2, e_3)e_3 \\ &= \det(e_1, e_2, e_3)e_3 = e_3 \end{aligned}$$

De la même manière on voit que $e_2 \wedge e_3 = e_1$ et $e_3 \wedge e_1 = e_2$.

Proposition 8.5.2

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Alors on a

- i) L'application de $E \times E$ vers E qui à $(u, v) \in E \times E$ fait correspondre $u \wedge v$ est linéaire antisymétrique.
- ii) $\forall u \in E, \forall v \in E, \langle u, u \wedge v \rangle = \langle v, u \wedge v \rangle = 0$.
- iii) $u \wedge v = 0 \iff (u, v)$ est lié.

Démonstration. i) Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle u \wedge (v + w), x \rangle &= \det(u, v + w, x) = \det(u, v, x) + \det(u, w, x) \\ &= \langle u \wedge v, x \rangle + \langle u \wedge w, x \rangle \\ &= \langle (u \wedge v + u \wedge w), x \rangle \end{aligned}$$

Donc, $\forall x \in E, \langle u \wedge (v + w), x \rangle = \langle (u \wedge v + u \wedge w), x \rangle$, par suite, $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$.

Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle (\lambda u) \wedge v, x \rangle &= \det(\lambda u, v, x) = \lambda \det(u, v, x) = \lambda \langle u \wedge v, x \rangle \\ &= \det(u, \lambda v, x) = \langle u \wedge (\lambda v), x \rangle \end{aligned}$$

Donc, $(\lambda u) \wedge v = u \wedge (\lambda v) = \lambda(u \wedge v)$.

Pour tout $x \in E$, on a

$$\langle u \wedge v, x \rangle = \det(u, v, x) = -\det(v, u, x) = \langle -(v \wedge u), x \rangle$$

Donc $u \wedge v = -v \wedge u$.

ii) Pour $u \in E$ et $v \in E$, on a

$$\langle u \wedge v, u \rangle = \det(u, v, u) = 0 \quad \text{et} \quad \langle v \wedge u, v \rangle = \det(v, u, v) = 0$$

iii) ($\Rightarrow$) Supposons que $u \wedge v = 0$, puis supposons, par absurde, que (u, v) est libre. Soit $x_0 \in E$, tel que $x_0 \notin \text{Vect}(u, v)$, alors (u, v, x_0) est libre, donc $\det(u, v, x_0) \neq 0$.

Ce qui est absurde, car $\forall x \in E$, $\det(u, v, x) = 0$.

($\Leftarrow$) Supposons que (u, v) est lié.

Si $u = 0$ ou $v = 0$, alors $u \wedge v = 0$.

Si $u \neq 0$ et $v \neq 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $v = \alpha u$. Puisque pour tout $u \in E$, on a $u \wedge u = 0$, alors on a

$$u \wedge v = u \wedge (\alpha u) = \alpha (u \wedge u) = 0$$

Remarque 99

Si (u, v) est libre, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base de E .

En effet, on a

$$\det(u, v, u \wedge v) = \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = \|u \wedge v\|^2$$

Puisque (u, v) est libre, alors, d'après la proposition précédente, $u \wedge v \neq 0$, donc $\det(u, v, u \wedge v) \neq 0$ et par suite $(u, v, u \wedge v)$ est une base de E .

Proposition 8.5.3 (Identité de Lagrange)

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Alors

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (\langle u, v \rangle)^2$$

Démonstration. Si (u, v) est lié, alors $\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\|$ et $u \wedge v = 0$, donc dans ce cas le résultat est trivial.

Si (u, v) est libre, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base de E . Soit P la matrice de passage de la base $(u, v, u \wedge v)$ à une base orthonormale de E , alors d'après le lemme 8.4.1, on a

$$\begin{aligned} {}^t P P &= \begin{pmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle & \langle u, u \wedge v \rangle \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle & \langle v, u \wedge v \rangle \\ \langle u \wedge v, u \rangle & \langle u \wedge v, v \rangle & \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|u\|^2 & \langle u, v \rangle & 0 \\ \langle u, v \rangle & \|v\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|u \wedge v\|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc, d'une part, on aura

$$\det({}^tPP) = \det(P)^2 = \det(u, v, u \wedge v)^2 = (< u \wedge v, u \wedge v >)^2 = \|u \wedge v\|^4$$

D'autre part, on a

$$\det({}^tPP) = \|u \wedge v\|^2 (\|u\|^2 \|v\|^2 - (< u, v >)^2)$$

Par suite, on aura

$$\|u \wedge v\|^4 = \|u \wedge v\|^2 (\|u\|^2 \|v\|^2 - (< u, v >)^2)$$

$$\text{Donc } \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (< u, v >)^2. \quad \square$$

Remarque 100

1. Si $\|u\| = \|v\| = 1$ et $< u, v > = 0$, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormale directe de E . En effet, on a

$$\det(u, v, u \wedge v) = \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (< u, v >)^2 = 1$$

2. Soient u et v deux vecteurs non nuls, alors d'après la proposition précédente, on a

$$\frac{\|u \wedge v\|^2}{\|u\|^2 \|v\|^2} + \frac{< u, v >^2}{\|u\|^2 \|v\|^2} = 1$$

Donc, il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$, tel que

$$\cos \theta = \frac{< u, v >}{\|u\| \|v\|} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{\|u \wedge v\|}{\|u\| \|v\|}$$

θ s'appelle l'angle non orienté formé par les vecteurs u et v .

3. Si θ s'appelle l'angle non orienté formé par les vecteurs u et v , alors on a

$$\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$$

Proposition 8.5.4 (Formule du double produit vectoriel)

Soient E un espace euclidien, u, v et w trois vecteurs de E , alors on a

$$u \wedge (v \wedge w) = < u, w > v - < u, v > w$$

Démonstration. i) Si l'un des trois vecteurs est nul, alors il est clair que la formule est vérifiée. Donc dans la suite, on peut supposer que les trois vecteurs sont non nuls.

ii) Si (v, w) est lié, alors $v \wedge w = 0$, donc $u \wedge (v \wedge w) = 0$.

D'autre part, puisque v et w sont non nuls, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $w = \alpha v$, donc on a

$$\begin{aligned} \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w &= \langle u, \alpha v \rangle v - \langle u, v \rangle \alpha v \\ &= \alpha \langle u, v \rangle v - \alpha \langle u, v \rangle v = 0 \end{aligned}$$

Donc, dans ce cas, la formule est vérifiée.

iii) Si (v, w) est libre, alors $F = \text{Vect}(v, w)$ est un espace euclidien de dimension 2. Soit (e_1, e_2) une base orthonormale de F , avec $e_1 = \frac{v}{\|v\|}$, et soit e_3 un vecteur de E , tel que (e_1, e_2, e_3) soit une base orthonormale directe de E . Alors on a $w = \alpha e_1 + \beta e_2$ et $u = a e_1 + b e_2 + c e_3$.

Donc, d'une part, on a

$$\begin{aligned} u \wedge (v \wedge w) &= u \wedge (v \wedge (\alpha e_1 + \beta e_2)) = u \wedge (\beta \|v\| e_1 \wedge e_2) \\ &= \beta \|v\| u \wedge e_3 = \beta \|v\| (a e_1 \wedge e_3 + b e_2 \wedge e_3) \\ &= \beta \|v\| (b e_1 - a e_2) \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w &= \langle a e_1 + b e_2 + c e_3, \alpha e_1 + \beta e_2 \rangle v \\ &\quad - \langle a e_1 + b e_2 + c e_3, v \rangle (\alpha e_1 + \beta e_2) \\ &= (a\alpha + b\beta) \|v\| e_1 - a \|v\| (\alpha e_1 + \beta e_2) \\ &= \beta \|v\| (b e_1 - a e_2) \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Remarque 101

On a aussi

$$(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$$

Donc le produit vectoriel n'est pas associatif. En fait, on montre, voir exercices, que

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w \iff (v, u \wedge w) \text{ est lié}$$

8.6 Exercices

Exercice 148

Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs du paramètre réel a pour lesquelles la forme quadratique q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$:

a) $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + (a + 12)x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$

b) $q(x) = x_1^2 + (a + 5)x_2^2 + (a^2 + a + 2)x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2(a + 3)x_2x_3.$

Exercice 149

Soient E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp \quad \text{et} \quad (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$

Exercice 150

Soit E un espace préhilbertien réel x et y deux vecteurs de E . Montrer que

$$\langle x, y \rangle = 0 \iff \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$$

Exercice 151

Soient E un espace préhilbertien, x et y deux vecteurs non nuls de E . Montrer que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|}$$

Exercice 152

Soient E un espace préhilbertien, x et y deux vecteurs non nuls de E . Vérifier que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = 2 \left(1 \pm \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} \right)$$

En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que le cas d'égalité.

Exercice 153 (Egalité de la médiane)

Soient E un espace préhilbertien réel, x , a et b trois vecteurs quelconques de E . Montrer que

$$\left\| x - \frac{a+b}{2} \right\|^2 = \frac{\|x-a\|^2 + \|x-b\|^2}{2} - \frac{1}{4}\|a-b\|^2$$

Exercice 154

Soient E un espace euclidien, x et y deux vecteurs de E , avec $x \neq y$. Montrer que pour tout $z \in E$, on a

$$\|x - z\| + \|y - z\| = \|x - y\| \iff \exists \alpha \in [0, 1] : z = (1 - \alpha)x + \alpha y$$

Exercice 155

$\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel et (e_1, e_2, e_3) sa base canonique. Soient $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 + e_2$ et $v_3 = e_1$.

- Vérifier que (v_1, v_2, v_3) définit une base de $\mathbb{R}^3$.
- Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base (v_1, v_2, v_3) pour obtenir une base orthonormale (u, v, w) .

Exercice 156

Soient $e_1, e_2, \dots, e_m$ des vecteurs tous de norme 1 et deux à deux distincts d'un espace euclidien E . On suppose qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}_+$, tels que $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ et tel que $\left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \right\| = 1$. Montrer que tous les α_i sont nuls sauf un qui est égal à 1.

Exercice 157

Soient E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E . Pour toute base orthonormale $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, on pose $S(\beta) = \sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2$.

- Montrer que $S(\beta)$ ne dépend pas de la base orthonormale choisie.
- Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice réelle symétrique et soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A , non nécessairement deux à deux distinctes. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

Exercice 158

Soit E un espace euclidien. Montrer que si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E et si $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est un système de vecteurs de E , tels que

$$\sum_{i=1}^n \|v_i - e_i\|^2 < 1$$

alors $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base de E .

Exercice 159 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

- Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des nombres réels quelconques. Montrer que

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Etudier le cas d'égalité.

- Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des nombres réels strictement positifs. Montrer que

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2$$

Etudier le cas d'égalité.

- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tel que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Montrer que

$$(x + 2y + 3z)^2 \leq 14$$

Etudier le cas d'égalité.

4. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tel que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$. Montrer que

$$(x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}$$

Etudier le cas d'égalité.

5. Montrer que pour toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\left(\int_a^b |f(t)| dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f(t)^2 dt$$

Pour quelles fonctions a-t-on l'égalité ?

6. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Montrer que

$$f(b)^2 - f(a)^2 \leq 2 \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b f'(t)^2 dt}$$

Etudier le cas d'égalité.

7. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(t) dt \right) \left(\int_a^b \frac{dt}{f(t)} \right) \geq (b-a)^2$$

Etudier le cas d'égalité.

8. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Pour chaque entier $n \geq 0$, on pose

$$I_n = \int_a^b t^n f(t) dt$$

Montrer que $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}$. Etudier le cas d'égalité.

9. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, tel que pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(x) > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_a^b f(t)^n dt$ et on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est croissante.

Exercice 160

$M_n(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel :

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}(^t AB)$$

- Montrer que la base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base orthonormale de $M_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}(A) \leq \sqrt{n} \sqrt{\text{tr}(^t A A)}$.
Etudier le cas d'égalité

Exercice 161

Soient E un espace euclidien, $\alpha \in \mathbb{R}$, u , v et w trois vecteurs unitaires de E , tels que

$$\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = \alpha$$

- a) Montrer que $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.
b) Montrer que (u, v, w) est libre, si, et seulement si, $-\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Exercice 162

Soient E un espace euclidien, n un entier ≥ 2 et $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ un système de vecteurs de E , tels que

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, \quad i \neq j \implies \langle v_i, v_j \rangle < 0$$

Montrer que $\text{rg}(S) \geq n - 1$.

Exercice 163

Soient E un espace préhilbertien réel, x , y et z trois vecteurs non nuls de E . Montrer que

$$\|x - y\| \geq \frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|) \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$$

Exercice 164

Soit E un espace préhilbertien. On suppose qu'il existe un système de vecteurs unitaires $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E , tel que pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (\langle x, e_i \rangle)^2$$

- Montrer que pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.
- Soit $F = \text{Vect}(\{e_1, e_2, \dots, e_n\})$ et soit $x \in E$.

On pose $y = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$, calculer $\|x - y\|$ et en déduire que $E = F$.

Exercice 165

Soient E un espace euclidien et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ un système lié de vecteurs unitaires. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $\alpha \neq 1$, tel que

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, \quad i \neq j \implies \langle v_i, v_j \rangle = \alpha$$

Montrer que

a) $\alpha = -\frac{1}{n-1}$,

- b) $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0$,
 c) $rg(v_1, v_2, \dots, v_n) = n - 1$.

Exercice 166 (Formule du double produit vectoriel)

Soient u , v et w trois vecteurs d'un espace euclidien de dimension 3.

1. Montrer que $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$.
2. Montrer que $\det(u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u) = \det(u, v, w)^2$.
3. Montrer que $u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$, si et seulement si, le système (v, w) est lié ou $v \in \{u, w\}^\perp$.
4. Montrer que

$$u \wedge (v \wedge w) + w \wedge (u \wedge v) + v \wedge (w \wedge u) = 0 \quad (\text{Identité de Jacobi})$$

Exercice 167

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, a , b , c et d quatre vecteurs de E . Montrer que

- a) $\langle a \wedge b, c \wedge d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$.
 b) $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = \det(a, b, d)c - \det(a, b, c)d$.

Exercice 168 (Théorème de Fréchet–Jordan–von Neumann)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé dont la norme vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

On se propose de montrer que sa norme $\|\cdot\|$ est défini par un produit scalaire. Pour cela on considère l'application $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad f(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

1. Montrer que pour $x, y \in E$, on a $f(x, y) = f(y, x)$ et $f(x, x) = \|x\|^2$.
2. Soient $x_1, x_2, y \in E$. En appliquant l'identité du parallélogramme aux couples $(x_1 + y, x_2 + y)$ et $(x_1 - y, x_2 - y)$, montrer que

$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$$

3. Soit $(x, y) \in E \times E$.
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(nx, y) = nf(x, y)$.
 - b) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a $f(rx, y) = rf(x, y)$.
 - c) En utilisant la continuité de la norme, montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$.
4. Dédire de ce qui précède que f définit un produit scalaire sur E et conclure.

8.7 Solution des exercices

Exercice 148

1. On sait que q définit un produit scalaire, si et seulement si, $\text{signature}(q) = (3, 0)$. On est donc amené à appliquer l'algorithme de Gauss. On a

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + x_2^2 + (a + 12)x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 - 3x_3)^2 + x_2^2 + (a + 3)x_3^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 - 3x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 + (a - 1)x_3^2 \end{aligned}$$

donc q définit un produit scalaire, si et seulement si, $a > 1$.

2. On a

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + (a + 5)x_2^2 + (a^2 + a + 2)x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2(a + 3)x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (a + 1)x_2^2 + 2(a + 1)x_2x_3 + (a^2 + a + 1)x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (a + 1)(x_2 + x_3)^2 + a^2x_3^2 \end{aligned}$$

donc q définit un produit scalaire, si et seulement si, $a \neq 0$ et $a > -1$.

Exercice 149

On a $F \subseteq F + G$ et $G \subseteq F + G$, donc $(F + G)^\perp \subseteq F^\perp$ et $(F + G)^\perp \subseteq G^\perp$, par suite, on a $(F + G)^\perp \subseteq F^\perp \cap G^\perp$. Soit $y \in F^\perp \cap G^\perp$ et soit $x \in F + G$, avec $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$, alors on a $\langle x, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle = 0$, car $y \in F^\perp$ et $y \in G^\perp$. donc $y \in (F + G)^\perp$ et ainsi on a $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$. Pour montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$, nous appliquons ce qui précède à $F^\perp$ et $G^\perp$, donc on aura $(F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G$, car $F^{\perp\perp} = F$ et $G^{\perp\perp} = G$, par suite, on a $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^{\perp\perp} = (F \cap G)^\perp$.

Exercice 150

Supposons que $\langle x, y \rangle = 0$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + \lambda^2 \|y\|^2$$

donc on en déduit que $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$.

Réciproquement, si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|y\|^2 \lambda^2 + 2\langle x, y \rangle \lambda \geq 0$, donc on a $(\langle x, y \rangle)^2 \leq 0$, ce qui prouve que $\langle x, y \rangle = 0$.

Exercice 151

Soient x et y deux vecteurs non nuls de E , alors on a

$$\begin{aligned}\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\|^2 &= \frac{1}{\|x\|^2} - 2 \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2 \|y\|^2} + \frac{1}{\|y\|^2} \\ &= \frac{\|x\|^2 - 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2}{\|x\|^2 \|y\|^2} \\ &= \frac{\|x - y\|^2}{\|x\|^2 \|y\|^2} = \left(\frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|} \right)^2\end{aligned}$$

donc on voit que $\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|}$.

Exercice 152

Soient x et y deux vecteurs non nuls de E , alors on a

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = 2 + 2 \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} = 2 \left(1 + \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right)$$

et on a aussi

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| = 2 - 2 \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} = 2 \left(1 - \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right)$$

Il en résulte que si x et y deux vecteurs non nuls de E , alors on a

$$1 + \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \geq 0 \quad \text{et} \quad 1 - \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \geq 0$$

donc on voit que $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$ et $\langle x, y \rangle \geq -\|x\| \|y\|$, ainsi on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Si (x, y) est lié alors il est clair que $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$.

Si $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$, alors on a $\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| = 0$, donc on aura

$\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} = 0$, par suite (x, y) est lié.

Exercice 153

Soient x , a et b trois vecteurs de E , alors on a

$$\begin{aligned}\left\| x - \frac{a+b}{2} \right\|^2 &= \frac{\|(x-a) + (x-b)\|^2}{4} \\ &= \frac{\|x-a\|^2 + \|x-b\|^2 + 2 \langle x-a, x-b \rangle}{4}\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{cases} \langle x - a, x - b \rangle = \|x - a\|^2 + \langle x - a, a - b \rangle \\ \langle x - a, x - b \rangle = \|x - b\|^2 - \langle a - b, x - b \rangle \end{cases}$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned} 2 \langle x - a, x - b \rangle &= \|x - a\|^2 + \|x - b\|^2 + \langle a - b, b - a \rangle \\ &= \|x - a\|^2 + \|x - b\|^2 - \|a - b\|^2 \end{aligned}$$

On en déduit donc qu'on a

$$\left\| x - \frac{a+b}{2} \right\|^2 = \frac{\|x - a\|^2 + \|x - b\|^2}{2} - \frac{\|a - b\|^2}{4}$$

Exercice 154

Pour écarter les cas triviaux, on peut supposer que x , y et z sont deux à deux distincts.

Supposons que $\|x - z\| + \|y - z\| = \|x - y\|$. On a

$$\|x - y\|^2 = \|(x - z) + (z - y)\|^2 = \|x - z\|^2 + \|z - y\|^2 + 2 \langle x - z, z - y \rangle$$

et on a aussi

$$\|x - y\|^2 = \|(x - z) + (z - y)\|^2 = \|x - z\|^2 + \|z - y\|^2 + 2\|x - z\|\|z - y\|$$

donc on voit que $\langle x - z, z - y \rangle = \|x - z\|\|z - y\|$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \langle x - y, x - z \rangle &= \|x - z\|^2 + \langle z - y, x - z \rangle \\ &= \|x - z\|(\|x - z\| + \|z - y\|) \\ &= \|x - z\|\|x - y\| \end{aligned}$$

On en déduit que $(x - y, x - z)$ est lié, puis comme $\langle x - y, x - z \rangle \geq 0$, alors il existe $\alpha \geq 0$, tel que $x - z = \alpha(x - y)$, donc $z = (1 - \alpha)x + \alpha y$. On a $\alpha = \frac{\|x - z\|}{\|x - y\|}$, donc on a $0 \leq \alpha \leq 1$.

Réciproquement, s'il existe $\alpha \in [0, 1]$, tel que $z = (1 - \alpha)x + \alpha y$, alors il est facile de voir que $\|x - z\| + \|y - z\| = \|x - y\|$.

Exercice 155

1. On a $\det(v_1, v_2, v_3) = -1$, donc (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. En appliquant l'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base (v_1, v_2, v_3) on obtient une base orthonormale (u, v, w) définie par :

$$\begin{cases} u = \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ v = \frac{v'}{\|v'\|} \\ w = \frac{w'}{\|w'\|} \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} v' = v_2 - \frac{1}{\|v_1\|^2} \langle v_1, v_2 \rangle v_1 \\ w' = v_3 - \frac{1}{\|v_1\|^2} \langle v_1, v_3 \rangle v_1 - \frac{1}{\|v_2\|^2} \langle v_2, v_3 \rangle v_2 \end{cases}$$

En faisant le calcul on trouve

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3) \\ v = \frac{\sqrt{6}}{6}(e_1 + e_2 - 2e_3) \\ w = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 - e_2) \end{cases}$$

Exercice 156

En utilisant la bilinéarité du produit scalaire, on voit que

$$\left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i, j \leq m} \alpha_i \alpha_j \langle e_i, e_j \rangle$$

On a aussi

$$\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \right)^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i, j \leq m} \alpha_i \alpha_j$$

Comme $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ et $\left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \right\| = 1$, alors on en déduit que

$$\sum_{1 \leq i, j \leq m} \alpha_i \alpha_j (1 - \langle e_i, e_j \rangle) = 0$$

Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, avec $i \neq j$, on a $\|e_i\| = \|e_j\| = 1$, donc on a

$$\|e_i - e_j\|^2 = 2 - 2 \langle e_i, e_j \rangle$$

et comme $e_i - e_j \neq 0$, alors il en résulte que $1 - \langle e_i, e_j \rangle > 0$. Donc pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, avec $i \neq j$, on a $\alpha_i \alpha_j (1 - \langle e_i, e_j \rangle) \geq 0$ et comme

$$\sum_{1 \leq i, j \leq m} \alpha_i \alpha_j (1 - \langle e_i, e_j \rangle) = 0$$

alors on en déduit que tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, avec $i \neq j$, on a $\alpha_i \alpha_j = 0$. Les α_i sont positifs et $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, donc il existe $i_0 \in \mathbb{N}_n$, tel que $\alpha_{i_0} \neq 0$. Or, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, avec $i \neq i_0$, on a $\alpha_{i_0} \alpha_i = 0$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, avec $i \neq i_0$, on a $\alpha_i = 0$ et par suite, on a $\alpha_{i_0} = 1$.

Exercice 157

- a) Fixons une base orthonormale $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Soient u un endomorphisme de E et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de u dans cette base, donc pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, on a $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, donc $\|u(e_j)\|^2 = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2$, par conséquent, on a

$$\sum_{i=1}^n \|u(e_j)\|^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2$$

Or, on sait que $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = \text{tr}({}^t A A)$, donc on a

$$\sum_{i=1}^n \|u(e_j)\|^2 = \text{tr}({}^t A A)$$

Soient $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une autre base orthonormale de E , B la matrice de u par rapport à γ et P la matrice de passage de β à γ , alors P est une matrice orthogonale, par suite, on a ${}^t P = P^{-1}$. On a $B = P^{-1} A P$ et ${}^t P = P^{-1}$, alors on a aussi ${}^t B = P^{-1} {}^t A P$, ainsi, on a aussi ${}^t B B = P^{-1} {}^t A A P$. Donc on voit que ${}^t B B$ et ${}^t A A$ sont semblables, par suite, on a $\text{tr}({}^t B B) = \text{tr}({}^t A A)$. On en déduit donc que l'expression $\sum_{j=1}^n \|u(e_j)\|^2$ ne dépend pas de la base orthogonale choisie.

- b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et soit u l'endomorphisme associé canoniquement à A . Comme u est symétrique, alors il existe une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres de u , donc si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u , non nécessairement deux à deux distinctes, alors on a $\sum_{j=1}^n \|u(e_j)\|^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2$. D'après la question précédente, on a alors $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2$.

Exercice 158

Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(e_i) = v_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}_n$. Soit $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors on a

$$\begin{aligned}\|u(x) - x\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i (u(e_i) - e_i) \right\|^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \|u(e_i) - e_i\| \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \|u(e_i) - e_i\|^2 \right)\end{aligned}$$

donc on en déduit que pour tout $x \in E$, on a $\|u(x) - x\| \leq k\|x\|$, avec $k = \sum_{i=1}^n \|u(e_i) - e_i\|^2$. Donc pour $x \in \ker(u)$, on aura $\|x\| \leq k\|x\|$ et comme $k < 1$, alors $x = 0$, donc $\ker(u) = \{0\}$, par suite u est inversible.

L'image d'une base par un automorphisme est une base, donc $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base de E .

Exercice 159

1. On pose $y = (1, 1, \dots, 1)$ et $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, donc d'après Cauchy-Schwarz, on a $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, ce qui se traduit par

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Il y a égalité, si et seulement si, (x, y) est lié, donc si et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $x = \alpha y$. On en déduit donc qu'il y a égalité, si et seulement si, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

2. Pour chaque $i \in \mathbb{N}_n$, on pose $y_i = \sqrt{x_i}$ et $z_i = \frac{1}{\sqrt{x_i}}$, alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$n = \sum_{i=1}^n y_i z_i \leq \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n z_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc il en résulte, qu'on a

$$n^2 \leq (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

L'égalité est réalisée, si et seulement si, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ et $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ sont linéairement dépendant. Donc il y a égalité, si et seulement si, il

existe $\alpha > 0$, tel que pour tout i , on a $y_i = \alpha z_i$, donc on en déduit que pour tout i , on a $x_i^2 = \alpha$. Donc on voit qu'il y a égalité, si et seulement si, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

3. On pose $a = (x, y, z)$ et $b = (1, 2, 3)$, donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$(x + 2y + 3z)^2 \leq (1 + 4 + 9)(x^2 + y^2 + z^2)$$

Puisque $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, alors on a $(x + 2y + 3z)^2 \leq 14$.

Il a égalité, si et seulement si, $(x, y, z) \in \text{Vect}((1, 2, 3))$.

4. On pose $a = (\frac{1}{\sqrt{6}}x, \frac{1}{\sqrt{3}}y, \frac{1}{\sqrt{2}}z)$ et $b = (\sqrt{6}, \sqrt{3}, \sqrt{2})$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$(x + y + z)^2 \leq (6 + 3 + 2)(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{2}z^2)$$

Puisque $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{6}(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ et puisque $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$, alors on a

$$(x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}$$

Il a égalité, si et seulement si, $(x, y, z) \in \text{Vect}((6, 3, 2))$.

5. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à f et à la fonction constante 1, par rapport au produit scalaire défini sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ par

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

on aura le résultat :

$$\left(\int_a^b f(t)dt \right)^2 \leq (b - a) \int_a^b f(t)^2 dt$$

Il y a égalité, si et seulement si, f et la fonction constante 1 forment un système lié, donc si et seulement si, f est constante.

6. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions f et f' , par rapport au produit scalaire défini sur $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ par

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

on aura :

$$\int_a^b f'(t)f(t)dt \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b f'(t)^2 dt}$$

avec $\int_a^b f'(t)f(t)dt = \frac{1}{2}(f(b)^2 - f(a)^2)$, d'où le résultat :

$$f(b)^2 - f(a)^2 \leq 2\sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b f'(t)^2 dt}$$

Il y a égalité si et seulement si, f et f' forment un système lié, donc si et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $f = \alpha f'$. On en déduit donc qu'il y a égalité pour les fonctions f s'écrivant sous la forme $f(t) = e^{\alpha t}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

7. On pose $g(t) = \sqrt{f(t)}$ et $h(t) = \frac{1}{\sqrt{f(t)}}$, alors en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions g et h , par rapport au produit scalaire défini sur $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ par

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

on aura :

$$\left(\int_a^b g(t)h(t)dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b g(t)^2 dt \right) \left(\int_a^b h(t)^2 dt \right)$$

En remplaçant g et h par leurs valeurs, on obtient le résultat :

$$(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)dt \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \right)$$

Il y a égalité si et seulement si, g et h forment un système lié, donc on voit facilement que ceci est réalisé, si et seulement si, f est constante.

8. Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $g(t) = t^n \sqrt{f(t)}$ et $h(t) = t^p \sqrt{f(t)}$. Donc en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions g et h , par rapport au produit scalaire défini dans les questions précédentes, on aura :

$$\left(\int_a^b g(t)h(t)dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b g(t)^2 dt \right) \left(\int_a^b h(t)^2 dt \right)$$

En remplaçant g et h par leurs valeurs, on obtient :

$$\left(\int_a^b t^{n+p} f(t)dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b t^{2n} f(t)dt \right) \left(\int_a^b t^{2p} f(t)dt \right)$$

On en déduit donc que $I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}$.

Il y a égalité si et seulement si, g et h forment un système lié, donc si et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $t \in [a, b]$, on a $t^n = \alpha t^p$. Comme $t \rightarrow t^n$ et $t \rightarrow \alpha t^p$ sont deux fonctions polynômes, alors on doit avoir $p = n$ et $\alpha = 1$, donc est réalisée uniquement dans le cas où $n = p$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a f^n strictement positif et continue sur $[a, b]$, donc $\int_a^b f(t)^n dt > 0$, par suite, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie. On a $u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n > 0$, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, si et seulement si, $I_{n+1}^2 \leq I_n I_{n+2}$. Pour établir l'inégalité obtenue, on pose $g(t) = (\sqrt{f(t)})^n$ et $h(t) = (\sqrt{f(t)})^{n+2}$, puis on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions g et h , alors on obtient :

$$\left(\int_a^b g(t)h(t)dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b g(t)^2 dt \right) \left(\int_a^b h(t)^2 dt \right)$$

En remplaçant g et h par leurs valeurs, on obtient le résultat cherché :

$$I_{n+1} \leq I_n I_{n+2}$$

Exercice 160

1. On a $\|E_{ij}\|^2 = \text{tr}({}^t E_{ij} E_{ij}) = \text{tr}(E_{ji} E_{ij}) \text{tr}(E_{jj}) = 1$.
Pour $(i, j) \neq (k, l)$, on a

$$\langle E_{ij}, E_{kl} \rangle = \text{tr}({}^t E_{ij} E_{kl}) = \text{tr}(E_{ji} E_{kl}) = \begin{cases} E_{jl} & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

donc dans tous les cas, on a $\langle E_{ij}, E_{kl} \rangle = 0$, car si $i = k$, alors $j \neq l$. On en déduit donc que $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base orthonormale de $M_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors on a

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t AB) = \text{tr}(AB)$$

et on a aussi

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t BA) = -\text{tr}(BA) = -\text{tr}(AB)$$

Donc on voit que $\langle A, B \rangle = 0$, par suite, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$. Or, on sait que $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, donc on aura $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp)$, par conséquent, on a $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$.

3. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à A et I , nous obtenons le résultat cherché :

$$\text{tr}(A) \leq \sqrt{n} \sqrt{\text{tr}({}^t AA)}$$

Exercice 161

Soit $G(u, v, w)$ la matrice de Gram associée au système (u, v, w) , alors on a

$$G(u, v, w) = \begin{pmatrix} \|u\|^2 & \langle u, v \rangle & \langle u, w \rangle \\ \langle v, u \rangle & \|v\|^2 & \langle v, w \rangle \\ \langle w, u \rangle & \langle w, v \rangle & \|w\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Alors on sait que $\det(G(u, v, w)) \geq 0$. En effet, si (u, v, w) est lié, alors il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, tel que $au + bv + cw = 0$, donc en faisant le produit scalaire de $au + bv + cw$ successivement avec u , v et w , on aura

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc on en déduit que $\det(G(u, v, w)) = 0$.

Si maintenant (u, v, w) est libre, on considère une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) de $\text{Vect}(u, v, w)$. Soit P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (u, v, w) , alors on a $u = p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + p_{31}e_3$, $v = p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + p_{32}e_3$ et $w = p_{13}e_1 + p_{23}e_2 + p_{33}e_3$, donc en calculant les coefficients de $G(u, v, w)$ en fonction des p_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$, on voit facilement que $G(u, v, w) = {}^tPP$. Ainsi on a $\det(G(u, v, w)) = \det(P)^2$, donc $\det(G(u, v, w)) > 0$.

- a) On a $\det(G(u, v, w)) = (2\alpha + 1)(\alpha - 1)^2$ et on a $\det(G(u, v, w)) \geq 0$, donc $-\frac{1}{2} \leq \alpha$. On a aussi $\alpha = \langle u, v \rangle$, donc d'après Cauchy-Schwarz, on a $\alpha \leq 1$, car $\|u\| = \|v\| = 1$.

- b) D'après ce qui précède, (u, v, w) est libre, si et seulement si,

$$(2\alpha + 1)(\alpha - 1)^2 > 0$$

Donc on en déduit que (u, v, w) est libre, si et seulement si, $-\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Exercice 162

D'abord remarquons que $n = 2$, alors le résultat est trivial, car on a $v_1 \neq 0$, donc $rg(v_1, v_2) \geq 1$. Donc dans la suite on peut supposer que $n \geq 3$.

Pour montrer que $rg(v_1, v_2, \dots, v_n) = n - 1$, il suffit de montrer, par exemple, que $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ est libre. Supposons, par l'absurde, que $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ est lié et soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i = 0$.

Quitte à réordonner les éléments, on peut supposer, par exemple, que $\alpha_1 \neq 0$, donc on a $\alpha_1 \|v_1\|^2 = - \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i \langle v_1, v_i \rangle$.

Si pour tout i , on a $\alpha_i \leq 0$, alors d'une part, on a $\alpha_1 \|v_1\|^2 < 0$ et d'autre part, on a

$$\alpha_1 \|v_1\|^2 = - \langle \alpha v_1, \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i v_i \rangle = - \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_1 \alpha_i \langle v_1, v_i \rangle$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, on a $\alpha_1 \alpha_i \geq 0$ et $\langle v_1, v_i \rangle < 0$, donc $\alpha_1 \|v_1\|^2 \geq 0$, ce qui est absurde, donc on peut supposer qu'il existe au moins un $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, tel que $\alpha_i \neq 0$. Si pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, on a $\alpha_i \geq 0$, donc en multipliant les

deux membres de l'égalité $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i = 0$ par -1 , on retrouve le cas précédent, donc aussi on abouti à une contradiction. Soient $I = \{i \in \mathbb{N}_{n-1} : \alpha_i > 0\}$ et $J = \{i \in \mathbb{N}_{n-1} : \alpha_i \leq 0\}$, alors on a I et J sont non vides et on a $\sum_{i \in I} \alpha_i v_i = - \sum_{i \in J} \alpha_i v_i$, par suite, on aura

$$\left\| \sum_{i \in I} \alpha_i v_i \right\|^2 = - \left\langle \sum_{i \in I} \alpha_i v_i, \sum_{i \in J} \alpha_i v_i \right\rangle = - \sum_{(i,j) \in I \times J} \alpha_i \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle$$

Donc on en déduit que $\left\| \sum_{i \in I} \alpha_i v_i \right\|^2 \leq 0$, par suite, on a $\sum_{i \in I} \alpha_i v_i = 0$. En faisant le produit scalaire par v_n , on aura $\sum_{i \in I} \alpha_i \langle v_i, v_n \rangle = 0$, or pour tout $i \in I$, on a $\alpha_i \langle v_i, v_n \rangle < 0$, ce qui est absurde. Nous avons donc établi que $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ est libre, donc $rg(v_1, v_2, \dots, v_n) \geq n - 1$.

Exercice 163

On a

$$\begin{aligned} (\|x\| + \|y\|) \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| &= \left\| (x - y) + \left(\frac{\|y\|}{\|x\|} x - \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right) \right\| \\ &\leq \|x - y\| + \left\| \frac{\|y\|}{\|x\|} x - \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\|y\|}{\|x\|} x - \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\|^2 &= \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2 \langle x, y \rangle \\ &= \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

On en déduit donc qu'on a

$$(\|x\| + \|y\|) \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2\|x - y\|$$

Ce qui prouve le résultat cherché :

$$\|x - y\| \geq \frac{1}{2} (\|x\| + \|y\|) \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$$

Exercice 164

1. Soit $i \in \mathbb{N}_n$, alors on a $1 = \|e_i\| = 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \langle e_i, e_j \rangle^2$, donc on a

$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \langle e_i, e_j \rangle^2 = 0$, par suite, pour tout $i \neq j$, on a $\langle e_i, e_j \rangle = 0$. Il en résulte donc que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

2. On a $F = \text{Vect}(\{e_1, e_2, \dots, e_n\})$ et on a $y = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$, puis comme $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F , alors on a $x - y \in F^\perp$. Puisque $\langle x - y, y \rangle = 0$, alors $\langle x, y \rangle = \|y\|^2$, par suite, on a

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle \\ &= 2\|y\|^2 - 2\|y\|^2 = 0 \quad (\text{car } \|x\|^2 = \|y\|^2)\end{aligned}$$

On a donc $x = y$, donc $x \in F$ et par conséquent, on a $E = F$.

Exercice 165

Remarquons d'abord que $x \neq y$ et $\|x\|\|y\| = 1$, alors on a $\langle x, y \rangle < 1$.

En effet, il suffit de remarquer que $\|x - y\|^2 = 2(1 - \langle x, y \rangle)$.

- a) Le système $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est lié donc il existe $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = 0$. En faisant le produit scalaire de chaque v_i avec $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$, on obtient le système suivant en $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 + \dots + \alpha x_n = 0 \\ \alpha x_1 + x_2 + \alpha x_3 + \dots + \alpha x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha x_1 + \dots + \alpha x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$$

Ce système est homogène et admet une solution autre que la solution nulle donc son déterminant Δ est nulle. On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha \\ \alpha & \dots & \alpha & 1 \end{vmatrix} = ((n-1)\alpha + 1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ 0 & 1 - \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 - \alpha \end{vmatrix}$$

Donc $\Delta = ((n-1)\alpha + 1)(1 - \alpha)^{n-1}$. D'après la remarque du début, on a $\alpha < 1$ et comme $\Delta = 0$, alors on a $\alpha = -\frac{1}{n-1}$.

- b) On a

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{i=1}^n v_i \right\|^2 &= \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle v_i, v_j \rangle \\ &= n + n(n-1)\alpha \\ &= 0 \quad (\text{car } 1 + (n-1)\alpha = 0)\end{aligned}$$

Donc $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0$.

- c) Dans cette question on peut supposer que $n \geq 3$, car si $n = 2$, alors il est clair que $rg(v_1, v_2) = 1$.

Montrons que $(v_1, v_2 + \dots, v_{n-1})$ est libre. Soient $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$, tels que $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_{n-1} v_{n-1} = 0$, alors on obtient un même système d'ordre $n - 1$ de la même forme de celui de la question a), donc son déterminant Δ vaut $(n - 2)\alpha + 1)(1 - \alpha)^{n-2}$. On a $(n - 2)\alpha + 1 \neq 0$ et $\alpha \neq 1$, donc $\Delta \neq 0$, par suite, on a $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$. On conclut donc $(v_1, v_2 + \dots, v_{n-1})$ est libre et donc $rg(v_1, v_2 + \dots, v_n) = n - 1$.

Exercice 166

1. Si l'un des vecteurs est nul alors l'égalité est trivial, donc on peut supposer que les trois vecteurs sont non nuls.

Si $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = 0$, alors u et $v \wedge w$ sont colinéaires, donc l'égalité est trivial. On peut donc supposer que $\langle u, v \rangle \neq 0$ ou $\langle u, w \rangle \neq 0$.

Si (v, w) est lié, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{*2}$, tel que $\alpha v + \beta w = 0$, donc on a $\alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle = 0$, avec $\langle u, v \rangle \neq 0$ ou $\langle u, w \rangle \neq 0$, donc on en déduit que $\langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w = 0$, donc dans ce cas l'égalité est aussi trivial. On peut donc supposer que (v, w) est libre.

Si (v, w) est libre, on pose

$$e_1 = \frac{v}{a}, \quad e_2 = \frac{w - \langle w, e_1 \rangle e_1}{b} \quad \text{et} \quad e_3 = \frac{v \wedge w}{ab}$$

où $a = \|v\|$ et $b = \|w - \langle w, e_1 \rangle e_1\|$, alors (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale et on a $u = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \langle u, e_2 \rangle e_2 + \langle u, e_3 \rangle e_3$. Donc on a $u \wedge (v \wedge w) = ab(u \wedge e_3) = -ab \langle u, e_1 \rangle e_2 + ab \langle u, e_2 \rangle e_1$, donc en remplaçant e_1 et e_2 par leurs valeurs on aura

$$\begin{aligned} u \wedge (v \wedge w) &= \\ &= -\langle u, v \rangle \left(w - \frac{\langle v, w \rangle}{a^2} v \right) + \left(\langle u, w \rangle - \frac{\langle v, w \rangle \langle u, v \rangle}{a^2} \right) v \\ &= \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w \end{aligned}$$

2. On a $\det(u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u) = \langle u \wedge v, (v \wedge w) \wedge (w \wedge u) \rangle$ et d'après la question précédente, on a

$$(v \wedge w) \wedge (w \wedge u) = \langle u, v \wedge w \rangle w = \det(u, v, w) w$$

Donc on aura

$$\begin{aligned} \det(u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u) &= \det(u, v, w) \langle u \wedge v, w \rangle \\ &= \det(u, v, w)^2 \end{aligned}$$

3. D'après la formule du double produit vectoriel, on a

$$\begin{aligned}(u \wedge v) \wedge w &= -\langle v, w \rangle u + \langle u, w \rangle v \\ u \wedge (v \wedge w) &= \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w\end{aligned}$$

Donc $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$, si et seulement si, on a

$$\langle v, w \rangle u - \langle u, v \rangle w = 0$$

Donc si $v \notin \{v, w\}^\perp$, alors (v, w) est lié. Réciproquement, si $v \notin \{v, w\}^\perp$ ou (v, w) est lié, alors il est facile de vérifier l'égalité.

4. En appliquant la formule du double produit vectoriel, on a

$$\begin{cases} u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w \\ w \wedge (u \wedge v) = \langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v \\ v \wedge (w \wedge u) = \langle u, v \rangle w - \langle v, w \rangle u \end{cases}$$

Donc on voit que $u \wedge (v \wedge w) + w \wedge (u \wedge v) + v \wedge (w \wedge u) = 0$.

Exercice 167

a) On a

$$\begin{aligned}\langle a \wedge b, c \wedge d \rangle &= \det(a, b, c \wedge d) \\ &= \langle a, b \wedge (c \wedge d) \rangle \\ &= \langle a, \langle b, d \rangle c - \langle b, c \rangle d \rangle \\ &= \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle\end{aligned}$$

b) D'après la formule du double produit vectoriel, on a

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) &= \langle a \wedge b, d \rangle c - \langle a \wedge b, c \rangle d \\ &= \det(a, b, d)c - \det(a, b, c)d\end{aligned}$$

Exercice 168

1. Pour $(x, y) \in E \times E$, il est clair que $f(x, y) = f(y, x)$ et $f(x, x) = \|x\|^2$.

2. D'après l'égalité du parallélogramme, on a

$$\begin{aligned}\|x_1 + x_2 + 2y\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 &= 2\|x_1 + y\|^2 + 2\|x_2 + y\|^2 \\ \|x_1 + x_2 - 2y\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 &= 2\|x_1 - y\|^2 + 2\|x_2 - y\|^2\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\|x_1 + x_2 + 2y\|^2 &= 2\|x_1 + x_2 + y\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x_1 + x_2\|^2 \\ \|x_1 + x_2 - 2y\|^2 &= 2\|x_1 + x_2 - y\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x_1 + x_2\|^2\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
 & 2\|x_1 + x_2 + y\|^2 = \\
 & 2\|x_1 + y\|^2 + 2\|x_2 + y\|^2 + \|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\|^2 - 2\|y\|^2 \\
 & 2\|x_1 + x_2 - y\|^2 = \\
 & 2\|x_1 - y\|^2 + 2\|x_2 - y\|^2 + \|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\|^2 - 2\|y\|^2
 \end{aligned}$$

Il en résulte donc que

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4}(\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2) = \\
 & \frac{1}{4}(\|x_1 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2) + \frac{1}{4}(\|x_2 + y\|^2 - \|x_2 - y\|^2)
 \end{aligned}$$

Donc d'après la définition de f , on a $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$.

3. a) En appliquant la question précédente, il est facile de vérifier par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(nx, y) = nf(x, y)$.
 Pour $n \in \mathbb{Z}$, avec $n < 0$, on a $f(nx, y) = f(-n(-x), y) = -nf(-x, y)$
 puis comme $f(-x, y) = -f(x, y)$, alors $f(nx, y) = nf(x, y)$.

- b) Pour $q \in \mathbb{N}^*$, on a $f(x, y) = f\left(\frac{x}{q}, y\right) = qf\left(\frac{1}{q}x, y\right)$, donc on a
 $f\left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{1}{q}f(x, y)$.

Pour $r \in \mathbb{Q}$, avec $r = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f(rx, y) = f\left(\frac{p}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}f(x, y) = rf(x, y)$$

- c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors il existe une suite $(r_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$. tel que
 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha$, donc pour $(x, y) \in E \times E$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n x + y) = \alpha x + y$
 et $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n x - y) = \alpha x - y$, donc d'après la continuité de la norme,
 on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|r_n x + y\|^2 - \|r_n x - y\|^2) = \|\alpha x + y\|^2 - \|\alpha x - y\|^2$$

Or, d'après la question précédente, on a

$$\|r_n x + y\|^2 - \|r_n x - y\|^2 = r_n (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Donc en passant à la limite, on déduit que

$$\|\alpha x + y\|^2 - \|\alpha x - y\|^2 = \alpha (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Ce qui prouve que $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$.

4. D'après ce qui précède, on voit facilement que est bilinéaire symétrique et définie positive et pour $x \in E$, on a $f(x, x) = \|x\|^2$. On conclue donc que la norme de E provient d'un produit scalaire.

CHAPITRE 9

ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIENS

9.1 Endomorphisme adjoint

Proposition 9.1.1

Soit E un espace euclidien. Alors pour tout endomorphisme u de E , il existe un unique endomorphisme v de E , tel que

$$\boxed{\forall x \in E, \forall y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle}$$

Dans ce cas, v s'appelle l'adjoint de u et se note u^* .

Fixons $y \in E$ et considérons l'application $\varphi_y : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \varphi_y(x) = \langle u(x), y \rangle$$

Alors φ_y est une forme linéaire, donc il existe un unique $z_y \in E$, tel que

$$\forall x \in E, \varphi_y(x) = \langle x, z_y \rangle$$

Considérons l'application $v : E \longrightarrow E$ définie pour $y \in E$, par $v(y) = z_y$. Alors v est linéaire, en effet, soient $y_1 \in E$, $y_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad & \langle x, v(\lambda y_1 + y_2) \rangle = \langle u(x), \lambda v_1 + v_2 \rangle \\ & = \lambda \langle u(x), y_1 \rangle + \langle u(x), y_2 \rangle \\ & = \lambda \langle x, v(y_1) \rangle + \langle x, v(y_2) \rangle \\ & = \langle x, \lambda v(y_1) + v(y_2) \rangle \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in E$, $\langle x, v(\lambda y_1 + y_2) - \lambda v(y_1) - v(y_2) \rangle = 0$, par suite

$$v(\lambda y_1 + y_2) - \lambda v(y_1) - v(y_2) = 0$$

Donc v est linéaire.

Soit w un autre endomorphisme de E , tel que

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, w(y) \rangle$$

Alors pour tout $x, y \in E$, on a $\langle x, v(y) \rangle = \langle x, w(y) \rangle$, donc on en déduit que pour tout $y \in E$, on a $w(y) = v(y)$.

Proposition 9.1.2

Soit E un espace euclidien. Alors on a

- i) $\forall u \in L(E), \quad u^{**} = u.$
- ii) $\forall u \in L(E), \forall v \in L(E), \quad (u + v)^* = u^* + v^*.$
- iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in L(E), \quad (\lambda u)^* = \lambda u^*.$
- iv) $\forall u \in L(E), \forall v \in L(E), \quad (v \circ u)^* = u^* \circ v^*.$
- v) Si β est une **base orthonormale** de E et si $A = \text{Mat}(u, \beta)$, alors on a $\text{Mat}(u^*, \beta) = {}^t A.$

Démonstration. i) Soit $w = u^{**} = (u^*)^*$, alors w est l'unique endomorphisme de E vérifiant

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle u^*(x), y \rangle = \langle x, w(y) \rangle$$

Or, par définition de l'adjoint, on a

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

Donc $u^{**} = u.$

ii) Pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle (u + v)^*(x), y \rangle &= \langle x, (u + v)(y) \rangle = \langle x, u(y) \rangle + \langle x, v(y) \rangle \\ &= \langle u^*(x), y \rangle + \langle v^*(x), y \rangle = \langle (u^* + v^*)(x), y \rangle \end{aligned}$$

Donc $(u + v)^* = u^* + v^*$.

iii) Se démontre de la même manière que ii).

iv) Pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle (v \circ u)^*(x), y \rangle &= \langle x, (v \circ u)(y) \rangle = \langle x, v(u(y)) \rangle \\ &= \langle v^*(x), u(y) \rangle = \langle u^*(v^*(x)), y \rangle \\ &= \langle (u^* \circ v^*)(x), y \rangle \end{aligned}$$

Donc $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.

v) Soient $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , A la matrice de u et B la matrice de u^* par rapport à β , alors on sait que pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, on a

$$b_{ij} = \langle u^*(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, u(e_i) \rangle = \langle u(e_i), e_j \rangle = a_{ji}$$

Donc $B = {}^tA$. □

Proposition 9.1.3

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E , alors

- i) $\ker(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$.
- ii) $\text{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp$.
- iii) Si F est un sous-espace stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^* .

Démonstration. i) Soit $y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} y \in \ker(u^*) &\iff u^*(y) = 0 \\ &\iff \forall x \in E, \langle u^*(y), x \rangle = 0 \\ &\iff \forall x \in E, \langle y, u(x) \rangle = 0 \\ &\iff y \in \text{Im}(u)^\perp \end{aligned}$$

Donc $\ker(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$.

ii) D'après i), on a

$$\ker(u) = \ker(u^{**}) = \operatorname{Im}(u^*)^\perp$$

Donc, on aura

$$\ker(u)^\perp = \operatorname{Im}(u^*)^{\perp\perp} = \operatorname{Im}(u^*)$$

iii) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Vérifions que $F^\perp$ est stable par u^* , pour cela soit $y \in F^\perp$ et soit $x \in F$, alors on a

$$\langle u^*(y), x \rangle = \langle y, u(x) \rangle = 0 \quad (\text{car } u(x) \in F \text{ et } y \in F^\perp)$$

Donc $F^\perp$ est stable par u^* . □

9.2 Projection orthogonale

9.2.1 Projection suivant une direction

Définition 9.2.1

Soient E un K -espace vectoriel quelconque, F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F dans E . On appelle projection sur F parallèlement à G , l'application p définie par :

$$\begin{aligned} p : E = F \oplus G &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto p(x) = x_1 \end{aligned}$$

Remarque 102

Si p est la projection sur F parallèlement à G , alors on a

- i) $p^2 = p$, c'est à dire p est un projecteur de E .
- ii) $\operatorname{Im}(p) = \{x \in E : p(x) = x\} = F$;
- iii) $\ker(p) = G$.

Proposition 9.2.1

Soient E un K -espace vectoriel et u un projecteur de E , alors on a

- i) $\forall x \in E, \quad u(x) - x \in \ker(u)$.
- ii) $\operatorname{Im}(u) = \{x \in E : u(x) = x\}$.
- iii) $E = \operatorname{Im}(u) \oplus \ker(u)$.
- iv) u est la projection sur $\operatorname{Im}(u)$ parallèlement à $\ker(u)$.

Démonstration. Voir théorème 2.3.1

□

9.2.2 Définition et propriétés d'une projection orthogonale

Rappelons que si E est un espace euclidien, alors pour tout sous-espace vectoriel F , on a $E = F \oplus F^\perp$. Dans ce cas, $F^\perp$ s'appelle le supplémentaire orthogonal de F .

Définition 9.2.2

Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E . On appelle projection orthogonale sur F , qu'on note p_F , la projection sur F parallèlement à $F^\perp$:

$$\begin{aligned} p_F : E = F \oplus F^\perp &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto p_F(x) = x_1 \end{aligned}$$

Remarque 103

1. Pour tout sous-espace vectoriel de E , on a $p_{F^\perp} = Id_E - p_F$.
2. Soient $x \in E$ et $y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} y = p_F(x) &\iff \begin{cases} y \in F \\ \text{et} \\ x - y \in F^\perp \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y \in F \\ \text{et} \\ \forall z \in F, \langle x - y, z \rangle = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3. Soient E un espace euclidien et u un projecteur de E , alors on sait que u est la projection sur $\text{Im}(u)$ parallèlement à $\ker(u)$, donc

$$(u \text{ est une projection orthogonale}) \iff \ker(u) = \text{Im}(u)^\perp$$

Proposition 9.2.2

Soient E un espace euclidien et u un projecteur de E , alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) u est une projection orthogonale.
- ii) $u^* = u$.
- iii) $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$.

Démonstration. i) $\implies$ ii) Supposons que u est une projection orthogonale et montrons que $u^* = u$.

Puisque u est une projection orthogonale, alors $\ker(u) = \text{Im}(u)^\perp$, donc

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle u(x), y - u(y) \rangle = 0$$

Soient $x \in E$ et $y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} \langle u(x), y \rangle &= \langle u(x), (y - u(y)) + u(y) \rangle \\ &= \langle u(x), y - u(y) \rangle + \langle u(x), u(y) \rangle \\ &= \langle u(x), u(y) \rangle \quad (\text{car } \langle u(x), y - u(y) \rangle = 0) \\ &= \langle (u(x) - x) + x, u(y) \rangle \\ &= \langle u(x) - x, u(y) \rangle + \langle x, u(y) \rangle \\ &= \langle x, u(y) \rangle \quad (\text{car } \langle u(x) - x, u(y) \rangle = 0) \end{aligned}$$

Donc pour tout $x, y \in E$, on a $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$, par suite, d'après l'unicité de l'adjoint on a $u^* = u$.

ii) $\implies$ iii) Supposons que $u^* = u$ et soit $x \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \langle u(x), u(x) \rangle \\ &= \langle u^*(u(x)), x \rangle = \langle u^2(x), x \rangle \quad (\text{car } u^* = u) \\ &= \langle u(x), x \rangle \quad (\text{car } u^2 = u) \\ &\leq \|u(x)\| \|x\| \quad (\text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz}) \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in E$, on a $\|u(x)\| \leq \|x\|$.

iii) $\implies$ i) Supposons que pour tout $x \in E$, on a $\|u(x)\| \leq \|x\|$ et montrons que u est une projection orthogonale. Pour cela, il suffit de montrer que $\ker(u)^\perp = \text{Im}(u)$. Soit $y \in \ker(u)^\perp$, pour montrer que $y \in \text{Im}(u)$, il suffit d'établir que $u(y) = y$.

$$\begin{aligned} \|u(y) - y\|^2 &= \|u(y)\|^2 - 2 \langle u(y), y \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|u(y)\|^2 - 2 \langle (u(y) - y) + y, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|u(y)\|^2 - 2 \langle u(y) - y, y \rangle - \|y\|^2 \end{aligned}$$

Comme $y \in \ker(u)^\perp$ et $u(y) - y \in \ker(u)$, alors on a $\langle u(y) - y, y \rangle = 0$, donc on a $\|u(y) - y\|^2 = \|u(y)\|^2 - \|y\|^2$.

Or, par hypothèse, on a $\|u(y)\| \leq \|y\|$, donc on aura $\|u(y) - y\|^2 \leq 0$, par suite, on a $\|u(y) - y\| = 0$ et ainsi on a $u(y) = y$. On vient donc d'établir que $\ker(u)^\perp \subseteq \text{Im}(u)$. On a

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\ker(u)) + \dim(\ker(u)^\perp) = \dim(E)$$

Donc $\dim(\ker(u)^\perp) = \dim(\text{Im}(u))$, par conséquent, $\ker(u)^\perp = \text{Im}(u)$.

□

Proposition 9.2.3

Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ une base orthonormale de F , alors

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, v_i \rangle v_i$$

Démonstration. On sait que pour tout $x \in E$, on a $p_F(x) \in F$. Puisque $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une base orthonormale de F , alors on a

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle p_F(x), v_i \rangle v_i$$

On sait aussi que $\ker(p_F) = F^\perp$ et $\text{Im}(p_F) = F$, donc pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F$, on a $\langle x - p_F(x), y \rangle = 0$, car $x - p_F(x) \in \ker(p_F)$.

Ainsi, pour tout $x \in E$ et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, on a

$$\langle x, v_i \rangle = \langle (x - p_F(x)) + p_F(x), v_i \rangle = \langle p_F(x), v_i \rangle$$

D'où le résultat. □

Corollaire 9.2.1

Soit E un espace euclidien.

- i) Si F est une droite vectorielle de E , avec $F = \text{Vect}(x_0)$ et $x_0 \neq 0$, alors on a

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0$$

- ii) Si H est un hyperplan de E et x_0 un vecteur non nul orthogonal à H , alors on a

$$\forall x \in E, \quad p_H(x) = x - \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0$$

Démonstration. i) On a $F = \text{Vect}(x_0)$, donc $v = \frac{x_0}{\|x_0\|}$ est une base orthogonale de F , donc d'après la proposition précédente, on a

$$\forall x \in E, p_F(x) = \langle x, v \rangle v = \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0$$

ii) H est un hyperplan de E et x_0 un vecteur non nul orthogonal à H , alors on a, donc $E = H \oplus \text{Vect}(x_0)$, par suite, on a $p_H = Id_E - p_F$. Donc d'après i), on a

$$\forall x \in E, p_H(x) = x - \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0$$

Exemples

1. $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Trouver la matrice, par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, de la projection orthogonale sur la droite vectoriel $F = \text{Vect}(e_1 - e_3)$.

Posons $x_0 = e_1 - e_3$, alors $\|x_0\| = \sqrt{2}$, donc on aura

$$\begin{cases} p_F(e_1) = \frac{\langle e_1, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0 = \frac{1}{2} x_0 = \frac{1}{2} (e_1 - e_3) \\ p_F(e_2) = \frac{\langle e_2, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0 = 0 \\ p_F(e_3) = \frac{\langle e_3, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0 = -\frac{1}{2} x_0 = -\frac{1}{2} (e_1 - e_3) \end{cases}$$

par suite, on a

$$\text{Mat}(p_F, (e_1, e_2, e_3)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $\mathbb{R}^4$ est muni de son produit scalaire usuel. Trouver la matrice, par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$, de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + t = 0\}$$

On remarque que F est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et $x_0 = e_1 + e_2 + e_4$ est un vecteur orthogonal à F , avec $\|x_0\| = \sqrt{3}$, donc on aura

$$\forall x \in \mathbb{R}^4, p_F(x) = x - \frac{\langle x, x_0 \rangle}{3} x_0$$

Donc on aura

$$\begin{cases} p_F(e_1) = e_1 - \frac{\langle e_1, x_0 \rangle}{3} x_0 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 - e_4) \\ p_F(e_2) = e_2 - \frac{\langle e_2, x_0 \rangle}{3} x_0 = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 - e_4) \\ p_F(e_3) = e_3 - \frac{\langle e_3, x_0 \rangle}{3} x_0 = e_3 \\ p_F(e_4) = e_4 - \frac{\langle e_4, x_0 \rangle}{3} x_0 = \frac{1}{3}(-e_1 - e_2 + 2e_4) \end{cases}$$

par suite, on a

$$\text{Mat}(p_F, (e_1, e_2, e_3, e_4)) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. $\mathbb{R}^4$ est muni de son produit scalaire usuel. Trouver la matrice, par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^3$, de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F défini par

$$F = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_1 + e_4)$$

Dans ce cas, pour déterminer l'expression de p_F , on doit chercher une base orthonormale de F . En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on obtient une base orthonormale (v_1, v_2) définie par

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - e_2 + 2e_4)$$

Donc, d'après la proposition précédente, on a

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2$$

Donc, en particulier, on a

$$\begin{aligned} p_F(e_1) &= \langle e_1, v_1 \rangle v_1 + \langle e_1, v_2 \rangle v_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) + \frac{1}{6}(e_1 - e_2 + 2e_4) \\ &= \frac{1}{6}(7e_1 + 2e_2 + 2e_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_F(e_2) &= \langle e_2, v_1 \rangle v_1 + \langle e_2, v_2 \rangle v_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) - \frac{1}{6}(e_1 - e_2 + 2e_4) \\ &= \frac{1}{6}(7e_1 + 7e_2 - 2e_4) \end{aligned}$$

$$p_F(e_3) = \langle e_3, v_1 \rangle v_1 + \langle e_3, v_2 \rangle v_2 = 0$$

$$p_F(e_4) = \langle e_4, v_1 \rangle v_1 + \langle e_4, v_2 \rangle v_2 = \frac{1}{6}(2e_1 - 2e_2 + 4e_4)$$

par suite, on a

$$\text{Mat}(p_F, (e_1, e_2, e_3, e_4)) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

9.2.3 Distance d'un point à un sous-espace vectoriel

Définition 9.2.3

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, $x \in E$ et A une partie non vide de E . On définit la distance de x à A , qu'on note $d(x, A)$, par

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

Rappelons qu'un espace euclidien E est un espace normé et que la norme est définie à l'aide le produit scalaire par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Théorème 9.2.1

Soient E un espace euclidien et F un sous-espace de E , alors

$$\boxed{\forall x \in E, \quad d(x, F) = \|x - p_F(x)\|}$$

Démonstration. Soit $x \in E$, alors pour tout $y \in F$, on a

$$x - y = x - p_F(x) + p_F(x) - y \quad \text{avec} \quad x - p_F(x) \in F^\perp \quad \text{et} \quad p_F(x) - y \in F$$

Donc pour tout $y \in F$, on a

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$$

Ainsi, on aura

$$\inf_{y \in F} \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$$

Or, on sait que $p_F(x) \in F$, donc $\|x - p_F(x)\| \geq \inf_{y \in F} \|x - y\|$, par suite, on a

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|$$

Exemples (d'application)

Caculons

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$$

On considère $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2 , muni du produit scalaire défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \forall Q \in \mathbb{R}_2[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : \deg(P) \leq 1\}$, alors $\dim(F) = 2$, donc F est un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $P = X^2$, alors on a

$$d(P, F)^2 = \inf_{Q \in F} \|P - Q\|^2 = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$$

car tout $Q \in F$ s'écrit sous la forme $aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On en déduit donc que

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \|P - p_F(P)\|^2$$

Cherchons $F^\perp$. Soit $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ un élément de $\mathbb{R}_2[X]$, alors on a

$$Q \in F^\perp \iff \langle Q, 1 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle Q, X \rangle = 0 \quad (\text{car } F = \text{Vect}(1, X))$$

$$\iff \int_0^1 Q(t)dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 tQ(t)dt = 0$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \gamma = 0 \\ \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{2}\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\iff \alpha = 6\gamma \quad \text{et} \quad \beta = -6\gamma$$

Donc $Q = 6X^2 - 6X + 1$ est un vecteur orthogonal à F , où F est un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$, donc

$$p_F(P) = P - \frac{\langle P, Q \rangle}{\|Q\|^2} Q$$

Avec

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 t^2(6t^2 - 6t + 1)dt = \frac{1}{30} \quad \text{et} \quad \|Q\|^2 = \int_0^1 (6t^2 - 6t + 1)^2 dt = \frac{1}{5}$$

Donc $p_F(P) = X - \frac{1}{6}$, par suite, on a

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \|P - p_F(P)\|^2 = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2 dt = \frac{1}{180}$$

9.3 Symétrie orthogonale

9.3.1 Symétrie suivant une direction

Définition 9.3.1

Soient E un K -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F dans E . On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G , l'application s définie par :

$$\begin{aligned} s : E = F \oplus G &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto s(x) = x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Remarque 104

Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G , alors on vérifie facilement que

- i) s est un endomorphisme de E et $s^2 = Id_E$;
- ii) $F = \ker(s - Id_E)$ et $G = \ker(s + Id_E)$;
- iii) $s = 2p - Id_E$ où p est la projection sur F parallèlement à G .

Rappelons qu'un endomorphisme u de E vérifiant $u^2 = Id_E$ s'appelle une symétrie de E .

Proposition 9.3.1

Soient E un K -espace vectoriel de E et u une symétrie de E , alors on a

- i) $E = \ker(u - Id_E) \oplus \ker(u + Id_E)$;
- ii) u est la symétrie par rapport à $F = \ker(u - Id_E)$ parallèlement à $G = \ker(u + Id_E)$.

Démonstration. i) On a $(u - Id_E)(u + Id_E) = 0$, donc d'après le théorème de décomposition des noyaux, on aura

$$E = \ker(u - Id_E) \oplus \ker(u + Id_E)$$

- ii) Pour $x \in E$, $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \ker(u - Id_E)$ et $x_2 \in \ker(u + Id_E)$, on a $u(x) = u(x_1) + u(x_2) = x_1 - x_2$. Donc u est la symétrie par rapport à $F = \ker(u - Id_E)$ parallèlement à $G = \ker(u + Id_E)$. $\square$

9.3.2 Propriétés des symétries orthogonales

Définition 9.3.2

Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E .

On appelle *symétrie orthogonale par rapport à F* , qu'on note s_F , la *symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$* :

$$\begin{aligned} s_F : E = F \oplus F^\perp &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto s_F(x) = x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Remarque 105

Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E , alors on a

1. $s_F^2 = Id_E$;
2. $\ker(s_F - Id_E)^\perp = \ker(s_F + Id_E)$;
3. Si p_F est la projection orthogonale sur F , alors on a $s_F = 2p_F - Id_E$;
4. $\forall x \in E, \|s_F(x)\| = \|x\|$.

Proposition 9.3.2

Soient E un espace euclidien et u une symétrie de E , c'est à dire $u^2 = Id_E$.

Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) u est une symétrie orthogonale.
- ii) $u^* = u$.
- iii) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

Démonstration. i) $\implies$ ii) Supposons que u est une symétrie orthogonale.

Soit p la projection orthogonale sur F , alors on sait que $u = 2p - Id_E$, donc $u^* = (2p - Id_E)^* = 2p^* - Id_E = 2p - Id_E = u$.

ii) $\implies$ iii) Supposons que $u^* = u$, alors pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, u^*(u(x)) \rangle > \\ &= \langle x, u^2(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \end{aligned}$$

iii) $\implies$ i) Supposons que pour tout $x \in E$, on a $\|u(x)\| = \|x\|$ et montrons que $\ker(u - Id_E)^\perp = \ker(u + Id_E)$. Soit p la projection sur $\ker(u - Id_E)$

parallèlement à $\ker(u + Id_E)$, alors pour tout $x \in E$, on a

$$p(x) = \frac{u(x) + x}{2}, \text{ par suite, on a}$$

$$\|p(x)\| = \frac{1}{2}\|u(x) + x\| \leq \frac{1}{2}(\|u(x)\| + \|x\|) = \|x\| \quad (\text{car } \|u(x)\| = \|x\|)$$

Donc pour tout $x \in E$, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$. Donc d'après la proposition 9.2.2, p est une projection orthogonale, par suite u est une symétrie orthogonale. $\square$

Corollaire 9.3.1

Soit E un espace euclidien.

- i) *F est une droite vectoriel avec $F = \text{Vect}(x_0)$ et $x_0 \neq 0$, alors pour tout $x \in E$, on a*

$$s_F(x) = 2 \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0 - x$$

- ii) *Si F est un hyperplan de E et si x_0 un vecteur non nul orthogonal à F , alors pour tout $x \in E$, on a*

$$s_F(x) = x - 2 \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $s_F = 2p_F - Id_E$ et appliquer le corollaire 9.2.1. $\square$

9.4 Endomorphismes symétriques

9.4.1 Définition et propriétés des endomorphismes symétriques

Définition 9.4.1

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E .

- i) *On dit que u est symétrique, si $u^* = u$.*
 ii) *On dit que u est antisymétrique, si $u^* = -u$.*

Remarque 106

1. Soient β une base orthonormale de E , u un endomorphisme de E et $A = \text{Mat}(u, \beta)$, alors on a

$$u \text{ est symétrique} \iff {}^tA = A$$

$$u \text{ est antisymétrique} \iff {}^tA = -A$$

2. Si u est symétrique, alors on a $\ker(u) = \ker(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$.

Exemples

1. Toute projection orthogonale est un endomorphisme symétrique.
2. Toute symétrie orthogonale est un endomorphisme symétrique.
3. Soit $a \in E$ un espace euclidien orienté de dimension 3 et soit u l'endomorphisme de E défini pour tout $x \in E$, par $u(x) = a \wedge x$. Alors u est un endomorphisme antisymétrique
En effet, soient $x \in E$ et $y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} \langle u(x), y \rangle &= \langle a \wedge x, y \rangle = \det(a, x, y) = -\det(a, y, x) \\ &= -\langle x, a \wedge y \rangle = \langle x, (-u)(y) \rangle \end{aligned}$$

Donc, d'après l'unicité de l'adjoint, on a $u^* = -u$.

Lemme 9.4.1

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, alors toutes les valeurs propres de A sont réelles.

Démonstration. Rappelons d'abord que si $M \in M_n(\mathbb{C})$, avec $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors la matrice $\overline{M}$ est définie par $\overline{M} = (\overline{m}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. On voit facilement que

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \forall N \in M_n(\mathbb{C}), \quad \overline{MN} = \overline{M} \overline{N}$$

Soit maintenant $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A . Alors il existe $X \in \mathbb{C}^n$, avec $X \neq 0$, tel que $AX = \lambda X$, donc on

aura

$$\begin{aligned}
AX = \lambda X &\implies \overline{AX} = \overline{\lambda X} \\
&\implies A\overline{X} = \overline{\lambda} \overline{X} \quad (\text{car } \overline{A} = A) \\
&\implies {}^tX(A\overline{X}) = {}^tX(\overline{\lambda} \overline{X}) \\
&\implies ({}^tX {}^tA)\overline{X} = \overline{\lambda} ({}^tX \overline{X}) \quad (\text{car } {}^tA = A) \\
&\implies {}^t(AX)\overline{X} = \overline{\lambda} ({}^tX \overline{X}) \\
&\implies \lambda ({}^tX \overline{X}) = \overline{\lambda} ({}^tX \overline{X}) \\
&\implies (\lambda - \overline{\lambda}) {}^tX \overline{X} = 0 \\
&\implies \lambda - \overline{\lambda} = 0 \quad (\text{car } X \neq 0, \text{ donc } {}^tX \overline{X} \neq 0) \\
&\implies \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Remarque 107

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E , alors d'après le lemme précédent, le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{R}$.

Lemme 9.4.2

Soient E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E et F un sous-espace vectoriel stable par u . Alors $F^\perp$ est stable par u .

Démonstration. Soit F un sous-espace stable par u , alors d'après la proposition 9.1.3, $y \in F^\perp$ est stable par u^* , donc $y \in F^\perp$ est stable par u , car $u^* = u$. $\square$

Théorème 9.4.1

Soit E un espace euclidien. Alors tout endomorphisme symétrique de E , possède au moins une base orthonormale formée de vecteurs propres.

Démonstration. On procède par récurrence sur n , avec $n = \dim(E)$ et $n \geq 2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u , donc il existe $x \in E$, avec $x \neq 0$, tel que $u(x) = \lambda x$. Posons $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$, alors $\|e_1\| = 1$ et $u(e_1) = \lambda e_1$. Soit $F = \text{Vect}(e_1)$, alors F est stable par u . Puisque u est symétrique, alors $F^\perp$ est aussi stable

par u . Déclenchons maintenant la récurrence :

Pour $n = 2$, on a $\dim(F) = 1$, donc $\dim(F^\perp) = 1$. Soit $e_2 \in F^\perp$, avec $\|e_2\| = 1$, alors e_2 est un vecteur propre de u , car $F = \text{Vect}(e_2)$ et $u(e_2) \in F$.

Donc (e_1, e_2) est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres.

H.R « Supposons que $n > 2$ et que tout endomorphisme symétrique sur un espace euclidien de dimension $< n$, possède au moins une base orthonormale formée de vecteurs propres ». Soient u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension n , $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u et $e_1 \in E$, avec $\|e_1\| = 1$ un vecteur propre associé à λ .

Soit $F = \text{Vect}(e_1)$, donc, d'après ce qui précède, $F^\perp$ est stable par u .

Soit v l'endomorphisme induit par u sur $F^\perp$, alors v est un endomorphisme symétrique de $F^\perp$, avec $\dim(F^\perp) = n - \dim(F) = n - 1$. Donc d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(e_2, e_3, \dots, e_n)$ de $F^\perp$ formée de vecteurs propres de v .

Puisque v est l'endomorphisme induit par u sur $F^\perp$, alors $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u . $\square$

Corollaire 9.4.1

Pour toute matrice symétrique A de $M_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice diagonale D dans $M_n(\mathbb{R})$ et il existe une matrice orthogonale P , telles que $A = PDP^{-1}$.

Démonstration. Conséquence du théorème précédent. $\square$

9.4.2 Formes bilinéaires symétriques d'un espace euclidien

Proposition 9.4.1

Soient E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E et $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Alors l'application $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad f(x, y) = \langle u(x), y \rangle$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E et on a $\text{Mat}(f, \beta) = \text{Mat}(u, \beta)$.

Démonstration. i) Puisque u est linéaire, alors f est bilinéaire et puisque u est symétrique, alors f est symétrique.

- ii) Soient $M = \text{Mat}(f, \beta) = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $A = \text{Mat}(u, \beta) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Puisque β est une base orthonormale, alors pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on a $a_{ij} = \langle u(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, u(e_i) \rangle = f(e_i, e_j) = m_{ij}$. $\square$

Définition 9.4.2

Soient E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E et $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad f(x, y) = \langle u(x), y \rangle$$

- i) On dit que u est positif, si f est positive.
 ii) On dit que u est défini positif, si f est définie positive.

Remarque 108

Soit u un endomorphisme symétrique de E , alors d'après la définition précédente, on a

$$u \text{ positif} \iff \forall x \in E, \quad \langle u(x), x \rangle \geq 0$$

$$u \text{ défini positif} \iff (\forall x \in E, \quad x \neq 0 \implies \langle u(x), x \rangle > 0)$$

Théorème 9.4.2

Soit E un espace euclidien. Alors pour toute forme bilinéaire symétrique f sur E , il existe un unique endomorphisme symétrique u , tel que

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad f(x, y) = \langle u(x), y \rangle$$

Démonstration. Soient f une forme bilinéaire symétrique sur E , A la matrice de f par rapport à une base orthonormale $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E et u l'endomorphisme de E de matrice A par rapport à β .

Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors d'après l'écriture matricielle,

on pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a

$$\langle x, y \rangle = {}^t X Y = {}^t Y X \quad \text{et} \quad f(x, y) = {}^t X A Y = {}^t Y A X$$

Donc pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a

$$f(x, y) = {}^tYAX = {}^tY(AX) = \langle u(x), y \rangle$$

Remarque 109

1. Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormale β . Soient f une forme bilinéaire symétrique sur E , $A = \text{Mat}(f, \beta)$ et u l'endomorphisme de E de matrice A par rapport à la base β . Alors u est l'unique endomorphisme de E vérifiant

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad f(x, y) = \langle u(x), y \rangle$$

2. Si q est une forme quadratique sur un espace euclidien E , alors il existe un unique endomorphisme symétrique u de E , tel que pour tout $x \in E$, on a $q(x) = \langle u(x), x \rangle$.

Théorème 9.4.3

Soient E un espace euclidien et f une forme bilinéaire symétrique sur E . Alors il existe une base orthonormale de E qui est orthogonale pour f .

Démonstration. D'après la proposition précédente, il existe un unique endomorphisme symétrique u de E , tel que

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad f(x, y) = \langle u(x), y \rangle$$

Puisque u est symétrique, alors on sait qu'il existe une base orthonormale $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u . Donc pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, on a

$$f(e_i, e_j) = \langle u(e_i), e_j \rangle = \langle \lambda_i e_i, e_j \rangle = \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle$$

Donc, pour $i \neq j$, on a $f(e_i, e_j) = 0$, car $\langle e_i, e_j \rangle = 0$. □

Corollaire 9.4.2

Soient A et B deux matrices réelles symétriques d'ordre n , avec A définie positive. Alors il existe une matrice diagonale D et il existe une matrice inversible P , telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$.

Démonstration. On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. Comme A est définie positive, alors l'application $\varphi_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, par $\varphi_A(x, y) = \langle Ax, y \rangle$, définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On note E l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire défini par φ_A . Puisque B est symétrique, alors l'application $\varphi_B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in E \times E$, par $\varphi_B(x, y) = \langle Bx, y \rangle$, est une forme bilinéaire symétrique sur E , donc d'après le théorème précédent, il existe une base φ_A -orthonormale β de E qui est φ_B -orthogonale. Soit D la matrice de φ_B par rapport à la base β et soit Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base β , alors on a $B = QD^tQ$ et $A = Q^tQ$, donc pour conclure, il suffit de prendre $P = {}^tQ$. $\square$

Remarque 110

1. Soit q une forme quadratique sur un espace euclidien E et soit A la matrice de q par rapport à une base orthonormale de E . Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres, non nécessairement deux à deux distinctes, de A et soit $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de A . Alors pour tout $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

En effet, d'après la proposition précédente, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base q -orthogonale et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $q(e_i) = \lambda_i$.

2. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n muni de deux formes quadratiques q_1 et q_2 , avec q_1 définie positive et q_2 quelconque. Donc E muni de q_1 est un espace euclidien. Soit A la matrice de q_2 par rapport à une base q_1 -orthonormale et soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres, non nécessairement deux à deux distinctes, de A . Soit $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de A , alors pour tout $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a

$$q_2(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \quad \text{et} \quad q_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

On suppose que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, alors on a

$$\min_{x \neq 0} \frac{q_2(x)}{q_1(x)} = \lambda_1 \quad \text{et} \quad \max_{x \neq 0} \frac{q_2(x)}{q_1(x)} = \lambda_n$$

En effet, il est facile de voir que pour tout $x \in E$, avec $x \neq 0$, on a

$$\lambda_1 \leq \frac{q_2(x)}{q_1(x)} \leq \lambda_n$$

et comme $\frac{q_2(e_1)}{q_1(e_1)} = \lambda_1$ et $\frac{q_2(e_n)}{q_1(e_n)} = \lambda_n$, alors on aura le résultat.

9.5 Endomorphismes orthogonaux

9.5.1 Définition et propriétés de base

Définition 9.5.1

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E . On dit que u est un endomorphisme orthogonal, si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Proposition 9.5.1

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) u est un endomorphisme orthogonal.
- ii) $u^* \circ u = u \circ u^* = Id_E$.
- iii) $\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|$.

Démonstration. i) $\implies$ ii) Supposons que u est orthogonal.

$$\begin{aligned} u \text{ orthogonal} &\implies \forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle \\ &\implies \forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle u^*(u(x)), y \rangle = \langle x, y \rangle \\ &\implies \forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle (u^* \circ u)(x) - x, y \rangle = 0 \\ &\implies \forall x \in E, \quad (u^* \circ u)(x) = x \\ &\implies u^* \circ u = Id_E \end{aligned}$$

ii) $\implies$ iii) Supposons que $u^* \circ u = Id_E$.

$$\begin{aligned} u^* \circ u = Id_E &\implies \forall x \in E, \quad (u^* \circ u)(x) = x \\ &\implies \forall x \in E, \quad \langle (u^* \circ u)(x), x \rangle = \langle x, x \rangle \\ &\implies \forall x \in E, \quad \langle u^*(u(x)), x \rangle = \langle x, x \rangle \\ &\implies \forall x \in E, \quad \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, x \rangle \\ &\implies \forall x \in E, \quad \|u(x)\|^2 = \|x\|^2 \\ &\implies \forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\| \end{aligned}$$

iii) $\implies$ i) Supposons que pour tout $x \in E$, on a $\|u(x)\| = \|x\|$, alors pour $x \in E$ et $y \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle u(x), u(y) \rangle &= \frac{1}{2} (\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Remarque 111

1. Tout endomorphisme orthogonal u est inversible et on a $u^{-1} = u^*$.
2. Soit E un espace euclidien, β une base orthonormale de E , u un endomorphisme de E et $A = \text{Mat}(u, \beta)$. Alors

$$u \text{ est orthogonal} \iff {}^tAA = I$$

Autrement dit, u est orthogonal, si, et seulement si, sa matrice par rapport à une base orthonormale de E est une matrice orthogonale.

3. Si u est un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien orienté, alors on a $\det(u) = \pm 1$.

En effet, on a $u^*u = \text{Id}_E$, donc on a

$$\det(u^*u) = \det(u^*) \det(u) = \det(u)^2 = \det(\text{Id}_E) = 1$$

Notations

- a) On désigne par $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E , alors $(O(E), \circ)$ est un groupe, c'est en fait un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$, appelé groupe orthogonal de E .
- b) On désigne par $SO(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux u , tel que $\det(u) = 1$, $SO(E) = \{u \in O(E) : \det(u) = 1\}$. Alors $(SO(E), \circ)$ est un groupe, c'est un sous-groupe de $(O(E), \circ)$, appelé groupe orthogonal spécial de E .
- c) On désigne aussi par $O_n(\mathbb{R})$, (resp. $SO_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices orthogonales, (resp. orthogonales de déterminant 1) de $M_n(\mathbb{R})$. Alors $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Définition 9.5.2

Un élément de $SO(E)$ s'appelle une rotation de E .

Exemples

1. Id_E et $-Id_E$ sont des endomorphismes orthogonaux de E .
2. Toute symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal de E .
3. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .
Pour chaque $\sigma \in S_n$, on considère l'endomorphisme u_σ défini par :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

Alors pour tout $\sigma \in S_n$, u_σ est un endomorphisme orthogonal.

De plus, on vérifie facilement que $\det(u_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.

Proposition 9.5.2

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E . Alors u est orthogonal, si et seulement si, l'image d'une base orthonormale de E par u est une base orthonormale de E .

Démonstration. $(\implies)$ Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , alors $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ soit une base orthonormale de E , donc pour tout $x \in E$, on a

$$\|u(x)\| = \left\| u \left(\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle u(e_i) \right\|$$

Comme $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormale, alors on a

$$\left\| \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle u(e_i) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\langle x, e_i \rangle)^2} = \|x\|$$

$(\impliedby)$ Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Comme u est orthogonal, alors on a

$$\langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

Donc $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormale de E . $\square$

Proposition 9.5.3

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme orthogonal de E .

- i) Si λ est une valeur propre de u , alors $\lambda \in \{-1, 1\}$.
- ii) Si F est un sous-espace vectoriel stable par u , alors $F^\perp$ est aussi stable par u .

Démonstration. i) On suppose que u possède une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, donc il existe $x \in E$, avec $x \neq 0$, tel que $u(x) = \lambda x$, donc on aura

$$\|x\| = \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$x \neq 0$, donc $\|x\| \neq 0$, par suite, $|\lambda| = 1$, comme $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda = \pm 1$.

ii) Supposons que F est stable par u .

Soit $y \in F^\perp$ et soit $x \in F$, puisque F est stable par u , u bijective et E de dimension finie, alors $u(F) = F$, donc il existe $x' \in F$, tel que $x = u(x')$, donc on a $\langle x, u(y) \rangle = \langle u(x'), u(y) \rangle = \langle x', y \rangle = 0$, par suite, $u(y) \in F^\perp$. $\square$

9.5.2 Cas d'un espace euclidien de dimension 2

Théorème 9.5.1

Soient E un espace euclidien de dimension 2 et u un endomorphisme orthogonal de E .

i) *Si $\det(u) = 1$, alors il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$, tel que la matrice A de u par rapport à n'importe quelle base orthonormale directe de E s'écrit sous la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, u s'appelle la rotation d'angle θ .

ii) *Si $\det(u) = -1$, alors u est une symétrie orthogonale et il existe une base orthonormale de E , dans laquelle la matrice A de u s'écrit sous la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Soit (e_1, e_2) une base orthonormale directe quelconque de E et soit $A = \text{Mat}(u, (e_1, e_2))$, avec $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Puisque u est un endomorphisme orthogonal et (e_1, e_2) une base orthonormale de E , donc $(u(e_1), u(e_2))$ est une base orthonormale de E , donc on aura

$$\begin{cases} \|u(e_1)\|^2 = a^2 + b^2 = 1 \\ \|u(e_2)\|^2 = c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

On a $u(e_2) \in \text{Vect}(u(e_1))^\perp$ avec $\text{Vect}(u(e_1))^\perp = \text{Vect}(-be_1 + ae_2)$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $u(e_2) = ce_1 + de_2 = \alpha(-be_1 + ae_2)$. Donc $c = -\alpha b$ et $d = \alpha a$. Puisque $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, alors $\alpha^2 = 1$, donc $\alpha = \pm 1$.

- i) Si $\det(u) = 1$, alors $ad - bc = 1$, donc $\alpha(a^2 + b^2) = 1$, par suite $\alpha = 1$.
Par conséquent, $c = -b$ et $d = a$. Puisque $a^2 + b^2 = 1$, alors il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$, tel que $a = \cos \theta$ et $b = \sin \theta$.
- ii) Si $\det(u) = -1$, alors $\alpha = -1$, donc A s'écrit sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Donc $A^2 = I$ et ${}^tA = A$, par suite, u est une symétrie orthogonale. Les valeurs propres de u sont 1 et -1 , donc il existe une base orthonormale formée de vecteurs propre de u , car u est symétrique. $\square$

Remarque 112

Si E est un espace euclidien de dimension 2, alors le groupe $(SO(E), \circ)$ est commutatif.

9.5.3 Cas d'un espace euclidien de dimension 3

Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 9.5.1

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u un endomorphisme orthogonal de E . Alors $\det(u)$ est une valeur propre de u .

Démonstration. On sait que $\det(u) = \pm 1$. Donc si $\det(u) = 1$, alors on a

$$\begin{aligned} \det(u - Id_E) &= \det(u - uu^*) = \det(Id_E - u^*) \\ &= (-1)^3 \det(u - Id_E) = -\det(u - Id_E) \end{aligned}$$

Donc, $\det(u - Id_E) = 0$, par suite, 1 est une valeur propre de u .

Si $\det(u) = -1$, on procède de la même manière :

$$\det(u + Id_E) = \det(u + uu^*) = -\det(Id_E + u^*) = -\det(u + Id_E)$$

Donc, $\det(u + Id_E) = 0$, par suite, -1 est une valeur propre de u . $\square$

Théorème 9.5.2

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u un endomorphisme orthogonal de E , avec $u \neq \pm Id_E$.

- i) Si $\det(u) = 1$, alors 1 est une valeur propre de u et si e_1 est un vecteur propre unitaire associé à 1, alors il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$, tel que la matrice A de u par rapport à n'importe quelle base orthonormale (e_1, e_2, e_3) , dont le premier vecteur est égal à e_1 , s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, u s'appelle la rotation d'angle θ et d'axe Δ , avec $\Delta = \ker(u - Id_E)$.

- ii) Si $\det(u) = -1$ et si 1 est une valeur propre de u , alors u est une symétrie orthogonale par rapport à $F = \ker(u - Id_E)$.
- iii) Si $\det(u) = -1$ et 1 n'est pas valeur propre de u , alors -1 est une valeur propre de u . Soit $x_0 \in E$, tel que $u(x_0) = -x_0$ et $\|x_0\| = 1$, alors $u = r \circ s = s \circ r$, où r est la rotation d'axe Δ , avec $\Delta = \text{Vect}(x_0)$ et s la symétrie orthogonale par rapport à $\Delta^\perp$. Dans ce cas, u s'appelle une symétrie-rotation.

Démonstration. i) Si $\det(u) = 1$, alors d'après le lemme précédent, 1 est une valeur propre de u . Soit e_1 un vecteur propre unitaire associé à 1 et soit $F = \{e_1\}^\perp$, puisque $\text{Vect}(e_1)$ est stable par u , alors F est aussi stable par u . Soit v l'endomorphisme induit par u sur F , alors v est un endomorphisme orthogonal de F et on a $\det(v) = \det(u) = 1$, car $u(e_1) = e_1$. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale directe, alors (e_2, e_3) est une base orthonormale de F , donc d'après le théorème précédent, il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$, tel que la matrice de v par rapport à la base (e_2, e_3) s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Donc, la matrice A de u dans la base (e_1, e_2, e_3) s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ii) Supposons que $\det(u) = -1$ et que 1 est une valeur propre de u .

Soit e_1 un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre 1 et soit $F = \text{Vect}(e_1)^\perp$, alors F est stable par u . Soit v l'endomorphisme induit par u sur F , alors v est un endomorphisme orthogonal de F et comme $u(e_1) = e_1$, alors on a $\det(v) = \det(u) = -1$. Donc, d'après le théorème précédent, il existe une base orthonormale (e_2, e_3) de F dans laquelle la matrice de v s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Donc, la matrice A de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On voit donc que A est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\ker(u - Id_E)$.

iii) Si $\det(u) = -1$ et 1 n'est pas valeur propre de u , alors, d'après le lemme précédent, -1 est une valeur propre de u . Soit x_0 un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre -1 . Soit $F = \text{Vect}(x_0)^\perp$ et soit s la symétrie orthogonale par rapport à F , alors d'après le corollaire 9.3.1, pour tout $x \in E$, on a $s(x) = x - 2 \langle x, x_0 \rangle x_0$.

Vérifions que $u \circ s = s \circ u$. Soit $x \in E$, alors, en tenant compte que $u(x_0) = -x_0$, on aura

$$(u \circ s)(x) = u(s(x)) = u(x) - 2 \langle x, x_0 \rangle u(x_0) = u(x) + 2 \langle x, x_0 \rangle x_0$$

D'autre part, on aura aussi

$$\begin{aligned} (s \circ u)(x) &= s(u(x)) = u(x) - 2 \langle u(x), x_0 \rangle x_0 \\ &= u(x) + 2 \langle u(x), u(x_0) \rangle x_0 = u(x) + 2 \langle x, x_0 \rangle x_0 \end{aligned}$$

Donc on voit que pour tout $x \in E$, on a $(u \circ s)(x) = (s \circ u)(x)$.

Soit $r = u \circ s$, comme r est la composée de deux endomorphismes orthogonaux, alors r est orthogonal et on a $\det(r) = \det(u) \det(s) = 1$, car $\det(u) = \det(s) = -1$, donc r est une rotation. On a $r(x_0) = x_0$, car $u(x_0) = s(x_0) = -x_0$, donc r est la rotation d'axe $\Delta = \text{Vect}(x_0)$. On a $u \circ s = s \circ u$ et $s \circ s = Id_E$, donc $u = r \circ s = s \circ r$. $\square$

Remarque 113

Soit E un espace euclidien de dimension 3 et u un endomorphisme orthogonal de E .

1. On suppose que u est une rotation d'angle θ et d'axe $\Delta = \text{Vect}(e_1)$, où e_1 est un vecteur unitaire. Alors on a

- a) $\text{tr}(u) = 1 + 2 \cos \theta$, donc on a

$$\cos \theta = \frac{\text{tr}(u) - 1}{2}$$

- b) Soit x un vecteur non nul orthogonal à Δ , alors $\langle x, e_1 \rangle = 0$, donc, si on pose

$$e_2 = \frac{x}{\|x\|} \quad \text{et} \quad e_3 = e_1 \wedge e_2$$

alors (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale directe de E , avec $u(e_1) = 1$, donc d'après le théorème précédent, la matrice A de u par rapport à (e_1, e_2, e_3) s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Donc, $u(x) = \|x\|u(e_2) = \|x\|(\cos \theta.e_2 + \sin \theta.e_1 \wedge e_2)$.

Ainsi pour tout x orthogonal à Δ , on a

$$u(x) = \cos \theta.x + \sin \theta.e_1 \wedge x$$

- c) Soit $x \in E$, alors $y = x - \langle x, e_1 \rangle e_1$ est un vecteur orthogonal à Δ , donc, d'après la remarque précédente, on a

$$u(y) = \cos \theta.y + \sin \theta.e_1 \wedge y$$

Donc, en remplaçant y par sa valeur, on aura

$$\forall x \in E, \quad u(x) = (1 - \cos \theta) \langle x, e_1 \rangle e_1 + \cos \theta.x + \sin \theta.e_1 \wedge x$$

- d) D'après l'expression précédente de $u(x)$, on obtient

$$\forall x \notin \Delta, \quad \sin \theta = \frac{\det(e_1, x, u(x))}{\|e_1 \wedge x\|^2}$$

On a aussi,

$$\forall x \in \Delta^\perp, \quad \cos \theta = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{\det(e_1, x, u(x))}{\|e_1 \wedge x\|^2}$$

- e) Si u est une rotation d'angle π , on dit que u est un demi-tour. Comme $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$, alors on a

$$\forall x \in E, u(x) = \langle x, e_1 \rangle e_1 - x$$

Donc un demi-tour est aussi une symétrie orthogonale par rapport à Δ , avec $\Delta = \text{Vect}(e_1)$.

2. On suppose que u est une symétrie-rotation, avec $u = r \circ s = s \circ r$, où r est une rotation et s une symétrie, et on cherche à déterminer l'angle θ de r . Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale directe, telle que $u(e_1) = -e_1$, alors r est une rotation d'axe Δ , où $\Delta = \text{Vect}(e_1)$, et s est la symétrie orthogonale par rapport à $\Delta^\perp$. On a $r = s \circ u$, et comme $s^* = s$, $s(e_1) = -e_1$, $s(e_2) = e_2$ et $s(e_3) = e_3$, alors on a

$$\begin{aligned} \text{tr}(r) &= \langle u(e_1), s(e_1) \rangle + \langle u(e_2), s(e_2) \rangle + \langle u(e_3), s(e_3) \rangle \\ &= 1 + \langle u(e_2), e_2 \rangle + \langle u(e_3), e_3 \rangle = 2 + \text{tr}(u) \end{aligned}$$

On en déduit que $\cos \theta = \frac{\text{tr}(u) + 1}{2}$ et que $\sin \theta = \det(e_1, e_2, u(e_2))$.

9.5.4 Cas général

Nous avons besoin du lemme suivant qui reste valable pour tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Lemme 9.5.2

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E . Alors u possède au moins un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.

Démonstration. Soit $v = u + u^*$, alors v est un endomorphisme symétrique, donc v possède au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in E$, avec $x \neq 0$, tel que $v(x) = \lambda x$, donc, on aura

$$\begin{aligned} v(x) = \lambda x &\implies u(x) + u^*(x) = \lambda x \\ &\implies u^2(x) + (uu^*)(x) = \lambda u(x) \\ &\implies u^2(x) + x = \lambda u(x) \quad (\text{car } uu^* = \text{Id}_E) \\ &\implies u^2(x) = \lambda u(x) - x \\ &\implies u^2(x) \in \text{Vect}(\{u(x), x\}) \end{aligned}$$

Donc $F = \text{Vect}(\{u(x), x\})$ est stable par u , avec $\dim(F) \in \{1, 2\}$, car $x \neq 0$. $\square$

Remarque 114

Pour la démonstration de ce lemme dans le cas d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, on utilise un diviseur irréductible P du polynôme caractéristique de u et on pose $F = \ker(P(u))$, alors F est stable par u . Puis suivant le degré de P , on montre que F est de dimension 1 ou 2.

Théorème 9.5.3

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme orthogonal de E . Alors, il existe des entiers naturels non nuls, p , q et r , avec $p + q + 2r = n$, et il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & \boxed{A_1} & & \\ & & & \boxed{A_2} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

où I_p et I_q sont les matrices identités d'ordres respectives p et q et où pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, il existe un unique $\theta_i \in]-\pi, \pi]$, tel que

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n , où $n = \dim(E)$.

Pour $n = 2$ et $n = 3$, le résultat est déjà établi.

H.R « Supposons que $n > 2$ et que le théorème vrai pour tout endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien de dimension $< n$ ».

Soient E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme orthogonal de E , alors d'après le lemme précédent, u possède au moins un sous-espace F stable par u , de dimension 1 ou 2. On choisit F de dimension minimale parmi tous les espaces stables par u .

Si $\dim(F) = 1$, alors $F = \text{Vect}(e_1)$, avec $\|e_1\| = 1$, et puisque F est stable par u , alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $u(e_1) = \lambda e_1$, donc λ est une valeur propre de u , par suite $\lambda = \pm 1$. Aussi, comme F est stable par u , alors $F^\perp$ est aussi stable par u , avec $\dim(F^\perp) = n - 1$. Soit v l'endomorphisme induit par u sur $F^\perp$, alors v est un endomorphisme orthogonal de $F^\perp$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}, \dots, e_n)$

de $F^\perp$ dans laquelle la matrice de v s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} I_{p-1} & & & & & \\ & -I_q & & & & \\ & & \boxed{A_1} & & & \\ & & & \boxed{A_2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

Donc, si $\lambda = 1$, alors la matrice de u dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} I_p & & & & & \\ & -I_q & & & & \\ & & \boxed{A_1} & & & \\ & & & \boxed{A_2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = -1$, alors la matrice de u dans la base $(e_2, \dots, e_p, e_1, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}, \dots, e_{n-1})$ s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} I_{p-1} & & & & & \\ & -I_{q+1} & & & & \\ & & \boxed{A_1} & & & \\ & & & \boxed{A_2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

Si, maintenant, $\dim(F) = 2$, puisque F a été choisi de dimension minimal, alors tout sous-espace stable par u serait de dimension ≥ 2 . On en déduit donc que u ne possède aucune valeur propre.

Soient v l'endomorphisme induit par u sur F et w l'endomorphisme induit par u sur $F^\perp$. Alors v et w sont deux endomorphismes orthogonaux de F et $F^\perp$ respectivement. On a $\dim(F) = 2$, donc la matrice A_1 de v par rapport à une base orthonormale (e_1, e_2) de F s'écrit sous la forme $A_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

On a $\dim(F^\perp) = n - 2$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(e_3, \dots, e_n)$ de $F^\perp$ dans laquelle la matrice de w s'écrit sous

la forme

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_2} & & & \\ & \boxed{A_3} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

Donc la matrice A de u dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \boxed{A_3} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, il existe un unique $\theta_i \in]-\pi, \pi]$, tel que

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}.$$

□

9.6 Décomposition polaire

On désigne par $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques positives et par $S_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices réelles symétriques définies positives.

Proposition 9.6.1

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) A est symétrique positive.
- i) Il existe une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, telle que $A = M^t M$.
- ii) Il existe une matrice unique $B \in S_n^+(\mathbb{R})$, appelée racine carrée de A , telle que $A = B^2$.

Démonstration. Soit A une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$, comme A est symétrique alors d'après le corollaire 9.4.1, il existe une matrice diagonale D dans $M_n(\mathbb{R})$ et il existe une matrice orthogonale P , telles que $A = PD^t P$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$

les valeurs propres, deux à deux distinctes, de A , alors on a

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où chaque λ_i apparaît sur la diagonale autant de fois que sa multiplicité.

Comme A est positive, alors toutes ses valeurs propres sont positives, on peut donc considérer la matrice Δ définie par

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

alors on a $\Delta^2 = D$.

i) $\implies$ ii) Si A est symétrique positive, alors d'après ce qui précède, on a

$$A = P\Delta^2 P = (P\Delta)(\Delta^t P) = (P\Delta)^t(P\Delta) \quad (\text{car } {}^t\Delta = \Delta)$$

Donc si on pose $M = P\Delta$, alors on a $A = M^t M$.

ii) $\implies$ i) Trivial

i) $\implies$ iii) Supposons que A est symétrique positive et posons $B = P\Delta^t P$. Comme ${}^t\Delta = \Delta$, alors on a ${}^tB = B$, donc B est symétrique et comme les valeurs propres de B sont positives, alors B est positive et on a $B^2 = A$.

Soit C une autre matrice positive, telle que $A = C^2$, pour établir l'unicité on doit montrer que $B = C$. Comme $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont deux à deux distinctes, alors d'après le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, tel pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on a $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$. On en déduit donc que $Q(D) = \Delta$, par suite, on a $Q(A) = Q(PD^t P) = PQ(D)^t P = P\Delta^t P = B$. On a $A = C^2$, donc on aura $B = Q(C^2)$, donc B et C commutent, par suite, elles sont simultanément diagonalisables. Il existe donc une matrice inversible R et deux matrices diagonales D_1 et D_2 , telles que $B = RD_1 R^{-1}$ et $C = RD_2 R^{-1}$, donc on aura

$$D_1^2 = (R^{-1} B R)^2 = R^{-1} B^2 R = R^{-1} A R$$

et on aura aussi

$$D_2^2 = (R^{-1}CR)^2 = R^{-1}C^2R = R^{-1}AR$$

par conséquent, on a $D_1^2 = D_2^2$. Or B et C sont positives, donc leurs valeurs propres sont positives, par suites les valeurs propres de D_1 et D_2 sont positives et comme $D_1^2 = D_2^2$, alors $D_1 = D_2$. On en déduit donc que $B = C$.

iii) $\Rightarrow$ i) Trivial □

Théorème 9.6.1 (Décomposition polaire)

Pour toute matrice A de $GL_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple (Ω, S) de $M_n(\mathbb{R})$, avec Ω une matrice orthogonale et S une matrice symétrique définie positive, telles que $A = \Omega S$.

Démonstration. Soit A une matrice de $GL_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tAA$ est une matrice symétrique définie positive, donc d'après la proposition précédente, il existe une unique matrice S de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = {}^tAA$. Posons $\Omega = AS^{-1}$, alors on a ${}^t\Omega\Omega = {}^tS^{-1}{}^tAAS^{-1} = ({}^tS)^{-1}({}^tAA)S^{-1} = ({}^tS)^{-1}(S^2)S^{-1} = I$ car S est symétrique, donc Ω est une matrice orthogonale et on a $A = \Omega S$.

Pour établir l'unicité supposons qu'il existe un autre couple (Ω', S') , avec Ω' une matrice orthogonale Ω' et S' une matrice définie positive, telles que $A = \Omega' S'$. On a donc ${}^tAA = ({}^tS' {}^t\Omega')(\Omega' S') = {}^tS'({}^t\Omega'\Omega')S' = S'^2$, car ${}^tS' = S'$ et ${}^t\Omega'\Omega' = I$. On a aussi ${}^tAA = S^2$, donc d'après l'unicité de la racine carée, on aura $S = S'$. On a donc $\Omega S = \Omega' S$, et comme S est inversible, alors $\Omega = \Omega'$. □

Remarque 115

En utilisant des techniques d'Analyse Fonctionnelle, on peut avoir une extension de la décomposition polaire à une matrice A qui n'est pas nécessairement inversible comme le montre l'exercice suivant :

Exercice 9.6.1

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales, est un compact de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale Ω et une matrice symétrique positive S , non nécessairement uniques, telles que $A = \Omega S$.

Solution

1. Comme $M_n(\mathbb{R})$ est un espace normé de dimension finie, alors il suffit de montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé borné. Aussi grâce à la dimension finie, toutes les normes sont équivalentes sur $M_n(\mathbb{R})$, donc on peut utiliser la norme qui nous convient, par exemple pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$, alors il est bien connu que cela définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$. Pour tout $P \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$, on a $\|P\| = 1$, donc $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ est bornée. Soit $(P_m)_{m \geq 0}$ une suite de $\mathcal{O}(\mathbb{R})$, telle que $\lim_{m \rightarrow +\infty} P_m = P$, on doit montrer que $P \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$. Comme $\lim_{m \rightarrow +\infty} P_m = P$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|P_m x\| = \|Px\|$ et comme pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\|P_m x\| = \|x\|$, alors on a $\|Px\| = \|x\|$, donc $P \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ et par suite $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ est fermé. Ainsi nous avons établi que $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ est compact.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice non inversible. Puisque le nombre de valeurs propres de A est fini, alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq N \implies A - \frac{1}{p} I_n \in GL_n(\mathbb{R})$$

On en déduit donc qu'il existe une suite $(A_p)_p$ de $GL_n(\mathbb{R})$, telle que $\lim_{p \rightarrow +\infty} A_p = A$. D'après le théorème précédent, pour tout p , il existe une matrice orthogonale Ω_p et une matrice symétrique définie S_p , telles que $A_p = \Omega_p S_p$. Comme $(\Omega_p)_p$ est une suite de $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ et comme $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ est compact, alors $(\Omega_p)_p$ possède une sous-suite $(\Omega_{p_k})_{k \geq 0}$ qui converge vers Ω , avec $\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$. Pour tout k , on a $S_{p_k} = A_{p_k} \Omega_{p_k}^{-1}$, donc S_{p_k} converge vers une matrice symétrique positive S , car pour tout k , S_{p_k} est symétrique, et on a $S = A\Omega^{-1}$, par conséquent, on a $A = \Omega S$. Il n'y a plus unicité, car par exemple, si $A = 0$, alors Ω et S sont arbitraires.

9.7 Décomposition QR

Théorème 9.7.1

Pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe deux matrices unique Q et R dans $M_n(\mathbb{R})$, avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, telles que $A = QR$.

Démonstration. Comme A est inversible, alors le système $\mathcal{S} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, formé par les vecteurs colonnes de A , est une base de $\mathbb{R}^n$ et A représente la

matrice de passage de la base canonique $\beta_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ à $\mathcal{S}$.

Soit $\beta = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ la base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt au système $\mathcal{S}$, alors on sait que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $v_j = \sum_{i=1}^j \langle v_j, u_i \rangle u_i$, avec $\langle v_j, e_j \rangle > 0$. Donc si $R = (r_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice de passage de la base β à la base $\mathcal{S}$, alors R est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs. Soit $Q = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de passage de la base canonique β_0 à la base β . Comme β_0 et β sont deux bases orthonormales, alors Q est une matrice orthogonale. Ainsi, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$v_j = \sum_{k=1}^n r_{kj} u_k = \sum_{k=1}^n r_{kj} \left(\sum_{i=1}^n q_{ik} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n q_{ik} r_{kj} \right) e_i$$

A étant la matrice de passage de β_0 à $\mathcal{S}$, alors on en déduit que $A = QR$, d'où l'existence de Q et R . Pour établir l'unicité, on suppose que

$$A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$$

avec Q_1 et Q_2 orthogonales, R_1 et R_2 triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs. On a alors $Q_1^{-1} Q_2 = R_1 R_2^{-1}$, puis comme $R_1 R_2^{-1}$ est triangulaire supérieure, alors $Q_1^{-1} Q_2$ est une matrice orthogonale triangulaire supérieure, donc $Q_1^{-1} Q_2$ est diagonale dont chaque coefficient diagonal est égale à ± 1 . Or, par hypothèse les coefficients diagonaux de R_1 et R_2 sont strictement positifs, donc ceux de $R_1 R_2^{-1}$ sont aussi strictement positifs. On en déduit donc que $Q_1^{-1} Q_2 = I_n$, donc $Q_1 = Q_2$ et par suite, $R_1 = R_2$, d'où l'unicité. $\square$

9.8 Exercices

Exercice 169

Soient E un espace préhilbertien, $u : E \longrightarrow E$ et $v : E \longrightarrow E$ deux applications telles que

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

Montrer que u et v sont linéaires et que $v = u^*$.

Exercice 170

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $a \in E$ et u l'endomorphisme de E défini pour tout $x \in E$, par $u(x) = a \wedge (a \wedge x)$.

1. Déterminer u^* , u est-t-il symétrique?
2. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de u .

Exercice 171

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^p = I$, alors $A^2 = I$.

Exercice 172

1. Montrer que si u est un endomorphisme inversible d'un espace euclidien E , alors il existe une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E , tel que $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ soit une base orthogonale de E .
2. Montrer que pour toute matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe deux matrices orthogonales P et Q , telles que PAQ soit diagonale.

Exercice 173 (Endomorphismes à trace nulle)

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E de trace nulle.

On propose de montrer qu'il existe une base orthonormale dans laquelle les coefficients diagonaux de la matrice de u sont tous nuls.

1. Calculer $\text{tr}(u)$ à l'aide de la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.
2. Montrer qu'il existe i et j , avec $i \neq j$, tels que $\langle u(e_i), e_i \rangle$ et $\langle u(e_j), e_j \rangle$ sont de signes opposés.
3. Pour chaque $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $e(\theta) = (\cos \theta)e_i + (\sin \theta)e_j$. Vérifier que $\|e(\theta)\| = 1$.
4. Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $f(\theta) = \langle e(\theta), u(e(\theta)) \rangle$. Montrer qu'il existe au moins un $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, tel que $f(\theta) = 0$.
5. En déduire le résultat.

Exercice 174

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique non nulle.

Montrer que $\frac{\text{tr}(A)^2}{\text{tr}(A^2)} \leq \text{rg}(A)$.

Exercice 175

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des nombres réels, tels que $\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = 1$.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = \alpha_i \alpha_j$. Montrer que A est une matrice de projection orthogonale.

Exercice 176

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E , tel que $u^2 = 0$.

1. Montrer que $\ker(u + u^*) = \ker(u) \cap \ker(u^*)$.
2. Montrer que $u + u^*$ est inversible si, et seulement si, $\ker(u) = \text{Im}(u)$.

Exercice 177

Soient E un espace euclidien, u un endomorphisme de E , tel que pour tout $x \in E$, on a $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Montrer que

- a) $\forall x \in E, \|u^*(x)\| \leq \|x\|$.
- b) $\forall x \in E, u(x) = x \iff u^*(x) = x$.

$$\text{c) } E = \ker(u - Id_E) \overset{\perp}{\oplus} \text{Im}(u - Id_E).$$

Exercice 178

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E .

1. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
 - a) $p + q$ est un projecteur orthogonal.
 - b) Pour tout $x \in E$, on a $\langle p(x), q(x) \rangle = 0$.
 - c) $p \circ q = 0$.
 - d) Pour tout $x \in \text{Im}(p)$ et pour tout $y \in \text{Im}(q)$, on a $\langle x, y \rangle = 0$.
2. On suppose que $p + q$ est un projecteur orthogonal. Montrer que

$$E = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$$

Déterminer $\ker(p + q)$.

Exercice 179

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et F le sous-espace vectoriel dont la représentation cartésienne est définie par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Déterminer, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la matrice de la projection orthogonale sur F .

Exercice 180

Soient E un espace euclidien et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

1. Soit p un projecteur orthogonal de E de rang 1. Calculer $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2$.
2. Soit p un projecteur de E , tel que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = 1$. Montrer que p est orthogonal de rang 1.

Exercice 181

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E .

1. Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique.
2. Montrer que $(\text{Im}(p) + \ker(q))^\perp = \text{Im}(q) \cap \ker(p)$.
3. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

Exercice 182

Soient E un espace euclidien, u un endomorphisme de E et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, tels que $u^* \circ u + \alpha u + \beta u^* = 0$.

1. Montrer que si $\alpha \neq \beta$, alors il existe une projection orthogonale p et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tels que $u = \lambda p$.
2. Montrer que si $\alpha = \beta$, alors $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont orthogonaux.

Exercice 183

Soient E un espace euclidien, u un endomorphisme de E .

1. a) Montrer que $\ker(u^* \circ u) = \ker(u)$ et $\text{Im}(u^* \circ u) = \text{Im}(u^*)$.
b) En déduire que $\ker(u \circ u^*) = \ker(u^*)$ et $\text{Im}(u \circ u^*) = \text{Im}(u)$.
2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
 - i) $u \circ u^* \circ u = u$,
 - ii) $u \circ u^*$ est un projecteur orthogonal de E ,
 - iii) $u^* \circ u$ est un projecteur orthogonal de E ,
 - iv) $\ker(u)^\perp = \{x \in E : \|u(x)\| = \|x\|\}$.

Exercice 184

Soient α et β deux nombres réels et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, q(x) = x_1^2 + \alpha x_2^2 + (\alpha + \beta + 3)x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2(\alpha + 1)x_2x_3$$

1. Déterminer la matrice M de q par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer le déterminant de M et préciser les valeurs des paramètres α et β pour lesquelles la forme quadratique q est non dégénérée.
3. On suppose $\alpha = \beta = 0$.
 - a) En appliquant la méthode de Gauss, décomposer q sous forme de carrés.
 - b) Déterminer le cône des vecteurs isotropes C_q .
 - c) C_q est-il un sous-espace vectoriel de E ? Pourquoi?
4. On suppose $\alpha \neq 1$ et $\beta \neq 0$.
 - a) En appliquant la méthode de Gauss, décomposer q sous forme de carrés.
 - b) Pour quelles valeurs des paramètres α et β , la forme quadratique q définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?
 - c) Dans le cas où q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$, déterminer une base q -orthogonale (v_1, v_2, v_3) .
Pour quelles valeurs de α et β , (v_1, v_2, v_3) définit une base q -orthonormale?
5. Dans toute la suite, on suppose $\alpha = 2$ et $\beta = 1$.

- a) Justifier que q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
- b) Déterminer le q -orthogonal de F , où $F = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_1 - e_3)$.
- c) Déterminer, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice A de la projection q -orthogonale sur F .
- e) La matrice A est-elle symétrique? Pourquoi?
- f) Déterminer, par rapport à la base (v_1, v_2, v_3) , la matrice B de la projection q -orthogonale sur F .
- g) La matrice B est-elle symétrique? Pourquoi?

Exercice 185

Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont orthogonalement semblables.

Exercice 186

Soient A et B deux matrices réelles symétriques et positives.

1. Montrer que $0 \leq \text{tr}(AB) \leq \text{tr}(A)\text{tr}(B)$.
2. Montrer que $(\text{tr}(AB + BA))^2 \leq 4\text{tr}(A^2)\text{tr}(B^2)$.
3. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$, avec $\alpha + \beta = 1$. Montrer que

$$\det(\alpha A + \beta B) \geq \det(A)^\alpha \det(B)^\beta$$

Exercice 187

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique défini positif. Montrer que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^4 \leq \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 188

$M_n(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Déterminer, en fonction des coefficients de A , la distance de A au sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.
2. $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix}$$

Déterminer, en fonction de n , la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 189

Déterminer les minimums suivants

1. $\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} ((x+y-2)^2 + (x-1)^2 + (2x+y-1)^2)$
2. $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - a - bt)^2 dt.$
3. $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - a \cos t - b \sin t)^2 dt.$
4. $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t \log(t) - a - bt)^2 dt.$

Exercice 190

Soient E un espace euclidien de dimension n , avec $n \geq 2$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p .

1. Montrer que $\sum_{i=1}^n d(e_i, F)^2 = n - p$.
2. En déduire qu'il existe $i \in \mathbb{N}_n$, tel que $d(e_i, F) \geq \sqrt{\frac{n-p}{n}}$.

Exercice 191

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que u est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera le noyau et l'image.
2. u est-il une projection orthogonale pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$?
3. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x) = x_1^2 + 11x_2^2 + 6x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

- a) Montrer que q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
- b) Montrer que u est une projection orthogonale par rapport à ce produit scalaire.

Exercice 192

Soit E un espace euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormale $\beta = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Déterminer la matrice, par rapport à β , de la projection orthogonale par rapport au plan d'équation $x + y + z = 0$.

2. Déterminer la matrice, par rapport à β , de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x = z$.

Exercice 193

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et soit $B = {}^tA + A$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $B^k = 0$. Montrer que A est antisymétrique.

Exercice 194

1. Soient A et B deux matrices de $GL_n(\mathbb{R})$, telles que $A - B \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^{-1} - B^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ et déterminer $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ en fonction de A et B .
2. Montrer que si M est une matrice symétrique définie positive, alors M^{-1} est symétrique définie positive.
3. On suppose que A , B et $B - A$ sont symétriques définies positives. Montrer que $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ est symétrique définie positive.

Exercice 195

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A , non nécessairement deux à deux distinctes, alors on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$.

Exercice 196

Soient E un espace euclidien de dimension ≥ 2 et f un endomorphisme orthogonal de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$g_n = \frac{1}{n}(Id_E + f + f^2 + \dots + f^{n-1})$$

1. Montrer que $E = \ker(f - Id_E) \oplus \text{Im}(f - Id_E)$.
2. Calculer $g_n(x)$ pour $x \in \ker(f - Id_E)$ et pour $x \in \text{Im}(f - Id_E)$,
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$.

Exercice 197

$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ deux matrices réelles. On appelle produit de Schur de A et B la matrice notée $A \odot B$ et définie par $A \odot B = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, avec $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$.

1. Montrer que si A et B sont symétriques positives alors $A \odot B$ est symétrique positive.
2. Montrer que si A est symétrique positive, alors la matrice $M = (e^{a_{ij}})_{1 \leq i, j \leq n}$ est symétrique positive.

Exercice 198

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A est symétrique positive, alors $\text{tr}(A) \geq n \det(A)^{\frac{1}{n}}$.
2. Montrer que $\text{tr}({}^tAA) \geq n \det(A)^{\frac{2}{n}}$.

Exercice 199

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, telles que ${}^tAA = {}^tBB$.

1. On suppose que A est inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P , telle que $B = PA$.
2. Montrer que ce résultat reste vraie sans l'hypothèse A inversible.

Exercice 200

1. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, alors $\exp(A)$ est symétrique définie positive.
2. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive, alors il existe une matrice symétrique $M \in M_n(\mathbb{R})$, telle que $A = \exp(M)$.
3. Montrer que si A et B sont deux matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$, telles que $\exp(A) = \exp(B)$, alors $A = B$.
 - a) Montrer que si A est une matrice symétrique, alors qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, tel que $A = P(\exp(A))$.
 - b) Montrer que si A et B sont deux matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$, telles que $\exp(A) = \exp(B)$, alors $A = B$.

Exercice 201

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, telle que $A{}^tAA = I$. Montrer que A est inversible et que A est symétrique puis déterminer A .

Exercice 202

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, telle que ${}^tA = A^2$.

1. Montrer que $A^3 = I_n$ et en déduire que A est orthogonale.
2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .
 - a) Montrer que $\ker(u^2 + u + Id)$ est de dimension paire.
 - b) En déduire la forme de la matrice de u par une base orthonormale bien choisie.

Exercice 203

Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ de matrices respectives, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, A et B . On suppose que q_2 est quelconque et q_1 définie positive.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$, q_1 -symétrique, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $q_2(x) = q_1(u(x))$.
2. Soit M la matrice de u par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminer M en fonction de A et B .
3. Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad f(x) = \frac{q_2(x)}{q_1(x)}$$

Montrer que f possède un minimum et un maximum absolus qu'on déterminera en fonction des valeurs propres de u .

4. Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} \quad \text{et} \quad g(x, y) = \frac{x^2 - 10xy + 4y^2}{x^2 - xy + y^2}$$

Exercice 204 (Théorème de Courant-Fisher)

Soient E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme symétrique de E . On appelle quotient de Rayleigh la quantité $R_u(x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de u , avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, soit $\mathcal{F}_k$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de E de dimension k .

1. Montrer que $\max_{x \neq 0} R_u(x) = \lambda_n$ et $\min_{x \neq 0} R_u(x) = \lambda_1$.
2. Pour chaque $k \in \mathbb{N}_n$, on pose

$$F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \quad \text{et} \quad G_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)$$

- a) Montrer que $\min_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \right) \leq \lambda_k$.
- b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ et pour tout $F \in \mathcal{F}_k$, $F \cap G_k \neq \{0\}$ et en déduire que $\min_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \right) \geq \lambda_k$.
- c) Dédire de ce qui précède le théorème de Courant-Fisher :
Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, on a

$$\begin{aligned} \min_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \right) &= \lambda_k \\ \max_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\min_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \right) &= \lambda_{n-k+1} \end{aligned}$$

Exercice 205 (Matrice et déterminant de Gram)

Soient E un espace préhilbertien réel, $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ un système de vecteurs de E . On définit ce qu'on appelle la matrice de Gram associée à ce système par

$\text{Gram}(v_1, v_2, \dots, v_n) = (< v_i, v_j >)_{1 \leq i, j \leq n}$. Le déterminant de Gram associé au système $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est défini par :

$$G(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det(\text{Gram}(v_1, v_2, \dots, v_n))$$

1. Montrer que $\text{Gram}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est symétrique positive.
2. Montrer que $\text{Gram}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ont même rang.
3. Montrer que

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ est libre} \iff G(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$$

4. On suppose que $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est libre et on pose $F = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Montrer que
 - a) $G(v_1, v_2, \dots, v_n) > 0$.
 - b) Pour tout $x \in E$, on a $d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, v_1, v_2, \dots, v_n)}{G(v_1, v_2, \dots, v_n)}}$.
5. On appelle matrice de Hilbert, la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}$$

Montrer que A est une matrice symétrique définie positive.

(On pourra remarquer que $a_{ij} = \int_0^1 t^{i+j-2} dt$)

Exercice 206

1. Soit M une matrice symétrique positive $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\det(I_n + M) \geq 1 + \det(M)$$

2. Soient A et B deux matrices symétriques positives de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$$

Exercice 207 (Inégalité de Hadamard)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice symétrique positive de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A est définie positive, alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $a_{ii} > 0$.
2. Montrer que $\det(A) \leq \left(\frac{\text{tr}(A)}{n} \right)^n$.
3. On suppose que A est définie positive et on pose $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, avec

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad b_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}a_{jj}}}$$

- a) Montrer que B est positive.
- b) En déduire l'inégalité de Hadamard : $\det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}$.
- 4. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ un système libre d'un espace euclidien E de dimension n . Montrer que $|\det(v_1, v_2, \dots, v_n)| \leq \prod_{i=1}^n \|v_i\|$.

Exercice 208

Soient E un espace euclidien de dimension n , f et g deux endomorphismes de E , tels que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|g(x)\|$$

On se propose de montrer qu'il existe un endomorphisme orthogonal u de E , tel que $g = u \circ f$.

1. Montrer que si f est inversible, alors il existe un unique $u \in O_n(E)$, tel que $g = u \circ f$.
2. On ne suppose plus que f est inversible et on pose $r = \text{rang}(f)$.
 - a) Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle g(x), g(y) \rangle$.
 - b) Montrer que $\ker(f) = \ker(g)$.
 - c) Soient $(v_1, \dots, v_r)$ une base orthonormale de $\text{Im } f$, G un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E et $h : G \rightarrow \text{Im } f$ l'application qui à $x \in G$ fait correspondre $f(x)$.
 - i) Montrer que h est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
 - ii) Montrer que $\dim(G) = r$ et qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_r)$ de G , telle que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on a $f(e_i) = v_i$.
 - d) Pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, soit $w_i = g(e_i)$.
Montrer que $(w_1, \dots, w_r)$ est une base orthonormale de $\text{Im}(g)$.
 - e) Justifier comment on peut compléter les familles $(v_1, \dots, v_r)$ et $(w_1, \dots, w_r)$ en deux bases orthonormales $(v_1, \dots, v_n)$ et $(w_1, \dots, w_n)$ de E .
 - f) Soit u l'endomorphisme de E défini par $\forall i \in \{1, \dots, n\}, u(v_i) = w_i$.
Montrer que u est un endomorphisme orthogonal de E et que $g = u \circ f$.
 - g) u est-t-il unique ?

Exercice 209

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de E . Déterminer la matrice, par rapport à β des endomorphismes suivants :

- a) Le demi-tour d'axe $\text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$.

- b) La rotation d'axe $\text{Vect}(e_2 + e_3)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 c) La rotation d'axe $\text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$ qui transforme e_1 en e_3 .

Exercice 210

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $u \in L(E)$. Montrer que u est une rotation, si, et seulement si,

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad u(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$$

Exercice 211

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soient r une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe $\text{Vect}(x_0)$ et d'angle θ et u un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $u \circ r \circ u^{-1}$ est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.
2. En déduire le centre de $SO_3(\mathbb{R})$.

Exercice 212

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme u dont la matrice A par rapport à la base canonique est définie par :

1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 213

Soient $a \in \mathbb{R}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A , par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, définie par :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a & -2 & a+1 \\ a+1 & -a & -2 \\ 2 & a+1 & a \end{pmatrix}$$

- a) Pour quelles valeurs de a , l'endomorphisme u est orthogonal.
- b) Dans le cas où u est orthogonal, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de u .

Exercice 214

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma = ab + ac + bc$, $s = a + b + c$ et A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est une matrice orthogonale, si et seulement si, $\sigma = 0$ et $s \in \{-1, 1\}$.
2. Montrer que A est une matrice de rotation, si et seulement si, $\sigma = 0$ et $s = 1$.
3. Montrer que A est une matrice de rotation, si, et seulement si, il existe $k \in [0, \frac{4}{27}]$, tel que a, b et c soient racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$.

Exercice 215

Soient $a \in \mathbb{R}$ et M_a la matrice définie par :

$$M_a = \begin{pmatrix} a^2 & a\sqrt{1-a^2} & \sqrt{1-a^2} \\ a\sqrt{1-a^2} & 1-a^2 & -a \\ \sqrt{1-a^2} & -a & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que pour tout $a \in]-1, 1[$, M_a est une matrice orthogonale. Est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $\text{tr}(M_a)$ et $\det(M_a)$.
3. En déduire les valeurs propres de M_a et la nature géométrique de l'endomorphisme associé canoniquement à M_a .

Exercice 216

$M_n(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall B \in M_n(\mathbb{R}), \langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$$

On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques.

1. Vérifier que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer leurs dimensions.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et soit f_A l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), f_A(M) = AM$$

Montrer que f_A est orthogonal, si et seulement si, A est une matrice orthogonale.

Exercice 217

Soit a un vecteur unitaire d'un espace euclidien E , $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : E \longrightarrow E$ l'application définie pour tout $x \in E$, par $f_\alpha(x) = x + \alpha < x, a > a$.

1. Montrer que $\{f_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ est stable pour la loi de composition.
2. Montrer que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a $f_\alpha \circ f_\beta = f_\beta \circ f_\alpha$.
3. Calculer f_α^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que f_α est inversible, si et seulement si, $\alpha \neq -1$.
Quelle est la nature de f_{-1} ?
5. Montrer que

$$f_\alpha \text{ est orthogonal} \iff \alpha \in \{0, -2\}$$

Quelle est la nature de f_{-2} ?

Exercice 218

Soit a un vecteur unitaire d'un espace euclidien orienté E de dimension 3. On considère l'application $f : E \longrightarrow E$ définie pour tout $x \in E$, par

$$f(x) = < x, a > a + a \wedge x$$

Montrer que f est un endomorphisme orthogonal et préciser sa nature.

Exercice 219

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que

- a) $I + A$ est inversible.
- b) $(I + A)^{-1}(I - A) \in SO_n(\mathbb{R})$.
- c) $\det(I + A) > 0$.

Exercice 220

Soient E un espace euclidien, u un endomorphisme de E . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, < x, y > = 0 \implies < u(x), u(y) > = 0$,
- ii) il existe $k \geq 0$, tel que pour tout $x \in E$ on a $\|u(x)\| = k\|x\|$,
- iii) u est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Exercice 221

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice orthogonale. Montrer que

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \right| \leq n \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \leq n^{\frac{3}{2}}$$

Exercice 222

1. Montrer que si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice antisymétrique, alors $\exp(M)$ est une matrice de rotation.

2. Réciproquement, montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice de rotation, alors, il existe une matrice antisymétrique M , tel que $A = \exp(M)$.

Exercice 223

Soient E un espace euclidien de dimension 3, f et g deux rotations de E . Montrer que f et g commutent, si et seulement si, l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- i) f et g ont même axe.
- ii) f et g sont deux retournements d'axes orthogonaux.

Exercice 224

Soit E un espace euclidien de dimension n . On dit qu'un endomorphisme u de E est antisymétrique si $u^* = -u$.

1. Montrer que si u est antisymétrique alors $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$.
2. Réciproquement, montrer que si $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$, alors u est antisymétrique.
3. On suppose que u est antisymétrique.
 - a) Montrer que $\ker(u)^\perp = \text{Im}(u)$.
 - b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de u , alors $\lambda = 0$.
 - c) Montrer que si u est inversible, alors n est pair.
 - d) Montrer que u est de rang pair.
4. On suppose que E est orienté de dimension 3 et que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale directe de E .
 - a) Soit a un vecteur de E , avec $a = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, et soit u l'endomorphisme défini par,

$$\forall x \in E, u(x) = a \wedge x$$

- i) Montrer que u est antisymétrique.
- ii) Déterminer, en fonction de a , $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$.
- iii) Déterminer, en fonction de α, β et γ , la matrice de u par rapport à la base (e_1, e_2, e_3) .
- b) Réciproquement, soit u un endomorphisme antisymétrique non nul de E . On se propose de montrer qu'il existe un unique $a \in E$, tel que

$$\forall x \in E, u(x) = a \wedge x$$

- i) Montrer que $\dim(\ker(u)) = 1$.

- ii) On suppose que $\ker(u) = \text{Vect}(x_0)$ avec $\|x_0\| = 1$ et soient y_0 et z_0 deux vecteurs de E , tels que (x_0, y_0, z_0) soit une base orthonormale directe de E . Montrer que

$$u(y_0) = \langle u(y_0), z_0 \rangle x_0 \wedge y_0 \quad \text{et} \quad u(z_0) = \langle u(y_0), z_0 \rangle x_0 \wedge z_0$$

- iii) On pose $a = \langle u(y_0), z_0 \rangle x_0$. Montrer que a est l'unique vecteur de E , tel que pour tout $x \in E$, on a $u(x) = a \wedge x$.

Exercice 225

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, a et b deux vecteurs non nuls de E . On considère l'endomorphisme u de E défini par :

$$\forall x \in E, \quad u(x) = a \wedge (b \wedge x)$$

- Déterminer l'endomorphisme adjoint u^* .
- En déduire que si (a, b) est lié, alors u est symétrique.
- Réciproquement, montrer que si u est symétrique, alors (a, b) est lié.
- Montrer que u est un projecteur, si, et seulement si, $\langle a, b \rangle = -1$.
- Montrer que u est un projecteur orthogonal, si, et seulement si,

$$b = -\frac{a}{\|a\|^2}$$
- On suppose que u est un projecteur orthogonal. Déterminer $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$.

Exercice 226 (Endomorphismes normaux d'un espace euclidien)

Soit E un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme u de E est normal, si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

- On suppose que u est un endomorphisme normal de E . Montrer que
 - Pour tout $x \in E$, on a $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
 - $\ker(u^*) = \ker(u)$.
 - Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\ker(u - \lambda \text{Id}_E) = \ker(u^* - \lambda \text{Id}_E)$.
 - Si F est un sous-espace stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u .
- Dans cette question, on suppose que u est normal et que $\dim(E) = 2$.
 - Montrer que si u possède une valeur propre réelle, alors u possède une base orthonormale formée de vecteurs propres.
 - On suppose que u n'a aucune valeur propre réelle.
 - Montrer que $u^* + u$ possède au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Montrer que le sous-espace propre E_λ est stable par u .

- iii) Montrer que $\dim(E_\lambda) = 2$ et que $u^* + u = \lambda Id_E$.
- iv) En déduire que la matrice A de u par rapport à n'importe quelle base orthonormale de E , s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

- 3. On revient au cas général, où E est un espace euclidien quelconque.
 - a) Montrer que si E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel quelconque de dimension finie et si u est un endomorphisme de E , alors u possède au moins un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.
 - b) Montrer que pour tout endomorphisme normal u de E , il existe des sous-espaces vectoriels $E_1, E_2, \dots, E_r$ de E , de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux et stables par u , tels que

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_r$$

- 4. Déduire de ce qui précède que si u est un endomorphisme normal d'un espace euclidien de dimension n , alors il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice A de u s'écrit sous la forme,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} a_q & b_q \\ -b_q & a_q \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

où p et q sont deux entiers ≥ 0 avec $p + 2q = n$.

Exercice 227

Soient E un espace euclidien et u un automorphisme de E , tel que

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle x, y \rangle = 0 \implies \langle u(x), u(y) \rangle = 0$$

- 1. Soit $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale quelconque de E et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de u^*u par rapport à la base β . Montrer que pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, on a $i \neq j \implies a_{ij} = 0$.
- 2. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $\alpha(x) \in \mathbb{R}$, tel que

$$(u^* \circ u)(x) = \alpha(x)x$$

3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$, tel que $u^* \circ u = \alpha Id_E$.
4. Montrer qu'il existe $k > 0$ et il existe un endomorphisme orthogonal v , tel que $u = kv$.

Exercice 228

Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel réel, de sa base canonique $(1, i)$, où i est le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$, et de son produit scalaire usuel :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \langle z, z' \rangle = \operatorname{Re}(\bar{z}z')$$

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$ -linéaire.

1. a) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, tel que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$.
b) Déterminer la trace et le déterminant de f en fonction de α et β .
2. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que

$$(z, \bar{z}) \text{ est libre } \iff z^2 \notin \mathbb{R}$$

3. Déterminer f^* .
4. Quelles sont les valeurs de α et β pour lesquelles :
a) f est un endomorphisme symétrique ?
b) f est un endomorphisme orthogonal ?
c) f est une rotation ?
d) f est une symétrie orthogonale ?
5. On suppose $\beta \neq 0$. Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles f est une projection orthogonale.

Exercice 229

Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Pour tout $\sigma \in S_n$, on définit l'endomorphisme u_σ de E par :

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \implies u_\sigma(x) = \sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)} e_i$$

1. Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$, u_σ est un endomorphisme orthogonal.
2. Montrer qu'il existe une valeur propre réelle commune à tous les u_σ .
3. Montrer qu'il existe un hyperplan H de E stable par tous les u_σ .

Exercice 230

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, telle que toutes les valeurs propres de ${}^tAA - A^tA$ soient positives. Montrer que ${}^tAA = A^tA$.

Exercice 231

Soit A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose qu'il existe une matrice antisymétrique B , telle que $A + B$ soit orthogonale.
 - a) Montrer que $AB = BA$ et que $A^2 - B^2 = I$.
 - b) Montrer que si λ est une valeur propre de A , alors $\lambda \in [-1, 1]$ et que si $\lambda \in]-1, 1[$, alors $\dim(E_\lambda)$ est paire.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice antisymétrique B , telle que $A + B$ soit orthogonale.

9.9 Solution des exercices**Exercice 169**

Soit $(x_1, x_2) \in E \times E$, alors pour tout $y \in E$, on a

$$\begin{aligned} & \langle u(x_1 + x_2) - u(x_1) - u(x_2), y \rangle \\ &= \langle u(x_1 + x_2), y \rangle - \langle u(x_1), y \rangle - \langle u(x_2), y \rangle \\ &= \langle x_1 + x_2, v(y) \rangle - \langle x_1, v(y) \rangle - \langle x_2, v(y) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout $y \in E$, on a $\langle u(x_1 + x_2) - u(x_1) - u(x_2), y \rangle = 0$ et comme un produit scalaire est non dégénéré, alors on a $u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2)$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $x \in E$, alors pour tout $y \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle u(\alpha x) - \alpha u(x), y \rangle &= \langle u(\alpha x), y \rangle - \alpha \langle u(x), y \rangle \\ &= \langle \alpha x, v(y) \rangle - \alpha \langle x, v(y) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Un produit scalaire est non dégénéré, donc $u(\alpha x) = \alpha u(x)$.

u et v jouent un rôle symétrique, alors de la même manière on voit que v est linéaire. Puisque pour tout $x, y \in E$, on a $\langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$, alors d'après l'unicité de l'adjoint, on a $v = u^*$.

Exercice 170

1. Soient $x, y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} \langle u(x), y \rangle &= \langle a \wedge (a \wedge x), y \rangle = \det(a, a \wedge x, y) \\ &= -\det(a, y, a \wedge x) = -\langle a \wedge y, a \wedge x \rangle \\ &= -\det(a, x, a \wedge y) = \det(x, a, a \wedge y) \\ &= \langle x, a \wedge (a \wedge y) \rangle \end{aligned}$$

On en déduit donc que $u^* = u$.

2. Si $a = 0$, alors $u = 0$, donc on peut supposer que $a \neq 0$.

On a $u(a) = 0$ et $a \neq 0$, donc 0 est une valeur propre de u . D'après la formule du double produit vectoriel, pour tout $x \in E$, on a

$$u(x) = \langle a, x \rangle a - \|a\|^2 x$$

Ainsi, on remarque que si $\langle a, x \rangle = 0$, alors $u(x) = -\|a\|^2 x$, par suite $-\|a\|^2$ est une valeurs propre de u de multiplicité $\geq n - 1$, car $\dim(\{a\}^\perp) = n - 1$. Comme 0 est une valeur propre de u et comme $a \neq 0$, alors les valeurs propres de u sont 0 de multiplicité 1 et $-\|a\|^2$ de multiplicité $n - 1$.

Exercice 171

A est symétrique, donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de u , non nécessairement deux à deux distinctes, alors il existe une matrice inversible P , tel que $A = PDP^{-1}$, où $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Comme $A^p = I$, alors $D^p = I$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on a $\lambda_i^p = 1$ et comme $\lambda_i \in \mathbb{R}$, alors $\lambda_i = \pm 1$, donc $\lambda_i^2 = 1$, par suite, on a $D^2 = I$, donc $A^2 = I$.

Exercice 172

- u^*u est un endomorphisme symétrique, donc il existe une base orthogonale formée de vecteurs propres de u . Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, avec $i \neq j$, on a $\langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \langle (u^*u)(e_i), e_j \rangle = \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = 0$, donc $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est un système orthogonal. Puisque u est inversible, alors $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthogonale de E .
- Supposons qu'il existe une matrice diagonale Δ et deux matrices orthogonales P et Q , tel que $\Delta = PAQ$, alors on aura

$$\Delta^2 = {}^t\Delta\Delta = ({}^tQ{}^tA{}^tP)(PAQ) = {}^tQ({}^tAA)Q$$

on est donc conduit à considérer ${}^tAA$. Comme A est inversible, alors ${}^tAA$ est symétrique définie positive, donc les valeurs propres de ${}^tAA$ sont strictement positives. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres, non nécessairement deux à deux distinctes et soit

$$\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$$

alors il existe une matrice orthogonale P , tel que ${}^tAA = P\Delta^2{}^tP$, donc on a $A = {}^t(A^{-1})(P\Delta^2{}^tP)$. On pose $R = {}^t(A^{-1})P\Delta$ et $Q = {}^tP$, alors Q est orthogonale et pour R , on a

$${}^tRR = (\Delta{}^tPA^{-1})({}^t(A^{-1})P\Delta) = \Delta[{}^tP({}^tAA)^{-1}P]\Delta$$

On a ${}^tAA = P\Delta^2{}^tP$, donc on a ${}^tP({}^tAA)^{-1}P = (\Delta^2)^{-1}$, donc on en déduit que ${}^tRR = I$, par suite, R est orthogonale et RAQ est une matrice diagonale.

Exercice 173

1. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de u par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ alors on sait que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on a $a_{ij} = \langle u(e_j), e_i \rangle$, donc $\text{tr}(u) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), e_i \rangle$.
2. Si pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on a $\langle u(e_i), e_i \rangle = 0$, alors le problème est résolu. Sinon il existe $i \in \mathbb{N}_n$, tel que $\langle u(e_i), e_i \rangle \neq 0$, puis comme $\sum_{i=1}^n \langle u(e_i), e_i \rangle = 0$, alors il existe $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, avec $i \neq j$, tel que $\langle u(e_i), e_i \rangle > 0$ et $\langle u(e_j), e_j \rangle < 0$.
3. On a $\|e(\theta)\| = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.
4. On a $f(0) = \langle e_i, u(e_i) \rangle$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \langle e_j, u(e_j) \rangle$, donc d'après la question 2), on a $f(0) > 0$ et $f(\frac{\pi}{2}) < 0$. Comme f est continue, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, tel que $f(\theta) = 0$.
5. Pour conclure, nous allons procéder par récurrence sur la dimension de E , avec $\dim(E) \geq 2$.

Supposons que $\dim(E) = 2$. D'après la question précédente, il existe $e_1 \in E$, tel que $\|e_1\| = 1$ et $\langle u(e_1), e_1 \rangle = 0$. Soit $e_2 \in \{e_1\}^\perp$, tel que $\|e_2\| = 1$, alors (e_1, e_2) est une base orthonormale de E , donc on a $\text{tr}(u) = \langle u(e_1), e_1 \rangle + \langle u(e_2), e_2 \rangle = 0$, par suite, $\langle u(e_2), e_2 \rangle = 0$, car $\langle u(e_2), e_2 \rangle = 0$. Donc pour $\dim(E) = 2$ la propriété est vérifiée.

Supposons $n > 2$ et la propriété vraie pour tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $< n$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit u un endomorphisme de E de trace nulle. D'après la question précédente, il existe $e_1 \in E$, tel que $\|e_1\| = 1$ et $\langle u(e_1), e_1 \rangle = 0$. Soit $F = \{e_1\}^\perp$ et soit v l'endomorphisme de F défini pour tout $x \in F$, par $v(x) = p(u(x))$, où p est la projection orthogonale sur F . Soit $(e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de F , alors on a

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(v) &= \sum_{i=2}^n \langle v(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=2}^n \langle p(u(e_i)), e_i \rangle \\
 &= \sum_{i=2}^n \langle u(e_i), p(e_i) \rangle \quad (\text{car } p^* = p) \\
 &= \sum_{i=2}^n \langle u(e_i), e_i \rangle = \text{tr}(u) \quad (\text{car } p(e_i) = e_i \text{ et } \langle u(e_1), e_1 \rangle = 0)
 \end{aligned}$$

Ainsi on a $\text{tr}(v) = 0$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(e'_2, \dots, e'_n)$ de F , telle que pour tout i , on a $\langle u(e'_i), e'_i \rangle = 0$. Donc $(e_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une base orthonormale de

E dans laquelle les coefficients diagonaux de la matrice de u sont tous nuls.

Exercice 174

Soit A une matrice symétrique réelle et soit $r = rg(A)$, alors A possède r valeurs propres non nulles et non nécessairement deux à deux distinctes, notées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. Soit $D \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$. alors D et A sont semblables, donc $\text{tr}(A) = \text{tr}(D)$ et $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2)$. Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $J = \underbrace{(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}_{r \text{ fois}}$, alors d'après l'inégalité de

Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire usuel de $M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\text{tr}(JD)^2 \leq \text{tr}(J^2)\text{tr}(D^2)$$

avec $JD = D$, $J^2 = J$ et $\text{tr}(J) = r$, donc on a $\text{tr}(D)^2 \leq r\text{tr}(D^2)$. On en déduit donc que $\text{tr}(A)^2 \leq rg(A)\text{tr}(A^2)$.

Exercice 175

A est une matrice de projection orthogonale, si et seulement si, $A^2 = A$ et ${}^tA = A$. On a $a_{ji} = \alpha_j \alpha_i = \alpha_i \alpha_j = a_{ij}$, donc ${}^tA = A$. Posons $A^2 = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on a

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj} = \alpha_i \alpha_j \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \alpha_i \alpha_j = a_{ij} \quad (\text{car } \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = 1)$$

Donc on a $A^2 = A$.

Exercice 176

1. Il est clair que $\ker(u) \cap \ker(u^*) \subseteq \ker(u + u^*)$.

Soit $x \in \ker(u + u^*)$, alors on a $u^*(x) = -u(x)$, donc on a

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle u^*(u(x)), x \rangle = -\langle u^2(x), x \rangle = 0$$

Donc on en déduit que $u(x) = u^*(x) = 0$, par suite $x \in \ker(u) \cap \ker(u^*)$.

2. Supposons que $u + u^*$ est inversible et montrons que $\text{Im}(u) = \ker(u)$. On a $u^2 = 0$, donc $\text{Im}(u) \subseteq \ker(u)$. Soit $x \in \ker(u)$, alors $x = y + z$, avec $y \in \text{Im}(u)$ et $z \in \text{Im}(u)^\perp$, donc $x - y \in \text{Im}(u)^\perp$, or on sait que $\text{Im}(u)^\perp = \ker(u^*)$, donc $x - y \in \ker(u) \cap \ker(u^*)$. Comme $u + u^*$ est inversible, alors d'après la question précédente, $\ker(u) \cap \ker(u^*) = \{0\}$, donc on a $x = y$, par suite, $x \in \text{Im}(u)$. Ainsi, on a $\text{Im}(u) = \ker(u)$.

Réciproquement, supposons que $\text{Im}(u) = \ker(u)$, alors on a

$$\ker(u) \cap \ker(u^*) = \text{Im}(u) \cap \text{Im}(u)^\perp = \{0\}$$

donc d'après la question précédente, $\ker(u + u^*) = \{0\}$ et comme E est de dimension finie, alors $u + u^*$ est inversible.

Exercice 177

- a) Soit $x \in E$, donc si $u^*(x) = 0$, alors le résultat est trivial et si $u^*(x) \neq 0$, alors on a

$$\|u^*(x)\|^2 = \langle u^*(x), u^*(x) \rangle = \langle u(u^*(x)), x \rangle \leq \|u(u^*(x))\| \|x\|$$

Or, on a $\|u(u^*(x))\| \leq \|u^*(x)\|$, donc $\|u^*(x)\|^2 \leq \|u^*(x)\| \|x\|$ et comme $u^*(x) \neq 0$, alors on a $\|u^*(x)\| \leq \|x\|$.

- b) Supposons que $u(x) = x$, alors on a

$$\begin{aligned} \|u^*(x) - x\|^2 &= \|u^*\|^2 - 2 \langle u^*(x), x \rangle + \|x\|^2 \\ &= \|u^*\|^2 - 2 \langle x, u(x) \rangle + \|x\|^2 \\ &= \|u^*\|^2 - \|x\|^2 \quad (\text{car } u(x) = x) \end{aligned}$$

Comme $\|u^*\| \leq \|x\|$, alors $\|u^*(x) - x\|^2 \leq 0$, donc $u^*(x) = x$. Réciproquement, si $u^*(x) = x$, alors de la même manière on voit que $u(x) = x$.

- c) D'après la question précédente, on a

$$\ker(u - Id_E) = \ker[(u - Id_E)^*] = \text{Im}(u - Id_E)^\perp$$

d'où le résultat.

Exercice 178

1. a) $\Rightarrow$ b) Supposons que $p + q$ est un projecteur orthogonal, alors on a $(p + q)^2 = p + q$, donc $p \circ q + q \circ p = 0$. Comme p et q sont deux projecteurs orthogonaux, alors pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle p(x), q(x) \rangle &= \langle q(p(x)), x \rangle \\ &= - \langle p(q(x)), x \rangle = - \langle q(x), p(x) \rangle \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in E$, on a $\langle p(x), q(x) \rangle = 0$.

- b) $\Rightarrow$ c) Supposons que pour tout $x \in E$, on a $\langle p(x), q(x) \rangle = 0$, alors en particulier, pour tout $x \in E$, on a $\langle p(q(x)), q(x) \rangle = 0$. Afin d'alléger l'écriture, posons $y = q(x)$, alors on a

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p(y), y \rangle = \langle p(y), y - p(y) + p(y) \rangle \\ &= \langle p(y), y - p(y) \rangle + \langle p(y), p(y) \rangle \\ &= \|p(y)\|^2 \quad (\text{car } p(y) \in \text{Im}(p) \text{ et } y - p(y) \in \ker(p)) \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in E$, on a $\|p(q(x))\| = 0$, par conséquent, on a $p \circ q = 0$ et de la même manière on voit que $q \circ p = 0$.

- c) $\Rightarrow$ d) Supposons que $p \circ q = 0$. Soient $x \in \text{Im}(p)$ et $y \in \text{Im}(q)$, alors on a $p(x) = x$ et $q(y) = y$, donc on aura

$$\langle x, y \rangle = \langle p(x), q(y) \rangle = \langle x, (p \circ q)(x) \rangle = 0$$

d) $\Rightarrow$ a) Supposons que pour tout $x \in \text{Im}(p)$ et pour tout $y \in \text{Im}(q)$, on a $\langle x, y \rangle = 0$. Fixons $x \in E$, alors pour tout $y \in E$, on a $\langle p(x), q(y) \rangle = 0$, donc pour tout $y \in E$, on a $\langle q(p(x)), y \rangle = 0$, puis comme un produit scalaire est non dégénéré, alors $(q \circ p)(x) = 0$, ceci pour tout $x \in E$, donc $q \circ p = 0$. Le même raisonnement montre aussi que $p \circ q = 0$. On a donc $(p+q)^2 = p^2 + q^2 = p+q$, donc $p+q$ est un projecteur et on a $(p+q)^* = p^* + q^* = p+q$, donc $p+q$ est un projecteur orthogonal.

2. D'après d), on a $\text{Im}(p) \subseteq \text{Im}(q)^\perp$, donc $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) = \{0\}$, donc il reste à montrer que $\text{Im}(p+q) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$.

Il est clair que $\text{Im}(p+q) \subseteq \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$. Soit $x \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$, alors on a $x = p(y) + q(z)$ et comme $p \circ q = q \circ p = 0$, alors on a $p(x) = p(y)$ et $q(x) = q(z)$, par suite, on a $x = p(x) + q(x) = (p+q)(x)$, donc $x \in \text{Im}(p+q)$. Ainsi, nous avons établi que $\text{Im}(p+q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$. On a

$$\begin{aligned}\text{Im}(p+q) &= \text{Im}(p) + \text{Im}(q) = \ker(p)^\perp + \ker(q)^\perp \\ &= (\ker(p) \cap \ker(q))^\perp\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \ker(p) \cap \ker(q) = \text{Im}(p+q)^\perp = \ker(p+q).$$

Exercice 179

Déterminons d'abord une base orthonormale de F . Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et soit $x \in \mathbb{R}^4$, avec $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$, alors on a

$$\begin{aligned}x \in F &\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \\ &\iff x_3 = -x_1 \text{ et } x_4 = -x_2 \\ &\iff x = x_1(e_1 - e_3) + x_4(e_2 - e_4)\end{aligned}$$

Donc on en déduit donc que $F = \text{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$, avec

$$\langle e_1 - e_3, e_2 - e_4 \rangle = 0$$

Posons $v_1 = \frac{e_1 - e_3}{\sqrt{2}}$ et $v_2 = \frac{e_2 - e_4}{\sqrt{2}}$, alors (v_1, v_2) est une base orthonormale de F . Soit p la projection orthogonale sur F , alors pour tout $x \in E$, on a

$$p(x) = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2$$

Donc en particulier, on a

$$\begin{cases} p(e_1) = \langle e_1, v_1 \rangle v_1 + \langle e_1, v_2 \rangle v_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_3) \\ p(e_2) = \langle e_2, v_1 \rangle v_1 + \langle e_2, v_2 \rangle v_2 = \frac{1}{2}(e_2 - e_4) \\ p(e_3) = \langle e_3, v_1 \rangle v_1 + \langle e_3, v_2 \rangle v_2 = -\frac{1}{2}(e_1 - e_3) \\ p(e_4) = \langle e_4, v_1 \rangle v_1 + \langle e_4, v_2 \rangle v_2 = -\frac{1}{2}(e_2 - e_4) \end{cases}$$

Soit A la matrice de p par rapport à la base canonique, alors on a

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 180

1. On sait que si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice de p par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, alors on a $a_{ij} = \langle p(e_j), e_i \rangle$, donc on a

$$\begin{aligned} \text{tr}(p) &= \sum_{i=1}^n \langle p(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle p^2(e_i), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle p(e_i), p(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 \end{aligned}$$

Comme p est une projection orthogonale de rang 1, alors il existe $x_0 \in E$, tel que $\|x_0\| = 1$, $p(x_0) = x_0$ et pour tout $x \in E$, on a

$$p(x) = \langle x, x_0 \rangle x_0$$

Donc si $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base orthonormale de E , tel que $v_1 = x_0$, alors la matrice M de p par rapport à cette base est définie par $M = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$, donc on en déduit que $\text{tr}(p) = 1$. Nous avons donc établi que

$$\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = 1$$

2. Supposons que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = 1$, alors d'après la question précédente, on a $\text{tr}(p) = 1$. Comme p est un projecteur, alors on sait que $\text{rg}(p) = \text{tr}(p)$, donc $\text{rg}(p) = 1$. Soit $x_0 \in E$, tel que $\|x_0\| = 1$ et $p(x_0) = x_0$ et soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , telle que $e_1 = x_0$. Comme $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = 1$ et $\|p(e_1)\| = 1$, alors pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, on a $p(e_i) = 0$. On en déduit donc que $\ker(p) = \text{Vect}(\{e_2, \dots, e_n\}) = \{x_0\}^\perp$, avec $\{x_0\}^\perp = \text{Im}(p)^\perp$, donc p est un projecteur orthogonal.

Exercice 181

1. p et q sont des projecteurs orthogonaux, donc on a $p^* = p$ et $q^* = q$, par suite, on a $(p \circ q \circ p)^* = p^* \circ q^* \circ p^* = p \circ q \circ p$, donc $p \circ q \circ p$ est symétrique.
2. Comme E est de dimension finie, alors on a

$$(\operatorname{Im}(p) + \ker(q))^\perp = \operatorname{Im}(p)^\perp \cap \ker(q)^\perp$$

Puis comme p et q sont des projecteurs orthogonaux, alors on a

$$\operatorname{Im}(p)^\perp = \ker(p) \quad \text{et} \quad \ker(q)^\perp = \operatorname{Im}(q)$$

donc on en déduit que $(\operatorname{Im}(p) + \ker(q))^\perp = \ker(p) \cap \operatorname{Im}(q)$.

3. On pose $u = p \circ q \circ p$ et $v = p \circ q$ et on commence par montrer que $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(v)$. Comme $u = v \circ p$, alors on a $\operatorname{Im}(u) \subseteq \operatorname{Im}(v)$, réciproquement soit $x \in E$ et soit $y = v(x)$, d'après la question précédente, on a $x = (x_1 + x_2) + z$, où $x_1 \in \operatorname{Im}(p)$, $x_2 \in \ker(q)$ et $z \in \ker(p) \cap \operatorname{Im}(q)$, donc on a $y = (p \circ q)(x) = (p \circ q \circ p)(x_1)$, car $x_1 = p(x_1)$ et $(p \circ q)(z) = 0$, on voit alors que $y \in \operatorname{Im}(u)$ et par suite, on a $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(v)$.
D'autre part, on a $u^2 = v^2 \circ p$, donc $\operatorname{Im}(u^2) \subseteq \operatorname{Im}(v^2)$, puis comme u est diagonalisable, alors on a $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$, donc on a $\operatorname{Im}(u^2) = \operatorname{Im}(u)$, par suite, $\operatorname{Im}(u) \subseteq \operatorname{Im}(v^2)$. Comme $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(v)$, alors on voit que $\operatorname{Im}(v^2) = \operatorname{Im}(v)$, et comme E est de dimension finie, alors on a $E = \ker(v) \oplus \operatorname{Im}(v)$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes et non nulles de u , alors comme u est diagonalisable, on a

$$\operatorname{Im}(u) = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$$

On en déduit donc que

$$E = \ker(v) \oplus E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$$

Il en résulte que v est diagonalisable.

Exercice 182

1. On a $u^* \circ u + \alpha u + \beta u^* = 0$, donc on a aussi $u^* \circ u + \alpha u^* + \beta u = 0$, par suite, on a $(\alpha - \beta)(u - u^*) = 0$ et puisque $\alpha - \beta \neq 0$, alors on a $u^* = u$ et ainsi on a $u^2 + (\alpha + \beta)u = 0$.
Si $\alpha + \beta = 0$, alors $u^2 = 0$, puis comme $u^* = u$, alors $u = 0$.
Si $\alpha + \beta \neq 0$, on pose $p = -\frac{1}{\alpha + \beta}u$, alors on a $p^2 = p$ et $p^* = p$, donc p est une projection orthogonale et on a $u = \lambda p$, avec $\lambda = -(\alpha + \beta)$.

2. On suppose $\alpha = \beta$, alors on aura $u^* \circ u + \alpha u^* + \alpha u = 0$.

Si $\alpha = 0$, alors $u^* \circ u = 0$, donc $u = 0$, par suite le résultat est trivial.

Si $\alpha \neq 0$, alors pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in \ker(u)$, on a

$$\begin{aligned} \langle u(x), y \rangle &= -\frac{1}{\alpha} \langle u^*(u(x)), y \rangle - \langle u^*(x), y \rangle \\ &= -\frac{1}{\alpha} \langle u(x), u(y) \rangle - \langle x, u(y) \rangle = 0 \quad (\text{car } u(y) = 0) \end{aligned}$$

Donc $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont orthogonaux.

Exercice 183

1. a) Il est clair que $\ker(u) \subseteq \ker(u^* \circ u)$. Soit $x \in \ker(u^* \circ u)$, alors on a

$$0 = \langle (u^* \circ u)(x), x \rangle = \langle u(x), u(x) \rangle = \|u(x)\|^2$$

Donc on voit que $u(x) = 0$, donc $x \in \ker(u)$ et ainsi on a

$$\ker(u^* \circ u) = \ker(u)$$

On en déduit qu'on a aussi

$$\text{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp = \ker(u^* \circ u)^\perp = \text{Im}(u^* \circ u)$$

b) Il suffit d'appliquer ce qui précède à v , avec $v = u^*$.

2. i) $\Rightarrow$ ii) Supposons que $u \circ u^* \circ u = u$, alors on a

$$(u \circ u^*)^2 = (u \circ u^*) \circ (u \circ u^*) = (u \circ u^* \circ u) \circ u^* = u \circ u^*$$

donc $u \circ u^*$ est un projecteur orthogonal, car $u \circ u^*$ est symétrique.

ii) $\Rightarrow$ iii) Supposons que $u \circ u^*$ est un projecteur orthogonal et montrons que $u^* \circ u$ l'est aussi. D'abord comme $u^* \circ u$ est symétrique, alors il est diagonalisable. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre non nulle de $u^* \circ u$, alors il existe $x \in E$, avec $\|x\| = 1$, tel que $(u^* \circ u)(x) = \lambda x$, donc on a $(u \circ u^*)(u(x)) = \lambda u(x)$. D'après la question 1)a), on a $\ker(u^* \circ u) = \ker(u)$, puis comme $(u^* \circ u)(x) \neq 0$, alors $u(x) \neq 0$, donc λ est une valeur propre de $u \circ u^*$, par suite, on a $\lambda = 1$, car $u \circ u^*$ est un projecteur. Ainsi, on voit que les valeurs propres de $u^* \circ u$ sont 1 et 0, puis puisque $u^* \circ u$ est diagonalisable, alors on obtient $(u^* \circ u)^2 = u^* \circ u$.

iii) $\Rightarrow$ iv) Soit $x \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} x \in \ker(u)^\perp &\iff x \in \text{Im}(u^*) \quad (\text{car } \ker(u)^\perp = \text{Im}(u^*)) \\ &\iff x \in \text{Im}(u^* \circ u) \quad (\text{car } \text{Im}(u^* \circ u) = \text{Im}(u^*)) \\ &\iff (u^* \circ u)(x) = x \quad (\text{car } u^* \circ u \text{ est un projecteur}) \\ &\implies \langle (u^* \circ u)(x), x \rangle = \|x\|^2 \\ &\implies \|u(x)\|^2 = \|x\|^2 \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que $\|u(x)\| = \|x\|$ et montrons que $x \in \ker(u)^\perp$. On a $x \in \ker(u)^\perp = \text{Im}(u^*)$ et $\text{Im}(u^*) = \text{Im}(u^* \circ u)$, donc il suffit de montrer que $x \in \text{Im}(u^* \circ u)$, puis comme $u^* \circ u$ est un projecteur, alors il suffit de montrer que $(u^* \circ u)(x) = x$.

On pose $v = u^* \circ u$, alors on a

$$\begin{aligned}\|v(x) - x\|^2 &= \|v(x)\|^2 - 2\langle v(x), x \rangle + \|x\|^2 \\ &= \|v(x)\|^2 - 2\|u(x)\|^2 + \|x\|^2 \\ &\leq 2(\|x\|^2 - \|u(x)\|^2) \quad (\text{car } \|v(x)\| \leq \|x\|)\end{aligned}$$

Puisque $\|u(x)\| = \|x\|$, alors $\|v(x) - x\|^2 = 0$, donc on a $v(x) = x$, d'où le résultat.

iv) $\Rightarrow$ i) Supposons que $\ker(u)^\perp = \{x \in E : \|u(x)\| = \|x\|\}$, alors pour tout $x \in E$, on a $\|u(u^*(x))\| = \|u^*(x)\|$, car $\ker(u)^\perp = \text{Im}(u^*)$. Soit $x \in E$, puisque $E = \text{Im}(u^*) \oplus \ker(u)$, alors on a $x = y + z$, avec $y \in \text{Im}(u^*)$ et $z \in \ker(u)$, donc on aura $(u \circ u^* \circ u)(x) = u(x)$, si et seulement si, $(u \circ u^* \circ u)(y) = u(y)$, par suite, il suffit de montrer que pour tout $x \in \text{Im}(u^*)$, on a $(u \circ u^* \circ u)(x) = u(x)$.

Posons $v = u \circ u^* \circ u$, alors pour tout $x \in E$, on a

$\|v(x)\| = \|(u^* \circ u)(x)\|$, donc pour $x \in \text{Im}(u^*)$, on a

$$\begin{aligned}\|v(x) - u(x)\|^2 &= \|v(x)\|^2 - 2\|(u^* \circ u)(x)\|^2 + \|u(x)\|^2 \\ &= \|u(x)\|^2 - \|(u^* \circ u)(x)\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|(u^* \circ u)(x)\|^2\end{aligned}$$

D'autre part, pour $x \in \text{Im}(u^*)$, on a aussi

$$\begin{aligned}\|(u^* \circ u)(x) - x\|^2 &= \|(u^* \circ u)(x)\|^2 - 2\|u(x)\|^2 + \|x\|^2 \\ &= \|(u^* \circ u)(x)\|^2 - \|x\|^2 \quad (\text{car } \|u(x)\| = \|x\|)\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aura

$$\begin{aligned}\|(u^* \circ u)(x)\|^2 &= \langle (u^* \circ u)(x), (u^* \circ u)(x) \rangle \\ &= \langle u(x), (u \circ u^* \circ u)(x) \rangle \\ &\leq \|(u \circ u^* \circ u)(x)\| \|u(x)\|\end{aligned}$$

On a $\|(u \circ u^* \circ u)(x)\| = \|(u^* \circ u)(x)\|$ et $\|u(x)\| = \|x\|$, donc on en déduit que $\|(u^* \circ u)(x)\| \leq \|x\|$, par suite, on a $\|(u^* \circ u)(x) - x\|^2 \leq 0$. Il en résulte que pour tout $x \in \text{Im}(u^*)$, on a $(u^* \circ u)(x) = x$, donc pour tout $x \in \text{Im}(u^*)$, on a $v(x) = u(x)$, d'où le résultat.

Exercice 184

1.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_1}(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_2}(x) = x_1 + \alpha x_2 + (\alpha + 1)x_3 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_3}(x) = 2x_1 + (\alpha + 1)x_2 + (\alpha + \beta + 3)x_3 \end{cases}$$

Donc la matrice M de q par rapport la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & \alpha + 1 \\ 2 & \alpha + 1 & \alpha + \beta + 3 \end{pmatrix}$$

2. On a $\det(M) = (\alpha - 1)\beta$. On sait que q est non dégénérée, si et seulement si, $\det(M) \neq 0$, donc pour $\alpha \neq 1$ et $\beta \neq 0$, q est non dégénérée.

3. a) Si $\alpha = \beta = 0$, alors on a

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 \end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^3$, alors on a

$$\begin{aligned} x \in C_q &\iff (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 = 0 \\ &\iff x_1 + x_2 + 2x_3 = x_2 + x_3 \text{ ou } x_1 + x_2 + 2x_3 = -x_2 - x_3 \\ &\iff x_1 + x_3 = 0 \text{ ou } x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{aligned}$$

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors on a $C_q = H_1 \cup H_2$, avec $H_1 = \text{Vect}(e_2 - 2e_1, e_3 - 3e_1)$ et $H_2 = \text{Vect}(e_2, e_1 - e_3)$. On a $H_1 \not\subseteq H_2$ et $H_2 \not\subseteq H_1$, donc C_q n'est pas un sous-espace vectoriel.

4. On suppose $\alpha \neq 1$ et $\beta \neq 0$.

a) En appliquant la méthode de Gauss à q , on aura

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + \alpha x_2^2 + (\alpha + \beta + 3)x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2(\alpha + 1)x_2x_3 \\ &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3) + \alpha x_2^2 + (\alpha + \beta + 3)x_3^2 + 2(\alpha + 1)x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + (\alpha - 1)x_2^2 + (\alpha + \beta - 1)x_3^2 + 2(\alpha - 1)x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + (\alpha - 1)(x_2 + x_3)^2 + \beta x_3^2 \end{aligned}$$

b) q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$, si, et seulement si, $\alpha > 1$ et $\beta > 0$.

c) Pour obtenir une base q -orthogonale, on pose

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ X_2 = x_2 + x_3 \\ X_3 = x_3 \end{cases}$$

Donc, on aura

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - X_2 - X_3 \\ x_2 = X_2 - X_3 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Donc, la matrice P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage d'une base q -orthogonale (v_1, v_2, v_3) à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, ainsi, on aura

$$\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = -e_1 + e_2 \\ v_3 = -e_1 - e_2 + e_3 \end{cases}$$

D'après la décomposition de Gauss obtenue précédemment, on a

$$q(v_1) = 1, \quad q(v_2) = \alpha - 1 \quad \text{et} \quad q(v_3) = \beta$$

donc (v_1, v_2, v_3) définit une base q -orthonormale, si, et seulement si, $\alpha = 2$ et $\beta = 1$.

5. Dans toute la suite, on suppose $\alpha = 2$ et $\beta = 1$.

a) $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, donc, d'après la question 3b, q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

b) Soit f la forme polaire associée à q et soit $x \in \mathbb{R}^3$, avec $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, alors on a

$$\begin{aligned} x \in F^{\perp_q} &\iff \begin{cases} f(x, e_1 + e_2) = 0 \\ f(x, e_1 - e_3) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -3z \\ x = 2z \end{cases} \\ &\iff F^{\perp_q} = \text{Vect}(2e_1 - 3e_2 + e_3) \end{aligned}$$

- c) F est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et $x_0 = 2e_1 - 3e_2 + e_3$ est un vecteur q -orthogonal à F , donc pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a

$$p_F(x) = x - \frac{\langle x, x_0 \rangle_q}{q(x_0)} x_0$$

Donc, en particulier, on aura

$$\begin{cases} p_F(e_1) = e_1 - \frac{1}{6}(2e_1 - 3e_2 + e_3) = \frac{1}{6}(4e_1 + 3e_2 - e_3) \\ p_F(e_2) = e_2 + \frac{1}{6}(2e_1 - 3e_2 + e_3) = \frac{1}{6}(2e_1 + 3e_2 + e_3) \\ p_F(e_3) = e_3 - \frac{1}{6}(2e_1 - 3e_2 + e_3) = \frac{1}{6}(-2e_1 + 3e_2 + 5e_3) \end{cases}$$

Ainsi, on aura

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- e) A n'est pas une matrice symétrique, car (e_1, e_2, e_3) n'est pas une base q -orthonormale.
f) Soit P la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (v_1, v_2, v_3) , alors, d'après la question 3c, on sait que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, d'après la formule de changement de base, on aura

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- g) B est symétrique, car (v_1, v_2, v_3) est une base q -orthonormale.

Exercice 185

D'après l'exercice 95, ${}^tAA$ et A^tA ont les mêmes valeurs propres.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres communes à ${}^tAA$ et A^tA et soit

$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, alors, comme ${}^tAA$ et A^tA sont symétriques, il existe deux matrices orthogonales P et Q , telles que ${}^tAA = {}^tPDP$ et $A^tA = {}^tQDQ$.

Il en résulte donc que

$${}^tAA = ({}^tQP)(A^tA)({}^tQP)^{-1}$$

On a $({}^tQP)^t({}^tQP) = ({}^tQP)({}^tPQ) = I_n$, donc on en déduit que ${}^tAA$ et A^tA sont orthogonalement semblables.

Exercice 186

1. A est une matrice symétrique et positive, donc A est diagonalisable et toutes les valeurs propres de A sont positives. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres, non nécessairement distinctes, de A et soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, alors il existe une matrice orthogonale P , telle que $A = PD^tP$. On a alors

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}((PD^tP)B) = \text{tr}((PD)(^tPB)) = \text{tr}((^tPBP)D)$$

Donc si on pose $^tPBP = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors on a $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \lambda_i$.

Comme B est symétrique positive, alors ^tPBP est symétrique positive, donc pour tout i , on a $\alpha_{ii} \geq 0$, il en résulte donc que $\text{tr}(AB) \geq 0$.

On a aussi

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \lambda_i \right) \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \right) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)$$

et on a $\text{tr}(B) = \text{tr}(^tPBP)$, donc on voit que $\text{tr}(AB) \leq \text{tr}(A)\text{tr}(B)$.

2. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz par rapport au produit scalaire usuel de $M_n(\mathbb{R})$ et en tenant compte que A et B sont symétriques, on obtient $\text{tr}(AB)^2 \leq \text{tr}(A^2)\text{tr}(B^2)$. D'autre part, comme $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, alors on a $\text{tr}(AB + BA) = 2\text{tr}(AB)$, donc on en déduit que

$$\text{tr}(AB + BA)^2 \leq 4\text{tr}(A^2)\text{tr}(B^2)$$

3. Puisque A et B sont symétriques et positives et comme $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, alors on voit facilement que $\alpha A + \beta B$ est symétrique positive, donc si l'une des matrices A ou B est non inversible, alors le résultat est trivial. On peut donc supposer que A et B sont définies positives.

Comme A est symétrique définie positive et B symétrique, alors d'après le corollaire 9.4.1, il existe D diagonale et il existe P inversible, telles que $A = ^tPP$ et $B = ^tPDP$. On pose $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, alors, comme B est définie positive, pour tout i , on a $\lambda_i > 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \det(A)^\alpha \det(B)^\beta &= \det(^tPP)^\alpha \det(^tPDP)^\beta \\ &= \det(P)^{2\alpha} \det(P)^{2\beta} \det(D)^\beta \\ &= \det(P)^{2\alpha+2\beta} \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^\beta \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\det(\alpha A + \beta B) &= \det(\alpha {}^t P P + \beta {}^t P D P) \\ &= \det({}^t P (\alpha I_n + \beta D) P) \\ &= \det(P)^2 \det(\alpha I_n + \beta D) \\ &= \det(P)^2 \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta \lambda_i)\end{aligned}$$

On est donc amené à montrer que $\prod_{i=1}^n (\alpha + \beta \lambda_i) \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^\beta$. Pour cela, on utilise le fait que la fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout i , on a $\ln(\alpha + \beta \lambda_i) \geq \beta \ln(\lambda_i)$, par suite, on a

$$\sum_{i=1}^n \ln(\alpha + \beta \lambda_i) \geq \beta \sum_{i=1}^n \ln(\lambda_i)$$

Il en résulte que

$$\ln \left(\prod_{i=1}^n (\alpha + \beta \lambda_i) \right) \geq \ln \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^\beta$$

D'où le résultat.

Exercice 187

Puisque u est défini positif, alors l'application $\varphi_u : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in E \times E$, par $\varphi_u(x, y) = \langle u(x), y \rangle$, définit un produit scalaire sur E . Donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $x \in E$, on a

$$\varphi_u(u^{-1}(x), x)^2 \leq \varphi_u(u^{-1}(x), u^{-1}(x)) \varphi_u(x, x)$$

Donc on en déduit qu'on a

$$\|x\|^4 \leq \langle x, u^{-1}(x) \rangle \langle u(x), x \rangle$$

Il y a égalité, si et seulement si, $(x, u^{-1}(x))$ est lié, donc l'égalité est réalisée, si et seulement si, $x = 0$ ou x est un vecteur propre de u .

Exercice 188

1. Soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices antisymétrique, alors on sait que $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on a

$$A = \frac{A + {}^t A}{2} + \frac{A - {}^t A}{2}$$

avec $\frac{A + {}^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{A - {}^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Donc si p est la projection orthogonale sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a $p(A) = \frac{A + {}^tA}{2}$, par suite, la distance d de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie par

$$\begin{aligned} d &= \|A - p(A)\| = \frac{1}{2} \|A - {}^tA\| = \frac{1}{2} \sqrt{-\text{tr}((A - {}^tA)^2)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - a_{ji})^2} \end{aligned}$$

2. On a $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, avec $a_{ij} = i - j$, donc d'après la question précédente, on a

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i - j)^2}$$

avec

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i - j)^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i^2 - 2ij + j^2) \\ &= 2n \sum_{i=1}^n i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 \\ &= \frac{2}{3} n^4 + n^3 + \frac{1}{3} n^2 - \frac{1}{2} (n^4 + 2n^3 + n^2) \end{aligned}$$

On en déduit donc que $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n\sqrt{6}}{12} \sqrt{n^2 - 1}$.

Exercice 189

1. On pose $F = \{(x + y, x, 2x + y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ et $v = (2, 1, 1)$, alors F est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et on a $F = \text{Vect}((1, 1, 2), (1, 0, 1))$. On a

$$\begin{aligned} d(v, F)^2 &= \inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \|(x + y, x, 2x + y) - (2, 1, 1)\|^2 \\ &= \inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} ((x + y - 2)^2 + (x - 1)^2 + (2x + y - 1)^2) \end{aligned}$$

On est donc amené à déterminer $d(v, F)$. Soit $x_0 \in F^\perp$ et soit p la projection orthogonale sur F , alors on sait que

$$p(v) = v - \frac{\langle v, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0 \quad \text{et} \quad d(v, F) = \|v - p(v)\|$$

Donc on en déduit que

$$d(v, F) = \frac{|\langle v, x_0 \rangle|}{\|x_0\|}$$

On voit facilement que $x_0 = (1, 1, -1)$ est un vecteur orthogonal à F , donc $d(v, F) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. Soit $E = \mathbb{R}_2[t]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2, muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Soient e_1 , e_2 et f les fonctions définies pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$ et $f(t) = t^2$. Soit $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$, alors on a

$$d(f, F)^2 = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|f - ae_1 - be_2\|^2 = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - a - bt)^2 dt$$

On est donc amené à déterminer $d(f, F)$. Pour cela, on remarque que F est un hyperplan de E et on voit facilement que $g \in F^\perp$, où g est la fonction définie par $g(t) = 1 - 6t + 6t^2$, donc si p est la projection orthogonale sur F , alors on a

$$p(f) = f - \frac{\langle f, g \rangle}{\|g\|^2} g$$

On en déduit donc qu'on a

$$d(f, F) = \|f - p(f)\| = \frac{|\langle f, g \rangle|}{\|g\|}$$

Donc en faisant le calcul, on trouve $d(f, F) = \frac{\sqrt{5}}{30}$, par suite, on a

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - a - bt)^2 dt = \frac{1}{180}$$

3. Soit $E = \mathcal{C}([- \pi, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

Soient e_1 , e_2 et f les fonctions définies pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $e_1(t) = \cos t$, $e_2(t) = \sin t$ et $f(t) = 1$. Soit $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$, alors on a

$$d(f, F)^2 = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|f - ae_1 - be_2\|^2 = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - a \cos t - b \sin t)^2 dt$$

On remarque facilement que $f \in F^\perp$, donc $d(f, F) = \|f\| = \sqrt{2\pi}$, par suite, on a

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - a \cos t - b \sin t)^2 dt = 2\pi$$

4. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Soient e_1, e_2 et f les fonctions définies pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$ et $f(t) = t \ln(t)$. Soit $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$, alors on a

$$d(f, F)^2 = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|f - ae_1 - be_2\|^2 = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t \ln(t) - a - bt)^2 dt$$

En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base (e_1, e_2) , on obtient une base orthonormale (v_1, v_2) de F , avec $v_1 = e_1$ et $v_2 = \sqrt{3}(2t - 1)$, donc si p est la projection orthogonale sur F , alors on a

$$p(f) = \langle f, v_1 \rangle v_1 + \langle f, v_2 \rangle v_2$$

Donc en faisant le calcul, on trouve $p(f)(t) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6}t$, par suite, on a

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t \ln(t) - a - bt)^2 dt = \frac{1}{108}$$

Exercice 190

1. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_{n-p})$ une base orthonormale de $F^\perp$ et soit p la projection orthogonale sur F , alors pour tout $x \in E$, on a

$$x - p(x) = \sum_{j=1}^{n-p} \langle x, v_j \rangle v_j$$

Donc on en déduit que

$$d(x, F)^2 = \sum_{j=1}^{n-p} (\langle x, v_j \rangle)^2$$

Donc en particulier, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d(e_i, F)^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-p} (\langle e_i, v_j \rangle)^2 = \sum_{j=1}^{n-p} \left(\sum_{i=1}^n (\langle e_i, v_j \rangle)^2 \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n-p} \|v_j\|^2 = n - p \quad (\text{car pour tout } j, \|v_j\| = 1) \end{aligned}$$

2. On suppose, par l'absurde, que pour tout i , on a $d(e_i, F) < \sqrt{\frac{n-p}{n}}$, alors on aura $\sum_{i=1}^n d(e_i, F)^2 < n-p$, ce qui est absurde d'après la question précédente.

Exercice 191

1. En faisant le calcul, on voit facilement que $A^2 = A$, donc u est un projecteur. On voit aussi que $\ker(u) = \text{Vect}(4e_1 + e_2 - e_3)$ et que $\text{Im}(u) = \text{Vect}(e_1, e_2)$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. La matrice d'une projection orthogonale par rapport à une base orthonormale est symétrique. La base canonique est orthonormale et ${}^tA \neq A$, donc u n'est pas un projecteur orthogonal.
3. a) En appliquant l'algorithme de Gauss, on aura

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 - 3x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 - 3x_2 + x_3)^2 + 2(x_2 + x_3)^2 + 3x_3^2 \end{aligned}$$

On en déduit que q a pour signature $(3, 0)$, donc q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

- b) Soit M la matrice de q par rapport à la base canonique, alors en faisant le calcul, on obtient

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 11 & -1 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

u est symétrique par rapport au produit scalaire défini par q , si et seulement si, pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^3$, on a

$${}^t(AX)MY = {}^tXM(AY)$$

Donc si et seulement si, pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^3$, on a

$${}^tX({}^tAM)Y = {}^tX(MA)Y$$

Il en résulte donc que u est q -symétrique, si et seulement si,

$${}^tAM = MA$$

En faisant le calcul, on voit bien que ${}^tAM = MA$, donc u est un projecteur q -orthogonal.

Exercice 192

1. Soit F le plan d'équation $x + y + z = 0$, alors F est un hyperplan de E et on a $e_1 + e_2 + e_3 \in F^\perp$. Soit $v = e_1 + e_2 + e_3$ et soit p la projection orthogonale sur F , alors on a

$$\begin{cases} p(e_1) = e_1 - \frac{\langle e_1, v \rangle}{\|v\|^2}v = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 - e_3) \\ p(e_2) = e_2 - \frac{\langle e_2, v \rangle}{\|v\|^2}v = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 - e_3) \\ p(e_3) = e_3 - \frac{\langle e_3, v \rangle}{\|v\|^2}v = \frac{1}{3}(-e_1 - e_2 + 2e_3) \end{cases}$$

Donc la matrice A de p par rapport à la base canonique est définie par

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Soit G le plan d'équation $x - z = 0$, alors G est un hyperplan de E et on a $e_1 - e_3 \in G^\perp$. Soit $w = e_1 - e_3$ et soit s la symétrie orthogonale par rapport à G , alors on a

$$\begin{cases} s(e_1) = e_1 - 2 \frac{\langle e_1, w \rangle}{\|w\|^2} w = e_3 \\ s(e_2) = e_2 - 2 \frac{\langle e_2, w \rangle}{\|w\|^2} w = e_2 \\ s(e_3) = e_3 - 2 \frac{\langle e_3, w \rangle}{\|w\|^2} w = e_1 \end{cases}$$

Donc la matrice B de s par rapport à la base canonique est définie par

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 193

B est symétrique, donc les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de B sont réelles et si $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, alors il existe une matrice orthogonale P , telle que $B = PD^tP$. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $B^k = 0$, alors on aura aussi $D^k = 0$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on a $\lambda_i^k = 0$. Ainsi, on en déduit que $D = 0$, donc $B = 0$ et par conséquent, A est antisymétrique.

Exercice 194

- On a $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$, comme $B - A$ est inversible, donc $A^{-1} - B^{-1}$ est inversible et on a $(A^{-1} - B^{-1})^{-1} = B(B - A)^{-1}A$.
- Comme M est symétrique, alors M^{-1} est symétrique. Soit $X \in \mathbb{R}^n$, avec $X \neq 0$, alors puisque M est définie positive, on a

$${}^t(M^{-1}X)M(M^{-1}X) > 0$$

Comme ${}^tM^{-1} = M^{-1}$, alors on a ${}^tXM^{-1}X > 0$, donc M^{-1} est définie positive.

- D'après la question 1), on a

$$\begin{aligned} (A^{-1} - B^{-1})^{-1} &= B(B - A)^{-1}A \\ &= ((B - A) + A)(B - A)^{-1}A \\ &= A + A(B - A)^{-1}A \end{aligned}$$

Comme $B - A$ est définie positive, alors d'après 2), $(B - A)^{-1}$ est aussi définie positive et comme A est symétrique, alors pour tout $X \neq 0$, on a

$${}^tX(A(B - A)^{-1}A)X = {}^t(AX)(B - A)^{-1}(AX)$$

avec $AX \neq 0$, car A est définie positive, donc ${}^t(AX)(B - A)^{-1}(AX) > 0$, par suite $A(B - A)^{-1}A$ est définie positive. Il en résulte que $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ est la somme de deux matrices définies positives, donc $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ est définie positive.

Exercice 195

A est symétrique, donc les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de A sont réelles et si $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, alors il existe une matrice orthogonale P , telle que $A = PD^tP$, donc on a $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2)$. Par ailleurs, on a

$$\text{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \quad \text{et} \quad \text{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

Exercice 196

1. E est de dimension finie, donc on a

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim \ker(f - \text{Id}_E) + \dim \text{Im}(f - \text{Id}_E) \\ &= \dim \ker(f - \text{Id}_E) + \dim \ker(f - \text{Id}_E)^\perp \end{aligned}$$

Donc $\dim \ker(f - \text{Id}_E)^\perp = \dim \text{Im}(f - \text{Id}_E)$, par suite, il suffit de montrer que

$$\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subseteq \ker(f - \text{Id}_E)^\perp$$

Pour cela, soit $x \in E$ et soit $y \in \ker(f - \text{Id}_E)$, alors on a

$$\begin{aligned} \langle f(x) - x, y \rangle &= \langle f(x), y \rangle - \langle x, y \rangle \\ &= \langle x, f^*(y) \rangle - \langle x, y \rangle \\ &= \langle x, f^{-1}(y) \rangle - \langle x, y \rangle \quad (\text{car } f^* = f^{-1}) \\ &= \langle x, f^{-1}(y) - y \rangle = 0 \quad (\text{car } f^{-1}(y) = y) \end{aligned}$$

Il en résulte que $\text{Im}(f - \text{Id}_E) = \ker(f - \text{Id}_E)^\perp$, donc on a

$$E = \ker(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(f - \text{Id}_E)$$

2. Pour $x \in \ker(f - \text{Id}_E)$, on a $f(x) = x$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^k(x) = x$, ainsi, on aura $g_n(x) = x$.

Pour $x \in \text{Im}(f - \text{Id}_E)$, avec $x = (f - \text{Id}_E)(y)$, on a

$$g_n(x) = \frac{1}{n}(\text{Id}_E + f + \dots + f^{n-1})(f - \text{Id}_E)(y) = \frac{1}{n}(f^n - \text{Id}_E)(y)$$

3. Soit $x \in E$, avec $x = y + (f - Id_E)(z)$, où $y \in \ker(f - Id_E)$, alors d'après 2), on a $g_n(x) = y + \frac{1}{n}(f^n - Id_E)(z)$. Comme $\|f^n(z)\| = \|z\|$, alors on a

$$\frac{1}{n}\|f^n(z) - z\| \leq 2\frac{\|z\|}{n}$$

donc on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}(f^n - Id_E)(z) = 0$. Soit p la projection orthogonale sur $\ker(f - Id_E)$, alors d'après ce qui précède, pour tout $x \in E$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = p(x)$ et comme E est de dimension finie, (les topologies forte et uniforme coïncident sur $L(E)$), alors on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = p$.

Exercice 197

1. Comme A est symétrique positive, alors les valeurs propres de A , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont réelles et positives. Donc si on pose

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \text{ et } \Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$$

alors il existe une matrice orthogonale P , telle que

$$A = PDP^{-1} = P\Delta^2P^{-1} = (P\Delta P^{-1})^2$$

Soit $R = P\Delta P^{-1}$, avec $R = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors R est symétrique, car $P^{-1} = {}^tP$, et on a $A = R^2$, donc pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on a $a_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \alpha_{kj} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{kj}$. On a $A \odot B = (a_{ij} b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, donc il s'agit de montrer que

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2} a_{ij} b_{ij} x_i x_j \geq 0$$

Pour cela, pour tout k , on pose $Y_k = (y_{k,1}, y_{k,2}, \dots, y_{k,n})$, où pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on a $y_{k,i} = \alpha_{k,i} x_i$, alors comme B est positive, on a

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2} b_{ij} y_{k,i} y_{k,j} \geq 0, \text{ donc on a}$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2} b_{ij} y_{k,i} y_{k,j} \geq 0$$

En remplaçant les $y_{k,i}$ par leurs valeurs, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2} b_{ij} y_{k,i} y_{k,j} &= \sum_{k=1}^n \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2} b_{ij} \alpha_{k,i} \alpha_{k,j} x_i x_j \\ &= \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2} \sum_{k=1}^n (\alpha_{k,i} \alpha_{k,j}) b_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2} a_{ij} b_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

On en déduit donc que $A \odot B$ est symétrique positive,

2. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on pose $A \odot^0 A = I$ et pour $k \geq 1$,

$$A \odot^k A = \underbrace{A \odot A \odot \cdots \odot A}_{k \text{ fois}}$$

alors on voit facilement, par récurrence sur k , que $A \odot^k A = (a_{ij}^k)_{1 \leq i, j \leq n}$. D'autre part, d'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A \odot^k A$ est symétrique positive, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n définie par

$$A_n = \sum_{k=0}^n \frac{A \odot^k A}{k!}$$

est symétrique positive et on a $(A_n)_{ij} = \sum_{k=0}^n \frac{a_{ij}^k}{k!}$. Donc on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = M$, où $M = (e^{a_{ij}})_{1 \leq i, j \leq n}$, puis comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est symétrique positive, alors M est symétrique positive.

Exercice 198

1. Comme A est symétrique positive, alors $\text{tr}(A) \geq 0$, donc si $\det(A) = 0$, alors l'inégalité est triviale. On peut donc supposer que $\det(A) \neq 0$, donc les valeurs propres de A , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, sont réelles et strictement positives. On a

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{et} \quad \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

Puis comme la fonction $-\ln$ est convexe, alors d'après l'inégalité de Jensen, on a

$$-\ln \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{n} \right) \leq -\frac{\ln(\lambda_1) + \ln(\lambda_2) + \cdots + \ln(\lambda_n)}{n}$$

On en déduit donc que $\ln \left(\frac{\text{tr}(A)}{n} \right) \geq \ln(\det(A)^{\frac{1}{n}})$, donc on voit que $\text{tr}(A) \geq n \det(A)^{\frac{1}{n}}$.

2. ${}^tAA$ est symétrique positive, donc d'après la question précédente, on a $\text{tr}({}^tAA) \geq n \det({}^tAA)^{\frac{1}{n}}$, avec $\det({}^tAA) = \det(A)^2$, d'où le résultat.

Exercice 199

1. Supposons que A est inversible et montrons que BA^{-1} est orthogonale. On a

$${}^t(BA^{-1})(BA^{-1}) = {}^t(A^{-1})({}^tBB)A^{-1} = ({}^tA)^{-1}({}^tAA)A^{-1} = I_n$$

donc BA^{-1} est orthogonale et on a $B = PA$, où $P = BA^{-1}$.

2. D'après l'exercice 9.6.1, on a $A = \Omega_1 S_1$ et $B = \Omega_2 S_2$, où Ω_1 et Ω_2 sont orthogonales, S_1 et S_2 sont symétriques positives. Comme ${}^t A A = {}^t B B$ et comme ${}^t \Omega_1 \Omega_1 = {}^t \Omega_2 \Omega_2$, alors $S_1^2 = S_2^2$, puis comme S_1 et S_2 sont symétriques positives, alors on a $S_1 = S_2$. On en déduit donc que $B = (\Omega_2 {}^t \Omega_1) A$, avec $\Omega_2 {}^t \Omega_1$ orthogonale, car Ω_1 et Ω_2 sont orthogonales.

Exercice 200

- On a ${}^t(\exp(A)) = \exp({}^t A)$ et comme A est symétrique, alors on a ${}^t(\exp(A)) = \exp(A)$, donc $\exp(A)$ est symétrique. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, les valeurs propres de A , non nécessairement deux à deux distinctes, alors $\exp(A)$ a pour valeurs propres $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}$, qui sont strictement positives, donc $\exp(A)$ est définie positive.
- A est définie positive, donc les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de A sont strictement positives, donc pour chaque i , on a $\lambda_i = e^{\mu_i}$, où $\mu_i = \ln(\lambda_i)$. Soient $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et $\Delta = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, alors on a $D = \exp(\Delta)$. Soit P une matrice orthogonale, telle que $A = P D P^{-1}$, alors on a $A = P \exp(\Delta) P^{-1} = \exp(P \Delta P^{-1})$, donc il suffit de prendre $M = P \Delta P^{-1}$.
- a) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A , alors d'après le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, tel que pour tout i , on a $P(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$. Soient $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et $\Delta = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})$, alors on a $D = P(\Delta)$ et $\Delta = \exp(D)$. Soit Ω une matrice orthogonale, telle que $A = \Omega D \Omega^{-1}$, alors on a

$$A = \Omega P(\Delta) \Omega^{-1} = P(\Omega \Delta \Omega^{-1}) = P(\Omega \exp(D) \Omega^{-1}) = P(\exp(A))$$

- Soit λ une valeur propre de A , alors e^λ est une valeur propre de $\exp(A)$, car $\exp(A) = \exp(B)$, donc il existe une valeur propre μ de B , telle que $e^\lambda = e^\mu$, par suite on a $\mu = \lambda$. On en déduit que A et B ont les mêmes valeurs propres. D'autre part, comme $\exp(A) = \exp(B)$, alors B commute avec $\exp(A)$ et comme A est un polynôme en $\exp(A)$, alors A et B commutent.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, les valeurs propres communes à A et B et soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, alors d'après le théorème de diagonalisation simultanée, il existe une matrice inversible P , telle que $A = P D P^{-1}$ et $B = P D P^{-1}$, donc on a $A = B$.

Exercice 201

On a $A {}^t A A = I_n$, donc $A^{-1} = {}^t A A$, par suite, A^{-1} est symétrique, donc A est symétrique. Ainsi, on aura $A^3 = I_n$, donc toutes les valeurs propres de A sont racines du polynôme $X^3 - 1$. Or, 1 est l'unique racine réelle de $X^3 - 1$

et comme A est symétrique, alors tous les valeurs propres de A sont réelles, donc 1 est l'unique valeur propre de A et comme A est diagonalisable, alors $A = I_n$.

Exercice 202

1. On a ${}^tA = A^2$, donc $A = {}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = A^4$ et comme A est inversible, alors on a $A^3 = I_n$. On en déduit que ${}^tAA = A^3 = I_n$, donc A est une matrice orthogonale.
2. a) D'abord, il est facile de voir que $\ker(u^2 + u + Id_E)$ est stable par u . Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\ker(u^2 + u + Id_E)$, alors v est un endomorphisme de $\ker(u^2 + u + Id_E)$ et on a $P(v) = 0$, où $P = X^2 + X + 1$. Supposons que la dimension de $\ker(u^2 + u + Id_E)$ est impaire, alors le polynôme caractéristique χ_v de v est de degré impair, donc χ_v possède au moins une racine réelle λ , puis comme $P(v) = 0$, alors $P(\lambda) = 0$, ce qui est absurde, car P ne possède aucune racine réelle.
- b) On a $P(u) = 0$, avec $P = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ et les polynômes $(X - 1)$ et $(X^2 + X + 1)$ sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de décomposition des noyaux, on a

$$E = \ker(u - Id_E) \oplus \ker(u^2 + u + Id_E)$$

De plus pour $x \in \ker(u - Id_E)$ et $y \in \ker(u^2 + u + Id_E)$, on a

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle u(x), y \rangle = \langle x, {}^tu(y) \rangle = \langle x, u^2(y) \rangle \quad (\text{car } {}^tu = u^2) \\ &= \langle x, -y - u(y) \rangle = -\langle x, y \rangle - \langle x, u(y) \rangle \\ &= -\langle x, y \rangle - \langle {}^tu(x), y \rangle \\ &= -2\langle x, y \rangle \quad (\text{car } {}^tu = u^2 \text{ et } u^2(x) = x) \end{aligned}$$

donc $\langle x, y \rangle = 0$, par suite, on en déduit que

$$\ker(u - Id_E)^\perp = \ker(u^2 + u + Id_E)$$

Soient $p = \dim(\ker(u - Id_E))$ et $\beta = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , telle que $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base orthonormale de $\ker(u - Id_E)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base orthonormale de $\ker(u^2 + u + Id_E)$, alors la matrice A de u par rapport à β s'écrit sous la forme $A + \text{diag}(I_p, A_1, \dots, A_r)$, où pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, il existe

$$\theta_i \in]-\pi, \pi], \text{ tel que } A_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}.$$

Exercice 203

1. Comme q_1 est définie positive, alors q_1 définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, donc $\mathbb{R}^n$ muni de produit scalaire est un espace euclidien qu'on

note E . Comme q_2 est une forme quadratique sur E , alors d'après le théorème 9.4.2, il existe un endomorphisme u de E , q_1 -symétrique, tel que pour tout $x \in E$, on a $q_2(x) = q_1(u(x))$.

2. En utilisant l'écriture matricielle, pour tout $X \in E$, on a d'une part $q_2(X) = {}^tXBX$ et d'autre part $q_2(X) = q_1(MX) = {}^tX{}^tMAX$, donc on en déduit que $B = {}^tMA$, par suite, on a $M = {}^t(A^{-1}){}^tB = A^{-1}B$, car A et B sont symétriques.

3. La matrice M est q_1 -symétrique, donc il existe une base q_1 -orthonormale $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres de M , donc β est une base q_2 -orthogonale. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de M , avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a

$$f(x) = \frac{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

On en déduit donc que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a $\lambda_1 \leq f(x) \leq \lambda_n$. Or, on a $f(e_1) = \lambda_1$ et $f(e_n) = \lambda_n$, donc λ_1 est un minimum absolu et λ_n est un maximum absolu.

4. Soient q_1 et q_2 les formes quadratiques définies par $q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$ et $q_2(x, y) = xy$, alors on a $f(x) = \frac{q_2(x, y)}{q_1(x, y)}$. On a

$$q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

donc q_1 est définie positive. Soient A et B les matrices q_1 et q_2 , alors on a

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'après la question précédente, f possède deux extremums un minimum global et un maximum global, ce sont donc les deux valeurs propres de $A^{-1}B$. On a $A^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, donc en faisant le calcul, on trouve

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}.$$

Soient $Q_1(x, y) = x^2 - xy + y^2$ et $Q_2(x, y) = x^2 - 10xy + 4y^2$, alors on a $Q_1(x, y) = (x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$, donc Q_1 est définie positive. Soient A et B les matrices Q_1 et Q_2 , alors on a

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

donc on a $A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$. donc en faisant le calcul, on voit que $\lambda_1 = -8$ et $\lambda_2 = 4$ sont les valeurs propres de $A^{-1}B$.

Exercice 204

1. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale et soit $x \in E$, avec $x \neq 0$, tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors on a

$$R_u(x) = \frac{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Donc il est facile de voir de voir que $\lambda_1 \leq R_u(x) \leq \lambda_n$, puis comme $R_u(e_1) = \lambda_1$ et $R_u(e_n) = \lambda_n$, alors on a

$$\min_{x \neq 0} R_u(x) = \lambda_1 \quad \text{et} \quad \max_{x \neq 0} R_u(x) = \lambda_n$$

2. a) De la même manière que dans 1), on voit que $\max_{x \in F_k \setminus \{0\}} R_u(x) = \lambda_k$, puis comme $\dim(F_k) = k$, alors on en déduit que

$$\min_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \right) \leq \lambda_k$$

- b) Supposons qu'il existe $F \in \mathcal{F}_k$, tel que $F \cap G_k = \{0\}$, alors on aura

$$\dim(F + G_k) = \dim(F) + \dim(G_k) = k + (n - k + 1) = n + 1$$

ce qui est absurde, car $\dim(F + G_k) \leq n$, donc $F \cap G_k \neq \{0\}$.

Soit $x_0 \in F \cap G_k$, avec $x_0 \neq 0$, alors on a $x_0 = \sum_{i=k}^n x_i e_i$, donc on a

$$R_u(x_0) = \frac{\lambda_k x_k^2 + \dots + \lambda_n x_n^2}{x_k^2 + \dots + x_n^2}, \text{ ce qui prouve que } R_u(x_0) \geq \lambda_k. \text{ On a}$$

$x_0 \in F \setminus \{0\}$ et $R_u(x_0) \geq \lambda_k$, donc $\max_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \geq \lambda_k$ et ceci pour

tout $F \in \mathcal{F}_k$, par conséquent, on a $\min_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \right) \geq \lambda_k$.

- c) D'après les questions a) et b), on a $\min_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \right) = \lambda_k$. Pour

l'autre égalité on procède de la même façon en posant

$L_k = G_{n-k+1}$ et en remarquant que $\min_{x \in L_k \setminus \{0\}} R_u(x) = \lambda_{n-k+1}$, puis

comme $\dim(L_k) = k$, alors on en déduit que

$$\max_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\min_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \right) \geq \lambda_{n-k+1}$$

Aussi de la même manière on voit que pour tout $F \in \mathcal{F}_k$, on a $F \cap F_{n-k+1} \neq \{0\}$ et on en déduit que

$$\max_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\min_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \right) \leq \lambda_{n-k+1}$$

Exercice 205

1. Soit $F = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ et soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F , alors pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, on a $v_j = \sum_{k=1}^p a_{kj} e_k$, par suite, on aura $\langle v_i, v_j \rangle = \sum_{k=1}^p a_{ki} a_{kj}$. On pose $A = (a_{kl})_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq l \leq n}}$, alors on a

$$\text{Gram}(v_1, v_2, \dots, v_n) = {}^t A A$$

On en déduit que $\text{Gram}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est symétrique positive.

2. On a $\text{rg}(\text{Gram}(v_1, v_2, \dots, v_n)) = \text{rg}(L_1, L_2, \dots, L_n)$, où pour tout i , on a $L_i = (\langle v_i, v_1 \rangle, \langle v_i, v_2 \rangle, \dots, \langle v_i, v_n \rangle)$. Soit $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application définie pour tout $x \in F$, par

$$f(x) = (\langle x, v_1 \rangle, \langle x, v_2 \rangle, \dots, \langle x, v_n \rangle)$$

alors f est linéaire et pour $x \in F$, on a

$$\begin{aligned} x \in \ker(f) &\iff x \in \{v_1, v_2, \dots, v_n\}^\perp \\ &\iff x \in F^\perp \end{aligned}$$

Donc on voit que $\ker(f) = \{0\}$, par suite, f est injective, donc on a

$$\begin{aligned} \text{rg}(F) &= \text{rg}(f(F)) = \text{rg}(\text{Vect}(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))) \\ &= \text{rg}(L_1, L_2, \dots, L_n) \end{aligned}$$

Comme $\text{rg}(F) = \text{rg}(v_1, v_2, \dots, v_n)$, alors on obtient le résultat.

3. D'après la question précédente, on a

$$\text{rg}(\text{Gram}(v_1, v_2, \dots, v_n)) = \text{rg}(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Donc on en déduit que

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ est libre} &\iff \text{rg}(v_1, v_2, \dots, v_n) = n \\ &\iff \text{rg}(\text{Gram}(v_1, v_2, \dots, v_n)) = n \\ &\iff G(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0 \end{aligned}$$

4. a) Soient $F = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de F et P la matrice de passage de β à la base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ alors d'après la question 1), on a $\text{Gram}(v_1, v_2, \dots, v_n) = {}^t P P$, donc on en déduit que $\text{Gram}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est définie positive.

- b) Soit $x \in E$, alors $x = v + w$, avec $v \in F$ et $w \in F^\perp$, donc on a $d(x, F) = \|w\|$. Comme $\langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle$ et pour tout i , on a $\langle w, v_i \rangle = 0$, alors en utilisant le fait que le déterminant est multilinéaire, on a

$$\begin{aligned}
 G(x, v_1, \dots, v_n) &= G(v + w, v_1, \dots, v_n) \\
 &= \begin{vmatrix} \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle & \langle v, v_1 \rangle & \dots & \langle v, v_n \rangle \\ \langle v, v_1 \rangle & \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v, v_n \rangle & \langle v_1, v_n \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, v_1 \rangle & \dots & \langle v, v_n \rangle \\ \langle v, v_1 \rangle & \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v, v_n \rangle & \langle v_1, v_n \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{vmatrix} \\
 &\quad + \begin{vmatrix} \langle w, w \rangle & \langle v, v_1 \rangle & \dots & \langle v, v_n \rangle \\ 0 & \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle v_1, v_n \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{vmatrix} \\
 &= G(v, v_1, \dots, v_n) + \|w\|^2 G(v_1, \dots, v_n)
 \end{aligned}$$

Or, $(v, v_1, \dots, v_n)$ est lié, donc d'après 3), $G(v, v_1, \dots, v_n) = 0$, il en résulte qu'on a

$$G(x, v_1, \dots, v_n) = d(x, F)^2 G(v_1, \dots, v_n)$$

ce qui prouve qu'on a

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, v_1, \dots, v_n)}{G(v_1, \dots, v_n)}}$$

5. On considère $E = \mathbb{R}[t]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions polynomiales muni du produit scalaire définie pour chaque $(f, g) \in E \times E$, par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, soit $\varphi_i \in E$ la fonction définie par $\varphi_i(t) = t^{i-1}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le système $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est libre et pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on a

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_0^1 \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt = \int_0^1 t^{i+j-2}dt = \frac{1}{i+j-1} = a_{ij}$$

donc on voit que $A = \text{Gram}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ et comme $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est libre, alors d'après 4)a), A est symétrique définie positive.

Exercice 206

1. M est symétrique positive, donc les valeurs propres de M , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, sont positives. Or, les valeurs propres de la matrice $I_n + M$ sont $1 + \lambda_1, 1 + \lambda_2, \dots, 1 + \lambda_n$, donc on a $\det(I_n + M) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i)$. Comme les λ_i sont positives, alors on a $\det(I_n + M) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \geq 1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i$, donc on en déduit que $\det(I_n + M) \geq 1 + \det(M)$.
2. Les matrices A et B sont symétriques positives, donc $A + B$ est symétrique positive, par suite, on a $\det(A + B) \geq 0$. Ainsi, si A et B sont non inversibles, alors le résultat est trivial. On peut donc supposer, par exemple, que A est inversible.

Comme A est symétrique positive et inversible, alors A est définie positive, donc il existe une matrice inversible P , telle que $A = {}^tPP$. On a alors $A + B = {}^tPP + B = {}^tP(I_n + ({}^tP)^{-1}BP^{-1})P$, donc on a

$$\det(A + B) = \det(P)^2 \det(I_n + ({}^tP)^{-1}BP^{-1})$$

Puisque B est symétrique positive, alors pour toute matrice inversible Q , ${}^tQBQ$ est symétrique positive, donc la matrice $({}^tP)^{-1}BP^{-1}$ est symétrique positive, par suite, d'après la question précédente, on a

$$\det(I_n + ({}^tP)^{-1}BP^{-1}) \geq 1 + \det(({}^tP)^{-1}BP^{-1})$$

avec $\det(({}^tP)^{-1}BP^{-1}) = \frac{\det(B)}{\det(P)^2}$, il en résulte donc que

$$\det(A + B) \geq \det(P)^2 + \det(B)$$

avec $\det(P)^2 = \det(A)$, d'où le résultat.

Exercice 207

1. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors en identifiant la matrice A à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A , pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on a $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$, donc en particulier, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on a $a_{ii} = \langle Ae_i, e_i \rangle$. Comme A est définie positive, alors on conclut que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on a $a_{ii} > 0$.
2. Cette question est déjà traitée dans l'exercice 193, de la manière suivante :
Comme A est symétrique positive, alors $\text{tr}(A) \geq 0$, donc si $\det(A) = 0$, alors l'inégalité est trivial. On peut donc supposer que $\det(A) \neq 0$,

donc les valeurs propres de A , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, sont réelles et strictement positives. On a

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{et} \quad \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

Puis comme la fonction $-\ln$ est convexe, alors d'après l'inégalité de Jensen, on a

$$-\ln\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n}\right) \leq -\frac{\ln(\lambda_1) + \ln(\lambda_2) + \dots + \ln(\lambda_n)}{n}$$

On en déduit donc que $\ln\left(\frac{\operatorname{tr}(A)}{n}\right) \geq \ln(\det(A)^{\frac{1}{n}})$, donc on voit que $\operatorname{tr}(A) \geq n \det(A)^{\frac{1}{n}}$ et ainsi on obtient le résultat.

3. a) Il s'agit de montrer que pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j \geq 0$$

On a $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{x_i}{\sqrt{a_{ii}}} \frac{x_j}{\sqrt{a_{jj}}}$, donc, comme A est positive, alors $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{x_i}{\sqrt{a_{ii}}} \frac{x_j}{\sqrt{a_{jj}}} \geq 0$, d'où le résultat.

b) Comme B est symétrique positive, alors d'après la question 2), on a $\det(B) \leq \left(\frac{\operatorname{tr}(B)}{n}\right)^n$, avec $\operatorname{tr}(B) = n$, donc on a $\det(B) \leq 1$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \cdots b_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \frac{a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}}{\sqrt{a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}} \sqrt{a_{\sigma(1)\sigma(1)} a_{\sigma(2)\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(n)\sigma(n)}} \end{aligned}$$

Puis comme $\sigma \in S_n$, alors on a $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\} = \{1, 2, \dots, n\}$, donc on en déduit que $a_{\sigma(1)\sigma(1)} a_{\sigma(2)\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(n)\sigma(n)} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ et par conséquent, on aura

$$\det(B) = \frac{\det(A)}{\prod_{i=1}^n a_{ii}}$$

Puisque $\det(B) \leq 1$, alors on a $\det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

4. Soit $A = \text{Gram}(v_1, v_2, \dots, v_n)$, alors d'après l'exercice 199, A est symétrique positive et comme $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est libre, alors A est définie positive, donc d'après la question précédente, on a

$$\det(A) \leq \prod_{i=1}^n \|v_i\|^2$$

Soit $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale directe de E et soit P la matrice de passage de β à $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, alors d'après la question 1) de l'exercice 199, on a $A = {}^t P P$, donc $\det(A) = \det(P)^2$. Comme $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det(P)$, alors on en déduit que

$$\det(v_1, v_2, \dots, v_n)^2 \leq \left(\prod_{i=1}^n \|v_i\| \right)^2$$

Il en résulte donc que

$$|\det(v_1, v_2, \dots, v_n)| \leq \prod_{i=1}^n \|v_i\|$$

Exercice 208

1. Supposons que f est inversible et posons $u = g \circ f^{-1}$, alors pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|u(x)\| &= \|(g \circ f^{-1})(x)\| = \|g(f^{-1}(x))\| \\ &= \|f(f^{-1}(x))\| = \|x\| \end{aligned}$$

Donc u est un endomorphisme orthogonal et on a $g = u \circ f$.

Si v est un autre endomorphisme orthogonal vérifiant $g = v \circ f$, comme f est inversible, alors on aura $v = g \circ f^{-1} = u$, d'où l'unicité de u .

2. On ne suppose plus que f est inversible et on pose $r = \text{rang}(f)$.

a) Soient $x \in E$ et $y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2} (\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|g(x+y)\|^2 - \|g(x)\|^2 - \|g(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|g(x) + g(y)\|^2 - \|g(x)\|^2 - \|g(y)\|^2) \\ &= \langle g(x), g(y) \rangle \end{aligned}$$

- b) Pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\| = \|g(x)\|$, donc on a $f(x) = 0$, si et seulement si, $g(x) = 0$. On en déduit donc $\ker(f) = \ker(g)$.
- c) i) h est linéaire, car f est linéaire et on a $\ker(h) = G \cap \ker(f) = \{0\}$, car $E = G \oplus \ker(f)$, donc h est injective et comme on a $\dim(G) = \dim(\text{Im})$, alors h est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- ii) Soit $r = \dim(G) = \dim(\text{Im})$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, posons $e_i = h^{-1}(v_i)$, alors e_i est bien défini, car h est bijective. Puisque h est un isomorphisme d'espace vectoriels, alors l'image réciproque d'une base est une base, donc $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est une base de G et pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on a $f(e_i) = h(e_i) = v_i$.
- d) On a $\ker(g) = \ker(f)$, donc $\text{rg}(g) = \text{rg}(f) = r$. Ainsi, pour vérifier que le système $(w_1, \dots, w_r)$ est une base de $\text{Im}(g)$, il suffit de vérifier qu'il est libre. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$, tel que

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r = 0$$

alors, comme $w_i = g(e_i)$, on a $g(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r) = 0$, donc on a $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r \in \ker(f)$, car $\ker(g) = \ker(f)$. On a aussi $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r \in G$ et comme $\ker(f) \cap G = \{0\}$, alors on a $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r = 0$, donc $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$, par suite, $(w_1, \dots, w_r)$ est une base de $\text{Im}(g)$. Soit $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$, alors d'après la question 2.a), on a

$$\langle w_i, w_j \rangle = \langle g(e_i), g(e_j) \rangle = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle$$

et comme $(v_1, \dots, v_r)$ est orthonormale, alors on a $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$, donc $(w_1, \dots, w_r)$ est une base orthonormale.

- e) Soit $F = \text{Vect}(\{v_1, \dots, v_r\})$ et soit $(v_{r+1}, \dots, v_n)$ une base orthonormale de $F^\perp$, alors $(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ est une base orthonormale de E . Ainsi nous avons complété $(v_1, \dots, v_r)$ en une base orthonormale de E . Pour compléter $(w_1, \dots, w_r)$ en une base orthonormale de E , on procède de la même manière.
- f) u transforme une base orthonormale en une base orthonormale. donc u est un endomorphisme orthogonal.
- Pour vérifier que $g = u \circ f$, on complète $(e_1, \dots, e_r)$ en une base $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ de E , avec $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker(f)$, ceci est possible car $E = G \oplus \ker(f)$.
- Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on a

$$(u \circ f)(e_i) = u(f(e_i)) = u(v_i) = w_i = g(e_i) \quad (*)$$

et comme $\ker(g) = \ker(f)$, alors pour tout $i \in \{r+1, \dots, n\}$, on a

$$(u \circ f)(e_i) = u(f(e_i)) = u(0) = 0 = g(e_i) \quad (**)$$

Donc, d'après (*) et (**), on a $g = u \circ f$.

- g) Puisque u dépend de G et puisque G n'est pas unique, car en général un sous-espace vectoriel possède une infinité de supplémentaires, alors u n'est pas unique.

Exercice 209

- a) On pose $x_0 = e_1 + e_2 + e_3$ et soit u le demi-tour d'axe $\text{Vect}(x_0)$, alors u coïncide avec la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(x_0)$, donc pour tout $x \in E$, on a $u(x) = 2 \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0 - x$, donc en particulier, on a

$$\begin{cases} u(e_1) = 2 \frac{\langle e_1, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0 - e_1 = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3) \\ u(e_2) = 2 \frac{\langle e_2, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0 - e_2 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3) \\ u(e_3) = 2 \frac{\langle e_3, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0 - e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3) \end{cases}$$

Soit A la matrice de u par rapport à la base (e_1, e_2, e_3) , alors on a

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- b) On pose $x_0 = e_2 + e_3$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. Soit u la rotation d'axe $\text{Vect}(x_0)$ et d'angle θ , alors pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} u(x) &= (1 - \cos \theta) \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0 + \cos \theta \cdot x + \frac{\sin \theta}{\|x_0\|} x_0 \wedge x \\ &= \frac{1}{2} \langle x, x_0 \rangle x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_0 \wedge x \end{aligned}$$

donc en particulier, on a

$$\begin{cases} u(e_1) = \frac{1}{2} \langle e_1, x_0 \rangle x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_0 \wedge e_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}e_2 - \sqrt{2}e_3) \\ u(e_2) = \frac{1}{2} \langle e_2, x_0 \rangle x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_0 \wedge e_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{2}e_1 + e_2 + e_3) \\ u(e_3) = \frac{1}{2} \langle e_3, x_0 \rangle x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_0 \wedge e_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}e_1 + e_2 + e_3) \end{cases}$$

Soit A la matrice de u par rapport à la base (e_1, e_2, e_3) , alors on a

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) Posons $x_0 = e_1 + e_2 + e_3$ et soit u la rotation d'axe $\text{Vect}(x_0)$ qui transforme e_1 en e_3 . Soit θ l'angle de u , alors pour tout $x \in E$, on a

$$u(x) = (1 - \cos \theta) \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0 + \cos \theta \cdot x + \frac{\sin \theta}{\|x_0\|} x_0 \wedge x$$

Comme $u(e_1) = e_3$, alors on a

$$e_3 = \frac{1 - \cos \theta}{3} (e_1 + e_2 + e_3) + \cos \theta \cdot e_1 + \frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} (e_2 - e_3)$$

On en déduit donc qu'on a et

$$\begin{cases} 2 \cos \theta + 1 = 0 \\ \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta + 1 = 0 \\ \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta - 1 = -3 \end{cases}$$

Donc en achevant le calcul, on trouve $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc il en résulte que pour tout $x \in E$, on a

$$u(x) = \frac{1}{2} (\langle x, x_0 \rangle x_0 - x - x_0 \wedge x)$$

Donc en particulier, on a

$$\begin{cases} u(e_1) = \frac{1}{2} (\langle e_1, x_0 \rangle x_0 - e_1 - x_0 \wedge e_1) = e_3 \\ u(e_2) = \frac{1}{2} (\langle e_2, x_0 \rangle x_0 - e_2 - x_0 \wedge e_2) = e_1 \\ u(e_3) = \frac{1}{2} (\langle e_3, x_0 \rangle x_0 - e_3 - x_0 \wedge e_3) = e_2 \end{cases}$$

Soit A la matrice de u par rapport à la base (e_1, e_2, e_3) , alors on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 210

Supposons que u est une rotation et montrons que pour tout $x, y \in E$, on a $u(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$.

D'abord si (x, y) est lié, alors $(u(x), u(y))$ est lié, donc $x \wedge y = u(x) \wedge u(y) = 0$, donc dans ce cas, l'égalité à démontrer est trivial.

Si (x, y) est libre, on suppose d'abord que $\langle x, y \rangle = 0$, puis on pose

$$e_1 = \frac{x}{\|x\|}, \quad e_2 = \frac{y}{\|y\|} \quad \text{et} \quad e_3 = e_1 \wedge e_2$$

alors (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale directe de E et comme u est une rotation, alors $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ est aussi une base orthonormale directe de E , donc on a $u(e_3) = u(e_1) \wedge u(e_2)$. Donc en remplaçant e_1, e_2 et e_3 par leurs valeurs, on obtient $u(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$.

Si $\langle x, y \rangle \neq 0$, on pose

$$z = y - \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} x$$

alors on a $\langle x, z \rangle = 0$, donc $u(x \wedge z) = u(x) \wedge u(z)$, avec $x \wedge z = x \wedge y$ et $u(x) \wedge u(z) = u(x) \wedge u(y)$, ce qui prouve que $u(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$.

Réciproquement, supposons que pour tout $x, y \in E$, on a $u(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$ et montrons que u est une rotation. Pour cela, il suffit de montrer que u transforme une base orthonormale directe en une base orthonormale directe. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale directe de E , alors on a $e_1 = e_2 \wedge e_3$, $e_2 = e_3 \wedge e_1$ et $e_3 = e_1 \wedge e_2$, donc on a $u(e_1) = u(e_2) \wedge u(e_3)$, $u(e_2) = u(e_3) \wedge u(e_1)$ et $u(e_3) = u(e_1) \wedge u(e_2)$. Il en résulte que $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ est une base orthogonale, donc on a

$$\begin{cases} \|u(e_1)\|^2 = \|u(e_2)\|^2 \|u(e_3)\|^2 \\ \|u(e_2)\|^2 = \|u(e_1)\|^2 \|u(e_3)\|^2 \\ \|u(e_3)\|^2 = \|u(e_1)\|^2 \|u(e_2)\|^2 \end{cases}$$

Par suite, on voit facilement que $\|u(e_1)\| = \|u(e_2)\| = \|u(e_3)\| = 1$, donc $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ est une base orthonormale et comme $u(e_3) = u(e_1) \wedge u(e_2)$, alors $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ est directe.

Exercice 211

1. On pose $v = u \circ r \circ u^{-1}$, alors v est la composée de trois endomorphismes orthogonaux, donc v est un endomorphisme orthogonal. De plus on a $\det(v) = \det(r) = 1$, donc v est une rotation d'angle α et d'axe Δ à déterminer. Soit $y_0 = u(x_0)$, alors on a $v(y_0) = y_0$, car $r(x_0) = x_0$, donc $\Delta = \text{Vect}(y_0)$. On a $\text{tr}(v) = \text{tr}(r)$, donc $\cos(\alpha) = \cos(\theta)$, car $\cos \alpha = \frac{\text{tr}(v) - 1}{2}$. Soit $x \in E$, tel que $\langle x_0, x \rangle = 0$, alors on a

$$\langle u(x), y_0 \rangle = \langle u(x), u(x_0) \rangle = \langle x_0, x \rangle = 0$$

donc $\sin \alpha$ est de même signe que $\det(y_0, u(x), v(u(x)))$, avec

$$\begin{aligned}\det(y_0, u(x), v(u(x))) &= \det(u(x_0), u(x), u(r(x))) \\ &= \det(u) \det(x_0, x, r(x))\end{aligned}$$

Donc si $\det(u) = 1$, alors $\alpha = \theta$ et si $\det(u) = -1$, alors $\alpha = -\theta$.

2. Soit u un élément du centre du groupe $SO_3(\mathbb{R})$, alors pour tout $r \in SO_3(\mathbb{R})$, on a $u \circ r \circ u^{-1} = r$. Soient $x \in E$ un vecteur non nul et r une rotation d'axe $\text{Vect}(x)$, alors d'après la question précédente, on a $\text{Vect}(u(x)) = \text{Vect}(x)$, car $u \circ r \circ u^{-1} = r$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $u(x) = \lambda x$ et comme u est une rotation, alors $\lambda = 1$, donc $u(x) = x$. On en déduit donc que le centre de $SO_3(\mathbb{R})$ est égal à $\{Id_E\}$.

Exercice 212

1. On voit facilement que ${}^tAA = I_3$, donc u est un endomorphisme orthogonale. On a $\det(A) = -1$ et 1 n'est pas valeur propre de u , car $\det(A - I_3) \neq 0$, donc on déduit que u est une symétrie-rotation. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors en faisant le calcul on voit que $x_0 = e_1 - e_2 + e_3$ est un vecteur propre associée à la valeur propre -1 , donc $u = r \circ s = s \circ r$, où s est la symétrie par rapport à $\text{Vect}(x_0)^\perp$ et r la rotation d'axe $\text{Vect}(x_0)$ et d'angle θ à déterminer. Soit (v_1, v_2, v_3) une base orthonormale directe, telle que $v_1 = \frac{x_0}{\|x_0\|}$, alors on a $s(v_1) = -v_1$, $s(v_2) = v_2$ et $s(v_3) = v_3$, puis comme $r = u \circ s$, alors on a

$$\begin{aligned}\text{tr}(r) &= -\langle u(v_1), v_1 \rangle + \langle u(v_2), v_2 \rangle + \langle u(v_3), v_3 \rangle \\ &= -2\langle u(v_1), v_1 \rangle + \text{tr}(u) = 2 + \text{tr}(u) \quad \text{car } u(v_1) = -v_1\end{aligned}$$

Donc on a

$$\cos(\theta) = \frac{\text{tr}(r) - 1}{2} = \frac{\text{tr}(u) + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

par suite, on a $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. Soit $y_0 = e_2 + e_3$, alors on a $y_0 \in \text{Vect}(x_0)^\perp$, donc $\sin \theta$ est de même signe que $\det(x_0, y_0, r(y_0))$. On a $s(y_0) = y_0$, car $y_0 \in \text{Vect}(x_0)^\perp$, donc on a

$$\det(x_0, y_0, r(y_0)) = \det(x_0, y_0, u(y_0)) = 3$$

On en déduit que $\theta = \frac{\pi}{2}$.

2. On a ${}^tAA = I_3$ et $\det(A) = 1$, donc u est une rotation d'axe Δ et d'angle θ à déterminer. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors en faisant le calcul on voit que $x_0 = e_1 + e_3$ est un vecteur propre associée à la valeur propre 1, donc $\Delta = \text{Vect}(x_0)$. On a $\cos \theta = \frac{\text{tr}(u) - 1}{2} = 0$, donc

$\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. Soit $y_0 = e_2$, alors on a $y_0 \in \Delta^\perp$, donc $\sin \theta$ est de même signe que $\det(x_0, y_0, u(y_0))$, avec $\det(x_0, y_0, u(y_0)) = \sqrt{2}$, par suite on a $\theta = \frac{\pi}{2}$.

3. On a ${}^tAA = I_3$, $\det(A) = -1$ et $\det(A - I_3) \neq 0$, donc u est une symétrie-rotation. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors en faisant le calcul on voit que $x_0 = e_2 - e_3$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -1 , donc $u = r \circ s = s \circ r$, où s est la symétrie par rapport à $\text{Vect}(x_0)^\perp$ et r la rotation d'axe $\text{Vect}(x_0)$ et d'angle θ à déterminer. De la même manière que dans la question 1), on voit que $\cos \theta = \frac{\text{tr}(u) + 1}{2} = -\frac{2}{3}$, donc $\theta = \pm \arccos(-\frac{2}{3})$. Soit $y_0 = e_1$, alors on a $y_0 \in \text{Vect}(x_0)^\perp$, donc $\sin \theta$ est de même signe que $\det(x_0, y_0, u(y_0))$, avec $\det(x_0, y_0, u(y_0)) = -\frac{4}{3}$, donc $\theta = -\arccos(-\frac{2}{3}) = \arccos(\frac{2}{3}) - \pi$.

Exercice 213

- a) En faisant le calcul on trouve

$${}^tAA = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2a^2 + 2a + 5 & -(a-1)(a+2) & (a-1)(a+2) \\ -(a-1)(a+2) & 2a^2 + 2a + 5 & (a-1)(a+2) \\ (a-1)(a+2) & (a-1)(a+2) & 2a^2 + 2a + 5 \end{pmatrix}$$

Donc u est un endomorphisme orthogonal, si et seulement si, $a = -2$ ou $a = 1$.

- b) Si $a = -2$, alors on a $\det(A) = 1$, donc u est une rotation d'axe $\Delta = \ker(A - I_3) = \text{Vect}(e_1 - 3e_2 + e_3)$ et d'angle θ , avec

$$\cos \theta = \frac{\text{tr}(A) - 1}{2} = -\frac{5}{6}$$

donc $\theta = \pm \arccos(-\frac{5}{6})$. On a $e_1 - e_3 \in \Delta^\perp$, donc $\sin \theta$ est de même signe que $\det(e_1 - 3e_2 + e_3, e_1 - e_3, u(e_1 - e_3))$, avec

$$\det(e_1 - 3e_2 + e_3, e_1 - e_3, u(e_1 - e_3)) = \frac{11}{3}$$

donc on en déduit que $\theta = \arccos(-\frac{5}{6})$.

Si $a = 1$, alors on a $\det(A) = 1$, donc u est une rotation d'axe $\Delta = \ker(A - I_3) = \text{Vect}(e_1 + e_3)$ et d'angle θ , avec

$$\cos \theta = \frac{\text{tr}(A) - 1}{2} = -\frac{1}{3}$$

donc $\theta = \pm \arccos(-\frac{1}{3})$. On a $e_2 \in \Delta^\perp$, donc $\sin \theta$ est de même signe que $\det(e_1 + e_3, e_2, u(e_2))$, avec $\det(e_1 + e_3, e_2, u(e_2)) = \frac{4}{3}$, donc on en déduit que $\theta = \arccos(-\frac{1}{3})$.

Exercice 214

1. En faisant le calcul on trouve

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & ab + ac + bc & ab + ac + bc \\ ab + ac + bc & a^2 + b^2 + c^2 & ab + ac + bc \\ ab + ac + bc & ab + ac + bc & a^2 + b^2 + c^2 \end{pmatrix}$$

donc A est une matrice orthogonale, si et seulement si,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad \text{et} \quad ab + ac + bc = 0$$

Comme $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$, alors A est orthogonale, si et seulement si, $(a + b + c)^2 = 1$ et $ab + ac + bc = 0$, donc si et seulement si, $s = a + b + c = 1$ et $\sigma = ab + ac + bc = 0$.

2. En faisant le calcul on trouve

$$\det(A) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = s$$

donc A est une matrice de rotation, si et seulement si, $s = 1$ et $\sigma = 0$.

3. ($\Leftarrow$) Supposons que a, b et c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$, alors on a $X^3 - X^2 + k = (X - a)(X - b)(X - c)$, donc en développant, on aura $s = 1$ et $\sigma = 0$, par suite, A est une matrice de rotation.

($\Rightarrow$) Supposons que A est une matrice de rotation, alors on a $s = 1$ et $\sigma = 0$, donc a, b et c sont racines du polynôme $X^3 - X^2 - abc$. Posons $k = -abc$ et montrons que $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$. On a $a + b + c = 1$, donc au moins l'un d'entre a, b et c est positif, donc on peut supposer, par exemple, que $a \geq 0$. On a $k = -abc = a(ab + ac) = a^2(1 - a)$, donc $k \geq 0$, car $a \leq 1$, et $k \leq \frac{4}{27}$, si et seulement si, $27a^3 - 27a^2 + 4 \geq 0$. On considère la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, 1]$, par $f(x) = 27x^3 - 27x^2 + 4$. alors il est facile de voir que le tableau de variation de f est défini comme suit :

x	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(x)$	0	−	0
$f(x)$	4		4

$\searrow \quad \nearrow$
0

donc on en déduit que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, ce qui prouve que $k \leq \frac{4}{27}$.

Exercice 215

1. En faisant le calcul on voit que ${}^tM_a M_a = I_3$, donc M_a est une matrice orthogonale. Comme A est symétrique, alors A est diagonalisable.
2. En faisant le calcul on trouve $\text{tr}(M_a) = 1$ et $\det(M_a) = -1$.
3. M_a est orthogonale, donc les valeurs propres possibles de M_a sont 1 et -1 . Comme M_a est diagonalisable et $\text{tr}(M_a) = -1$, alors 1 est une valeur propre double et -1 est une valeur propre simple de M_a . On en déduit donc que M_a est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\ker(M_a - I_3)$, avec

$$\ker(M_a - I_3) = \text{Vect}(e_1 + \sqrt{1 - a^2}e_3, e_2 - ae_3)$$

Exercice 216

1. Il est bien connu que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$ et que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$.
2. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors on a $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB) = \text{tr}(AB)$ et $\langle B, A \rangle = \text{tr}({}^tBA) = -\text{tr}(BA)$. Comme $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$ et $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, alors on a $\langle A, B \rangle = 0$. On a donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$ et comme $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp) = n^2 - \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2} = \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$, alors on a $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$.
3. Si A est une matrice orthogonale, alors on a ${}^tAA = I_n$, donc pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|f_A(M)\|^2 = \text{tr}({}^t(AM)AM) = \text{tr}({}^tM({}^tAA)M) = \text{tr}({}^tMM) = \|M\|^2$$

donc f_A est un endomorphisme orthogonal.

Réciproquement, supposons que f_A est un endomorphisme orthogonal, alors pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}({}^t(AM)(AM)) = \text{tr}({}^tMM)$, donc pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}(M^tM({}^tAA)) = \text{tr}(M^tM)$. La matrice ${}^tAA$ est symétrique, donc les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont réelles et si on pose $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, alors il existe une matrice orthogonale P , telle que ${}^tAA = PD^tP$. Donc pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, en remplaçant M par PM dans l'égalité $\text{tr}(M^tM({}^tAA)) = \text{tr}(M^tM)$ et en tenant compte que ${}^tPP = I_n$, on aura $\text{tr}(M^tMD) = \text{tr}(M^tM)$, pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$. En particulier, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, si on pose $M = E_{ij}$, alors on a $M^tM = E_{ii}$, donc $\text{tr}(M^tMD) = \lambda_i$ et $\text{tr}(M^tM) = 1$, donc on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$. On en déduit donc que ${}^tAA = I_n$, donc A est une matrice orthogonale.

Exercice 217

1. Pour tout $x \in E$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$(f_\alpha \circ f_\beta)(x) = x + (\alpha + \beta + \alpha\beta) < x, a > \|a\|^2$$

Puisque $\|a\| = 1$, alors $f_\alpha \circ f_\beta = f_\gamma$, où $\gamma = \alpha + \beta + \alpha\beta$, donc $(\{f_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}, \circ)$ est stable.

2. D'après la question précédente, on voit facilement que $f_\alpha \circ f_\beta = f_\beta \circ f_\alpha$.
3. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $f_\alpha^p = f_{\alpha_p}$, alors on a $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \alpha$ et on a $\alpha_2 = \alpha^2 + 2\alpha = (\alpha + 1)^2 - 1$, donc par récurrence sur p , on voit facilement que $\alpha_p = (p + 1)^p - 1$.
4. Soit p la projection orthogonale sur $F = \text{Vect}(a)$, alors on a $f_\alpha = Id_E + \alpha p$ et comme les valeurs propres de $-p$ sont 0 et -1 , alors f_α est inversible, si et seulement si, $\alpha \neq -1$.
Pour tout $x \in E$, on a $f_{-1}(x) = x - \langle x, a \rangle a$, donc on reconnaît la projection orthogonale sur $\text{Vect}(a)^\perp$.
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors f_α est orthogonal, si et seulement si, pour tout $x \in E$, on a $\|f_\alpha(x)\|^2 = \|x\|^2$, avec

$$\|f_\alpha(x)\|^2 = \|x\|^2 + 2\alpha(\langle x, a \rangle)^2 + \alpha^2(\langle x, a \rangle)^2$$

Donc f_α est orthogonal, si et seulement si, pour tout $x \in E$, on a $(\alpha^2 + \alpha)(\langle x, a \rangle)^2 = 0$. On en déduit donc que f_α est orthogonal, si et seulement si, $\alpha \in \{0, -2\}$.

Si $\alpha = -2$, alors pour tout $x \in E$, on a $f_{-2}(x) = x - 2\langle x, a \rangle a$, donc on reconnaît la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(a)^\perp$.

Exercice 218

On sait que pour tout $x \in E$, on a $\|a \wedge x\|^2 = \|x\|^2 \|a\|^2 - (\langle x, a \rangle)^2$, et comme $\|a\| = 1$ et $\langle a \wedge x, a \rangle = 0$, alors pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$, donc f est un endomorphisme orthogonal. D'après l'expression de f , on reconnaît la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe $\text{Vect}(a)$.

Exercice 219

- a) A est antisymétrique, donc $-A$ est antisymétrique et comme 0 est l'unique valeur propre réelle d'une matrice antisymétrique, alors $I + A$ est inversible.
- b) Soit $B = (I + A)^{-1}(I - A)$, alors on a $B^{-1} = (I - A)^{-1}(I + A)$ et

$${}^t B = (I + A)(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}(I + A) = B^{-1}$$

donc B est une matrice orthogonale.

On a $\det({}^t(I + A)) = \det(I + A)$, avec ${}^t(I + A) = I - A$, car A est antisymétrique, donc on a $\det(I - A) = \det(I + A)$. On en déduit donc que $\det(B) = 1$, par conséquent, B est une rotation.

- c) Soit $z \in \mathbb{C}$, tel que z et $\bar{z}$ soient valeurs propres de A , alors les valeurs propres complexes de $I + A$ sont 1 , $1 + z$ et $1 + \bar{z}$, donc

$$\det(I + A) = (1 + z)(1 + \bar{z}) = 1 + z + \bar{z} + |z|^2$$

Comme A est antisymétrique, alors $\operatorname{tr}(A) = 0$, donc $z + \bar{z} = 0$, par suite, on a $\det(I + A) = 1 + |z|^2$, donc $\det(I + A) > 0$.

Exercice 220

- i) $\Rightarrow$ ii) Supposons que pour tout $x, y \in E$, on a

$$\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x), u(y) \rangle = 0$$

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , alors pour $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on a $\langle u(e_i), u(e_j) \rangle = 0$, donc $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est un système orthogonal et comme pour $i \neq j$, on a $\|e_i\| = \|e_j\|$, alors on a

$$\langle e_i - e_j, e_i + e_j \rangle = 0$$

Donc, par hypothèse, on a $\langle u(e_i) - u(e_j), u(e_i) + u(e_j) \rangle = 0$, par suite, on en déduit que pour $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on a $\|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|$.

Posons $k = \|u(e_1)\|$ et soit $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors on a

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \|u(e_i)\|^2 = k^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = k^2 \|x\|^2$$

d'où le résultat.

- ii) $\Rightarrow$ iii) On voit facilement que $u = h \circ v$, où h et v sont les endomorphismes de E définies pour tout $x \in E$, par $h(x) = kx$ et $v(x) = \frac{1}{k}u(x)$. Donc h est une homothétie et v une isométrie, avec $u = h \circ v$.

- iii) $\Rightarrow$ i) Supposons que $u = h \circ v$, où h est une homothétie de rapport k et v une isométrie, alors pour tout $x, y \in E$, tels que $\langle x, y \rangle = 0$, on a

$$\begin{aligned} \langle u(x), u(y) \rangle &= \langle h(v(x)), h(v(y)) \rangle \\ &= k^2 \langle v(x), v(y) \rangle = k^2 \langle x, y \rangle = 0 \end{aligned}$$

Exercice 221

Comme A est une matrice orthogonale, alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $|\langle AX, X \rangle| \leq \|X\|^2$, car $\|AX\| = \|X\|$.

Donc, en particulier, pour $X = {}^t(1, 1, \dots, 1)$, on obtient $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| \leq n$, car

$$\|X\|^2 = n \text{ et } \langle AX, X \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

Aussi, comme A est orthogonale, alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on a $\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 = 1$, donc pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, on a $|a_{ij}| \leq 1$, par suite, on a $|a_{ij}|^2 \leq |a_{ij}|$, puis comme $\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 = 1$, alors on a $n \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

Soit $J = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, où pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, on a $b_{ij} = 1$, donc si on munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel défini pour tout $M, N \in M_n(\mathbb{R})$, par $\langle M, N \rangle = \text{tr}(MN)$, alors on a $\|J\| = \sqrt{\text{tr}(^t J J)} = \sqrt{\text{tr}(J^2)} = \sqrt{n \text{tr}(J)} = n$. Soit $B = (|a_{ij}|)_{1 \leq i, j \leq n}$, alors en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on

a $\text{tr}(JB) \leq n \sqrt{\text{tr}(^t B B)}$, avec $\text{tr}(^t B B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) = n$ et $\text{tr}(JB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, par conséquent, on obtient $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq n^{\frac{3}{2}}$.

Exercice 222

1. On a ${}^t(\exp(M)) = \exp({}^t M)$ et comme M est antisymétrique, alors on a ${}^t(\exp(M)) = \exp(-M) = \exp(M)^{-1}$, donc $\exp(M)$ est une matrice orthogonale. On sait que $\det(\exp(M)) = \exp(\text{tr}(M))$ et comme M est antisymétrique, alors $\text{tr}(M) = 0$, donc $\det(\exp(M)) = 1$, par suite, $\exp(M)$ est une matrice de rotation.

2. Soit A une matrice de rotation, alors il existe une matrice orthogonale P , telle que $A = P\Omega^t P$, où $\Omega = \text{diag}(I_p, \Omega_1, \dots, \Omega_r)$, avec $p + 2r = n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_r$, on a $\Omega_k = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix}$. On est donc amené

à montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $\omega = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est l'exponentielle d'une matrice antisymétrique. Il est bien connu que ω s'identifie au nombre complexe $e^{i\theta}$ et que i s'identifie à la matrice J , avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui conduit à montrer que $\omega = \exp(\theta J)$. Pour cela, on a $J^{2n} = (-1)^n I$ et $J^{2n+1} = (-1)^n J$, donc on a

$$\begin{aligned} \exp(\theta J) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} \right) I + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) J \\ &= (\cos \theta) I + (\sin \theta) J = \omega \end{aligned}$$

Ainsi, on voit que $\Omega = \exp(N)$, avec $N = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{p \text{ fois}}, N_1, \dots, N_r)$,

où pour tout $k \in \mathbb{N}_r$, on a $N_k = \theta_k J$, donc on en déduit que $A = \exp(M)$, avec $M = PN^t P$.

Exercice 223

($\Rightarrow$) Supposons que $f \circ g = g \circ f$ et notons Δ_f et Δ_g les axes des rotations f et g respectivement, alors on sait que $\dim(\Delta_f) = \dim(\Delta_g) = 1$. Soit $x_0 \in E$, tel que $\Delta_f = \text{Vect}(x_0)$, alors on a $f(x_0) = x_0$, donc $f(g(x_0)) = g(x_0)$, par suite, on a $g(x_0) \in \Delta_f$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $g(x_0) = \alpha x_0$ et comme $x_0 \neq 0$, alors on a $\alpha = \pm 1$.

Si $g(x_0) = x_0$, alors f et g ont même axe de rotation.

Si $g(x_0) = -x_0$, alors -1 est une valeur propre de g et comme g est une rotation, alors g est un demi-tours. Soit $y_0 \in E$, tel que $\Delta_g = \text{Vect}(y_0)$, alors on a $\langle x_0, y_0 \rangle = 0$, car $g(x_0) = -x_0$. De la même manière on voit que $f(y_0) = \pm y_0$ et comme $\langle x_0, y_0 \rangle = 0$, alors on a $f(y_0) = -y_0$, donc f est aussi un demi-tours. Il en résulte donc que f et g sont des demi-tours d'axes orthogonaux.

($\Leftarrow$) Supposons que f et g ont même axe et soit $x_0 \in E$, avec $\|x_0\| = 1$, tel que $\Delta_f = \Delta_g = \text{Vect}(x_0)$. Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de E , tel que $e_1 = x_0$ et soient A et B les matrices de f et g par rapport à la base β , alors on sait que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Il est facile de voir que $AB = BA$, donc $f \circ g = g \circ f$.

Supposons que f et g sont des demi-tours d'axes orthogonaux. Soit $y_0 \in E$, avec $\|y_0\| = 1$, tel que $\Delta_g = \text{Vect}(y_0)$ et soit $z_0 \in E$, tel que $\gamma = (x_0, y_0, z_0)$ soit une base orthonormale directe de E , alors les matrices A et B de f et g par rapport à la base γ sont respectivement définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc $AB = BA$ et par suite on a $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 224

1. Soit $x \in E$, alors on a $\langle u(x), x \rangle = -\langle x, u(x) \rangle = -\langle u(x), x \rangle$, car u est antisymétrique, donc $\langle u(x), x \rangle = 0$.
2. Soient $x, y \in E$, alors on a $\langle u(x+y), x+y \rangle = 0$ et on a

$$\langle u(x+y), x+y \rangle = \langle u(x), y \rangle + \langle x, u(y) \rangle$$

Donc pour tout $x, y \in E$, on a $\langle u(x), y \rangle = \langle x, (-u)(y) \rangle$, par suite, d'après l'unicité de l'adjoint, on a $u^* = -u$, donc u est antisymétrique.

3. a) On a $\text{Im}(u) = \ker(u^*)^\perp$ et comme $u^* = -u$, alors on a $\text{Im}(u) = \ker(u)^\perp$.
- b) Soit λ une valeur propre de u , alors il existe $x \in E$, avec $x \neq 0$, tel que $u(x) = \lambda x$. D'après la question 1), on a $\langle u(x), x \rangle = 0$, donc on a $\lambda \|x\|^2 = 0$, avec $\|x\| \neq 0$, donc $\lambda = 0$.
- c) On a $u^* = -u$, donc $\det(u) = \det(u^*) = (-1)^n \det(u)$, par suite, si on suppose que u est inversible, alors $\det(u) \neq 0$, donc $(-1)^n = 1$, ce qui prouve que n est pair.
- d) Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$, alors v est un endomorphisme symétrique de $\text{Im}(u)$.
Or, d'après a), on a $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$, donc v est inversible, par conséquent, d'après c), $\dim(\text{Im}(u))$ est paire, donc le rang de u est pair.

4. a) i) Pour tout $x \in E$, on a

$$\langle u(x), x \rangle = \langle a \wedge x, x \rangle = \det(a, x, x) = 0$$

donc d'après la question 2), u est antisymétrique.

- ii) Soit $x \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} x \in \ker(u) &\iff a \wedge x = 0 \\ &\iff (a, x) \text{ est lié} \\ &\iff x \in \text{Vect}(a) \end{aligned}$$

donc $\ker(u) = \text{Vect}(a)$ et d'après 3)a), on a $\text{Im}(u) = \text{Vect}(a)^\perp$.

- iii) Comme (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale de E , alors on a $u(e_1) = \gamma e_2 - \beta e_3$, $u(e_2) = -\gamma e_1 + \alpha e_3$ et $u(e_3) = \beta e_1 - \alpha e_2$, donc la matrice A de u par rapport à (e_1, e_2, e_3) est définie par :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

- b) i) D'après 3)c), on a $\dim(\ker(u)) \geq 1$, car 3 est impair, et d'après 3)d), on a $\dim(\text{Im}(u)) \geq 2$, car $u \neq 0$, donc d'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(u)) \leq 1$, par conséquent, on a $\dim(\ker(u)) = 1$.
- ii) On a $u(y_0) = \langle u(y_0), x_0 \rangle x_0 + \langle u(y_0), y_0 \rangle y_0 + \langle u(y_0), z_0 \rangle z_0$, avec $\langle u(y_0), x_0 \rangle = -\langle y_0, u(x_0) \rangle = 0$, car $u(x_0) = 0$, et $\langle u(y_0), y_0 \rangle = 0$, car u est antisymétrique. Donc on en déduit que $u(y_0) = \langle u(y_0), z_0 \rangle z_0$, puis comme (x_0, y_0, z_0) est une

base orthonormale directe, alors on a $z_0 = x_0 \wedge y_0$ et par suite, on a $u(y_0) = \langle u(y_0), z_0 \rangle x_0 \wedge y_0$. De la même manière on voit que $u(y_0) = \langle u(y_0), z_0 \rangle x_0 \wedge z_0$.

- iii) On pose $a = \langle u(y_0), z_0 \rangle x_0$ et soit v l'endomorphisme de E défini pour tout $x \in E$, par $v(x) = a \wedge x$, alors il est facile de voir que $v(x_0) = u(x_0) = 0$, $v(y_0) = u(y_0)$ et $v(z_0) = u(z_0)$. Comme (x_0, y_0, z_0) est une base de E , alors $v = u$, donc pour tout $x \in E$, on a $u(x) = a \wedge x$. L'unicité de a découle de la question 4)a)iii).

Exercice 225

1. Soient $x, y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} \langle u(x), y \rangle &= \langle a \wedge (b \wedge x), y \rangle = \det(a, b \wedge x, y) \\ &= -\det(a, y, b \wedge x) = -\langle a \wedge y, b \wedge x \rangle \\ &= -\det(b, x, a \wedge y) = \det(x, b, a \wedge y) \\ &= \langle x, b \wedge (a \wedge y) \rangle \end{aligned}$$

On en déduit donc que pour tout $x \in E$, on a $u^*(x) = b \wedge (a \wedge x)$.

2. Si (a, b) est lié, puisque $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $b = \lambda a$, donc pour tout $x \in E$, on a

$$u^*(x) = (\lambda a) \wedge (a \wedge x) = a \wedge ((\lambda a) \wedge x) = u(x)$$

Par suite, u est symétrique.

3. Réciproquement, supposons que u est symétrique. D'après la formule du double produit vectoriel, pour tout $x \in E$, on a

$$u(x) = \langle a, x \rangle b - \langle a, b \rangle x \quad \text{et} \quad u^*(x) = \langle b, x \rangle a - \langle b, a \rangle x$$

Puisque u est symétrique, alors pour tout $x \in E$, on a

$$\langle a, x \rangle b = \langle b, x \rangle a$$

Par suite, pour tout $x \in E$, on a $x \wedge (a \wedge b) = \langle b, x \rangle a - \langle a, x \rangle b = 0$, donc $a \wedge b = 0$ et par conséquent, (a, b) est lié.

4. D'après la formule du double produit vectoriel, on a

$$\begin{aligned} u \text{ est un projecteur} &\iff u^2 = u \\ &\iff \forall x \in E, u(u(x)) = u(x) \\ &\iff \forall x \in E, u(a \wedge (b \wedge x)) = u(x) \\ &\iff \forall x \in E, u(\langle a, x \rangle b - \langle a, b \rangle x) = u(x) \\ &\iff \forall x \in E, -\langle a, b \rangle u(x) = u(x), \text{ (car } u(b) = 0) \\ &\iff \langle a, b \rangle = -1 \end{aligned}$$

5. ($\Rightarrow$) Supposons que u est un projecteur orthogonal.

Puisque u est un projecteur, alors, d'après la question précédente, $\langle a, b \rangle = -1$ et puisque u est un projecteur orthogonal, alors u est symétrique, donc, d'après la question 3), (a, b) est lié.

Comme $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $b = \alpha a$ et comme $\langle a, b \rangle = -1$, alors $\alpha \|a\|^2 = -1$, par suite, on a $\alpha = -\frac{1}{\|a\|^2}$.

- ($\Leftarrow$) Supposons que $b = -\frac{a}{\|a\|^2}$, donc (a, b) est lié, donc, d'après la question 2), u est symétrique.

D'autre part, on a $\langle a, b \rangle = -\frac{\langle a, a \rangle}{\|a\|^2} = -1$, donc d'après la question précédente, u est un projecteur. On a donc $u^2 = u$ et $u^* = u$, donc u est un projecteur orthogonal.

6. u est un projecteur orthogonal, donc, d'après la question précédente, $b = -\frac{a}{\|a\|^2}$. D'après la formule du double produit vectoriel pour tout $x \in E$, on a

$$u(x) = \langle a, x \rangle b - \langle a, b \rangle x = x - \frac{\langle a, x \rangle}{\|a\|^2} a \quad (\text{car } \langle a, b \rangle = -1)$$

Donc, u est la projection orthogonale sur l'hyperplan $\text{Vect}(a)^\perp$ et par conséquent, on a $\ker(u) = \text{Vect}(a)$ et $\text{Im}(u) = \text{Vect}(a)^\perp$.

Exercice 226

1. a) Soit $x \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \langle u(x), u(x) \rangle = \langle (u^* \circ u)(x), x \rangle \\ &= \langle (u \circ u^*)(x), x \rangle = \langle u^*(x), u^*(x) \rangle = \|u^*(x)\|^2 \end{aligned}$$

donc pour tout $x \in E$, on a $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

- b) D'après a), pour tout $x \in E$, on a $u(x) = 0$, si et seulement si, $u^*(x) = 0$, donc on en déduit que $\ker(u^*) = \ker(u)$.
- c) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $v = u - \lambda Id_E$, alors comme u est normal, il est facile de voir que v est normal, donc d'après b), on voit que $\ker(v^*) = \ker(v)$.
- d) Pour montrer que $F^\perp$ est stable par u , il suffit de montrer que F est stable par u^* . Soit p la projection orthogonale sur F , comme $p^* = p$, alors il est facile de voir que F est stable pour u et u^* , si et seulement si, u et p commutent. Comme F est stable par u , alors on voit facilement que $pu = up$ et comme $p^* = p$, alors on a aussi

$pu^*p = pu^*$. On pose $v = up - pu$, alors on sait que $v = 0$, si et seulement, $\text{tr}(v^*v) = 0$. On a

$$\begin{aligned} v^*v &= (pu^* - u^*p)(up - pu) = pu^*up - pu^*pu - u^*pup + u^*pu \\ &= pu^*up - (pu^*p)u + u^*pu - u^*(pup) \\ &= pu^*up - pu^*u + u^*pu - u^*up \\ &= pu^*u(p - Id_E) + ((u^*p)u - u(u^*p)) \quad (\text{car } u^*u = uu^*) \end{aligned}$$

On a $\text{tr}(pu^*u(p - Id_E)) = \text{tr}((p - Id_E)pu^*u) = 0$, car $p^2 = p$, et on a $\text{tr}((u^*p)u - u(u^*p)) = 0$, car $(u^*p)u - u(u^*p)$ est un commutateur, donc $\text{tr}(v^*v) = 0$ et par suite, on a $v = 0$. Il en résulte que u et p commutent, donc $F^\perp$ est stable par u .

2. On suppose que $\dim(E) = 2$.

- a) Supposons que u possède une valeur propre réelle λ et soit $e_1 \in E$ un vecteur unitaire, tel que $u(e_1) = \lambda e_1$. Puisque $\text{Vect}(e_1)$ est stable par u , alors d'après la question précédente, $\{e_1\}^\perp$ est aussi stable par u . Soit $e_2 \in \{e_1\}^\perp$ un vecteur unitaire, alors il existe $\mu \in \mathbb{R}$, tel que $u(e_2) = \mu e_2$, car $\{e_1\}^\perp = \text{Vect}(e_2)$, donc (e_1, e_2) est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u .
- b) On suppose que u ne possède aucune valeur propre réelle.
 - i) Puisque $u^* + u$ est symétrique, alors il possède au moins une valeur propre réelle λ .
 - ii) Comme u est normal, alors u et $u^* + u$ commutent, donc E_λ est stable par u .
 - iii) E_λ est stable par u et u n'a aucune valeur propre réelle, donc $\dim(E_\lambda) \geq 2$, puis comme $\dim(E) = 2$, alors on a $\dim(E_\lambda) = 2$. Ainsi, on a $E_\lambda = E$, donc on en déduit que $u^* + u = \lambda Id_E$.
 - iv) Soit (e_1, e_2) une base orthonormale de E et soit A la matrice de u par rapport à (e_1, e_2) . En tenant compte que $u^* + u = \lambda Id_E$, on aura

$$\begin{cases} a_{11} = \langle u(e_1), e_1 \rangle = \frac{\lambda}{2} \\ a_{21} = \langle u(e_1), e_2 \rangle \\ a_{12} = \langle u(e_2), e_1 \rangle = -\langle u(e_1), e_2 \rangle = -a_{21} \\ a_{22} = \langle u(e_2), e_2 \rangle = \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

Donc si on pose $a = \frac{\lambda}{2}$ et $b = \langle u(e_2), e_1 \rangle$, alors on aura

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

3. a) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soit u un endomorphisme de E .

Si u possède une valeur propre réelle λ et si x est un vecteur propre associé à λ , alors $F = \text{Vect}(x)$ est stable par u et on a $\dim(F) = 1$. Si u n'admet aucune valeur propre réelle, alors tous les diviseurs irréductibles réels de χ_u , où χ_u est le polynôme caractéristique de u , sont de degré deux. Soit P un diviseur irréductible de χ_u , alors on a $P = X^2 + bX + c$, avec $b^2 - 4c < 0$, et soit $x \in E$ un vecteur non nul, tel que $P(u)(x) = 0$. Puisque u n'admet aucune valeur propre réelle, alors $(u(x), x)$ est libre. Soit $F = \text{Vect}(u(x), x)$, alors on a $\dim(F) = 2$ et comme $u^2(x) = -bu(x) - cx$, alors F est stable par u . Ainsi, nous avons établi que u possède un sous-espace vectoriel stable de dimension un ou deux.

- b) Soit u un endomorphisme normal de E . Montrons que $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$, où $E_1, E_2, \dots, E_r$ sont de dimension 1 ou 2, stables par u et deux à deux orthogonaux. Pour cela, on procède par récurrence sur n , avec $n = \dim(E)$.

Si $n = 1$ il n'y a rien à montrer

Supposons que $n > 1$ et que la propriété est vraie pour tout $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $< n$.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n et soit u un endomorphisme normal de E . D'après la question précédente, u possède un sous-espace vectoriel F stable de dimension 1 ou 2 et comme u est normal, alors d'après la question 1)d), $F^\perp$ est stable par u . Soit v l'endomorphisme induit par u sur $F^\perp$. Comme u est normal, alors d'après la question 1)d), $F^\perp$ est stable par u^* , donc v est un endomorphisme normal de $F^\perp$ et comme $\dim(F^\perp) < n$, alors d'après l'hypothèse de récurrence, on a $F^\perp = \bigoplus_{i=1}^r F_i$, où $F_1, F_2, \dots, F_r$ sont de dimension 1 ou 2, stables par v et deux à deux orthogonaux. On en déduit donc que $E = F \oplus F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_r$.

4. Soit u un endomorphisme normal de E , alors d'après la question précédente, $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$, où $E_1, E_2, \dots, E_r$ sont de dimension 1 ou 2, stables par u et deux à deux orthogonaux. On suppose que $E_1, \dots, E_s$ sont de dimension 1 et $E_{s+1}, \dots, E_r$ sont de dimension 2, avec $s \in \mathbb{N}_r$. Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, soit v_i l'endomorphisme induit par u sur E_i , alors pour $i \in \{1, \dots, s\}$, on a $v_i = \lambda_i \text{Id}_{E_i}$ et pour $i \in \{s+1, \dots, r\}$, d'après la question 2), v_i est diagonalisable ou la matrice de v_i par rapport à une base orthonormale est sous la forme $\begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$. Il en résulte qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit

sous la forme $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, A_1, \dots, A_q)$, avec $A_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ et $p + 2q = n$.

Exercice 227

1. Pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, on a $a_{ij} = \langle (u^*u)(e_j), e_i \rangle = \langle u(e_i), u(e_j) \rangle$, donc si $i \neq j$, alors $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, donc $\langle u(e_i), u(e_j) \rangle = 0$, par suite, pour $i \neq j$, on a $a_{ij} = 0$.
2. Soit $x \in E$, alors pour tout $y \in \{x\}^\perp$, on a

$$\langle (u^*u)(x), y \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle = 0$$

donc $(u^*u)(x) \in \text{Vect}(x)$, par suite, il existe $\alpha(x) \in \mathbb{R}$, tel que $(u^*u)(x) = \alpha(x)x$.

3. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , alors d'après la question 1), pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on a $(u^*u)(e_i) = \alpha_i e_i$. Il suffit donc de montrer que pour $i \neq j$, on a $\alpha_i = \alpha_j$. Soit $i, j \in \mathbb{N}$, avec $i \neq j$, alors on a $(u^*u)(e_i + e_j) = \alpha(e_i + e_j)(e_i + e_j)$ et on a $(u^*u)(e_i + e_j) = \alpha_i e_i + \alpha_j e_j$, puis comme (e_i, e_j) est libre, alors on a $\alpha_i = \alpha_j = \alpha(e_i + e_j)$. Donc si on pose $\alpha = \alpha_1 = \dots = \alpha_n$, alors pour tout $x \in E$, on a $(u^*u)(x) = \alpha x$, donc $u^*u = \alpha \text{Id}_E$, avec $\alpha > 0$, car u^*u est défini positif.
4. On pose $k = \sqrt{\alpha}$ et $v = \frac{1}{k}u$, alors on a $v^*v = \frac{1}{k^2}u^*u = \text{Id}_E$, donc v est un endomorphisme orthogonal et on a $u = kv$.

Exercice 228

1. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$ -linéaire.

a) Soit $z \in \mathbb{C}$, alors on a

$$\begin{aligned} f(z) &= f\left(\frac{z + \bar{z}}{2} + i\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) \\ &= \frac{z + \bar{z}}{2}f(1) + \frac{z - \bar{z}}{2i}f(i) \quad (\text{car } \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ et } \frac{z - \bar{z}}{2i} \text{ sont réels}) \\ &= \frac{1}{2}(f(1) - if(i))z + \frac{1}{2}(f(1) + if(i))\bar{z} \end{aligned}$$

Donc, il suffit de prendre $\alpha = \frac{1}{2}(f(1) - if(i))$ et $\beta = \frac{1}{2}(f(1) + if(i))$

- b) La base canonique $(1, i)$ est orthonormale pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{C}$, donc on aura

$$\text{tr}(f) = \langle u(1), 1 \rangle + \langle u(i), i \rangle = \text{Re}(\alpha + \beta) + \text{Re}(\alpha - \beta) = 2\text{Re}(\alpha)$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
 \det(f) &= \langle u(1), 1 \rangle \langle u(i), i \rangle - \langle u(i), 1 \rangle \langle u(1), i \rangle \\
 &= \operatorname{Re}(\alpha + \beta) \operatorname{Re}(\alpha - \beta) - \operatorname{Re}(i(\alpha - \beta)) \operatorname{Re}(-i(\alpha + \beta)) \\
 &= \operatorname{Re}(\alpha + \beta) \operatorname{Re}(\alpha - \beta) + \operatorname{Re}(i(\alpha - \beta)) \operatorname{Re}(i(\alpha + \beta)) \\
 &= \operatorname{Re}(\alpha + \beta) \operatorname{Re}(\alpha - \beta) + \operatorname{Im}(\alpha - \beta) \operatorname{Im}(\alpha + \beta) \\
 &= \operatorname{Re}(\alpha)^2 - \operatorname{Re}(\beta)^2 + \operatorname{Im}(\alpha)^2 - \operatorname{Im}(\beta)^2 \\
 &= |\alpha|^2 - |\beta|^2
 \end{aligned}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $z \neq 0$. Il suffit de montrer la contreaposée $(z, \bar{z})$ est lié, si et seulement si, $z^2 \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
 (z, \bar{z}) \text{ est lié} &\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } \bar{z} = \alpha z \\
 &\iff \frac{\bar{z}}{z} \in \mathbb{R} \iff \frac{\bar{z}}{z} = \frac{z}{\bar{z}} \\
 &\iff z^2 = \bar{z}^2 = \overline{z^2} \iff z^2 \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Donc on en déduit que $(z, \bar{z})$ est libre, si et seulement si, $z^2 \notin \mathbb{R}$.

3. Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, alors on a

$$\begin{aligned}
 \langle u(z), z' \rangle &= \operatorname{Re}((\alpha z + \beta \bar{z}) \overline{z'}) = \operatorname{Re}(\alpha z \overline{z'}) + \operatorname{Re}(\beta \bar{z} \overline{z'}) \\
 &= \operatorname{Re}(\alpha z \overline{z'}) + \operatorname{Re}(\beta \overline{z z'}) = \operatorname{Re}(z(\alpha \overline{z'} + \beta \overline{z'})) \\
 &= \operatorname{Re}(z(\overline{\alpha z' + \beta z'})) = \langle z, \overline{\alpha z' + \beta z'} \rangle
 \end{aligned}$$

Donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $f^*(z) = \overline{\alpha}z + \beta \bar{z}$.

4. a) f est symétrique, si et seulement si, $f^* = f$, donc d'après la question précédente, f est symétrique, si et seulement si, $\alpha = \overline{\alpha}$. Donc f est symétrique pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{C}$.
- b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $(f^* f)(z) = (|\alpha|^2 + |\beta|^2)z + 2\overline{\alpha}\beta \bar{z}$. Donc f est orthogonal, si et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$(|\alpha|^2 + |\beta|^2)z + 2\overline{\alpha}\beta \bar{z} = z$$

donc en particulier pour $z = 1$ et $z = i$, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) + 2\overline{\alpha}\beta = 1 \\ (|\alpha|^2 + |\beta|^2) - 2\overline{\alpha}\beta = 1 \end{cases}$$

ce qui donne $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ et $\overline{\alpha}\beta = 0$. On en déduit donc que f est orthogonal, si et seulement si, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ et $\alpha\beta = 0$.

- c) f est une rotation, si et seulement si, f est orthogonal et $\det(f) = 1$, donc d'après la question 1)b), f est une rotation, si et seulement si,

$$\begin{cases} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \\ \alpha\beta = 0 \end{cases}$$

Donc on en déduit que f est une rotation, si et seulement si, $|\alpha| = 1$ et $\beta = 0$.

- d) f est une symétrie orthogonale, si et seulement si, f est orthogonal et $\det(f) = -1$. Donc on en déduit que f est une symétrie orthogonale, si et seulement si, $\alpha = 0$ et $|\beta| = 1$.

5. f est projection orthogonale, si et seulement si, $f^2 = f$ et f symétrique. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $f^2(z) = (\alpha^2 + |\beta|^2)z + (\alpha\beta + \bar{\alpha}\beta)\bar{z}$, donc f est projection orthogonale, si et seulement si, $\alpha^2 + |\beta|^2 = \alpha$, $(\alpha + \bar{\alpha})\beta = \beta$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme $\beta \neq 0$, alors on en déduit que f est projection orthogonale, si et seulement si, $\alpha = \frac{1}{2}$ et $|\beta| = \frac{1}{2}$.

Exercice 229

1. Soit $x \in E$, avec $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, alors on a

$$\|u_\sigma(x)\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n x_{\sigma(k)} e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n x_{\sigma(k)}^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 = \|x\|^2$$

Donc u_σ est un endomorphisme orthogonal.

2. Pour tout $\sigma \in S_n$, on remarque que

$$u_\sigma(e_1 + e_2 + \cdots + e_n) = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$$

Donc 1 est une valeur propre commune à tous les u_σ .

3. Soit $H = \{e_1 + e_2 + \cdots + e_n\}^\perp$, alors H est un hyperplan de E stable pour tous les u_σ .

Exercice 230

${}^tAA - A{}^tA$ est symétrique donc toutes les valeurs propres de ${}^tAA - A{}^tA$ sont réelles. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de ${}^tAA - A{}^tA$, comme ${}^tAA - A{}^tA$ est positive, alors tous les λ_i sont positives. ${}^tAA - A{}^tA$ est un commutateur, donc $\text{tr}({}^tAA - A{}^tA) = 0$, par suite, on a $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0$, puis comme les λ_i sont positives, alors on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, donc on a ${}^tAA = A{}^tA$.

Exercice 231

1. a) Montrons que $AB - BA = 0$. Comme A est symétrique et B antisymétrique, alors $AB - BA$ est symétrique, donc il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle (AB - BA)x, x \rangle = 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle (AB - BA)x, x \rangle = \langle ABx, x \rangle - \langle BAx, x \rangle = 2 \langle Ax, Bx \rangle$$

D'autre part, comme $A + B$ est orthogonal, alors ${}^t(A + B)$ est aussi orthogonal, avec ${}^t(A + B) = A - B$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|(A + B)x\| = \|(A - B)x\| = \|x\|$$

Donc on en déduit que $\langle Ax, Bx \rangle = 0$, ce qui prouve que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle (AB - BA)x, x \rangle = 0$, par suite, on a $AB - BA = 0$. Comme $A + B$ est orthogonal, alors ${}^t(A + B)(A + B) = I$, donc $(A - B)(A + B) = I$ et comme $AB - BA = 0$, alors $A^2 - B^2 = I$.

- b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé à λ , avec $\|x\| = 1$. On a $\langle (A + B)x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle = \lambda$, car $\langle Bx, x \rangle = 0$, donc on a

$$|\lambda| = |\langle (A + B)x, x \rangle| \leq \|(A + B)x\|$$

avec $\|(A + B)x\| = \|x\| = 1$, donc $|\lambda| \leq 1$, par suite, $\lambda \in [-1, 1]$.

Supposons que $\lambda \in]-1, 1[$. On a $A^2 - B^2 = I$, alors on en déduit que pour tout $x \in E_\lambda$, on a $B^2x = (\lambda^2 - 1)x$ et comme $AB = BA$, alors E_λ est stable par B . Soit v la restriction de l'endomorphisme canoniquement associé à E_λ , alors on a $v^2 = (\lambda^2 - 1)Id_{E_\lambda}$, puis comme $\lambda^2 - 1 \neq 0$, alors on en déduit que v est inversible et comme v est antisymétrique, alors d'après l'exercice 220, E_λ est de dimension paire.

2. D'après ce qui précède, on suggère que si A est une matrice symétrique, alors il existe une matrice antisymétrique B , telle que $A + B$ soit orthogonale, si et seulement si, $Sp(A) \subseteq [-1, 1]$ et si $\lambda \in]-1, 1[$, alors E_λ est de dimension paire. En effet, d'après la question précédente, la condition est nécessaire. Pour montrer que la condition est suffisante, soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de A qui sont dans $]-1, 1[$, alors on a $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_{-1} \oplus E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$, avec $\dim(E_1) \geq 0$, $\dim(E_{-1}) \geq 0$ et $\dim(E_{\lambda_i}) = 2n_i$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé canoniquement à A et soit β une base orthonormale adaptée à la somme directe $E_1 \oplus E_{-1} \oplus E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$, alors la matrice de u par rapport à la base β s'écrit sous la forme

$$M = \text{diag}(I_p, -I_q, \underbrace{\lambda_1 I_2, \dots, \lambda_1 I_2}_{n_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_r I_2, \dots, \lambda_r I_2}_{n_r \text{ fois}})$$

Pour chaque $i \in \mathbb{N}_r$, soit $A_i = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1-\lambda_i^2} \\ \sqrt{1-\lambda_i^2} & 0 \end{pmatrix}$ et soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice par rapport à β s'écrit sous la forme

$$N = \text{diag}(O_{p+q}, \underbrace{A_1, \dots, A_1}_{n_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{A_r, \dots, A_r}_{n_r \text{ fois}})$$

où O_{p+q} est la matrice nulle d'ordre $p+q$, alors il est facile de voir que N est antisymétrique, $MN = NM$ et que $M^2 - N^2 = I$, donc $M + N$ est une matrice orthogonale. On en déduit donc que si B est la matrice de v par rapport à base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $A + B$ est orthogonale.

CHAPITRE 10

FORMES SESQUILINÉAIRES - FORMES QUADRATIQUES HERMITIENNES

10.1 Formes sesquilineaires - Formes hermitiennes

10.1.1 Quelques rappels sur les nombres complexes

Rappelons que pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $z = a + ib$, où i est le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

Dans ce cas, le conjugué, la partie réelle, la partie imaginaire et le module de z sont respectivement définis par :

$$\bar{z} = a - ib, \quad \operatorname{Re}(z) = a, \quad \operatorname{Im}(z) = b \quad \text{et} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Rappelons aussi que si $z, z - 1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors on a les identités remarquables suivantes :

i) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}.$

ii) $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$

iii) $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z) \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z).$

iv) $|z|^2 = z\bar{z}$

v) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2).$

vi) $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2).$

vii) $\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \frac{1}{4}|z_1 + z_2|^2 - \frac{1}{4}|z_1 - z_2|^2.$

10.1.2 Définition et propriétés de base

Définition 10.1.1

Soient E et F deux $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels, on dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est semi-linéaire, si

- i) $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y),$
- ii) $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in E, f(\alpha x) = \overline{\alpha} f(x).$

Remarque 116

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une application.

Soit $g : E \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie pour tout $x \in E$, par $g(x) = \overline{f(x)}$, alors f est semi-linéaire si, et seulement si, g est linéaire.

Définition 10.1.2

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ une application.

- a) On dit que f est une forme sesquilineaire sur E , si
 - i) Pour tout $x \in E$, l'application $\varphi_x : E \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $y \in E$, par $\varphi_x(y) = f(x, y)$ est linéaire.
 - ii) Pour tout $y \in E$, l'application $\varphi_y : E \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $x \in E$, par $\varphi_y(x) = f(x, y)$ est semi-linéaire.
- b) Une forme sesquilineaire est dite hermitienne, si

$$\forall (x, y) \in E \times E, f(x, y) = \overline{f(y, x)}$$

Remarque 117

$f : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est une forme sesquilineaire, si, et seulement si,

- i) $\forall x \in E, \forall y_1 \in E, \forall y_2 \in E, f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2),$
- ii) $\forall y \in E, \forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E, f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y),$
- iii) $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall \beta \in \mathbb{C}, \forall x \in E, \forall y \in E, f(\alpha x, \beta y) = \overline{\alpha} \beta f(x, y).$

10.1.3 Matrice d'une forme sesquilineaire

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme sesquilineaire sur E et $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Alors pour chaque

$(x, y) \in E \times E$, avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, on a

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i e_i, y_j e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{x}_i y_j f(e_i, e_j)$$

Définition 10.1.3

La matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $M_n(\mathbb{C})$, définie pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}$, par $a_{ij} = f(e_i, e_j)$, s'appelle la matrice de f par rapport à la base β .

Notations

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, on pose

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{et} \quad A^* = {}^t(\bar{A})$$

et on dit que A^* est la matrice adjointe de A . On vérifie facilement, qu'on a

$$\text{i) } \forall A \in M_n(\mathbb{C}), \forall B \in M_n(\mathbb{C}), \quad \overline{AB} = \bar{A} \bar{B}.$$

$$\text{ii) } \forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad \bar{{}^t A} = {}^t(\bar{A}).$$

Remarque 118

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme sesquilinéaire sur E , $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de f par rapport à la base β . Alors

$$1. \text{ Pour tout } (x, y) \in E \times E, \text{ on a } f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_i y_j$$

$$2. \text{ } f \text{ est hermitienne} \iff A^* = A$$

$$3. \text{ Si } f \text{ est hermitienne, alors pour tout } (x, y) \in E \times E, \text{ on a}$$

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_i y_j = \sum_{i=1}^n a_{ii} \bar{x}_i y_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} \bar{x}_i y_j + \bar{a}_{ij} \bar{x}_j y_i)$$

Donc, en particulier, pour tout $x \in E$, on a

$$f(x, x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} \bar{x}_i x_j + \bar{a}_{ij} x_i \bar{x}_j)$$

10.1.4 Ecriture matricielle

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme sesquilinéaire sur E , $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de f par rapport à la base β . Pour chaque $x \in E$ avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on pose

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix}$$

Alors, f possède une expression matricielle sous la forme :

$$\boxed{\forall (x, y) \in E \times E, f(x, y) = {}^t \overline{X} A Y}$$

En effet, on a

$$\forall (x, y) \in E \times E, {}^t \overline{X} A Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \overline{x}_i y_j$$

10.1.5 Changement de base

Proposition 10.1.1

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme sesquilinéaire sur E . Soient β et γ deux bases de E , A et B sont, respectivement, les matrices de f par rapport aux bases β et γ et P la matrice de passage de β à γ . Alors on a

$$\boxed{B = P^* A P}$$

Démonstration. Soient $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Donc, on sait que pour tout $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i v_i$, on a $X = P X'$.

D'après l'écriture matricielle par rapport à chacune des deux bases, pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a

$$f(x, y) = {}^t \overline{X'} B Y' = {}^t \overline{X} A Y = {}^t \overline{P X'} A (P Y') = {}^t \overline{X'} ({}^t \overline{P} A P) Y'$$

Donc, on aura

$$\forall X' \in \mathbb{C}^n, \forall Y' \in \mathbb{C}^n, {}^t \overline{X'} B Y' = {}^t \overline{X'} ({}^t \overline{P} A P) Y'$$

par suite, on a $B = {}^t \overline{P} A P$. □

10.1.6 Rang d'une forme sesquilinéaire

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme sesquilinéaire sur E , β et γ deux bases de E , A et B sont, respectivement, les matrices de f par rapport aux bases β et γ et P la matrice de passage de β à γ . Alors on sait que $B = {}^t\overline{P}AP$, donc A et B sont équivalentes et par suite, A et B ont même rang. Ainsi, la définition suivante a un sens :

Définition 10.1.4

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme sesquilinéaire sur E et A la matrice de f par rapport à n'importe quelle base de E . Alors le rang de f est défini par

$$\text{rang}(f) = \text{rang}(A)$$

10.1.7 Formes hermitienne non dégénérée

Définition 10.1.5

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel quelconque et h une forme hermitienne sur E . On considère l'application $\Phi : E \longrightarrow E^*$ qui à $x \in E$ fait correspondre φ_x , où pour tout $y \in E$, on a $\varphi_x(y) = h(x, y)$. Si Φ est injective, on dit que h est non dégénérée.

Remarque 119

D'après la définition précédente, h est non dégénérée, si et seulement si, pour un certain $x \in E$, on a $h(x, y) = 0$ pour tout $y \in E$, alors nécessairement, on a $x = 0$.

Proposition 10.1.2

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, β une base de E , h une forme hermitienne sur E et A la matrice de h par rapport à la base β . Alors,

$$[h \text{ est non dégénérée}] \iff \det(A) \neq 0$$

Démonstration. On considère l'application $\Phi : E \longrightarrow E^*$ qui à chaque x fait correspondre φ_x . Posons $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\beta^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de β . Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de Φ par rapport aux bases β et β^* , alors pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $\Phi(e_j) = \sum_{k=1}^n m_{kj} e_k^*$. Donc pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$h(e_i, e_j) = \overline{h(e_j, e_i)} = \overline{\Phi(e_j)(e_i)} = \sum_{k=1}^n \overline{m_{kj} e_k^*(e_i)} = \overline{m_{ij}} \quad (\text{car } e_k^*(e_i) = \delta_{ik})$$

On en déduit donc que $M = \overline{A}$. Ainsi, on aura,

$$\begin{aligned} f \text{ est non dégénérée} &\iff \Phi \text{ est injective} \quad (\text{par définition}) \\ &\iff \Phi \text{ est bijective} \quad (\text{car } E \text{ et } E^* \text{ ont même dimension}) \\ &\iff \det(M) \neq 0 \\ &\iff \det(\overline{A}) \neq 0 \quad (\text{car } M = \overline{A}) \\ &\iff \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

10.1.8 Orthogonalité

Définition 10.1.6

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel quelconque, h une forme hermitienne sur E . Soit A une partie non vide de E , on définit l'orthogonale de A , par rapport à la forme hermitienne h , noté $A^\perp$, par :

$$\forall y \in E, y \in A^\perp \iff \forall x \in A, h(x, y) = 0$$

Remarque 120

1. Soient A et B deux parties non vides de E , telles que $A \subseteq B$, alors $B^\perp \subseteq A^\perp$.
2. Pour toute partie non vide A de E , on a $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.
3. Pour toute partie non vide A de E , même si A n'est pas un sous-espace vectoriel de E , $A^\perp$ est toujours un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 10.1.3

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et h une forme hermitienne sur E , alors pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a

- i) $\dim(F) + \dim(F^\perp) \geq \dim(E)$.
- ii) Si de plus h est non dégénérée, alors on a

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E) \quad \text{et} \quad F^{\perp\perp} = F$$

Démonstration. La démonstration est la même que dans le cas des formes bilinéaires symétriques. □

Définition 10.1.7

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et h une forme hermitienne sur E .

- i) On dit que deux vecteurs x et y de E sont **orthogonaux**, si $h(x, y) = 0$.
- ii) On dit qu'un vecteur $x \in E$ est **isotrope**, si $h(x, x) = 0$.
- iii) Un sous-espace vectoriel F de E est dit **isotrope**, si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$.
- iv) Un sous-espace vectoriel F de E est dit **totalelement isotrope**, si $F \subseteq F^\perp$.

Théorème 10.1.1

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel quelconque, h une forme hermitienne sur E et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors

$$E = F \oplus F^\perp \iff F \text{ est non isotrope}$$

Démonstration. Ce théorème se démontre de la même manière que dans le cas d'une forme bilinéaire symétrique. □

10.1.9 Bases orthogonales

Définition 10.1.8

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et h une forme hermitienne sur E . On dit qu'une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E est **orthogonale** pour h , si pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, avec $i \neq j$, on a $h(e_i, e_j) = 0$.

Remarque 121

Supposons que E possède une base orthogonale $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de h par rapport à β , donc pour $i \neq j$, on a $a_{ij} = h(e_i, e_j) = 0$. Donc A est une matrice diagonale et pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et

$y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, on a $h(x, y) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \bar{x}_i y_i$. En particulier, pour tout $x \in E$, avec

$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $h(x, x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} |x_i|^2$.

Dans la suite on se propose de montrer que toute forme hermitienne possède au moins une base orthogonale.

Lemme 10.1.1

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et f une forme hermitienne sur E . Alors

$$h \text{ est identiquement nulle} \iff \forall x \in E, h(x, x) = 0$$

Démonstration. $(\implies)$ Trivial.

$(\impliedby)$ Supposons que pour tout $x \in E$, $h(x, x) = 0$ et montrons que h est identiquement nulle. Soient $(x, y) \in E \times E$, alors on a $h(x+y, x+y) = 0$ et $h(ix+y, ix+y) = 0$. Or, on sait que

$$h(x+y, x+y) = h(x, x) + h(y, y) + 2\operatorname{Re}(h(x, y)) = 2\operatorname{Re}(h(x, y))$$

et on sait aussi que

$$h(ix+y, ix+y) = h(x, x) + h(y, y) + 2\operatorname{Im}(h(x, y)) = 2\operatorname{Im}(h(x, y))$$

donc $\operatorname{Re}(h(x, y)) = \operatorname{Im}(h(x, y)) = 0$, par suite, $h(x, y) = 0$. $\square$

Théorème 10.1.2

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors toute forme hermitienne h sur E , possède au moins une base orthogonale.

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension de E , exactement comme dans le cas d'une forme bilinéaire symétrique. $\square$

10.2 Formes quadratiques hermitiennes

10.2.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 10.2.1

*Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. On dit qu'une application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une **forme quadratique** sur E , s'il existe une forme sesquilinéaire f sur E , telle que pour tout $x \in E$, on a $q(x) = \operatorname{Re}(f(x, x))$.*

Exemples

*Si h est une forme hermitienne sur E , alors l'application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in E$ par $q(x) = h(x, x)$, est une forme quadratique sur E , appelée **forme quadratique associée** à la forme hermitienne h .*

Réciproquement, à toute forme quadratique, on peut associer une forme hermitienne unique, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 10.2.1

*Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et q une forme quadratique sur E . Alors il existe une forme hermitienne unique h sur E , telle que pour tout $x \in E$ par $q(x) = h(x, x)$. Dans ce cas, h s'appelle la **forme polaire associée** à la forme quadratique q et on a la relation suivante, appelée **formule de polarisation** :*

$$\forall x \in E, \forall y \in E, h(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k q(i^k x + y)$$

Démonstration. q est une forme quadratique sur E , donc, par définition, il existe une forme sesquilinéaire f sur E , telle que pour tout $x \in E$, on a

$$q(x) = \operatorname{Re}(f(x, x))$$

Soit $h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in E \times E$, par

$$h(x, y) = \frac{f(x, y) + \overline{f(y, x)}}{2}$$

Alors h est une forme hermitienne sur E , car pour tout $x \in E$, on a

$$h(x, x) = \frac{f(x, x) + \overline{f(x, x)}}{2} = \operatorname{Re}(f(x, x)) = q(x)$$

Puisque h est hermitienne, alors on sait que pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a

$$\begin{aligned} q(x + y) &= q(x) + q(y) + 2\operatorname{Re}(h(x, y)) \\ q(-x + y) &= q(x) + q(y) - 2\operatorname{Re}(h(x, y)) \\ q(ix + y) &= q(x) + q(y) + 2\operatorname{Im}(h(x, y)) \\ q(-ix + y) &= q(x) + q(y) - 2\operatorname{Im}(h(x, y)) \end{aligned}$$

Donc, on aura

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^3 i^k q(i^k x + y) &= q(x + y) + iq(ix + y) - q(-x + y) - iq(-ix + y) \\ &= 4(\operatorname{Re}(h(x, y)) + i\operatorname{Im}(h(x, y))) = 4h(x, y) \end{aligned}$$

Cette relation entre q et h assure l'unicité de h . □

Remarque 122

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, q une forme quadratique sur E et h la forme polaire associée à q .

1. Soit β une base de E et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de h par rapport à la base β . Alors A s'appelle aussi la matrice de q par rapport à β et pour tout $x \in E$, on a

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}|x_i|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij}\bar{x}_i x_j + \bar{a}_{ij}x_i \bar{x}_j)$$

Avec $a_{ij}\bar{x}_i x_j + \bar{a}_{ij}x_i \bar{x}_j = 2\operatorname{Re}(a_{ij}\bar{x}_i x_j)$, donc on a

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}|x_i|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{Re}(a_{ij}\bar{x}_i x_j)$$

2. Puisque h est hermitienne, alors h possède au moins une base orthogonale β , appelé aussi base q -orthogonale et q s'écrit, par rapport à cette base, sous la forme réduite suivante :

$$\forall x \in E, q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} |x_i|^2$$

3. Le rang d'une forme quadratique est défini comme étant le rang de sa forme polaire associée.

Théorème 10.2.1

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et q une forme quadratique sur E de rang r . Alors il existe des formes linéaires complexes $l_1, l_2, \dots, l_r$, linéairement indépendantes et il existe des scalaires réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, non nuls, tels que

$$\forall x \in E, q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i |l_i(x)|^2$$

Démonstration. Même démonstration que dans le cas réel. □

10.2.2 Méthode de Gauss pour la réduction d'une forme quadratique hermitienne

Cas de la dimension 2

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $= 2$, (e_1, e_2) une base de E et q une forme quadratique hermitienne sur E , alors pour chaque $x \in E$, avec $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$, on a

$$q(x) = a|x_1|^2 + b|x_2|^2 + 2\operatorname{Re}(c\bar{x}_1 x_2) \quad \text{où } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{C}$$

- i) Si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors on peut supposer, par exemple, que $a \neq 0$. puis on procède de la manière suivante :

$$\begin{aligned} q(x) &= a|x_1|^2 + b|x_2|^2 + 2\operatorname{Re}(c\bar{x}_1 x_2) = a \left[|x_1|^2 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{c}{a} \bar{x}_1 x_2\right) \right] + b|x_2|^2 \\ &= a \left[\left| x_1 + \frac{c}{a} x_2 \right|^2 - \frac{|c|^2}{a^2} |x_2|^2 \right] + b|x_2|^2 \\ &= a \left| x_1 + \frac{c}{a} x_2 \right|^2 + \left(b - \frac{|c|^2}{a} \right) |x_2|^2 = \alpha |X_1|^2 + \beta |X_2|^2 \\ &\text{où } X_1 = x_1 + \frac{c}{a} x_2, X_2 = x_2, \alpha = a \text{ et } \beta = b - \frac{|c|^2}{a}. \end{aligned}$$

ii) Si $(a, b) = (0, 0)$, alors $q(x) = 2\text{Re}(c\bar{x}_1x_2)$, donc on aura

$$\begin{aligned} q(x) &= 2\text{Re}(c\bar{x}_1x_2) = \frac{1}{2}(|x_1 + cx_2|^2 - |x_1 - cx_2|^2) \\ &= \frac{1}{2}|x_1 + cx_2|^2 - \frac{1}{2}|x_1 - cx_2|^2 \\ &= \frac{1}{2}X_1^2 - \frac{1}{2}X_2^2 \quad \text{où } X_1 = x_1 + cx_2 \text{ et } X_2 = x_1 - cx_2 \end{aligned}$$

Cas de la dimension 3

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E et $q : E \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique. Alors pour tout $x \in E$, avec $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, on a

$$q(x) = a|x_1|^2 + b|x_2|^2 + c|x_3|^2 + 2\text{Re}(d\bar{x}_1x_2) + 2\text{Re}(e\bar{x}_1x_3) + 2\text{Re}(f\bar{x}_2x_3)$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(d, e, f) \in \mathbb{C}^3$.

i) Si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors on peut supposer par exemple que $a \neq 0$. Dans ce cas, en regroupant tous les termes contenant x_1 , on aura,

$$\begin{aligned} q(x) &= (a|x_1|^2 + 2\text{Re}(d\bar{x}_1x_2) + 2\text{Re}(e\bar{x}_1x_3)) \\ &\quad + b|x_2|^2 + c|x_3|^2 + 2\text{Re}(f\bar{x}_2x_3) \\ &= a \left[|x_1|^2 + 2\text{Re} \left(\bar{x}_1 \left(\frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3 \right) \right) \right] \\ &\quad + b|x_2|^2 + c|x_3|^2 + 2\text{Re}(f\bar{x}_2x_3) \\ &= a \left[\left| x_1 + \frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3 \right|^2 - \left| \frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3 \right|^2 \right] \\ &\quad + b|x_2|^2 + c|x_3|^2 + 2\text{Re}(f\bar{x}_2x_3) \\ &= a \left| x_1 + \frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3 \right|^2 - a \left| \frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3 \right|^2 \\ &\quad + b|x_2|^2 + c|x_3|^2 + 2\text{Re}(f\bar{x}_2x_3) \\ &= a \left| x_1 + \frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3 \right|^2 + Q(x_2, x_3) \end{aligned}$$

où $Q(x_2, x_3) = b|x_2|^2 + c|x_3|^2 + 2\text{Re}(f\bar{x}_2x_3) - a \left| \frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3 \right|^2$ est une forme quadratique en (x_2, x_3) .

Donc pour achever la décomposition de q , il suffit de décomposer Q qui peut-être considérée comme une forme quadratique sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 2.

ii) Si $a = b = c = 0$, alors q s'écrit sous la forme :

$$q(x) = 2\text{Re}(d\bar{x}_1x_2) + 2\text{Re}(e\bar{x}_1x_3) + 2\text{Re}(f\bar{x}_2x_3)$$

En supposant, par exemple, que $d \neq 0$, on peut procéder de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 q(x) &= 2\operatorname{Re}(d\bar{x}_1x_2) + 2\operatorname{Re}(e\bar{x}_1x_3) + 2\operatorname{Re}(f\bar{x}_2x_3) \\
 &= 2\operatorname{Re}(d\bar{x}_1x_2 + e\bar{x}_1x_3 + \bar{f}x_2\bar{x}_3) \\
 &= 2\operatorname{Re} \left[d(\bar{x}_1x_2 + \frac{e}{d}\bar{x}_1x_3 + \frac{\bar{f}}{d}x_2\bar{x}_3) \right] \\
 &= 2\operatorname{Re} \left[d(\bar{x}_1 + \frac{\bar{f}}{d}\bar{x}_3)(x_2 + \frac{e}{d}x_3) - \frac{e\bar{f}}{d}|x_3|^2 \right]
 \end{aligned}$$

Posons $y_1 = x_1 + \frac{f}{d}x_3$, $y_2 = x_2 + \frac{e}{d}x_3$ et $\lambda = -\operatorname{Re}(\frac{e\bar{f}}{d})$, donc, on aura

$$\begin{aligned}
 q(x) &= 2\operatorname{Re}(d\bar{y}_1y_2) + \lambda|x_3|^2 = \frac{1}{2}|y_1 + dy_2|^2 - \frac{1}{2}|y_1 - dy_2|^2 + \lambda|x_3|^2 \\
 &= \frac{1}{2}|x_1 + dx_2 + (\frac{f}{d} + e)x_3|^2 - \frac{1}{2}|x_1 - dx_2 + (\frac{f}{d} - e)x_3|^2 + \lambda|x_3|^2 \\
 &= \frac{1}{2}|X_1|^2 - \frac{1}{2}|X_2|^2 + \lambda|X_3|^2
 \end{aligned}$$

Avec

$$X_1 = x_1 + dx_2 + (\frac{f}{d} + e)x_3, \quad X_2 = x_1 - dx_2 + (\frac{f}{d} - e)x_3 \quad \text{et} \quad X_3 = x_3$$

Le cas général

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $q : E \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique hermitienne non nulle. Alors on sait que q s'écrit sous la forme :

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_i |x_i|^2 + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} \bar{x}_i x_j \right)$$

Nous allons procéder par récurrence sur n , en distinguant deux cas :

- i) Il existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, tel que $a_{i_0} \neq 0$, alors quitte à réordonner les a_i , on peut supposer que $a_1 \neq 0$. Dans ce cas, en regroupant tous les termes contenant x_1 , (si à la place de a_1 on prend a_{i_0} , on doit regrouper tous les termes contenant x_{i_0}), on aura

$$q(x) = a_1 |x_1|^2 + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{j=2}^n a_{1j} \bar{x}_1 x_j \right) + \sum_{i=2}^n a_i |x_i|^2 + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{ij} \bar{x}_i x_j \right)$$

donc si pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$, on pose $\alpha_j = \frac{a_{1j}}{a_1}$, alors on aura

$$\begin{aligned}
 q(x) &= a_1 \left[|x_1|^2 + 2\operatorname{Re} \left(\bar{x}_1 \left(\sum_{j=2}^n \alpha_j x_j \right) \right) \right] \\
 &\quad + \sum_{i=2}^n a_i |x_i|^2 + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{ij} \bar{x}_i x_j \right) \\
 &= a_1 \left| x_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j x_j \right|^2 - \left| \sum_{j=2}^n \alpha_j x_j \right|^2 \\
 &\quad + \sum_{i=2}^n a_i |x_i|^2 + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{ij} \bar{x}_i x_j \right) \\
 &= a_1 \left| x_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j x_j \right|^2 + Q(x_2, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$

où $Q(x_2, \dots, x_n) = 2\operatorname{Re} \left(\sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{ij} \bar{x}_i x_j \right) + \sum_{i=2}^n a_i |x_i|^2 - \left| \sum_{j=2}^n \alpha_j x_j \right|^2$ est une forme quadratique en $x_2, x_3, \dots, x_n$, donc on peut considérer Q comme une forme quadratique sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n - 1$ et on applique, alors, l'hypothèse de récurrence à Q .

ii) $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a_i = 0$, alors, dans ce cas, q s'écrit sous la forme :

$$q(x) = 2\operatorname{Re} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} \bar{x}_i x_j \right)$$

$q \neq 0$, donc l'un au moins des coefficients a_{ij} est non nul, donc pour simplifier on peut supposer que $a_{12} \neq 0$, puis on regroupe tous les termes contenant x_1 et tous les termes contenant x_2 . Ainsi, on aura

$$q(x) = 2\operatorname{Re}(a_{12} \bar{x}_1 x_2 + \sum_{j=3}^n a_{1j} \bar{x}_1 x_j + \sum_{j=3}^n a_{2j} \bar{x}_2 x_j) + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{3 \leq i < j \leq n} a_{ij} \bar{x}_i x_j \right)$$

On sait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z})$, alors on a

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=3}^n a_{2j} \bar{x}_2 x_j \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{j=3}^n \bar{a}_{2j} x_2 \bar{x}_j \right)$$

Donc, si on pose, $y_1 = \sum_{j=3}^n \frac{a_{2j}}{a_{12}} x_j$ et $y_2 = \sum_{j=3}^n a_{1j} x_j$, alors, on aura

$$\begin{aligned}
 q(x) &= 2\operatorname{Re}(a_{12}\bar{x}_1x_2 + \bar{x}_1y_2 + a_{12}x_2\bar{y}_1) + 2\operatorname{Re}\left(\sum_{3 \leq i < j \leq n} a_{ij}\bar{x}_i x_j\right) \\
 &= 2\operatorname{Re}\left((\bar{x}_1 + \bar{y}_1)(a_{12}x_2 + y_2) - \bar{y}_1y_2\right) + 2\operatorname{Re}\left(\sum_{3 \leq i < j \leq n} a_{ij}\bar{x}_i x_j\right) \\
 &= 2\operatorname{Re}\left((\overline{x_1 + y_1})(a_{12}x_2 + y_2)\right) - 2\operatorname{Re}(\bar{y}_1y_2) + 2\operatorname{Re}\left(\sum_{3 \leq i < j \leq n} a_{ij}\bar{x}_i x_j\right) \\
 &= \frac{1}{2}|x_1 + a_{12}x_2 + y_1 + y_2|^2 - \frac{1}{2}|x_1 - a_{12}x_2 + y_1 - y_2|^2 \\
 &\quad + Q(x_3, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$

où $Q(x_3, \dots, x_n) = 2\operatorname{Re}\left(\sum_{3 \leq i < j \leq n} a_{ij}\bar{x}_i x_j\right) - 2\operatorname{Re}(\bar{y}_1y_2)$ est une forme quadratique en $x_3, \dots, x_n$, donc Q peut-être considérée comme une forme quadratique sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n - 2$. Donc on achève la décompositon en appliquant l'hypothèse de récurrence à Q .

Exemples

1. Appliquons l'algorithme de Gauss à la forme quadratique q définie pour tout $x \in \mathbb{C}^3$ par

$$q(x) = |x_1|^2 + |x_3|^2 - 2\operatorname{Re}(i\bar{x}_1x_2) - 2\operatorname{Re}(i\sqrt{2}\bar{x}_2x_3)$$

Alors, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
 q(x) &= (|x_1|^2 - 2\operatorname{Re}(i\bar{x}_1x_2)) + |x_3|^2 - 2\operatorname{Re}(i\sqrt{2}\bar{x}_2x_3) \\
 &= (|x_1 - ix_2|^2 - |x_2|^2) + |x_3|^2 - 2\operatorname{Re}(i\sqrt{2}\bar{x}_2x_3) \\
 &= |x_1 - ix_2|^2 - (|x_2|^2 + 2\operatorname{Re}(i\sqrt{2}\bar{x}_2x_3)) + |x_3|^2 \\
 &= |x_1 - ix_2|^2 - (|x_2 + i\sqrt{2}x_3|^2 - 2|x_3|^2) + |x_3|^2 \\
 &= |x_1 - ix_2|^2 - |x_2 + i\sqrt{2}x_3|^2 + 3|x_3|^2
 \end{aligned}$$

2. Appliquons l'algorithme de Gauss à la forme quadratique q définie pour tout $x \in \mathbb{C}^3$ par

$$q(x) = |x_1|^2 + 2|x_2|^2 - 4|x_3|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{x}_1x_2) + 2\operatorname{Re}(\bar{x}_1x_3)$$

Alors, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
 q(x) &= (|x_1|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{x}_1 x_2) + 2\operatorname{Re}(\bar{x}_1 x_3)) + 2|x_2|^2 - 4|x_3|^2 \\
 &= (|x_1|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{x}_1(x_2 + x_3))) + 2|x_2|^2 - 4|x_3|^2 \\
 &= (|x_1 + x_2 + x_3|^2 - |x_2 + x_3|^2) + 2|x_2|^2 - 4|x_3|^2 \\
 &= |x_1 + x_2 + x_3|^2 + (|x_2|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{x}_2 x_3)) - 5|x_3|^2 \\
 &= |x_1 + x_2 + x_3|^2 + (|x_2 - x_3|^2 - |x_3|^2) - 5|x_3|^2 \\
 &= |x_1 + x_2 + x_3|^2 + |x_2 - x_3|^2 - 6|x_3|^2
 \end{aligned}$$

3. Appliquons l'algorithme de Gauss à la forme quadratique q définie pour tout $x \in \mathbb{C}^3$ par

$$q(x) = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 - i\bar{x}_1 x_3 + ix_1 \bar{x}_3 + (1 - i)\bar{x}_2 x_3 + (1 + i)x_2 \bar{x}_3$$

Alors, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
 q(x) &= 2\operatorname{Re}(\bar{x}_1 x_2 - i\bar{x}_1 x_3 + (1 - i)\bar{x}_2 x_3) \\
 &= 2\operatorname{Re}(\bar{x}_1 x_2 - i\bar{x}_1 x_3 + (1 - i)x_2 \bar{x}_3) \\
 &= 2\operatorname{Re}((\bar{x}_1 + (1 - i)\bar{x}_3)(x_2 - ix_3) + i(1 - i)|x_3|^3) \\
 &= 2\operatorname{Re}(\overline{(x_1 + (1 + i)x_3)}(x_2 - ix_3)) + 2\operatorname{Re}(i(1 - i)|x_3|^2) \\
 &= \frac{1}{2}|x_1 + x_2 + x_3|^2 - \frac{1}{2}|x_1 - x_2 + (1 + 2i)x_3|^2 + 2|x_3|^2
 \end{aligned}$$

10.3 Exercices

Exercice 232

Dans chacun des cas suivants, déterminer la matrice de q par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$, appliquer l'algorithme de Gauss pour décomposer q sous formes de carrés, déterminer le rang et la signature de q et une base q -orthogonale.

1. $q(x) = |x_1|^2 + 2|x_2|^2 - 4|x_3|^2 + \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_3 + x_1 \bar{x}_3$.
2. $q(x) = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 - i\bar{x}_1 x_3 + ix_1 \bar{x}_3 + (1 - i)\bar{x}_2 x_3 + (1 + i)x_2 \bar{x}_3$
3. $q(x) = |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + i\bar{x}_1 x_2 - ix_1 \bar{x}_2 + 2i\bar{x}_2 x_3 - 2ix_2 \bar{x}_3$.

Exercice 233

Soit q la forme quadratique de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice A par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ 2i & 7 & 3i \\ 0 & -3i & 5 \end{pmatrix}$$

En appliquant l'algorithme de Gauss décomposer q sous formes de carrés, déterminer le rang et la signature de q et une base q -orthogonale.

Exercice 234

Soit q la forme quadratique hermitienne définie sur $\mathbb{C}^3$ par :

$$\forall x \in \mathbb{C}^3, q(x) = i\bar{x}_1x_2 - ix_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1x_3 + x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2x_3 + x_2\bar{x}_3$$

1. Déterminer la matrice de q par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$.
2. En appliquant la méthode de Gauss, décomposer q sous forme de carrés.
3. En déduire le rang et la signature de q .
4. Déterminer une base q -orthogonale.

10.4 Solution des exercices

Exercice 232

1. Soit A la matrice de q par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$, alors on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

En appliquant l'algorithme d'Euclide, on aura

$$\begin{aligned} q(x) &= (|x_1|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{x}_1(x_2 + x_3)) - 4|x_3|^2 \\ &= |x_1 + x_2 + x_3|^2 + |x_2|^2 - 5|x_3|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{x}_2x_3) \\ &= |x_1 + x_2 + x_3|^2 + |x_2 - x_3|^2 - 6|x_3|^2 \end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{rg}(q) = 3$ et $\operatorname{sign}(q) = (2, 1)$.

Posons $X_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $X_2 = x_2 - x_3$ et $X_3 = x_3$, alors on a $x_1 = X_1 - X_2 - 2X_3$, $x_2 = X_2 + X_3$ et $x_3 = X_3$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors P est la matrice de passage de la base

canonique à une base q -orthogonale (v_1, v_2, v_3) , donc on a

$$\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = -e_1 + e_2 \\ v_3 = -2e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

2. Soit A la matrice de q par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$, alors on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i \\ 1 & 0 & 1-i \\ i & 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant l'algorithme d'Euclide, on aura

$$\begin{aligned}
 q(x) &= 2\operatorname{Re}(\bar{x}_1 x_2 - i\bar{x}_1 x_3 + (1+i)x_2 \bar{x}_3) \\
 &= 2\operatorname{Re}[(\bar{x}_1 + (1+i)\bar{x}_3)(x_2 - ix_3) + i(i+1)|x_3|^2] \\
 &= 2\operatorname{Re}[(\overline{x_1 + (1-i)x_3})(x_2 - ix_3)] - 2|x_3|^2 \\
 &= \frac{1}{2}|x_1 + x_2 + (1-2i)x_3|^2 - \frac{1}{2}|x_1 - x_2 + x_3|^2 - 2|x_3|^2
 \end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{rg}(q) = 3$ et $\operatorname{sign}(q) = (1, 2)$.

On pose $X_1 = x_1 + x_2 + (1-2i)x_3$, $X_2 = x_1 - x_2 + x_3$ et $X_3 = x_3$, alors on a

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 - (1-i)X_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}X_1 - \frac{1}{2}X_2 + iX_3 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Soient $v_1 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2$, $v_2 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2$ et $v_3 = (i-1)e_1 + ie_2 + e_3$, alors (v_1, v_2, v_3) est une base q -orthogonale.

3. Soit A la matrice de q par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$, alors on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 3 & 2i \\ 0 & -2i & 6 \end{pmatrix}$$

En appliquant l'algorithme d'Euclide, on aura

$$\begin{aligned}
 q(x) &= |x_1 + ix_2|^2 + 2(|x_2|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{x}_2 x_3)) + 6|x_3|^2 \\
 &= |x_1 + ix_2|^2 + 2|x_2 + ix_3|^2 + 4|x_3|^2
 \end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{rg}(q) = 3$ et $\operatorname{sign}(q) = (3, 0)$.

On pose $X_1 = x_1 + ix_2$, $X_2 = x_2 + ix_3$ et $X_3 = x_3$, alors on a

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - iX_2 - X_3 \\ x_2 = X_2 - iX_3 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Soient $v_1 = e_1$, $v_2 = -ie_1 + e_2$ et $v_3 = -e_1 - ie_2 + e_3$, alors (v_1, v_2, v_3) est une base q -orthogonale.

Exercice 233

D'après la matrice A de q , pour tout $x \in \mathbb{C}^3$, on a

$$q(x) = {}^t\bar{X}AX = |x_1|^2 + 7|x_2|^2 + 5|x_3|^2 - 2i\bar{x}_1 x_2 + 2ix_1 \bar{x}_2 + 3i\bar{x}_2 x_3 - 3ix_2 \bar{x}_3$$

Donc en appliquant l'algorithme d'Euclide, on aura

$$\begin{aligned} q(x) &= |x_1 - 2ix_2|^2 + 3(|x_2|^2 + 2\operatorname{Re}(i\bar{x}_2x_3)) + 5|x_3|^2 \\ &= |x_1 - 2ix_2|^2 + 3(|x_2 + ix_3|^2 - |x_3|^3) + 5|x_3|^2 \\ &= |x_1 - 2ix_2|^2 + 3|x_2 + ix_3|^2 + 2|x_3|^2 \end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{rg}(q) = 3$ et $\operatorname{sign}(q) = (3, 0)$.

On pose $X_1 = x_1 - 2ix_2$, $X_2 = x_2 + ix_3$ et $X_3 = x_3$, alors on a

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + 2iX_2 + 2X_3 \\ x_2 = X_2 - iX_3 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Soient $v_1 = e_1$, $v_2 = 2ie_1 + e_2$ et $v_3 = 2e_1 - ie_2 + e_3$, alors (v_1, v_2, v_3) est une base q -orthogonale.

Exercice 234

1. Soit A la matrice de q par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$, alors on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. En appliquant la méthode de Gauss, on aura

$$\begin{aligned} q(x) &= 2\operatorname{Re}(i\bar{x}_1x_2 + \bar{x}_1x_3 + x_2\bar{x}_3) \\ &= 2\operatorname{Re}[(\bar{x}_1 - i\bar{x}_3)(ix_2 + x_3) + i|x_3|^2] \\ &= 2\operatorname{Re}[(\overline{x_1 + ix_3})(ix_2 + x_3)] \\ &= \frac{1}{2}|x_1 + ix_2 + (1 + i)x_3|^2 - \frac{1}{2}|x_1 - ix_2 - (1 - i)x_3|^2 \end{aligned}$$

3. On en déduit que $\operatorname{rg}(q) = 2$ et $\operatorname{sign}(q) = (1, 1)$.
4. On pose $X_1 = x_1 + ix_2 + (1 + i)x_3$, $X_2 = x_1 - ix_2 - (1 - i)x_3$ et $X_3 = x_3$, alors on a

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2 - 2iX_3) \\ x_2 = \frac{i}{2}(-X_1 + X_2 + X_3) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Soient $v_1 = \frac{1}{2}(e_1 - ie_2)$, $v_2 = \frac{1}{2}(e_1 + ie_2)$ et $v_3 = -ie_1 + ie_2 + e_3$, alors (v_1, v_2, v_3) est une base q -orthogonale.

CHAPITRE 11

ESPACES HERMITIENS

11.1 Produit hermitien

11.1.1 Définition et exemples

Définition 11.1.1

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et h une forme hermitienne sur E .

- i) On dit que h est **positif**, si pour tout $x \in E$, on a $h(x, x) \geq 0$.
- ii) On dit que h est **définie positive**, si pour tout $x \in E$, on a $h(x, x) > 0$.
- iii) On appelle **produit hermitien** sur E , toute forme hermitienne sur E définie positive.
- iv) Un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'un produit hermitien s'appelle un espace préhilbertien complexe.
- v) Un espace préhilbertien complexe de dimension finie s'appelle un **espace hermitien**.

Exemples

1. Le produit hermitien usuel sur $\mathbb{C}^n$ est défini par :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall y \in \mathbb{C}^n, f(x, y) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$$

avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Donc $\mathbb{C}^n$ muni de ce produit hermitien est un espace hermitien.

2. Soit $f : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{C}), \quad f(A, B) = \text{tr}(A^* B), \quad \text{où } A^* = {}^t \bar{A}$$

Alors, f définit un produit hermitien sur $M_n(\mathbb{C})$.

En effet, il est facile de vérifier que f est une forme hermitienne.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, avec $A \neq 0$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors on a

$$\begin{aligned} f(A, A) &= \text{tr}(A^* A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki}, \quad \text{avec } b_{ik} = \bar{a}_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \bar{a}_{ki} a_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ki}|^2 \end{aligned}$$

On en déduit donc que $f(A, A) > 0$.

3. $l_2(\mathbb{C}) = \{(x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ est un espace préhilbertien complexe pour le produit hermitien défini par :

$$\forall x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \quad f(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_n y_n$$

avec $x = (x_n)_{n \geq 0}$ et $y = (y_n)_{n \geq 0}$.

Ici, f est bien définie, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|\bar{x}_n y_n| = |x_n| |y_n| \quad \text{et} \quad |x_n| |y_n| \leq \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2).$$

4. $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$, le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ vers $\mathbb{C}$, est un espace préhilbertien complexe pour le produit hermitien suivant :

$$\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}), \forall g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}), \quad \varphi(f, g) = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt$$

Remarque 123

Une matrice hermitienne A est dite définie positive, si la forme hermitienne définie par la matrice A est définie positive. Donc une matrice hermitienne A est définie positive, si, et seulement si,

$$\forall X \in \mathbb{C}^n, \quad X \neq 0 \implies {}^t \bar{X} A X > 0$$

Proposition 11.1.1

Soit E un espace hermitien. Alors,

- i) E possède au moins une base orthonormale.
- ii) Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $E = F \oplus F^\perp$.
- iii) Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $F^{\perp\perp} = F$.

Démonstration. Même justification que dans le cas des espaces euclidiens. $\square$

11.1.2 Notations et règles de calcul

Notations

Soit E un espace préhilbertien complexe muni d'un produit hermitien h . Dans toute la suite, nous adoptons les notations suivantes :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \text{ on pose } f(x, y) = \langle x, y \rangle \text{ et } f(x, x) = \|x\|^2$$

Règles de calcul

Soit E un espace préhilbertien complexe, alors pour tout $x, y \in E$, on a

- i) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\text{Re}(\langle x, y \rangle)$.
- ii) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\text{Re}(\langle x, y \rangle)$.
- iii) Identité du parallélogramme : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
- iv) Identité de polarisation : $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\sum_{k=0}^3 i^k \|i^k x + y\|^2)$

11.1.3 Utilisation des bases orthonormales

Soit E un espace hermitien de dimension n , muni d'une base orthonormale $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Alors on a

$$1. \quad \forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle e_i.$$

$$2. \quad \forall x \in E, \forall y \in E, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle.$$

$$3. \quad \forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

4. Si u est un endomorphisme de E et si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice de u par rapport à la base orthonormale $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$a_{ij} = \overline{\langle u(e_j), e_i \rangle} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$$

Démonstration. La démonstration est laissée à titre d'exercice. $\square$

11.2 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Théorème 11.2.1

Soit E un espace préhilbertien complexe, alors on a

$$\forall x \in E, \forall y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$,

i) Si $\langle x, y \rangle = 0$ alors il n'y a rien à démontrer, car $0 \leq \|x\| \|y\|$.

ii) Si $\langle x, y \rangle \neq 0$, on pose $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{|\langle x, y \rangle|}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\|t\lambda x + y\| \geq 0$. Il en résulte que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|x\|^2 t^2 + 2\operatorname{Re}(t\bar{\lambda} \langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \geq 0$$

$$\text{On a } \bar{\lambda} \langle x, y \rangle = \frac{\overline{\langle x, y \rangle}}{|\langle x, y \rangle|} \langle x, y \rangle = \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{|\langle x, y \rangle|} = |\langle x, y \rangle|.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|x\|^2 t^2 + 2|\langle x, y \rangle| t + \|y\|^2 \geq 0$$

Nous obtenons, donc, un trinôme de second degré en t qui est toujours positif ou nul pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc son discriminant $\Delta \leq 0$. Donc on aura $|\langle x, y \rangle|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$, ce qui donne le résultat. $\square$

Proposition 11.2.1

Soit E un espace préhilbertien complexe, alors on a

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \iff (x, y) \text{ est lié}$$

Démonstration. $(\implies)$ Supposons que $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$.

Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors (x, y) est lié. Donc, on peut supposer que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Puisque $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, alors le discriminant du trinôme en t ,

$$\|x\|^2 t^2 - 2|\langle x, y \rangle|t + \|y\|^2$$

est nul, donc il existe $t_0 \in \mathbb{R}$, tel que

$$\|x\|^2 t_0^2 - 2|\langle x, y \rangle|t_0 + \|y\|^2 = 0$$

par suite, on a $\|t_0 \lambda x - y\|^2 = 0$ où $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{|\langle x, y \rangle|}$. Ainsi, on aura $t_0 \lambda x - y = 0$, donc (x, y) est lié.

$(\impliedby)$ Supposons que (x, y) est lié, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $y = \alpha x$, donc on aura $|\langle x, y \rangle| = |\langle x, \alpha x \rangle| = |\alpha|\|x\|^2 = \|x\|\|y\|$. $\square$

Corollaire 11.2.1

Soit E un espace préhilbertien complexe, alors l'application définie par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

est une norme sur E , appelée norme euclidienne sur E .

Démonstration. Même démonstration que dans le cas des espaces euclidiens. $\square$

11.3 Endomorphismes d'un espace hermitien

11.3.1 Endomorphisme adjoint

Proposition 11.3.1

Soit E un espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme u de E , il existe un unique endomorphisme v de E , tel que

$$\boxed{\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle}$$

Dans ce cas, v s'appelle l'adjoint de u et se note u^* .

Démonstration. Pour chaque $y \in E$, on considère la forme linéaire φ_y définie pour tout $x \in E$ par $\varphi_y(x) = \langle y, u(x) \rangle$. Comme tout produit hermitien est non dégénéré et puisque E est de dimension finie, alors l'application Φ de E vers E^* qui à $z \in E$ associe $\Phi(z)$, tel que pour tout $x \in E$, on a $\Phi(z)(x) = \langle z, x \rangle$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On a $\varphi_y \in E^*$, donc il existe un unique $z_y \in E$, tel que $\Phi(z_y) = \varphi_y$, donc si pour chaque $y \in E$, on pose $v(y) = z_y$, alors on définit bien une application $v : E \rightarrow E$. On vérifie facilement, comme dans le cas des espaces euclidiens, que v est linéaire et que pour tout $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_y(x) = \Phi(z_y)(x) &\implies \langle y, u(x) \rangle = \langle z_y, x \rangle \\ &\implies \overline{\langle u(x), y \rangle} = \overline{\langle x, v(y) \rangle} \quad (\text{car } z_y = v(y)) \\ &\implies \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle \end{aligned}$$

L'unicité de v se démontre de la même manière que dans le cas des espaces euclidiens. $\square$

Proposition 11.3.2

Soit E un espace hermitien. Alors on a

- i) $\forall u \in L(E), \quad u^{**} = u.$
- ii) $\forall u \in L(E), \forall v \in L(E), \quad (u + v)^* = u^* + v^*.$
- iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in L(E), \quad (\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*.$
- iv) $\forall u \in L(E), \forall v \in L(E), \quad (v \circ u)^* = u^* \circ v^*.$
- v) Si β est une **base orthonormale** de E et si $A = \text{Mat}(u, \beta)$, alors on a $\text{Mat}(u^*, \beta) = A^*.$

Démonstration. i), ii), iii) et iv) sont faciles à vérifier

Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $\text{Mat}(u^*, \beta) = B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors on sait que

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, \quad a_{ij} = \langle e_i, u(e_j) \rangle \quad \text{et} \quad b_{ij} = \langle e_i, u^*(e_j) \rangle$$

par suite, on obtient

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \langle e_i, u^*(e_j) \rangle = \langle u(e_i), e_j \rangle \\ &= \overline{\langle e_j, u(e_i) \rangle} = \overline{a_{ji}} \end{aligned}$$

Donc, $B = {}^t(\overline{A}) = A^*.$

$\square$

Proposition 11.3.3

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E , alors

- i) $\ker(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$.
- ii) $\text{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp$.
- iii) *Si F est un sous-espace stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^* .*

Démonstration. Se démontre de la même manière que dans le cas des espaces euclidiens. $\square$

11.3.2 Endomorphismes normaux**Définition 11.3.1**

Soit E un espace hermitien, on dit qu'un endomorphisme u de E est normal, si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Remarque 124

1. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite normale, si $A^*A = AA^*$.
2. Soient E un espace hermitien, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une **base ortho-normale** de E , u un endomorphisme de E et $A = \text{Mat}(u, \beta)$, alors

$$u \text{ est normal} \iff A \text{ est normale}$$

3. Si u est un endomorphisme normal, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \text{Id}_E - u$ est normal.

Lemme 11.3.1

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, telle que $\text{tr}(AA^*) = 0$. Alors $A = 0$.

Démonstration. Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, $A^* = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ et $AA^* = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ et pour tout $j \in \{1, 2, \dots, m\}$,

on a $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$, par suite, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(AA^*) &= \sum_{j=1}^m c_{jj} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \overline{a_{ij}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2 \end{aligned}$$

Puisque $\operatorname{tr}(AA^*) = 0$, alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, on a $|a_{ij}|^2 = 0$. D'où le résultat. $\square$

Proposition 11.3.4

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme normal de E , alors

- i) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
- ii) $\ker(u) = \ker(u^*)$.
- iii) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ker(\lambda Id_E - u) = \ker(\lambda Id_E - u^*)$.
- iv) Si F est un sous-espace stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u .

Démonstration. i) Soit $x \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \langle u(x), u(x) \rangle = \langle u^*(u(x)), x \rangle = \langle u(u^*(x)), x \rangle \\ &= \langle u^*(x), u^*(x) \rangle = \|u^*(x)\|^2 \end{aligned}$$

- ii) Soit $x \in \ker(u)$, alors on a $u(x) = 0$, donc $\|u(x)\| = 0$, par suite, on a $\|u^*(x)\| = 0$. Ainsi, on a $u^*(x) = 0$, donc $x \in \ker(u^*)$. De la même manière, on voit que si $x \in \ker(u^*)$, alors $x \in \ker(u)$.
- iii) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ puisque $u^* \circ u = u \circ u^*$, alors on voit facilement, par un simple calcul, qu'on a aussi

$$(\lambda Id_E - u)^*(\lambda Id_E - u) = (\lambda Id_E - u)(\lambda Id_E - u)^*$$

donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'endomorphisme $\lambda Id_E - u$ est normal. Donc d'après ii), on a le résultat.

- iv) Soit F un sous-espace vectoriel de E , stable par u et soit $p = \dim(F)$, avec $p \geq 1$. Soit $\beta = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , telle que $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base

de $F^\perp$. Soit M la matrice de u par rapport à la base β . Puisque F est stable par u , alors M s'écrit sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \text{ avec } A \in M_p(\mathbb{C}), B \in M_{p,n-p}(\mathbb{C}) \text{ et } C \in M_{n-p}(\mathbb{C})$$

Donc pour montrer que $F^\perp$ est stable par u il suffit de montrer que $B = 0$. Comme la base β est orthonormale, donc $\text{Mat}(u^*, \beta) = M^*$, par conséquent on aura,

$$\begin{aligned} u^* \circ u &= u \circ u^* \iff M^* M = M M^* \\ &\iff \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ B^* & C^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ B^* & C^* \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} A^* A & A^* B \\ B^* A & B^* B + C^* C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A A^* + B B^* & B C^* \\ C B^* & C C^* \end{pmatrix} \\ &\implies A^* A = A A^* + B B^* \\ &\implies \text{tr}(A^* A) = \text{tr}(A A^* + B B^*) = \text{tr}(A A^*) + \text{tr}(B B^*) \\ &\implies \text{tr}(B B^*) = 0 \quad (\text{car } \text{tr}(A^* A) = \text{tr}(A A^*)) \\ &\implies B = 0 \quad (\text{d'après le lemme précédent}) \end{aligned}$$

Donc $F^\perp$ est stable par u . □

Théorème 11.3.1

Soit E un espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme normal de E , il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u .

Démonstration. On procède par récurrence sur n , avec $n = \dim(E)$.

Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.

H.R « Supposons que $n > 1$ et que tout endomorphisme normal sur un espace hermitien de dimension $< n$, possède une base orthonormale formée de vecteurs propres ». Soit E un espace hermitien de dimension n et soit u un endomorphisme normal de E . Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, donc u possède au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit E_1 un vecteur propre associé à λ , alors $F = \text{Vect}(e_1)$ est stable par u , donc d'après la proposition précédente, $F^\perp$ est stable par u . Soit v l'endomorphisme induit par u sur $F^\perp$, alors v est un endomorphisme normal de $F^\perp$, car u est normal. On a $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F) = n - 1$, donc d'après l'hypothèse de récurrence,

il existe une base orthonormale $(e_2, \dots, e_n)$ de $F^\perp$ formée de vecteurs propres de v .

Ainsi, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u . $\square$

Proposition 11.3.5

Soient E un espace hermitien, β et γ deux bases orthonormales de E . Soit P la matrice de passage de la base β à la base γ , alors on a $P^*P = I$.

Démonstration. Posons $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $v_j = \sum_{i=1}^n \langle e_i, v_j \rangle e_i$, donc si on pose $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $P^* = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors on aura $p_{ij} = \langle e_i, v_j \rangle$ et $q_{ij} = \bar{p}_{ji} = \langle v_i, e_j \rangle$. On pose $P^*P = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^n \langle e_i, v_k \rangle \langle v_k, e_j \rangle = \langle e_i, \sum_{k=1}^n \langle v_k, e_j \rangle v_k \rangle$$

Comme γ est une base orthonormale, alors pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $e_j = \sum_{k=1}^n \langle v_k, e_j \rangle v_k$, donc pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $\alpha_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, car β est une base orthonormale. $\square$

Remarque 125

1. Une matrice P de $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $P^*P = I$, s'appelle une matrice unitaire.
2. D'après le théorème 11.3.1, pour toute matrice normale A de $M_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice diagonale D dans $M_n(\mathbb{C})$ et il existe une matrice unitaire P , telles que $A = PDP^*$.

11.3.3 Endomorphismes hermitiens

Définition 11.3.2

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E .

- i) On dit que u est hermitien (ou autoadjoint), si $u^* = u$.
- ii) On dit que u est antihermitien, si $u^* = -u$.

Remarque 126

1. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne, si $A^* = A$.
2. Soit β une **base orthonormale** de E et soit $A = \text{Mat}(u, \beta)$, alors

$$(u \text{ est hermitien}) \iff (A \text{ est hermitienne})$$

3. Tout endomorphisme hermitien est normal.

Proposition 11.3.6

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme hermitien de E . Alors toutes les valeurs propres de u sont réelles.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u , alors il existe $x_0 \in E$, avec $x_0 \neq 0$, tel que $u(x_0) = \lambda x_0$. On a $u^* = u$, donc $\langle u(x_0), x_0 \rangle = \langle x_0, u(x_0) \rangle$, par suite on a $\langle \lambda x_0, x_0 \rangle = \langle x_0, \lambda x_0 \rangle$. On en déduit que $\bar{\lambda} \|x_0\|^2 = \lambda \|x_0\|^2$ et comme $x_0 \neq 0$, alors $\bar{\lambda} = \lambda$, donc $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Théorème 11.3.2

Soient E un espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme hermitien u , il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que tout endomorphisme hermitien est normal puis appliquer le théorème 11.3.1. $\square$

Remarque 127

Pour toute matrice hermitienne A , il existe une matrice diagonale réelle D et il existe une matrice unitaire P , telles que $A = PDP^*$.

11.3.4 Endomorphismes unitaires

Définition 11.3.3

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E .
On dit que u est unitaire, si $u^*u = Id_E$.

Remarque 128

1. Soit β une **base orthonormale** de E et soit $A = Mat(u, \beta)$, alors u est unitaire, si et seulement si, A est une matrice unitaire.
2. Tout endomorphisme unitaire u est inversible et on a $u^{-1} = u^*$.
3. Tout endomorphisme unitaire est normal.

Proposition 11.3.7

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E . Alors propositions suivantes sont équivalentes :

- i) u est unitaire,
- ii) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$,
- iii) $\forall x \in E, \forall y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Démonstration. i) $\implies$ ii) Supposons que u est unitaire, donc pour tout $x \in E$, on a $u^*(u(x)) = x$, par suite, on aura

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle u^*(u(x)), x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

ii) $\implies$ iii) Supposons que pour tout $x \in E$, on a $\|u(x)\| = \|x\|$.

Soient $x \in E$ et $y \in E$, alors, d'après l'identité de polarisation, on a

$$\begin{aligned} \langle u(x), u(y) \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n i^k \|i^k u(x) + u(y)\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n i^k \|u(i^k x) + u(y)\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n i^k \|u(i^k x + y)\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n i^k \|i^k x + y\|^2 = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

iii) $\implies$ i) Supposons que pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in E$, on a $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. Alors pour $x \in E$ et $y \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle u(x), u(y) \rangle &= \langle x, y \rangle \implies \langle u^*(u(x)), y \rangle = \langle x, y \rangle \\ &\implies \langle (u^*u)(x), y \rangle = \langle x, y \rangle \\ &\implies \langle (u^*u)(x) - x, y \rangle = 0 \end{aligned}$$

Fixons $x \in E$, alors pour tout $y \in E$, on a $\langle (u^*u)(x) - x, y \rangle = 0$, puis comme un produit hermitien est non dégénéré, alors pour tout $x \in E$, on a $(u^*u)(x) - x = 0$, par suite, pour tout $x \in E$, on a $(u^*u)(x) = x$. D'où le résultat. $\square$

Remarque 129

Soit E un espace hermitien, u un endomorphisme unitaire de E et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u , alors $|\lambda| = 1$.

En effet, si λ est une valeur propre de u , alors il existe $x_0 \in E$, avec $x_0 \neq 0$, tel que $u(x_0) = \lambda x_0$, donc d'après la proposition précédente, on a

$$\|x_0\| = \|u(x_0)\| = \|\lambda x_0\| = |\lambda| \|x_0\|$$

$x_0 \neq 0$, donc $\|x_0\| \neq 0$ et par suite $|\lambda| = 1$.

Proposition 11.3.8

Soit E un espace hermitien et u un endomorphisme de E . Alors u est unitaire, si et seulement si, l'image par u d'une base orthonormale de E est une base orthonormale de E .

Démonstration. Exercice $\square$

Théorème 11.3.3

Soit E un espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme unitaire u , il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice U de u s'écrit sous la forme :

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

où $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Un endomorphisme unitaire est normal, donc il existe une base orthonormale formée de vecteurs propres de u . Soit U la matrice de u par rapport à cette base, alors U est diagonale et les éléments diagonaux de U sont tous de module 1, donc chaque élément diagonal s'écrit sous la forme $e^{i\theta}$ avec un certain $\theta \in \mathbb{R}$. $\square$

11.4 Exercices

Exercice 235

Soient n un entier ≥ 1 et $h : \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_n[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2, \quad h(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{i\theta})} Q(e^{i\theta}) d\theta$$

1. Montrer que h définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Montrer que $(1, X, \dots, X^n)$ est une base orthonormale pour ce produit scalaire.
3. a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$, il existe une base orthonormale $(P_0, P_1, \dots, P_n)$, telle que $P_1(a) = P_2(a) = \dots = P_n(a) = 0$.
b) En déduire la valeur de $\sup_{\|P\|=1} |P(a)|$.
4. Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$.
a) Calculer $\|P\|^2$.
b) Soit $M = \sup_{|z|=1} |P(z)|$. Montrer que $M \geq 1$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 236

1. Montrer que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, il existe deux matrices hermitiennes uniques A et B , telles que $M = A + iB$.
2. Montrer que si $M = A + iB$, où A et B sont hermitiennes, alors

$$(M \text{ est normale}) \iff AB = BA$$

Exercice 237

Pour tout entier $n \geq 3$, on considère le groupe G des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité dans $\mathbb{C}$. Posons $\omega = e^{\frac{i2\pi}{n}}$, alors on sait que $G = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$.

On désigne par E l'ensemble de toutes les applications de G dans $\mathbb{C}$ et pour $(f, g) \in E^2$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{f(\omega^k)} g(\omega^k)$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$.
2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit hermitien sur E .
3. Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, l'application $f_k : G \longrightarrow \mathbb{C}$ est définie pour tout $z \in G$, par $f_k(z) = \frac{z^k}{\sqrt{n}}$.

On considère l'application $U : E \longrightarrow E$, qui à tout $f \in E$ fait correspondre $U(f)$, tel que pour tout $z \in G$, on a $U(f)(z) = f(\omega z)$

- a) Montrer que U est un endomorphisme unitaire et déterminer U^* .
- b) Montrer que $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, f_k est un vecteur propre de U .
- c) Dédire que $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$ est une base orthonormale de E .
- 4. Pour chaque $\lambda \in [0, 1]$, on pose $A_\lambda = Id_E - \lambda U - (1 - \lambda)U^*$.
 - a) Montrer que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, A_λ est un endomorphisme normal.
 - b) Pour quelle valeur de λ , A_λ est-t-il un endomorphisme hermitien ?
 - c) Dans le cas où A_λ est hermitien, montrer que

$$\forall f \in E, \langle A_\lambda(f), f \rangle \geq 0$$

Exercice 238

On munit $M_n(\mathbb{C})$ de son produit hermitien usuel :

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{C})^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^*B)$$

On désigne par $\mathbb{U}_n$ le groupe des matrices unitaires d'ordre n . Montrer que

$$\forall U \in \mathbb{U}_n, \forall A \in M_n(\mathbb{C}), \|UA\| = \|AU\| = \|A\| = \|U^*AU\|$$

Exercice 239

Soit U une matrice unitaire, tel que -1 n'est pas valeur propre de U .

1. Montrer que $I + U$ est inversible.
2. On pose $H = i(I + U)^{-1}(I - U)$. Montrer que H est hermitien.
3. Quel est le lien entre les valeurs propres de H et celles de U ?

Exercice 240

Soit E un espace hermitien. Pour tout endomorphisme u de E , on pose

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

1. Soit u un endomorphisme de E . Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
 - i) u est hermitien et $\|u\| \leq 1$,
 - ii) Il existe un endomorphisme unitaire h de E , tel que $u = \frac{1}{2}(h + h^*)$.
2. En déduire que tout endomorphisme de E , s'écrit comme combinaison linéaire de quatre endomorphismes unitaires.

Exercice 241

1. Montrer que pour toute matrice unitaire U , il existe une matrice hermitienne H , telle que $U = e^{iH}$.
2. Montrer que pour toute matrice complexe inversible A , il existe une matrice hermitienne définie positive R et une matrice hermitienne H , telles que $A = e^{iH}R$.

Exercice 242

Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E . Montrer que u est normal, si et seulement si, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que $u^* = P(u)$.

11.5 Solution des exercices

Exercice 235

1. Il est facile de vérifier que h est une forme hermitienne et que h est positive, donc il reste à montrer que si $h(P, P) = 0$, alors $P = 0$. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, tel que $h(P, P) = 0$, alors on a $\int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = 0$, puis comme la fonction $\theta \mapsto P(e^{i\theta})$ est continue, alors pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$, on a $P(e^{i\theta}) = 0$, donc P possède une infinité de racines, par suite $P = 0$.
2. Pour $p, q \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a

$$\langle X^p, X^q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ip\theta} e^{iq\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(q-p)\theta} d\theta = \delta_{pq}$$

Donc $(1, X, \dots, X^n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{C}_n[X]$.

3. a) Soit $F = \{P \in \mathbb{C}_n[X] : P(a) = 0\}$, alors F est le noyau de la forme linéaire φ sur $\mathbb{C}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = P(a)$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$ de dimension n . Soit $(P_1, \dots, P_n)$ une base orthonormale de F et soit $P_0 \in F^\perp$, avec $P_0 \neq 0$, alors $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{C}_n[X]$, telle que

$$P_1(a) = \dots = P_n(a) = 0$$

- b) Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, avec $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k$, alors on a $P(a) = \alpha_0$ et

$$\|P\|^2 = |\alpha_0|^2 + \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2, \text{ donc si } \|P\| = 1, \text{ alors on a } |P(a)| \leq 1.$$

On en déduit donc que $\sup_{\|P\|=1} |P(a)| \leq 1$, puis comme $P(a) = 1$, où

$$P \text{ est le polynôme constant } 1, \text{ alors on a } \sup_{\|P\|=1} |P(a)| = 1.$$

4. Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$.

- a) Comme $(1, X, \dots, X^n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{C}_n[X]$, alors on a

$$\|P\|^2 = 1 + |a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_{n-1}|^2$$

- b) On a $\|P\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$, donc on en déduit que

$$\|P\| \leq \sup_{|z|=1} |P(z)| \text{ et ainsi d'après la question précédente, on a}$$

$$\sup_{|z|=1} |P(z)| \geq 1, \text{ donc } M \geq 1.$$

Si $\sup_{|z|=1} |P(z)| = 1$, alors pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$, on a $|P(e^{i\theta})| \leq 1$,

donc on en déduit que $\|P\| \leq 1$. Donc d'après la question précédente, $1 + |a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_{n-1}|^2 \leq 1$, donc on voit que $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, par suite, on a $P = X^n$.

Exercice 236

1. Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $A = \frac{M + {}^t\overline{M}}{2}$ et $B = \frac{M - {}^t\overline{M}}{2i}$, alors il est facile de voir que $A^* = {}^t\overline{A} = A$ et $B^* = {}^t\overline{B} = B$, donc A et B sont hermitiennes et on a $M = A + iB$. A et B sont uniques, car si $M = C + iD$, avec C et D hermitiennes, alors on a $M^* = C - iD$, donc on en déduit que $C = \frac{M + M^*}{2} = A$ et $D = \frac{M - M^*}{2i} = B$.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$, avec $M = A + iB$, où A et B sont deux matrices hermitiennes de $M_n(\mathbb{C})$, alors on a

$$M \text{ est normale} \iff M^*M = MM^*$$

$$\iff (A - iB)(A + iB) = (A + iB)(A - iB)$$

$$\iff A^2 + B^2 + i(AB - BA) = A^2 + B^2 + i(BA - AB)$$

$$\iff 2i(AB - BA) = 0$$

$$\iff AB = BA$$

Exercice 237

1. Le fait que E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est trivial.
Soit $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{C}^n$ l'application définie pour tout $f \in E$, par

$$\Phi(f) = (f(1), f(\omega), \dots, f(\omega^{n-1}))$$

alors il est facile de voir que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, donc on en déduit que $\dim(E) = n$.

2. Il est facile de voir que $\langle, \rangle$ définit une forme hermitienne positive sur E . Soit $f \in E$, telle que $\langle f, f \rangle = 0$, alors on a $\sum_{k=0}^{n-1} |f(\omega^k)|^2 = 0$, donc il en résulte que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on a $f(\omega^k) = 0$, par suite, on a $f = 0$. Ce qui prouve que $\langle, \rangle$ définit un produit hermitien sur E .

3. a) Pour tout $f \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|U(f)\|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} |U(f)(\omega^k)|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |f(\omega^{k+1})|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n |f(\omega^k)|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |f(\omega^k)|^2 = \|f\|^2 \quad (\text{car } \omega^n = 1) \end{aligned}$$

Donc U est un endomorphisme unitaire.

b) Pour chaque $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ et pour tout $z \in G$, on a

$$U(f_k)(z) = f_k(\omega z) = \frac{(\omega z)^k}{\sqrt{n}} = \omega^k f_k(z)$$

Donc f_k est un vecteur propre associé à la valeur propre ω^k .

c) Pour $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, avec $i \neq j$, on a $\langle f_i, f_j \rangle = 0$, car f_i et f_j sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Pour $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on a

$$\|f_i\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |f_i(\omega^k)|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\omega^{ki}|^2 = \frac{n}{n} = 1$$

Donc $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ est une base orthonormale formée de vecteurs propres de U .

4. Soit $A_\lambda = Id_E - \lambda U - (1 - \lambda)U^*$, avec $\lambda \in [0, 1]$.

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, on a

$$A_\lambda(f_k) = (1 - \lambda\omega^k - (1 - \lambda)\omega^{-k})f_k$$

Donc A_λ possède une base orthonormale formée de vecteurs propres, ce qui prouve que A_λ est normal.

b) D'après la question précédente, A_λ est normal, donc A_λ est hermitien, si et seulement si, toutes les valeurs propres de A_λ sont réelles. Pour chaque $k \in \mathbb{N}_n$, $\lambda_k = 1 - \lambda\omega^k - (1 - \lambda)\omega^{-k}$ est une valeur propre de A_λ , puis comme on a

$$\lambda_k = (1 - \cos \frac{2k\pi}{n}) + i(1 - 2\lambda) \sin \frac{2k\pi}{n}$$

Donc on en déduit que les λ_k sont réelles, si et seulement si, $1 - 2\lambda = 0$, par suite A_λ est hermitien, si et seulement $\lambda = \frac{1}{2}$.

c) Si on suppose que A_λ est hermitien, alors d'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, on a

$$\langle A_\lambda(f_k), f_k \rangle = 1 - \cos \frac{2k\pi}{n}$$

Donc il en résulte que pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $\langle A_\lambda(f_k), f_k \rangle \geq 0$, puis comme $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une base orthonormale de E , alors pour tout $f \in E$, on a $\langle A_\lambda(f), f \rangle \geq 0$.

Exercice 238

Soit $U \in \mathbb{U}_n$ et soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors on a

$$\|UA\|^2 = \text{tr}((UA)^*UA) = \text{tr}(A^*U^*UA) = \text{tr}(A^*A) = \|A\|^2$$

Donc pour tout $U \in \mathbb{U}_n$ et pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\|UA\| = \|A\|$. On a aussi

$$\begin{aligned}\|AU\|^2 &= \text{tr}((AU)^*AU) = \text{tr}(U^*A^*AU) \\ &= \text{tr}((U^*A^*A)U) = \text{tr}(U(U^*A^*A)) = \text{tr}(A^*A) = \|A\|^2\end{aligned}$$

Donc pour tout $U \in \mathbb{U}_n$ et pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\|AU\| = \|A\|$. On a $U^* \in \mathbb{U}_n$ et $AU \in M_n(\mathbb{C})$, donc d'après ce qui précède, on a

$$\|U^*AU\| = \|AU\| = \|A\|$$

Exercice 239

1. -1 n'est pas valeur propre de U donc $I + U$ est inversible.
2. Soit $H = i(I + U)^{-1}(I - U)$, alors on a

$$\begin{aligned}H^* &= [i(I + U)^{-1}(I - U)]^* = -i(I + U^*)^{-1}(I - U^*) \\ &= -iU(U + I)^{-1}U^*(U - I) = i(I + U)^{-1}(I - U) = H\end{aligned}$$

Donc H est hermitien.

3. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de U et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ celles de H . Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de U , alors pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, on a

$$(I - U)(e_k) = (1 - \lambda_k)e_k \quad \text{et} \quad (I + U)^{-1}(e_k) = \frac{1}{1 + \lambda_k}e_k$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, on a $H(e_k) = i \frac{1 - \lambda_k}{1 + \lambda_k} e_k$, il en résulte que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de H et que pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, on a $\alpha_k = i \frac{1 - \lambda_k}{1 + \lambda_k}$.

Exercice 240

1. Puisque u est hermitien, alors toutes les valeurs propres de u sont réelles et u possède une base orthonormale β de E formée de vecteurs propres de u . Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de u et soit D la matrice de u par rapport à la base β , alors on a

$$D = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

D'autre part, comme $\|u\| \leq 1$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, on a $|\alpha_k| \leq 1$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, il existe $\beta_k \in \mathbb{R}$, tel que $\alpha_k^2 + \beta_k^2 = 1$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}_n$, posons $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ et considérons l'endomorphisme h de E dont la matrice Δ par rapport à la base β est définie par

$$\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

alors il est clair que $\Delta^* = \Delta^{-1}$, car pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, on a $|\lambda_k| = 1$, donc Δ est une matrice unitaire, par suite h est un endomorphisme unitaire. Par construction, on a $\Delta + \Delta^* = 2D$, donc $2u = h + h^*$.

2. Soit u un endomorphisme de E . On pose $u_1 = \frac{u + u^*}{2}$ et $u_2 = \frac{u - u^*}{2i}$, alors on voit facilement que u_1 et u_2 sont deux endomorphismes hermitiens et que $u = u_1 + iu_2$. Or, d'après la question précédente, il existe deux endomorphismes unitaires h_1 et h_2 , tels que $u_1 = \frac{1}{2}(h_1 + h_1^*)$ et $u_2 = \frac{1}{2}(h_2 + h_2^*)$, d'où il en résulte que $u = \frac{1}{2}(h_1 + h_1^* + ih_2 + ih_2^*)$. Ce qui prouve que u est la somme de quatre endomorphismes unitaires.

Exercice 241

- Comme U est une matrice unitaire, alors toutes les valeurs propres de U sont des complexes de module 1 et si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de U , alors il existe une matrice unitaire P , telle que $U = P^*DP$, où $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, on a $|\lambda_k| = 1$, donc il existe un unique $\theta_k \in]-\pi, \pi]$, tel que $\lambda_k = e^{i\theta_k}$. Soit $\Delta = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ et soit $H = P^*\Delta P$, alors H est une matrice hermitienne et il est facile de voir que $U = e^{iH}$.
- Comme A est inversible, alors A^*A est une matrice hermitienne définie positive, donc si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A^*A , alors pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, on a $\lambda_k > 0$. Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, alors il existe une matrice unitaire P , telle que $A^*A = P^*DP$. Soit $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et soit $R = P^*\Delta P$, alors R est hermitienne définie positive et on a $A^*A = R^2$. Posons $U = AR^{-1}$, alors on a $U^* = R^{-1}A^*$, avec $R^{-1}A^* = RA^{-1}$, car $A^*A = R^2$, donc $U^* = RA^{-1} = U^{-1}$, par suite, U est unitaire. On a $A = UR$ et d'après la question précédente, il existe une matrice hermitienne, telle que $U = e^{iH}$, par suite, on a $A = e^{iH}R$.

Exercice 242

($\Rightarrow$) Comme u est un endomorphisme normal d'un espace hermitien, alors d'après le théorème 11.3.1, u possède une base orthonormale β formée de vecteurs propres de u . Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de u deux à deux distinctes, alors d'après le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que pour tout

$k \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a $P(\lambda_k) = \bar{\lambda}_k$. Soit D la matrice de u par rapport à β , alors on a $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, où chaque λ_k apparaît autant de fois que sa multiplicité sur la diagonale de D . On a alors

$$\begin{aligned} D^* &= \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n) \\ &= \text{diag}(P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_n)) = P(D) \end{aligned}$$

On en déduit donc que $u^* = P(u)$.

($\Leftarrow$) u^* est un polynôme en u , donc u^* commute avec u , par suite, u est un endomorphisme normal.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Pierre Borne, Frédéric Rotella, *Théorie et Pratique du calcul matriciel*, Editions Technip, 1995.
- [2] Gilles Christol, Philippe Pilibossian, Sleiman Yammine, *Ensembles fondamentaux, Arithmétique, Polynômes*, Ellipses, mai 1998.
- [3] Jean-François Dantzer, Mathématiques pour l'agrégation, *Analyse et Probabilités*, Vuibert, juin 2016.
- [4] Jean-Pierre Dedieu, Luca Amodei, *Analyse numérique matricielle - Cours et exercices corrigés*, Dunod, 2008.
- [5] Jean-Pierre Escofier, *Toute l'Algèbre de la licence*, Dunod, 1998.
- [6] Xavier Gourdon, *Les Maths en tête*, Ellipses, 2009.
- [7] John Hubbard, Beverly West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini, avril 1999.
- [8] François Liret, Charlotte Scribot *Mini manuel d'Analyse*, Dunod, Paris, 2010.
- [9] Jean-Étienne Lombardi, *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et Géométrie*, De Boeck Supérieur, septembre 2017.
- [10] Dany-Jack Mercier *Dualité en algèbre linéaire*, Dossiers Mathématiques, octobre 2013.
- [11] Daniel Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.
- [12] Michel Queysanne, *Algèbre, 1er cycle scientifique, préparation aux grandes écoles*, Dunod, décembre 1997.
- [13] Ramis-Deschamps-Odoux, *Le cours de mathématiques-1-Algèbre*, 2e édition, Dunod, Armand Colin, septembre 2017.

INDEX

- (m, n) -matrice, 72
- K -algèbre, 62, 73
- $i^{\text{ième}}$ projection, 138
- écriture matricielle, 318
- élément algébrique, 23
- élément transcendent, 23
- équation caractéristique, 271

- addition matricielle, 72
- affinité, 68
- algèbre des endomorphismes de E , 62
- angle non orienté formé par deux vecteurs, 375
- application semi-linéaire, 506
- automorphisme, 61
- axiome de choix, 12

- base, 16
- base q -orthogonale, 329
- base canonique, 17
- base de Jordan, 245
- base duale, 136
- base orthonormale directe, 371
- base préduale, 141
- bidual, 148

- cœur et nilspace d'un endomorphisme, 65
- classe de similitude, 79

- codimension, 147
- comatrice, 184

- décomposition canonique, 58
- décomposition de Dunford, 243
- décomposition polaire, 430
- décomposition QR, 431
- déterminant d'un endomorphisme, 174
- déterminant d'un système de vecteurs, 172
- déterminant d'une matrice, 176
- déterminant de Vandermonde, 185
- détermination pratique des projecteurs spectraux, 243
- développement d'un déterminant, 179
- développement suivant une colonne, 179
- demi-tour, 425
- dentité de polarisation, 362
- diagonalisation simultannée, 223
- dilatation, 68, 69
- dimension d'un espace vectoriel, 25
- division euclidienne, 258, 260
- double produit vectoriel, 381
- dualité et stabilité, 151

- égalité de la médiane, 377
- endomorphisme, 61
- endomorphisme antihermitien, 534
- endomorphisme autoadjoint, 534

- endomorphisme défini positif, 414
- endomorphisme diagonalisable, 216
- endomorphisme irréductible, 273
- endomorphisme positif, 414
- endomorphisme trigonalisable, 225
- endomorphismes à trace nulle, 433
- endomorphismes antisymétrique, 446
- endomorphismes nilpotents, 229
- endomorphismes normaux, 447
- ensemble inductif, 12
- ensembles dénombrables, 136
- espace préhilbertien réel, 359
- espace vectoriel, 1
- espace vectoriel de dimension finie, 19
- espace vectoriel dual, 134
- espace vectoriel produit, 3
- espace vectoriel quotient, 13
- espaces euclidiens, 359
- exponentielle d'une matrice, 256
- forme σ -sesquilinéaire, 343
- forme p -linéaire, 165
- forme p -linéaire alternée, 167
- forme p -linéaire antisymétrique, 167
- forme p -linéaire symétrique, 167
- forme bilinéaire, 166, 315
- forme bilinéaire antisymétrique, 316
- forme bilinéaire symétrique, 316
- forme bilinéaire positif, 359
- forme polaire, 328
- forme quadratique positive, 360
- formes linéaires et hyperplans, 131
- formes multilinéaires, 165
- formule de changement de base, 84
- formule de polarisation, 513
- formule de Taylor, 214, 257
- formule des trois niveaux, 153
- formule du double produit vectoriel, 375
- génération de $GL_n(\mathbb{K})$, 75
- groupe linéaire, 62, 75
- groupe linéaire spécial, 75
- groupe orthogonal, 418
- groupe orthogonal spécial, 418
- groupe symétrique, 166
- hyperplan, 68, 69
- identité de Jacobi, 381
- identité de Lagrange, 374
- identité du parallélogramme, 362
- image d'une application linéaire, 55
- inégalité d'Hadamard, 368
- inégalité de cauchy-Schwartz, 528
- inégalité de Cauchy-Schwarz, 377
- inégalité de cauchy-Schwarz, 364
- inégalité de Hadamard, 441, 442
- indice de nilpotence, 230
- injection canonique, 52
- intersection de sous-espaces vectoriel, 5
- inverse d'une matrice, 184
- isomorphisme d'espaces vectoriels, 51, 53
- jordanisation d'un endomorphisme nilpotent, 234
- lemme de Zorn, 12
- loi externe, 1 3
- loi interne, 73
- matrice adjointe, 184, 507
- matrice carrée, 72
- Matrice d'une forme bilinéaire, 317
- matrice définie positive, 360
- matrice de dilatation, 75
- matrice de Hilbert, 441
- matrice de passage, 82
- matrice de transvection, 75
- matrice diagonalisable, 258
- matrice et déterminant de Gram, 440
- matrice hermitienne, 535
- matrice hessienne, 361

- matrice magique, 100
- matrice nilpotente, 230, 257
- matrice normale, 531
- matrice orthogonale, 370
- matrice positive, 360
- matrice stochastique, 99
- matrice triangulaire, 180
- matrice unitaire, 534
- matrices congruentes, 319
- matrices semblables, 79, 204
- multiplication externe, 72
- multiplicité, 213

- norme d'une matrice, 255
- norme euclidienne, 367
- noyau d'une application linéaire, 55
- noyau d'une forme bilinéaire, 322
- noyau d'une forme bilinéaire
symétrique, 324
- noyaux et images itérés, 64

- opérations élémentaires, 76
- orientation, 369
- orthogonal, préorthogonal, 143

- partie génératrice, 15
- partie liée, 15
- partie libre, 15
- permutation, 166
- polynôme caractéristique, 203
- polynôme dérivé, 213
- polynôme minimal, 200
- polynôme dérivé, 60
- produit de Cauchy, 259
- produit de Schur de deux matrices,
438
- produit matriciel, 72
- produit scalaire, 359
- projecteurs spectraux, 242, 244
- projection - projecteur, 65
- projection, projecteur, 65
- prolongement d'une forme linéaire, 142

- quotient de Rayleigh, 440

- réunion de sous-espaces vectoriel, 5
- racine carrée d'une matrice symétrique,
428
- rang d'un système de vecteurs, 86
- rang d'une application linéaire, 86
- rang d'une matrice, 86
- rayon spectral, 284
- représentation cartésienne d'un sous-
espace vectoriel, 147
- retournement, 446
- rotation, 418
- rotation d'angle θ , 420

- scalaires, 1
- somme directe de sous-espaces
vectoriels, 8
- sous-espace caractéristique, 241
- sous-espace propre, 212
- sous-espace stable, 206
- sous-espace vectoriel, 3
- sous-espace vectoriel engendré par une
partie, 14
- sous-espace vectoriel isotrope, 324
- sous-espace vectoriel somme, 7
- sous-espace vectoriel totalement
isotrope, 324
- sous-espaces supplémentaires, 10
- spectre, 272
- surjection canonique, 52
- symétrie vectorielle, 67
- symétrie-rotation, 422

- tableau de Jordan, 236–238
- théorème d'inertie de Sylvester, 337
- théorème d'interpolation de Lagrange,
60, 429
- théorème de Bezout, 260
- théorème de caractérisation d'une base,
18
- théorème de Cayley-Hamilton, 206, 261
- théorème de Courant-Fisher, 440

théorème de la base incomplète, 26
théorème de la dimension finie, 20
théorème de réduction d'une forme
 quadratique, 330
théorème des projecteurs spectraux, 241
théorème du rang, 58, 87, 88
théorème de Fréchet .Jordan von
 Neumann, 381
trace d'un endomorphisme, 85
transposée d'une application linéaire,
 149
transposition, 168
transvection, 70, 71

valeur propre, 211
vecteur propre, 211
vecteurs, 1
vecteurs colonnes, 87, 177
vecteurs isotropes, 324
vecteurs orthogonaux, 324