

Mathématiques 9-10-11

Aide-mémoire

Ressources théoriques



« Sur la page de couverture, un gecko, petit reptile vivant dans de très nombreuses régions de notre planète, se promène sur un fond coloré, inspiré des *pavages de Penrose*; ces derniers ont été découverts par le mathématicien et physicien britannique Roger Penrose dans les années 70.

Depuis le XIX^e siècle, on sait qu'il n'existe que dix-sept manières de paver le plan de manière parfaitement régulière et périodique, à l'aide d'isométries d'un motif unique; Penrose, par pur divertissement d'abord, s'est essayé à couvrir l'espace à deux dimensions autrement. Il a utilisé des motifs qui se développent, se combinent et se retrouvent, de façon quasi périodique, c'est-à-dire sans que ces motifs se répètent comme une grille régulière; cela permet une infinité de pavages possibles.

En 1984, une correspondance remarquable entre ces pavages et certains matériaux a été découverte; ces derniers présentent une structure forte et ordonnée, comme un cristal, mais de façon non périodique: les quasi-cristaux. »

Gloria Giganti

Mathématiques 9-10-11

Aide-mémoire

Ressources théoriques

Nombres et opérations – NO

Fonctions et algèbre – FA

Espace – ES

Grandeurs et mesures – GM

Recherche et stratégies – RS



CONFÉRENCE INTERCANTONALE
DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE DE
LA SUISSE ROMANDE ET DU TESSIN

Remerciements

Nous remercions les auteurs de *Mathématiques 7-8-9*, éditions 2003, 2006 et 2009, Michel Chastellain, Jacques-André Calame et Michel Brêchet, d'avoir accepté qu'une partie importante de leurs activités soit reprise dans cette nouvelle édition 2011, contribuant ainsi largement à sa parution.

Pour cette nouvelle édition 2011, nous remercions les personnes issues des milieux scolaires, académiques et professionnels de la Suisse romande qui ont suivi la rédaction, la relecture et l'édition de ces ouvrages :

Groupe d'auteurs

Ivan Corminboeuf, président;
Thierry Hostettler, Claude Lecoultré, Denis Odiet.

Groupe de réalisation

Hervé Schild, président;
Christian Bazzoni, Pascal Carron, Philippe Dubath, François Günter,
Denis Odiet, Sandrine Rudaz.

Groupe d'experts

Nicolas Dreyer, président;
Jean-Paul Dumas, Ninon Guignard, Viridiana Marc, Isabelle Nicolazzi,
Luc-Olivier Pochon, Elisabeth Stierli.

Expert externe

Pr Dr Aldo Dalla Piazza

Commission de vérification

Annemarie Merkelbach, présidente;
Yolande Belloy, Pierre-Marie Gabioud, Pascal Knubel, Rachel Meyer-Bovet,
Jérôme Pelisson.

Nous remercions également les commissions et conférences intercantionales impliquées, ainsi que tout spécialement les cantons de **Berne, Fribourg, Genève, Jura, Neuchâtel, Valais et Vaud** de leur engagement dans l'édition de ces ouvrages.

Crédits

© Editions LEP, *Objectif Vie*, Le Mont-sur-Lausanne: 42d
© Office fédéral de topographie swisstopo (BA110186): 42g

Conception et réalisation : NK Editions, Le Mont-sur-Lausanne
Mise en pages et infographies : NK Editions, Yves Gabioud, Macgraph, Puidoux
Relecture : Anne Leroy, Leroylire, Lausanne
Illustrations : Yuri Coles, Genève: 109

© CILIP Conférence intercantonale de l'instruction
publique de la Suisse romande et du Tessin, 2011

© LEP Editions Loisirs et Pédagogie SA, 2011
ISBN 978-2-606-01383-7
LEP 936001A5

Edition 2011

Imprimé en Suisse
V 0215 25 STA
Tous droits réservés pour tous les pays

Préambule

Ton *Aide-mémoire* présente les termes, définitions, notations et notions théoriques, abordés dans la collection *Mathématiques 9-10-11*.

C'est un ouvrage de référence auquel tu peux accéder, lorsque tu en éprouves le besoin. C'est par exemple le cas :

- après avoir terminé une activité *Que sais-je ?* ou *Faire le point ?* ;
- pour te remémorer une définition à propos de laquelle un doute demeure ;
- lorsqu'un travail effectué à la maison nécessite de revenir sur un aspect théorique que tu n'as pas encore parfaitement assimilé ;
- dans le cadre d'un travail de groupe, pour comprendre une notion mathématique en jeu.

Tu disposes d'un sommaire, d'une table des matières et d'un index alphabétique pour accéder plus facilement à l'information recherchée.

N'hésite pas à compléter ton *Aide-mémoire* lorsque tu rencontres une notion théorique qui n'y figure pas.

Les auteurs

Visa

Etymologie

Définition et théorème

Renvoi

Construction

Mise en garde

Schéma

[illegible]

Extraits du plan d'études romand

Visées prioritaires MSN

Se représenter, problématiser et modéliser des situations et résoudre des problèmes en construisant et en mobilisant des notions, des concepts, des démarches et des raisonnements propres aux *Mathématiques* et aux *Sciences de la nature* dans les champs des phénomènes naturels et techniques, du vivant et de l'environnement, ainsi que des nombres et de l'espace.

Mathématiques et sciences de la nature (MSN)

Nombres et opérations

Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres réels

Résoudre des problèmes numériques

Résolution de problèmes numériques en lien avec les ensembles de nombres travaillés, l'écriture de ces nombres et les opérations étudiées.

Fonctions et algèbre

Résoudre des problèmes numériques et algébriques

Résolution de problèmes en lien avec les notions étudiées (fonctions, diagrammes, expressions algébriques et équations).

Résolution de problèmes de proportionnalité.

Modéliser des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques

Espace

Poser et résoudre des problèmes pour modéliser le plan et l'espace

Résolution de problèmes géométriques en lien avec les figures et les transformations étudiées.

Grandeurs et mesures

Mobiliser la mesure pour comparer des grandeurs

Résolution de problèmes de mesurage en lien avec les grandeurs et les théorèmes étudiés.

Sommaire

Nombres et opérations – NO

■ Généralités	10
■ Nombres naturels	14
■ Nombres relatifs	18
■ Nombres rationnels	20
■ Nombres réels	27
■ Puissances et racines	28
■ Probabilités	30

Fonctions et algèbre – FA

■ Fonctions	38
■ Diagrammes	49
■ Calcul littéral	51
■ Equations	56

Espace – ES

■ Généralités	68
■ Droites	73
■ Angles	77
■ Polygones	82
■ Cercles et disques	90
■ Solides et espace	91
■ Constructions	95
■ Transformations géométriques	101

Grandeurs et mesures – GM

■ Unités de mesure	120
■ Périmètre et aire d'une surface	122
■ Aire et volume de solides	124
■ Théorèmes	126

Recherche et stratégies – RS

■ Le débat mathématique	134
■ Problèmes	134
■ Résolution d'un problème	137
■ Stratégies de recherche	138

Conventions et notations	147
Table des matières	152
Index	155

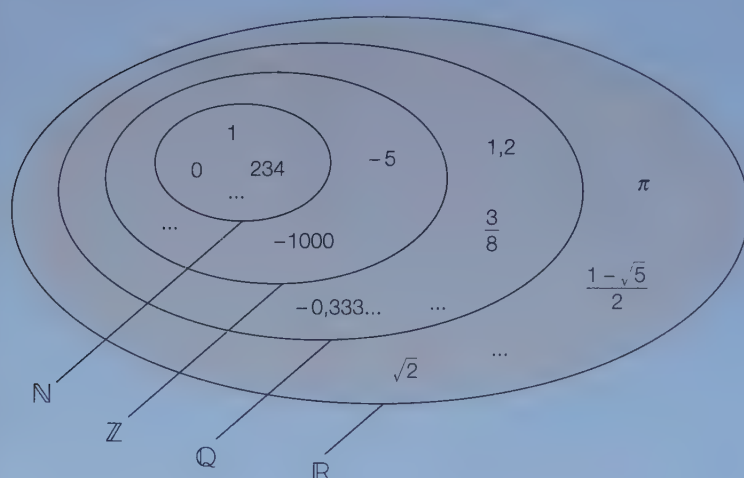
Nombres et opérations – NO

■ Généralités	10
■ Nombres naturels	14
■ Nombres relatifs	18
■ Nombres rationnels	20
■ Nombres réels	27
■ Puissances et racines	28
■ Probabilités	30

Généralités

Ensembles de nombres

Ensemble de nombres	Notation
nombres naturels	$\mathbb{N}$: 0 ; 1 ; 5 ; 12 ; 1022 ; ...
nombres entiers relatifs	$\mathbb{Z}$: ... ; -52 ; -20 ; -2 ; 0 ; 4 ; 215 ; ...
nombres rationnels	$\mathbb{Q}$: ... ; -10 ; $-\frac{7}{4}$; $-\frac{2}{3}$; 0 ; 0,333... ; $\frac{7}{5}$; 11 ; 19,6 ; ...
nombres réels	$\mathbb{R}$: ... ; -19 ; -3,4 ; $-\sqrt{2}$; 0 ; 2 ; $\frac{5}{3}$; π ; $\sqrt{30}$; ...



Chiffres et nombres

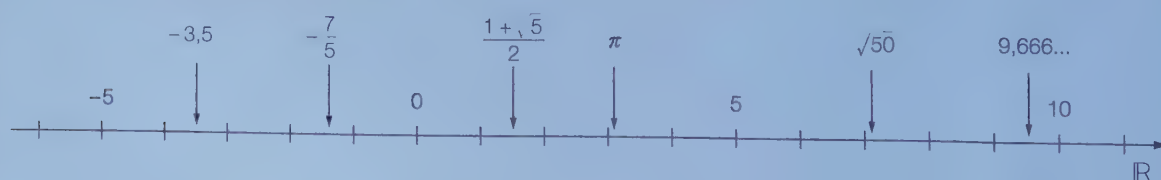
Les chiffres sont des symboles. Il en existe dix : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Les nombres sont écrits à l'aide d'un ou de plusieurs chiffres.

Exemple : 536 est un nombre écrit à l'aide de trois chiffres.

➡ Nombre entier relatif (p. 18), Nombre rationnel (p. 20), Nombre irrationnel (p. 27)

Droite numérique

On peut représenter l'ensemble des nombres réels par une droite, appelée droite numérique :



➡ Ordre croissant (p. 11), Ordre décroissant (p. 11)

Ordre croissant

Classer des nombres par ordre croissant, c'est les classer du plus petit au plus grand.

Le positionnement de ces nombres sur la droite numérique permet leur comparaison : les nombres sont plus petits lorsqu'ils sont plus à gauche, plus grands lorsqu'ils sont plus à droite.

croissance
crescere (latin) : croître

Attention !

$-8 < -6$
 $-12 < 0$
 $3,14 < 3,7$

Exemple

$$-7 < -2,5 < \frac{1}{2} < 5,04 < 12$$

→ Droite numérique (p. 10)

Ordre décroissant

Classer des nombres par ordre décroissant, c'est les classer du plus grand au plus petit.

Exemple

$$127,5 > 8 > 0,058 > -\frac{3}{4} > -10 > -10,4$$

→ Droite numérique (p. 10)

Attention !

$-8 > -12$
 $0 > -6$
 $0,1 > -100$

Opérations – vocabulaire

Addition

$$0,5 + 12,5 + 18 = 31$$

les termes

la somme

Soustraction

$$43 - 21,2 = 21,8$$

les termes

la différence

Multiplication

$$25 \cdot 3,2 \cdot 4 = 320$$

les facteurs

le produit

Division (dans $\mathbb{N}$)

le dividende le diviseur

$$\begin{array}{r} 423 \overline{) 15} \\ -30 \\ \hline 123 \\ -120 \\ \hline 3 \end{array}$$

le reste → 3

le quotient

$$\text{preuve : } 423 = 15 \cdot 28 + 3$$

La division dans $\mathbb{N}$ (ou division avec reste) est aussi appelée division euclidienne.

Pour éviter la confusion entre le symbole « $\times$ » de la multiplication et la lettre x utilisée en algèbre, on utilise le symbole « $\cdot$ » pour indiquer la multiplication.

Propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$

L'addition est associative
 $(a + b) + c = a + (b + c)$

La multiplication est associative
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

L'addition est commutative
 $a + b = b + a$

La multiplication est commutative
 $a \cdot b = b \cdot a$

0 est l'élément neutre pour l'addition
 $a + 0 = 0 + a = a$

1 est l'élément neutre pour la multiplication
 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Pour tout nombre a , il existe un nombre opposé, noté $-a$, tel que :
 $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Pour tout nombre a différent de 0, il existe un nombre inverse, noté $\frac{1}{a}$, tel que :
 $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

La multiplication est distributive sur l'addition et la soustraction

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

$$a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$$

associativité
adsocius (latin) : joint à, associé

commutativité
commutare (latin) : changer une chose contre une autre chose

Attention !

La soustraction et la division ne sont ni associatives, ni commutatives, et n'ont pas d'élément neutre.

Priorités des opérations

On effectue les opérations dans l'ordre suivant :

1. Opérations notées entre parenthèses
2. Puissances, racines
3. Multiplications, divisions
4. Additions, soustractions

Lorsque des additions et des soustractions se suivent, on effectue les opérations de gauche à droite.

$$(17 - 5) \cdot 6 = 12 \cdot 6 = 72$$

$$45 : 3^2 = 45 : 9 = 5$$

$$7 + 8 \cdot 5 = 7 + 40 = 47$$

Lorsque des multiplications et des divisions se suivent, on effectue aussi les opérations de gauche à droite.

$$75 - 4 + 12 = 71 + 12 = 83$$

$$12 : 4 \cdot 15 = 3 \cdot 15 = 45$$

Exemple plus complexe

$$\begin{aligned} 2 + 5 \cdot (4^2 + 20 : 4) &= 2 + 5 \cdot (16 + 5) \\ &= 2 + 5 \cdot 21 \\ &= 2 + 105 \\ &= 107 \end{aligned}$$

Autre présentation possible

$$2 + 5 \cdot (4^2 + 20 : 4)$$

Moyenne de nombres

On considère n nombres réels : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

La moyenne arithmétique de ces n nombres est égale au nombre

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Il existe d'autres moyennes :
la moyenne harmonique, la
moyenne géométrique, etc.

Exemple

La moyenne arithmétique des quatre nombres 5 ; 5,5 ; 3,5 ; 4 est égale au nombre $\frac{5 + 5,5 + 3,5 + 4}{4} = 4,5$

Valeur absolue

Un nombre est constitué de deux parties :

- a) un signe + ou - appelé signe prédicatoire,
- b) un nombre réel positif appelé valeur absolue.

Exemples

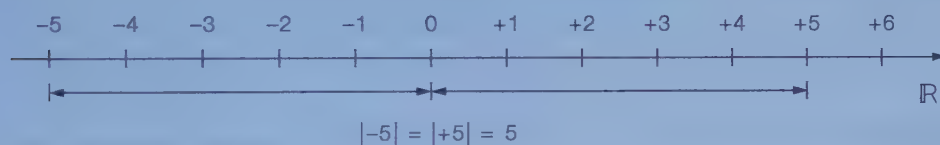
- +7 est constitué du signe + et de la valeur absolue 7
- 4,2 est constitué du signe - et de la valeur absolue 4,2

La valeur absolue d'un nombre a , notée $|a|$, est aussi appelée la distance entre 0 et le nombre a .

Exemples

$$|+7| = 7 \quad \text{et} \quad |-4,2| = 4,2$$

Deux nombres qui ont la même valeur absolue sont représentés par des points situés à la même distance de zéro.



➡ Opposé d'un nombre (p. 13), Nombre entier relatif (p. 18)

Opposé d'un nombre

Deux nombres sont opposés si leur somme est égale à zéro.

Exemples

$(+6)$ et (-6)	sont deux nombres opposés, car	$(+6) + (-6) = 0$
$(-\frac{1}{4})$ et $(+\frac{1}{4})$	sont deux nombres opposés, car	$(-\frac{1}{4}) + (+\frac{1}{4}) = 0$

opposé

opponere (latin) : placer en face de

Deux nombres opposés ont la même valeur absolue et sont de signes différents.

L'opposé d'un nombre x est noté $-x$.

Attention!

Si x est négatif,
alors $-x$ est positif.

➡ Propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ (p. 12), Valeur absolue (p. 13),
Inverse d'un nombre (p. 14), Nombre entier relatif (p. 18)

Inverse d'un nombre

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Exemples

4 et 0,25 sont inverses l'un de l'autre, car $4 \cdot 0,25 = 1$

$\frac{1}{5}$ et -5 sont inverses l'un de l'autre, car $-\frac{1}{5} \cdot (-5) = 1$

$\frac{5}{8}$ et $\frac{8}{5}$ sont inverses l'un de l'autre, car $\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{5} = 1$

L'inverse d'un nombre x différent de zéro est noté $\frac{1}{x}$ ou x^{-1} .

inverse
inversus (latin) : renversé, interverti

0 n'a pas d'inverse, car en multipliant 0 par un nombre, on n'obtient jamais 1.

→ Propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ (p. 12), Opposé d'un nombre (p. 13), Puissance d'exposant négatif (p. 28)

Nombres naturels

Nombre naturel

Un nombre naturel est un nombre entier supérieur ou égal à 0.

On utilise la lettre $\mathbb{N}$ pour désigner l'ensemble de tous les nombres naturels.

$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \dots\}$

Multiple

Si a et b sont deux nombres naturels non nuls, alors a est un multiple de b s'il existe un nombre naturel c tel que $a = b \cdot c$.

→ Opérations – vocabulaire (p. 11), Diviseur (p. 15)

Exemples

32 est un multiple de 8, car $32 = 4 \cdot 8$

27 n'est pas un multiple de 10

4 ; 8 ; 12 ; 16 ; 20 ; 24 ; 28 ; 32 ; 36 ; ...
sont des multiples de 4, et il y en a une infinité

Multiple commun et ppmc

Un multiple commun de plusieurs nombres naturels est un nombre naturel qui est multiple de chacun d'eux.

Le plus petit multiple commun de plusieurs nombres naturels est appelé le ppmc de ces nombres.

Exemple

72 est entre autres un multiple commun de 3, 9 et 12

Exemple

36 est le ppmc de 3, 9 et 12

→ Diviseur commun et pgcd (p. 16)

Recherche du ppmc de deux nombres naturels

Pour rechercher le ppmc de deux nombres naturels, on peut décomposer chaque nombre en un produit de facteurs premiers.

Exemple

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

1485	3
495	3
165	3
55	5
11	11
1	

$$1485 = 3^3 \cdot 5 \cdot 11$$

Il existe d'autres méthodes pour rechercher le ppmc de deux nombres.

NO

Le ppmc est alors le produit de tous les facteurs premiers différents apparaissant dans les décompositions, écrits chacun une seule fois avec son plus grand exposant.

$$\text{ppmc}(150 ; 1485) = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11 = 14850$$

➤ Nombre premier (p. 16), Décomposition en produit de facteurs premiers (p. 17), Nombres premiers entre eux (p. 18)

Critères de divisibilité

Un nombre naturel se divise par :

- 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 ; on dit alors qu'il est pair
- 3 si la somme de ses chiffres se divise par 3
- 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres se divise par 4, notamment s'il se termine par 00
- 5 s'il se termine par 0 ou par 5
- 6 s'il se divise par 2 et par 3
- 9 si la somme de ses chiffres se divise par 9
- 10 s'il se termine par 0
- 25 s'il se termine par 00, 25, 50 ou 75
- 50 s'il se termine par 00 ou 50
- 100 s'il se termine par 00

➤ Multiple (p. 14), Diviseur (p. 15), Nombre premier (p. 16)

Diviseur

Si a et b sont deux nombres naturels non nuls, alors b est un diviseur de a s'il existe un nombre naturel c tel que $a = b \cdot c$

Exemples

7 est un diviseur de 21, car $21 = 7 \cdot 3$

5 n'est pas un diviseur de 23

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 sont les diviseurs de 12

➤ Opérations – vocabulaire (p. 11), Multiple (p. 14), Critères de divisibilité (p. 15)

Diviseur commun et pgdc

Un diviseur commun de plusieurs nombres naturels est un nombre naturel qui est diviseur de chacun d'eux.

Exemple

2 est un diviseur commun de 16, 24 et 40, car 2 est diviseur de ces trois nombres

Le plus grand diviseur commun de plusieurs nombres naturels est appelé le pgdc de ces nombres.

Exemple

8 est le pgdc de 16, 24 et 40

➤ Multiple commun et pmmc (p. 14)

Recherche du pgdc de deux nombres naturels

Pour rechercher le pgdc de deux nombres naturels, on peut décomposer chaque nombre en un produit de facteurs premiers.

Exemple

378	2
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$$378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$$

$$1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Il existe d'autres méthodes pour rechercher le pgdc de deux nombres.

Le pgdc est alors le produit des facteurs premiers communs aux deux décompositions, écrits chacun une seule fois avec son plus petit exposant.

Si aucun facteur premier n'est commun aux décompositions, le pgdc est alors égal à 1.

$$\text{pgdc}(378; 1260) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126$$

➤ Nombre premier (p. 16), Décomposition en produit de facteurs premiers (p. 17), Nombres premiers entre eux (p. 18)

Nombre premier

Un nombre premier est un nombre naturel qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples

7, 13, 19

Attention!

1 n'est pas un nombre premier.

➤ Multiple (p. 14), Diviseur (p. 15)

Liste des nombres premiers inférieurs à 1000

2	101	211	307	401	503	601	701	809	907
3	103	223	311	409	509	607	709	811	911
5	107	227	313	419	521	613	719	821	919
7	109	229	317	421	523	617	727	823	929
11	113	233	331	431	541	619	733	827	937
13	127	239	337	433	547	631	739	829	941
17	131	241	347	439	557	641	743	839	947
19	137	251	349	443	563	643	751	853	953
23	139	257	353	449	569	647	757	857	967
29	149	263	359	457	571	653	761	859	971
31	151	269	367	461	577	659	769	863	977
37	157	271	373	463	587	661	773	877	983
41	163	277	379	467	593	673	787	881	991
43	167	281	383	479	599	677	797	883	997
47	173	283	389	487		683		887	
53	179	293	397	491		691			
59	181			499					
61	191								
67	193								
71	197								
73	199								
79									
83									
89									
97									

NO

Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout nombre naturel se décompose de manière unique en un produit de facteurs premiers.

Exemples

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

décomposition

decomponere (latin):

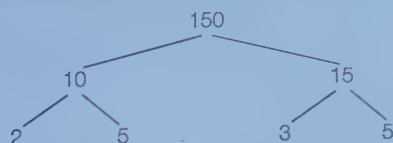
séparer, mettre en plusieurs morceaux

Pour décomposer un nombre naturel en un produit de facteurs premiers, on peut par exemple procéder ainsi :

495	3
165	3
55	5
11	11
1	

$$495 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

On peut procéder différemment, par exemple :



$$150 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Nombres premiers entre eux

Des nombres naturels sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1.

Exemples

9 et 16 sont premiers entre eux, de même que 7 et 15

12 et 8 ne sont pas premiers entre eux

Nombres relatifs

Nombre entier relatif

Un nombre entier relatif est un nombre entier, positif ou négatif.

On désigne par la lettre $\mathbb{Z}$ l'ensemble de tous les nombres entiers relatifs.

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$$

L'ensemble des nombres entiers relatifs est composé des nombres naturels et de leurs opposés.

Tout nombre entier relatif (sauf zéro) s'écrit à l'aide du signe + ou du signe - et d'un nombre naturel appelé sa valeur absolue.

En écriture simplifiée, on ne note pas le signe + des nombres positifs.

0 est le seul nombre à la fois positif et négatif.

Autre dénomination

L'ensemble des nombres entiers relatifs est aussi appelé l'ensemble des nombres entiers.

Exemples

$(+5); 0; (-27); \left(+\frac{9}{3}\right); \dots$ sont des nombres entiers relatifs

$(+3,8); (-4,57); \left(+\frac{1}{3}\right); \dots$ sont des nombres relatifs, mais pas des nombres entiers relatifs

→ Ensembles de nombres (p. 10), Opposé d'un nombre (p. 13), Valeur absolue (p. 13)

Addition de nombres relatifs

Pour additionner des nombres de même signe :

- on additionne leurs valeurs absolues ;
- on donne au résultat le signe commun.

Exemples

$$(+5) + (+7) = (+12) = +12 = 12$$

$$(-4) + (-7,5) = (-11,5) = -11,5$$

Pour additionner des nombres de signes différents :

- on soustrait la plus petite valeur absolue de la plus grande ;
- on donne au résultat le signe du nombre qui a la plus grande valeur absolue.

$$(+6) + (-9) = (-3) = -3$$

$$(-5) + (+2,3) = (-2,7) = -2,7$$

On peut également effectuer des additions (ou soustractions) par des représentations de déplacements sur une droite numérique ou sur un thermomètre.

✿ Ecriture simplifiée d'une somme de nombres relatifs

Pour alléger l'écriture d'une somme de nombres relatifs, on peut supprimer :

- toutes les parenthèses ;
- les signes opératoires de l'addition ;
- le signe prédicatoire + s'il se trouve au début de l'écriture.

Exemples

$(-4) + (+12) + (-27)$	peut s'écrire	$-4 + 12 - 27$
$(+2,5) + (-2) + (+0,5)$	peut s'écrire	$2,5 - 2 + 0,5$

✿ Soustraction de nombres relatifs

Pour soustraire un nombre, on additionne son opposé.

Exemples

$$\begin{aligned} (+5) - (+7) &= (+5) + (-7) = 5 - 7 = -2 \\ (-5) - (+7) &= (-5) + (-7) = -5 - 7 = -12 \\ (+5) - (-7) &= (+5) + (+7) = 5 + 7 = 12 \\ (-5) - (-7) &= (-5) + (+7) = -5 + 7 = 2 \\ (-4,2) - (+2,3) &= (-4,2) + (-2,3) = -4,2 - 2,3 = -6,5 \end{aligned}$$

➡ Opposé d'un nombre (p. 13)

✿ Multiplication de nombres relatifs

Pour multiplier deux nombres relatifs :

- on multiplie leurs valeurs absolues ;
- on donne le signe + au produit si les deux nombres sont de même signe ;
- on donne le signe - au produit si les deux nombres sont de signes différents.

Exemples

$$\begin{aligned} (+2) \cdot (+3,5) &= (+7) = +7 = 7 \\ (-2) \cdot (-3,5) &= (+7) = +7 = 7 \\ (+2) \cdot (-3,5) &= (-7) = -7 \\ (-2) \cdot (+3,5) &= (-7) = -7 \end{aligned}$$

➡ Opérations - vocabulaire (p. 11)

✿ Division de nombres relatifs

Pour diviser deux nombres relatifs :

- on divise leurs valeurs absolues ;
- on donne le signe + au quotient si les deux nombres sont de même signe ;
- on donne le signe - au quotient si les deux nombres sont de signes différents.

Exemples

$$\begin{aligned} (+28) : (+8) &= (+3,5) = +3,5 = 3,5 \\ (-28) : (-8) &= (+3,5) = +3,5 = 3,5 \\ (+28) : (-8) &= (-3,5) = -3,5 \\ (-28) : (+8) &= (-3,5) = -3,5 \end{aligned}$$

Nombres rationnels

Nombre rationnel

NO

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'exprimer comme le quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres entiers relatifs a et b , b étant non nul.

Exemples

$$1,4 = \frac{14}{10} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5} \quad \text{est un nombre rationnel}$$

$$-0,\bar{6} = \frac{-2}{3} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3} \quad \text{est un nombre rationnel}$$

rationnel

ratio (latin) : pouvoir de raison, raisonnable, ou qui est le rapport de deux nombres

On évite d'écrire, par exemple, $\frac{2}{-3}$.

On préfère écrire $\frac{-2}{3}$ ou $-\frac{2}{3}$.

On désigne par la lettre $\mathbb{Q}$ l'ensemble de tous les nombres rationnels.

Un nombre rationnel a une écriture décimale finie ou périodique.

Exemples

$$-2; \frac{7}{5}; 0; \frac{1}{4}; 0,5; \frac{2}{3}; 8,\bar{45}; \dots \quad \text{sont des nombres rationnels}$$

$$\pi; \sqrt{2}; \dots \quad \text{ne sont pas des nombres rationnels}$$

→ Ensembles de nombres (p. 10), Nombre irrationnel (p. 27)

Nombre rationnel périodique

Les nombres rationnels périodiques ont une écriture décimale illimitée ; on dit également de cette écriture qu'elle est périodique.

période

periodos (grec) : le circuit, le mouvement périodique

Exemples

$$\frac{13}{11} = 1,363636\dots = 1,3\bar{6} \quad \begin{array}{l} \text{La longueur de la période est 2} \\ \text{La séquence des chiffres 3 et 6 se répète indéfiniment} \end{array}$$

$$\frac{13}{3} = 3,8333\dots = 3,8\bar{3} \quad \begin{array}{l} \text{La longueur de la période est 1} \\ \text{Le chiffre 3 se répète indéfiniment} \end{array}$$

Attention !

$$0,\bar{9} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

On n'indique pas une période de zéro :

$$\frac{3}{2} = 1,5\bar{0} = 1,5$$

→ Nombre décimal (p. 21), Nombre irrationnel (p. 27), Différentes écritures d'un nombre (p. 27)

Nombre décimal

Un nombre décimal est un nombre dont l'écriture décimale possède un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule. C'est le quotient d'un nombre entier par une puissance de dix.

décimal

decem (latin) : dix

decimus (latin) : dixième

Exemples

$1,5$; $15,375$; 7 ; $-8,42$; $\frac{3}{2}$; $\frac{12}{4}$; ... sont des nombres décimaux

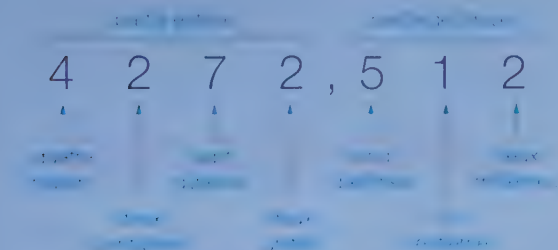
$0,16666\dots$; $1,\bar{3}$; $\frac{2}{7}$; ... ne sont pas des nombres décimaux

→ Nombre rationnel (p. 20), Puissances de dix (p. 28)

Ecriture décimale

Les décimales sont les chiffres figurant après la virgule.

La numération décimale est la numération en base dix.

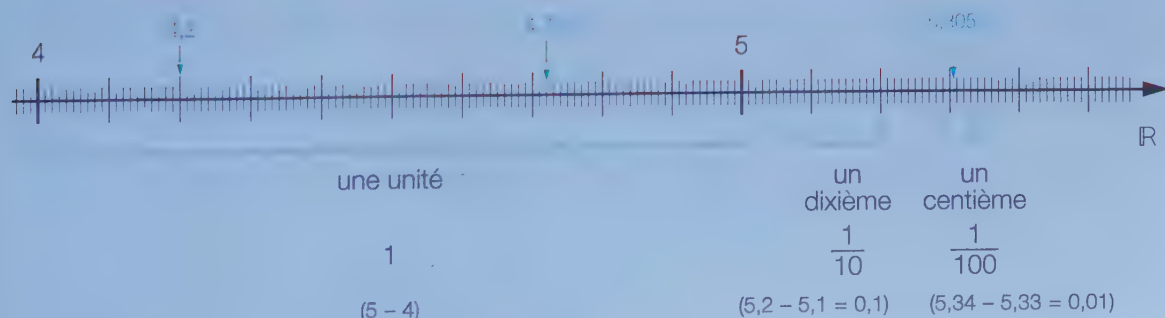


$$4272,512 = 4000 + 200 + 70 + 2 + \frac{5}{10} + \frac{1}{100} + \frac{2}{1000}$$

$$= 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3}$$

→ Puissances de dix (p. 28), Notation scientifique (p. 29)

Représentation de nombres décimaux sur une droite graduée



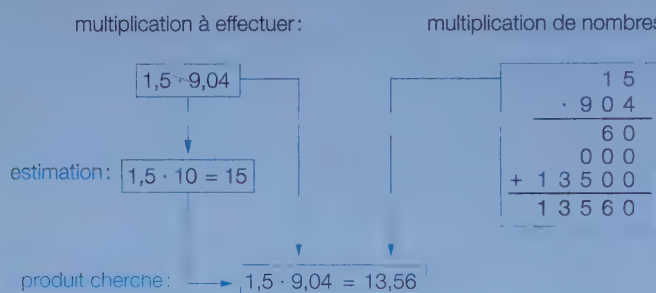
Addition et soustraction de nombres décimaux

Pour additionner ou soustraire des nombres décimaux, on peut par exemple procéder ainsi :

centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	...	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	...
1	4	7	3				4	5	6	10
		3	1							
+			4	7	8	-		3	9	6
	1	8	3	0	8		4	1	6	4

Multiplication de nombres décimaux

Pour multiplier deux nombres décimaux, on peut par exemple procéder ainsi :



Il existe d'autres méthodes pour multiplier des nombres décimaux.

Contrairement à l'addition et à la soustraction, la disposition des nombres dans la multiplication ne modifie pas la suite des chiffres du résultat.

Exemple

multiplication à effectuer :

$$1,5 \cdot 9,04$$

multiplications de nombres naturels :

$$\begin{array}{r} 15 \\ \cdot 904 \\ \hline 60 \\ 000 \\ + 13500 \\ \hline 13560 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 150 \\ \cdot 904 \\ \hline 600 \\ 0000 \\ + 135000 \\ \hline 135600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 904 \\ \cdot 15 \\ \hline 4520 \\ + 9040 \\ \hline 13560 \end{array}$$

Il ne reste donc plus qu'à placer la virgule au bon endroit. Cela peut se faire :

- par une estimation : $1,5 \cdot 9,04 \approx 1,5 \cdot 10 = 15$, donc le résultat est 13,56 ;
- en totalisant les décimales des deux nombres à multiplier pour en faire le nombre de décimales du résultat :
 - multiplications 1 et 3 : trois décimales au départ (5, 0 et 4), donc trois à l'arrivée (5, 6 et 0) ;
 - multiplication 2 : quatre décimales au départ (5, 0, 0 et 4), donc quatre à l'arrivée (5, 6, 0 et 0), et le résultat est également 13,56.

Division d'un nombre décimal par un autre nombre décimal

On ne change pas le quotient de deux nombres si on les multiplie par un même nombre non nul.

Exemples

$$6 : 1,2 = 60 : 12 = 5$$

$$4,5 : 25 = 18 : 100 = 0,18$$

Pour diviser un nombre décimal par un autre nombre décimal, on peut par exemple procéder ainsi :

division à effectuer :

$$29,5 : 1,25$$

estimation : $29 : 1 = 29$

quotient cherché : $29,5 : 1,25 = 23,6$

division de nombres naturels :

$$\begin{array}{r} 2950 \quad | \quad 125 \\ - 250 \quad | \quad 23,6 \\ \hline 450 \\ - 375 \\ \hline 750 \\ - 750 \\ \hline 0 \end{array}$$

Pour effectuer une division, il est utile que le diviseur soit un nombre entier.

➡ Opérations – vocabulaire (p. 11)

Approximation d'un nombre

Donner une approximation d'un nombre, c'est donner une valeur approchée de ce nombre.

approximation

approximare (latin) :
approcher

Nombre	Valeur approchée ...
0,468	... au centième: 0,47
1,741	... au dixième: 1,7
7,8	... à l'unité: 8
124	... à la dizaine: 120
5247	... à la centaine: 5200
3828	... au millier: 4000

Arrondir un nombre est une façon d'en donner une approximation.

Arrondir un nombre au centième, c'est donner une valeur approchée de ce nombre avec un nombre entier de centièmes.

La précision d'une approximation dépend du contexte de la situation.

Exemple

Pour un automobiliste, 147 km $\approx$ 150 km,
mais pour un marcheur 7 km n'est pas proche de 10 km

La troncature à l'unité d'un nombre est sa partie entière.

La troncature à l'unité de 4,962 est 4.

Il existe d'autres manières de tronquer un nombre: la troncature au dixième de 12,367 vaut 12,3, sa troncature au centième est égale à 12,36.

➡ Nombre décimal (p. 21)

Chiffres significatifs d'un nombre

Les chiffres significatifs d'un nombre sont tous ses chiffres, excepté tous les zéros situés devant le premier chiffre non nul.

Exemple

Les nombres 230 ; 2,40 ; 1,04 et 0,0888 ont trois chiffres significatifs

Suivant le contexte, en sciences expérimentales, en économie, les zéros finaux sont significatifs ou non, selon la précision des mesures et des calculs.

Exemple

Dans 40 000, indiquant l'ordre de grandeur de la longueur de l'équateur en kilomètres, les zéros ne sont pas significatifs

Dans 40 000, indiquant le prix exact en francs suisses payé pour une voiture, tous les chiffres sont significatifs

Écriture fractionnaire ou fraction

Une écriture fractionnaire ou fraction est le rapport du nombre a au nombre b (b différent de 0) noté $\frac{a}{b}$.

fraction

frangere (latin) : briser, casser

$\frac{3}{4}$ ← numérateur (ou dividende)
 ← barre de fraction
 ← dénominateur (ou diviseur)

Exemple

$\frac{3}{4}$, parfois écrit $\frac{3}{4}$, est le rapport du nombre 3 au nombre 4

$\frac{3}{4}$ se lit « trois quarts »

$\frac{1}{3}$ se lit « un tiers »

$\frac{5}{6}$ se lit « cinq sixièmes »

$\frac{5}{2}$ se lit « cinq demis »

$\frac{7}{5}$ se lit « sept cinquièmes » ...

Attention !

Un nombre rationnel peut se présenter sous des écritures fractionnaires diverses :

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{75}{100} = \dots$$

Le dénominateur sert également à nommer la fraction :

$\frac{3}{5}$, il s'agit de cinquièmes

Transformation d'une écriture fractionnaire en écriture décimale

L'amplification, la simplification ou encore la division du numérateur par le dénominateur permettent de trouver l'écriture décimale d'une écriture fractionnaire.

Exemples

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75$$

$$\frac{14}{70} = \frac{2}{10} = 0,2$$

$$\frac{3}{11} = 0,272727\dots = 0,\overline{27}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 0,15$$

$$\frac{2}{3} = 0,66666666\dots = 0,\overline{6}$$

→ Simplification de fractions (p. 25), Amplification de fractions (p. 25)

Transformation d'une écriture décimale en écriture fractionnaire

Pour transformer une écriture décimale en écriture fractionnaire, on l'écrit sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

Exemples

$$0,005 = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$$

$$1,25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$$

Tous les nombres ne peuvent pas être écrits sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

Exemples

$$1,\overline{6} = \frac{5}{3}$$

$$0,\overline{7} = \frac{7}{9}$$

➡ Nombre décimal (p. 21)

Simplification de fractions

Simplifier une fraction, c'est diviser son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier (non nul).

On obtient ainsi deux écritures différentes d'un même nombre.

Une fraction que l'on ne peut plus simplifier est une fraction irréductible.

Exemples

$\frac{1}{4}$; $\frac{11}{5}$; $-\frac{3}{7}$; ... sont des fractions irréductibles

$$\frac{84}{70} = \frac{12}{10}$$

$$\frac{48}{36} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Amplification de fractions

Amplifier une fraction, c'est multiplier son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier (non nul). On obtient ainsi deux écritures différentes d'un même nombre.

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{15}{100}$$

Addition et soustraction de fractions

Lorsque les dénominateurs sont égaux

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions ayant le même dénominateur :

1. on conserve leur dénominateur commun ;
2. on additionne (ou soustrait) les deux numérateurs.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad (c \text{ différent de zéro})$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \quad (c \text{ différent de zéro})$$

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{12}{8}$$

← somme des numérateurs

↑
↑
↑
même dénominateur

$$\frac{8}{5} - \frac{6}{5} = \frac{2}{5}$$

← différence des numérateurs

↑
↑
↑
même dénominateur

Lorsque les dénominateurs sont différents

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions ayant des dénominateurs différents :

1. on écrit des fractions égales aux fractions données, mais possédant le même dénominateur ;
2. on conserve leur dénominateur commun ;
3. on additionne (ou soustrait) les deux numérateurs.

On trouve parfois l'écriture $4\frac{1}{2}$ pour $4 + \frac{1}{2}$.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad (b \text{ et } d \text{ différents de zéro})$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \quad (b \text{ et } d \text{ différents de zéro})$$

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3}{12} + \frac{10}{12} = \frac{13}{12}$$

← 3 ← 2
← 3 ← 2

$$\frac{7}{5} - \frac{2}{3} = \frac{21}{15} - \frac{10}{15} = \frac{11}{15}$$

← 3 ← 5
← 3 ← 5

... Multiples communs et ppmc (p. 14), Amplification de fractions (p. 25)

Multiplication de fractions

Pour multiplier des fractions, on multiplie leurs numérateurs entre eux et leurs dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (b \text{ et } d \text{ différents de zéro})$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$$

← produit des numérateurs
← produit des dénominateurs

Division d'une fraction par une autre fraction

Pour diviser une fraction par une autre fraction, on multiplie la première par l'inverse de la seconde.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (b, c \text{ et } d \text{ différents de zéro})$$

Exemple

$$\frac{2}{9} : \frac{5}{4} = \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{45}$$

→ Inverse d'un nombre (p. 14), Simplification de fractions (p. 25)

Nombres réels

Nombre réel

L'ensemble des nombres réels est constitué de tous les nombres susceptibles de mesurer un segment, de l'opposé de chacun de ces nombres ainsi que de 0.

On désigne par la lettre $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Exemples

$2,5$; -9 ; $-\frac{2}{5}$; $\frac{\sqrt{5}}{3}$; π ; ... sont des nombres réels

L'ensemble des nombres réels réunit les nombres rationnels et les nombres irrationnels.

Nombre irrationnel

Les nombres irrationnels appartiennent à l'ensemble des nombres réels, mais pas à l'ensemble des nombres rationnels. On ne peut pas les écrire sous forme de fraction. Ils n'ont pas d'écriture décimale finie ou périodique.

Exemples

$$\begin{array}{lll} \pi = 3,14159265... & \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803398... & 1,110100100010000... \\ \sqrt{2} = 1,41421356... & 0,123456789101112... & ... \end{array}$$

→ Ensembles de nombres (p. 10), Nombre rationnel (p. 20), Nombre rationnel périodique (p. 20), Nombre décimal (p. 21)

Différentes écritures d'un nombre

Tout nombre possède une infinité d'écritures différentes.

Exemple

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,40 = \frac{40}{100} = 40\% = 4 \cdot 10^{-1} = 0,4 = ...$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{45} &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

Puissances et racines

Puissance

NO

On appelle puissance la notation a^n indiquant le produit de n facteurs a , n étant un nombre naturel.

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^n$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ facteurs}}$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{5 \text{ facteurs}} \quad \begin{matrix} \text{exposant} \\ \uparrow \\ \text{base} \end{matrix}$

Cas particuliers

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$a^1 = a$$

Autre dénomination

4^5 se lit aussi « 4 puissance 5 ».

a^2 se lit « a au carré » a^3 se lit « a au cube » a^5 se lit « a exposant 5 »

Le carré d'un nombre entier est aussi appelé carré parfait. 1, 4, 9, 16, 25, ... sont des carrés parfaits.

Puissances d'exposant négatif

Une puissance d'exposant négatif est l'inverse d'une puissance positive.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \text{ différent de zéro et } n \in \mathbb{N})$$

Exemples

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Puissances de dix

On appelle puissance de dix le nombre noté 10^n ($n \in \mathbb{N}$), ou $\frac{1}{10^p}$, noté aussi 10^{-p} ($p \in \mathbb{N}$).

Puissance	Ecriture décimale	Nom	Préfixe	Symbole
...				
10^9	1 000 000 000	milliard	giga	G
10^6	1 000 000	million	méga	M
10^3	1 000	mille	kilo	k
10^2	100	cent	hecto	h
10^1	10	dix	déca	da
10^0	1	un		
10^{-1}	0,1	dixième	déci	d
10^{-2}	0,01	centième	centi	c
10^{-3}	0,001	millième	milli	m
10^{-6}	0,000 001	millionième	micro	μ
10^{-9}	0,000 000 001	milliardième	nano	n
...				

Exemples

$$1 \text{ GW} = 10^9 \text{ W}$$

$$1 \text{ Mo} = 10^6 \text{ o}$$

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$$

$$1 \text{ mg} = 0,001 \text{ g}$$

$$1 \mu\text{s} = 10^{-6} \text{ s}$$

Propriétés des puissances

	Cas général	Exemple
Produit de puissances de même base :	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5$
Quotient de puissances de même base :	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$6^5 : 6^3 = 6^{5-3} = 6^2$
Puissance d'une puissance :	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(10^2)^3 = 10^{2 \cdot 3} = 10^6$
Puissance d'un produit :	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	$(10 \cdot 5)^2 = 10^2 \cdot 5^2 = 2500$
Puissance d'un quotient :	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$

Notation scientifique

Un nombre positif est écrit en notation scientifique s'il est écrit sous la forme $a \cdot 10^n$ où :

$$1 \leq a < 10 ;$$

n est un nombre entier.

On peut aussi écrire un nombre négatif en écriture scientifique. Par exemple, $-5000 = -5 \cdot 10^3$

Exemples

$$125\,000 = 1,25 \cdot 10^5$$

$$0,001 = 1 \cdot 10^{-3} = 10^{-3}$$

$$756 = 7,56 \cdot 10^2$$

$$0,0007 = 7 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{diamètre d'un noyau d'atome} \approx 1 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 0,000\,000\,000\,000\,001 \text{ m}$$

$$\text{masse de la Terre} \approx 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} = 5\,970\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ kg}$$

➡ Nombre entier relatif (p. 18), Puissances de dix (p. 28)

Racine

Racine carrée

La racine carrée d'un nombre réel positif x est le nombre positif dont le carré est égal à x . On le désigne par $\sqrt{x}$.

Exemples $\sqrt{81} = 9$ car $9^2 = 81$ $\sqrt{2,25} = 1,5$ car $1,5^2 = 2,25$

Attention !

Dans l'ensemble des nombres réels, l'écriture $\sqrt{x}$ n'a de sens que si x est un nombre positif.

Racine n -ième

La racine n -ième d'un nombre x est le nombre dont la n -ième puissance est égale à x (si n est pair, alors ce nombre est positif). On le désigne par $\sqrt[n]{x}$.

Si $x = 0$, alors $\sqrt[n]{x} = 0$;

Si x est positif, alors $\sqrt[n]{x}$ est un nombre positif ;

Si x est négatif et n est impair, alors $\sqrt[n]{x}$ est un nombre négatif ;

Si x est négatif et n est pair, alors x n'a pas de racine n -ième dans les nombres réels.

Exemples $\sqrt[3]{-125} = -5$ car $(-5)^3 = -125$

$\sqrt[6]{64} = 2$ car $2^6 = 64$

$\sqrt[5]{32} = 2$ car $2^5 = 32$

en revanche, -64 n'a pas de racine 6-ième dans les nombres réels

➡ Puissance (p. 28)

Propriétés des racines

	Cas général	Exemple
Produit des racines	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad (a \geq 0 \text{ et } b \geq 0)$	$\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6$
Quotient des racines	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0 \text{ et } b > 0)$	$\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2$

En général

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ et } \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Probabilités

Probabilité

La probabilité qu'un événement se produise est fréquemment égale au rapport

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

On l'exprime par un nombre compris entre zéro et un.

Exemple

La probabilité d'obtenir un total de « cinq » en lançant deux dés conventionnels

à six faces est $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, soit une chance sur neuf, car il existe :

- 4 cas favorables : (1 ; 4) (2 ; 3) (3 ; 2) (4 ; 1)
- 36 cas possibles : (1 ; 1) (1 ; 2) (1 ; 3) (1 ; 4) (1 ; 5) (1 ; 6)
(2 ; 1) (2 ; 2) (2 ; 3) ...
...
(6 ; 1) (6 ; 2) (6 ; 3) (6 ; 4) (6 ; 5) (6 ; 6)

➡ Nombre rationnel (p. 20)

Fractions

simplification

$$\frac{26}{47} \quad \text{fraction irréductible}$$

$$\frac{51}{78} \div 3 = \frac{17}{26}$$

$$\frac{100}{224} \div 8 = \frac{50}{112} \div 2 = \frac{25}{56}$$

$$\frac{16}{72} \div 8 = \frac{2}{9}$$

amplification

$$\frac{26}{17} \cdot 7 = \frac{182}{119}$$

$$\frac{66}{58} \cdot 3 = \frac{198}{174}$$

$$\frac{17}{8} \cdot 5 = \frac{85}{40}$$

$$\frac{59}{74} \cdot 5 = \frac{295}{370}$$

addition

$$\frac{7}{5} + 0,5 + \frac{9}{10} = \frac{7}{5} + \frac{1}{2} + \frac{9}{10} = \frac{14}{10} + \frac{5}{10} + \frac{9}{10} = \frac{28}{10} = \frac{14}{5}$$

$$\frac{14}{10} + \frac{5}{10} + \frac{9}{10} = \frac{28}{10} = \frac{14}{5}$$

soustraction

$$\frac{11}{33} - \frac{10}{90} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{47}{13} - \frac{3}{4} = \frac{188}{52} - \frac{39}{52} = \frac{149}{52}$$

$$\frac{17}{2} - 7,5 - \frac{1}{3} = \frac{17}{2} - \frac{15}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{2} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{51}{6} - \frac{45}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$4 + \frac{3}{19} = \frac{8}{2} + \frac{3}{19} = \frac{152}{38} + \frac{6}{38} = \frac{158}{38}$$

$$\frac{158}{38} = \frac{79}{19}$$

addition

même dénominateur

$$\frac{74}{10} + \frac{22}{10} = \frac{96}{10}$$

$$\frac{82}{7} + \frac{97}{14} = \frac{164}{14} + \frac{97}{14} = \frac{261}{14}$$

irréductible

$$\frac{122}{20} + \frac{173}{20} = \frac{295}{20}$$

$$\frac{5}{10} + \frac{116}{100} = \frac{50}{100} + \frac{116}{100} = \frac{166}{100} = \frac{83}{50}$$

multiplications

$$\frac{16}{23} \cdot \frac{89}{107} = \frac{1246}{2461}$$

$$\frac{1112}{167} \cdot \frac{17890}{730} = \frac{19893680}{121910}$$

$$\frac{289}{7} \cdot \frac{1789}{763} = \frac{517021}{5201}$$

$$\frac{8}{11} \cdot \frac{7}{4} = \frac{56}{44} = \frac{28}{22} = \frac{14}{11}$$

$$\frac{4}{3} \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{16} = \frac{4}{3} + \frac{5}{1} + \frac{4}{5} + \frac{3}{16} = \frac{80}{80} + \frac{700}{80} + \frac{64}{80} + \frac{15}{16} = \frac{1757}{240}$$

$$\frac{370}{240} + \frac{1200}{240} + \frac{192}{240} + \frac{45}{240} = \frac{1757}{240}$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{16} = \frac{240}{240} = 1$$

$$L = \frac{2}{3} \times \frac{15}{8} + 3$$

$$\frac{30}{24} + \frac{3}{1} = \frac{30}{24} + \frac{72}{24} = \frac{102}{24} = \frac{51}{12} = \frac{17}{4}$$

NO

Le nombre $\frac{a}{b}$ est la fraction de la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers, $b \neq 0$.
 Le nombre $\frac{a}{b}$ est la fraction de la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers, $b \neq 0$.
 Le nombre $\frac{a}{b}$ est la fraction de la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers, $b \neq 0$.
 Le nombre $\frac{a}{b}$ est la fraction de la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers, $b \neq 0$.
 Le nombre $\frac{a}{b}$ est la fraction de la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers, $b \neq 0$.
 Le nombre $\frac{a}{b}$ est la fraction de la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers, $b \neq 0$.

Le nombre $\frac{a}{b}$ est la fraction de la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers, $b \neq 0$.

NO

Fonctions et algèbre – FA

■ Fonctions	38
■ Diagrammes	49
■ Calcul littéral	51
■ Equations	56

Fonctions

Fonction

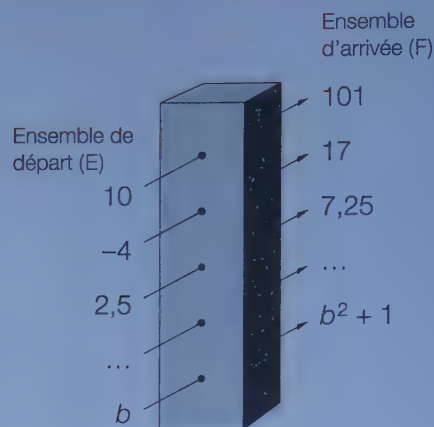
Une fonction (ou une application) d'un ensemble de départ (E) vers un ensemble d'arrivée (F) est une relation qui, à chaque élément de E, fait correspondre exactement un élément de F.

Si f désigne cette fonction, on note $f: E \longrightarrow F$

E est l'ensemble de départ de la fonction
et F en est l'ensemble d'arrivée.

Si b est un élément de E, on désigne par $f(b)$ l'élément de F qui correspond à b .

$f(b)$ est l'image de b par f et l'on note: $b \longmapsto f(b)$



Exemples

Pour trouver l'aire d'un carré, on élève au carré la mesure de son côté:

Mesure du côté du carré (cm)	2	2,5	4	...	c
Aire du carré (cm ²)	4	6,25	16	...	c ²

Pour trouver le prix à payer de n'importe quelle quantité (exprimée en kg) d'une marchandise qui coûte Fr. 1.80 le kg, on multiplie cette quantité par 1,8:

Quantité d'une marchandise (kg)	1	3	...	x
Prix (Fr.)	1.80	5.40	...	1,8x

Ensembles de nombres (p. 10)

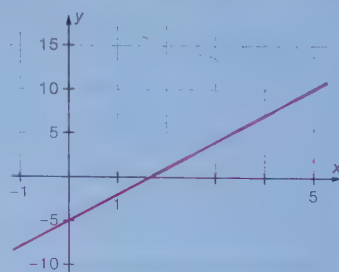
Représentations d'une fonction f

Considérons par exemple la fonction f qui associe à tout nombre son triple diminué de 5. On peut la représenter par:

un tableau de valeurs:

Éléments de l'ensemble de départ	20	1	4,5	...	x
Images dans l'ensemble d'arrivée	55	-2	8,5	...	$3x - 5$

une représentation graphique:



une expression fonctionnelle:

$$x \longmapsto 3x - 5$$

ou $f(x) = 3x - 5$

ou $y = 3x - 5$

Dans cette écriture, x représente un nombre de l'ensemble de départ et $3x - 5$ le nombre correspondant de l'ensemble d'arrivée.

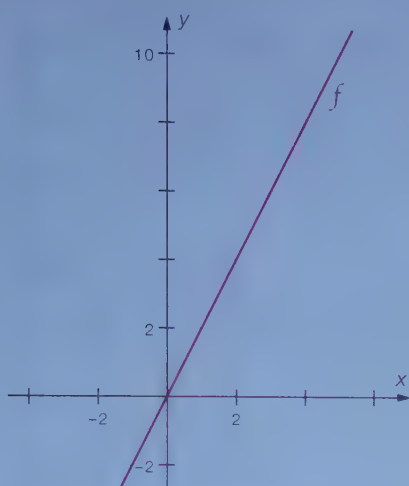
Repérage d'un point dans le plan (p. 69)

Croissance et décroissance d'une fonction

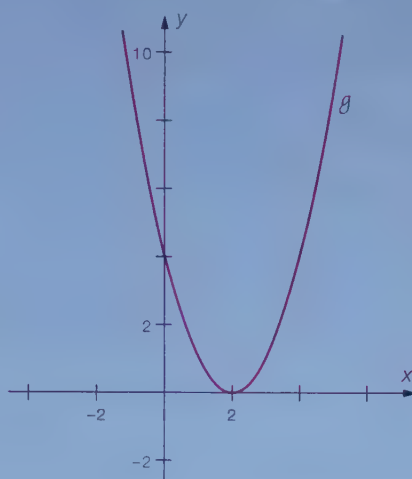
Sur un intervalle donné, si la valeur des images augmente lorsque la valeur de la variable augmente, alors la fonction est croissante.

Sur un intervalle donné, si la valeur des images diminue lorsque la valeur de la variable augmente, alors la fonction est décroissante.

$$f: x \mapsto 2x$$



$$g: x \mapsto (x-2)^2$$



x	-3	-1	0	2,5	...
$f(x) = 2x$	-6	-2	0	5	...

La fonction f est partout croissante.
Plus x est grand, plus $f(x)$ l'est aussi.

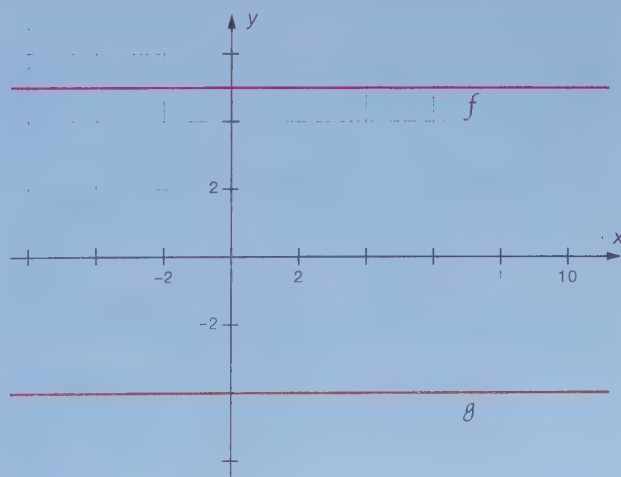
x	-2	0	2	3	4	...
$g(x) = (x-2)^2$	16	4	0	1	4	...

La fonction g décroît lorsque x croît de $-\infty$ à 2,
s'annule pour $x = 2$ et croît lorsque x croît de 2 à $+\infty$.

Fonction constante

Une fonction constante est une fonction de la forme $x \mapsto b$

La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



$$f: x \mapsto 5$$

$$g: x \mapsto -4$$

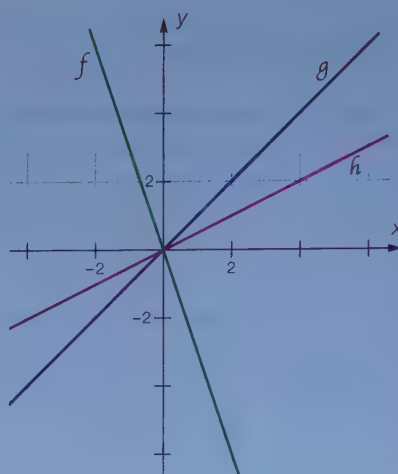
Fonction linéaire

Une fonction linéaire est une fonction de la forme $x \mapsto ax$

Le nombre réel a s'appelle le facteur de linéarité (ou coefficient de linéarité).

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine des axes.

Le nombre a correspond à la pente de la droite.



linéaire

linea (latin): la ligne

Cas particulier

La fonction $x \mapsto x$ est appelée « fonction identité ».

$$f: x \mapsto -3x$$

$$g: x \mapsto x$$

$$h: x \mapsto 0,5x$$

→ Fonction (p. 38), Proportionnalité (p. 41), Pente d'une droite (p. 43), Fonction affine (p. 45)

Propriétés d'une fonction linéaire

Dans ce tableau, tous les nombres de la première ligne ont été multipliés par 3 pour obtenir leurs images, qui constituent la seconde ligne du tableau :

	3	4	7	8	11,1	32	50,5	...	n	
Éléments de l'ensemble de départ	3	4	7	8	11,1	32	50,5	...	n	
Images dans l'ensemble d'arrivée	9	12	21	24	33,3	96	151,5	...	$3n$	

propriété de la somme propriété du produit

Selon la propriété de la somme, l'image d'une somme de nombres est égale à la somme de leurs images.

Selon la propriété du produit, l'image du double (du triple, ...) d'un nombre est égale au double (au triple, ...) de son image.

→ Proportionnalité (p. 41)

Attention !

Seules les fonctions linéaires jouissent de ces propriétés.

Proportionnalité

Lorsque l'on multiplie chacun des nombres d'une suite par un même facteur non nul, on obtient une suite proportionnelle à la première.

Exemple

Suite A	-4	0	1	1,2	3	8	...	x
Suite B	-10	0	2,5	3	7,5	20	...	2,5x

$\frac{-10}{-4} = \frac{3}{1,2} = \frac{7,5}{3} = \frac{2,5}{1} = \dots = 2,5$

Si la seconde suite est proportionnelle à la première, la première suite est aussi proportionnelle à la seconde. C'est pourquoi l'on dit souvent que les deux suites sont proportionnelles.

Le nombre 2,5 est le facteur de proportionnalité.

L'expression fonctionnelle décrivant la situation ci-dessus est $x \mapsto 2,5x$

Il s'agit d'une fonction linéaire dont la représentation graphique est une droite passant par l'origine.

Autre dénomination

Le facteur de proportionnalité est aussi appelé coefficient de proportionnalité ou facteur de linéarité.

Exemples

Le périmètre d'un carré est proportionnel à la mesure de son côté.

Le prix à payer est proportionnel à la quantité d'essence achetée.

La masse d'un objet en fer est proportionnelle au volume de cet objet.

En revanche,

le poids d'une personne n'est pas proportionnel à sa taille ;

l'aire d'un disque n'est pas proportionnelle à la mesure de son rayon.

En effet, on ne peut, pour ces situations, définir un facteur de proportionnalité.

→ Fonction linéaire (p. 40)

Pourcentage

Un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est 100.

Par exemple : $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0,2$

20 % se lit « vingt pour cent »

Symbole %

30 ‰ se lit « trente pour mille »

$30\text{‰} = \frac{30}{1000} = \frac{3}{100} = 0,03$

Exemples

Si un vendeur accorde un rabais de 20 % sur le prix de chaque marchandise, on peut calculer les rabais en multipliant chaque prix par $\frac{20}{100}$:

0,2	Prix initial (en francs)	100	25	200	225	12	...	$\frac{20}{100}$
	Rabais (en francs)	20	5	40	45	2,4	...	

Le rabais est proportionnel au prix initial.

Si, dans un village de 600 habitants, 210 sont de langue maternelle française, alors 35 % des villageois sont francophones. En effet : $\frac{210}{600} = \frac{35}{100} = 35\%$

→ Nombre rationnel (p. 20), Fonction linéaire (p. 40), Proportionnalité (p. 41)

Echelle

L'échelle e d'un plan est le quotient de la distance mesurée sur ce plan par la mesure réelle qui lui correspond.

$$e = \frac{\text{distance sur le plan}}{\text{distance réelle}}$$

Cette carte, ce plan et ce dessin sont des représentations à l'échelle d'une réalité physique. Cela signifie que, dans chacun de ces cas, les dimensions de la représentation et les dimensions réelles sont proportionnelles.

échelle

scala (latin) : l'échelle, l'escalier

Attention !

L'échelle est une grandeur sans unité.

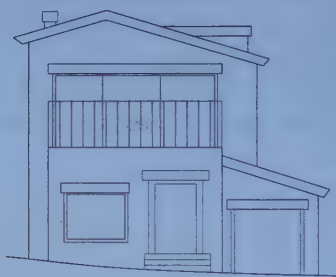
Pour écrire une échelle sous forme de quotient, les deux distances doivent être exprimées avec la même unité.

La carte topographique et le plan de la façade sont des réductions de la réalité : leurs échelles sont inférieures à 1.



1 : 50 000

Chaque dimension réelle a été divisée par 50 000



1 : 200

Chaque dimension réelle a été divisée par 200

Le dessin du coléoptère est un agrandissement de la réalité : son échelle est supérieure à 1.



10 : 1

Chaque dimension réelle a été multipliée par 10

Exemple

En multipliant n'importe quelle distance de la carte topographique par 50 000, on obtient la distance réelle correspondante dans la même unité de longueur :

Distance sur la carte (en cm)	1	2,5	4	6,5	...
Distance réelle (en cm)	50 000	125 000	200 000	325 000	...



Une échelle peut être exprimée de plusieurs manières :

Par un quotient

1 : 50 000
ou 1/50 000

Par un dessin



Par une indication du type

« 2 cm pour 1 km »

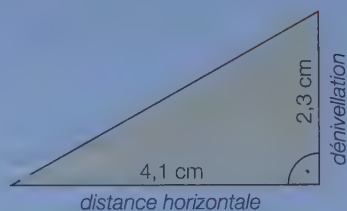
Pente d'un terrain

La pente p d'un terrain, d'une route, etc., est le quotient de la dénivellation par la distance horizontale (les unités de longueur doivent être les mêmes).

$$\text{pente} = \frac{\text{dénivellation}}{\text{distance horizontale}}$$

Une pente n'a pas d'unité. Elle s'exprime généralement en %.

Exemple

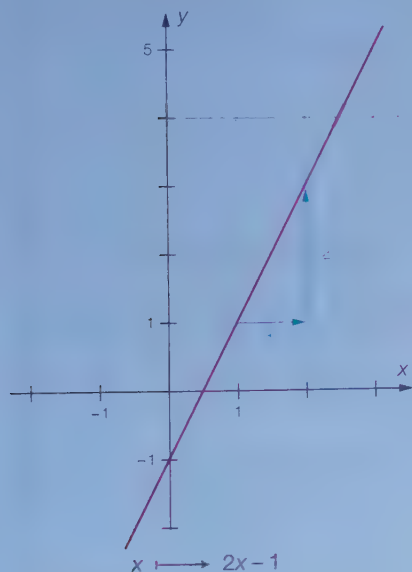


$$p = \frac{2,3}{4,1} = \frac{23}{41} \approx 0,56 = 56 \%$$

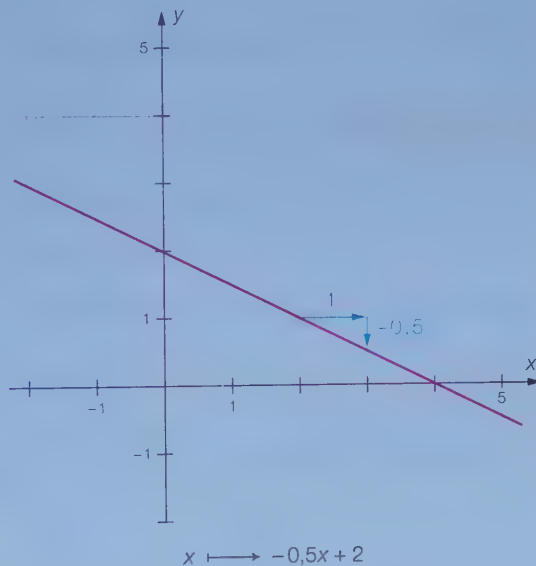
➡ Pourcentage (p. 41)

Pente d'une droite

La représentation graphique d'une fonction de la forme $x \mapsto ax + b$ est une droite.
Le nombre a correspond à la pente de la droite.



La pente de la droite est 2



La pente de la droite est $-0,5$

➡ Fonction linéaire (p. 40), Fonction affine (p. 45)

Vitesse

La vitesse moyenne (v) d'un corps est le quotient de la distance parcourue (d) par le temps de parcours (t) du trajet.

$$v = \frac{d}{t}$$

Exemple

Si un avion de ligne vole à la vitesse moyenne de 900 km/h, on peut trouver la distance parcourue (en km) en multipliant la durée du trajet (en h) par 900 :

Durée du trajet (en h)	1	1,5	2	3	6	...
Distance parcourue (en km)	900	1350	1800	2700	5400	...

(. 900)

À une vitesse moyenne donnée, la distance parcourue est proportionnelle à la durée du trajet.

→ Fonction linéaire (p. 40), Proportionnalité (p. 41)

Attention!

Si, par exemple, la distance est exprimée en mètres et la durée en secondes, alors la vitesse s'exprime en mètres par seconde (m/s).

Quelques vitesses

$V_{\text{son dans l'air}} = 343 \text{ m/s}$
 $V_{\text{lumière}} = 300\,000 \text{ km/s}$
 $V_{\text{libération}} = 11 \text{ km/s}$ (vitesse nécessaire pour échapper à l'attraction terrestre)
 $V_{\text{limite de chute}} = 250 \text{ km/h}$ (cas d'un parachutiste, avec le parachute fermé!)

Le nœud (1 mille marin par heure) est une unité de vitesse utilisée en navigation maritime ou aérienne.
 1 nœud (nd) = 1,852 km/h

Masse volumique

La masse volumique (ρ) d'un corps est égale au quotient de sa masse (m) par son volume (V).

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Exemple

Si la masse volumique d'un corps est 2,5 kg/dm³, on peut trouver sa masse (en kg) en multipliant son volume (en dm³) par 2,5 :

Volume (en dm ³)	1	2	3	5	...
Masse (en kg)	2,5	5	7,5	12,5	...

(. 2,5)

La masse d'un corps homogène et son volume sont proportionnels.

→ Fonction linéaire (p. 40), Proportionnalité (p. 41), Alphabet grec (p. 149)

Attention!

Si, par exemple, la masse est exprimée en grammes (g) et le volume en centimètres cubes (cm³), alors la masse volumique s'exprime en grammes par centimètre cube (g/cm³).

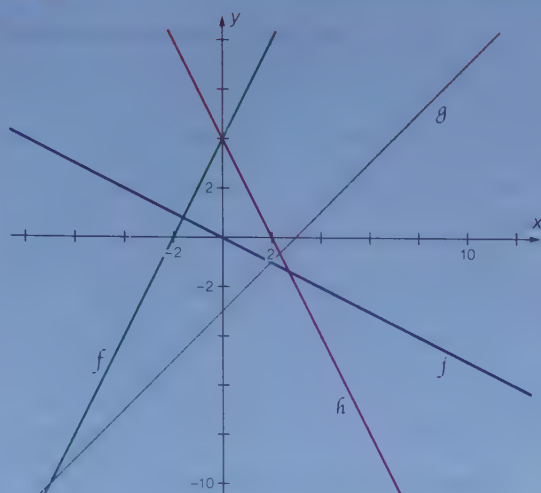
Quelques masses volumiques

$\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ g/cm}^3$
 $\rho_{\text{air}} = 1,29 \text{ kg/m}^3$
 $\rho_{\text{fer}} = 7860 \text{ kg/m}^3 = 7,86 \text{ g/cm}^3$
 $\rho_{\text{sapin}} = 500 \text{ kg/m}^3 = 0,5 \text{ g/cm}^3$

Fonction affine

Une fonction affine est une fonction de la forme $x \mapsto ax + b$

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.



$$f: x \mapsto 2x + 4$$

$$g: x \mapsto x - 3$$

$$h: x \mapsto -2x + 4$$

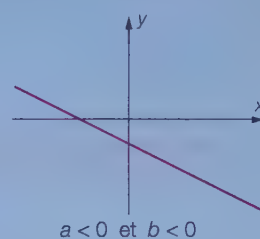
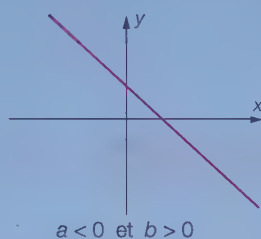
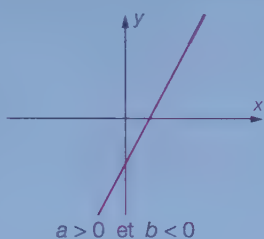
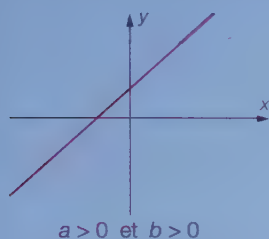
$$j: x \mapsto -0,5x$$

Cas particuliers

Une fonction linéaire est une fonction affine pour laquelle $b = 0$.

Une fonction constante est une fonction affine pour laquelle $a = 0$.

Le nombre a correspond à la pente de la droite. Le nombre b est l'ordonnée à l'origine. Il correspond à la deuxième coordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe vertical.



➡ Fonction (p. 38), Fonction linéaire (p. 40), Pente d'une droite (p. 43)

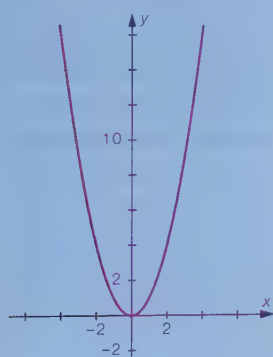
Fonction quadratique

Une fonction quadratique est une fonction de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

La représentation graphique d'une fonction quadratique est une parabole.

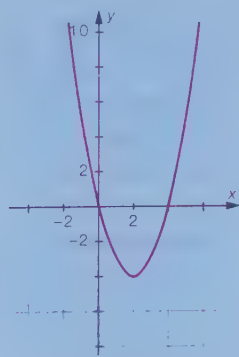
quadratique

quadratus (latin) : le carré



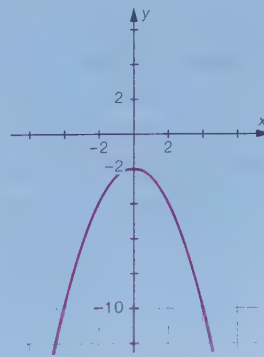
$$x \mapsto x^2$$

($a = 1$; $b = 0$; $c = 0$)



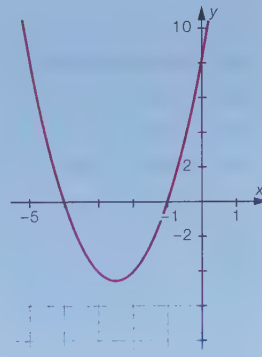
$$x \mapsto x^2 - 4x$$

($a = 1$; $b = -4$; $c = 0$)



$$x \mapsto -0,5x^2 - 2$$

($a = -0,5$; $b = 0$; $c = -2$)



$$x \mapsto 2x^2 + 10x + 8$$

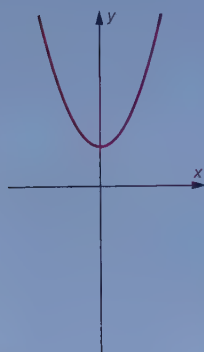
($a = 2$; $b = 10$; $c = 8$)



Le sommet de la parabole est un minimum de la fonction si $a > 0$
et un maximum de la fonction si $a < 0$.

Attention!

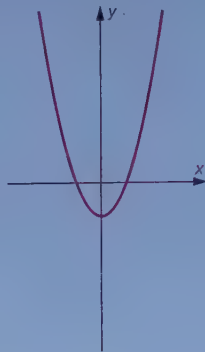
Il y a d'autres cas de figures.



$$a > 0$$

$$b = 0$$

$$c > 0$$



$$a > 0$$

$$b = 0$$

$$c < 0$$



$$a < 0$$

$$b = 0$$

$$c = 0$$



$$a < 0$$

$$b = 0$$

$$c > 0$$

➤ Fonction (p. 38)

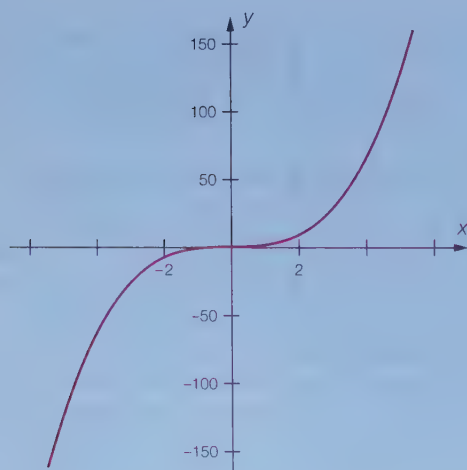
Fonction puissance n -ième

Une fonction puissance n -ième est une fonction de la forme
 $x \mapsto x^n$ (n est un nombre naturel différent de zéro)

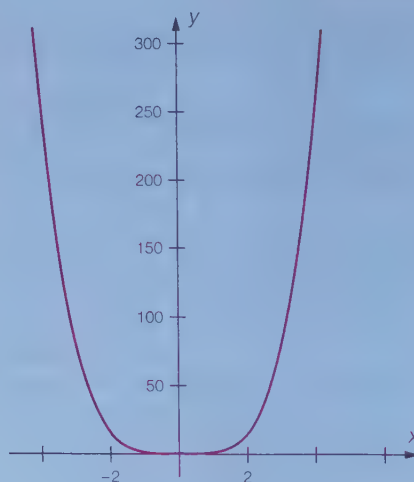
Cas particuliers

La fonction $x \mapsto x$ est une fonction linéaire.

La fonction $x \mapsto x^2$ est une fonction quadratique.



$$x \mapsto x^3$$

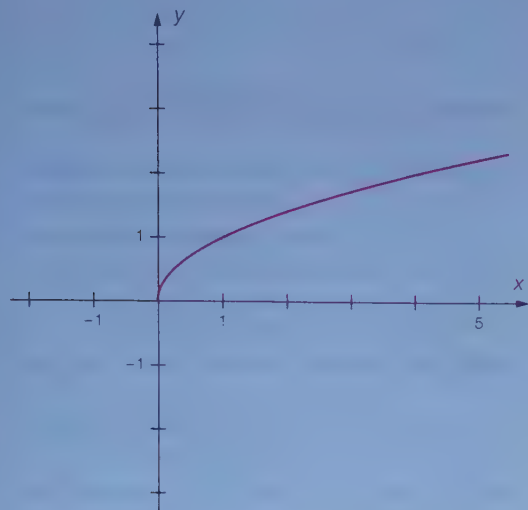


$$x \mapsto x^4$$

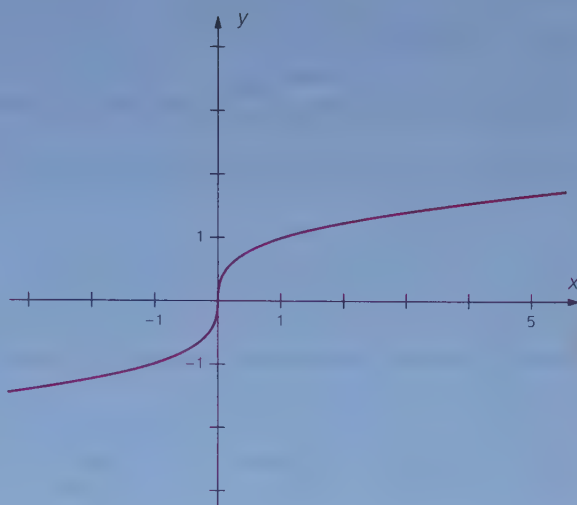
➤ Puissance (p. 28), Fonction (p. 38)

Fonction racine n -ième

Une fonction racine n -ième est une fonction de la forme
 $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ (n est un nombre naturel différent de zéro)



$$x \mapsto \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$$



$$x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

➡ Racine (p. 29), Fonction (p. 38), Fonction puissance n -ième (p. 46)

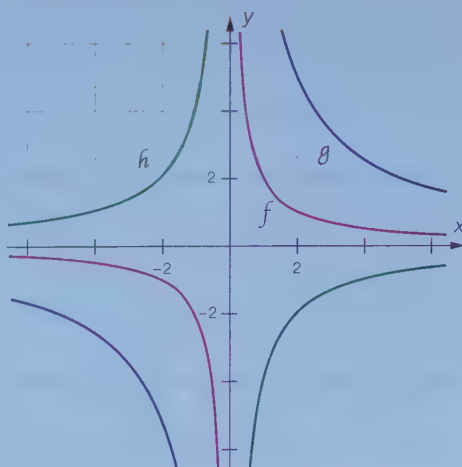
Fonction homographique

Une fonction homographique est, par exemple, une fonction de la forme

$$x \mapsto \frac{a}{x} \quad (a \neq 0 ; x \neq 0)$$

La représentation graphique d'une fonction homographique est une hyperbole.

Une hyperbole comporte deux branches.



$$f: x \mapsto \frac{2}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$g: x \mapsto \frac{10}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$h: x \mapsto \frac{-4}{x} \quad (x \neq 0)$$

➡ Fonction (p. 38), Proportionnalité inverse (p. 48)

Proportionnalité inverse

Deux suites de nombres sont inversement proportionnelles lorsque les nombres d'une suite sont proportionnels aux inverses des nombres correspondants de l'autre suite.

Exemple

Suite A	0,5	1	1,6	2	10	...	x
Suite B	16	8	5	4	0,8	...	$\frac{8}{x}$
Suite C	$\frac{1}{16} = 0,0625$	$\frac{1}{8} = 0,125$	$\frac{1}{5} = 0,2$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{0,8} = 1,25$	...	$\frac{x}{8}$

Les suites A et B sont inversement proportionnelles. Les suites A et C sont proportionnelles.

Si deux suites sont inversement proportionnelles, le produit des nombres de la première suite par les nombres correspondants de la seconde suite est constant.

$$2 \cdot 4 = 1,6 \cdot 5 = 1 \cdot 8 = 0,5 \cdot 16 = \dots = 8$$

Exemples de grandeurs inversement proportionnelles

La longueur et la largeur d'un rectangle d'aire donnée

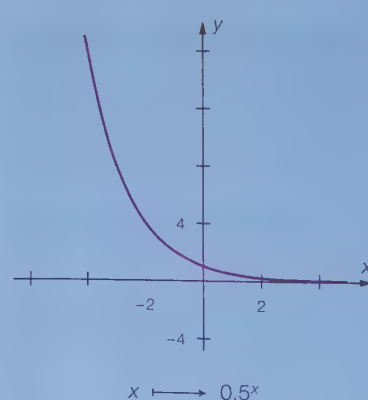
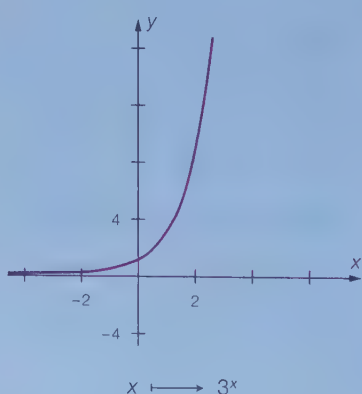
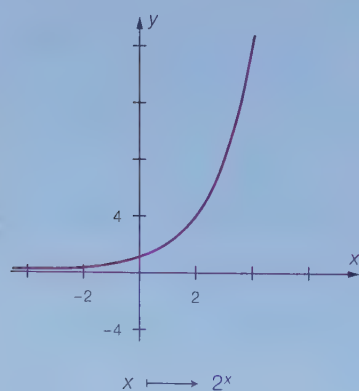
Le temps et la vitesse (supposée constante) d'un véhicule parcourant une distance donnée

→ Proportionnalité (p. 41), Fonction homographique (p. 47)

Fonction exponentielle de base a

Une fonction exponentielle de base a est une fonction de la forme
 $x \mapsto a^x$ ($a > 0$ et $a \neq 1$)

exponentiel
exponere (latin) : exposer



→ Puissance (p. 28), Fonction (p. 38)

Diagrammes

Diagramme

Un diagramme est un graphique représentant une ou plusieurs séries de données.

diagramme

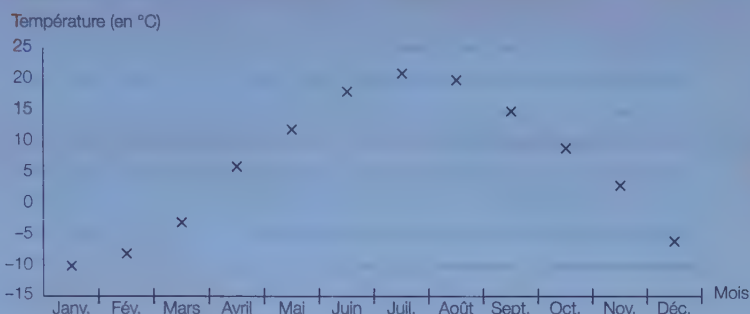
diagramma (grec) :

la figure dessinée, le dessin

Diagramme cartésien

Le diagramme cartésien est essentiellement utilisé pour présenter une relation entre des données.

Exemple : Moyenne des températures mensuelles à Montréal



Lorsque l'on veut représenter une évolution, il est courant de relier entre eux les points successifs.

Diagramme en colonnes, diagramme en bâtons

Dans un diagramme en colonnes :

- toutes les colonnes ont la même largeur ;
- les hauteurs des colonnes sont proportionnelles aux mesures des grandeurs représentées.

Exemple : Longueur des fleuves

Longueur (en km)

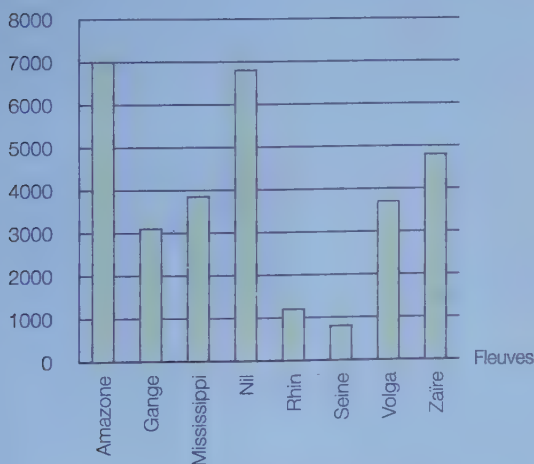


Diagramme en colonnes

Dans un diagramme en bâtons, les hauteurs des bâtons sont proportionnelles aux mesures des grandeurs représentées.

Longueur (en km)

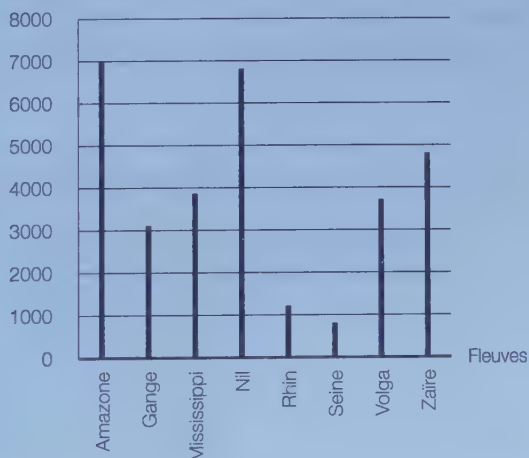


Diagramme en bâtons

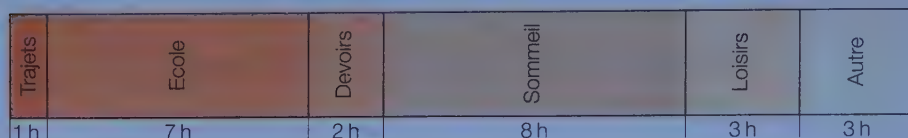
Diagramme en barre, diagramme circulaire

Dans un diagramme en barre :

- les dimensions de la barre peuvent être choisies arbitrairement ;
- les longueurs des parties sont proportionnelles aux mesures des grandeurs représentées.

Exemple

Répartition des activités d'un élève durant 24 h



Dans un diagramme circulaire :

- le rayon du cercle peut être choisi arbitrairement ;
- les mesures des angles des parties sont proportionnelles aux mesures des grandeurs représentées.

Exemple

Répartition des activités d'un élève durant 24 h



Le diagramme en barre et le diagramme circulaire sont utilisés pour présenter la part de chaque quantité par rapport à l'ensemble de toutes les quantités.

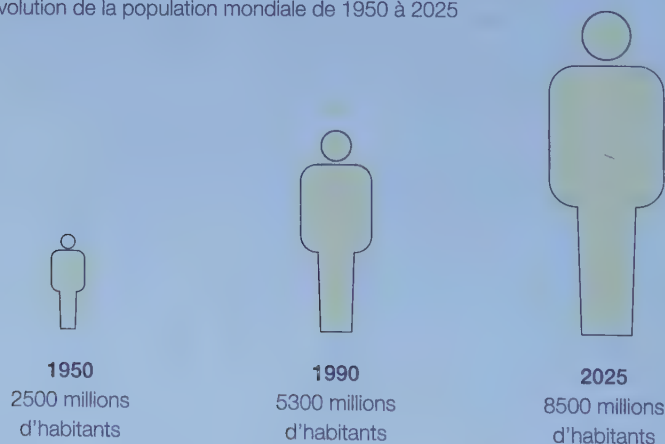
→ Proportionnalité (p. 41)

Diagramme figuratif

Dans un diagramme figuratif, la longueur des figures est proportionnelle aux mesures des grandeurs représentées.

Exemple

Evolution de la population mondiale de 1950 à 2025



Attention !

Un diagramme figuratif est généralement ambigu, car il incite à comparer les aires des figures, et non leurs longueurs uniquement.

→ Proportionnalité (p. 41)

Calcul littéral

Expression littérale

Une expression littérale est une écriture mathématique qui contient une ou plusieurs lettres appelée(s) également variable(s).

Exemples

x ; $2 \cdot (y + 5)$; $4,8 - a + b$; $\frac{x^2}{3}$; $\frac{1}{z}$; 2^x ; ... sont des expressions littérales

➡ Monôme (p. 51), Polynôme (p. 53)

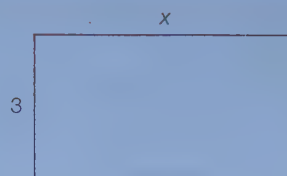
Expression littérale « en fonction de x »

Une expression « en fonction de x » est une expression qui contient la lettre x .

Exemple

$2(3 + x)$ et $3 + 3 + x + x$

sont deux expressions du périmètre de ce rectangle « en fonction de x »



Conventions d'écriture d'une expression littérale

Pour alléger les expressions littérales, on peut supprimer le signe de la multiplication entre :

- un nombre et une lettre : $5 \cdot y = 5y$
- un nombre et une parenthèse : $3 \cdot (m + n) = 3(m + n)$
- une lettre et une parenthèse : $a \cdot (b + c) = a(b + c)$
- deux lettres : $x \cdot y = xy$
- deux parenthèses : $(x + y) \cdot (z + t) = (x + y)(z + t)$

Attention!

On évitera d'écrire $a2$ à la place de $a \cdot 2$ (pour éviter la confusion avec a^2), et on notera de préférence $2a$. De même, on n'écrira pas $1a$, mais simplement a .

Monôme

Un monôme est un nombre réel, une lettre ou une expression qui résulte d'une multiplication de nombres réels et de lettres.

Exemples

$3n$; $-2ab$; xy^2 ; $\frac{x^3}{4}$; 5 ; $4,3xyz$; ... sont des monômes

$x + 1$; $3 - m^2$; $2x - y$; ... ne sont pas des monômes

monôme

monos (grec) : seul
nomos (grec) : portion

➡ Ensembles de nombres (p. 10), Conventions d'écriture d'une expression littérale (p. 51), Polynôme (p. 53)

● Coefficient, partie littérale et degré d'un monôme

■ Définitions

Le coefficient d'un monôme est sa partie numérique.

Exemples

$$3x \cdot 4y = 3 \cdot 4 \cdot xy = 12xy \quad \text{le coefficient est } 12$$

$$-x \cdot 8x \cdot \frac{5y}{4} = -1 \cdot 8 \cdot \frac{5}{4} \cdot x \cdot x \cdot y = -10x^2y \quad \text{le coefficient est } -10$$

La partie littérale d'un monôme est le monôme sans son coefficient.

Exemples

La partie littérale de $12xy$ est xy

La partie littérale de $10x^2y$ est x^2y

Le degré d'un monôme est la somme des exposants de sa partie littérale.

Exemples

$$12xy = 12x^1y^1 \quad \text{le degré est } 1 + 1 = 2$$

$$10x^2y = 10x^2y^1 \quad \text{le degré est } 2 + 1 = 3$$

Monôme	$8z^2$	$-3,5 m$	x^3	12	$\frac{a^2b}{4}$	
Coefficient	8	-3,5	1	12	$\frac{1}{4}$	
Partie littérale	z^2	m	x^3	Le monôme 12 n'a pas de partie littérale		a^2b
Degré	2	1	3	0	$2 + 1 = 3$	

→ Puissance (p. 28)

● Monômes semblables

Des monômes semblables sont des monômes qui ont la même partie littérale.

Exemples

$2x$ et $-0,1x$ sont des monômes semblables; leur partie littérale est x

$4y^2$ et $4y^3$ ne sont pas des monômes semblables

$4y^2$ et $4y^2z$ ne sont pas des monômes semblables

Addition et soustraction de monômes semblables

Pour additionner (ou soustraire) des monômes semblables :

- on additionne (ou soustrait) leurs coefficients ;
- on conserve la partie littérale.

Exemples

$$\begin{aligned} 4x^2 + 7x^2 &= (4 + 7)x^2 \\ &= 11x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9y - 15y &= (9 - 15)y \\ &= -6y \end{aligned}$$

On utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition (la soustraction) pour additionner (soustraire) des monômes semblables.

➡ Propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ (p. 12)

Multiplication de monômes

Pour multiplier des monômes, on multiplie leurs coefficients entre eux et leurs parties littérales entre elles.

Exemples

$$\begin{aligned} 3y \cdot 4y^2 &= 3 \cdot y \cdot 4 \cdot y^2 \\ &= 3 \cdot 4 \cdot y \cdot y^2 \\ &= 12 \cdot y^3 \\ &= 12y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x^3 \cdot \frac{1}{2}y \cdot 6 &= -2 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot y \cdot 6 \\ &= -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot x^3 \cdot y \\ &= -6 \cdot x^3 \cdot y \\ &= -6x^3y \end{aligned}$$

On utilise l'associativité et la commutativité de la multiplication pour multiplier des monômes.

➡ Propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ (p. 12)

Polynôme

Un polynôme est une somme de monômes. Les monômes qui composent le polynôme sont appelés les termes du polynôme.

Un polynôme peut avoir un seul terme (monôme), deux termes (binôme), trois termes (trinôme) ou plus.

polynôme

polus (grec) : plusieurs, nombreux
nomos (grec) : portion

Exemples

$5x^3$; $\frac{y}{2} + 4$; $-x^2 + 1,5z$; $4xy^2 - 2x$; ... sont des polynômes

a^b ; $\frac{u}{v}$; $\sqrt{y}$; $\frac{3x}{4y}$; ... ne sont pas des polynômes

$x - y$ est un binôme

$x^2 + 2x + 1$ est un trinôme

$x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ est un polynôme formé de quatre termes

➡ Monôme (p. 51)

Réduire un polynôme

Réduire un polynôme, c'est associer puis additionner (ou soustraire) ses monômes semblables.

Pour réduire un polynôme, on utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Exemples

$$2x^2 - 4x + 5x^2 + x = 2x^2 + 5x^2 - 4x + x = \underbrace{7x^2 - 3x}_{\text{forme réduite}}$$

$$w^2 + 3 + 5w - 2w^2 - 8 + w = w^2 - 2w^2 + 5w + w + 3 - 8 = \underbrace{-w^2 + 6w - 5}_{\text{forme réduite}}$$

Monômes semblables (p. 52), Addition et soustraction de monômes semblables (p. 53)

Degré d'un polynôme

Le degré d'un polynôme est le degré de celui de ses termes qui a le plus haut degré.

Exemples

$$x + \frac{x^2}{5} \quad \text{est un polynôme de degré 2 (le terme de plus haut degré est } \frac{x^2}{5})$$

$$-2a^3 + a^3b - 4,4 \quad \text{est un polynôme de degré 4 (le terme de plus haut degré est } a^3b)$$

Coefficient, partie littérale et degré d'un monôme (p. 52)

Ordonner un polynôme

Ordonner un polynôme, c'est écrire ses termes dans l'ordre croissant ou décroissant des degrés par rapport à l'une des lettres qu'il contient.

Exemples

$$5m^2 + 2m - 1 \quad \text{est un polynôme ordonné}$$

$$-2 + a^4 + 2a^3b - ab^3 + b^4 \quad \text{est un polynôme ordonné par rapport à } b$$

$$x^3 + 1 + x^2 + x \quad \text{n'est pas un polynôme ordonné}$$

Addition de polynômes

Pour additionner des polynômes, on peut, par exemple, procéder ainsi :

$$\begin{aligned} (5x^2 - x) + (-2x^2 + 10x - 1) &= 5x^2 - x + (-2x^2) + 10x + (-1) && \text{écriture d'une somme de monômes} \\ &= 5x^2 - x - 2x^2 + 10x - 1 && \text{écriture simplifiée} \\ &= 3x^2 + 9x - 1 && \text{écriture réduite et ordonnée} \end{aligned}$$

Ecriture simplifiée d'une somme de nombres relatifs (p. 19), Addition et soustraction de monômes semblables (p. 53)

Opposé d'un polynôme

Deux polynômes sont opposés si leur somme est égale à zéro.

Exemples

$$6x^2 \text{ et } -6x^2$$

sont deux monômes opposés, car $6x^2 + (-6x^2) = 0$

$$y^2 + 5y - 12 \text{ et } -y^2 - 5y + 12$$

sont deux polynômes opposés, car $(y^2 + 5y - 12) + (-y^2 - 5y + 12) = 0$

En multipliant un polynôme par -1 , on obtient son opposé.

➡ Opposé d'un nombre (p. 13), Addition de polynômes (p. 54)

Soustraction de polynômes

Pour soustraire un polynôme, on additionne son opposé.

Exemple

$$\begin{aligned} (4y^3 - 2y + 5) - (3y^2 + 7y - 4) &= (4y^3 - 2y + 5) + (-3y^2 - 7y + 4) && \text{addition de l'opposé de } 3y^2 + 7y - 4 \\ &= 4y^3 - 2y + 5 + (-3y^2) + (-7y) + 4 && \text{écriture d'une somme de monômes} \\ &= 4y^3 - 2y + 5 - 3y^2 - 7y + 4 && \text{écriture simplifiée} \\ &= 4y^3 - 3y^2 - 9y + 9 && \text{écriture réduite et ordonnée} \end{aligned}$$

➡ Opposé d'un polynôme (p. 55)

Multiplication de polynômes

Pour multiplier un monôme par un polynôme, on distribue le monôme sur chacun des membres du polynôme.

Exemples

$$2a(a - x) = 2a^2 - 2ax$$

$$-2a(ab - xy + z) = -2a^2b + 2axy - 2az$$

Pour multiplier deux polynômes, on multiplie chaque terme du premier par chaque terme du second et on réduit la somme obtenue.

Exemple

$$\begin{aligned} (y - 2) \cdot (y - 5) &= [y + (-2)] \cdot [y + (-5)] \\ &= y \cdot y + y \cdot (-5) + (-2) \cdot y + (-2) \cdot (-5) && \text{ou} \\ &= y^2 - 5y - 2y + 10 \\ &= y^2 - 7y + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y - 2) \cdot (y - 5) &= y \cdot y - y \cdot 5 - 2 \cdot y + 2 \cdot 5 \\ &= y^2 - 5y - 2y + 10 \\ &= y^2 - 7y + 10 \end{aligned}$$

Quelques identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Exemples

$$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$(2y - 1)^2 = 4y^2 - 4y + 1$$

$$\left(\frac{x}{3} - 1\right)\left(\frac{x}{3} + 1\right) = \frac{x^2}{9} - 1$$

$$(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$(3a - 1)^3 = 27a^3 - 27a^2 + 9a - 1$$

Factorisation de polynômes

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit.

$4x^2 + 2x$ est une somme.

Cette expression peut, entre autres, s'écrire sous la forme du produit $2x(2x + 1)$.

La mise en évidence, l'utilisation des identités remarquables sont, entre autres, des outils de factorisation.

La factorisation est le processus inverse du développement, qui consiste à transformer un produit en une somme.

Exemples

Factoriser par la mise en évidence

$$20m - 5 = 5(4m - 1)$$

$$9x^3 + 6x^2 + 12x = 3x(3x^2 + 2x + 4)$$

$$12a^2 - 4a + 20ab = 4a(3a - 1 + 5b)$$

$$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$$

Factoriser par la décomposition d'un trinôme du deuxième degré

$$x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$$

$$y^2 + 11y + 10 = (y + 1)(y + 10)$$

Factoriser par l'utilisation des identités remarquables

$$y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2$$

$$u^2 - 16 = (u - 4)(u + 4)$$

$$16x^2 + 8xy + y^2 = (4x + y)^2$$

Factoriser par la combinaison de ces différentes méthodes

$$4x^3y - 16xy = 4xy(x^2 - 4) = 4xy(x - 2)(x + 2)$$

✚ Multiplication de polynômes (p. 55)

FA

Equations

Equation

Une équation est une égalité dont l'un ou les deux membres sont des expressions littérales.

équation
aequatio (latin) : l'égalité

Exemples

$$x + 3,2 = 10 \quad ; \quad a^2 - 2a - 7 = 2a - 2 \quad ; \quad 5x + y = 18 - x \quad ; \quad \dots \text{ sont des équations}$$

Expression littérale
Chiffre ou lettre

✚ Expression littérale (p. 51)

Inconnue

Une lettre utilisée dans une équation, et dont on cherche à déterminer la valeur, est appelée inconnue.

Résoudre une équation

Résoudre une équation, c'est trouver la ou les valeurs numériques, si elle(s) existe(nt), qui, mise(s) à la place de l'inconnue (ou des inconnues), vérifie(nt) l'égalité.

✚ Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue (p. 58), Résolution d'une équation du deuxième degré à une inconnue (p. 59), Résolution d'un système du premier degré de deux équations à deux inconnues (p. 60)

Degré d'une équation d'inconnue x

Equations du premier degré

Toute équation du premier degré d'inconnue x peut s'écrire sous la forme

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0)$$

Exemple

$$3x - 2 = 0 \quad (a = 3, b = -2)$$

Equations du deuxième degré

Toute équation du deuxième degré d'inconnue x peut s'écrire sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Exemple

$$-3x^2 + 84 = 0 \quad (a = -3, b = 0, c = 84)$$

...

➡ Fonction affine (p. 45), Fonction quadratique (p. 45), Polynôme (p. 53)

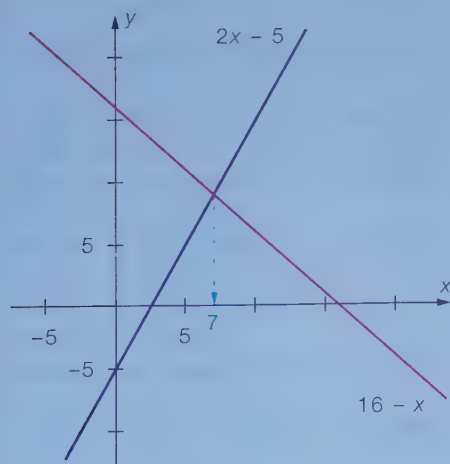
Solution(s) d'une équation

Les solutions d'une équation sont les nombres qui, mis à la place de la lettre (ou des lettres), vérifient l'égalité.

S désigne l'ensemble des solutions d'une équation.

Attention!

Une équation peut avoir 0, 1, plusieurs ou une infinité de solutions.

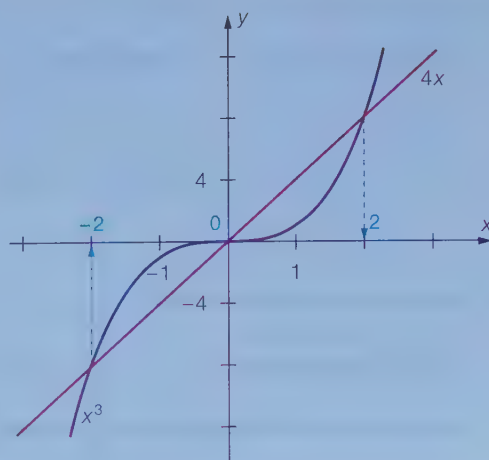


7 est la solution de l'équation

$$2x - 5 = 16 - x$$

$$\text{car } 2 \cdot 7 - 5 = 16 - 7$$

$$\text{On note: } S = \{7\}$$



-2, 0 et 2 sont les solutions de l'équation

$$x^3 = 4x$$

$$\text{car } (-2)^3 = 4 \cdot (-2) ; 0^3 = 4 \cdot 0 ; 2^3 = 4 \cdot 2$$

$$\text{On note: } S = \{-2 ; 0 ; 2\}$$

Equations équivalentes

Deux équations équivalentes sont deux équations qui ont le même ensemble de solutions.

Exemples

Les équations $x - 5 = 8 - x$ et $5x = 32,5$

sont équivalentes : $S = \{6,5\}$

Les équations $10 - 2y = y^2 + y$ et $y^2 + 3y - 10 = 0$

sont équivalentes : $S = \{-5 ; 2\}$

Les équations $5x = 15$ et $5x^2 = 15x$

ne sont pas équivalentes, parce que 0 est une solution de la deuxième équation sans en être une de la première

Equations – règles d'équivalence

Certaines règles permettent de transformer une équation en une équation équivalente :

- effectuer du calcul littéral dans ses membres ;
- additionner (ou soustraire) un même nombre, un même monôme ou un même polynôme aux deux membres de l'équation ;
- multiplier (ou diviser) les deux membres de l'équation par un même nombre non nul.

Attention !

Si on divise ou multiplie par l'inconnue les deux membres d'une équation, on obtient une équation non équivalente à la première.

→ Polynôme (p. 53), Equations équivalentes (p. 58)

Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue

Les règles d'équivalence permettent de résoudre toute équation du premier degré à une inconnue.

Par exemple, pour résoudre l'équation $4(x + 1,8) = 9x - 12 + x$, on peut procéder comme suit :

$4(x + 1,8) = 9x - 12 + x$	calcul littéral
$4x + 7,2 = 10x - 12$	
$4x + 19,2 = 10x$	
$19,2 = 6x$	
$3,2 = x$	
$S = \{3,2\}$	

Vérification : $4(3,2 + 1,8) \stackrel{?}{=} 9 \cdot 3,2 - 12 + 3,2$

→ Fonction affine (p. 45), Polynôme (p. 53), Equations – règles d'équivalence (p. 58)

Résolution d'une équation du deuxième degré à une inconnue

Résolution par factorisation

La factorisation permet de résoudre efficacement certaines équations du deuxième degré.

Exemples

$$x^2 + 5x = 0 \text{ devient } x(x + 5) = 0$$

Comme le produit $x(x + 5)$ doit être nul, il suffit que l'un de ses facteurs soit nul.

$$\text{D'où } x = 0 \text{ ou } x + 5 = 0$$

$$\text{En conséquence: } S = \{0; -5\}$$

$$\text{Vérification: } 0^2 + 5 \cdot 0 \stackrel{?}{=} 0$$

$$(-5)^2 + 5 \cdot (-5) \stackrel{?}{=} 0$$

$$y^2 - 2y - 24 = 0 \text{ devient } (y + 4)(y - 6) = 0$$

Comme le produit $(y + 4)(y - 6)$ doit être nul, il suffit que l'un de ses facteurs soit nul.

$$\text{D'où } y + 4 = 0 \text{ ou } y - 6 = 0$$

$$\text{En conséquence: } S = \{-4; 6\}$$

$$\text{Vérification: } (-4)^2 - 2 \cdot (-4) - 24 \stackrel{?}{=} 0$$

$$6^2 - 2 \cdot 6 - 24 \stackrel{?}{=} 0$$

➡ Quelques identités remarquables (p. 55), Factorisation de polynômes (p. 56)

Résolution à l'aide d'une formule

1. Écrire tout d'abord l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (si a , b et c ne sont pas nuls).
2. Calculer la valeur du discriminant: $\Delta = b^2 - 4ac$.
3. Observer le signe du discriminant (trois cas possibles), puis déterminer l'ensemble des solutions.

$$\text{Si } \Delta > 0, \text{ alors l'équation a deux solutions: } S = \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

$$\text{Si } \Delta = 0, \text{ alors l'équation a une seule solution: } S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$

$$\text{Si } \Delta < 0, \text{ alors l'équation n'a pas de solution: } S = \emptyset$$

Exemples

$$6x^2 + x - 2 = 0$$

$$a = 6, b = 1, c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 49$$

$\Delta > 0$, cette équation possède deux solutions.

Comme $\sqrt{49} = 7$, alors

$$S = \left\{ \frac{-1 + 7}{12}; \frac{-1 - 7}{12} \right\}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{2}{3} \right\}$$

$$\frac{x^2}{2} - 4x + 8 = 0$$

$$a = \frac{1}{2}, b = -4, c = 8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-4)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 16 - 16 = 0$$

$\Delta = 0$, cette équation possède une seule solution.

$$x = \frac{-(-4)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{1} = 4$$

$$S = \{4\}$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$a = 1, b = 2, c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$$

$\Delta < 0$, cette équation n'a pas de solution.

$$S = \emptyset$$

➡ Fonction quadratique (p. 45)

Système d'équations

Plusieurs équations considérées simultanément forment un système d'équations. Chaque équation exprime une condition. Le système impose simultanément toutes les conditions.

système
sistema (grec) : l'ensemble, l'assemblage

$$\begin{cases} 3x - y = -10,5 \\ x + 4y = 16 \end{cases}$$

est un système du premier degré de deux équations à deux inconnues dont l'ensemble des solutions est $S = \{(-2 ; 4,5)\}$

$$\begin{cases} 4x + 7y = 24 \\ 4x + y^2 = 12 \end{cases}$$

est un système du deuxième degré de deux équations à deux inconnues dont l'ensemble des solutions est
 $S = \{(-1 ; 4) ; (0,75 ; 3)\}$

$$\begin{cases} x + y - 2z = -9 \\ 10x - 4y - z = 33 \\ -y + 1,2z = 8 \end{cases}$$

est un système du premier degré de trois équations à trois inconnues dont l'ensemble des solutions est $S = \{(3 ; -2 ; 5)\}$

Les solutions d'un système de deux équations à deux inconnues, lorsqu'elles existent, sont des couples de nombres.

→ Degré d'une équation d'inconnue x (p. 57), Solution(s) d'une équation (p. 57)

Résolution d'un système du premier degré de deux équations à deux inconnues

La résolution d'un système du premier degré de deux équations à deux inconnues consiste à ramener ce système à une seule équation à une inconnue.

Résolution par la méthode de substitution

$$\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x + 6y = -12 \end{cases}$$

Exprimer une inconnue en fonction de l'autre à partir d'une des équations (ici y en fonction de x à partir de la première équation).

$$\begin{cases} y = 5 - 4x \\ 3x + 6y = -12 \end{cases}$$

Remplacer, dans l'autre équation, l'inconnue choisie par l'expression obtenue.

$$\begin{cases} y = 5 - 4x \\ 3x + 6(5 - 4x) = -12 \end{cases}$$

Résoudre l'équation à une inconnue du système obtenu.

$$\begin{cases} y = 5 - 4x \\ x = 2 \end{cases}$$

Chercher la valeur de l'autre inconnue (ici, en remplaçant x par 2 dans l'équation $y = 5 - 4x$).

$$\begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vérifier la validité des solutions (ici, en remplaçant x par 2 et y par -3 dans chaque équation du système à résoudre).

$$\begin{cases} 4 \cdot 2 + (-3) \stackrel{?}{=} 5 \\ 3 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) \stackrel{?}{=} -12 \end{cases}$$

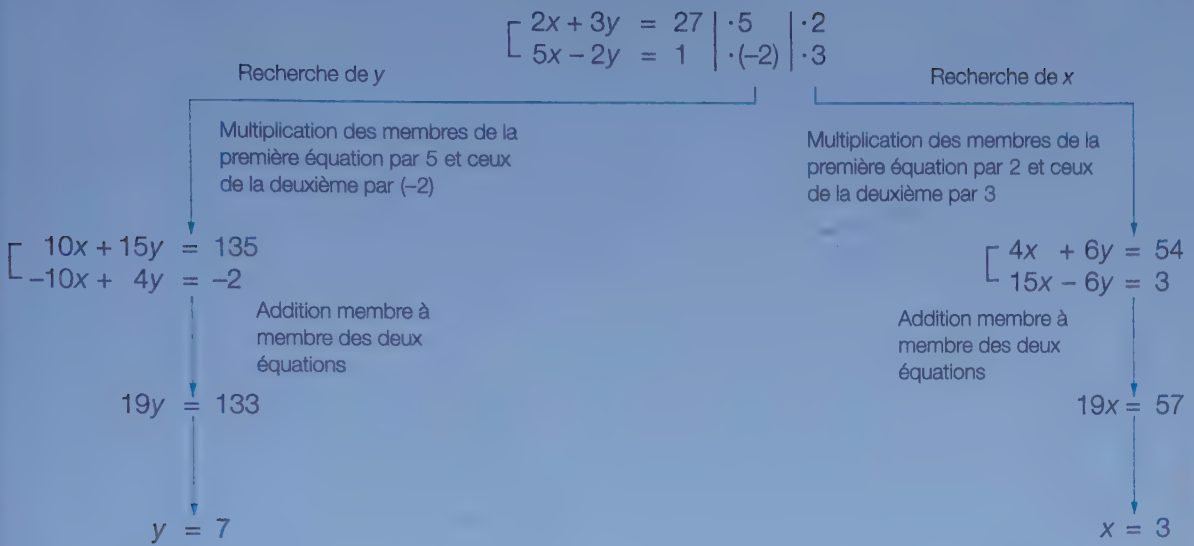
Ecrire l'ensemble des solutions du système.

$$S = \{(2 ; -3)\}$$

→ Polynôme (p. 53), Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue (p. 58)



Résolution par la méthode des combinaisons linéaires



Vérification: $2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 \stackrel{?}{=} 27$

$5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 \stackrel{?}{=} 1$

L'ensemble des solutions du système est: $S = \{(3 ; 7)\}$

→ Polynôme (p. 53), Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue (p. 58)





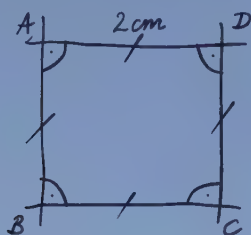
Espace – ES

■ Généralités	68
■ Droites	73
■ Angles	77
■ Polygones	82
■ Cercles et disques	90
■ Solides et espace	91
■ Constructions	95
■ Transformations géométriques ..	101

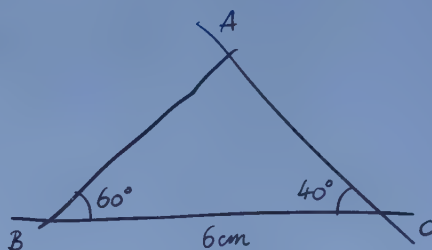
Généralités

Représentation dans le plan

Un croquis est un dessin fait, généralement, à main levée.



Croquis d'un carré $ABCD$ de 2 cm de côté.



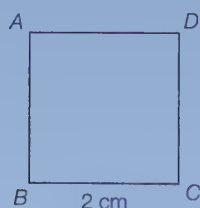
Croquis d'un triangle ABC , avec $BC = 6$ cm, $\widehat{ABC} = 60^\circ$ et $\widehat{BCA} = 40^\circ$

Sur un croquis, les longueurs et les angles n'ont pas nécessairement les bonnes mesures. De ce fait, on les indique sur le croquis.

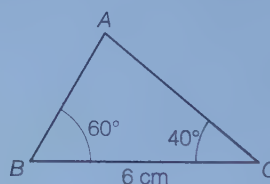
La réalisation d'un croquis est parfois utile pour résoudre un problème ou pour effectuer une construction.

ES

Une représentation à l'échelle est construite avec des outils (règle, équerre, rapporteur, compas, logiciel, etc.).



Représentation à l'échelle 1 : 1 (en vraie grandeur) du carré $ABCD$



Représentation à l'échelle 1 : 2 du triangle ABC

Sur une représentation à l'échelle, les angles ont des mesures exactes et les longueurs sont proportionnelles à celles de l'objet «réel». De ce fait, on n'indique pas toujours les mesures sur une représentation à l'échelle.

Repérage d'un point dans le plan

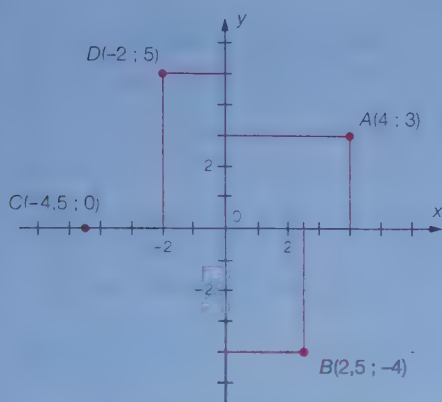
Dans un système d'axes :

- les droites graduées sont l'axe x (ou axe des abscisses) et l'axe y (ou axe des ordonnées) ;
- l'intersection des deux axes est l'origine ;
- la position d'un point est donnée par un couple de nombres : les coordonnées du point. Le premier nombre du couple situe le point selon la direction de l'axe x et le second selon la direction de l'axe y .

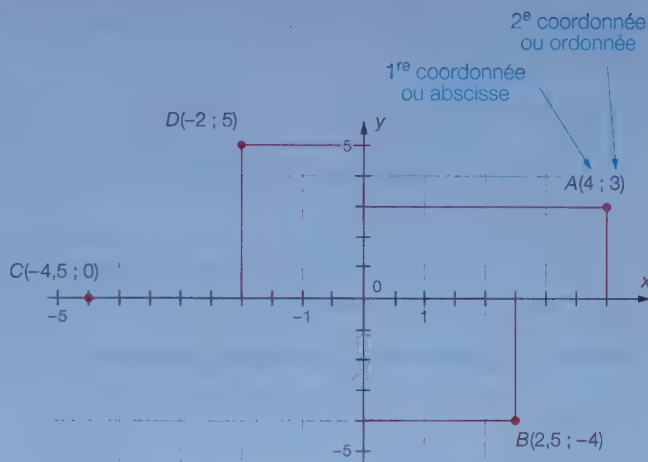
abscisse

abscindere (latin) : couper, arracher

abscissa (latin) : la ligne coupée



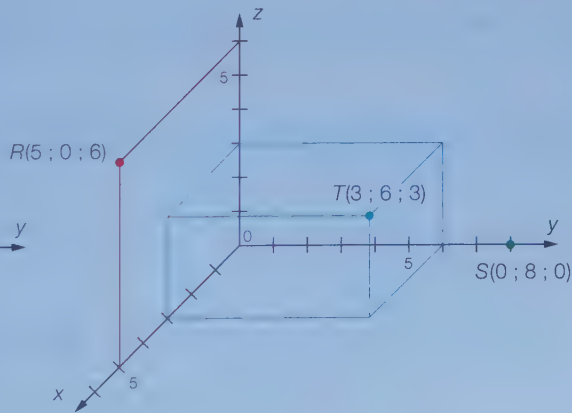
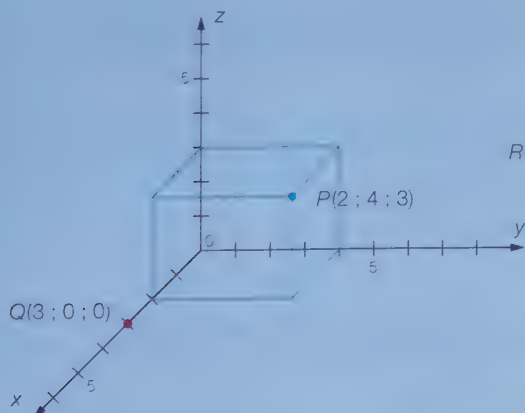
Système orthonormé



Système orthogonal
Les graduations des axes sont différentes

Repérage d'un point dans l'espace

Trois coordonnées sont nécessaires pour repérer un point dans l'espace.



Représentations dans l'espace

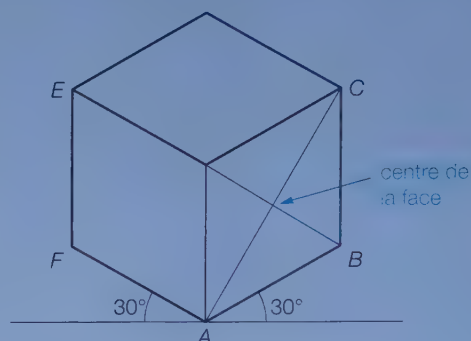
Il y a plusieurs manières de représenter un polyèdre sur une feuille de papier. En voici quelques-unes :

■ La perspective isométrique

Les arêtes verticales de l'objet restent verticales sur le dessin.

Les arêtes horizontales fuient à gauche et à droite avec une inclinaison de 30° .

L'échelle est la même pour les trois dimensions.



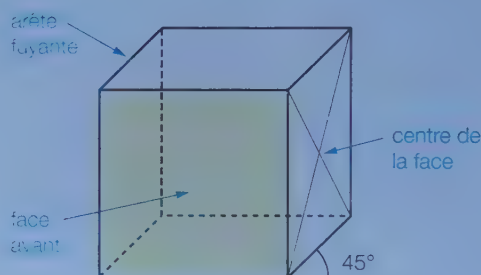
Cube en perspective isométrique

■ La perspective cavalière

Elle privilégie une face de l'objet, appelée face avant, représentée sans déformation.

Les arêtes perpendiculaires à la face avant fuient vers la droite ou vers la gauche, généralement avec une inclinaison de 30° ou de 45° .

Les longueurs des arêtes fuyantes sont généralement réduites de moitié ou d'un tiers.

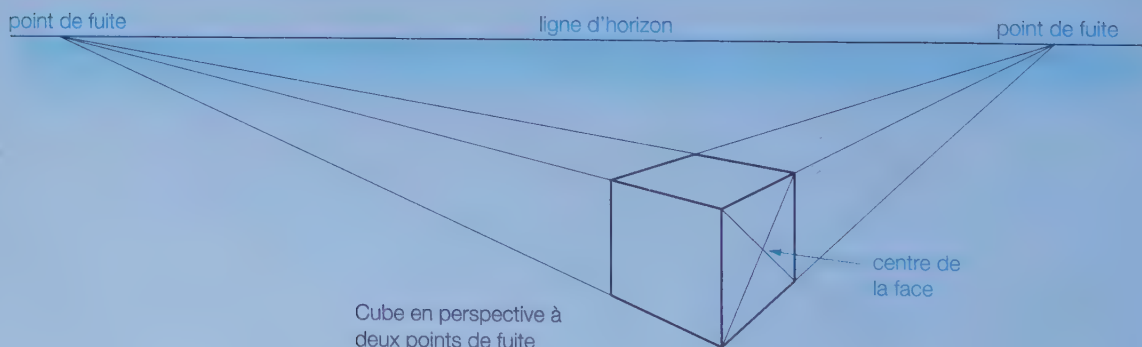


Cube en perspective cavalière

■ La perspective artistique

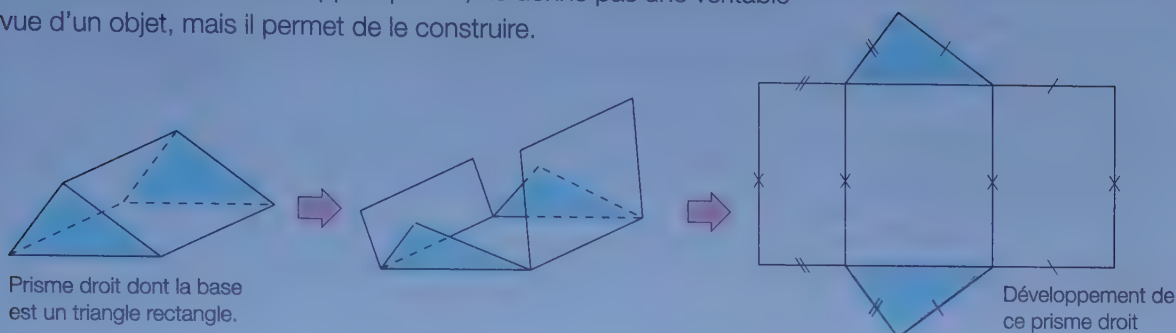
Elle est construite à partir de points de fuite situés sur une ligne d'horizon.

L'objet est représenté tel que l'œil le perçoit.



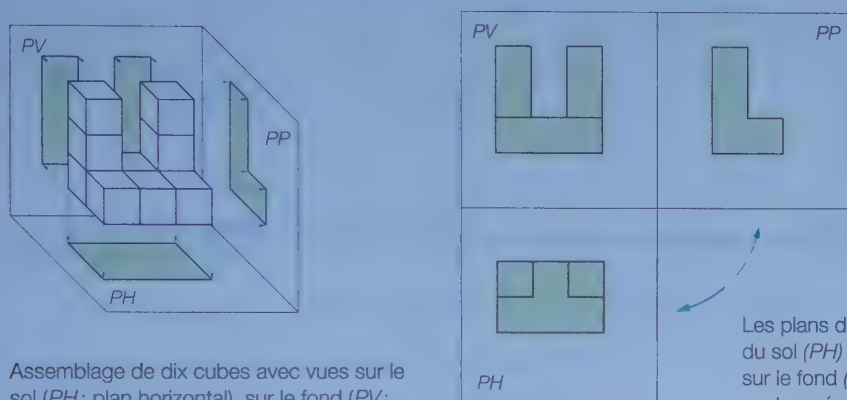
■ Le développement

Un développement, aussi appelé patron, ne donne pas une véritable vue d'un objet, mais il permet de le construire.



■ Les projections sur les faces d'un parallélépipède rectangle

projection
projectio (latin) : action de jeter loin de



Assemblage de dix cubes avec vues sur le sol (PH: plan horizontal), sur le fond (PV: plan vertical) et sur la paroi (PP: plan de profil).

● Distance entre deux points

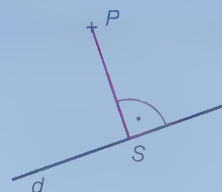
La distance entre les points A et B est la longueur du segment AB . C'est le plus court chemin du point A au point B .



Ici, la distance de A à B est proche de 2,8 cm

● Distance d'un point à une droite

La distance du point P à la droite d est la longueur du segment PS perpendiculaire à la droite d . C'est le plus court chemin du point P à la droite d .



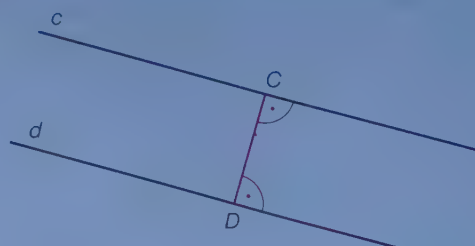
Ici, PS vaut environ 1,6 cm

Distance entre deux droites parallèles

La distance entre les droites parallèles c et d est la longueur du segment CD perpendiculaire aux droites c et d .

C'est le plus court chemin de la droite c à la droite d .

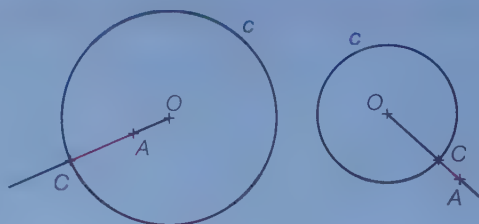
→ Droites parallèles (p. 75)



Ici, CD vaut environ 1,5 cm

Distance d'un point à un cercle

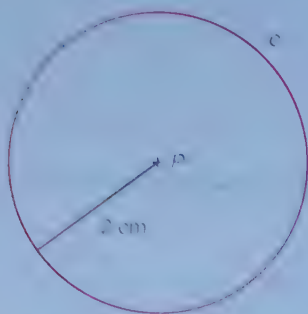
La distance du point A au cercle c de centre O est la longueur du segment AC situé sur la demi-droite OA . C'est le plus court chemin du point A au cercle c .



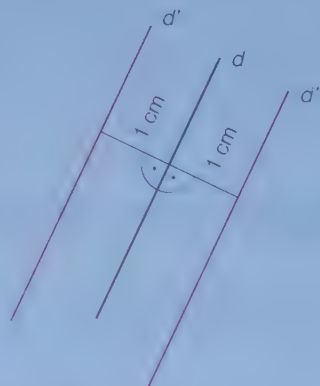
Lieu géométrique

ES

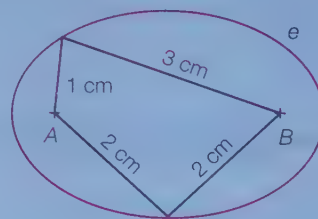
Un lieu géométrique est un ensemble de points vérifiant une même propriété.



Le lieu géométrique des points du plan dont la distance au point P est 2 cm est le cercle c .



Le lieu géométrique des points du plan situés à 1 cm de la droite d est constitué des droites d' et d'' .



Le lieu géométrique des points du plan dont la somme des distances aux points A et B est 4 cm est l'ellipse e .

→ Cercle de Thalès d'un segment (p. 80), Arc capable (p. 81), Médiatrice d'un segment (p. 95), Bissectrice d'un angle (p. 96)

Droites

Droite

On appelle « droite AB » la droite qui passe par les points A et B .

Elle est constituée d'une infinité de points alignés, dont deux sont mis en évidence (A et B).



Autre notation

On peut aussi désigner une droite par une lettre minuscule.



Demi-droite

La demi-droite d'origine A et passant par le point B est appelée la « demi-droite AB ».



Autre notation

La demi-droite ci-dessous est appelée la « demi-droite Od ».



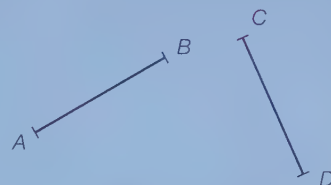
Segment

Un segment est la partie d'une droite limitée par deux de ses points.

Le segment dont les extrémités sont les points M et N est appelé le « segment MN ».



Des segments isométriques sont des segments de même longueur.

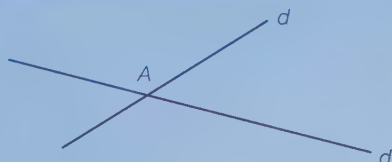


Les segments AB et CD sont isométriques, car $AB = CD = 2 \text{ cm}$

→ Droite (p. 73)

Droites sécantes

Deux droites sécantes sont deux droites qui ont un seul point commun.



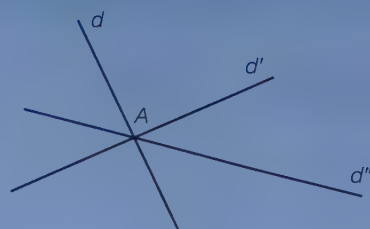
sécante

secare (latin) : couper

Deux droites qui ne sont pas dans un même plan sont deux droites gauches.

Droites concourantes

Des droites concourantes sont des droites qui ont un seul point commun.



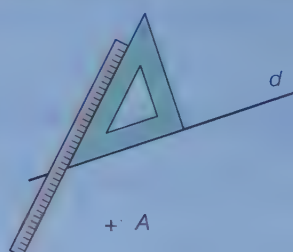
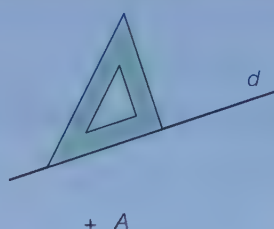
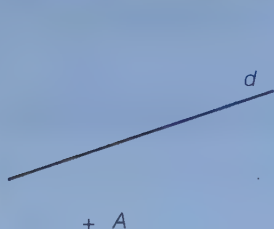
Droites perpendiculaires

Deux droites perpendiculaires sont deux droites qui déterminent quatre angles droits.



On note : $d \perp d'$

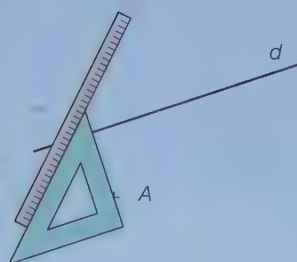
Construction de la perpendiculaire à une droite passant par un point



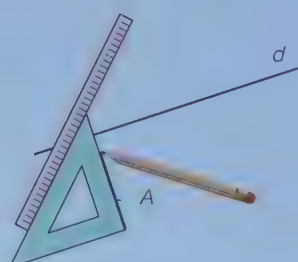
Tracé de la perpendiculaire à la droite d passant par le point A .

1 Aligner l'un des petits côtés de l'équerre avec la droite d .

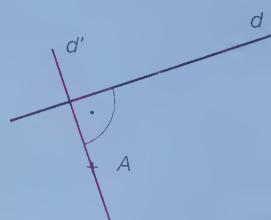
2 Placer la règle contre le grand côté de l'équerre.



3 Faire glisser l'équerre le long de la règle jusqu'au point A .



4 Tracer la perpendiculaire à d passant par A .



5 La droite d' est la perpendiculaire à la droite d passant par le point A .

On peut aussi construire la perpendiculaire à une droite passant par un point :

- en disposant la règle et l'équerre différemment ;
- en utilisant le compas et la règle seulement.

Droites parallèles

Deux droites parallèles sont deux droites d'un même plan qui n'ont aucun point commun.

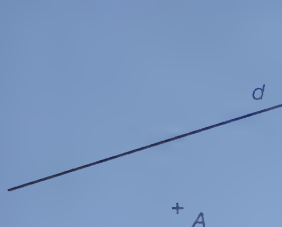


On note : $d \parallel d'$

Cas particulier

Par convention, deux droites confondues sont aussi parallèles.

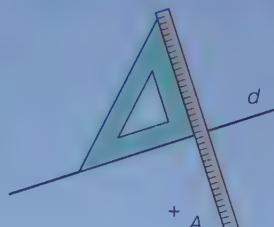
Construction de la parallèle à une droite passant par un point



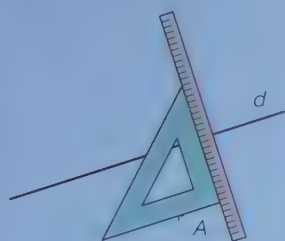
1 Tracé de la parallèle à la droite d passant par le point A .



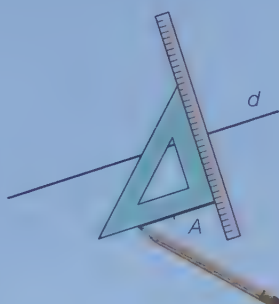
2 Aligner l'un des côtés de l'équerre avec la droite d .



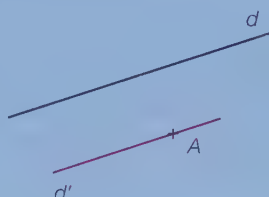
3 Placer la règle contre un autre côté de l'équerre.



4 Faire glisser l'équerre le long de la règle jusqu'au point A .



5 Tracer la parallèle à d passant par A .



6 La droite d' est la parallèle à la droite d passant par le point A .

On peut aussi construire la parallèle à une droite passant par un point :

- en disposant la règle et l'équerre différemment ;
- en utilisant le compas et la règle seulement.

Vecteur

Un vecteur peut être représenté par un segment de droite orienté.

Un vecteur possède une direction, un sens et une longueur.

Les flèches $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ ont même direction (elles sont parallèles), même sens et même longueur.

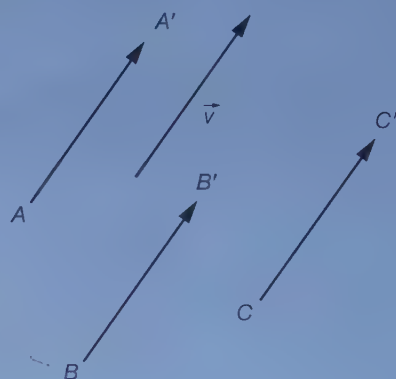
Ces flèches représentent le même vecteur, que l'on peut également noter $\vec{v}$, par exemple.

On peut donc écrire $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{v}$

Un vecteur peut être représenté par une infinité de flèches.

vecteur

vector (latin) : celui qui transporte



→ Translation (p. 103)

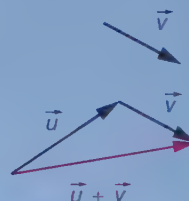
Addition de deux vecteurs



■ Construction d'une flèche représentant le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



1 Tracer une flèche représentant le vecteur $\vec{v}$ de telle sorte que son origine corresponde à l'extrémité de la flèche représentant le vecteur $\vec{u}$.



2 Tracer ensuite la flèche représentant le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

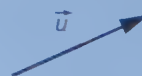
L'addition de vecteurs est notamment utilisée en physique lorsqu'il s'agit de déterminer la résultante de forces s'exerçant sur un corps.

Il existe d'autres méthodes pour additionner deux vecteurs.

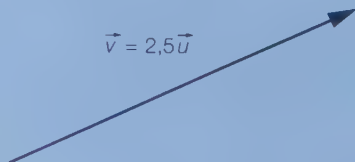
Multiplication d'un vecteur par un nombre

La longueur du vecteur $\vec{v}$ est 2,5 fois celle du vecteur $\vec{u}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction et même sens.



$$\vec{v} = 2,5\vec{u}$$



La longueur du vecteur $\vec{w}$ est 1,2 fois celle du vecteur $\vec{u}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ont même direction, mais sont de sens opposé.



$$\vec{w} = -1,2\vec{u}$$

Angles

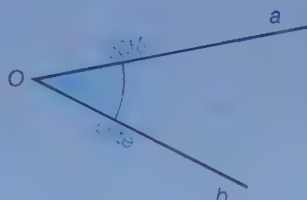
Angle

Un angle est une portion du plan limitée par deux demi-droites de même origine.

Le point O est le sommet de l'angle.

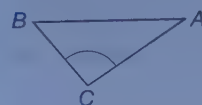
Les demi-droites Oa et Ob , d'origine O , sont les côtés de l'angle.

Cet angle est noté $\widehat{aOb}$ ou $\widehat{bOa}$.

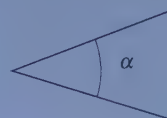


Autres notations

Dans ce triangle, l'angle de sommet C est noté $\widehat{BCA}$ ou $\widehat{ACB}$.



Une lettre grecque peut aussi désigner un angle :

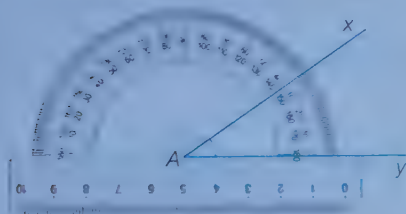


Mesure d'un angle

On mesure les angles à l'aide d'un rapporteur. Le degré ($^\circ$) est une unité de mesure des angles.

Exemple

35 degrés se note 35°



$$\widehat{xAy} = 35^\circ$$



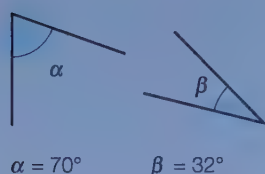
$$\alpha = 145^\circ$$

Attention !

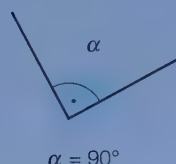
Il y a souvent deux graduations sur un rapporteur. Il faut donc bien regarder celle qui correspond à l'angle que l'on mesure.

Classement des angles

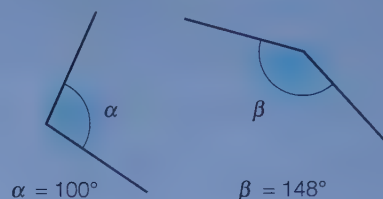
Un angle aigu est un angle dont la mesure est comprise entre 0° (angle nul) et 90° .



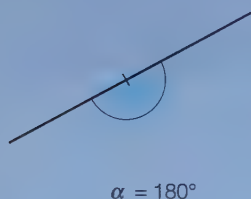
Un angle droit est un angle dont la mesure est 90° .



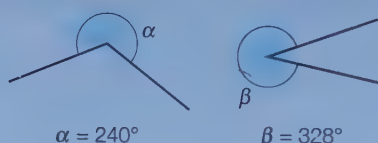
Un angle obtus est un angle dont la mesure est comprise entre 90° et 180° .



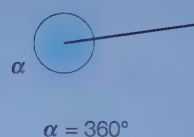
Un angle plat est un angle dont la mesure est 180° .



Un angle rentrant (ou non convexe) est un angle dont la mesure est comprise entre 180° et 360° .

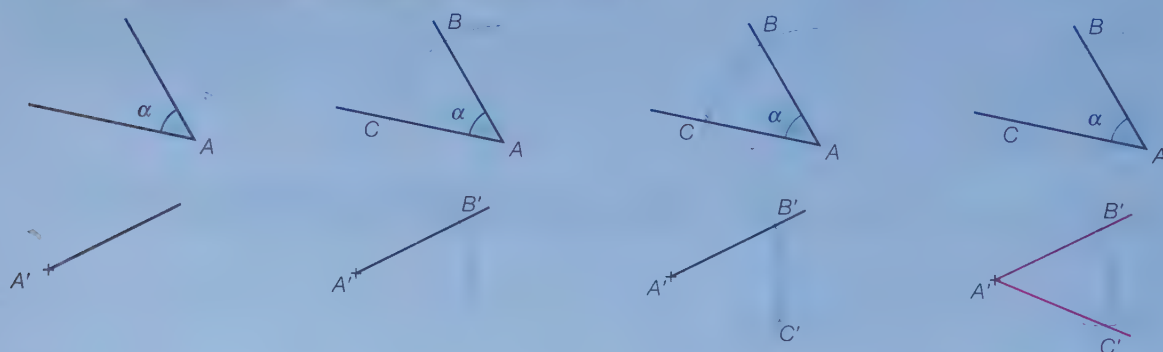


Un angle plein est un angle dont la mesure est 360° .



ES

Report d'un angle à l'aide du compas



■ Report de l'angle α sur une demi-droite d'origine A' .

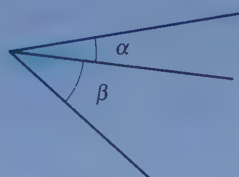
1 Tracer deux arcs de cercle de même rayon : l'un de centre A , qui coupe les deux côtés de l'angle α aux points B et C ; l'autre de centre A' , qui coupe la demi-droite d'origine A' au point B' .

2 Construire au compas le point C' tel que $BC = B'C'$.

3 Tracer la demi-droite d'origine A' passant par le point C' .
Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ sont isométriques.

Angles adjacents

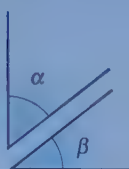
Deux angles adjacents sont deux angles qui ne se recouvrent pas, qui ont un même sommet et un côté commun.



α et β sont adjacents

Angles complémentaires

Deux angles complémentaires sont deux angles dont la somme des mesures est 90° .

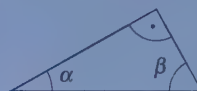


α et β sont complémentaires

$$\begin{aligned}\alpha &= 52^\circ \\ \beta &= 38^\circ \\ \alpha + \beta &= 90^\circ\end{aligned}$$

Cas particulier

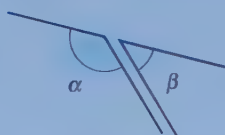
Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.



$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Angles supplémentaires

Deux angles supplémentaires sont deux angles dont la somme des mesures est 180° .



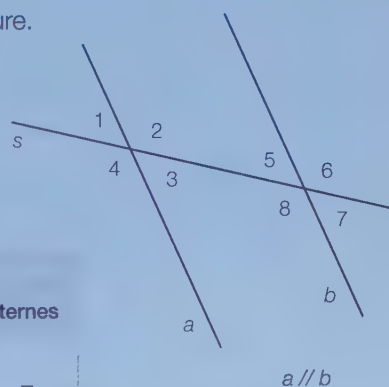
α et β sont supplémentaires

$$\begin{aligned}\alpha &= 135^\circ \\ \beta &= 45^\circ \\ \alpha + \beta &= 180^\circ\end{aligned}$$

Angles isométriques

Deux angles isométriques sont deux angles qui ont la même mesure.

Deux droites parallèles a et b coupées par une sécante s forment huit angles que l'on peut associer par paires d'angles isométriques.



$a \parallel b$

Angles

opposés par le sommet

correspondants

alternes-internes

alternes-externes

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$$

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5$$

$$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$$

$$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 6$$

$$\sphericalangle 5 = \sphericalangle 7$$

$$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 7$$

$$\sphericalangle 6 = \sphericalangle 8$$

$$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 8$$

$$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 8$$

$$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 5$$

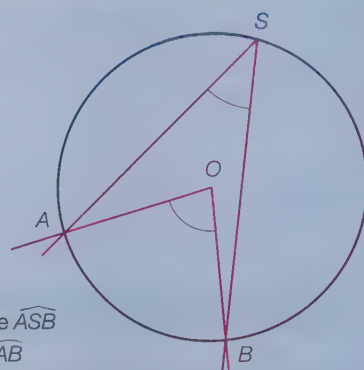
$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 7$$

$$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 6$$

Angle au centre d'un cercle, angle inscrit dans un cercle

Un angle inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet est sur le cercle et dont les côtés coupent le cercle.

Un angle au centre est un angle dont le sommet est le centre du cercle.

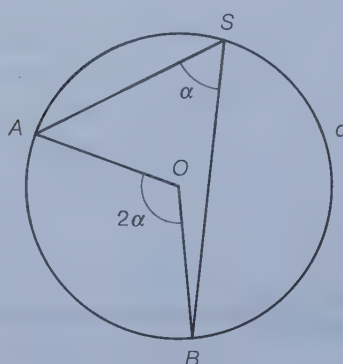


L'angle $\widehat{ASB}$ est un angle inscrit

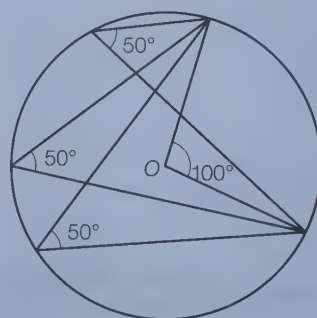
L'angle $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre de l'angle $\widehat{ASB}$

Les angles $\widehat{ASB}$ et $\widehat{AOB}$ interceptent l'arc $\widehat{AB}$

La mesure d'un angle inscrit est la moitié de celle de l'angle au centre interceptant le même arc de cercle.



Cas général

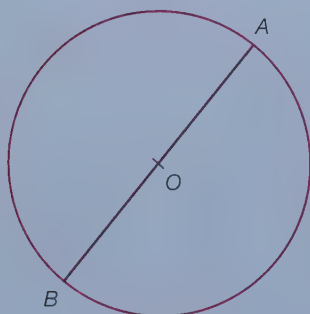


Exemple

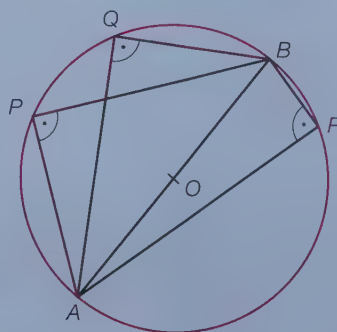
→ Cercle de Thalès d'un segment (p. 80), Arc capable (p. 81)

Cercle de Thalès d'un segment

Le cercle de Thalès d'un segment AB est le cercle de diamètre AB .



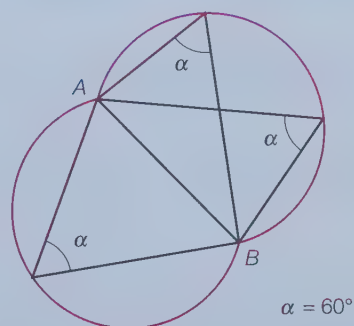
Le cercle de Thalès d'un segment AB est l'ensemble des points (à l'exception de A et B) d'où l'on « voit » le segment AB sous un angle droit.



→ Lieu géométrique (p. 72), Angle au centre d'un cercle, angle inscrit dans un cercle (p. 80), Arc capable (p. 81)

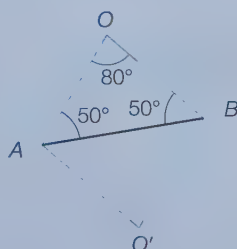
Arc capable

L'arc capable (le double arc capable) relatif à un segment AB et à un angle α est l'ensemble des points d'où l'on « voit » le segment AB sous l'angle α .



... Lieu géométrique (p. 72), Angle au centre d'un cercle, angle inscrit dans un cercle (p. 80)

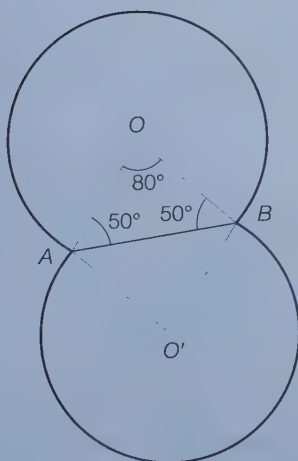
Construction d'un arc capable



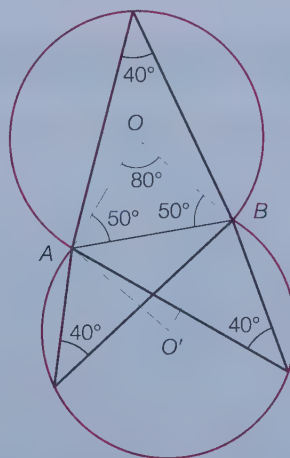
Il existe d'autres méthodes pour construire un arc capable.

■ Construction de l'ensemble des points d'où l'on « voit » le segment AB sous un angle de 40° .

1 Construire deux triangles isocèles OAB et $O'AB$ dont les angles isométriques mesurent $50^\circ = (180^\circ - 2 \cdot 40^\circ) : 2$.



2 Tracer deux arcs de cercle, de centres O et O' , passant par les points A et B .



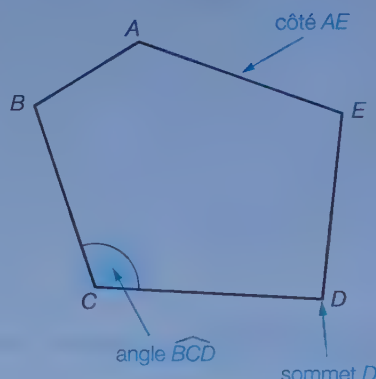
3 De chaque point de ces arcs de cercle, on « voit » le segment AB sous un angle de 40° .

Polygones

Polygone

Un polygone est une figure plane limitée uniquement par des segments.

En respectant l'ordre dans lequel les sommets se suivent sur le pourtour de ce polygone, on pourrait l'appeler le «polygone $ABCDE$ », mais aussi « $CDEAB$ » ou encore « $AEDCB$ », ... Mais, par exemple, on ne peut pas l'appeler le «polygone $ABCED$ ».



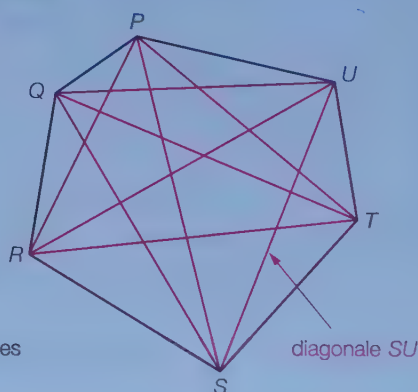
polygone

polus (grec): beaucoup
gônia (grec): angle
qui a beaucoup d'angles

Une figure plane est une partie du plan limitée par une ligne fermée.

Diagonale d'un polygone

Une diagonale est un segment qui joint deux sommets non consécutifs d'un polygone.



diagonale

dia (grec): à travers
gônia (grec): angle
qui traverse d'un angle à un autre

consécutif

consequi (latin): suivre

Le polygone $PQRSTU$ possède neuf diagonales

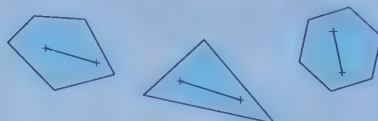
Figure polygonale et figure convexe

Une figure convexe est une figure qui contient chaque segment joignant deux de ses points.

Figures polygonales

Figures non polygonales

Figures convexes



Figures non convexes



Polygone régulier

pentagone
penta (grec) : cinq
gônia (grec) : angle
polygone à cinq angles

hexagone
hexa : six

heptagone
hepta : sept

octogone
octo : huit

ennéagone
ennea : neuf

décagone
deca : dix

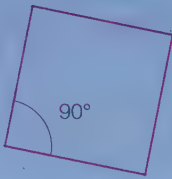
hendécagone
hendeca : onze

dodécagone
dodeca : douze

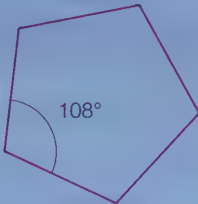
Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés sont isométriques et dont tous les angles sont isométriques. Il est inscriptible dans un cercle.



Triangle
équilatéral



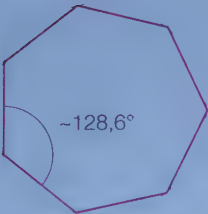
Carré



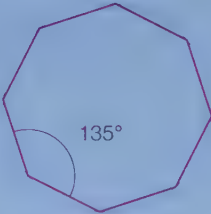
Pentagone
régulier



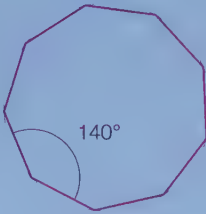
Hexagone
régulier



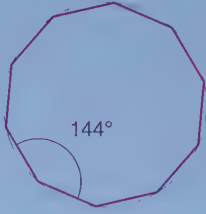
Heptagone
régulier



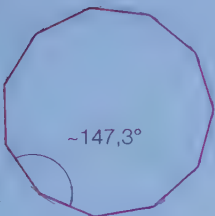
Octogone
régulier



Ennéagone
régulier



Décagone
régulier



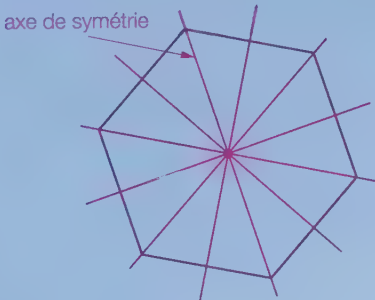
Hendécagone
régulier



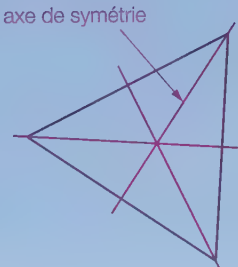
Dodécagone
régulier

ES

Un polygone régulier est un polygone qui a autant d'axes de symétrie que de côtés.



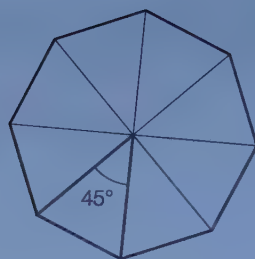
Hexagone régulier



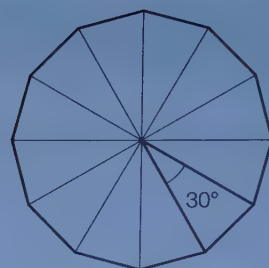
Triangle équilatéral



La mesure, en degrés, de l'angle au centre d'un polygone régulier à n sommets est $360^\circ : n$.



Octogone régulier



Dodécagone régulier

→ Symétrie axiale (p. 104)

Somme des angles d'un polygone

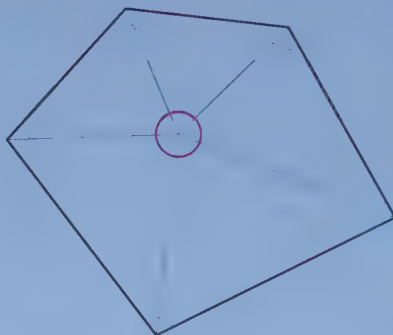
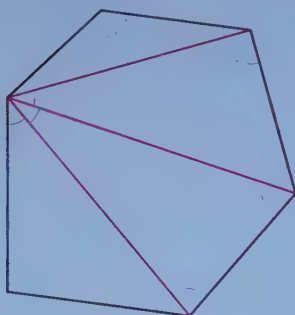
La somme, en degrés, des mesures des angles d'un polygone à n côtés est $180^\circ \cdot (n - 2)$.

Cette somme peut également s'écrire sous la forme $180^\circ \cdot n - 360^\circ$.

Exemples

Somme des angles d'un hexagone :
 $180^\circ \cdot (6 - 2) = 180^\circ \cdot 4 = 720^\circ$

Somme des angles d'un pentagone :
 $180^\circ \cdot 5 - 360^\circ = 540^\circ$



Cas particuliers

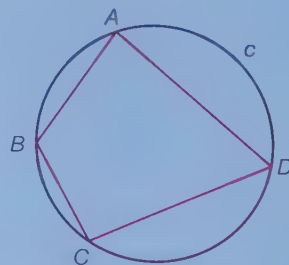
La somme des mesures des angles d'un triangle est 180° .

La somme des mesures des angles d'un quadrilatère est 360° .

Polygone inscrit dans un cercle

Un polygone inscrit dans un cercle est un polygone dont tous les sommets sont des points de ce cercle.

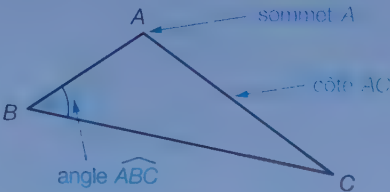
Le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans le cercle c



→ Cercle circonscrit à un triangle (p. 99), Somme des angles opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle (p. 90)

Triangle

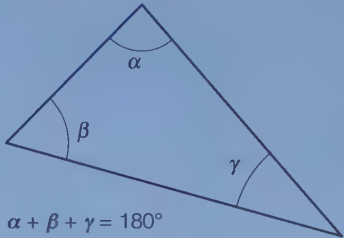
Un triangle est une figure qui a trois côtés, trois angles et trois sommets.



triangle
tri (latin) : trois
angulus (latin) : angle

Somme des angles d'un triangle

La somme des mesures des angles d'un triangle est 180°.



→ Somme des angles d'un polygone (p. 84)

Triangles remarquables

équilatéral
aequus (latin) : égal
latus (latin) : côté
aux côtés égaux

isocèle
isos (grec) : même
skelos (grec) : jambe
aux jambes égales

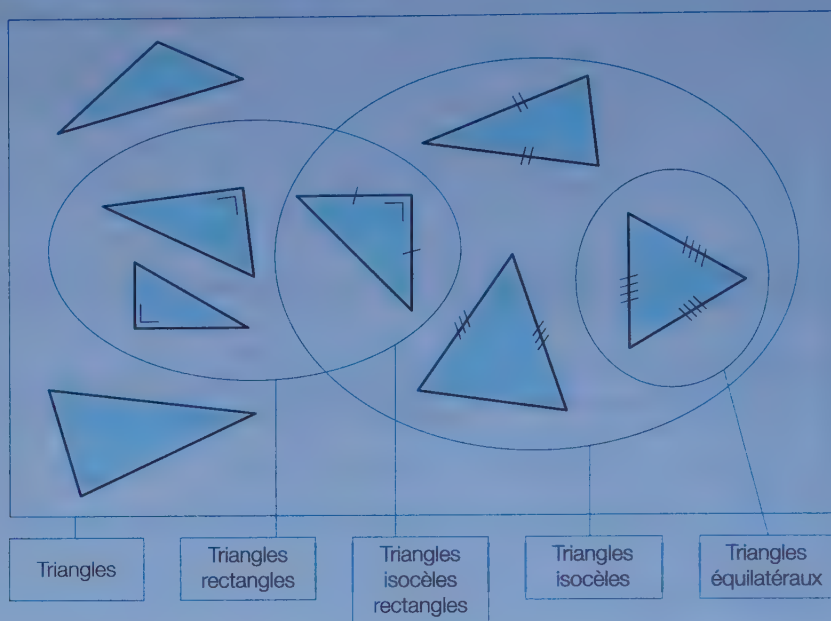
hypoténuse
hypo (grec) : sous
teinein (grec) : tendre
le côté opposé de
l'angle droit

ES

Nom	Figure	Côtés	Angles	Symétries
Triangle équilatéral		Trois côtés isométriques	Trois angles isométriques	Trois axes de symétrie
Triangle isocèle		Au moins deux côtés isométriques	Au moins deux angles isométriques	Au moins un axe de symétrie
Triangle rectangle		Deux côtés perpendiculaires Le côté opposé à l'angle droit est l'hypoténuse	Un angle droit	

→ Angle (p. 77), Symétrie axiale (p. 104)

Classement des triangles



Segment moyen d'un triangle

ES

Un segment moyen est un segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle.

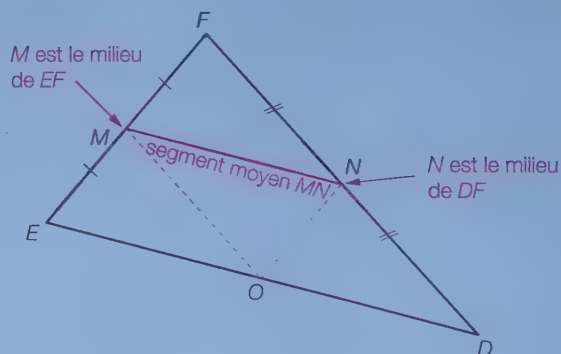
Il mesure la moitié de la longueur du troisième côté :

$$MN = \frac{ED}{2}$$

Il est parallèle au troisième côté :

$$MN \parallel ED$$

→ Homothétie (p. 109), Théorème de Thalès (p. 127)

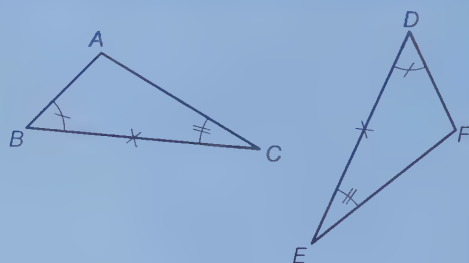


Cas d'isométrie des triangles

Deux triangles sont isométriques, s'ils ont :

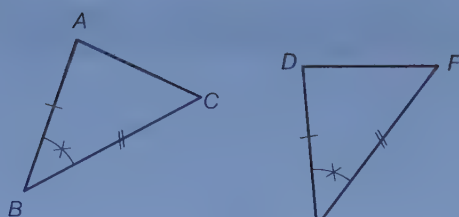
- un côté isométrique compris entre deux angles respectivement isométriques :

Les triangles ABC et DEF sont isométriques, car $BC = DE$, $\widehat{ABC} = \widehat{FDE}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{DEF}$



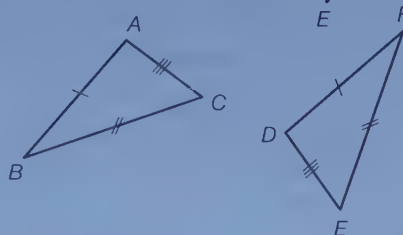
- deux côtés respectivement isométriques adjacents à un angle isométrique :

Les triangles ABC et DEF sont isométriques, car $AB = DE$, $BC = EF$ et $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$



- leurs trois côtés respectivement isométriques :

Les triangles ABC et DEF sont isométriques, car $AB = DF$, $BC = EF$ et $AC = ED$



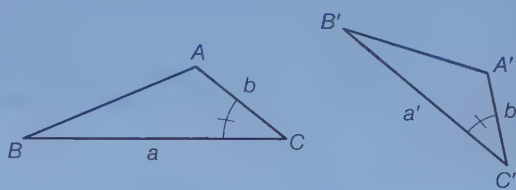
→ Isométries (p. 101)

Cas de similitude des triangles

Deux triangles sont semblables s'ils ont :

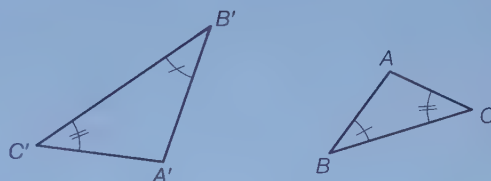
- un angle isométrique compris entre deux côtés respectivement proportionnels :

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables, car $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ et $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$



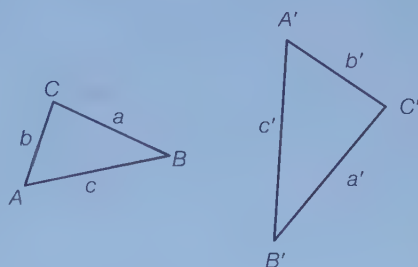
- deux angles respectivement isométriques :

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables, car $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$



- leurs trois côtés respectivement proportionnels :

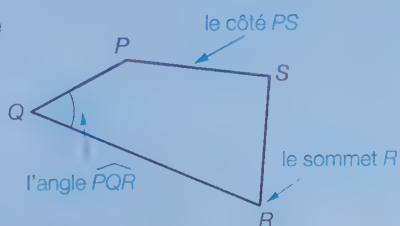
Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables, car $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$



→ Similitude (p. 112), Figures semblables (p. 113)

Quadrilatère

Un quadrilatère est une figure plane qui a quatre côtés.



quadrilatère
quattuor (latin) : quatre
latus (latin) : le côté

Quadrilatères remarquables

carré

quadratus (latin) : part. passé de *quadrare* : carrer, rendre carré

adjacent

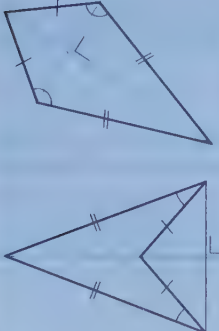
adjacere (latin) : être situé auprès de

rectangle

rectus (latin) : droit
angulus (latin) : angle
 polygone qui a des angles droits

trapèze

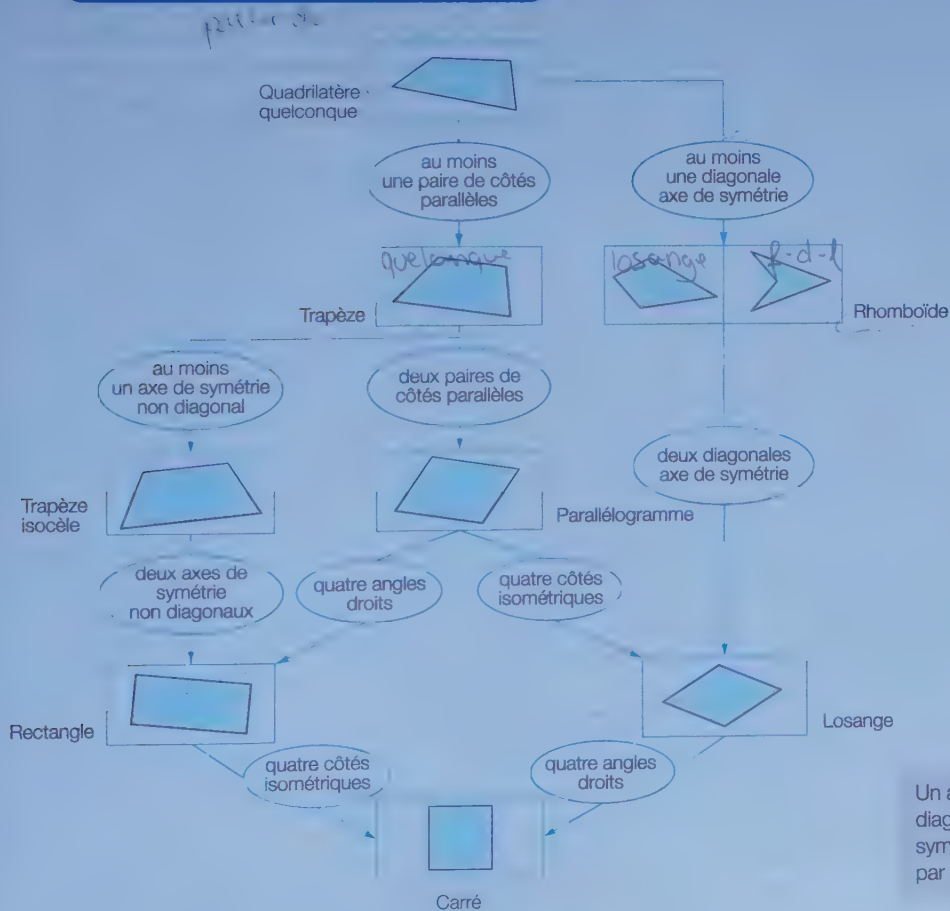
trapeza (grec) : la table

Nom	Figure	Côtés	Diagonales	Angles	Symétries	Remarques
Carré		Quatre côtés isométriques Deux paires de côtés parallèles	Diagonales isométriques, perpendiculaires, se coupant en leur milieu	Quatre angles droits	Quatre axes de symétrie Un centre de symétrie	Un quadrilatère qui a quatre côtés isométriques et quatre angles droits est un carré
Losange		Quatre côtés isométriques Deux paires de côtés parallèles	Diagonales perpendiculaires se coupant en leur milieu	Angles opposés isométriques	Deux axes de symétrie passant par les sommets Un centre de symétrie	Les carrés sont des losanges particuliers
Parallélogramme		Deux paires de côtés parallèles Côtés opposés isométriques	Diagonales se coupant en leur milieu	Angles opposés isométriques	Un centre de symétrie	Les losanges, les rectangles et les carrés sont des parallélogrammes particuliers
Rectangle		Côtés opposés isométriques Deux paires de côtés parallèles	Diagonales isométriques et se coupant en leur milieu	Quatre angles droits	Deux axes de symétrie perpendiculaires aux côtés Un centre de symétrie	Les carrés sont des rectangles particuliers
Rhomboïde		Deux paires de côtés adjacents isométriques	Diagonales perpendiculaires	Au moins une paire d'angles opposés isométriques	Au moins un axe de symétrie passant par des sommets	Les losanges et les carrés sont des rhomboïdes particuliers

Nom	Figure	Côtés	Diagonales	Angles	Symétries	Remarques
quelconque		Au moins une paire de côtés parallèles				Les parallélogrammes, les losanges, les rectangles et les carrés sont des trapèzes particuliers
Trapèze isocèle		Au moins une paire de côtés parallèles Au moins deux côtés opposés isométriques	Diagonales isométriques	Deux paires d'angles adjacents isométriques	Au moins un axe de symétrie non diagonal	Un trapèze isocèle est un trapèze qui a au moins un axe de symétrie non diagonal
rectangle		Au moins une paire de côtés parallèles		Au moins deux angles droits		Un trapèze rectangle est un trapèze qui a au moins deux angles droits

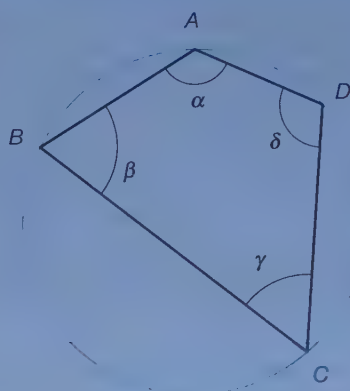
Angle (p. 77), Polygone (p. 82)

Classement des quadrilatères



Somme des angles opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle

La somme des mesures des angles opposés de tout quadrilatère inscrit dans un cercle est 180° .



Les carrés et les rectangles sont inscriptibles dans un cercle.

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta + \delta = 180^\circ$$

➤ Angle au centre d'un cercle, angle inscrit dans un cercle (p. 80), Somme des angles d'un polygone (p. 84), Cercle circonscrit à un triangle (p. 99)

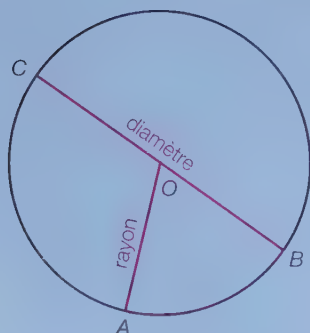
Cercles et disques

Cercle et disque

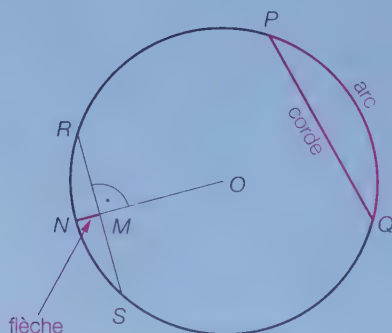
Un cercle est l'ensemble de tous les points d'un plan situés à une distance fixée d'un point donné, appelé centre. On appelle disque la surface enfermée par le cercle.

cercle
circus (latin) : cirque

diamètre
dia (grec) : à travers
metron (grec) : mesure



O est le centre du cercle
 OA est un rayon du cercle
 BC est un diamètre du cercle



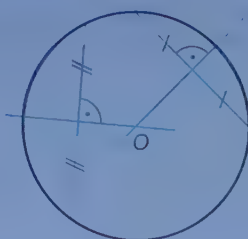
PQ est une corde du cercle
 $\widehat{PQ}$ est un arc du cercle
 MN est la flèche du cercle relativement à la corde RS

➤ Périmètre et aire d'un disque (p. 124)

Construction du centre d'un cercle



1 Tracer deux cordes quelconques de ce cercle.



2 Construire la médiatrice de chaque corde. Le centre du cercle est l'intersection de ces médiatrices.

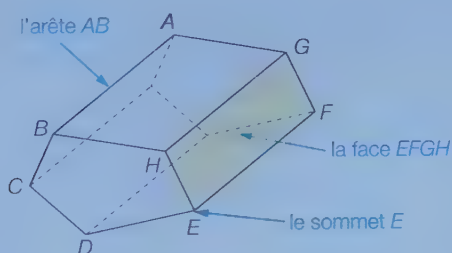
Il existe d'autres méthodes pour construire le centre d'un cercle.

→ Médiatrice d'un segment (p. 95)

Solides et espace

Polyèdre

Un polyèdre est un solide dont toutes les faces sont des polygones.



polyèdre

polus (grec) : beaucoup
hedra (grec) : siège, base
 qui a plusieurs faces

→ Polygone (p. 82)

Quelques polyèdres

prisme

prizein (grec) : scier
solide scié

tétraèdre

tetra (grec) : quatre

octaèdre

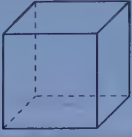
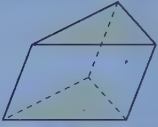
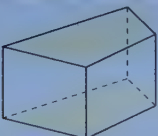
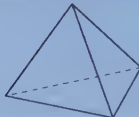
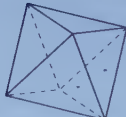
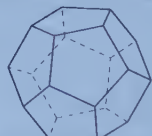
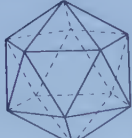
octa (grec) : huit
hedra (grec) : siège, base
polyèdre à huit faces

dodécaèdre

dodeca (grec) : douze

icosaèdre

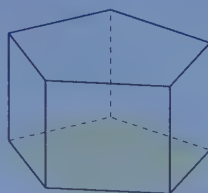
eikosi (grec) : vingt

Nom	Figure	Définition	Remarque
Cube		Polyèdre dont les six faces sont des carrés	Le cube est un parallélépipède rectangle particulier Le cube est un prisme droit particulier
Parallélépipède rectangle ou pavé droit		Polyèdre dont les six faces sont des rectangles	Le parallélépipède rectangle est un prisme droit particulier
Prisme		Polyèdre dont les deux bases sont des polygones isométriques et parallèles, et dont les faces latérales sont des parallélogrammes	
Prisme droit		Prisme dont les faces latérales sont des rectangles	
Pyramide		Polyèdre dont la base est un polygone et dont les faces latérales sont des triangles	Une pyramide est régulière si sa base est un polygone régulier et si ses faces sont des triangles isocèles
Tétraèdre régulier		Polyèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux. C'est une pyramide particulière	
Octaèdre régulier		Polyèdre dont les huit faces sont des triangles équilatéraux	Un polyèdre est régulier si toutes ses faces sont des polygones réguliers et si chacun de ses sommets est l'intersection d'un même nombre d'arêtes
Dodécaèdre régulier		Polyèdre dont les douze faces sont des pentagones réguliers	Le cube et les quatre polyèdres ci-contre sont les seuls polyèdres réguliers convexes
Icosaèdre régulier		Polyèdre dont les vingt faces sont des triangles équilatéraux	

Polyèdre – relation d'Euler

Tout polyèdre convexe possédant s sommets, f faces et a arêtes vérifie la relation :

$$s + f - a = 2$$



Prisme dont la base est un pentagone

$$s = 10$$

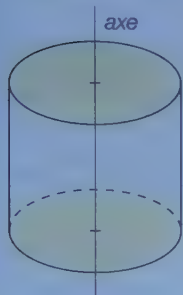
$$f = 7$$

$$a = 15$$

$$s + f - a = 2$$

Autres solides

cylindre droit



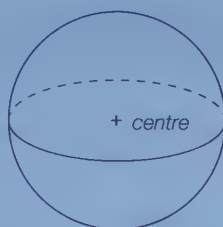
Ses bases sont des disques isométriques et parallèles. Après développement, sa surface latérale est un rectangle.

cône droit



Sa base est un disque. Après développement, sa surface latérale est un secteur circulaire.

boule



La boule est l'ensemble de tous les points de l'espace situés à une distance inférieure ou égale à une grandeur donnée, appelée rayon, d'un point de l'espace nommé centre.

cylindre

kulindros (grec) : le rouleau

sphère

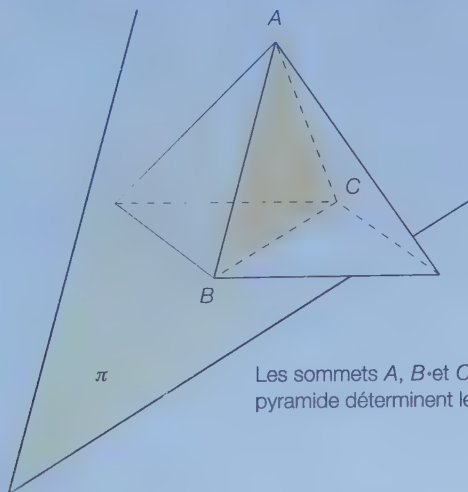
sphaira (grec) : la balle, la sphère

On appelle sphère l'ensemble des points de l'espace situés à une distance fixe, appelé rayon, d'un point de l'espace donné appelé centre ; autrement dit, il s'agit de la surface externe de la boule.

→ Cercle et disque (p. 90), Longueur d'un arc de cercle et aire d'un secteur circulaire (p. 124)

Plan

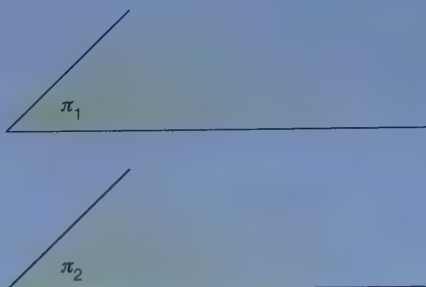
Généralement, trois points de l'espace déterminent un plan.



Les sommets A, B et C de cette pyramide déterminent le plan π

Plans parallèles

Deux plans sont parallèles s'ils n'ont aucun point commun.

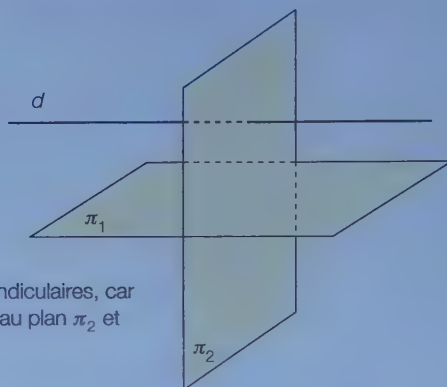


Cas particulier

Par convention, deux plans confondus sont aussi parallèles.

Plans perpendiculaires

Deux plans sont perpendiculaires si une droite perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.

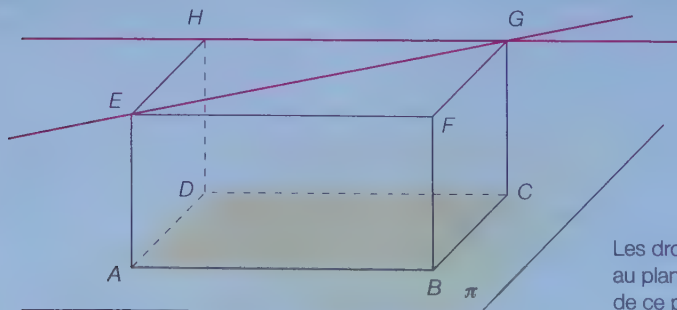


Les plans π_1 et π_2 sont perpendiculaires, car la droite d est perpendiculaire au plan π_2 et parallèle au plan π_1 .

ES

Droite parallèle à un plan

Une droite parallèle à un plan est une droite qui n'a aucun point commun avec ce plan.



Cas particulier

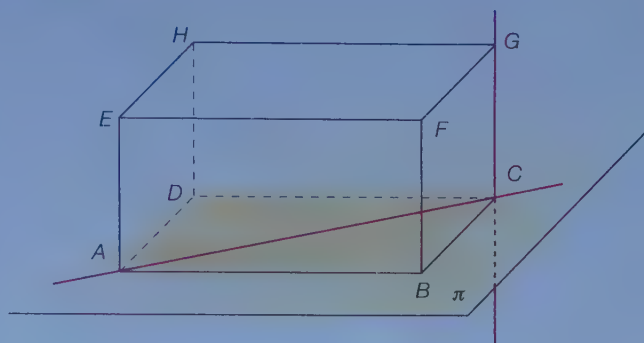
Par convention, une droite qui appartient à un plan est aussi parallèle à ce plan.

Les droites GH et GE sont parallèles au plan π , déterminé par la face $ABCD$ de ce pavé droit.

Droite perpendiculaire à un plan

Une droite perpendiculaire à un plan est une droite qui est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan qu'elle rencontre.

La droite CG est perpendiculaire au plan π , déterminé par la face $ABCD$ de ce pavé droit.



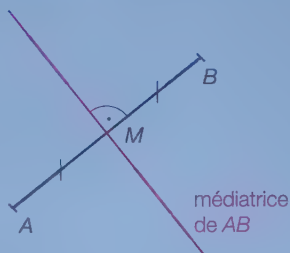
→ Droites perpendiculaires (p. 74)

Constructions

Médiatrice d'un segment

La médiatrice du segment AB est la droite perpendiculaire au segment AB qui passe par M , point milieu de AB .

La médiatrice d'un segment est l'axe de symétrie de ce segment.



médiatrice

medius (latin) : qui est au milieu

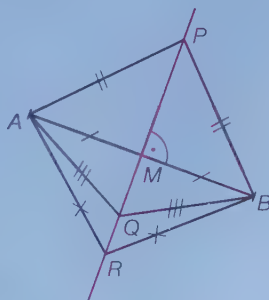
mediatrix (latin) : qui se place entre

équidistant

aequus (latin) : égal

distantia (latin) : la distance, l'éloignement

La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.



$$PA = PB$$

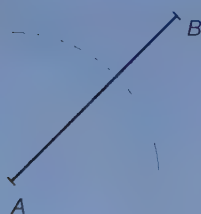
$$MA = MB$$

$$QA = QB$$

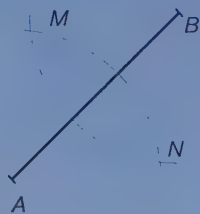
...

→ Lieu géométrique (p. 72), Droites remarquables d'un triangle (p. 97), Symétrie axiale (p. 104), Axe de symétrie (p. 105)

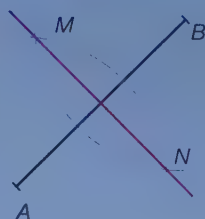
Construction de la médiatrice d'un segment



1 Tracer un arc de cercle de centre A dont le rayon est plus grand que la moitié de AB .



2 Garder le même rayon et tracer un arc de cercle de centre B : les deux arcs se coupent en M et N .



3 Tracer la droite qui passe par M et N . Cette droite est la médiatrice du segment AB .

Il existe d'autres méthodes pour construire la médiatrice d'un segment.

Bissectrice d'un angle

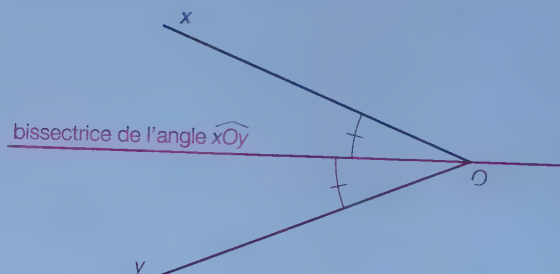
bissectrice

bis (latin) : deux fois

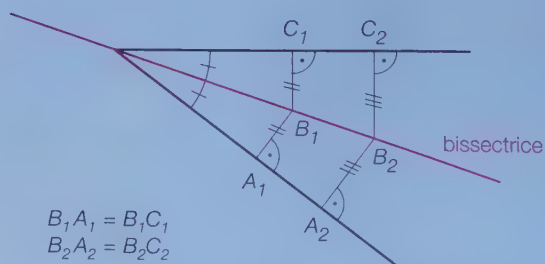
secare (latin) : couper

La bissectrice d'un angle est la droite qui le partage en deux angles isométriques.

La bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de cet angle.

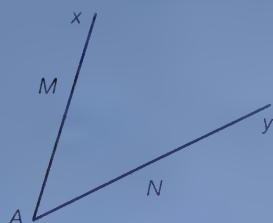


La bissectrice d'un angle est l'ensemble des points équidistants des côtés de l'angle.

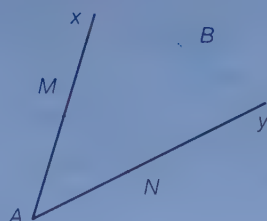


➡ Lieu géométrique (p. 72), Distance d'un point à une droite (p. 71), Angle (p. 77), Symétrie axiale (p. 104), Axe de symétrie (p. 105)

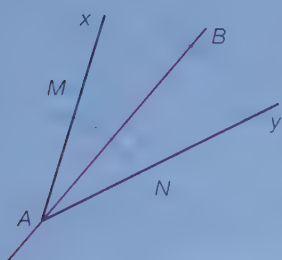
Construction de la bissectrice d'un angle



1 Tracer un arc de cercle de centre A : il coupe les côtés de l'angle $\widehat{xAy}$ aux points M et N .



2 Tracer deux arcs de cercle de même rayon, l'un de centre M et l'autre de centre N . Ces deux arcs se coupent en B .



3 Tracer la droite qui passe par les points A et B . Cette droite est la bissectrice de l'angle $\widehat{xAy}$.

Il existe d'autres méthodes pour construire la bissectrice d'un angle.

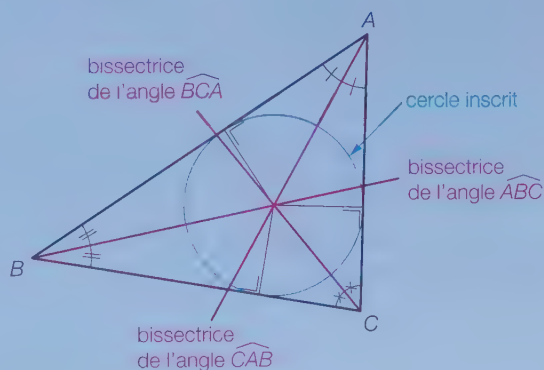
Droites remarquables d'un triangle

Les bissectrices

Les bissectrices des angles d'un triangle se coupent en un même point.

Ce point est le centre du cercle qui est tangent aux trois côtés du triangle.

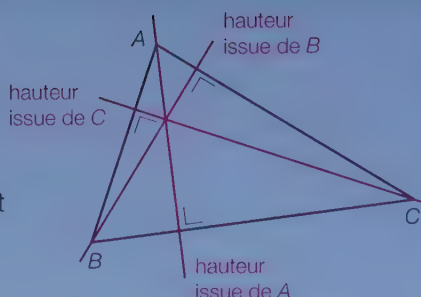
Ce cercle est appelé le cercle inscrit dans le triangle ABC .



■ Les hauteurs

Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Les hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.



Attention !

Les hauteurs d'un triangle se coupent parfois à l'extérieur du triangle.

L'intersection des hauteurs est appelée l'orthocentre du triangle.

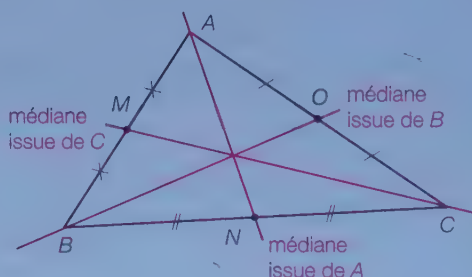
→ Périmètre et aire d'un triangle (p. 123)

■ Les médianes

Une médiane d'un triangle est une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé à ce sommet.

Les médianes d'un triangle se coupent en un même point.

Une médiane partage le triangle en deux triangles de même aire.



M, N et O sont respectivement les points milieux des côtés du triangle

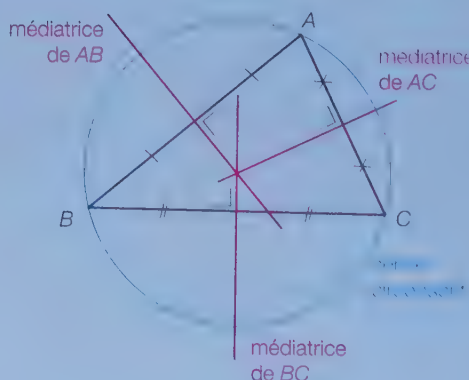
L'intersection des médianes est appelée le centre de gravité du triangle.

■ Les médiatrices

Les médiatrices des côtés d'un triangle se coupent en un même point.

Ce point est le centre du cercle qui passe par les trois sommets du triangle.

Ce cercle est appelé le cercle circonscrit au triangle.



Attention !

Les médiatrices se coupent parfois à l'extérieur du triangle.

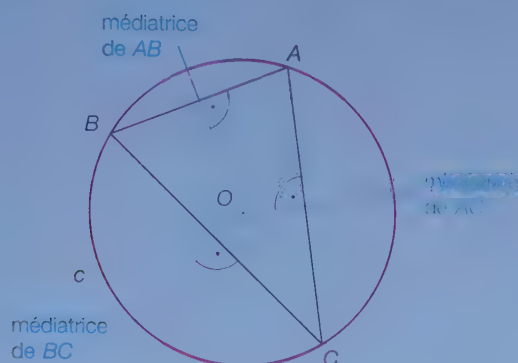
→ Médiatrice d'un segment (p. 95), Bissectrice d'un angle (p. 96), Tangente à un cercle (p. 100)

Cercle circonscrit à un triangle

Un cercle circonscrit à un triangle est un cercle passant par les trois sommets de ce triangle. Son centre est l'intersection des médiatrices des côtés du triangle.

circonscrit

circum (latin) : autour
scribere (latin) : écrire



Cercle circonscrit au triangle ABC

Le plus souvent, un polygone à plus de trois côtés ne possède pas de cercle circonscrit.

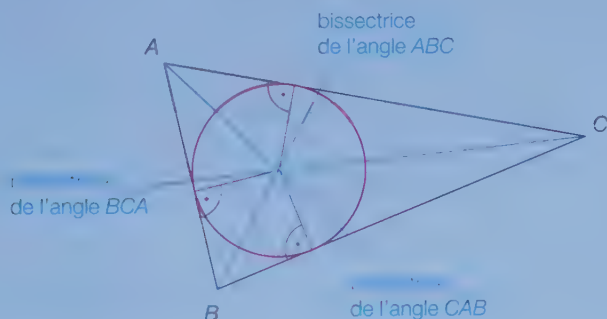
➡ Polygone régulier (p. 83), Médiatrice d'un segment (p. 95), Droites remarquables d'un triangle (p. 97)

Cercle inscrit dans un triangle

Un cercle inscrit dans un triangle est un cercle tangent aux trois côtés de ce triangle. Son centre est l'intersection des bissectrices des angles du triangle.

inscrit

in (latin) : dans, à l'intérieur
scribere (latin) : écrire



Cercle inscrit dans le triangle ABC

Le plus souvent, un polygone à plus de trois côtés ne possède pas de cercle inscrit.

➡ Bissectrice d'un angle (p. 96), Droites remarquables d'un triangle (p. 97), Tangente à un cercle (p. 100)

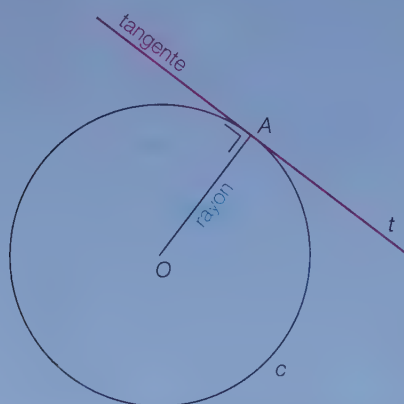
Tangente à un cercle

Une tangente à un cercle est une droite qui a un seul point commun avec ce cercle.

tangente

tangere (latin) : toucher

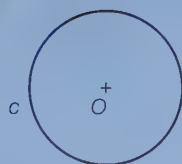
Une tangente est perpendiculaire au rayon qui passe par le point de tangence.



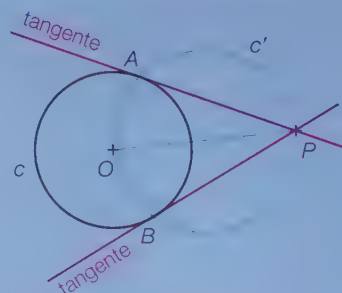
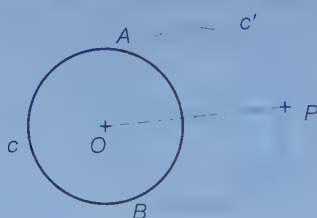
La droite t est la tangente en A au cercle c

Construction des tangentes à un cercle passant par un point situé à l'extérieur du cercle

ES



+ P



Les segments PA et PB sont isométriques

■ Construction des tangentes au cercle c passant par le point P .

1 Construire le cercle de Thalès du segment OP . Les cercles c et c' se coupent en A et B .

2 Tracer les droites AP et BP . Ce sont les tangentes au cercle c passant par le point P .

Il existe d'autres méthodes pour construire les tangentes à un cercle.

→ Cercle de Thalès d'un segment (p. 80), Médiatrice d'un segment (p. 95)

Transformations géométriques

Transformations du plan

Il existe de multiples transformations. Quelques exemples :



Un agrandissement...
ou une réduction



Une isométrie, ici une
symétrie axiale



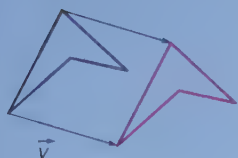
Une « déformation »

Isométries

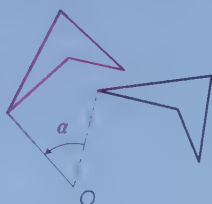
Une isométrie est une transformation telle qu'une figure et son image ont la même forme et les mêmes dimensions : elles sont donc superposables. La translation, la rotation, la symétrie centrale et la symétrie axiale sont des isométries.

isométrie

isos (grec) : même
metron (grec) : mesure
transformation qui conserve
les mesures



translation de vecteur $\vec{v}$



rotation $\mathcal{R}(O ; \alpha)$



symétrie centrale $S(P)$



symétrie axiale $S(d)$

→ Translation (p. 103), Symétrie axiale (p. 104), Symétrie centrale (p. 106), Rotation (p. 108)

Homothéties

Une homothétie est une transformation qui conserve les formes et les directions, mais, en général, pas les longueurs.

L'image d'une figure par une homothétie est un agrandissement ou une réduction de cette figure.

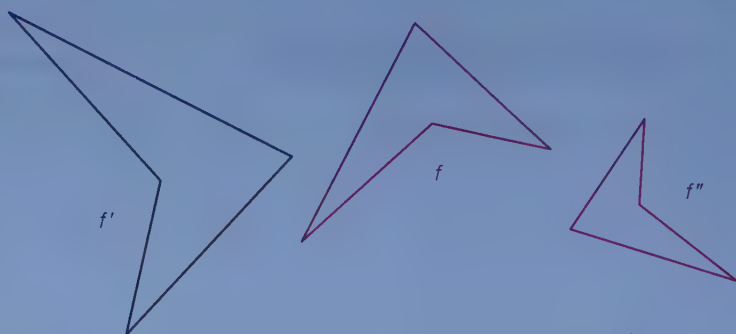


f' est l'image de f par une homothétie de centre O
 f'' est l'image de f' par une homothétie de centre P

→ Homothétie (p. 109)

Similitudes

Une similitude est une transformation telle qu'une figure et son image ont la même forme, mais pas nécessairement les mêmes dimensions.



f et f' sont images l'une de l'autre par une similitude
 f et f'' sont images l'une de l'autre par une autre similitude

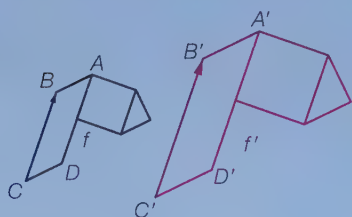
→ Similitude (p. 112)

Propriétés des transformations du plan

Une transformation conserve :

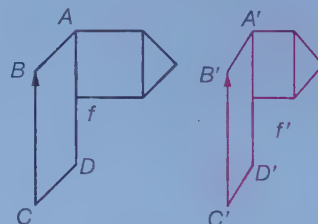
- les longueurs, si chaque segment a pour image un segment de même longueur.

Par exemple, un agrandissement ne conserve pas les longueurs : $AB \neq A'B'$, $BC \neq B'C'$, ...



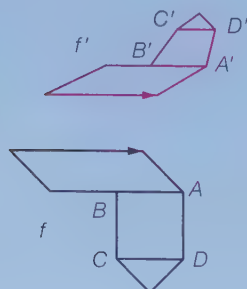
- les mesures des angles, si chaque angle a pour image un angle de même mesure.

Par exemple, la transformation ci-dessous ne conserve pas les mesures des angles : $\widehat{ABC} \neq \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BCD} \neq \widehat{B'C'D'}$, ...



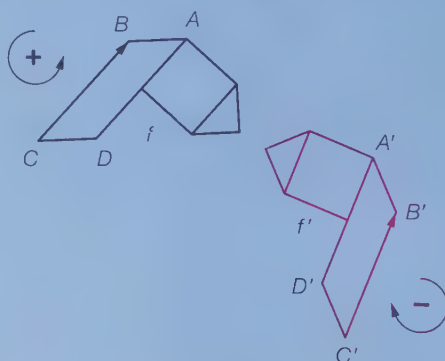
- le parallélisme, si chaque paire de droites ou de segments parallèles a pour image une paire de droites ou de segments parallèles.

Par exemple, la transformation ci-dessous ne conserve pas le parallélisme : $ABCD$ est un carré, mais $A'B'C'D'$ n'en est pas un.



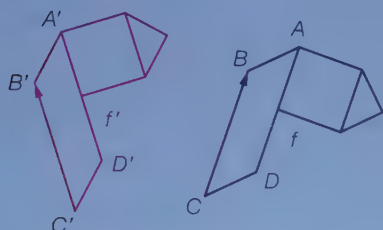
- l'orientation, si chaque figure présente la même « face » que son image.

Par exemple, une symétrie axiale ne conserve pas l'orientation : on lit les lettres $ABCD$ et $A'B'C'D'$ en tournant dans des sens différents.



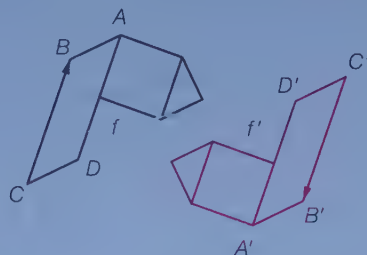
- les directions, si chaque droite a pour image une droite qui lui est parallèle.

Par exemple, une rotation d'angle différent de 180° ou 360° ne conserve pas les directions : les droites AB et $A'B'$ ne sont pas parallèles, ...



- le sens des vecteurs, si chaque vecteur a la même direction et le même sens que son image.

Par exemple, une symétrie centrale ne conserve pas le sens des vecteurs : les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{C'B'}$ n'ont pas le même sens, ...



Propriétés des isométries et des homothéties du plan

Transformation	Conservation	Longueurs	Mesure des angles	Parallélisme	Orienta-tion	Directions	Sens des vecteurs
translation		oui	oui	oui	oui	oui	oui
rotation		oui	oui	oui	oui	non ¹	non ²
symétrie centrale		oui	oui	oui	oui	oui	non
symétrie axiale		oui	oui	oui	non	non ³	non ⁴
homothétie de rapport positif		non ⁵	oui	oui	oui	oui	oui
homothétie de rapport négatif		non ⁶	oui	oui	oui	oui	non

¹ sauf si l'angle mesure 180° ou 360°

² sauf si l'angle mesure 360°

³ sauf pour les droites perpendiculaires ou parallèles à l'axe de symétrie

⁴ sauf pour les vecteurs parallèles à l'axe de symétrie

⁵ sauf si le rapport est 1

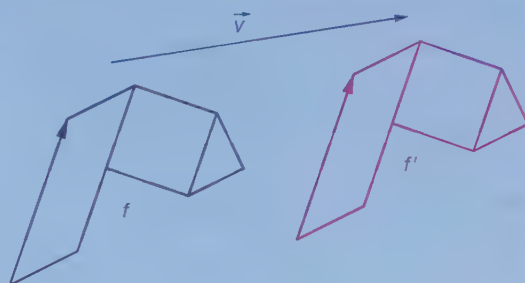
⁶ sauf si le rapport est -1

Translation (p. 103), Symétrie axiale (p. 104), Symétrie centrale (p. 106), Rotation (p. 108), Homothétie (p. 109)

Translation

Le mouvement qui amène f en f' est une translation.

Déplacer une figure par une translation, c'est faire glisser cette figure, sans la faire tourner.



translation

translatus (latin) : porté au-delà
transfere (latin) : porter au-delà

Une translation porte sur tous les points du plan et pas seulement sur ceux dont on cherche l'image.

Du français...

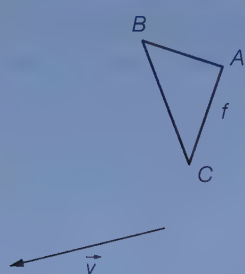
« La figure f a pour image la figure f' par la translation de vecteur $\vec{v}$. »

... à l'écriture mathématique

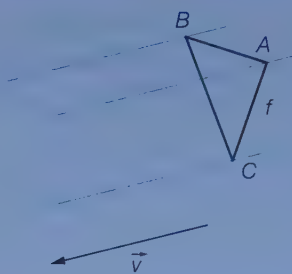
$$f \xrightarrow{T(\vec{v})} f'$$

Propriétés des isométries et des homothéties du plan (p. 103)

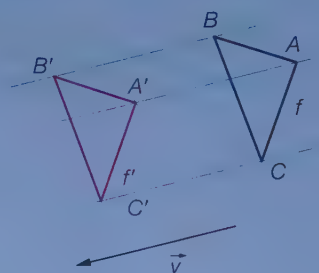
Construction de l'image d'une figure par une translation



■ Construction de l'image de la figure f par la translation de vecteur $\vec{v}$.



1 Tracer des parallèles au vecteur $\vec{v}$ passant par les sommets de f .



2 Construire les points A' , B' et C' , tels que les segments AA' , BB' et CC' soient isométriques au vecteur $\vec{v}$. Relier ensuite les points A' , B' et C' .

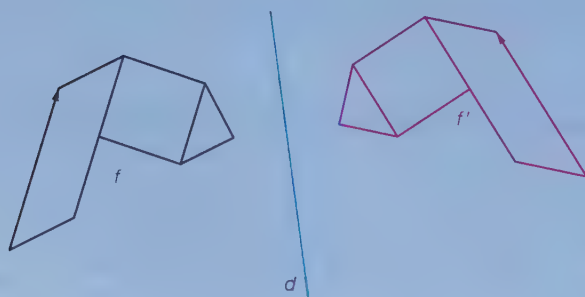
→ Droites parallèles (p. 75), Vecteur (p. 76)

Toutes les propriétés de la translation peuvent être utilisées pour construire l'image d'une figure. Il existe donc d'autres méthodes.

Symétrie axiale

En pliant la feuille suivant la droite d , les figures f et f' se superposent.

Le mouvement qui amène f en f' est une symétrie axiale.



Du français...
« La figure f a pour image la figure f' par la symétrie d'axe d . »

Dans l'espace, ce mouvement peut être réalisé par une rotation de 180° autour de l'axe d .

Une symétrie axiale porte sur tous les points du plan et pas seulement sur ceux dont on cherche l'image.

... à l'écriture mathématique

$$f \xrightarrow{S(d)} f'$$

Les figures f et f' sont symétriques par rapport à la droite d .

La droite d est appelée axe de symétrie.

→ Propriétés des isométries et des homothéties du plan (p. 103)

Axe de symétrie

Une figure peut...

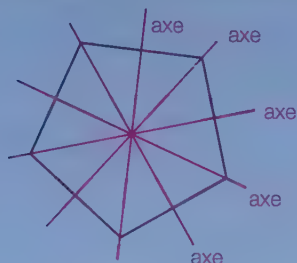
... avoir un axe de symétrie

... avoir plusieurs axes de symétrie

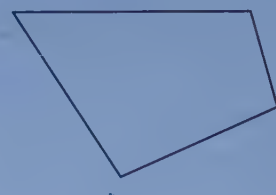
... ne pas avoir d'axe de symétrie



Triangle isocèle



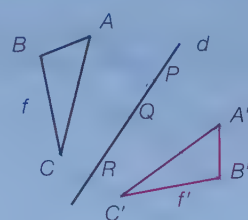
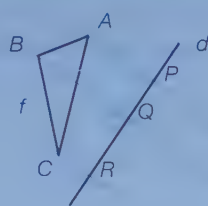
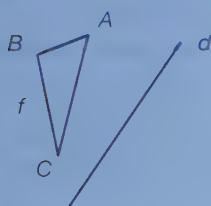
Pentagone régulier



Quadrilatère quelconque

→ Médiatrice d'un segment (p. 95)

Construction de l'image d'une figure par une symétrie axiale



■ Construction de l'image de la figure f par la symétrie axiale d'axe d .

1 Tracer des perpendiculaires à la droite d passant par les sommets de f .

2 Construire les points A' , B' et C' tels que :
 $PA' = PA$
 $QB' = QB$
 $RC' = RC$.
 Relier ensuite les points A' , B' et C' .

Toutes les propriétés de la symétrie axiale peuvent être utilisées pour construire l'image d'une figure. Il existe donc d'autres méthodes.

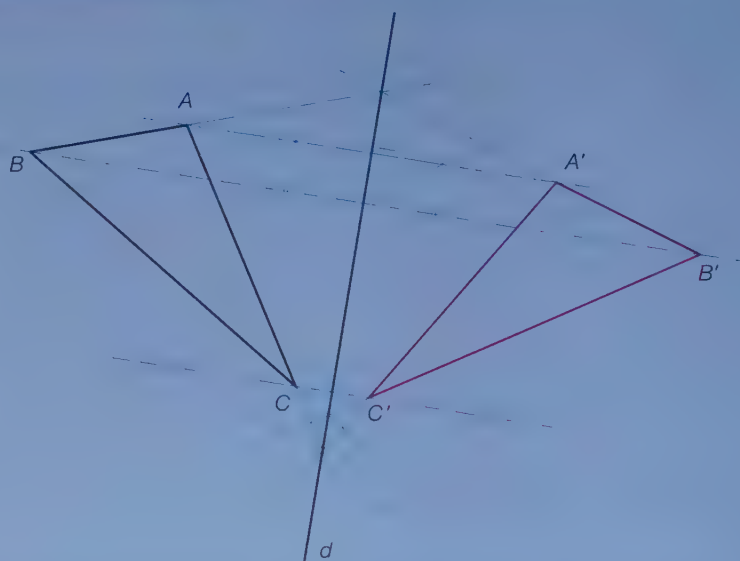
→ Droites perpendiculaires (p. 74), Médiatrice d'un segment (p. 95)

Symétrie axiale – quelques observations

Les droites AA' , BB' et CC' (joignant deux points symétriques l'un de l'autre) sont parallèles.

Tous les points de l'axe de symétrie sont images d'eux-mêmes : ce sont des points fixes.

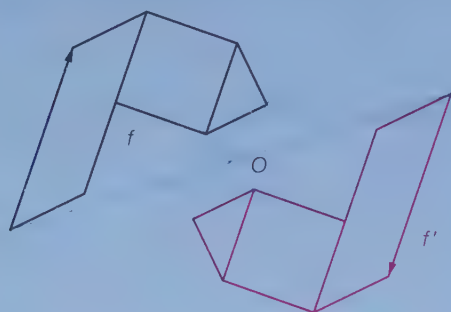
Une droite et son image se coupent sur l'axe de symétrie (sauf les parallèles à cet axe).



→ Droites parallèles (p. 75)

Symétrie centrale

Le mouvement qui amène f en f' est une symétrie centrale.



Une symétrie centrale est aussi une homothétie de rapport -1 et une rotation de 180° .

Une symétrie centrale porte sur tous les points du plan et pas seulement sur ceux dont on cherche l'image.

Du français...
« La figure f a pour image la figure f' par la symétrie de centre O . »

... à l'écriture mathématique

$$f \xrightarrow{S(O)} f'$$

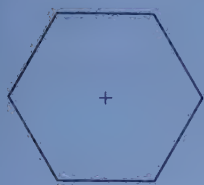
Déplacer une figure par une symétrie de centre O , c'est faire tourner cette figure d'un demi-tour autour du point O .

→ Propriétés des isométries et des homothéties du plan (p. 103), Rotation (p. 108), Homothétie (p. 109)

Centre de symétrie

Une figure peut...

... avoir un centre de symétrie



Hexagone régulier

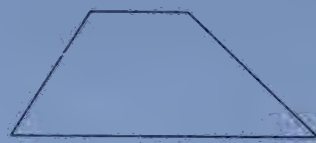


Cercle

... ne pas avoir de centre de symétrie

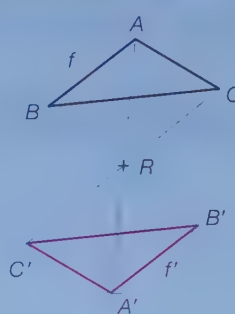
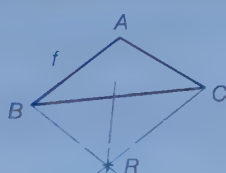
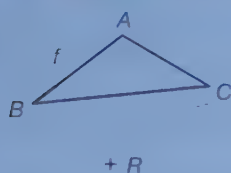


Triangle équilatéral



Trapeze

Construction de l'image d'une figure par une symétrie centrale



■ Construction de l'image de la figure f par la symétrie de centre R .

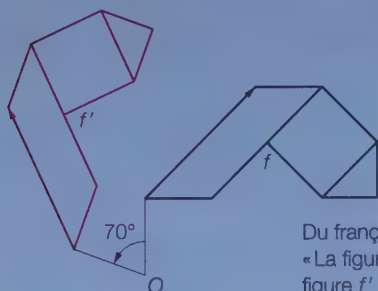
1 Tracer les droites passant par le point R et par chacun des sommets de f .

2 Construire le point A' tel que :
 A, R et A' soient alignés ;
 R soit entre A et A' ;
 $RA' = RA$.
 Faire de même pour B' et C' .
 Relier ensuite les points A', B' et C' .

Toutes les propriétés de la symétrie centrale peuvent être utilisées pour construire l'image d'une figure. Il existe donc d'autres méthodes.

Rotation

Le mouvement qui amène f en f' est une rotation.



Du français...
« La figure f a pour image la figure f' par la rotation de centre O et d'angle $+70^\circ$. »

... à l'écriture mathématique
 $f \xrightarrow{R(O; +70^\circ)} f'$

rotation

rota (latin) : la roue

rotare (latin) : tourner comme une roue

Une rotation porte sur tous les points du plan et pas seulement sur ceux de la figure dont on cherche l'image.

Déplacer une figure par une rotation de centre O , c'est faire tourner cette figure autour du point O .

Le signe placé devant la mesure de l'angle indique le sens de rotation :



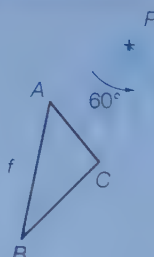
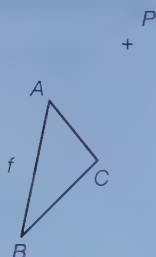
sens positif



sens négatif

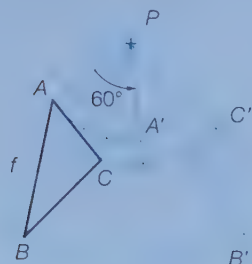
→ Propriétés des isométries et des homothéties du plan (p. 103)

Construction de l'image d'une figure par une rotation

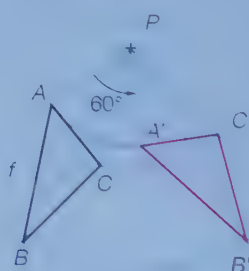


Toutes les propriétés de la rotation peuvent être utilisées pour construire l'image d'une figure. Il existe donc d'autres méthodes.

■ Construction de l'image de la figure f par la rotation de centre P et d'angle $+60^\circ$.



1 Construire des angles de 60° , de sommet P tels qu'un de leurs côtés passe par un sommet de f (attention au sens de rotation).



2 Construire les points A' , B' et C' tels que :

$$PA = PA' \quad \text{et} \quad \widehat{APA'} = 60^\circ$$

$$PB = PB' \quad \text{et} \quad \widehat{BPB'} = 60^\circ$$

$$PC = PC' \quad \text{et} \quad \widehat{CPC'} = 60^\circ$$

3 Relier ensuite les points A' , B' et C' .

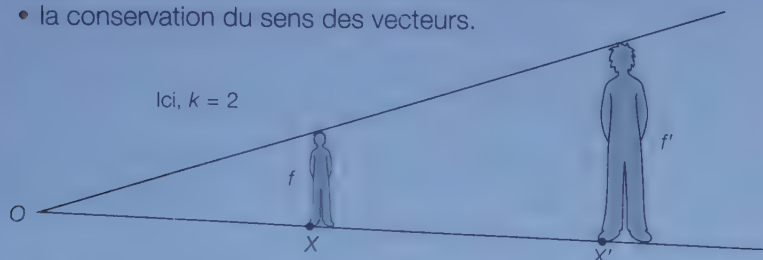
→ Angle (p. 77)

Homothétie

Une homothétie est une transformation du plan qui conserve les directions et qui possède un seul point fixe appelé centre. L'homothétie de centre O et de rapport k est notée $\mathcal{H}(O; k)$.

On distingue quatre types d'homothéties :

- L'agrandissement direct, caractérisé par :
 - une figure image plus grande que celle de départ ;
 - la conservation du sens des vecteurs.

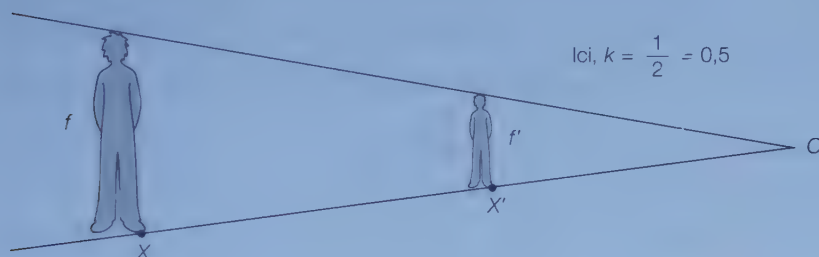


homothétie

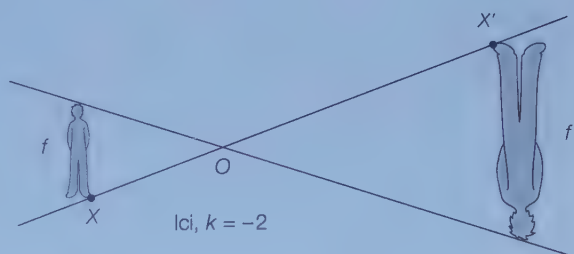
homos (grec) : même, semblable
thetos (grec) : posé en position semblable

Une homothétie porte sur tous les points du plan et pas seulement sur la figure dont on cherche l'image.

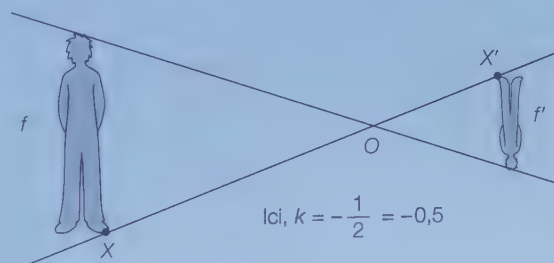
- La réduction directe, caractérisée par :
 - une figure image plus petite que celle de départ ;
 - la conservation du sens des vecteurs.



- L'agrandissement indirect, caractérisé par :
 - une figure image plus grande que celle de départ ;
 - le changement de sens des vecteurs.

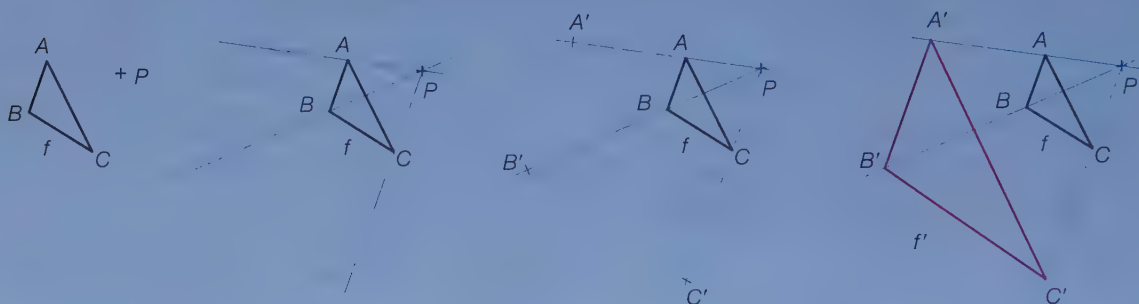


- La réduction indirecte, caractérisée par :
 - une figure image plus petite que celle de départ ;
 - le changement de sens des vecteurs.



Construction de l'image d'une figure par une homothétie

Lorsque le rapport d'homothétie est un nombre positif



■ Construction de l'image de la figure f par l'homothétie de centre P et de rapport $+2,5$.

1 Tracer des droites passant par le point P et par chacun des sommets de f .

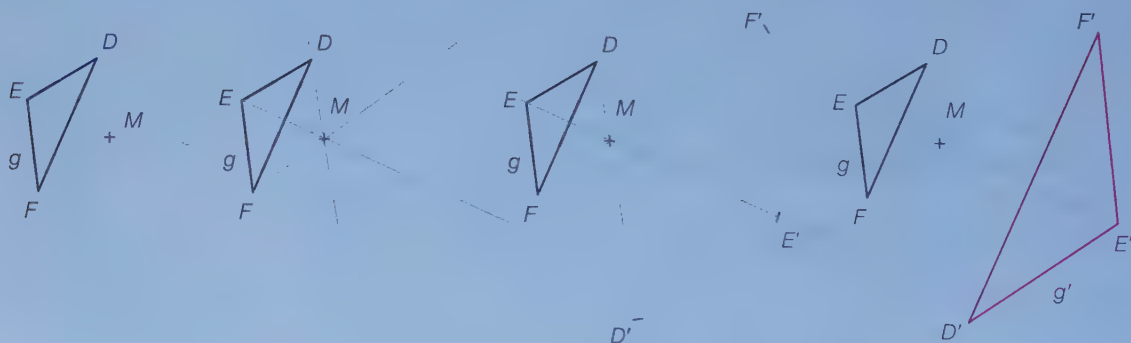
2 Construire le point A' tel que :
 P, A et A' soient alignés ;
 A soit situé entre P et A' ;
 $PA' = 2,5 \cdot PA$.
 Faire de même pour les points B' et C' .

3 Relier ensuite les points A', B' et C' .

Toutes les propriétés de l'homothétie peuvent être utilisées pour construire l'image d'une figure. Il existe donc d'autres méthodes.

ES

Lorsque le rapport d'homothétie est un nombre négatif



■ Construction de l'image de la figure g par l'homothétie de centre M et de rapport -2 .

1 Tracer des droites passant par le point M et par chacun des sommets de g .

2 Construire le point D' tel que :
 D, M et D' soient alignés ;
 M soit situé entre D et D' ;
 $MD' = 2 \cdot MD$.
 Faire de même pour les points E' et F' .

3 Relier ensuite les points D', E' et F' .

Homothétie – quelques observations

Les dimensions des triangles ABC et $A'B'C'$ sont proportionnelles :

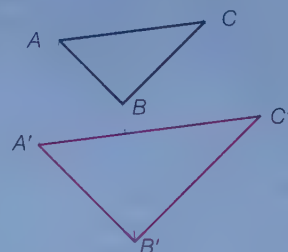
Dimensions de ABC (en cm)	1,2	1,6	2
Dimensions de $A'B'C'$ (en cm)	1,8	2,4	3

Le rapport d'homothétie est un facteur de proportionnalité

Le rapport d'homothétie est 1,5.

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{3}{2} = 1,5$$

➡ Proportionnalité (p. 41)



Rapport d'homothétie

Dans le cas d'une homothétie de centre O telle que l'image d'un point X est le point X' :

- la valeur absolue du rapport k d'homothétie est égale à $\frac{OX'}{OX}$;
- si les vecteurs $\overrightarrow{OX'}$ et $\overrightarrow{OX}$ ont le même sens, alors le rapport d'homothétie est positif ;
- si les vecteurs $\overrightarrow{OX'}$ et $\overrightarrow{OX}$ sont de sens contraire, alors le rapport d'homothétie est négatif.

Selon la valeur du rapport d'homothétie, plusieurs cas peuvent se présenter :

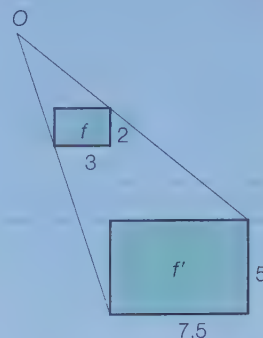
Valeur de k	$k < -1$	$k = -1$	$-1 < k < 0$	$0 < k < 1$	$k = 1$	$k > 1$
Type d'homothétie	agrandissement indirect	symétrie centrale ou rotation de 180°	réduction indirecte	réduction directe	identité	agrandissement direct

Exemple

Si une figure f a pour image une figure f' par une homothétie de rapport k , alors

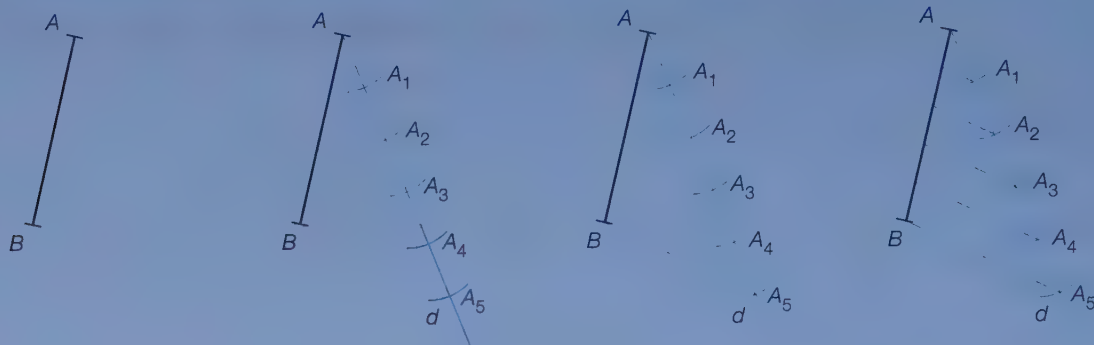
$$\frac{\text{Aire de } f'}{\text{Aire de } f} = k^2$$

$$\frac{\text{Aire de } f'}{\text{Aire de } f} = \frac{7,5 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 2,5 \cdot 2 \cdot 2,5}{3 \cdot 2} = 2,5 \cdot 2,5 = 2,5^2$$



➡ Valeur absolue (p. 13), Figures semblables (p. 113), Théorème de Thalès (p. 127)

Partage d'un segment en n parties isométriques



■ Partage du segment AB en cinq segments isométriques ($n = 5$).

1 Tracer une demi-droite Ad . Reporter sur Ad cinq segments isométriques de longueur quelconque.

2 Tracer le segment A_5B .

3 Tracer des parallèles à A_5B passant par les points A_4 , A_3 , A_2 et A_1 .

Il existe d'autres méthodes pour partager un segment en n parties isométriques.

→ Homothétie (p. 109), Figures semblables (p. 113), Théorème de Thalès (p. 127)

Similitude

Une similitude est la composition d'isométries ou d'homothéties.

similitude

similis (latin) : semblable, même

Exemple

La figure f a pour image la figure f'' par la rotation $\mathcal{R}(M; -150^\circ)$ suivie de l'homothétie $\mathcal{H}(N; +2)$

Notation

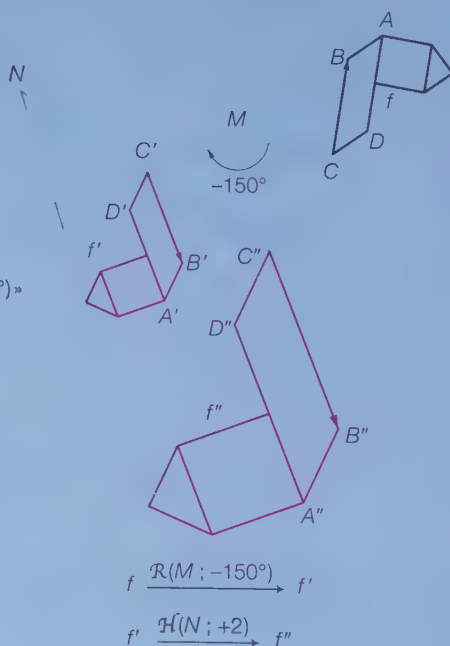
$$f \xrightarrow{\mathcal{H}(N; +2) \circ \mathcal{R}(M; -150^\circ)} f''$$

$\mathcal{H}(N; +2) \circ \mathcal{R}(M; -150^\circ)$ signifie « $\mathcal{H}(N; +2)$ après $\mathcal{R}(M; -150^\circ)$ »

On commence par $\mathcal{R}$ suivie de $\mathcal{H}$

La figure f'' est l'image de la figure f par une similitude dont le rapport est :

$$\frac{A''B''}{AB} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{C''D''}{CD} = \dots = 2$$



Une similitude est une transformation qui conserve la mesure des angles.

Une similitude est une transformation dans laquelle toutes les distances sont multipliées par un même nombre positif appelé rapport de similitude.

Par une similitude, une figure et son image ont la même forme, mais pas nécessairement les mêmes dimensions.

Une similitude porte sur tous les points du plan et pas seulement sur ceux de la figure dont on cherche l'image.

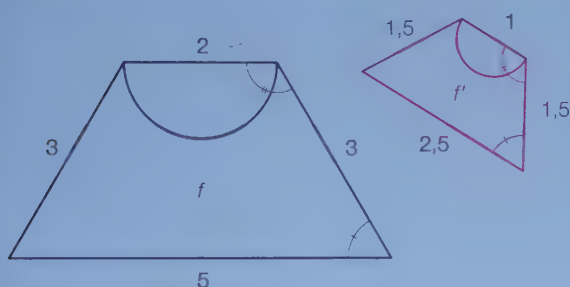
Par la composition de deux transformations du plan, chaque point du plan a pour image un point du plan.

La composition de deux transformations du plan est aussi une transformation du plan.

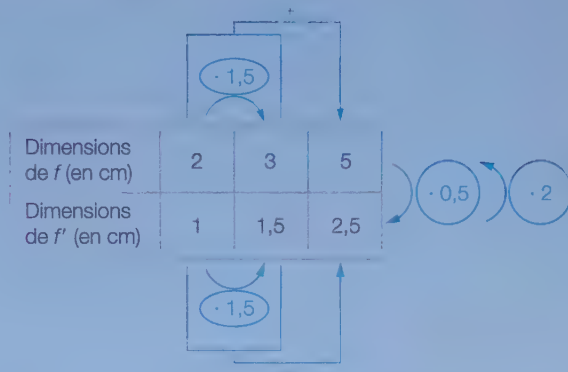
✚ Proportionnalité (p. 41), Transformations du plan (p. 101), Homothétie (p. 109), Figures semblables (p. 113)

Figures semblables

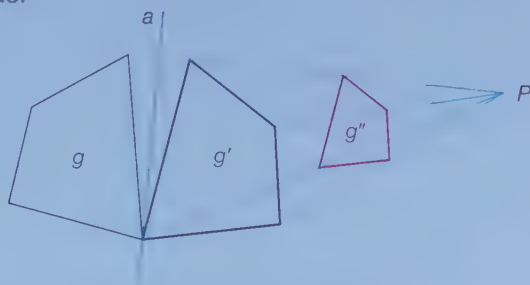
Deux figures sont semblables si l'on obtient les dimensions de l'une en multipliant (ou en divisant) celles de l'autre par un même nombre positif non nul et si on conserve les angles.



Les figures f et f' sont semblables



Deux figures sont semblables si elles sont images l'une de l'autre par une similitude.



Les figures g , g' et g'' sont semblables

$$g \xrightarrow{S(a)} g'$$

$$g' \xrightarrow{\mathcal{H}(P; 0,5)} g''$$

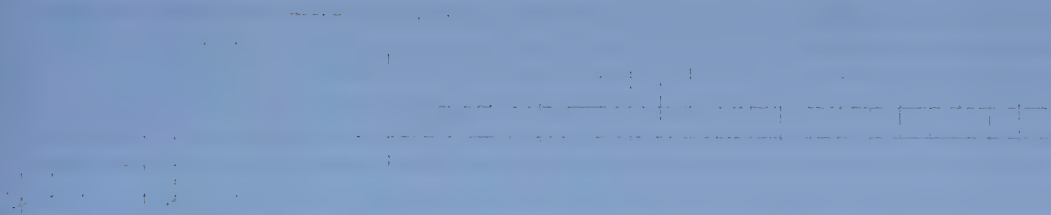
Si deux figures sont semblables alors leurs dimensions sont proportionnelles.

En multipliant les dimensions de la figure g par 0,5 (ou en les divisant par 2), on obtient celles de la figure g'' . Dans ce cas, le rapport de similitude est 0,5.

✚ Proportionnalité (p. 41), Cas de similitude des triangles (p. 87), Homothétie (p. 109), Similitude (p. 112), Théorème de Thalès (p. 127)

85

Le tableau ci-dessous résume les données de la page 114.



Grandeurs et mesures – GM

- Unités de mesure 120
- Périmètre et aire d'une surface .. 122
- Aire et volume de solides 124
- Théorèmes 126

Unités de mesure

Unités de longueur

Unité	Symbole
...	
kilomètre	km
hectomètre	hm
décamètre	dam
mètre	m
décimètre	dm
centimètre	cm
millimètre	mm
...	

$$\begin{aligned}
 1 \text{ km} &= 1\,000 \text{ m} = 10^3 \text{ m} \\
 1 \text{ hm} &= 100 \text{ m} = 10^2 \text{ m} \\
 1 \text{ dam} &= 10 \text{ m} = 10^1 \text{ m} \\
 1 \text{ m} &= 1 \text{ m} = 10^0 \text{ m} \\
 1 \text{ dm} &= 0,1 \text{ m} = 10^{-1} \text{ m} \\
 1 \text{ cm} &= 0,01 \text{ m} = 10^{-2} \text{ m} \\
 1 \text{ mm} &= 0,001 \text{ m} = 10^{-3} \text{ m}
 \end{aligned}$$

Il existe d'autres unités de longueur que celles du système métrique. Par exemple :

- le pouce : 2,54 cm
- le pied : 0,3048 m
- le mille marin : 1852 m
- l'année-lumière : $\sim 10^{13}$ km

Unités d'aire

Unité	Symbole
...	
kilomètre carré	km ²
hectomètre carré	hm ²
décamètre carré	dam ²
mètre carré	m ²
décimètre carré	dm ²
centimètre carré	cm ²
millimètre carré	mm ²
...	

$$\begin{aligned}
 1 \text{ km}^2 &= 1\,000\,000 \text{ m}^2 = 10^6 \text{ m}^2 \\
 1 \text{ hm}^2 &= 10\,000 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ m}^2 \\
 1 \text{ dam}^2 &= 100 \text{ m}^2 = 10^2 \text{ m}^2 \\
 1 \text{ m}^2 &= 1 \text{ m}^2 = 10^0 \text{ m}^2 \\
 1 \text{ dm}^2 &= 0,01 \text{ m}^2 = 10^{-2} \text{ m}^2 \\
 1 \text{ cm}^2 &= 0,0001 \text{ m}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2 \\
 1 \text{ mm}^2 &= 0,000\,001 \text{ m}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

Pour exprimer, par exemple, l'aire d'un terrain, d'une forêt, on utilise souvent les unités suivantes :

$$\begin{aligned}
 1 \text{ are (a)} &= 1 \text{ dam}^2 = 100 \text{ m}^2 \\
 1 \text{ hectare (ha)} &= 1 \text{ hm}^2 = 10\,000 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

Unités de volume

Unité	Symbole
...	
kilomètre cube	km ³
hectomètre cube	hm ³
décamètre cube	dam ³
mètre cube	m ³
décimètre cube	dm ³
centimètre cube	cm ³
millimètre cube	mm ³
...	

$$\begin{aligned}
 1 \text{ km}^3 &= 1\,000\,000\,000 \text{ m}^3 = 10^9 \text{ m}^3 \\
 1 \text{ hm}^3 &= 1\,000\,000 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ m}^3 \\
 1 \text{ dam}^3 &= 1\,000 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ m}^3 \\
 1 \text{ m}^3 &= 1 \text{ m}^3 = 10^0 \text{ m}^3 \\
 1 \text{ dm}^3 &= 0,001 \text{ m}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3 \\
 1 \text{ cm}^3 &= 0,000\,001 \text{ m}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3 \\
 1 \text{ mm}^3 &= 0,000\,000\,001 \text{ m}^3 = 10^{-9} \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

L'unité de volume pour le jaugeage des navires est le tonneau (2,83 m³).

Pour exprimer le volume d'un liquide ou d'un gaz, on peut aussi utiliser les unités de capacité :

capacité
capax (latin) : qui peut contenir

Unité	Symbole	
...		
kilolitre	kl	$1\text{ kl} = 1\,000\text{ l} = 10^3\text{ l}$
hectolitre	hl	$1\text{ hl} = 100\text{ l} = 10^2\text{ l}$
décalitre	dal	$1\text{ dal} = 10\text{ l} = 10^1\text{ l}$
litre	l	$1\text{ l} = 1\text{ l} = 10^0\text{ l}$
décilitre	dl	$1\text{ dl} = 0,1\text{ l} = 10^{-1}\text{ l}$
centilitre	cl	$1\text{ cl} = 0,01\text{ l} = 10^{-2}\text{ l}$
millilitre	ml	$1\text{ ml} = 0,001\text{ l} = 10^{-3}\text{ l}$
...		

Un baril (~159 l) est une mesure de capacité pour les produits pétroliers.

Les égalités suivantes permettent de passer d'une catégorie d'unité à l'autre :

$1\text{ kl} = 1\text{ m}^3$ $1\text{ l} = 1\text{ dm}^3$ $1\text{ ml} = 1\text{ cm}^3$

Unités de masse

Unité	Symbole	
...		
kilogramme	kg	$1\text{ kg} = 1\,000\text{ g} = 10^3\text{ g}$
hectogramme	hg	$1\text{ hg} = 100\text{ g} = 10^2\text{ g}$
décagramme	dag	$1\text{ dag} = 10\text{ g} = 10^1\text{ g}$
gramme	g	$1\text{ g} = 1\text{ g} = 10^0\text{ g}$
décigramme	dg	$1\text{ dg} = 0,1\text{ g} = 10^{-1}\text{ g}$
centigramme	cg	$1\text{ cg} = 0,01\text{ g} = 10^{-2}\text{ g}$
milligramme	mg	$1\text{ mg} = 0,001\text{ g} = 10^{-3}\text{ g}$
...		

$1\text{ tonne (t)} = 1\,000\text{ kg}$
 $1\text{ quintal (q)} = 100\text{ kg}$

Les Anglo-Saxons utilisent entre autres l'once (~28 g) et la livre (~454 g).

Unités de temps

La seconde (s), la minute (min), l'heure (h), le jour, ..., sont des unités de temps.

$1\text{ jour} = 24\text{ heures}$
 $1\text{ heure} = 60\text{ minutes} = 3\,600\text{ secondes}$
 $1\text{ minute} = 60\text{ secondes}$

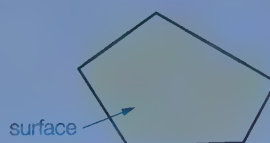
Dans les calculs commerciaux, en Suisse :
 $1\text{ année} = 12\text{ mois} = 360\text{ jours}$
 $1\text{ mois} = 30\text{ jours}$

Périmètre et aire d'une surface

Périmètre et aire d'un polygone

Le périmètre d'un polygone est la somme des longueurs des côtés du polygone.
C'est la mesure de son pourtour.

L'aire est la mesure de sa surface.



périmètre

peri (grec): autour

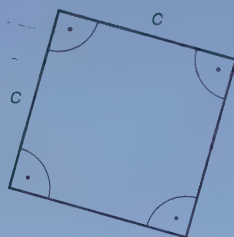
metron (grec): la mesure

Périmètre et aire d'un carré

$$p = 4 \cdot c$$

$$A = c \cdot c = c^2$$

c : mesure du côté



Exemple

Si $c = 3$

$$p = 4 \cdot 3 = 12$$

$$A = 3 \cdot 3 = 3^2 = 9$$

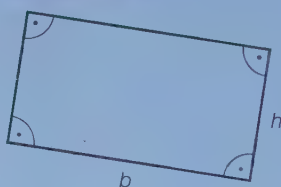
Périmètre et aire d'un rectangle

$$p = 2 \cdot (b + h)$$

$$A = b \cdot h$$

b : mesure d'une base

h : mesure de la hauteur
correspondant à cette base



Exemple

Si $b = 7$ et $h = 3$

$$p = 2 \cdot (7 + 3) = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 20$$

$$A = 7 \cdot 3 = 21$$

Périmètre et aire d'un losange

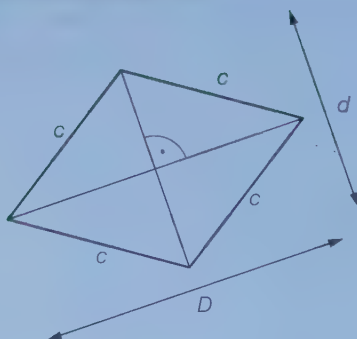
$$p = 4 \cdot c$$

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

c : mesure du côté

D : mesure de la grande diagonale

d : mesure de la petite diagonale



Exemple

Si $c = 5$, $d = 6$, $D = 8$

$$p = 4 \cdot 5 = 20$$

$$A = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$$

L'aire du losange peut aussi se calculer comme celle d'un parallélogramme.

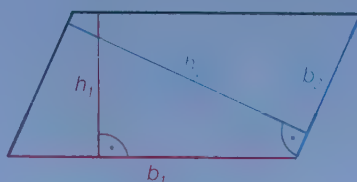
Périmètre et aire d'un parallélogramme

$$p = 2 \cdot (b_1 + b_2)$$

$$A = b_1 \cdot h_1 = b_2 \cdot h_2$$

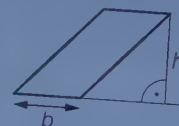
b_1, b_2 : mesures des bases

h_1, h_2 : mesures des hauteurs correspondantes



Attention!

La hauteur peut être à l'extérieur du parallélogramme.



Exemple

Si $b_1 = 10$, $h_1 = 6$

$$A = 10 \cdot 6 = 60$$

Périmètre et aire d'un trapèze

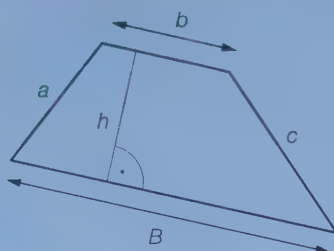
$$p = a + b + c + B$$

$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

B : mesure de la grande base

b : mesure de la petite base

h : mesure de la hauteur



Exemple

Si $B = 12$, $b = 5$, $h = 4$

$$A = \frac{12+5}{2} \cdot 4$$

$$= 8,5 \cdot 4 = 34$$

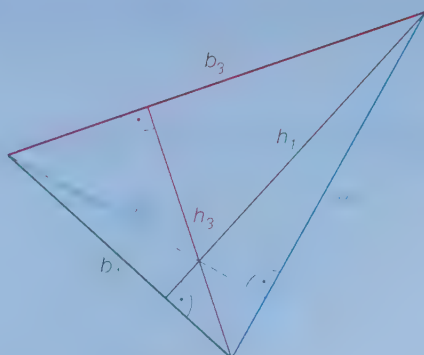
Périmètre et aire d'un triangle

$$p = b_1 + b_2 + b_3$$

$$A = \frac{b_1 \cdot h_1}{2} = \frac{b_2 \cdot h_2}{2} = \frac{b_3 \cdot h_3}{2}$$

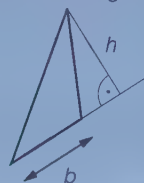
b_1, b_2, b_3 : mesures des bases

h_1, h_2, h_3 : mesures des hauteurs correspondantes



Attention!

La hauteur peut être à l'extérieur du triangle:



Exemple

Si $b_1 = 12$ et $h_1 = 7$

$$A = \frac{12 \cdot 7}{2} = 42$$

Périmètre et aire d'un disque

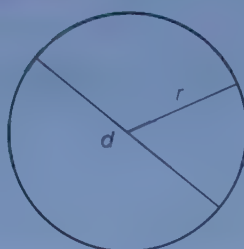
$$p = \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$A = \pi \cdot r^2$$

d : diamètre du cercle

r : rayon du cercle

$$\pi = 3,14159... \approx 3,14$$



Exemple

Si $r = 5$

$$p = \pi \cdot 10 = 2 \cdot \pi \cdot 5 \approx 31,4$$

$$A = \pi \cdot 5^2 = \pi \cdot 25 \approx 78,5$$

Longueur d'un arc de cercle et aire d'un secteur circulaire

Un secteur circulaire est une partie d'un disque limitée par deux rayons.

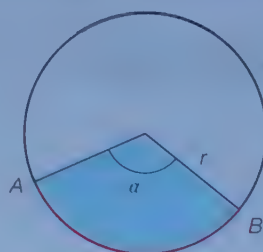
secteur

sectus (latin): coupé

sector (latin): celui qui coupe

$$\text{Longueur de l'arc } \widehat{AB} = 2\pi r \frac{\alpha}{360}$$

$$\text{Aire du secteur d'angle } \alpha = \pi r^2 \frac{\alpha}{360}$$

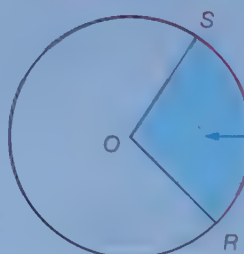


Exemple

Si $r = 6$ et $\alpha = 50^\circ$

$$\text{Longueur de l'arc } \widehat{AB} \approx 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot \frac{50}{360} \approx 5,24$$

$$\text{Aire du secteur d'angle } \alpha = \pi \cdot 6^2 \cdot \frac{50}{360} \approx 15,71$$



secteur
circulaire
limité par les
rayons OR
et OS

Attention!

Dans ces formules, l'angle doit être mesuré en degrés.

→ Cercle et disque (p. 90), Périmètre et aire d'un disque (p. 124)

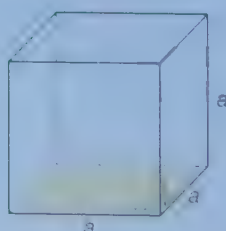
Aire et volume de solides

Aire et volume d'un cube

$$A = 6 \cdot a \cdot a = 6a^2$$

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

a : mesure de l'arête



Exemple

Si $a = 5$

$$A = 6 \cdot 5^2 = 6 \cdot 25 = 150$$

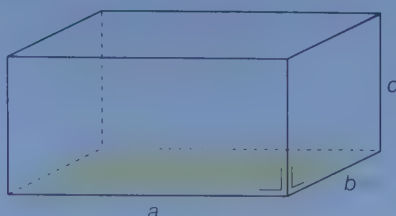
$$V = 5^3 = 125$$

Aire et volume d'un parallélépipède rectangle ou pavé droit

$$A = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c \\ = 2 \cdot (ab + ac + bc)$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

a , b et c sont les mesures des arêtes



Exemple

Si $a = 10$, $b = 3$, $c = 5$

$$A = 2 \cdot (30 + 50 + 15) \\ = 2 \cdot 95 = 190$$

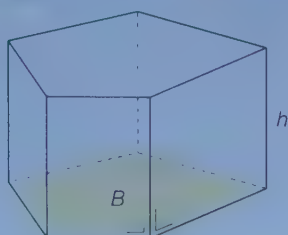
$$V = 10 \cdot 3 \cdot 5 = 150$$

Volume d'un prisme droit

$$V = B \cdot h$$

B : aire de la base

h : mesure de la hauteur



Exemple

Si $B = 50$ et $h = 2,5$

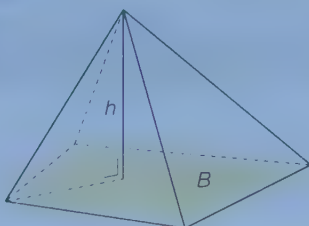
$$V = 50 \cdot 2,5 = 125$$

Volume d'une pyramide

$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$

B : aire de la base

h : mesure de la hauteur



Exemple

Si $B = 80$ et $h = 9$

$$V = \frac{80 \cdot 9}{3} = 240$$

Aire et volume d'un cylindre

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$$

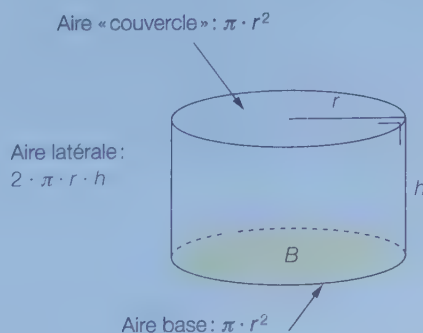
$$V = B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

r : rayon de la base

B : aire de la base

h : mesure de la hauteur

$\pi = 3,14159... \approx 3,14$



Exemple

Si $r = 5$ et $h = 4$

$$A = 2 \cdot \pi \cdot 5^2 + 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 4 \\ = 50\pi + 40\pi \\ = 90\pi \approx 282,74$$

$$V = B \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 4 \\ = 100\pi \approx 314,16$$

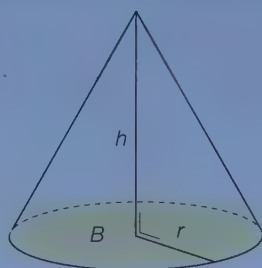
Volume d'un cône

$$V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

B : aire de la base

r : rayon de la base

h : mesure de la hauteur



Exemple

Si $r = 4$ et $h = 6$

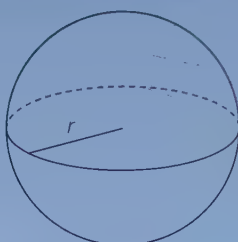
$$V = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 6}{3} = 32\pi \approx 100,5$$

Aire et volume d'une boule

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

r : rayon de la boule



Exemple

Si $r = 6$

$$A = 4 \cdot \pi \cdot 36 = 144 \cdot \pi \approx 452,4$$

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 216}{3} = 288 \cdot \pi \approx 904,8$$

Autre dénomination

On dit aussi que la surface extérieure de la boule est une sphère.

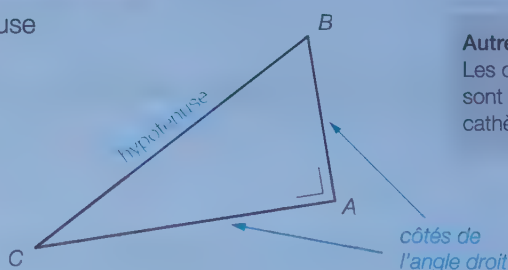
Théorèmes

Triangle rectangle – vocabulaire

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit.

C'est le plus long côté.

Un triangle rectangle en A est un triangle dont l'angle de sommet A mesure 90° .



Autre dénomination

Les côtés de l'angle droit sont parfois appelés les cathètes.

Le côté BC est l'hypoténuse du triangle rectangle. Les côtés AB et AC sont les côtés de l'angle droit.

Théorème de Pythagore

Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

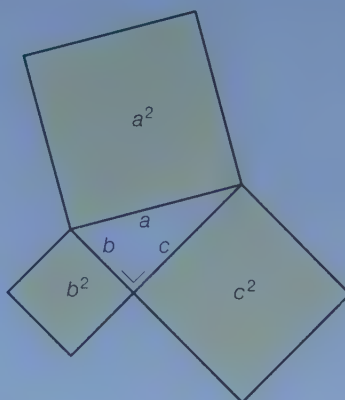
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Exemple

Si $b = 6$ et $c = 8$

alors $a^2 = 36 + 64 = 100$

$$a = \sqrt{100} = 10$$



Attention !

Ce théorème ne s'applique qu'aux triangles rectangles.

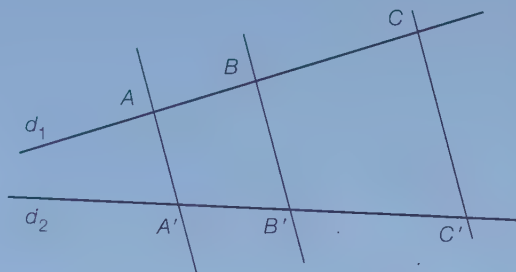
Réciproque du théorème de Pythagore

Si, dans un triangle, le carré de la mesure du plus long côté est égal à la somme des carrés des mesures des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

Théorème de Thalès

Cas général

Des parallèles déterminent sur des sécantes des segments proportionnels.



Les droites AA' , BB' et CC' sont parallèles
Les droites d_1 et d_2 sont sécantes

Exemples

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

Proportionnalité (p. 41)

Cas particulier

Dans cette figure, plusieurs rapports sont égaux.

Exemples

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB}$$

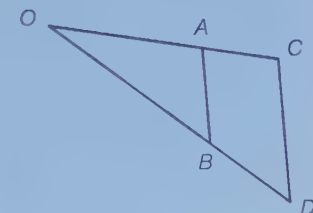
$$\frac{AC}{OA} = \frac{BD}{OB}$$

$$\frac{AC}{OC} = \frac{BD}{OD}$$

$$\frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB}$$

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$$

$$\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD}$$



Les segments AB et CD sont parallèles

Le triangle OAB a pour image le triangle OCD par l'homothétie de centre O

$$\text{et de rapport } k = \frac{OC}{OA}$$

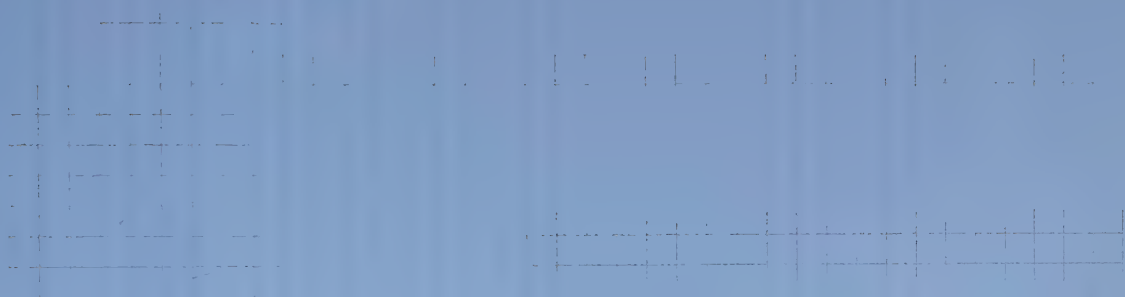
$$\triangle OAB \xrightarrow{\mathcal{H}(O; k)} \triangle OCD$$

On obtient les dimensions du triangle OCD en multipliant celles du triangle OAB par le nombre k

Les dimensions correspondantes de chaque triangle sont proportionnelles

Proportionnalité (p. 41), Homothétie (p. 109), Figures semblables (p. 113)







Recherche et stratégies – RS

- Le débat mathématique 134
- Problèmes 134
- Résolution d'un problème 137
- Stratégies de recherche 138

Le débat mathématique

Règles du débat mathématique

Le débat mathématique obéit à des règles bien précises.

En voici quelques-unes :

- Un énoncé est soit vrai, soit faux ; il n'y a pas d'exception.
- Quelques exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver que cet énoncé est vrai.
- Un contre-exemple suffit à prouver qu'un énoncé est faux.
- Une mesure sur un dessin ou une constatation « à vue d'œil » ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé géométrique est vrai ou faux.

➡ Contre-exemple (p. 136), Contradiction (p. 136)

Problèmes

Problème de recherche

Toute activité pour laquelle il n'y a pas de procédure immédiate de résolution est un problème de recherche.

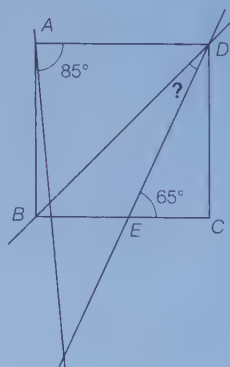
Il est constitué de données – renseignements divers, nombres, inconnues, etc. – et de contraintes, ainsi que d'un but à atteindre.

problème

problema (latin) issu de *πρόβλημα* (grec) : ce qu'on a devant soi, obstacle, tâche, sujet de controverse, problème

Exemples

1. Quel est le chiffre des unités de 7^{2011} ?
2. Dans le carré $ABCD$, on voudrait connaître l'angle marqué d'un point d'interrogation. Détermine-le.



➡ Procédure (p. 135), Etapes de résolution d'un problème (p. 137)

Narration de recherche

La narration de recherche est un texte qui a pour but d'expliquer les étapes de résolution mises en place ainsi que la solution trouvée – ou non – à autrui (camarade, enseignant, parents, etc.).

Ces quelques questions peuvent guider la rédaction :

- *Quel est le but à atteindre ?*
- *Par quoi avons-nous commencé ?*
- *Quelles étapes a-t-on définies ?*
- *Quelles conjectures (suppositions) avons-nous émises ?*
- *Comment et pourquoi les a-t-on gardées ou rejetées ?*
- *Quelles solutions avons-nous trouvées ?*
- *Quels calculs avons-nous faits ?*
- *Etc.*

Résolution

Ensemble d'étapes permettant la reconnaissance du but d'un problème, puis la réalisation d'une solution.

→ Etapes de résolution d'un problème (p. 137)

Stratégie

Planification et coordination d'un ensemble d'opérations en vue d'atteindre un but.

stratégie

strategia, στρατηγία (grec) : commandement d'une armée, d'où aptitude à commander une armée, qualités d'un général et manœuvre ou ruse de guerre

Procédure

Méthode, marche à suivre pour obtenir un résultat.

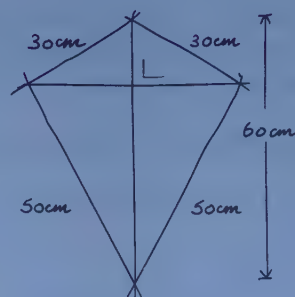
Souvent, diverses procédures peuvent être utilisées pour résoudre le même problème.

procédure

pro (latin) : aller en avant, avant
cedere (latin) : marcher, s'avancer

Croquis

Dessin fait rapidement, à main levée, sans recherche de détails. Il ne respecte pas les mesures, mais contient des informations (cotes, symboles, explications complémentaires) qui permettent de représenter fidèlement la figure et servir de support à la réflexion.



→ Représentation dans le plan (p. 68)

Conjecture

Une conjecture est une supposition sur « quelque chose qui semble vrai ».

Il faut ensuite démontrer qu'elle est soit vraie, soit fausse.

Exemple

Conjecture de Goldbach (mathématicien et historien russe, 1690-1764) :

« Tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers » est une conjecture célèbre dont on ne sait toujours pas si elle est vraie ou si elle est fausse ; à l'heure actuelle, on n'est pas parvenu à la démontrer.

En sciences de la nature, les termes *hypothèse* et *conjecture* sont utilisés comme deux synonymes.

En mathématiques, *hypothèse* n'a pourtant pas la même signification ; ce terme correspond à *ce qui est connu ou considéré comme connu*, par exemple un élément initial pour démontrer un théorème.

Contre-exemple

Exemple qui contredit une affirmation ; il suffit d'un seul contre-exemple pour déclarer fausse une affirmation.

Exemples

« Tous les nombres pairs sont des multiples de 4 » est une affirmation fausse car, par exemple, 6 est un nombre pair, mais n'est pas un multiple de 4.

« Tous les nombres premiers sont impairs » est une affirmation fausse, car 2 est premier et pair – seul et unique contre-exemple.

Contradiction

Il y a contradiction lorsque deux idées, deux énoncés ou actions s'excluent l'un l'autre.

Exemple

« Le triangle ABC est rectangle » et « le triangle ABC est équilatéral ».

Si... alors...

On utilise souvent, en mathématiques, la forme « si... alors... ».

L'expression qui vient juste après « si » est appelée *condition* et l'expression qui suit « alors » est appelée *conclusion*.

On obtient la réciproque d'un tel énoncé en inversant condition et conclusion ; la réciproque d'un énoncé vrai n'est pas toujours vraie.

Dédution : lorsque l'on va de la cause aux effets, du principe aux conséquences, du général au particulier. On peut ainsi poser une conclusion sur la base d'éléments dont on est sûr.

Induction : lorsque l'on cherche des lois générales à partir de l'observation de faits particuliers. On peut ainsi, dans certains problèmes, induire une conjecture sur la base d'exemples.

Exemples

Énoncé 1 :	Si un triangle possède trois côtés isométriques, alors il possède trois angles isométriques.
Réciproque 1 :	Si un triangle possède trois angles isométriques, alors il possède trois côtés isométriques.
Énoncé 2 :	Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
Réciproque 2 :	Si , dans un triangle, le carré de la mesure du plus long côté est égal à la somme des carrés des mesures des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.
Énoncé 3 :	Si un nombre se termine par 2, alors il est divisible par 2.
Réciproque 3 fausse :	Si un nombre est divisible par 2, alors il se termine par 2.

→ Théorème de Pythagore (p. 127)

Résolution d'un problème

Étapes de résolution d'un problème

1 Appropriation de l'énoncé

« comprendre le problème pour en identifier le but »

- Lire attentivement et complètement le problème afin de se mettre en situation, de donner du sens au texte et de se construire une représentation de l'énoncé.
- Trier les informations (*utiles ou pas, ce qu'on connaît, ce qu'on doit chercher, etc.*).
- Représenter les informations sous forme de croquis, tableau, schéma, etc., pour visualiser la situation, si cela est possible et utile.
- Décrire clairement le but à atteindre.

2 Traitement des données

« concevoir un plan », puis « mettre le plan à exécution » et « revenir sur la solution »

- Déterminer une stratégie de recherche et élaborer les procédures nécessaires à sa mise en œuvre : *Quelles seront les étapes de la résolution ? Quels outils mathématiques va-t-on pouvoir utiliser ? Dans quel ordre ? Etc.*



- Au cours de ces étapes, effectuer quelques contrôles : *Le plan est-il adapté à la représentation du problème que l'on s'est construite ? Les calculs sont-ils exacts ? Etc.*
- Lorsque l'on pense avoir résolu le problème, contrôler la solution proposée : refaire le cheminement et vérifier le raisonnement suivi, regarder si la réponse est possible.

3 Communication des recherches et du résultat

« mettre en forme les résultats pour que quiconque puisse comprendre le travail effectué »

- Décrire les procédures mises en place en vue de faire comprendre la démarche à autrui.

A cette fin, utiliser les termes propres au langage mathématique ainsi qu'une représentation et une notation adaptées et correctes.

➡ Problème de recherche (p. 134), Narration de recherche (p. 135),
Résolution (p. 135), Procédure (p. 135)

Dans le cadre d'une narration de recherche, on rédige un compte-rendu complet de la recherche, y compris les mauvaises pistes, les essais qui n'ont rien donné ou encore les fausses conjectures ainsi que les raisons qui ont conduit à les abandonner.

Stratégies de recherche

1 Analogie

Se souvenir d'un problème que l'on a déjà fait et qui ressemble à celui qu'on est en train de résoudre. Ainsi, on peut s'en inspirer afin d'élaborer une solution.

De très nombreuses stratégies de recherche existent, en mathématiques comme dans les sciences de façon générale ; sont présentés ici uniquement quelques exemples mobilisés lors de différentes activités des ouvrages *Mathématiques 9-10-11*.

Chacune des stratégies peut être utilisée seule, mais plusieurs d'entre elles peuvent être associées.

2 Tâtonnement

Faire différents essais, plus ou moins ciblés, au besoin un peu au hasard, afin de trouver une solution au problème. Les essais ne correspondant pas aux conditions de départ sont rejetés.

Cette stratégie est souvent accompagnée de courtes déductions, de brèves appréciations, de constatations ou encore de raccourcis ; elle est donc mise en lien avec d'autres stratégies.

➡ Etude systématique de cas (p. 140), Démarche scientifique (p. 141)

Chaînage avant

Regarder toutes les conséquences que l'on peut tirer des données du problème, ce que l'on peut en déduire ou calculer directement.

Exemple : problème à résoudre avec les outils de 9^e année.

Énoncé

« Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$, sachant que $\widehat{CAB} = 40^\circ$, $\widehat{BCS} = 30^\circ$ et que la droite CS est la bissectrice de $\widehat{BCA}$? »

Procédure

Qu'est-ce que je cherche ?

La valeur de l'angle $\widehat{ABC}$.

Qu'est-ce que je connais ?

- Les mesures des angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{BCS}$.
- CS est la bissectrice de $\widehat{BCA}$.
- La somme des angles d'un triangle vaut 180° .

Qu'est-ce que je peux en déduire ?

CS est la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$ donc :

$$\widehat{SCA} = \widehat{BCS} = 30^\circ \text{ et}$$

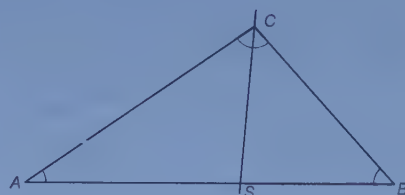
$$\widehat{BCA} = \widehat{SCA} + \widehat{BCS} = 60^\circ.$$

La somme des angles d'un triangle vaut 180° donc :

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{CAB} - \widehat{BCA} = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ.$$

Solution

L'angle $\widehat{ABC}$ vaut 80° .



Chaînage arrière

Partir du but à atteindre et chercher quels sont les éléments manquants et comment les déterminer. Pour cela, on fait appel à des outils mathématiques ou logiques :

- définitions, propriétés, théorèmes ;
- croquis, dessins à l'échelle ;
- formules, équations, opérations, règles de calcul, etc. ;
- si... alors...

Exemple : problème à résoudre avec les outils de 9^e année.

Énoncé

« Détermine la longueur du segment BD . »

Procédure

Qu'est-ce que je cherche ?

La longueur du segment BD .

Est-il possible de calculer cette longueur directement à partir de ce que je connais (chaînage avant) ?

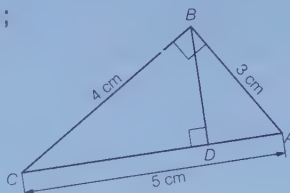
Non, aucun outil ne me permet de trouver BD directement.

Je reviens alors au but à atteindre : Qu'est-ce que je cherche ?

Une longueur qui manque.

Quels sont les outils à disposition me permettant de trouver cette longueur manquante ?

- formules d'aire, de périmètre ;
- propriétés des figures géométriques.



Que peut-on dire de BD ?

BD est la hauteur, issue de B , du triangle rectangle ABC .

La hauteur est une mesure intervenant dans le calcul d'aire ; la base correspondant à cette hauteur BD est connue ($AC = 5$ cm).

Si on connaît l'aire et la base d'un triangle, alors on peut calculer la hauteur correspondante, ici BD .

Comment calculer cette aire d'une autre façon ?

Le triangle ABC étant rectangle en B , les côtés AB et BC sont perpendiculaires ; ils sont donc base et hauteur correspondante.

$$A_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 ; \text{ l'aire de } ABC \text{ vaut } 6 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Alors : } A_{ABC} = 6 = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{5 \cdot BD}{2}$$

$$5 \cdot BD = 12$$

$$BD = 12 : 5 = 2,4$$

Solution

Le segment BD mesure 2,4 cm.

→ Croquis (p. 136), Si... alors... (p. 137)

Etude systématique de cas

Dans les situations pour lesquelles on pense qu'il existe un nombre restreint de possibilités de solutions, étudier tous les cas possibles et chercher à déterminer la(les)quelle(s) satisfait(ont) aux contraintes du problème.

Exemple

Énoncé

Un facteur donne son courrier à un professeur de maths. Il discute de la pluie et du beau temps, puis le professeur propose un petit problème au facteur :

« J'ai trois filles qui ont leur anniversaire le même mois. La somme de leurs âges est égal au numéro que l'on aperçoit sur la maison d'en face. Le produit de leurs âges est égal à 36. Quel est l'âge de chacune de mes filles ? »

Le facteur répond : « Il me manque une information pour pouvoir répondre. »

Le professeur : « Vous avez raison, la voici : mon aînée n'a pas de sœur jumelle... »

Et le facteur lui donne l'âge de ses filles.

Au fait, quel est l'âge de chacune de ses filles ?



Procédure

Les nombres à disposition ainsi que les informations proposées ne permettent pas de trouver directement ces âges. Après quelques essais plus au moins au hasard, il semble que le nombre de possibilités n'est pas très grand et que l'on peut essayer de les noter.

On cherche trois nombres naturels
dont le produit est égal à 36 :

Les sommes respectives
sont :

$1 \cdot 1 \cdot 36$	$1 + 1 + 36 = 38$
$1 \cdot 2 \cdot 18$	$1 + 2 + 18 = 21$
$1 \cdot 3 \cdot 12$	$1 + 3 + 12 = 16$
$1 \cdot 4 \cdot 9$	$1 + 4 + 9 = 14$
$1 \cdot 6 \cdot 6$	$1 + 6 + 6 = 13$
$2 \cdot 2 \cdot 9$	$2 + 2 + 9 = 13$
$2 \cdot 3 \cdot 6$	$2 + 3 + 6 = 11$
$3 \cdot 3 \cdot 4$	$3 + 3 + 4 = 10$

Huit cas possibles.

Comme le facteur connaît le numéro de la maison d'en face et qu'il a besoin d'un renseignement supplémentaire, cela signifie que seules les sommes égales sont des solutions possibles, soit (1 ; 6 ; 6) et (2 ; 2 ; 9).

La dernière indication « mon aînée n'a pas de sœur jumelle » entraîne que l'on doit éliminer (1 ; 6 ; 6).

Solution

La solution est : les jumelles ont 2 ans et l'aînée 9 ans.

**Démarche scientifique**

Commencer par faire des essais et les organiser.

Sur cette base, émettre des conjectures et les tester sur plusieurs cas.

En cas d'échec, poser d'autres conjectures et recommencer la procédure.

Si cela est possible, démontrer que la conjecture est valable pour tous les cas.

Pour que la démarche soit complète, il faut démontrer que la conjecture est toujours valable, ce qui demande souvent des outils mathématiques qui dépassent ceux abordés dans le cadre de *Mathématiques 9-10-11*.

Exemple**Énoncé**

« Poignées de main. Dans un groupe de n personnes, chacune serre, une seule fois, la main de toutes les autres. Combien y a-t-il eu de poignées de mains échangées ? »

Procédure

Pour 2 personnes A et B : 1 poignée (A ; B).

Pour 3 personnes A, B et C : 3 poignées (A ; B) ; (A ; C) ; (B ; C).

Pour 4 personnes A, B, C et D : 6 poignées (A ; B) ; (A ; C) ; (A ; D) ; (B ; C) ; (B ; D) ; (C ; D).

Pour 5 personnes A, B, C, D et E : 10 poignées.



Cela peut être modélisé à l'aide d'un tableau :

- la diagonale est forcément vide (la personne ne serre pas sa propre main) ;
- les autres cases vides représentent des situations déjà prises en compte : (B ; A) est identique à (A ; B).

	A	B	C	D	E
A	X				
B	(A ; B)	X			
C	(A ; C)	(B ; C)	X		
D	(A ; D)	(B ; D)	(C ; D)	X	
E	(A ; E)	(B ; E)	(C ; E)	(D ; E)	X

	A	B	C	D	E
A	X				
B	1	X			
C	2	3	X		
D	4	5	6	X	
E	7	8	9	10	X

5 lignes

Le nombre de cases grises est égal à la moitié du produit du nombre de lignes par le nombre de colonnes auquel on soustrait le nombre de cases de la diagonale, à savoir 5 cases.

Nombre de cases grises : $(5 \cdot 5 - 5) : 2 = 10$.

Pour 6 personnes A, B, C, D, E et F :

	A	B	C	D	E	F
A	X					
B	(A ; B)	X				
C	(A ; C)	(B ; C)	X			
D	(A ; D)	(B ; D)	(C ; D)	X		
E	(A ; E)	(B ; E)	(C ; E)	(D ; E)	X	
F	(A ; F)	(B ; F)	(C ; F)	(D ; F)	(E ; F)	X

6 lignes

On compte donc 15 poignées. En appliquant le même raisonnement que précédemment, le nombre de cases grises vaut : $(6 \cdot 6 - 6) : 2 = 15$.

Conjecture : le nombre de poignées de main pour n personnes vaut $[(n \cdot n - n) : 2]$.

Le test de cette généralisation fonctionne pour tous les exemples déjà traités ; on peut la tester et elle fonctionne pour de nombreux autres exemples. On ne trouve pas non plus de contre-exemple.

	1	...	n
1	X		
...		X	
n			X

n lignes

Si le tableau comporte n lignes et n colonnes, alors le nombre de cases colorées vaut : $(n \cdot n - n) : 2 = \frac{n^2 - n}{2}$

Solution

Pour n personnes, il y a $\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ poignées de main.



Modélisation

Créer une représentation simplifiée d'un problème (schéma, croquis, tableau, graphique, simulation, etc.) dans le but de le comprendre et d'élaborer une solution.

Exemple

Le tableau utilisé dans la résolution du problème « Poignées de main » (ci-dessus) est une modélisation de la situation proposée.

1000000
100000
10000
1000
100
10
1

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

45

46

47

48

49

50

51

52

53

54

55

56

57

58

59

60

61

62

63

64

65

66

67

68

69

70

71

72

73

74

75

76

77

78

79

80

81

82

83

84

85

86

87

88

89

90

91

92

93

94

95

96

97

98

99

100

101

102

103

104

105

106

107

108

109

110

111

112

113

114

115

116

117

118

119

120

121

122

123

124

125

126

127

128

129

130

131

132

133

134

135

136

137

138

139

140

141

142

143

144

145

146

147

148

149

150

151

152

153

154

155

156

157

158

159

160

161

162

163

164

165

166

167

168

169

170

171

172

173

174

175

176

177

178

179

180

181

182

183

184

185

186

187

188

189

190

191

192

193

194

195

196

197

198

199

200

201

202

203

204

205

206

207

208

209

210

211

212

213

214

215

216

217

218

219

220

221

222

223

224

225

226

227

228

229

230

231

232

233

234

235

236

237

238

239

240

241

242

243

244

245

246

247

248

249

250

251

252

253

254

255

256

257

258

259

260

261

262

263

264

265

266

267

268

269

270

271

272

273

274

275

276

277

278

279

280

281

282

283

284

285

286

287

288

289

290

291

292

293

294

295

296

297

298

299

300

301

302

303

304

305

306

307

308

309

310

311

312

313

314

315

316

317

318

319

320

321

322

323

324

325

326

327

328

329

330

331

332

333

334

335

336

337

338

339

340

341

342

343

344

345

346

347

348

349

350

351

352

353

354

355

356

357

358

359

360

361

362

363

364

365

366

367

368

369

370

371

372

373

374

375

376

377

378

379

380

381

382

383

384

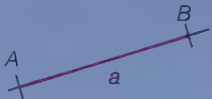
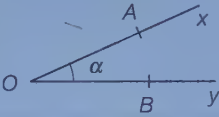
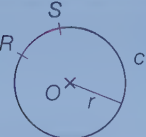
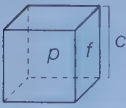
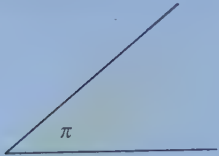
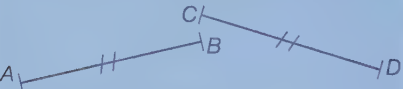
385

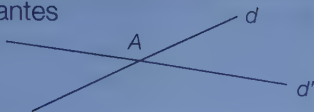
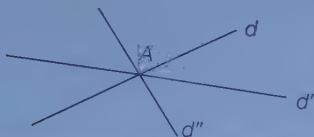
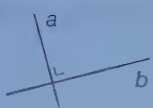
386

387

Conventions et notations

Objet, notion, propriété	Notations, conventions et commentaires
Qui est proche de...	$\approx$
Inférieur à... (plus petit que...)	$<$
Supérieur à... (plus grand que...)	$>$
Inférieur ou égal à...	$\leq$
Supérieur ou égal à...	$\geq$
Couple de nombres	$(a ; b)$
Ensemble	$\{a ; b ; \dots\}$
Ensemble vide	$\emptyset = \{\}$
Ensemble de solutions	$S = \{x_1 ; x_2 ; \dots\}$
Est élément de..., n'est pas élément de... ou	$\in, \notin$
Appartient à..., n'appartient pas à...	
Ensembles de nombres	$\mathbb{N}$: ensemble des nombres naturels $\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels
Symboles représentant, numériquement parlant,	
«ce qu'il y a de plus grand»	$+\infty$
«ce qu'il y a de plus petit»	$-\infty$
Valeur absolue d'un nombre x	$ x $
Opposé d'un nombre x	$-x$
Inverse d'un nombre x ($x \neq 0$)	x^{-1} ou $\frac{1}{x}$
Pour cent	$\%$
Pour mille	‰
Fonction	$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
On trouve aussi les notations:	$x \longmapsto y = \dots$ $x \longmapsto f(x) = \dots$

Objet, notion, propriété		Notations, conventions et commentaires	
Point	$+_A$ $\times_P$	le point P	le point A
Segment		le segment AB ou le segment a AB et a désignent aussi bien le segment que sa mesure exemple: $AB = 2,4$ cm ou $a = 24$ mm	
Droite		la droite CD la droite d	
Demi-droite		la demi-droite issue de Q passant par R la demi-droite QR la demi-droite Qe	
Vecteur		le vecteur $\vec{v}$ le vecteur $\overrightarrow{MN}$	
Angle		l'angle $\widehat{AOB}$ l'angle α $\widehat{AOB}$ désigne aussi bien l'angle que sa mesure	l'angle $\widehat{xOy}$ l'angle $\widehat{AOy}$
Figure du plan		le quadrilatère $PQRS$ le quadrilatère f	la figure f le périmètre p et l'aire A le côté PS
Cercle		le cercle c le cercle $c(O; r)$ $\widehat{RS}$ désigne aussi bien l'arc que sa mesure	l'arc $\widehat{RS}$
Figure de l'espace		le polyèdre p l'arête c	la face f le volume V
Plan		le plan π	
Isométrie de segments		$AB = CD$ des segments isométriques peuvent être marqués par un même symbole	
Isométrie d'angles		$\alpha = \beta$ des angles isométriques peuvent être marqués par un même symbole	

Objet, notion, propriété	Notations, conventions et commentaires	
Sécantes 	deux droites d et d' possédant un seul point d'intersection A	
Concourantes 	plusieurs droites d , d' et d'' possédant un seul point d'intersection A	
Parallèles 	les droites e et f sont parallèles $e \parallel f$	
Perpendiculaires 	sur ce dessin, l'angle droit formé par les droites a et b est noté à l'aide du signe $\perp$; parfois, il est signalé à l'aide des symboles $\sqcap$ ou $\sqcup$ $a \perp b$	
Isométries appliquées à une figure f	translation	$f \xrightarrow{T(\vec{v})} f'$
	symétrie axiale	$f \xrightarrow{S(d)} f'$
	rotation	$f \xrightarrow{R(O; +120^\circ)} f'$
	symétrie centrale	$f \xrightarrow{S(O)} f'$
Homothétie	homothétie	$f \xrightarrow{H(O; k)} f'$
Composition de transformations	la composition des transformations f et g peut-être notée $g \circ f$; on commencera par la transformation f , puis la transformation g	

Alphabet grec

Majuscules	Minuscules	En français	Majuscules	Minuscules	En français
A	α	alpha	N	ν	nu
B	β	bêta	Ξ	ξ	xi
Γ	γ	gamma	Ο	$\omicron$	omicron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
E	ϵ	epsilon	Ρ	ρ	rhô
Z	ζ	dzêta	Σ	σ	sigma
H	η	êta	T	τ	tau
Θ	θ	thêta	Υ	υ	upsilon
I	ι	iota	Φ	φ	phi
K	κ	kappa	X	χ	khi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	mu	Ω	ω	oméga

Table des matières

Nombres et opérations – NO

■ Généralités	10
Ensembles de nombres	10
Droite numérique	10
Ordre croissant	11
Ordre décroissant	11
Opérations – vocabulaire	11
Propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$	12
Priorités des opérations	12
Moyenne de nombres	13
Valeur absolue	13
Opposé d'un nombre	13
Inverse d'un nombre	14
■ Nombres naturels	14
Nombre naturel	14
Multiple	14
Multiple commun et ppcm	14
Recherche du ppcm de deux nombres naturels	15
Critères de divisibilité	15
Diviseur	15
Diviseur commun et pgcd	16
Recherche du pgcd de deux nombres naturels	16
Nombre premier	16
Liste des nombres premiers inférieurs à 1000	17
Décomposition en produit de facteurs premiers	17
Nombres premiers entre eux	18
■ Nombres relatifs	18
Nombre entier relatif	18
Addition de nombres relatifs	18
Écriture simplifiée d'une somme de nombres relatifs	19
Soustraction de nombres relatifs	19
Multiplication de nombres relatifs	19
Division de nombres relatifs	19
■ Nombres rationnels	20
Nombre rationnel	20
Nombre rationnel périodique	20
Nombre décimal	21
Écriture décimale	21
Représentation de nombres décimaux sur une droite graduée	21
Addition et soustraction de nombres décimaux	22
Multiplication de nombres décimaux	22
Division d'un nombre décimal par un autre nombre décimal	23
Approximation d'un nombre	23
Chiffres significatifs d'un nombre	24
Écriture fractionnaire ou fraction	24
Transformation d'une écriture fractionnaire en écriture décimale	24

Transformation d'une écriture décimale en écriture fractionnaire	25
Simplification de fractions	25
Amplification de fractions	25
Addition et soustraction de fractions	26
Multiplication de fractions	26
Division d'une fraction par une autre fraction	27

■ Nombres réels	27
Nombre réel	27
Nombre irrationnel	27
Différentes écritures d'un nombre	27

■ Puissances et racines	28
Puissance	28
Puissances d'exposant négatif	28
Puissances de dix	28
Propriétés des puissances	29
Notation scientifique	29
Racine	29
Propriétés des racines	30

■ Probabilités	30
Probabilité	30

Fonctions et algèbre – FA

■ Fonctions	38
Fonction	38
Représentations d'une fonction f	38
Croissance et décroissance d'une fonction	39
Fonction constante	39
Fonction linéaire	40
Propriétés d'une fonction linéaire	40
Proportionnalité	41
Pourcentage	41
Echelle	42
Pente d'un terrain	43
Pente d'une droite	43
Vitesse	44
Masse volumique	44
Fonction affine	45
Fonction quadratique	45
Fonction puissance n -ième	46
Fonction racine n -ième	47
Fonction homographique	47
Proportionnalité inverse	48
Fonction exponentielle de base a	48
■ Diagrammes	49
Diagramme	49
Diagramme cartésien	49
Diagramme en colonnes, diagramme en bâtons	49
Diagramme en barre, diagramme circulaire	50
Diagramme figuratif	50

■ **Calcul littéral** 51

Expression littérale 51

Expression littérale « en fonction de x » 51

Conventions d'écriture d'une expression littérale 51

Monôme 51

Coefficient, partie littérale et degré d'un monôme 52

Monômes semblables 52

Addition et soustraction de monômes semblables 53

Multiplication de monômes 53

Polynôme 53

Réduire un polynôme 54

Degré d'un polynôme 54

Ordonner un polynôme 54

Addition de polynômes 54

Opposé d'un polynôme 55

Soustraction de polynômes 55

Multiplication de polynômes 55

Quelques identités remarquables 55

Factorisation de polynômes 56

■ **Equations** 56

Equation 56

Inconnue 56

Résoudre une équation 56

Degré d'une équation d'inconnue x 57

Solution(s) d'une équation 57

Equations équivalentes 58

Equations – règles d'équivalence 58

Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue 58

Résolution d'une équation du deuxième degré à une inconnue 59

Système d'équations 60

Résolution d'un système du premier degré de deux équations à deux inconnues 60

Espace – ES

■ **Généralités** 68

Représentation dans le plan 68

Repérage d'un point dans le plan 69

Repérage d'un point dans l'espace 69

Représentations dans l'espace 70

Distance entre deux points 71

Distance d'un point à une droite 71

Distance entre deux droites parallèles 72

Distance d'un point à un cercle 72

Lieu géométrique 72

■ **Droites** 73

Droite 73

Demi-droite 73

Segment 73

Droites sécantes 73

Droites concourantes 74

Droites perpendiculaires 74

Construction de la perpendiculaire à une droite passant par un point 74

Droites parallèles 75

Construction de la parallèle à une droite passant par un point 75

Vecteur 76

Addition de deux vecteurs 76

Multiplication d'un vecteur par un nombre 76

■ **Angles** 77

Angle 77

Mesure d'un angle 77

Classement des angles 78

Report d'un angle à l'aide du compas 78

Angles adjacents 79

Angles complémentaires 79

Angles supplémentaires 79

Angles isométriques 79

Angle au centre d'un cercle, angle inscrit dans un cercle 80

Cercle de Thalès d'un segment 80

Arc capable 81

Construction d'un arc capable 81

■ **Polygones** 82

Polygone 82

Diagonale d'un polygone 82

Figure polygonale et figure convexe 82

Polygone régulier 83

Somme des angles d'un polygone 84

Polygone inscrit dans un cercle 84

Triangle 85

Somme des angles d'un triangle 85

Triangles remarquables 85

Classement des triangles 86

Segment moyen d'un triangle 86

Cas d'isométrie des triangles 86

Cas de similitude des triangles 87

Quadrilatère 87

Quadrilatères remarquables 88

Classement des quadrilatères 89

Somme des angles opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle 90

■ **Cercles et disques** 90

Cercle et disque 90

Construction du centre d'un cercle 91

■ **Solides et espace** 91

Polyèdre 91

Quelques polyèdres 92

Polyèdre – relation d'Euler 93

Autres solides 93

Plan 93

Plans parallèles 94

Plans perpendiculaires 94

Droite parallèle à un plan 94

Périmètre et aire d'un losange	123
Périmètre et aire d'un parallélogramme	123
Périmètre et aire d'un trapèze	123
Périmètre et aire d'un triangle	123
Périmètre et aire d'un disque	124
Longueur d'un arc de cercle et aire d'un secteur circulaire	124
■ Aire et volume de solides	124
Aire et volume d'un cube	124
Aire et volume d'un parallélépipède rectangle ou pavé droit	125
Volume d'un prisme droit	125
Volume d'une pyramide	125
Aire et volume d'un cylindre	125
Volume d'un cône	126
Aire et volume d'une boule	126
■ Théorèmes	126
Triangle rectangle – vocabulaire	126
Théorème de Pythagore	127
Théorème de Thalès	127

■ Le débat mathématique	134
Règles du débat mathématique	134
■ Problèmes	134
Problème de recherche	134
Narration de recherche	135
Résolution	135
Stratégie	135
Procédure	135
Croquis	136
Conjecture	136
Contre-exemple	136
Contradiction	136
Si... alors.....	137
■ Résolution d'un problème	137
Etapes de résolution d'un problème	137
■ Stratégies de recherche	138
Analogie	138
Tâtonnement	138
Chaînage avant	139
Chaînage arrière	139
Etude systématique de cas	140
Démarche scientifique	141
Modélisation	142
■ Conventions et notations	147
■ Alphabet grec	149
Table des matières	152
Index	155

Index

A

abscisse d'un point	69
abscisses (axe)	69
addition	11-12
addition de deux vecteurs	76
addition de fractions	26
addition de monômes semblables	53
addition de nombres décimaux	22
addition de nombres relatifs	18
addition de polynômes	54
adjacents (angles)	79
adjacents (côtés)	88
affine (fonction)	45
agrandissement d'une figure	42, 109-113
aigu (angle)	78
aire (figures du plan et de l'espace)	122-124
aire (unités)	120
alphabet grec	149
alternes-externes (angles)	79
alternes-internes (angles)	79
amplification de fractions	25
analogie	138
angle	77-81
angle au centre d'un cercle, angle inscrit dans un cercle	80
angle au centre d'un polygone régulier	84
angle de rotation	108
angle d'un polygone	83
angles (classement)	78
approximation d'un nombre	23
arc capable	81
arc de cercle	90
are	120
arête d'un polyèdre	91
arrondir un nombre	23
associativité	12
axe de symétrie d'un angle	96
axe de symétrie d'une figure	95, 105
axe x , axe y , axe z	69

B

base (cône, cylindre, prisme droit, pyramide)	125-126
--	---------

base (parallélogramme, rectangle, trapèze, triangle)	124-125
base dix	21
base d'une puissance	28
binôme	53
bissectrice d'un angle	96-97
boule	93, 126

C

capacité (unités)	121
carré	83, 88-89
carré parfait	28
carré (périmètre et aire)	122
carré (propriétés)	88
centaine	21
centi	28
centième	21, 28
centre d'un cercle	90-91
centre d'une homothétie	109
centre d'une sphère	93
centre de gravité	98
centre de rotation	108
centre de symétrie d'une figure	107
cercle	80, 90-91, 99
cercle (périmètre)	124
cerf-volant (propriétés)	88
chaînage	139
chiffre	10
chiffre significatif	24
circonscrit (cercle)	99
coefficient d'un monôme	52
coefficient de linéarité	40
coefficient de proportionnalité	41
combinaisons linéaires (méthode de résolution)	61
commutativité	12
complémentaires (angles)	79
concourantes (droites)	74
cône (propriétés)	93
cône (volume)	126
conjecture	136
constante (fonction)	39
construction d'un arc capable	81
construction de l'image d'une figure par une homothétie	110
construction de l'image d'une figure par une rotation	108

construction de l'image d'une figure par une symétrie axiale	105
construction de l'image d'une figure par une symétrie centrale	107
construction de l'image d'une figure par une translation	104
construction de la bissectrice d'un angle	97
construction de la médiatrice d'un segment	96
construction de la parallèle à une droite passant par un point	75
construction de la perpendiculaire à une droite passant par un point	74
construction des tangentes à un cercle	100
construction du centre d'un cercle	91
contradiction	136
contre-exemple	136
conventions d'écriture (expression littérale)	51
conventions et notations	147-149
convexe (figure)	82
coordonnées	69
corde	90
correspondants (angles)	79
côté d'un angle	77
côté d'un polygone	82
critères de divisibilité	15
croissance d'une fonction	39
croissant (ordre)	11
croquis	68, 136
cube (aire et volume)	124
cube (propriétés)	92
cylindre (aire et volume)	125
cylindre (propriétés)	93

D

déca	28
décagone régulier	83
déci	28
décimal (nombre)	21
décimale	21
décimale (écriture)	21
décimale (partie)	21
décomposition en produit de facteurs premiers	17
décroissance d'une fonction	39

- décroissant (ordre) 11
- degré 77
- degré d'un monôme 52
- degré d'un polynôme 54
- degré d'une équation 57
- démarche scientifique 141
- demi-droite 73
- dénivellation 43
- dénominateur 24
- développement d'un polyèdre 71
- diagonale d'un polygone 82
- diagrammes 49-50
- diagramme cartésien 49
- diagramme circulaire 50
- diagramme en barre 50
- diagramme en bâtons 49
- diagramme en colonnes 49
- diagramme figuratif 50
- diamètre 90
- différence 11
- direction d'un vecteur 76, 109
- directions (conservation) 103
- disque 90
- disque (aire) 124
- distance d'un point à un cercle 72
- distance d'un point à une droite 71
- distance entre deux droites parallèles 72
- distance entre deux points 71
- distance horizontale 43
- distributivité 12
- dividende 11
- diviseur 11, 15
- diviseur commun 16
- divisibilité (critères) 15
- division 11
- division (fractions) 27
- division (nombres décimaux) 23
- division (nombres relatifs) 19
- dixième 21, 28
- dizaine 21
- dodécaèdre régulier 92
- dodécagone régulier 83-84
- droit (angle) 78
- droite 73-76
- droite numérique 10
- droite graduée 21
- droite parallèle à un plan 94
- droite perpendiculaire à un plan 95
- droites concourantes 74
- droites parallèles 75
- droites perpendiculaires 74
- droites remarquables d'un triangle 97-98
- droites sécantes 73
- E**
- échelle 42, 68
- écriture décimale 21
- écriture décimale finie 27
- écriture décimale périodique 27
- écriture fractionnaire 24
- ellipse 72
- enneagone régulier 83
- ensemble d'arrivée d'une fonction 38
- ensemble de départ d'une fonction 38
- ensemble de solutions d'une équation 57
- ensembles de nombres 10
- entier relatif (nombre) 10, 18-19
- entière (partie) 21
- équation 56-61
- équations équivalentes 58
- équation (résolution) 58-61
- équidistant 95
- équilatéral (triangle) 85-86
- euclidienne (division) 11
- Euler (relation) 93
- exponentielle (fonction) 48
- exposant 28
- expression littérale 51
- F**
- face d'un polyèdre 91
- facteur d'un produit 11
- facteur de linéarité 40
- facteur de proportionnalité 41, 111
- facteurs premiers (décomposition) 16
- factorisation de polynômes 56
- fer de lance (propriétés) 88
- figure convexe 82
- figure plane 82
- figure non convexe 82
- flèche 90
- fonction 38-40, 45-48
- formules de calcul de périmètres, d'aires et de volumes 122-126
- fraction 24
- fraction irréductible 25
- fuyante (arête) 70
- G**
- giga 28
- graduation d'une droite 21
- graduation d'un rapporteur 77
- H**
- hauteur (cône, cylindre, prisme droit, pyramide) 125-126
- hauteur (parallélogramme, rectangle, trapèze, triangle) 98, 122-123
- hectare 120
- hecto 120-121
- hendécagone régulier 83
- heptagone régulier 83
- hexagone régulier 83
- homographique (fonction) 47
- homothétie 101, 109-111
- homothétie (propriétés) 103
- hyperbole 47
- hypoténuse 85, 126-127
- I**
- icosaèdre régulier 92
- identité (fonction) 40
- identités remarquables 55
- inconnue 56
- inscrit (angle) 80
- inscrit (cercle) 97, 99
- inscrit (polygone) 83
- inverse d'un nombre 12, 14
- inversement proportionnelles (grandeurs) 48
- inversement proportionnelles (suites) 48
- irrationnel (nombre) 27
- irréductible (fraction) 25
- isocèle (trapèze) 89
- isocèle (triangle) 85-86
- isométries 101
- isométries (propriétés) 103
- isométriques (angles) 79
- isométriques (segments) 73
- K**
- kilo 28
- L**
- lieu géométrique 72
- ligne d'horizon 70
- linéaire (fonction) 40
- longueur (unités) 120

longueurs (conservation)	102
losange (périmètre et aire)	122
losange (propriétés)	88

M

masse (unités)	121
masse volumique	44
maximum d'une fonction	46
médiane d'un triangle	98
médiatrice d'un segment	95, 99
méga	28
membre d'une équation	56
mesure d'un angle	77
mesures des angles (conservation)	102
micro	28
milli	28
milliard	28
milliardième	28
millième	21, 28
millier	21
million	28
millionième	28
minimum d'une fonction	46
modélisation	142
monôme	51-53
moyenne de nombres	13
multiple	14
multiple commun	14-15
multiplication	11-12
multiplication d'un vecteur par un nombre	76
multiplication de fractions	26
multiplication de monômes	53
multiplication de nombres décimaux	22
multiplication de nombres entiers relatifs	19
multiplication de polynômes	55

N

nano	28
naturel (nombre)	10, 14
neutre (élément)	12
nombre	10
nombre décimal	21-23
nombre entier relatif	10, 18
nombre relatif	18-19
nombre irrationnel	27
nombre naturel	10, 14-18
nombre premier	16-18

nombre rationnel	10, 20-27
nombre réel	10, 27
nombres premiers (liste)	17
non convexe (angle)	78
notation scientifique	29
numérateur	24
numération décimale	21

O

obtus (angle)	78
octaèdre régulier	92
octogone régulier	83-84
opérations dans $\mathbb{R}$	12
opérations (vocabulaire)	11
opposé d'un nombre	12-13
opposé d'un polynôme	55
opposés (côtés)	88-89
opposés (vecteurs)	76
opposés par le sommet (angles)	79
ordonnée (d'un point)	69
ordonnées (axe)	69
ordonner un polynôme	54
ordre croissant	11
ordre décroissant	11
orientation (conservation)	102-103
origine d'une demi-droite	77
origine d'un repère	69
orthocentre	98

P

parabole	45-46
parallépipède rectangle (aire et volume)	125
parallépipède rectangle (propriétés)	92
parallèles (droite et plan)	94
parallèles (droites)	75
parallèles (plans)	94
parallélisme (conservation)	102-103
parallélogramme (périmètre et aire)	123
parallélogramme (propriétés)	88-89
parenthèses (rôle)	12
partage d'un segment en n parties isométriques	112
partie littérale d'un monôme	52
pavé droit (aire et volume)	125
pavé droit (propriétés)	92
pentagone régulier	83-84
pente d'un terrain	43

pente d'une droite	43
périmètre (figures du plan)	122-124
période	20
périodique (nombre)	20
perpendiculaires (droite et plan)	95
perpendiculaires (droites)	74
perpendiculaires (plans)	94
perspective artistique	70
perspective cavalière	70
perspective isométrique	70
pgdc	16
pi	124-126, 149
plan	42, 93-95
plane (figure)	82
plans parallèles	94
plans perpendiculaires	94
plat (angle)	78
plein (angle)	78
point de fuite	70
polyèdre	91-93
polygone	82-84
polygone inscrit dans un cercle	83-84
polygone régulier	83-84
polynôme	53-56
pourcentage	41
ppmc	14-15
préfixes	28
premier (nombre)	16-18
premiers entre eux (nombres)	18
priorités des opérations	12
prisme (propriétés)	92
prisme droit (propriétés)	92
prisme droit (volume)	125
probabilité	30
problème de recherche	134
procédure	135
produit	11
produit (propriété des fonctions linéaires)	40
projections	71
proportionnalité inverse	48
proportionnalité	41
proportionnelles (grandeurs)	41
proportionnelles (suites)	41
propriétés d'une fonction linéaire	40
puissance	28
puissances (propriétés)	29
puissances de dix	28
puissance n -ième (fonction)	46
pyramide (propriétés)	92

pyramide (volume)	125
Pythagore (théorème)	127

Q

quadratique (fonction)	45-46
quadrilatère	87-90
quadrilatère inscrit dans un cercle (propriétés)	90
quadrilatères (classement)	89
quadrilatères remarquables	88-89
quotient	11

R

racine n -ième (fonction)	47
racine	29
racine carrée	29
racines (propriétés)	30
rapport d'homothétie	111
rapport de deux nombres	24
rapport de similitude	112-113
rapporteur	77
rationnel (nombre)	10, 20-27
rayon	90
rectangle (périmètre et aire)	122
rectangle (propriétés)	88
rectangle (trapèze)	89
rectangle (triangle)	85-86
réduction d'une figure	42, 109-113
réduire un polynôme	54
réel (nombre)	10
règles d'équivalence (équations)	58
régulier (polygone)	83-84
relatif (nombre)	10
relation d'Euler	93
rentrant (angle)	78
repérage dans l'espace	69
repérage dans le plan	69
report d'un angle à l'aide du compas	78
représentation dans le plan	68
représentation d'une fonction	38
résolution d'équations	56-61
reste d'une division	11
rhomboïde (propriétés)	88
rotation	101, 103, 108
rotation (propriétés)	103

S

schéma	68
scientifique (notation)	29

sécantes (droites)	73
secteur circulaire	124
segment	73, 112
segment moyen d'un triangle	86
semblables (figures)	113
semblables (monômes)	52
sens d'un vecteur	76
sens de rotation	108
sens des vecteurs (conservation)	102-103
si...alors...	137
signe prédicatoire	13
significatifs (chiffres)	24
similitude (propriétés)	102
similitude	102, 112-113
simplification de fractions	25
solutions d'une équation	57
somme	11
somme des angles d'un polygone	84
somme des angles d'un triangle	83, 85
somme (écriture simplifiée)	19
somme (propriété des fonctions linéaires)	40
sommet d'un angle	77
sommet d'un polyèdre	91
sommet d'un polygone	82
sommet d'une parabole	46
soustraction	11
soustraction de fractions	26
soustraction de monômes semblables	53
soustraction de nombres décimaux	22
soustraction de nombres relatifs	19
soustraction de polynômes	55
sphère (aire et volume)	126
sphère (propriétés)	93
stratégie	135
substitution (méthode de résolution)	60
suites inversement proportionnelles	48
suites proportionnelles	41
supplémentaires (angles)	79
symétrie axiale	101, 103, 104-105
symétrie axiale (propriétés)	106
symétrie centrale	103, 106-107
symétrie centrale (propriétés)	103
symétriques (figures)	105
système d'équations	60
système d'équations (résolution)	60-61
système orthonormé	69

T

tangente	100
tâtonnement	138
temps (unités)	121
termes d'un polynôme	53
termes d'une somme	11
tétraèdre régulier	92
Thalès (cercle)	80
Thalès (théorème)	127
théorèmes	126-127
transformation du plan	101-111
translation	103-104
translation (propriétés)	103
trapèze (périmètre et aire)	123
trapèze (propriétés)	89
triangle	85-87
triangles (cas de similitude)	87
triangles (cas d'isométrie)	86-87
triangles (classement)	86
triangle (périmètre et aire)	123
triangles remarquables	85
trinôme	53

U

unité	21
unités de mesure	120-121

V

valeur absolue	13, 18, 111
variable	39
vecteur	76
vitesse	44
volume (figures de l'espace)	124-126
volume (unités)	120-121

Fractions

$$\begin{array}{r} \overset{\div 2}{\cancel{16}} \quad \overset{\div 2}{\cancel{8}} \quad \overset{\div 2}{\cancel{4}} \quad \overset{\div 2}{\cancel{2}} \\ \hline 72 \quad 36 \quad 18 \quad 9 \end{array}$$

$$\frac{26}{57}$$

$$\frac{59}{71}$$

$$\frac{11}{224}$$

$$\frac{11}{224}$$

$$\frac{11}{224}$$

$$\frac{11}{224}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \right)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \right)$$



ISBN 978-2-606-01383-7 | 936001A5



9 782606 013837

N° Cataro 022244-2015