

Marc Gourion

mathématiques

Terminales

C_{et} E
nouveaux programmes

tome 2

ÉTIQUETTE AMOVIBLE

698 411 0005 1 388
SERVICE DE DOCUMENTATION

DU SECOND CYCLE
THE TORONTO FRENCH SCHOOL
3229 YONGE STREET
TORONTO M4N 2L3
99401 CANADA

NOUVELLE COLLECTION FERNAND NATHAN

COLLECTION MARC GOURION

MARC GOURION
Professeur, Lycée
de la Madeleine - Paris

JACQUES FERNALD
Professeur, Lycée
de la Madeleine - Paris

JEAN-PAUL
Professeur
de la Madeleine - Paris

MATHÉMATIQUES

Terminales C et E

TOME II

Algèbre
Géométrie

Nouveaux programmes

Fernand Nathan



Digitized by the Internet Archive
in 2023 with funding from
Kahle/Austin Foundation

COLLECTION MARC GOURION

MARC GOURION
Professeur agrégé
au lycée A-Calmette - Nice

JACQUES CHEVALLET
Professeur agrégé
au lycée Henri-IV - Paris

CHRISTIAN LIXI
Professeur
au lycée Henri-IV - Paris

MATHÉMATIQUES

Terminales C et E

TOME II

Algèbre Géométrie

Nouveaux programmes

Fernand Nathan

Sommaire

<i>Avant-propos</i>	3
<i>Programme</i>	4
1. Nombres complexes	7
2. Espaces vectoriels	40
3. Applications linéaires	79
4. Calcul barycentrique	118
5. Applications affines	134
6. Angles orientés	170
7. Isométries du plan	183
8. Similitudes directes du plan Applications $z \mapsto f(z)$	216
9. Isométries de l'espace	239
10. Coniques	263
11. Géométrie descriptive	298
<i>Problèmes posés au concours général</i>	311
<i>Index</i>	314

Avant-propos

Cet ouvrage est strictement conforme au nouveau programme applicable à la rentrée de 1983.

Comme dans le Tome 1, tous les exercices ou problèmes sont classés à la fin de chaque chapitre suivant l'ordre des paragraphes du chapitre avec indication du thème. On trouvera également des exercices ou problèmes de révision sur tout le chapitre et les chapitres précédents.

Exceptionnellement nous avons mis une étoile à des exercices un peu difficiles.*

En règle générale, nous avons respecté les notations des énoncés posés au Baccalauréat. Il en résulte des changements de notations auxquels le lecteur doit s'habituer.

*Nous attirons l'attention sur un recueil de « **Quelques notions fondamentales** » que nous avons rassemblées au début du Tome 1 et que le lecteur pourra consulter à tout moment.*

Tout en développant l'Algèbre linéaire et la Géométrie analytique, ce livre remet à l'honneur la Géométrie « pure ». En effet, celle-ci fait appel à l'intuition, à la vision dans l'espace. L'intérêt de l'élève est souvent mis en éveil par une construction ou un problème de Géométrie. On évitera ainsi la monotonie du calcul analytique et ses automatismes, certes efficaces, mais conduisant à la « robotisation » de l'élève.

Cet ouvrage contient de très nombreuses figures. Mais on n'oubliera pas que, si une figure permet de visualiser une question, d'apporter une aide dans la compréhension d'un raisonnement, ce raisonnement doit être construit rigoureusement et non pas déduit d'une simple lecture de la figure.

Nous accueillerons toujours avec reconnaissance les remarques et suggestions que les collègues et tous les utilisateurs du livre voudront bien nous faire. Nous les en remercions par avance.

Les auteurs.

Programme

des classes terminales C et E

Les 5 premières parties sont dans le tome 1.

6. Nombres complexes

a) Le corps des nombres complexes (aucune méthode n'est imposée dans cette introduction). Bijection $(a, b) \mapsto a + bi$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$. Représentation géométrique d'un nombre complexe; affixe d'un point, d'un vecteur. Nombres complexes conjugués. Module; inégalité triangulaire; module d'un produit. Nombres complexes de module 1; argument d'un nombre complexe non nul, notation $re^{i\varphi}$; relation $e^{i\varphi}e^{i\varphi'} = e^{i(\varphi+\varphi')}$. Dérivée de $t \mapsto e^{it}$.

b) (Compléments de trigonométrie.) Formule de Moivre. Exemples de linéarisation de polynômes trigonométriques. Conversion de produits en sommes et de sommes en produits. Réduction de $a \cos x + b \sin x$ (par $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$).

c) Racines n -ièmes d'un nombre complexe; groupe des racines n -ièmes de l'unité, interprétation géométrique. Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré.

7. Algèbre linéaire

Les définitions d'un espace vectoriel et d'une application linéaire ont été vues en Première, on les complètera par celle d'un sous-espace vectoriel. Il s'agit de mettre ces notions en œuvre sur des exemples variés d'espaces de dimension finie, en s'appuyant sur l'étude du modèle fondamental $\mathbb{R}^n$; dans les exercices et problèmes l'entier n sera numériquement fixé (de façon raisonnable).

a) Opérations dans $\mathbb{R}^n$, base canonique : Étude des combinaisons linéaires d'une famille de p éléments de $\mathbb{R}^n$; cette étude conduit à dégager : La notion de sous-espace vectoriel engendré. La représentation, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, d'une famille finie par une matrice. La détermination d'une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ par les images des éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, et par conséquent par la matrice de ces images dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On remarquera que la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Les matrices n'ayant ici qu'un rôle représentatif, il est exclu de développer le calcul matriciel : somme et produit de matrices sont hors du programme.

b) Interprétations d'un système linéaire de n équations à p inconnues : Recherche des décompositions d'un vecteur. Recherche des antécédents de ce vecteur dans une application linéaire. Dans $\mathbb{R}^n$: familles finies génératrices, familles finies liées, libres; bases.

c) Opérations élémentaires $L_i \mapsto L_i + \lambda L_j$ ($i \neq j$) sur les lignes d'une matrice. Méthode du pivot de Gauss (recherche d'une forme triangulaire de la matrice); sa mise en œuvre pour déterminer si une famille finie de vecteurs est une base, est libre, est génératrice.

Cette étude permet d'obtenir les résultats fondamentaux suivants :

Toute base de $\mathbb{R}^n$ a exactement n éléments. Toute famille libre de $\mathbb{R}^n$ a au plus n éléments, et c'est une base si et seulement si elle a n éléments. Toute famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ a au moins n éléments, et c'est une base si et seulement si elle a n éléments.

Théorème de la base incomplète.

d) Exemples numériques de résolution d'un système d'équations linéaires par opérations élémentaires sur les lignes.

e) Espaces vectoriels de dimension finie : Bases. Isomorphisme avec $\mathbb{R}^n$ d'un espace vectoriel muni d'une base comprenant n vecteurs. Dimension.

Un endomorphisme injectif (resp. surjectif) d'un espace vectoriel de dimension finie est bijectif. Sous-espaces vectoriels supplémentaires; projections, symétries.

8. Géométrie (Terminale C)

On continue de travailler dans le plan et l'espace considérés en Seconde et en Première. On dispose des espaces vectoriels associés; il n'est donc pas nécessaire de modéliser un espace affine en général.

a) [Plan et espaces] : Calcul barycentrique. Étant donné n points pondérés (A_i, α_i) , étude des fonctions

$$M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \quad \text{et} \quad M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \|\overrightarrow{MA_i}\|^2.$$

Applications affines :

Une application de l'ensemble des vecteurs de l'espace dans lui-même est dite affine quand elle est de la forme

$$\vec{v} \mapsto \vec{A} + \varphi(\vec{v}),$$

où φ est linéaire.

Dans l'espace pointé en O, une application $M \mapsto M'$ est affine si l'application $\overrightarrow{OM} \mapsto \overrightarrow{OM'}$ est affine (définition indépendante du choix du point O).

Caractérisation des applications affines par la conservation des barycentres. Image d'une droite, d'un plan, d'une partie convexe par une application affine; conservation du parallélisme.

On montrera que les isométries sont des applications affines conservant le produit scalaire. En plus des translations et des homothéties les élèves ont à connaître les symétries, orthogonales ou non, les affinités; on leur fera utiliser ces transformations dans de nombreux problèmes de constructions et de lieux géométriques.

b) [Géométrie plane]. Mesures, dans le plan orienté, de l'angle orienté d'un couple de droites. Condition pour que quatre points soient cocycliques.

c) [Géométrie plane] :

Composition de rotations et translations, groupe des déplacements.

Composition d'un déplacement et d'une symétrie orthogonale; antidéplacements. Sur des exemples, recherche du groupe des isométries conservant une configuration donnée.

Composition de déplacements et d'homothéties, groupe des similitudes directes.

Exemples de transformation définie par une application complexe $z \mapsto f(z)$: cas des similitudes directes; exemple de transformation non affine.

d) [Géométrie dans l'espace] :

Exemples simples d'isométries de l'espace laissant fixe un point donné.

Groupe des rotations d'axe donné; on établira qu'une rotation est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des plans.

A titre d'exemples de composition : composée de deux rotations d'axes coplanaires; composée d'une rotation d'axe D par une translation conservant D (vissage d'axe D).

e) [Géométrie plane] :

Conique : définitions géométriques (bifocale, et par foyer et directrice); équations cartésiennes réduites; équivalence de ces diverses définitions.

Équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Exemples de représentations paramétriques d'une conique.

Tangente à une conique en un point (on établira sa propriété de bissectrice par rapport aux foyers).

9. Géométrie (Terminale E)

On continue de travailler dans le plan et l'espace considérés en Seconde et en Première. On dispose des espaces vectoriels associés; il n'est donc pas nécessaire de modéliser un espace affine en général.

a) [Plan et espace] :

Calcul barycentrique. Étant donné n points pondérés (A_i, α_i) , étude des fonctions

$$M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \quad \text{et} \quad M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \|\overrightarrow{MA_i}\|^2.$$

Applications affines :

Une application de l'ensemble des vecteurs de l'espace dans lui-même est dite affine quand elle est de la forme

$$\vec{v} \mapsto \vec{A} + \varphi(\vec{v}),$$

où φ est linéaire.

Dans l'espace pointé en O une application $M \mapsto M'$ est affine si l'application $\overrightarrow{OM} \mapsto \overrightarrow{OM'}$ est affine (définition indépendante du choix du point O).

Caractérisation des applications affines par la conservation des barycentres. Image d'une droite, d'un plan, d'une partie convexe par une application affine; conservation du parallélisme.

On montrera que les isométries sont des applications affines conservant le produit scalaire. En plus des translations et des homothéties les élèves ont à connaître les symétries, orthogonales ou non, les affinités; on leur fera utiliser ces transformations dans de nombreux problèmes de constructions et de lieux géométriques.

b) [Géométrie plane] :

Composition de rotations et translations, groupe des déplacements.

Composition de déplacements et d'homothéties, groupe des similitudes directes.

Représentation complexe d'une similitude directe.

c) [Géométrie dans l'espace] :

Exemples simples d'isométries de l'espace laissant fixe un point donné.

Groupe des rotations d'axe donné; on établira qu'une rotation est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des plans.

A titre d'exemples de composition : composée de deux rotations d'axes coplanaires; composée d'une rotation d'axe D par une translation conservant D (vissage d'axe D).

d) [Géométrie descriptive] :

Rotation autour d'un axe vertical ou de bout.

Rabattement sur un plan horizontal ou frontal.

Distance de deux points, d'un point à une droite, d'un point à un plan; angle de deux droites.

Représentation du cercle.

e) [Géométrie plane] :

Coniques : définitions géométriques (bifocale, et par foyer et directrice); équations cartésiennes réduites; équivalence de ces diverses définitions.

Équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Exemples de représentation paramétrique d'une conique.

Tangente à une conique en un point (on établira sa propriété de bissectrice par rapport aux foyers).

1

NOMBRES COMPLEXES

Au xvi^e siècle, les algébristes italiens (Cardan, Tartaglia, Ferrari, Bombelli), constatant l'impossibilité de résoudre dans $\mathbb{R}$ certaines équations algébriques (comme $x^2 + 1 = 0$) se risquent à introduire des nombres « impossibles » ou « imaginaires »; par exemple, des nombres dont le carré est négatif.

1.1 RAPPEL DES PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE $\mathbb{R}$

a) Le corps commutatif $(\mathbb{R}, +, \times)$

Nous savons que l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est muni de deux lois de composition, l'addition et la multiplication, ayant les propriétés suivantes :

$(\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3)$	$(a + b) + c = a + (b + c)$	(associativité)
$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2)$	$a + b = b + a$	(commutativité)
$(\forall a \in \mathbb{R})$	$a + 0 = 0 + a = a$	(0 est l'élément neutre pour l'addition)
$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists a' \in \mathbb{R})$	$a + a' = a' + a = 0$	(tout élément admet un opposé)

On dit que $(\mathbb{R}, +)$ est un **groupe commutatif**.

$(\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3)$	$(ab)c = a(bc)$	(associativité)
$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2)$	$ab = ba$	(commutativité)
$(\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3)$	$a(b + c) = ab + ac$ et $(b + c)a = ba + ca$	(distributivité de la multiplication par rapport à l'addition)
$(\forall a \in \mathbb{R})$	$a1 = 1a = a$	(1 est l'élément neutre pour la multiplication)
$(\forall a \in \mathbb{R}^*)(\exists a' \in \mathbb{R})$	$aa' = a'a = 1$	(tout élément non nul admet un inverse)

On dit que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un **corps commutatif**.

Notons que $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif.

b) Relation d'ordre

$\mathbb{R}$ est, de plus, muni d'une relation d'ordre **total compatible avec l'addition et la multiplication** :

$$(\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3) \quad a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2)(\forall c \in \mathbb{R}_+) \quad a \leq b \implies ac \leq bc.$$

1.2 POURQUOI INTRODUIRE LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

a) L'équation $x^2 + 1 = 0$

Les propriétés de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ entraînent que le carré d'un réel est supérieur ou égal à 0.

En effet, soit $a \in \mathbb{R}$,

si $a \geq 0$, on a $a^2 = a \cdot a \geq 0$

si $a \leq 0$, on a $-a \geq 0$ et $a^2 = (-a) \cdot (-a) \geq 0$.

Par suite, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^2 + 1 \geq 1 > 0$. L'équation $x^2 + 1 = 0$ ne peut donc avoir de solution dans $\mathbb{R}$. Plus généralement, il en est de même de toute équation se ramenant à la forme

$$x^2 + b = 0 \quad \text{avec} \quad b > 0.$$

b) Problème

Nous allons chercher à construire un corps commutatif, plus grand que $\mathbb{R}$ (en un sens que l'on précisera) et dans lequel l'équation $x^2 + 1 = 0$ aura des solutions.

Afin d'introduire la construction, faisons quelques observations préalables. Supposons qu'il existe un tel corps. Soit i l'une des solutions de l'équation $x^2 + 1 = 0$ dans ce corps. Le corps contiendra $\mathbb{R}$ et i et aussi tous les éléments de la forme $a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. D'autre part, quels que soient les éléments $a + ib$ et $a' + ib'$ (a, b, a', b' réels quelconques) :

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

Ces égalités nous donnent alors l'idée d'une construction possible d'un corps répondant au problème posé. Nous allons définir des lois de composition, inspirées des égalités précédentes, faisant intervenir des couples (a, b) de réels et non plus $a + ib$ puisque, en fait, i nous est encore inconnu.

1.3 UNE CONSTRUCTION DU CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

a) Définition d'une structure de corps sur $\mathbb{R}^2$

Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$, définissons les deux lois de composition suivantes :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba').$$

• L'addition est évidemment *associative* et *commutative*. De plus quel que soit (a, b) de $\mathbb{R}^2$:

$$(a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b)$$

donc $(0, 0)$ est *élément neutre pour l'addition*.

$$(a, b) + (-a, -b) = (-a, -b) + (a, b) = (0, 0)$$

donc $(-a, -b)$ est *l'opposé* de (a, b) .

• La multiplication est de façon évidente *commutative* et le couple $(1, 0)$ est *élément neutre pour la multiplication*.

Il reste à vérifier l'*associativité*, quels que soient les couples de réels (a, b) , (a', b') , (a'', b'') :

$$\begin{aligned} [(a, b)(a', b')](a'', b'') &= (aa' - bb', ab' + ba')(a'', b'') \\ &= (aa'a'' - bb'a'' - ab'b'' - a'bb''), \\ &\quad aa'b'' - bb'b'' + ab'a'' + a'ba'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a, b)[(a', b')(a'', b'')] &= (a, b)(a'a'' - b'b'', a'b'' + b'a'') \\ &= (aa'a'' - ab'b'' - ba'b'' - bb'a''), \\ &\quad aa'b'' + ab'a'' + ba'a'' - bb'b'') \end{aligned}$$

on a bien $[(a, b)(a', b')](a'', b'') = (a, b)[(a', b')(a'', b'')]$;

la *distributivité de la multiplication par rapport à l'addition* :

$$\begin{aligned} (a, b)[(a', b') + (a'', b'')] &= (a, b)(a' + a'', b' + b'') \\ &= (aa' + aa'' - bb' - bb'', ab' + ab'' + ba' + ba'') \\ &= (aa' - bb', ab' + ba') + (aa'' - bb'', ab'' + ba'') \\ &= (a, b)(a', b') + (a, b)(a'', b''), \end{aligned}$$

en raison de la commutativité de la multiplication on a aussi :

$$[(a', b') + (a'', b'')](a, b) = (a', b')(a, b) + (a'', b'')(a, b);$$

tout élément $(a, b) \neq (0, 0)$ de $\mathbb{R}^2$ admet-il un *inverse* (a', b') ? On a :

$$(a, b)(a', b') = (a', b')(a, b) = (1, 0)$$

si et seulement si l'on a successivement :

$$(aa' - bb', ab' + ba') = (1, 0)$$

$$\begin{cases} aa' - bb' = 1 \\ ba' + ab' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a' = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ b' = \frac{-b}{a^2 + b^2} \end{cases} \text{ (si } (a, b) \neq (0, 0), a^2 + b^2 \neq 0)$$

donc, si $(a, b) \neq (0, 0)$, l'inverse de (a, b) est $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$.

Théorème

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois, quels que soient les couples de réels (a, b) et (a', b') :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

est un corps commutatif.

On l'appelle le **corps des nombres complexes** et on le note $(\mathbb{C}, +, \times)$ ou, plus simplement, $\mathbb{C}$.

b) $\mathbb{C}$ est solution du problème du § 1.2 b)

- Nous constatons que $\mathbb{C}$ ne contient pas $\mathbb{R}$. Cependant, appelons $\mathbb{R}'$ l'ensemble des couples $(a, 0)$ et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}'$ qui à a associe $(a, 0)$. L'application f est une bijection et :

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall a' \in \mathbb{R}) \quad f(a + a') = f(a) + f(a') \quad \text{et} \quad f(aa') = f(a)f(a').$$

Nous dirons que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}'$ sont **isomorphes** et nous conviendrons, par commodité, d'identifier l'élément a de $\mathbb{R}$ à l'élément $(a, 0)$ de $\mathbb{R}'$, *faisant ainsi de $\mathbb{R}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$* .

- D'autre part, posons $i = (0, 1)$. On a

$$i^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0) = -(1, 0).$$

Compte tenu de l'identification précédente, ceci s'écrit $i^2 = -1$. Donc $i^2 + 1 = 0$. Le corps $\mathbb{C}$ satisfait donc à toutes les exigences imposées dans l'énoncé du problème.

c) Notations. Définitions

Soit $z = (a, b)$ un élément quelconque de $\mathbb{C}$. On peut écrire :

$$z = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0).$$

L'identification de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}'$ nous conduit donc à écrire $z = (a, b)$ sous sa forme définitive : $z = a + ib$.

L'opposé de $a + ib$ s'écrira donc $-a - ib$ et, si $(a, b) \neq (0, 0)$, l'inverse de $a + ib$ s'écrira $\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

REMARQUE Pratiquement, pour calculer le produit de deux nombres complexes, il est inutile d'utiliser la formule figurant dans le théorème. On effectue, en utilisant la distributivité, et on remplace i^2 par -1 :

$$(a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + iba' + i^2bb' = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

Définitions

L'écriture de z sous la forme $a + ib$ est appelée *forme algébrique* (ou *cartésienne*) de z . Le réel a est appelé *partie réelle* de z et se note $\operatorname{Re}(z)$.

Le réel b est appelé *partie imaginaire* de z et se note $\operatorname{Im}(z)$.

On appelle *nombre imaginaire pur* un nombre complexe de partie réelle nulle, c'est-à-dire un nombre complexe de la forme ib .

Les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe sont donc des nombres réels. Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

d) Relation d'ordre

On peut se demander s'il est possible, comme dans $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ de définir sur $\mathbb{C}$ un ordre total compatible avec les lois de $\mathbb{C}$ (cf. § 1.1 b)). La réponse est négative. En effet, l'existence d'un tel ordre entraînerait que tout carré est positif ou nul (raisonner comme au § 1.2 a)) donc $i^2 \geq 0$, ce qui n'est pas.

Il est cependant possible de définir des ordres totaux sur $\mathbb{C}$, mais ceux-ci ne sont pas compatibles avec les opérations. Par exemple, la relation $\leq$ définie, quels que soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ de $\mathbb{C}$ par

$$(z \leq z') \iff [(a < a') \text{ ou } (a = a' \text{ et } b \leq b')].$$

1.4 REPRÉSENTATIONS GÉOMÉTRIQUES D'UN NOMBRE COMPLEXE

Considérons un plan, noté P , et le plan vectoriel associé, noté $\vec{P}$ ($\vec{P}$ est l'ensemble des vecteurs de P). Nous rapportons $\vec{P}$ à une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et P à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

a) Représentation par un vecteur

Considérons l'application f :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \vec{P} \\ z = a + ib &\longmapsto \vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Il est immédiat que f est une bijection telle que, quels que soient z et z' dans $\mathbb{C}$ et λ dans $\mathbb{R}$:

$$f(z + z') = f(z) + f(z') \quad \text{et} \quad f(\lambda z) = \lambda f(z).$$

On dit que le vecteur $\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ est l'**image** du nombre complexe $a + ib$. On dit aussi que z est l'**affixe** du vecteur $\vec{v}$.

Observons que l'image de z dépend de la base choisie dans $\vec{P}$.

b) Représentation par un point

L'application g :

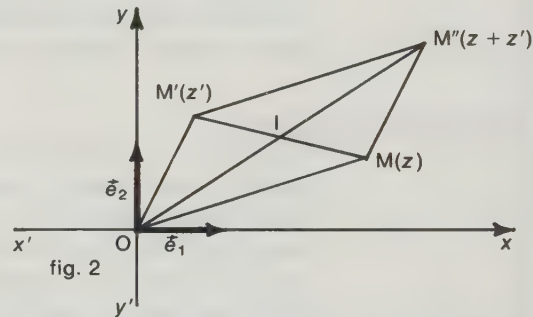
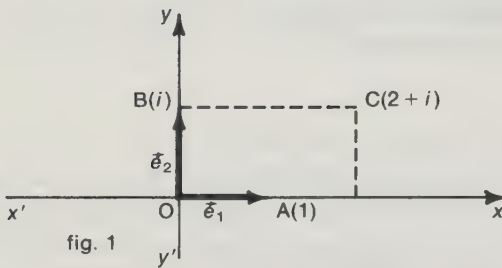
$$\begin{aligned}\bar{P} &\longrightarrow P \\ \vec{v} &\longmapsto M \text{ tel que } \overrightarrow{OM} = \vec{v}\end{aligned}$$

est bijective. Donc l'application $g \circ f$ qui associe à tout nombre complexe $z = a + ib$ le point M de P tel que $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ est bijective (composée de deux bijections). On dit encore que M est l'**image** de z ou que z est l'**affiche** de M .

Observons encore que l'image de z dépend du repère choisi dans P .

Il est commode d'indiquer, dans le plan, à côté de chaque point l'affixe de ce point.

Par exemple, soit les points A, B, C d'affixes respectives $1, i, 2 + i$, on peut les représenter sur la figure 1.



EXEMPLES • Soit les points M et M' d'affixes respectives z et z' . On a :

$$f(z) = \overrightarrow{OM}$$

$$f(z') = \overrightarrow{OM'}$$

et donc $f(z + z') = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM''}$.

L'image de $z + z'$ est donc le point M'' tel que $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$. On obtient donc le point M'' à l'aide de la construction classique du parallélogramme (fig. 2).

Remarquons que le point I milieu de OM'' , vérifie $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OM''}$, I a donc pour affixe

$\frac{1}{2}(z + z')$. L'image de $\frac{1}{2}(z + z')$ est donc le milieu du couple (M, M') des images de z et de z' .

• Soit les points $M(z)$ et $M'(-z)$, le milieu de (M, M') a pour affixe : $\frac{1}{2}(z - z') = 0$ c'est donc l'origine O . Les points M et M' sont donc symétriques par rapport à l'origine.

• Soit les points $M(z)$ et $M'(z')$. On a

$$f(z' - z) = f(z') - f(z) = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}.$$

L'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ est donc la différence des affixes de M' et de M .

• Les points de $x'Ox$ sont les images des nombres complexes $a + ib$ tels que $b = 0$, ce sont donc les images des réels, on appelle parfois $x'Ox$ l'**axe réel**.

Les points de $y'Oy$ sont les images des nombres complexes $a + ib$ tels que $a = 0$, ce sont donc les images des nombres imaginaires purs, on appelle parfois $y'Oy$ l'**axe imaginaire pur**.

Le plan P est appelé **plan complexe**.

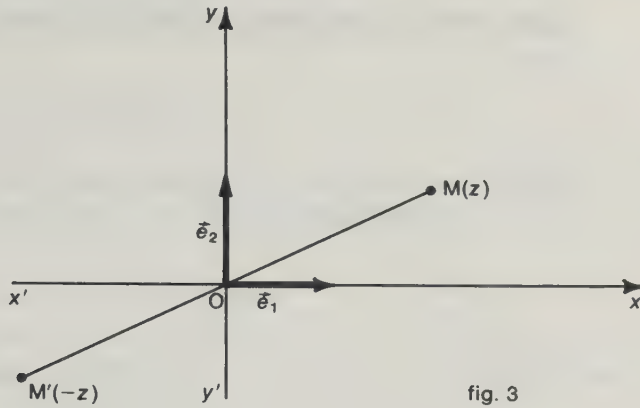


fig. 3

1.5 NOMBRES COMPLEXES CONJUGUÉS

Le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$ ($\bar{z}$ se lit z barre) est appelé **nombre complexe conjugué du nombre complexe** $z = a + ib$.

Le conjugué de $\bar{z}$ étant $a + ib = z$, nous dirons que z et $\bar{z}$ sont deux nombres complexes conjugués.

Reprenons les notations du paragraphe précédent. Les points $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ ont même abscisse et des ordonnées opposées. Ils se déduisent donc l'un de l'autre dans la symétrie orthogonale par rapport à $x'Ox$.

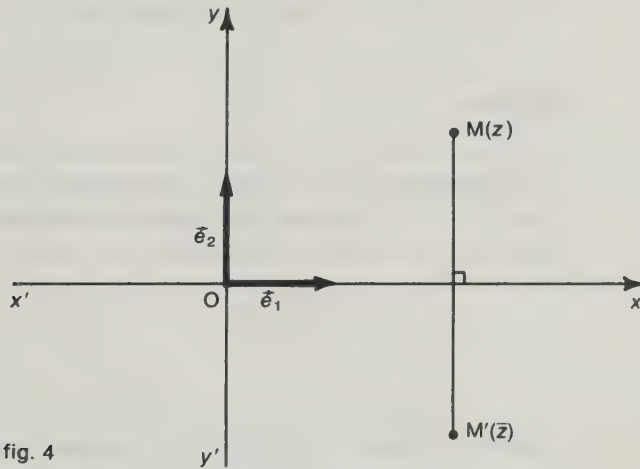


fig. 4

On a $z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a$ et $z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib$, d'où :

Théorème

Quels que soient les nombres complexes conjugués z et $\bar{z}$ on a :

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z); \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$$

$$z = -\bar{z} \iff z \text{ est imaginaire pur}; \quad z = \bar{z} \iff z \text{ est réel.}$$

Considérons maintenant l'application $\gamma : z \mapsto \bar{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Quel que soit z de $\mathbb{C}$:

$$(\gamma \circ \gamma)(z) = \overline{\bar{z}} = z.$$

Donc $\gamma \circ \gamma = \text{id}_{\mathbb{C}}$, ce qui montre que γ est *involutive*, donc bijective ($\gamma^{-1} = \gamma$). Quels que soient

$$z = a + ib \quad \text{et} \quad z' = a' + ib'$$

de $\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} \gamma(z + z') &= \gamma((a + a') + i(b + b')) = (a + a') - i(b + b') \\ &= (a - ib) + (a' - ib') = \gamma(z) + \gamma(z') \\ \gamma(z z') &= \gamma((aa' - bb') + i(ab' + ba')) = (aa' - bb') - i(ab' + ba') \\ &= (a - ib)(a' - ib') = \gamma(z) \gamma(z'). \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

et

$$\overline{z z'} = \bar{z} \bar{z}'$$

On dit que γ est un automorphisme du corps $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire un isomorphisme du corps $\mathbb{C}$ sur lui-même). Remarquons que si z est réel, $\gamma(z) = z$. Donc :

Théorème

L'application $z \mapsto \bar{z}$ de $\mathbb{C}$ sur lui-même est un automorphisme involutif de $(\mathbb{C}, +, \times)$ laissant invariants les éléments de $\mathbb{R}$.

APPLICATION Cherchons à mettre $\frac{z}{z'} = \frac{a + ib}{a' + ib'}$ ($z' \neq 0$) sous forme algébrique.

Nous remarquons que $z' \bar{z}' = (a' + ib')(a' - ib') = a'^2 + b'^2$.

Donc $z' \bar{z}'$ est un nombre réel strictement positif. On peut écrire (si $z' \neq 0$, alors $\bar{z}' \neq 0$) :

$$\frac{z}{z'} = \frac{\bar{z} \bar{z}'}{z' \bar{z}'} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{a'^2 + b'^2} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} - i \frac{ab' - ba'}{a'^2 + b'^2}.$$

Par exemple, cherchons à mettre sous forme algébrique $\frac{2+i}{1-i}$. On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

1.6 MODULE ET ARGUMENTS D'UN NOMBRE COMPLEXE

a) Module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un élément de $\mathbb{C}$. Le nombre $z\bar{z} = a^2 + b^2$ est un réel positif ou nul. On peut donc donner la définition suivante :

Définition

On appelle **module du nombre complexe** $z = a + ib$, et on note $|z|$, le réel positif ou nul défini par

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Notons que si $z = a$ est réel, on a $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$. Le module d'un nombre réel est donc sa valeur absolue. Ceci justifie la notation utilisée pour le module.

Reprenons les notations du § 1.4. Si M a pour affixe z , on a :

$$|z| = \|\overrightarrow{OM}\|.$$

b) Propriétés du module d'un nombre complexe

Soit z et z' deux nombres complexes quelconques :

1. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\bar{z}|$ donc :

$$|z| = |\bar{z}|$$

2. Posons $z = a + ib$. L'inégalité $a^2 \leq a^2 + b^2$ entraîne :

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$$

il y a égalité si et seulement si z est réel.

REMARQUE On notera aussi que $\operatorname{Re}(z) = |z|$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}_+$.

3. De même

$$|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$$

il y a égalité si et seulement si z est imaginaire pur.

4. $|z| = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0 \iff z = 0$ donc :

$$|z| = 0 \iff z = 0$$

5. $|zz'| = \sqrt{(zz')(\overline{zz'})} = \sqrt{(zz')(\overline{z}\overline{z'})} = \sqrt{(z\overline{z})(z'\overline{z'})} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{z'\overline{z'}} = |z| |z'|$
donc :

$$|zz'| = |z| |z'|$$

6. Si $z' \neq 0$, on a

$$z' \times \frac{1}{z'} = 1 \quad \text{d'où} \quad |z'| \times \left| \frac{1}{z'} \right| = 1 \quad \text{donc} \quad \left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|}.$$

Par suite :

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \left| z \times \frac{1}{z'} \right| = |z| \times \left| \frac{1}{z'} \right| = |z| \times \frac{1}{|z'|}$$

donc : si $z' \neq 0$,

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$7. |z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'}$$

$$\text{or} \quad z\overline{z'} + z'\overline{z} = z\overline{z'} + \overline{(z\overline{z'})} = 2\operatorname{Re}(z\overline{z'}) \leq 2|z\overline{z'}| = 2|z||z'| = 2|z||z'|.$$

$$\text{D'où} \quad |z + z'|^2 \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2.$$

On en déduit, puisque $|z + z'|$ et $|z| + |z'|$ sont dans $\mathbb{R}_+$:

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{inégalité triangulaire}).$$

Cherchons dans quels cas cette inégalité devient une égalité. Tout d'abord il y a égalité pour $z = 0$ ou $z' = 0$. Supposons z et z' non nuls.

D'après la démonstration précédente, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} |z + z'| = |z| + |z'| &\iff \operatorname{Re}(z\overline{z'}) = |z\overline{z'}| \\ &\iff z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{propriété 2. Remarque}) \\ &\iff (\exists \alpha \in \mathbb{R}_+) \quad z\overline{z'} = \alpha \\ &\iff (\exists \alpha \in \mathbb{R}_+) \quad z\overline{z'}z' = \alpha z' \\ &\iff (\exists \alpha \in \mathbb{R}_+) \quad z|z'|^2 = \alpha z' \\ &\iff (\exists \alpha \in \mathbb{R}_+) \quad z = \frac{\alpha}{|z'|^2} z' \\ &\iff (\exists \beta \in \mathbb{R}_+) \quad z = \beta z'. \end{aligned}$$

On a donc l'égalité $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si z ou z' est nul ou s'il existe un réel $\beta \geq 0$ tel que $z = \beta z'$.

c) Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Étudions quelques propriétés de l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. Quels que soient u et u' éléments de $\mathbb{U}$:

- $|uu'| = |u||u'| = 1$ donc $uu' \in \mathbb{U}$ ce qui signifie que $\mathbb{U}$ est *stable* pour la multiplication des nombres complexes.
- Comme la multiplication est associative et commutative dans $\mathbb{C}$, il en résulte les mêmes propriétés dans $\mathbb{U}$.
- L'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{U}$ est 1.
- $\left|\frac{1}{u}\right| = \frac{1}{|u|} = 1$ donc $\frac{1}{u} \in \mathbb{U}$.

Nous venons de prouver :

Théorème

L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 est un groupe commutatif pour la multiplication des nombres complexes.

Soit z un nombre complexe non nul, le complexe $u = \frac{z}{|z|}$ a pour module 1, on a donc :

$$z = |z| u \quad \text{avec} \quad u \in \mathbb{U}.$$

Cette écriture est unique puisque u est le quotient de z par $|z|$.

Géométriquement, $\mathbb{U}$ est représenté par le cercle $\mathcal{U}$ de centre O et de rayon 1. Si m est l'image de u et M l'image de z , on a $\overrightarrow{OM} = |z| \overrightarrow{Om}$. Le point m est donc l'intersection du cercle $\mathcal{U}$ et de la demi-droite $[OM)$ (fig. 5).

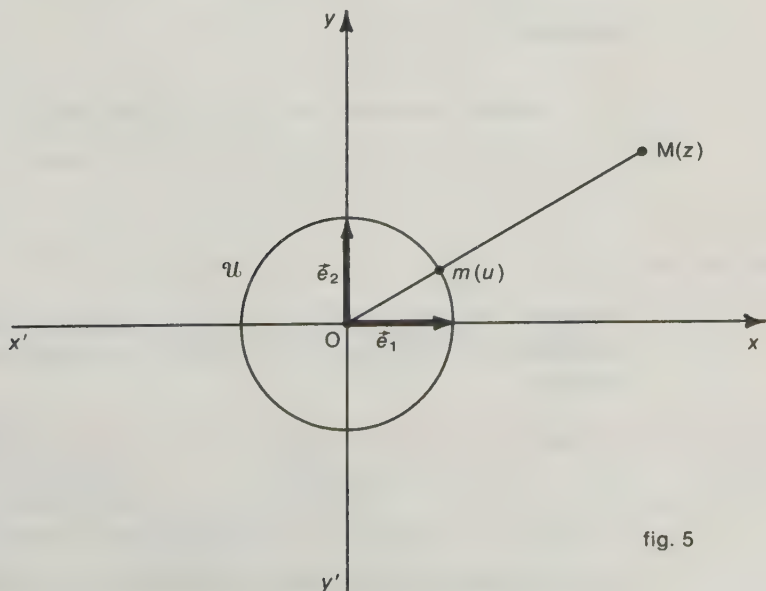


fig. 5

d) Arguments d'un nombre complexe

■ Arguments d'un nombre complexe de module 1

Soit $u = a_1 + ib_1$ un élément de $\mathbb{U}$. On a donc $a_1^2 + b_1^2 = 1$.

Reprenons les notations du § 1.4. Supposons le plan P orienté et la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ directe.

Définition

Soit u un nombre complexe de module 1 et m son image (fig. 5).

On appelle argument de u , noté $\arg u$, l'une quelconque des mesures en radians de l'angle orienté associé au couple $(\vec{e}_1, \vec{Om})$.

Le réel φ est donc un argument de u si, et seulement si

$$\cos \varphi = a_1 \quad \text{et} \quad \sin \varphi = b_1.$$

Le complexe u admet une infinité d'arguments. Plus précisément, si φ est l'un d'entre eux, l'ensemble des arguments de u est l'ensemble des réels $\varphi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si φ est un argument de u , le réel φ' est donc également un argument de u si, et seulement si, il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $\varphi' = \varphi + 2k\pi$, ce que l'on note $\varphi \equiv \varphi' [2\pi]$ (on lit φ congru à φ' modulo 2π) :

$$\varphi \equiv \varphi' [2\pi] \iff (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \varphi' = \varphi + 2k\pi.$$

Il faut prendre garde à l'utilisation du symbole $\equiv$, qui n'est pas le symbole d'égalité. En cas d'hésitation, il faut revenir à sa définition. Par exemple,

$\varphi \equiv \varphi' [2\pi]$ n'implique pas $\frac{\varphi}{2} \equiv \frac{\varphi'}{2} [2\pi]$, mais seulement $\frac{\varphi}{2} \equiv \frac{\varphi'}{2} [\pi]$ (c'est-à-

dire l'existence de k dans $\mathbb{Z}$ tel que $\frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi'}{2} + k\pi$).

Notation

Le nombre complexe $\cos \varphi + i \sin \varphi$ est noté $e^{i\varphi}$:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

EXEMPLES $e^{i0} = 1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{i\pi} = -1$; $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.

Puisque $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ et $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$, en ajoutant et en retranchant ces deux égalités on obtient les formules suivantes, dites **formules d'Euler** :

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Notons la présence de i au dénominateur de l'expression de $\sin \varphi$.

■ Arguments d'un nombre complexe non nul

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe *non nul*. On a vu que z s'écrivait de façon unique sous la forme $z = |z| u$, avec $u \in \mathbb{U}$.

Par définition, **les arguments de z sont les arguments de u .**

Les arguments de u sont donc aussi les mesures de l'angle orienté associé au couple $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$ (fig. 5).

En notant r le module de z et φ un argument de z , on a

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}.$$

L'écriture de z sous la forme $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ou $re^{i\varphi}$ avec $r > 0$, est appelée **forme trigonométrique** de z .

REMARQUE Si $z = 0$, on a vu que son module est $r = 0$, mais ses arguments ne sont pas définis. On peut écrire cependant : $z = re^{i\varphi}$ où $r = 0$ et φ est un nombre réel quelconque.

Notons encore les équivalences suivantes :

$$z \in \mathbb{R}_+^* \iff \arg z \equiv 0 [2\pi]$$

$$z \in \mathbb{R}_-^* \iff \arg z \equiv \pi [2\pi]$$

$$z \in \mathbb{R}^* \iff \arg z \equiv 0 [\pi]$$

$$z \text{ imaginaire pur non nul} \iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2} [\pi].$$

EXERCICE

RÉSOLU

Déterminer en fonction de φ , $0 \leq \varphi < 2\pi$, le module et un argument du nombre complexe $z = 1 + \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Remarquons que z peut également s'écrire

$$z = (1 + \cos \varphi) + i \sin \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2i \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right).$$

- Si $0 \leq \varphi < \pi$, alors $\cos \frac{\varphi}{2} > 0$, par suite :

$$|z| = 2 \cos \frac{\varphi}{2}; \quad \arg z \equiv \frac{\varphi}{2} [2\pi].$$

- Si $\varphi = \pi$, z est nul.
- Si $\pi < \varphi < 2\pi$, on peut écrire

$$z = -2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right)$$

avec $-2 \cos \frac{\varphi}{2} > 0$, d'où :

$$|z| = -2 \cos \frac{\varphi}{2}; \quad \arg z \equiv \frac{\varphi}{2} + \pi [2\pi].$$

e) **Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement**

Soit z un nombre complexe *non nul*, on a : $z = a + ib = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
En égalant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$a = r \cos \varphi \quad \text{et} \quad b = r \sin \varphi.$$

Puisque r est le module de z , on a inversement :

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Les deux dernières formules permettent de déterminer φ modulo 2π .

Remarquons que, si $a \neq 0$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ permet un calcul plus commode mais ne détermine pas complètement φ , on obtient φ modulo π .

EXEMPLE Module et arguments du nombre $z = 3 + 4i$. On trouve

$$r = \sqrt{9 + 16} = 5; \quad \cos \varphi = \frac{3}{5}; \quad \sin \varphi = \frac{4}{5}$$

on détermine une valeur approchée de φ (modulo 2π) à l'aide d'une calculatrice : $\varphi \approx 0,93$.

REMARQUE Il faut se garder d'appliquer systématiquement les formules précédentes comme le montre l'exercice résolu traité au d). Il est souvent préférable pour chercher le module et les arguments de mettre directement le nombre donné sous la forme $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ avec $r > 0$ ou encore d'utiliser la représentation géométrique.

f) Produit et quotient de nombres complexes sous forme trigonométrique

La forme trigonométrique des nombres complexes se prête particulièrement bien au calcul de leurs produits et de leurs quotients.

Soit $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ et $z' = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi')$ deux nombres complexes non nuls

$$\begin{aligned} zz' &= rr'[(\cos \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi \sin \varphi') + i(\cos \varphi \sin \varphi' + \sin \varphi \cos \varphi')] \\ &= rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')]. \end{aligned}$$

Le module de zz' est donc rr' (résultat déjà établi au § 1.6 b)), un argument étant $\varphi + \varphi'$. Donc quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' :

$$\begin{cases} |zz'| = |z| |z'| \\ \arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \quad [2\pi] \end{cases}$$

Ce qu'on peut encore écrire :

$$(re^{i\varphi})(r'e^{i\varphi'}) = rr'e^{i(\varphi + \varphi')}$$

A l'aide d'une démonstration par récurrence, on obtient facilement les formules suivantes; si $z_1, z_2, \dots, z_n$ sont des nombres complexes non nul, $\prod_{i=1}^n z_i$ représente le produit $z_1 z_2 \dots z_n$ et l'on a :

$$\left| \prod_{i=1}^n z_i \right| = \prod_{i=1}^n |z_i|$$

$$\arg \left(\prod_{i=1}^n z_i \right) \equiv \sum_{i=1}^n \arg z_i \quad [2\pi]$$

REMARQUE Il n'y a pas de formules simples permettant de calculer module et arguments de $z + z'$ en fonction des modules et arguments de z et z' .

APPLICATIONS Soit z un nombre complexe non nul.

- Puisque $\left(z \cdot \frac{1}{z}\right) = 1$, on a

$$\arg \left(z \cdot \frac{1}{z} \right) \equiv \arg z + \arg \frac{1}{z} \equiv \arg 1 \equiv 0 \quad [2\pi].$$

Donc :

si $z \neq 0$, z et $\frac{1}{z}$ ont des arguments opposés modulo 2π .

- Soit z' un autre nombre complexe non nul

$$\arg \frac{z}{z'} \equiv \arg z + \arg \frac{1}{z'} \equiv \arg z - \arg z' \quad [2\pi].$$

On a déjà vu (cf. § 1.6 b)) que $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$. Retenons donc que quels que soient les nombres complexes z et z' non nuls :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \\ \arg \left(\frac{z}{z'} \right) \equiv \arg z - \arg z' \quad [2\pi] \end{array} \right.$$

ce qu'on peut écrire :

$$\frac{r e^{i\varphi}}{r' e^{i\varphi'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\varphi - \varphi')}$$

- Puisque $z\bar{z}$ est un réel strictement positif, on a

$$\arg(z\bar{z}) \equiv \arg z + \arg \bar{z} \equiv 0 \quad [2\pi].$$

Donc :

si $z \neq 0$, z et $\bar{z}$ ont des arguments opposés modulo 2π .

• Enfin, $\arg(-z) \equiv \arg(-1) + \arg z \equiv \pi + \arg z [2\pi]$. Donc :

si $z \neq 0$, z et $(-z)$ ont des arguments qui diffèrent de π modulo 2π .

1.7 COMPLÉMENTS DE TRIGONOMÉTRIE

a) Formule de Moivre

• Considérons un produit de n nombres complexes de module 1 et d'argument φ . D'après le sous-paragraphe précédent (considérer $\prod_{i=1}^n z_i$ avec $z_1 = z_2 = \dots = z_n = e^{i\varphi}$), ce produit est le nombre complexe de module $1^n = 1$ et d'argument $\varphi + \varphi + \dots + \varphi = n\varphi$. Donc :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

• Pour $n = 0$, la formule est encore vraie car :

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^0 = 1 \text{ (par convention)} \quad \text{et} \quad \cos 0 + i \sin 0 = 1.$$

• Pour tout entier $n < 0$:

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n &= \frac{1}{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-n}} \quad (\text{par convention}) \\ &= \frac{1}{\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi)} \quad (\text{puisque } -n \in \mathbb{N}^*) \\ &= \cos n\varphi + i \sin n\varphi \end{aligned}$$

(puisque z et $\frac{1}{z}$ ont des arguments opposés modulo 2π).

Les différents cas se résument dans la formule de Moivre :

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall \varphi \in \mathbb{R})$$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

qui s'écrit aussi

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$$

Presque toutes les applications trigonométriques des nombres complexes utilisent soit la formule de Moivre, soit les formules d'Euler. Nous allons en donner des exemples.

b) Calcul de $\cos n\varphi$ et $\sin n\varphi$

La formule de Moivre permet de calculer $\cos n\varphi$ et $\sin n\varphi$ ($n \in \mathbb{N}$) en fonction des puissances de $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$. Traitons, par exemple, le cas $n = 3$.

$$\begin{aligned} (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 \\ &= \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi \end{aligned}$$

d'où, en égalant parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi) \\ &= 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \\ \sin 3\varphi &= 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi = 3(1 - \sin^2 \varphi) \sin \varphi - \sin^3 \varphi \\ &= 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi.\end{aligned}$$

c) Linéarisation

C'est le problème inverse du précédent. On cherche à transformer un polynôme en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ en une combinaison linéaire de sinus et de cosinus de multiples de φ . On utilise ici les formules d'Euler.

EXEMPLE Linéarisons $\cos^4 \varphi \sin^2 \varphi$:

$$\begin{aligned}\cos^4 \varphi \sin^2 \varphi &= \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^4 \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{64} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^2 [(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})]^2 \\ &= -\frac{1}{64} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^2 (e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi})^2 \\ &= -\frac{1}{64} (e^{2i\varphi} + 2 + e^{-2i\varphi})(e^{4i\varphi} - 2 + e^{-4i\varphi}) \\ &= -\frac{1}{64} [(e^{6i\varphi} + e^{-6i\varphi}) + 2(e^{4i\varphi} + e^{-4i\varphi}) - (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}) - 4] \\ &= -\frac{1}{32} (\cos 6\varphi + 2 \cos 4\varphi - \cos 2\varphi - 2).\end{aligned}$$

d) Formules de trigonométrie (révision et compléments)

Rappelons les « formules d'addition » démontrées en classe de Première (certaines de ces formules ont été utilisées au § 1.6 g)). Quels que soient les réels a et b :

- | | |
|-----|--|
| (1) | $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ |
| (2) | $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ |
| (3) | $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ |
| (4) | $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$ |

En faisant $a = b$ on déduit les formules de multiplication par 2 (ou duplication) :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \\ \sin 2a &= 2 \sin a \cos a.\end{aligned}$$

En additionnant membre à membre (1) et (2),
 en retranchant membre à membre (1) de (2),
 en additionnant membre à membre (3) et (4), on obtient :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

Ces trois dernières formules permettent de transformer un produit de sinus ou cosinus en somme.

Posons $a+b=p$ et $a-b=q$, soit $a=\frac{p+q}{2}$ et $b=\frac{p-q}{2}$, on obtient des formules transformant une somme de sinus ou cosinus en produit :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

(la dernière égalité se déduit de la précédente en remplaçant q par $-q$).
 Il est alors possible de traiter des problèmes de linéarisation en utilisant ces formules.

EXEMPLE Reprenons l'exemple du § 1.7 c) :

$$\begin{aligned} \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi &= \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) = \cos^2 \varphi \left(\frac{1}{4} \sin^2 2\varphi \right) \\ &= \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \frac{1}{4} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} = \frac{1}{16} (1 + \cos 2\varphi)(1 - \cos 4\varphi) \\ &= \frac{1}{16} (1 + \cos 2\varphi - \cos 4\varphi - \cos 2\varphi \cos 4\varphi) \\ &= \frac{1}{16} \left[1 + \cos 2\varphi - \cos 4\varphi - \frac{1}{2} (\cos 6\varphi + \cos 2\varphi) \right] \\ &= -\frac{1}{32} (\cos 6\varphi + 2 \cos 4\varphi - \cos 2\varphi - 2). \end{aligned}$$

e) Transformation de $a \cos x + b \sin x$, $(a, b) \neq (0, 0)$

Posons $a + ib = re^{i\varphi}$ ($r > 0$), on sait que (cf. § 1.6e) :

$$a = r \cos \varphi \quad \text{et} \quad b = r \sin \varphi$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \varphi \text{ est l'un des réels tels que :}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

On peut alors écrire :

$$a \cos x + b \sin x = r \cos \varphi \cos x + r \sin \varphi \sin x = r \cos(x - \varphi).$$

REMARQUE Transformons plus généralement $E = a \cos(\omega x - \alpha) + b \cos(\omega x - \beta)$:

$$E = a(\cos \omega x \cos \alpha + \sin \omega x \sin \alpha) + b(\cos \omega x \cos \beta + \sin \omega x \sin \beta)$$

$$E = A \cos \omega x + B \sin \omega x$$

$$\text{avec} \quad A = a \cos \alpha + b \cos \beta \quad \text{et} \quad B = a \sin \alpha + b \sin \beta.$$

Si $(A, B) \neq (0, 0)$, en posant $A + iB = re^{i\varphi}$ ($r > 0$) on obtient :

$$E = r \cos(\omega x - \varphi).$$

L'interprétation cinématique de ce résultat est la suivante : quand on superpose deux mouvements vibratoires simples de même pulsation ω , on obtient encore un mouvement vibratoire simple de pulsation ω .

■ Application à la résolution de l'équation $a \cos x + b \sin x = c$

Nous supposons $(a, b) \neq (0, 0)$. Avec les notations précédentes, l'équation s'écrit :

$$\cos(x - \varphi) = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

D'où la discussion suivante :

- Si $\left| \frac{c}{r} \right| > 1$ c'est-à-dire $|c| > \sqrt{a^2 + b^2}$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $\left| \frac{c}{r} \right| = 1$ c'est-à-dire $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$, l'équation a pour solutions tous les réels x tels que

$$x \equiv \varphi \quad [2\pi] \quad \text{si} \quad c > 0$$

$$x \equiv \varphi + \pi \quad [2\pi] \quad \text{si} \quad c < 0.$$

Si $\left| \frac{c}{r} \right| < 1$, on peut poser $\frac{c}{r} = \cos \varphi_0$. L'équation admet donc pour solutions tous les réels x tels que :

$$x \equiv \varphi + \varphi_0 \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \varphi - \varphi_0 \quad [2\pi].$$

EXEMPLE Résoudre l'équation $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{3}$.
Comme $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, on a

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x \right) = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right).$$

L'équation est donc équivalente à

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}.$$

Les solutions sont donc les réels x tels que

$$x \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi].$$

EXERCICE RÉSOLU

On se propose de donner une expression simple des sommes :

$$C = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx \quad \text{et} \quad S = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Nous allons traiter C et S en même temps en calculant $C + iS$:

$$\begin{aligned} C + iS &= 1 + (\cos x + i \sin x) + (\cos 2x + i \sin 2x) + \dots + (\cos nx + i \sin nx) \\ &= 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{inx} \\ &= 1 + e^{ix} + (e^{ix})^2 + \dots + (e^{ix})^n. \end{aligned}$$

$C + iS$ apparaît donc ainsi comme la somme des $n + 1$ premiers termes d'une progression géométrique de raison e^{ix} . La formule qui donne une telle somme est, comme dans le cas de nombres réels :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{si } q \neq 1.$$

En effet, l'identité $(1 + q + q^2 + \dots + q^n)(1 - q) = 1 - q^{n+1}$ est vraie aussi dans $\mathbb{C}$.

- Si $e^{ix} \neq 1$, c'est-à-dire si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ($2\pi\mathbb{Z}$ est l'ensemble des multiples de 2π), on a :

$$C + iS = \frac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

Il reste à mettre ce nombre sous forme algébrique. Pour cela, factorisons $e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$ au numérateur et $e^{i\frac{x}{2}}$ au dénominateur :

$$\begin{aligned} C + iS &= \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}} (e^{-i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{i\frac{(n+1)x}{2}})}{e^{i\frac{x}{2}} (e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})} = e^{i\frac{nx}{2}} \left(\frac{-2i \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{-2i \sin\frac{x}{2}} \right) \\ &= e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Finalement, en égalant les parties réelles et imaginaires on obtient :

$$C = \cos \frac{nx}{2} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad S = \sin \frac{nx}{2} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

REMARQUE On peut retrouver rapidement ce résultat en multipliant C et S par $2 \sin \frac{x}{2}$ et en transformant en sommes les produits

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos px \quad \text{et} \quad 2 \sin \frac{x}{2} \sin px$$

pour p entier tel que $0 \leq p \leq n$.

- Si $e^{ix} = 1$ c'est-à-dire si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, le calcul direct de C et S montre que :

$$C = n + 1 \quad \text{et} \quad S = 0.$$

1.8 ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{C}$

Le corps $\mathbb{C}$ a été introduit pour permettre la résolution de l'équation $x^2 + 1 = 0$. Nous allons voir dans ce paragraphe que *toute équation du second degré à coefficients complexes admet des racines dans $\mathbb{C}$* .

En fait, on peut prouver, mais la démonstration est trop difficile pour la classe de Terminale, que toute équation $P(z) = 0$ où P est un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 et à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de d'Alembert-Gauss.

a) Racines carrées

Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe donné. On appelle **racine carrée** de Z tout nombre complexe $z = x + iy$ vérifiant

$$(1) \quad z^2 = Z.$$

Observons d'abord que si z_1 est une racine carrée de Z , $-z_1$ est également une racine carrée de Z car $(-z_1)^2 = z_1^2 = Z$. D'autre part, z_1 et $-z_1$ sont alors les deux seules racines carrées de Z puisque :

$$(1) \iff z^2 = z_1^2 \iff z^2 - z_1^2 = 0 \iff (z - z_1)(z + z_1) = 0 \\ \iff (z = z_1 \text{ ou } z = z_2).$$

● Si $Z = a$ est réel ($b = 0$), on voit immédiatement que les racines carrées de Z sont

$$\sqrt{a} \text{ et } -\sqrt{a} \text{ si } a \geq 0 \\ i\sqrt{-a} \text{ et } -i\sqrt{-a} \text{ si } a < 0.$$

● Si Z n'est pas réel ($b \neq 0$) on peut écrire

$$(1) \iff (x + iy)^2 = a + ib \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Il est commode de calculer $x^2 + y^2$ car, connaissant $x^2 - y^2$ et $x^2 + y^2$, on aura facilement x^2 et y^2 puis x et y qui répondront à la question si et seulement si $2xy = b$. On a :

$$(1) \implies |z|^2 = |Z| \quad \text{donc} \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Par suite :

$$(1) \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}) & (2) \\ y^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}) & (3) \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Mais si le couple (x, y) vérifie (2) et (3), alors

$$x^2 y^2 = \frac{1}{4} (a + \sqrt{a^2 + b^2})(-a + \sqrt{a^2 + b^2}) = \frac{1}{4} b^2$$

donc : $2 |xy| = |b|$

donc :

$$(1) \iff (S) \quad \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2}) \\ y^2 = \frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2}) \\ xy > 0. \end{cases}$$

Comme $a + \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ et $-a + \sqrt{a^2 + b^2} > 0$, il existe deux couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de réels solutions du système (S) :

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2})}, & y_1 &= \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \\ x_2 &= -\sqrt{\frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2})}, & y_2 &= -\varepsilon \sqrt{\frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \end{aligned}$$

où $\varepsilon = 1$ si $b > 0$ et $\varepsilon = -1$ si $b < 0$.

Les solutions de l'équation (1) sont

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{et} \quad z_2 = x_2 + iy_2 = -z_1.$$

Dans tous les cas, sauf lorsque $a = b = 0$, nous avons trouvé deux racines carrées opposées distinctes. Concluons.

Théorème

Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées distinctes.

REMARQUE Un nombre réel $a > 0$ admet deux racines carrées réelles opposées, on peut les distinguer entre elles par leur signe et désigner par le symbole $\sqrt{a}$ celle qui est positive. Au contraire, dans $\mathbb{C}$, les deux racines carrées d'un nombre complexe non nul sont indiscernables. Il faut donc totalement proscrire une écriture telle que $\sqrt{z}$ qui ne peut qu'être ambiguë.

EXEMPLE Chercher les racines carrées de $Z = 7 + 24i$.

Dans la pratique, on procède de la façon suivante :

L'équation $(x + iy)^2 = 7 + 24i$ est équivalente à $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = 24. \end{cases}$

D'autre part, $x^2 + y^2 = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$.

D'après l'étude générale, les solutions (x, y) cherchées sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ xy > 0. \end{cases}$$

D'où
$$x^2 = \frac{1}{2}(25 + 7) = 16, \quad y^2 = \frac{1}{2}(25 - 7) = 9.$$

On en déduit les deux racines carrées :

$$z_1 = 4 + 3i \quad \text{et} \quad z_2 = -(4 + 3i).$$

b) Équation du second degré

Soit à résoudre l'équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{où} \quad a \neq 0.$$

Cette équation est équivalente à

$$a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) = 0$$

soit :

$$a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) = 0.$$

Ou encore :

$$\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Soit δ une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation donnée est équivalente à :

$$\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2} = 0.$$

C'est-à-dire :

$$\left(z + \frac{b + \delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b - \delta}{2a} \right) = 0.$$

$\mathbb{C}$ étant un corps, on en déduit l'expression des racines :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{avec} \quad \delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$$

$$z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

z_1 et z_2 sont confondues si et seulement si $\delta = -\delta$ soit $\delta = 0$ (elles sont alors égales à $-\frac{b}{2a}$). D'où le théorème :

Théorème

L'équation du second degré dans $\mathbb{C}$ à coefficients complexes

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

admet deux racines :

distinctes si $b^2 - 4ac \neq 0$,

confondues si $b^2 - 4ac = 0$.

REMARQUE Si l'équation est donnée sous la forme $az^2 + 2b'z + c = 0$, on introduit $\Delta' = b'^2 - ac$ (discriminant « réduit ») et δ' tel que $\Delta' = \delta'^2$. Les racines sont alors

$$z_1 = \frac{-b' - \delta'}{a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b' + \delta'}{a}.$$

■ Cas particulier : a, b, c sont réels

Nous devons chercher les racines carrées de $b^2 - 4ac$, celles-ci ont une expression différente selon le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, soit :

si $b^2 - 4ac > 0$, on retrouve les formules classiques :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

si $b^2 - 4ac = 0$, d'après la remarque faite plus haut les racines sont réelles confondues :

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

si $b^2 - 4ac < 0$, les racines de Δ sont $i\sqrt{4ac - b^2}$ et $-i\sqrt{4ac - b^2}$. On en déduit les formules :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Les racines sont donc complexes conjuguées distinctes. Donc :

Théorème

L'équation du second degré dans $\mathbb{C}$ à coefficients réels $az^2 + bz + c$ ($a \neq 0$) admet deux racines :

réelles distinctes si $b^2 - 4ac > 0$,

réelles confondues si $b^2 - 4ac = 0$,

complexes conjuguées distinctes si $b^2 - 4ac < 0$.

c) Somme et produit des racines

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients complexes ($a \neq 0$).

- Si z_1 et z_2 sont les racines de cette équation, on a :

$$z_1 + z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} + \frac{-b + \delta}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$z_1 z_2 = \left(\frac{-b - \delta}{2a} \right) \left(\frac{-b + \delta}{2a} \right) = \frac{b^2 - \delta^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

- Réciproquement soit les nombres z_1 et z_2 tels que

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Les nombres z_1 et z_2 sont les racines de l'équation :

$$(z - z_1)(z - z_2) = 0$$

équivalente successivement à :

$$z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2 = 0$$

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$$

$$az^2 + bz + c = 0.$$

Concluons :

Théorème

Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients complexes ($a \neq 0$) sont les nombres complexes z_1 et z_2 tels que :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

En particulier si S et P sont deux nombres complexes donnés, les nombres complexes z_1 et z_2 tels que :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1z_2 = P \end{cases}$$

sont, en faisant $a = 1$, $b = -S$, $c = P$, les solutions de l'équation : $z^2 - Sz + P = 0$.

EXEMPLE Déterminer deux nombres complexes dont la somme est égale à $5 - 4i$ et le produit à $3(1 - 3i)$.

D'après le sous-paragraphe précédent, ces nombres complexes z_1 et z_2 sont les racines de l'équation

$$z^2 - (5 - 4i)z + 3(1 - 3i) = 0.$$

Le discriminant est :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = (5 - 4i)^2 - 12(1 - 3i) = 25 - 40i - 16 - 12 + 36i \\ &= -3 - 4i. \end{aligned}$$

Posons $\delta = x + iy$

$$(x + iy)^2 = -3 - 4i \text{ est équivalente à } \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4. \end{cases}$$

D'autre part

$$x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

On a :

$$(x + iy)^2 = -3 - 4i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ xy < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy < 0. \end{cases}$$

D'où une solution $(x, y) = (1, -2)$ du système.

En prenant $\delta = 1 - 2i$ on obtient les nombres :

$$z_1 = \frac{5 - 4i + 1 - 2i}{2} = 3 - 3i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{5 - 4i - 1 + 2i}{2} = 2 - i.$$

1.9 RACINES $n^{\text{ièmes}}$ D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

a) Racines $n^{\text{ièmes}}$

Soit Z un nombre complexe donné non nul, n un entier strictement positif. Nous nous proposons de chercher les nombres complexes z tels que $z^n = Z$. Ces nombres z (s'ils existent) sont appelés **racines $n^{\text{ièmes}}$** de Z .

Le cas $n = 1$ donne $z = Z$. Le cas $n = 2$ a déjà été étudié au paragraphe 1.8, nous allons ici retrouver les résultats obtenus par une autre méthode (plus rapide lorsque Z peut se mettre sous une forme trigonométrique simple). Soit donc $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Posons $Z = \rho e^{i\alpha}$ et $z = r e^{i\varphi}$ avec $\rho > 0$ et $r > 0$. L'équation $z^n = Z$ est successivement équivalente à

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\alpha}$$

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\varphi \equiv \alpha \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

On sait (cf. cours d'analyse tome 1) qu'étant donné un nombre réel $\rho > 0$, il existe un nombre réel $r > 0$ et un seul tel que $r^n = \rho$, cet unique nombre r étant noté $\sqrt[n]{\rho}$. L'équation $z^n = Z$ est donc encore équivalente à

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ ((\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}). \end{cases}$$

L'argument de z peut donc prendre n valeurs distinctes modulo 2π :

Théorème

Tout nombre complexe non nul $Z = \rho e^{i\alpha}$ admet n racines $n^{\text{ièmes}}$ distinctes; ce sont les nombres

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$$

où $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

REMARQUE Soit I_n un ensemble de n entiers relatifs consécutifs. Les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de $Z = \rho e^{i\alpha}$ sont encore les nombres

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \quad \text{où } k \in I_n.$$

■ Représentation géométrique

Comme les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z ont toutes le même module, et des arguments qui diffèrent de $\frac{2k\pi}{n}$, leurs images dans le plan P rapporté à un repère orthonormé sont les n sommets d'un polygone régulier.

EXEMPLES 1. Racines carrées de $1 + i\sqrt{3}$.

- On peut les calculer par la méthode « algébrique » du sous-paragraphe 1.8 a).
- Écrivons Z sous forme trigonométrique : $|Z| = \sqrt{1+3} = 2$, d'où :

$$Z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Les racines carrées de Z seront donc :

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -z_1.$$

2. Racines 5^{èmes} de -2 .

La forme trigonométrique du nombre -2 est $2e^{i\pi}$ les racines 5^{èmes} de -2 sont donc

$$z_0 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{5}}$$

$$z_1 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{3\pi}{5}}$$

$$z_2 = \sqrt[5]{2}e^{i\pi} = -\sqrt[5]{2}$$

$$z_3 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{7\pi}{5}}$$

$$z_4 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{9\pi}{5}}.$$

Les images de ces cinq nombres sont les sommets d'un pentagone régulier.

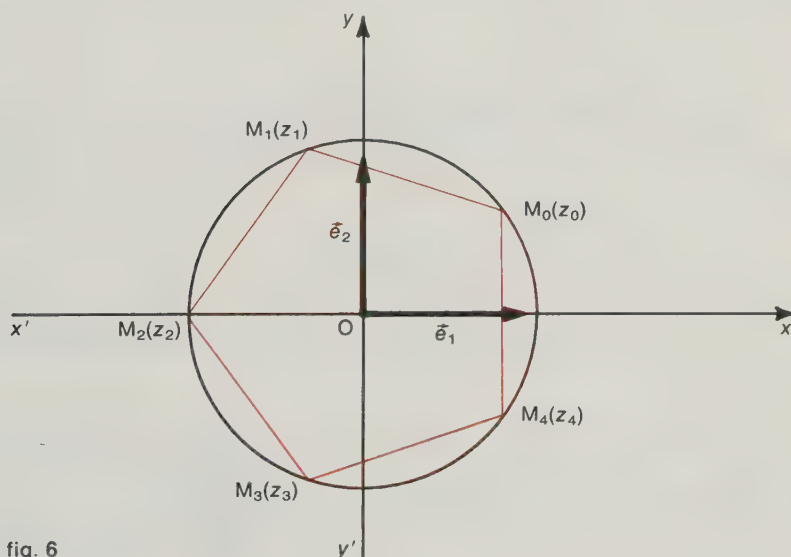


fig. 6

b) Le groupe des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1

Appelons $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1. D'après ce qui précède, $\mathbb{U}_n$ est formé des nombres

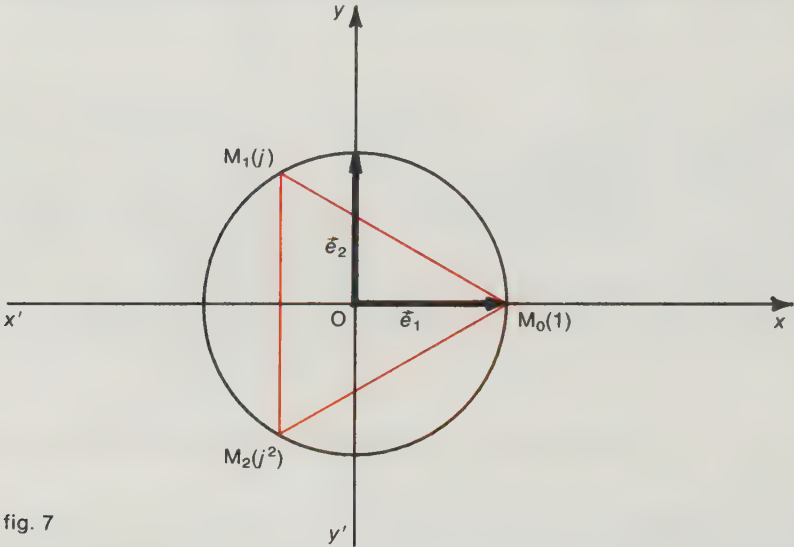
$$z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad \text{où } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Les images de ces nombres sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle $\mathcal{U}$.

- EXEMPLES**
- $n = 2$ les racines carrées de 1 sont 1 et -1 .
 - $n = 3$ les racines cubiques de 1 sont

$$z_0 = 1, \quad z_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad z_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

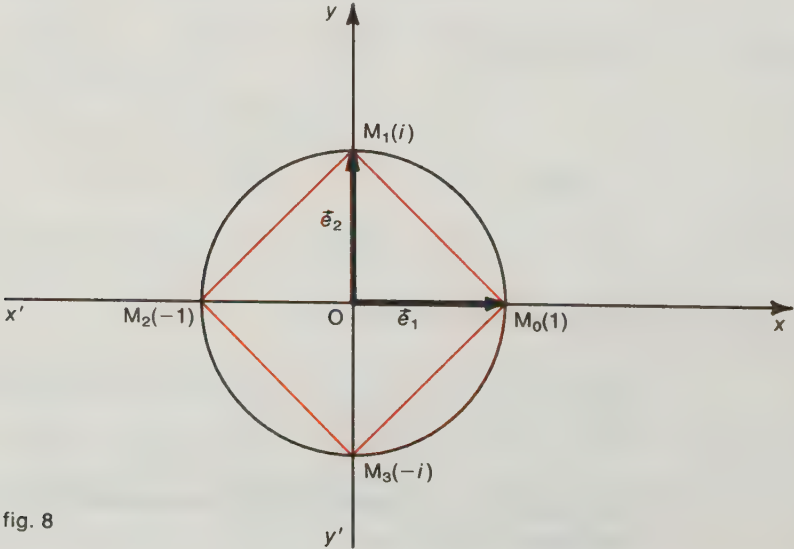
Le nombre $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est très souvent noté j . Notons que z_2 est égal à $j^2 = \bar{j} = \frac{1}{j}$.
Les images des trois nombres 1, j , j^2 sont les sommets d'un triangle équilatéral.



Notons la relation suivante, souvent utile :

$$1 + j + j^2 = 0$$

- $n = 4$. Les racines quatrièmes de 1 sont
- $$z_0 = 1; \quad z_1 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i; \quad z_3 = e^{i\pi} = -1; \quad z_4 = e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i.$$
- Les images de ces quatre nombres sont les sommets d'un carré.



Étudions quelques propriétés de $\mathbb{U}_n$.

- Si $u \in \mathbb{U}_n$ et $u' \in \mathbb{U}_n$, on a $(uu')^n = u^n u'^n = 1$ donc $uu' \in \mathbb{U}_n$ ce qui veut dire que $\mathbb{U}_n$ est *stable* pour la multiplication des nombres complexes.
- Comme la multiplication est associative et commutative dans $\mathbb{C}$, elle l'est dans $\mathbb{U}_n$.
- L'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{U}_n$ est 1.
- Si $u \in \mathbb{U}_n$, $\left(\frac{1}{u}\right)^n = \frac{1}{u^n} = 1$ donc $\frac{1}{u} \in \mathbb{U}_n$.

Nous venons de prouver :

Théorème

L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 est un groupe commutatif pour la multiplication des nombres complexes.

REMARQUE $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$ qui est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Notons que

$$z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = z_1^k.$$

Le groupe $\mathbb{U}_n$ est donc l'ensemble des puissances entières de z_1 .

Donnons une application de cette propriété : pour n entier strictement supérieur à 1,

$$z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 1 + z_1 + z_1^2 + \dots + z_1^{n-1} = \frac{1 - z_1^n}{1 - z_1} \quad (\text{car } z_1 \neq 1).$$

Comme $z_1^n = 1$, on a donc :

$$z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 0.$$

La somme des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 (pour n entier > 1) est nulle.

On retrouve, en particulier, pour $n = 3$: $1 + j + j^2 = 0$.

Revenons au problème général de la recherche des racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe non nul Z . Si z_k est l'une d'entre elles, on a $z_k \neq 0$ d'où :

$$z^n = Z \iff z^n = z_k^n \iff \left(\frac{z}{z_k}\right)^n = 1.$$

Autrement dit :

les racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z s'obtiennent en faisant les produits de l'une d'entre elles par les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1.

EXEMPLE Cherchons à résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 = (1 + 3i)^4$.

Une solution évidente de cette équation est $1 + 3i$. Les racines quatrième de 1 sont 1, i , -1 , $-i$. Donc les solutions de l'équation proposée sont :

$$1 + 3i, \quad i(1 + 3i) = -3 + i, \quad -1 - 3i, \quad -i(1 + 3i) = 3 - i.$$

Exercices

La construction de $\mathbb{C}$

1.1 On définit sur $\mathbb{C}^2$ les deux lois suivantes :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

$(\mathbb{C}^2, +, \times)$ est-il un corps?

1.2 Même question en remplaçant $\mathbb{C}$ par le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels.

1.3 On sait que $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. On définit sur $\mathbb{Q}^2$ les deux lois suivantes :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b) \times (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + ba').$$

Montrer que $K = (\mathbb{Q}^2, +, \times)$ est un corps. Montrer que K contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$ et un élément α tel que $\alpha^2 = (2, 0)$. Trouver un sous-corps de $\mathbb{R}$ isomorphe à K .

1.4 Soit f un automorphisme du corps $\mathbb{C}$ laissant invariants les éléments de $\mathbb{R}$ c'est-à-dire une bijection de $\mathbb{C}$ sur lui-même telle que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = x$$

$$(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2) \quad f(z + z') = f(z) + f(z')$$

et $f(zz') = f(z)f(z')$.

Que peut-on dire de $f(i)$? Montrer que f est l'identité ou la conjugaison (c'est-à-dire l'application $z \mapsto \bar{z}$).

Forme algébrique d'un nombre complexe

1.5 Simplifier

$$\prod_{p=1}^n \frac{a_p + ib_p}{b_p - ia_p} = \frac{a_1 + ib_1}{b_1 - ia_1} \frac{a_2 + ib_2}{b_2 - ia_2} \dots \frac{a_n + ib_n}{b_n - ia_n}$$

où tous les a_p et b_p sont réels et les dénominateurs non nuls.

1.6 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$(1 - i)z - 3i\bar{z} = 1 + 4i.$$

1.7 Soit l'équation

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

à coefficients réels et d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Démontrer que si cette équation admet pour racine z_0 , alors elle admet aussi pour racine $\bar{z}_0$.

1.8 On définit dans $\mathbb{C}$ une loi interne, notée $\star$, de la manière suivante :

si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$,

$$(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4,$$

on pose :

$$z \star z' = xx' + i(xy' + x'y).$$

1. Montrer que $(\mathbb{C}, +, \star)$ est un anneau commutatif unitaire (c'est-à-dire un groupe commutatif pour l'addition, la loi $\star$ est associative, commutative, distributive par rapport à l'addition et admet un élément neutre).

2. Déterminer l'ensemble $\mathbb{C}'$ des éléments de $\mathbb{C}$ inversibles pour la loi $\star$. Si $z = x + iy$ est un élément de $\mathbb{C}'$, montrer que son inverse $\bar{z}$ pour la loi $\star$ est $\bar{z} = \frac{\bar{z}}{x^2}$, $\bar{z}$ étant le complexe conjugué de z .

En déduire les éléments z de $\mathbb{C}'$ tels que $z = \bar{z}$. Montrer que $\mathbb{C}'$ est un groupe commutatif pour la loi $\star$.

1.9 Dans un plan rapporté à un repère ortho-normé, on associe au point M d'affixe $z = x + iy$ le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que :

$$z' = \frac{z + 2i}{z - 2}.$$

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit réel.

2. Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur.

1.10 Dans un plan rapporté à un repère ortho-normé, on associe au point M d'affixe

$$z = x + iy$$

le point M' d'affixe

$$z' = x' + iy'$$

tel que :

$$z' = (z - 1)(z - 2i).$$

Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit réel.

Forme trigonométrique et représentation géométrique d'un nombre complexe

1.11 Soit z et z' deux nombres complexes non nuls. A quelle condition nécessaire et suffisante, portant sur les arguments de z et z' , a-t-on

$$|z + z'| = |z| + |z'|?$$

Plus généralement $z_1, z_2, \dots, z_n$ étant des nombres complexes non nuls, à quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on :

$$|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|?$$

1.12 Montrer que :

$$(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2) \quad ||z| - |z'||| \leq |z - z'|.$$

1.13 Montrer que :

$$(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2) \quad |z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Interprétation géométrique?

1.14 Montrer, pour tout z de $\mathbb{C}$, l'équivalence :

$$(z \neq -1 \text{ et } |z| = 1) \iff (\exists x \in \mathbb{R}) \quad z = \frac{1+ix}{1-ix}.$$

1.15 Montrer, sans résoudre l'équation, que les solutions de

$$(z+i)^n = (z-i)^n \quad (n \text{ entier} > 1)$$

sont réelles.

1.16 Dans un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct, on pose :

$$j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

1. Démontrer que $1 + j + j^2 = 0$.

2. Soit un triangle équilatéral ABC. On dit qu'il est de sens direct si et seulement si une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $\frac{\pi}{3}$. On désigne par a, b, c les affixes des points A, B, C. Démontrer que (A, B, C) est un triangle équilatéral de sens direct si et seulement si :

$$a + bj + cj^2 = 0.$$

1.17 Dans un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les points A, B, C d'affixes respectives a, b, c . Démontrer que le triangle ABC est un triangle isocèle rectangle en A tel qu'une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $\frac{\pi}{2}$ si et seulement si :

$$(1-i)a + ib - c = 0.$$

1.18 Trouver l'ensemble des points M images des nombres complexes

$$z = x + iy \quad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$$

tels que :

$$|(1+i)z - 2i| = 2.$$

1.19 Déterminer le module et un argument de :

$$(1+i)^5, \quad (1+i\sqrt{3})^5, \\ \frac{1 + (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3}{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^2} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

1.20 Mettre $\cos 4x$ sous la forme $P(\cos x)$ où P est un polynôme de degré 4. Mettre $\sin 4x$ sous la forme

$$\sin x Q(\cos x)$$

où Q est un polynôme de degré 3.

Calculer $\operatorname{tg} 4x$ en fonction de $\operatorname{tg} x$, quand ces nombres existent.

1.21 Linéariser $\cos^6 x$ et $\sin^6 x$.

1.22 Linéariser $\sin^3 x \cos^4 x$.

1.23 Calculer

$$S = \cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx \quad (n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}).$$

1.24 Trouver

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2} \right) \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$

1.25 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} \cos a + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 \\ \sin a + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0 \end{cases}$$

où a est un nombre réel donné et (x, y) un couple de nombres réels cherché.

1.26 Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xyz = 1 \\ |x| = |y| = |z|. \end{cases}$$

1.27 A tout nombre complexe z on associe son image m dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

Pour tout nombre complexe z différent de i , on pose

$$Z = \frac{2z-4}{z-i}.$$

1. Comment choisir l'image m de z pour que Z soit réel?

2. Comment choisir l'image m de z pour que Z ait pour argument $-\frac{\pi}{2}$? On peut traiter cet exercice par le calcul ou par un raisonnement géométrique.

(Exercice. Bac. C. Montpellier 1979.)

Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe. Équations dans $\mathbb{C}$

1.28 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z^2 - 2z \cos \alpha + 1 = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \text{ donné}).$$

1.29 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$(4+2i)z^2 - 2(3+2i)z + 2-i = 0.$$

1.30 On pose, pour tout nombre complexe z ,

$$P(z) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + (6-2i)z + 3-2i.$$

1. Montrer que le polynôme P possède une seule racine réelle z_0 que l'on déterminera. En déduire une factorisation de $P(z)$ sous la forme $(z-z_0)Q(z)$ où Q est un polynôme du 3^e degré.

2. Vérifier que $Q(i) = 0$ et en déduire les solutions de l'équation : $P(z) = 0$.

3. On appelle $z_1 = i, z_2, z_3$ les racines du polynôme Q . Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points M_0, M_1, M_2, M_3 d'affixes respectives z_0, z_1, z_2, z_3 . Montrer que (M_1, M_2, M_3) est un triangle équilatéral de centre de gravité M_0 .

(D'après Exercice. Bac. C. Rouen 1981.)

1.31 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$(z+1)^n = (z-1)^n \quad (n \text{ entier} > 1).$$

1.32 1. On donne $Z = -8(1+i\sqrt{3})$. Montrer que $z_1 = \sqrt{3} - i$ est une racine quatrième de Z .

1. EXERCICES

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 + 8 + 8i\sqrt{3} = 0.$$

Donner le module et un argument de chaque solution.

1.33 Soit

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 3x + 1 \quad (x \in \mathbb{C}).$$

1. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de l'équation $P(x) = 0$, alors $\bar{z}$ (complexe conjugué de z) et $\frac{1}{z}$ sont aussi racines de cette équation.

2. Vérifier que $1 + i$ est une racine de l'équation $P(x) = 0$, puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

3. Écrire $P(x)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du deuxième degré à coefficients réels.

1.34 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Soit

$$z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1.

Calculer $S_p = z_0^p + z_1^p + \dots + z_{n-1}^p$.

En déduire la valeur des sommes

$$\Sigma_p = 1 + \cos \frac{2p\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)p\pi}{n}$$

$$\Sigma'_p = \sin \frac{2p\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)p\pi}{n}.$$

1.35 Dans cet exercice, Z désigne le nombre complexe

$$\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}.$$

1. Vérifier que $Z^5 - 1 = 0$. En déduire la relation $1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 = 0$.

2. a) Exprimer Z , Z^2 , Z^3 , Z^4 sous forme trigonométrique.

b) Démontrer les égalités :

$$Z + Z^4 = 2 \cos \frac{2\pi}{5} \quad \text{et} \quad Z^2 + Z^3 = 2 \cos \frac{4\pi}{5}.$$

3. Utiliser les résultats des questions 1. et 2. pour trouver une relation entre

$$\cos \frac{2\pi}{5} \quad \text{et} \quad \cos \frac{4\pi}{5},$$

puis montrer que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est racine de l'équation

$$4x^2 + 2x - 1 = 0;$$

en déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

(Exercice. Bac. E. Polynésie. 1981.)

1.36 On considère le nombre complexe

$$z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$$

qui est une racine 7^e de 1.

1. On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$. Montrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive.

2. Calculer $S + T$, ST puis en déduire S et T .

(Exercice. Bac. C. Orléans-Tours 1979.)

1.37 Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E)

$$\left(\frac{2z+1}{z-1} \right)^4 = 1.$$

Placer dans le plan complexe, les points images des solutions de (E) et démontrer que ces points sont situés sur un même cercle que l'on déterminera.

1.38 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^6 + (1 - 2i\sqrt{2})z^3 - 2i\sqrt{2} = 0.$$

Représenter chacune des solutions dans le plan complexe (plan muni d'un repère orthonormé direct).

(Exercice. Bac. C. Polynésie 1981.)

1.39 Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation

$$z^3 + (-4 - 6i)z^2 + (-4 + 20i)z + 16 - 16i = 0.$$

1. Démontrer que cette équation admet une racine réelle z_0 que l'on précisera.

2. Trouver les racines de cette équation.

3. Démontrer que les trois racines trouvées sont éléments d'une suite géométrique de premier terme z_0 dont on précisera la raison.

(Exercice. Bac. E. Session de remplacement. Besançon 1981.)

1.40 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$x^2 + 4x + 1 + i(3x + 5) = 0.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(x^2 + 4x + 1)^2 + (3x + 5)^2 = 0.$$

3. En déduire quatre nombres réels A , B , C et D tels que

$$(x^2 + 4x + 1)^2 + (3x + 5)^2 = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D).$$

(Exercice. Bac. E. Grenoble 1978.)

1.41 On considère l'équation bicarrée suivante :

$$z^4 - z^2 + 1 = 0.$$

1. Résoudre cette équation dans le corps des nombres complexes; on déterminera le module et l'argument des quatre racines z_1 , z_2 , z_3 et z_4 qui seront également présentées sous la forme $a + ib$ (a et b réels). Construire les images de ces racines dans le plan complexe (i tel que $i^2 = -1$).

2. Écrire le polynôme $z^4 - z^2 + 1$ sous la forme d'un produit de quatre facteurs du premier degré au moyen des racines calculées au 1. En déduire que le trinôme bicarré $z^4 - z^2 + 1$ peut s'écrire sous la forme d'un produit de deux trinômes du second degré à coefficients réels.

1.42 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(1) \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0,$$

on donnera les solutions :

a) sous forme trigonométrique;

b) sous forme algébrique (on divisera les deux membres de (1) par z^2 et on posera

$$Z = z + \frac{1}{z}.$$

2. En déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

1.43 Soit le polynôme à variable complexe $P(z) = z^2 - 2pz + q$, les coefficients p et q étant des éléments de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Soit (E) l'équation dans $\mathbb{C}$: $P(z) = 0$.

1. On suppose dans toute cette question que $q = 1$.

a) Écrire les relations existant dans ce cas entre les modules et les arguments des solutions de l'équation (E).

b) On suppose, en outre, que p est le complexe de module 1 et d'argument φ :

— Pour quelles valeurs de φ les solutions sont-elles réelles? imaginaires pures? Écrire dans chaque cas les solutions de (E).

— Quelles sont les solutions de (E) si $\varphi = \frac{\pi}{6}$?

2. On suppose dans cette question p de module 1, d'argument φ avec

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

et q de module $2 \sin \varphi$ et d'argument $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Sans résoudre l'équation (E) correspondante, chercher, lorsque φ varie, l'ensemble des points M , milieux de (M_1, M_2) , M_1 et M_2 étant les images dans le plan complexe des solutions de l'équation. Calculer l'axe du vecteur $M_1 M_2$.

Quelle conséquence pouvez-vous en tirer pour M_1 et M_2 ?

Révision

1.44 Dans tout le problème on désigne par P le plan complexe.

On définit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes une loi de composition interne, notée $\star$ par :

$$z \star z' = xx' + i(xy' + yx')$$

$$\text{si } z = x + iy \text{ et } z' = x' + iy'.$$

A) 1. Montrer que la loi $\star$ est commutative et associative.

2. Démontrer que $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$\overline{z \star z'} = \overline{z} \star \overline{z'},$$

$\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z .

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z \star (2i) = 0$.

B) On considère l'équation E_θ :

$$z \star z + [2\sqrt{2}(\cos \theta + i \sin \theta)] \star z + 1 + 2i \sin 2\theta = 0$$

où z est l'inconnue complexe et θ un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0, \pi[$.

1. Discuter, suivant les valeurs du paramètre θ , l'existence et le nombre des solutions de E_θ .

2. Lorsque E_θ admet deux solutions z_1 et z_2 , vérifier que :

$$|z_1 - z_2| = 2\sqrt{\cos 2\theta}.$$

C) 1. Déterminer l'ensemble des points du plan P dont l'axe z vérifie l'égalité :

$$|z + 1 + i| \star (2i) = 4i.$$

2. Soit (H) l'ensemble des points du plan P dont l'axe z vérifie l'égalité :

$$|(2i) \star (z - 1)| = |z|.$$

Démontrer que (H) a pour équation :

$$y^2 = 3x^2 - 8x + 4.$$

(Problème. Bac. E. Partiel. Orléans-Tours 1977.)

1.45 Soit E l'ensemble des nombres complexes différents de $-1, 0, 1$.

A) 1. On pose

$$e(z) = z; \quad f(z) = -\frac{1}{z}; \quad g(z) = \frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1};$$

$$h(z) = \frac{z+1}{1-z} = -1 + \frac{2}{1-z}.$$

Montrer que ces relations définissent des applications bijectives e, f, g, h de E vers E .

2. Soit G l'ensemble de ces quatre applications. Démontrer que G est un groupe commutatif pour la composition des applications.

3. On définit l'application φ de E dans $\mathbb{C}$ par

$$\varphi = e + f + g + h.$$

Quelles sont les applications composées $\varphi \circ f$, $\varphi \circ g$, $\varphi \circ h$? L'application φ est-elle bijective?

4. Étant donné un élément a de E , on veut résoudre dans E l'équation :

$$(1) \quad \varphi(z) = \varphi(a).$$

a) Indiquer, sans calculs, quatre solutions, distinctes ou non, de l'équation (1).

b) Montrer que l'équation (1) ne peut avoir plus de quatre solutions (on pourra admettre qu'un polynôme de degré n , à coefficients complexes, a au plus n racines distinctes dans $\mathbb{C}$).

c) Montrer que, suivant la valeur de a , l'équation (1) admet soit quatre solutions distinctes, soit une seule solution.

B) Étant donné un nombre complexe z , on définit les nombres complexes :

$$z_1 = f(z); \quad z_2 = g(z); \quad z_3 = h(z); \quad z_4 = \varphi(z)$$

où f, g, h et φ sont les fonctions définies dans la partie A). On désigne respectivement par M, M_1, M_2, M_3, M_4 les images de z, z_1, z_2, z_3, z_4 dans un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit F l'ensemble des éléments de E qui ont pour module 1. Si z est un élément de F , on désigne par θ son argument appartenant à l'ensemble

$$]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[.$$

Exprimer en fonction de θ les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 et donner pour chacun d'eux le module et un argument.

2. En déduire les ensembles décrits respectivement par les points M_1, M_2, M_3, M_4 quand M décrit le cercle de centre Ω et de rayon 1, privé des points d'axes -1 et 1 .

(D'après Bac. C. Grenoble 1979.)

2

ESPACES VECTORIELS

2.1 DÉFINITION. EXEMPLES

Vous connaissez l'ensemble des vecteurs du plan et l'ensemble des vecteurs de l'espace. La structure de ces ensembles, munis d'une loi de composition interne et d'une loi de composition externe, se retrouve dans de très nombreux exemples. Donnons la définition générale d'une telle structure :

Définition

Soit un ensemble $\mathcal{U}$ muni d'une loi de composition interne notée $+$ appelée **addition** et d'une loi de composition externe notée $\cdot$ appelée **multiplication** par un réel associant à tout couple $(\lambda, \vec{v})$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{U}$ un élément de $\mathcal{U}$ noté $\lambda \cdot \vec{v}$.

On dit que $(\mathcal{U}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (on dit aussi espace vectoriel sur $\mathbb{R}$) si et seulement si :

- $(\mathcal{U}, +)$ est un groupe commutatif.
- Quels que soient les réels λ et μ et les éléments $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$, on a :

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{v}$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v}$$

$$\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}.$$

Les éléments de $\mathcal{U}$ sont appelés **vecteurs**. Les éléments de $\mathbb{R}$ sont des **scalaires** ou **opérateurs**.

Pour simplifier l'écriture, nous omettrons le $\cdot$ de la multiplication externe et nous écrirons $\lambda\vec{v}$ au lieu de $\lambda \cdot \vec{v}$.

Si, dans la définition précédente, on remplace $\mathbb{R}$ par un autre corps commutatif K ($\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \dots$), on définit un K -espace vectoriel (ou espace vectoriel sur K).

Comme nous n'allons considérer que des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, nous dirons désormais « espace vectoriel » au lieu de « $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ».

EXEMPLES 1. Soit l'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n -uplets de nombres réels, muni de l'addition définie quels que soient $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

et de la multiplication externe définie quels que soient λ de $\mathbb{R}$ et X de $\mathbb{R}^n$ par

$$\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Vous vérifierez, en appliquant la définition précédente, que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

En particulier $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, munis des lois précédentes, sont des espaces vectoriels.

2. Soit l'ensemble $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ des fonctions numériques définies sur un ensemble D , muni de l'addition : quelles que soient f et g de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $f + g$ est définie par

$$(\forall x \in D) \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

et de la multiplication par un nombre réel : quels que soient λ de $\mathbb{R}$ et f de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, λf est définie par

$$(\forall x \in D) \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Vous vérifierez, en appliquant la définition, que $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

En particulier si l'on prend $D = \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ n'est autre que l'ensemble des suites numériques définies sur $\mathbb{N}$ et $(\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

2.2 RÈGLES DE CALCUL DANS UN ESPACE VECTORIEL

En plus des règles de calcul faisant intervenir les propriétés de groupe commutatif, il existe un certain nombre de règles d'usage constant et liées à la multiplication externe. Appelons $\vec{0}$ le vecteur nul, élément neutre de l'addition des vecteurs, qu'on ne confondra pas avec le réel nul 0, élément neutre de l'addition des réels.

• Quels que soient le réel λ et le vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$, on a :

$$(\lambda + 0)\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$\lambda\vec{v} + 0\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

et en ajoutant l'opposé de $\lambda\vec{v}$ qui est $-(\lambda\vec{v})$:

$$-(\lambda\vec{v}) + \lambda\vec{v} + 0\vec{v} = -(\lambda\vec{v}) + \lambda\vec{v}$$

$$0\vec{v} = \vec{0}.$$

• On a aussi :

$$\lambda(\vec{v} + \vec{0}) = \lambda\vec{v}$$

$$\lambda\vec{v} + \lambda\vec{0} = \lambda\vec{v}$$

$$-(\lambda\vec{v}) + \lambda\vec{v} + \lambda\vec{0} = -(\lambda\vec{v}) + \lambda\vec{v}$$

$$\lambda\vec{0} = \vec{0}.$$

- Réciproquement si $\lambda \vec{v} = \vec{0}$, deux cas peuvent se présenter :
 $\lambda = 0$ et l'égalité $\lambda \vec{v} = \vec{0}$ est bien vérifiée quel que soit $\vec{v}$;
 $\lambda \neq 0$ soit alors λ^{-1} l'inverse de λ , on a

$$\lambda^{-1}(\lambda \vec{v}) = \vec{0}$$

$$1 \vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \vec{0}.$$

Conclusion :

$$\lambda \vec{v} = \vec{0} \iff \lambda = 0 \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}$$

- $\lambda \vec{v} + (-\lambda) \vec{v} = [\lambda + (-\lambda)] \vec{v} = 0 \vec{v} = \vec{0}$ donc $(-\lambda) \vec{v}$ est égal à l'opposé $-(\lambda \vec{v})$ de $\lambda \vec{v}$.

$$\lambda \vec{v} + \lambda (-\vec{v}) = \lambda [\vec{v} + (-\vec{v})] = \lambda \vec{0} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \lambda (-\vec{v}) = -(\lambda \vec{v}).$$

On peut donc écrire :

$$(-\lambda) \vec{v} = \lambda (-\vec{v}) = -(\lambda \vec{v})$$

qu'on écrira plus simplement $-\lambda \vec{v}$.

- $(\lambda - \mu) \vec{v} = [\lambda + (-\mu)] \vec{v} = \lambda \vec{v} + (-\mu) \vec{v} = \lambda \vec{v} - \mu \vec{v}$
 $\lambda (\vec{u} - \vec{v}) = \lambda [\vec{u} + (-\vec{v})] = \lambda \vec{u} + \lambda (-\vec{v}) = \lambda \vec{u} - \lambda \vec{v}.$

Il en résulte que :

$$\begin{array}{l} \text{si } \vec{v} \neq \vec{0}, \text{ on a } \lambda = \mu \iff \lambda \vec{v} = \mu \vec{v} \\ \text{si } \lambda \neq 0, \text{ on a } \vec{u} = \vec{v} \iff \lambda \vec{u} = \lambda \vec{v}. \end{array}$$

2.3 SOUS-ESPACES VECTORIELS

a) Parties stables

Comment reconnaître qu'une partie de $\mathcal{U}$ est un espace vectoriel? Donnons quelques définitions.

Vous démontrerez facilement que l'on a :

$$[(1) \text{ et } (2)] \iff (3).$$

Définitions

Soit $\mathcal{U}'$ une partie d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$.

1. On dit que $\mathcal{U}'$ est stable pour l'addition dans $\mathcal{U}$ si et seulement si :

$$(1) \quad (\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{U}'^2) \quad \vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{U}'.$$

2. On dit que $\mathcal{U}'$ est stable pour la multiplication externe de $\mathcal{U}$ si et seulement si :

$$(2) \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad (\forall \vec{v} \in \mathcal{U}') \quad \lambda \vec{v} \in \mathcal{U}'.$$

3. On dit que $\mathcal{U}'$ est stable par combinaisons linéaires si et seulement si :

$$(3) \quad (\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2) \quad (\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{U}'^2) \quad \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in \mathcal{U}'.$$

b) Sous-espaces vectoriels

Définition

On dit qu'une partie $\mathcal{U}'$ d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$ si et seulement si $\mathcal{U}'$ est un espace vectoriel pour les deux opérations de $\mathcal{U}$.

Cela signifie que $\mathcal{U}'$ est stable pour les deux opérations de $\mathcal{U}$, que $(\mathcal{U}', +)$ est un groupe commutatif et que la multiplication externe, appliquée à $\mathcal{U}'$, possède les quatre propriétés données dans la définition d'un espace vectoriel. Dans la pratique, il est beaucoup trop long de démontrer toutes ces propriétés. Nous allons donner un théorème caractérisant les sous-espaces vectoriels. Si $\mathcal{U}'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$, on a les propriétés (1) et (2) et par conséquent la propriété équivalente (3).

Réciproquement, soit $\mathcal{U}'$ une partie *non vide* de $\mathcal{U}$ telle que l'on ait (1) et (2). Démontrons que $\mathcal{U}'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$. Puisque l'on a (1) et (2), l'addition interne et la multiplication externe sur $\mathcal{U}$ définissent une addition interne et une multiplication externe sur $\mathcal{U}'$ possédant les propriétés suivantes : l'addition dans $\mathcal{U}'$ est associative et commutative comme dans $\mathcal{U}$, les quatre propriétés de la loi $\cdot$ données dans la définition d'un espace vectoriel sont encore vérifiées pour $\mathcal{U}'$.

D'autre part, puisque $\mathcal{U}'$ n'est pas vide, $\mathcal{U}'$ contient au moins un élément $\vec{v}$ et puisque $\mathcal{U}'$ est stable pour la multiplication externe, on a :

$$0\vec{v} = \vec{0} \in \mathcal{U}'.$$

Pour tout $\vec{v}$ de $\mathcal{U}'$, on a aussi :

$$(-1)\vec{v} = -\vec{v} \in \mathcal{U}'.$$

Donc $(\mathcal{U}', +, \cdot)$ est bien un espace vectoriel. Concluons :

Théorème

Une partie d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$ si et seulement si elle est non vide et stable par combinaisons linéaires.

EXEMPLES

1. L'ensemble E des éléments de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(2x, x)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car :

- E est une partie de $\mathbb{R}^2$, non vide (par exemple $(2, 1) \in E$);
- $(2x, x) + (2x', x') = (2(x + x'), x + x') \in E$
- $\lambda(2x, x) = (2\lambda x, \lambda x) \in E$

donc E est stable par combinaisons linéaires.

2. L'ensemble S des suites définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation de récurrence
 $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$

est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites numériques définies sur $\mathbb{N}$ (cf. § 2.1 exemple 2) car :

- S est une partie de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, non vide (la suite nulle : $n \mapsto 0$ vérifie la relation de récurrence);

- si u et v sont deux éléments de S et λ et μ des réels quelconques

$(\forall n \in \mathbb{N})$

$$u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$$

$$v_{n+2} = -v_{n+1} + 2v_n$$

d'où

$$\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = -(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + 2(\lambda u_n + \mu v_n)$$

donc $\lambda u + \mu v \in S$ ce qui montre que S est stable par combinaisons linéaires.

Vous montrerez, de même, que :

3. l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ et bornées est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$;

4. l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à n auxquels on ajoute le polynôme nul est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

5. l'ensemble des fonctions paires définies sur D (partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à $x = 0$) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$; il en est de même de l'ensemble des fonctions impaires définies sur D ;

6. l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ (où y, y', y'' sont les valeurs de la fonction, de sa dérivée, de sa dérivée seconde en tout point x de $\mathbb{R}$) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

7. $\{\vec{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$.

CONTRE-EXEMPLES

1. L'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(x, 1)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car, par exemple, $(0, 1) + (0, 1) = (0, 2)$ n'appartient pas à l'ensemble.

2. La partie vide n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{U}$.

3. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' = 1$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car si l'on a

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f''(x) + f'(x) = 1 \quad \text{et} \quad g''(x) + g'(x) = 1,$$

alors

$$(f'' + g'')(x) + (f' + g')(x) = 2$$

donc $f + g$ n'est pas solution de l'équation différentielle.

2) Intersection de sous-espaces vectoriels

Considérons une famille $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$ obtenue en faisant une application $i \mapsto \mathcal{U}_i$ d'un ensemble d'indices I dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{U}$. Par exemple si $I = \{1, 2, \dots, n\}$ cette famille n'est autre que $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n)$. L'intersection de cette famille est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$ car :

- le vecteur nul de $\mathcal{U}$ appartient à chaque $\mathcal{U}_i$ donc à leur intersection. Donc cette intersection est une partie non vide de $\mathcal{U}$;
- chaque sous-espace vectoriel $\mathcal{U}_i$ est stable par combinaisons linéaires, donc leur intersection aussi. Énonçons :

Théorème

L'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$.

2.4 COMBINAISONS LINÉAIRES. FAMILLES GÉNÉRATRICES

Nous n'envisagerons que des familles finies de vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ obtenues en faisant des applications de $I = \{1, 2, \dots, n\}$ dans $\mathcal{U}$.

Définition

Soit une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$. On dit qu'un vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ si et seulement s'il existe une famille $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de nombres réels tels que :

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n.$$

On écrit $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$.

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$ car :

- c'est une partie de $\mathcal{U}$, non vide (elle contient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$);

- soit deux combinaisons linéaires

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{v}_i,$$

quels que soient les réels λ et μ on a :

$$\lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i + \mu \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i + \mu \beta_i) \vec{v}_i$$

cette dernière somme est une combinaison linéaire des vecteurs de $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$. Énonçons :

Théorème et définitions

Soit une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$. L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$.

On dit que ce sous-espace vectoriel est engendré par la famille ou que la famille est une famille génératrice de ce sous-espace vectoriel.

Nous noterons $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ le sous-espace vectoriel engendré par $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$.

EXEMPLES

1. L'ensemble des combinaisons linéaires des polynômes $f : x \mapsto 1$ et $g : x \mapsto x^2$ est l'ensemble des polynômes : $x \mapsto ax^2 + b$.

2. L'ensemble des combinaisons linéaires des triplets $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets

$$\alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

c'est-à-dire $\mathbb{R}^3$. Donc $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

3. L'ensemble des combinaisons linéaires des éléments

$$\vec{v}_1 = (-2, 1, 5), \quad \vec{v}_2 = (3, 2, 0), \quad \vec{v}_3 = (5, 1, -5)$$

de $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets

$$\begin{aligned} \alpha_1(-2, 1, 5) + \alpha_2(3, 2, 0) + \alpha_3(5, 1, -5) \\ = (-2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 5\alpha_1 - 5\alpha_3). \end{aligned}$$

Mais $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$: par exemple, $\vec{u} = (1, 2, 0)$ est une combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ si l'on sait trouver des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ 5\alpha_1 - 5\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

on aboutit à

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 \end{cases}$$

ce qui est impossible.

Cherchons si le vecteur $\vec{v} = (7, 0, -10)$ est une combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. On arrive au système

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 7 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 5\alpha_1 - 5\alpha_3 = -10 \end{cases} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = -2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

ce qui montre que $\vec{v}$ est combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ de plusieurs façons :
 si l'on choisit $\alpha_1 = 1$, alors $\alpha_3 = 3$, $\alpha_2 = -2$ et $\vec{v} = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$;
 si l'on choisit $\alpha_1 = 0$, alors $\alpha_3 = 2$, $\alpha_2 = -1$ et $\vec{v} = -\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3$.
 On en déduit en retranchant membre à membre :

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}.$$

Une telle relation où le vecteur nul s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ avec des réels **non tous nuls** est appelée **relation linéaire non triviale**, pour la distinguer de l'égalité triviale (et vraie) :

$$0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 = \vec{0}.$$

Cet exemple montre aussi qu'on ne doit dire que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont les **coefficients** de la combinaison linéaire $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3$ que si l'on est sûr de l'unicité du triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

2.5 INDÉPENDANCE LINÉAIRE. FAMILLES LIBRES ET LIÉES

a) Unicité de la décomposition $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$ quand elle existe

L'exemple précédent nous conduit à étudier, plus généralement, dans quel cas on a

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{v}_i$$

avec, par exemple, $\alpha_1 \neq \beta_1$ (au besoin, on changera l'ordre des vecteurs pour se ramener à $\alpha_1 \neq \beta_1$). On a alors, par soustraction,

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) \vec{v}_i = \vec{0}$$

qui est une relation linéaire non triviale puisque $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$.
 Réciproquement, si l'on a une relation linéaire non triviale

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

avec, par exemple, $\lambda_1 \neq 0$, alors la combinaison linéaire

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$$

peut encore être considérée sous la forme

$$\vec{v} = (\lambda_1 + \alpha_1) \vec{v}_1 + (\lambda_2 + \alpha_2) \vec{v}_2 + \dots + (\lambda_n + \alpha_n) \vec{v}_n$$

avec $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \alpha_1$. Il n'y a pas unicité de la décomposition de $\vec{v}$.

Théorème et définition

Soit une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$ et $\vec{v}$ un vecteur quelconque de $\mathcal{U}$. Pour qu'une égalité de la forme

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$$

ne soit possible que d'une manière *au plus*, il faut et il suffit qu'il n'existe aucune relation linéaire non triviale entre $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, c'est-à-dire que l'égalité

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

soit équivalente à $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

On traduit cette propriété en disant que la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ est *libre* ou que les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ sont *linéairement indépendants*. Les réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont appelés, dans ce cas, les *coefficients* de la décomposition de $\vec{v}$ par rapport à la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$.

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ est *liée* ou que les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ sont *linéairement dépendants*.

REMARQUE Ces propriétés sont indépendantes de l'ordre des vecteurs.

**EXERCICE
RÉSOLU**

Soit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = (-2, 1, 2), \quad \vec{v}_2 = (1, -3, -3), \quad \vec{v}_3 = (3, 1, -1), \quad \vec{v}_4 = (-3, 1, -1).$$

Montrer que la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est liée et que la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4)$ est libre. Comparer les sous-espaces vectoriels :

$$\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3), \quad \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4), \quad \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4).$$

- Écrivons une relation linéaire entre $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$:

$$\lambda_1(-2, 1, 2) + \lambda_2(1, -3, -3) + \lambda_3(3, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 & (1) \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (2) \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & (3). \end{cases}$$

Tirons λ_3 de (3) et reportons sa valeur dans (1) et (2). On a :

$$\begin{cases} \lambda_3 = 2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ 4\lambda_1 - 8\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 - 6\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_3 = 2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ \lambda_1 = 2\lambda_2 \end{cases}$$

il suffit de prendre $\lambda_2 = 1$ d'où $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_3 = 4 - 3 = 1$ pour avoir la relation linéaire non triviale :

$$2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$$

la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est *liée*.

- Procédons de même avec $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4)$. On a :

$$\begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_3 = 2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ -8\lambda_1 + 10\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 - 6\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

la dernière égalité donne $\lambda_1 = 2\lambda_2$ d'où $-16\lambda_2 + 10\lambda_2 = -6\lambda_2 = 0$ et enfin $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = 0$. La famille est *libre*.

- Puisque $\vec{v}_3 = -2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, on a

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = (\alpha_1 - 2\alpha_3) \vec{v}_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) \vec{v}_2$$

donc

$$\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2).$$

Par suite $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est inclus dans $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4)$, l'inclusion est stricte car $\vec{v}_4$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. On dit que $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est un **sous-espace vectoriel strict** de $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4)$.

Enfin $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4)$, contenant $\vec{v}_3$, est égal à $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$.

b) Un exemple important

Considérons une famille de polynômes $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ dont les degrés sont deux à deux distincts. Nous les noterons $d_1, d_2, \dots, d_n$ en supposant par exemple

$$d_1 < d_2 < \dots < d_n.$$

Ces polynômes sont éléments d'un espace vectoriel : celui des polynômes réels (qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Montrons qu'ils forment une famille libre. En effet soit la combinaison linéaire

$$f = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_n P_n$$

pour étudier son degré, nous avons 2 cas :

- si $\lambda_n \neq 0$, f est de degré d_n car $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ sont de degrés strictement inférieurs à d_n ;

- si $\lambda_n = 0$, nous avons encore 2 cas : $\lambda_{n-1} \neq 0$, $\lambda_{n-1} = 0$.

Au bout d'un certain nombre d'étapes, on trouvera que f est de degré d_m si l'on a

$$\lambda_m \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_n = \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_{m+1} = 0.$$

Donc si l'un des λ_i au moins n'est pas nul, f n'est pas le polynôme nul. Par suite f est le polynôme nul seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. La famille $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est libre. Par exemple, les polynômes :

$$x \mapsto 1, \quad x \mapsto x, \quad x \mapsto x^2, \quad x \mapsto x^3, \quad x \mapsto x^4$$

sont linéairement indépendants;

les polynômes :

$$x \mapsto x^{10}, \quad x \mapsto x^{12}, \quad x \mapsto x^{14}, \quad x \mapsto x^{16}, \quad x \mapsto x^{18}$$

sont linéairement indépendants.

c) Trois propriétés fondamentales

1. Soit une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$. Si l'un des vecteurs est nul, par exemple, $\vec{v}_1 = \vec{0}$ (au besoin, on changera l'ordre des vecteurs pour se ramener à ce cas), nous avons une relation linéaire non triviale

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

en prenant $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Donc :

Théorème

Toute famille dont l'un des vecteurs est nul est liée.

C'est le cas de la famille $(\vec{0})$.

2. Soit une famille liée $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$. On a $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$ avec des λ_i non tous nuls. Cette relation peut s'écrire, en considérant un vecteur quelconque $\vec{v}_{n+1}$:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i + 0 \vec{v}_{n+1} = \vec{0}$$

qui est encore une relation linéaire non triviale puisque les λ_i ne sont pas tous nuls. Donc :

Théorème

Si l'on ajoute un vecteur à une famille liée, on obtient encore une famille liée.

3. Soit une famille libre $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$. Si l'on enlève un vecteur de la famille, la famille obtenue est libre car si elle était liée, en ajoutant ce vecteur on aurait $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ qui serait liée d'après le théorème précédent. Ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc :

Théorème :

Si l'on enlève un vecteur d'une famille libre, on obtient encore une famille libre.

REMARQUE On pourra répéter cette opération (ajouter ou enlever plusieurs vecteurs), ces deux derniers théorèmes restent encore vrais.

2.6 BASES. COORDONNÉES D'UN VECTEUR

Nous allons reprendre, dans le cadre général d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$, un concept qui a joué un rôle central dans l'étude antérieure de l'ensemble des vecteurs du plan et de l'ensemble des vecteurs de l'espace (qui furent les premiers modèles historiques de la notion d'espace vectoriel).

a) Unicité de la décomposition $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$ pour tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$

Rappelons (cf. § 2.4) qu'une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ est génératrice de $\mathcal{U}$ si et seulement si tout vecteur de $\mathcal{U}$ est, d'au moins une façon, combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

Rappelons (cf. § 2.5 a)) qu'une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ est libre si et seulement si tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$ peut s'écrire

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$$

d'une façon *au plus* ce qui veut dire que : soit $\vec{v}$ ne peut s'écrire de la façon précédente, soit $\vec{v}$ s'écrit de la façon précédente et que le n -uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est unique.

Reliant les deux notions, on obtient :

Définition

Une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{U}$ si et seulement si elle est à la fois *génératrice* de $\mathcal{U}$ et *libre*.

Théorème et définition

Une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ est une base de $\mathcal{U}$ si et seulement si tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$ admet une décomposition

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{v}_i$$

et si cette décomposition est *unique*.

Les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les *coordonnées* ou *composantes* du vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$.

On dispose les coordonnées de $\vec{v}$ sous la forme d'un tableau $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ appelé *matrice-colonne* associée à $\vec{v}$.

b) Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Considérons la famille $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ où, pour $1 \leq i \leq n$, $\vec{a}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ dans ce n -uplet tous les éléments sont nuls sauf le i^{e} élément qui est égal à 1.

• Cette famille est génératrice de $\mathbb{R}^n$ car tout élément $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1(1, 0, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, 0, \dots, 1) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i. \end{aligned}$$

- La famille est libre car toute relation $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0}$ s'écrit

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

d'où

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Théorème et définition

Les vecteurs $\vec{a}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ($1 \leq i \leq n$), dans lesquels tous les éléments sont nuls sauf le i^{e} qui est égal à 1, forment une base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.
 Cette base est appelée base canonique ou base naturelle de $\mathbb{R}^n$.

c) Autres exemples de base

On démontre, de même, que :

- $(1, i)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$.
- (f_0, f_1, f_2, f_3) avec $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto x^2$, $f_3 : x \mapsto x^3$, est une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à 3 auxquels on ajoute le polynôme (le caractère libre de cette famille a été étudié au § 2.5 b)).

Les bases $(1, i)$ et (f_0, f_1, f_2, f_3) sont encore appelées bases canoniques.

- Considérons l'ensemble S des suites définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = -u_{n+1} - 2u_n.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (cf. § 2.3 b) Exemple 2).

Nous avons déjà étudié dans le tome 1 (cf. § 1.7 b)) des suites vérifiant de telles relations de récurrence. Cherchons des suites géométriques $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ non nulles, éléments de S.

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x^{n+2} = -x^{n+1} + 2x^n \\ x \neq 0 \end{array} \right. \iff x^2 + x - 2 = 0$$

les racines de cette dernière équation sont 1 et -2 . Les suites géométriques cherchées sont les suites définies sur $\mathbb{N}$

$$a : n \mapsto 1^n = 1 \quad \text{et} \quad b : n \mapsto (-2)^n.$$

Montrons que (a, b) est une base de S :

— la famille (a, b) est une famille génératrice de S car soit $u : n \mapsto u_n$ un élément quelconque de S. Montrons que l'on peut trouver des réels λ et μ tels que $u = \lambda a + \mu b$. On a nécessairement pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$\begin{cases} u_0 = \lambda \times 1 + \mu(-2)^0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda \times 1 + \mu(-2) \end{cases}$$

on en déduit $\lambda = \frac{2u_0 + u_1}{3}$, $\mu = \frac{u_0 - u_1}{3}$.

La suite u et la suite : $n \mapsto \frac{2u_0 + u_1}{3} + \frac{u_0 - u_1}{3} (-2)^n$ vérifient la relation de récurrence et admettent les mêmes termes u_0 et u_1 . Les autres termes, se calculant à l'aide de la relation de récurrence, sont les mêmes. Donc les deux suites sont égales.

— La décomposition de tout élément u de S est unique car on a trouvé $(\lambda, \mu) = \left(\frac{2u_0 + u_1}{3}, \frac{u_0 - u_1}{3} \right)$ unique.

2.7 MATRICE D'UNE FAMILLE DE VECTEURS

Supposons qu'un espace vectoriel $\mathcal{U}$ admette une base $B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$. Soit une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_p)$, ces vecteurs ont leurs coordonnées dans la base B , disposées dans des matrices-colonnes (cf. § 2.6 a) :

$$C_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}, \dots, C_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}, \dots, C_p = \begin{pmatrix} \alpha_{1p} \\ \alpha_{2p} \\ \vdots \\ \alpha_{np} \end{pmatrix}$$

associées respectivement à $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_p$.

On dispose ces coordonnées dans un tableau à n lignes et p colonnes

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{np} \end{pmatrix}$$

ce tableau est appelé **matrice de la famille** $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ dans la base B . On convient d'écrire : $A = (C_1 C_2 \dots C_j \dots C_p)$.

Si l'on pose

$$L_1 = (\alpha_{11} \alpha_{12} \dots \alpha_{1p})$$

$$L_2 = (\alpha_{21} \alpha_{22} \dots \alpha_{2p})$$

$$L_i = (\alpha_{i1} \alpha_{i2} \dots \alpha_{ip})$$

$$L_n = (\alpha_{n1} \alpha_{n2} \dots \alpha_{np})$$

ces tableaux sont appelés **matrices-lignes**. On convient également d'écrire :

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

Le réel α_{ij} est à l'intersection de la ligne L_i et de la colonne C_j .

Dans le cas particulier où B est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la matrice d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dans la base B est appelée **matrice canonique de la famille**.

2.8 QUELQUES MATRICES REMARQUABLES

Nous nous proposons d'étudier quelques familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ connaissant leurs matrices canoniques. Nous raisonnerons sur des *exemples*. L'essentiel est de comprendre les méthodes utilisées, dans chacun des cas, de façon à être capable de les reproduire dans des situations analogues. A partir des exemples, nous dégagerons quelques idées générales.

Lorsque nous parlerons de «base» ou de «famille génératrice» sans autre précision, il s'agira de base de $\mathbb{R}^n$ ou de famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

a) Exemples de matrices représentant des familles libres

Soit la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^6$ définie par sa matrice canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Cherchons une relation linéaire entre ces vecteurs :

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 + \lambda_4 \vec{v}_4 = \vec{0}.$$

Cette relation vectorielle est équivalente à six équations numériques obtenues en prenant les composantes sur les vecteurs de la base canonique $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_6)$:

$$\begin{cases} 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 + 0\lambda_4 = 0 & (1) \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 + 0\lambda_4 = 0 & (2) \\ 2\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 + 0\lambda_4 = 0 & (3) \\ 1\lambda_1 - 1\lambda_2 + 0\lambda_3 + 0\lambda_4 = 0 & (4) \\ -2\lambda_1 + 0\lambda_2 + 3\lambda_3 + 0\lambda_4 = 0 & (5) \\ 0\lambda_1 + 2\lambda_2 - 1\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 & (6). \end{cases}$$

Ces équations se ramènent, en fait, à quatre :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 & = 0 & (3) \\ \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 & (4) \\ -2\lambda_1 & + 3\lambda_3 & = 0 & (5) \\ & 2\lambda_2 - \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 & (6). \end{cases}$$

La première donne $\lambda_1 = 0$, d'où :

$$\begin{cases} -\lambda_2 & = 0 \\ & 3\lambda_3 & = 0 \\ & 2\lambda_2 - \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Remarquons d'abord que, $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^4$,

$$\vec{v}_4 = (0, 0, 0, 2) = 2\vec{a}_4$$

donc $\vec{a}_4$ appartient au sous-espace vectoriel

$$\mathcal{U}' = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4).$$

Remontons de la droite vers la gauche. Nous avons :

$$\vec{v}_3 = (0, 0, 1, -1) = \vec{a}_3 - \vec{a}_4$$

comme $\vec{v}_3$ et $\vec{a}_4$ appartiennent à $\mathcal{U}'$, il en résulte que $\vec{a}_3$ appartient à $\mathcal{U}'$.

En poursuivant, de même, il vient :

$$\vec{v}_2 = (0, 3, -2, 0) = 3\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3$$

Comme $\vec{v}_2$ et $\vec{a}_3$ appartiennent à $\mathcal{U}'$, il en résulte que $3\vec{a}_2$ et, par conséquent, $\vec{a}_2$ appartiennent à $\mathcal{U}'$.

$$\vec{v}_1 = (-2, 1, 2, -1) = -2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 - \vec{a}_4$$

comme $\vec{v}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ appartiennent à $\mathcal{U}'$, il en résulte que $-2\vec{a}_1$ et, par conséquent, $\vec{a}_1$ appartient à $\mathcal{U}'$.

Tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ est combinaison linéaire des $\vec{a}_i$ qui appartiennent à $\mathcal{U}'$ donc tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ appartient à $\mathcal{U}'$. Donc $\mathbb{R}^4 \subset \mathcal{U}'$. Comme $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^4$, on a donc $\mathbb{R}^4 = \mathcal{U}'$ c'est-à-dire

$$\mathbb{R}^4 = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4).$$

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ libre et génératrice de $\mathbb{R}^4$ est bien une base de $\mathbb{R}^4$. Ceci se produira pour toute matrice du type :

$$\begin{pmatrix} \textcircled{\star} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \textcircled{\star} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \textcircled{\star} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \textcircled{\star} \end{pmatrix}$$

le nombre de colonnes p est égal au nombre de lignes n . La famille qu'elle représente est une base de $\mathbb{R}^n$.

Voici d'autres exemples de matrices de bases :

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \textcircled{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \textcircled{3} & 0 & 0 \\ 1 & \textcircled{-2} & 0 \\ -1 & 2 & \textcircled{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \textcircled{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \textcircled{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \textcircled{4} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \textcircled{5} & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \textcircled{6} \end{pmatrix}.$$

Bien entendu, il s'agit d'exemples de matrices remarquables représentant des bases. Mais il existe des bases dont la matrice n'est pas de ce type, par exemple $(\vec{a}_2, \vec{a}_1)$ dans $\mathbb{R}^2$, de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$.

c) Exemples de matrices représentant des familles génératrices de $\mathbb{R}^n$

Soit la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, définie par sa matrice canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On remarque que la matrice de la famille $(\vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$ est du type précédent :

$$\begin{pmatrix} \textcircled{3} & 0 & 0 \\ 1 & \textcircled{-2} & 0 \\ -1 & 2 & \textcircled{3} \end{pmatrix}$$

et donc que $(\vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Il en résulte que

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(\vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5).$$

A fortiori : $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$

donc $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Ce résultat est général, pour toute matrice de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} . & . & \textcircled{\star} & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \textcircled{\star} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \textcircled{\star} & 0 \\ . & . & . & . & . & \textcircled{\star} \end{pmatrix}$$

le nombre de colonnes p est supérieur ou égal au nombre de lignes n .

d) Matrices réduites de Gauss

Les matrices que nous avons rencontrées dans les sous-paragraphes a), b), c) sont des **matrices réduites de Gauss**. Nous avons étudié trois types de ces matrices. Rappelons qu'un astérisque $\star$ représente un réel *non nul* appelé pivot et que les points $.$ représentent des réels quelconques.

Si $p \leq n$	
(I)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{\star} & 0 & 0 & 0 \\ . & \textcircled{\star} & 0 & 0 \\ . & . & \textcircled{\star} & 0 \\ . & . & . & \textcircled{\star} \end{pmatrix}$
	représente une famille libre
Si $p = n$	
(II)	$\begin{pmatrix} \textcircled{\star} & 0 & 0 & 0 \\ . & \textcircled{\star} & 0 & 0 \\ . & . & \textcircled{\star} & 0 \\ . & . & . & \textcircled{\star} \end{pmatrix}$
	représente une base
Si $p \geq n$	
(III)	$\begin{pmatrix} . & . & \textcircled{\star} & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \textcircled{\star} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \textcircled{\star} & 0 \\ . & . & . & . & . & \textcircled{\star} \end{pmatrix}$
	représente une famille génératrice

Bien entendu, il existe bien d'autres matrices qui ne rentrent pas dans ces types. Par exemple, la matrice canonique de la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

n'est d'aucun type représenté ci-dessus, bien qu'elle représente une famille libre (la recherche de la relation linéaire $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$ conduit à un système de 4 équations à 3 inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. On trouve facilement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$).

e) Exemples de matrices représentant des familles liées

Soit la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^6$, définie par sa matrice canonique :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

la base canonique étant désignée par $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5, \vec{a}_6)$.

La famille $(\vec{v}_4, \vec{v}_5)$ est libre car sa matrice canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \ominus 4 & 0 \\ 2 & \ominus 3 \end{pmatrix}$$

du type étudié au sous-paragraphe a).

Mais $\vec{v}_4$ et $\vec{v}_5$ appartiennent à $\text{Vect}(\vec{a}_5, \vec{a}_6)$ et dans la base $(\vec{a}_5, \vec{a}_6)$ de ce sous-espace vectoriel la matrice de $(\vec{v}_4, \vec{v}_5)$ est

$\begin{pmatrix} \ominus 4 & 0 \\ 2 & \ominus 3 \end{pmatrix}$ qui est du type étudié au sous-paragraphe b). Donc $(\vec{v}_4, \vec{v}_5)$ est une base de $\text{Vect}(\vec{a}_5, \vec{a}_6)$.

Comme $\vec{v}_3$, de matrice canonique $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, est également élément de

$\text{Vect}(\vec{a}_5, \vec{a}_6)$, c'est une combinaison linéaire de $\vec{v}_4$ et $\vec{v}_5$. Donc la famille $(\vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$ est liée.

On sait (cf. § 2.5 c)) que lorsqu'on ajoute des vecteurs à une famille liée, on obtient une famille liée. Donc la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$ est liée.

Il en est ainsi pour toute matrice ayant un « **palier horizontal** » (en remontant la suite des pivots on tombe sur un zéro au lieu d'un pivot) :

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \star & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star \end{pmatrix}$$

par exemple $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \ominus 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \textcircled{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & \textcircled{2} & 0 \\ -1 & 2 & \textcircled{1} \end{pmatrix}.$

Il en est ainsi pour toute matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \star & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \star & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star \end{pmatrix}$$

qui est une matrice réduite de Gauss du type (III). Donc, dans ce dernier cas, la famille représentée par une telle matrice est à la fois liée et génératrice.

Il existe, bien entendu, des familles liées dont la matrice n'est pas de l'un des types précédents. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, soit la matrice canonique d'une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice de $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3, \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3)$.

Nous allons voir comment, dans certains cas, on peut se ramener à l'un des types remarquables précédents.

2.9 ÉCHANGES DE DEUX VECTEURS D'UNE FAMILLE

Soit $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ une base d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$.

Si l'on échange deux vecteurs d'une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ de vecteurs de $\mathcal{U}$, les éventuelles propriétés de la famille sont inchangées. Cela équivaut à échanger deux colonnes de la matrice de la famille.

Par exemple, soit la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ représentée par sa matrice canonique

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

le déplacement de la colonne C_1 de la première à la troisième place conduit à :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \textcircled{-2} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & \textcircled{3} & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & \textcircled{1} \end{pmatrix} \quad \text{qui est du type (III)}$$

ce qui montre que $(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$ est une famille génératrice; il en est évidemment de même de $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$.

On peut aussi remarquer que la matrice de la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$ est

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{qui est du type (II)}$$

donc $(\vec{v}_1, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$ est une base.

On peut procéder de même pour toute matrice ayant un pivot dans chaque ligne :

$$\begin{pmatrix} . & . & \textcircled{\star} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & \textcircled{\star} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & \textcircled{\star} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \textcircled{\star} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & \textcircled{\star} & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \textcircled{\star} & . \end{pmatrix}$$

par des échanges de colonnes on arrive à

$$\begin{pmatrix} . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{\star} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & . & \textcircled{\star} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & \textcircled{\star} & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & \textcircled{\star} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & . & \textcircled{\star} & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \textcircled{\star} \end{pmatrix}$$

2.10 CHANGEMENTS DE BASE PARTICULIERS

a) Échange de deux vecteurs d'une base

Soit $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ une base d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$. Tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$(1) \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i.$$

Si l'on échange deux vecteurs $\vec{a}_i$ et $\vec{a}_j$ ($i \neq j$) de la base, on obtient évidemment une base de $\mathcal{U}$ et la décomposition (1) reste encore vraie mais les coordonnées x_i et x_j ont été échangées entre elles.

Étudions l'effet de ce changement de base sur la matrice A d'une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ exprimée dans la base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$: si l'on échange les coordonnées relatives à $\vec{a}_i$ et $\vec{a}_j$ de chaque vecteur de la famille, les lignes L_i et L_j de la matrice A sont échangées. On peut énoncer :

Théorème

Soit $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ une base d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$.

Si l'on échange $\vec{a}_i$ et $\vec{a}_j$ ($i \neq j$) on obtient une nouvelle base de $\mathcal{V}$ dans laquelle la nouvelle matrice d'une famille de vecteurs s'obtient en échangeant les lignes L_i et L_j de l'ancienne matrice.

b) Substitution de $\vec{a}_j - \lambda \vec{a}_i$ à $\vec{a}_j$

Soit λ un réel. Supposons $i < j$ et remplaçons $\vec{a}_j$ par $\vec{a}_j - \lambda \vec{a}_i$:

- La famille $F = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j - \lambda \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n)$ est encore libre car

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_i \vec{a}_i + \dots + \lambda_j (\vec{a}_j - \lambda \vec{a}_i) + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

peut s'écrire :

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + (\lambda_i - \lambda_j \lambda) \vec{a}_i + \dots + \lambda_j \vec{a}_j + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

qui implique :

$\lambda_i - \lambda_j \lambda = 0$, $\lambda_j = 0$ et les autres scalaires nuls d'où aussi $\lambda_i = 0$.

- F est encore génératrice de $\mathcal{V}$ car tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ peut s'écrire :

$$\vec{v} = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_i \vec{a}_i + \dots + x_j \vec{a}_j + \dots + x_n \vec{a}_n$$

$$\vec{v} = x_1 \vec{a}_1 + \dots + (x_i + \lambda x_j) \vec{a}_i + \dots + x_j (\vec{a}_j - \lambda \vec{a}_i) + \dots + x_n \vec{a}_n.$$

Donc F est une base de $\mathcal{V}$. De plus, les nouvelles coordonnées de $\vec{v}$ dans la base F sont

$$(x_1, \dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_j, \dots, x_n).$$

Il en résulte que l'effet de ce changement de base sur la matrice A d'une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ est le suivant : la ligne L_i est remplacée par $L_i + \lambda L_j$.

- Si l'on suppose $i > j$, un raisonnement analogue conduit aux mêmes conclusions :

Théorème

Soit $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ une base d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$.

Si l'on remplace $\vec{a}_j$ par $\vec{a}_j - \lambda \vec{a}_i$ (λ réel quelconque et $i \neq j$) on obtient une nouvelle base de $\mathcal{V}$ dans laquelle la nouvelle matrice d'une famille de vecteurs s'obtient en remplaçant, dans l'ancienne matrice, la ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$.

Une substitution $L_i \longmapsto L_i + \lambda L_j$ est une **opération élémentaire sur les lignes** de la matrice.

REMARQUE Vous observerez :

- le changement du signe devant λ dans $\vec{a}_j - \lambda \vec{a}_i$ et dans $L_i + \lambda L_j$;
- $\vec{a}_i$ est inchangé et $\vec{a}_j$ modifié, alors que c'est L_j qui est inchangée et L_i modifiée.

EXEMPLE Soit $B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base B :

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si l'on remplace $\vec{a}_2$ par $\vec{a}_2 - 10\vec{a}_1$, dans la nouvelle base $B' = (\vec{a}_1, \vec{a}_2 - 10\vec{a}_1, \vec{a}_3)$ la nouvelle matrice de la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est :

$$\begin{pmatrix} L_1 + 10L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 21 & -10 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) Généralisation

Supposons j fixé ($2 \leq j \leq n$) et supposons que i varie de 1 à $j-1$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_{j-1}$ des réels donnés, considérons la matrice d'une famille de vecteurs dans la base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ de $\mathcal{U}$:

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

la substitution $\vec{a}_j \mapsto \vec{a}_j - \lambda_1 \vec{a}_1$ donne la nouvelle matrice

$$\begin{pmatrix} L_1 + \lambda_1 L_j \\ L_2 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix},$$

la substitution $\vec{a}_j - \lambda_1 \vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_j - \lambda_1 \vec{a}_1 - \lambda_2 \vec{a}_2$ dans la nouvelle base c'est-à-dire encore la substitution :

$$\vec{a}_j \mapsto \vec{a}_j - \lambda_1 \vec{a}_1 - \lambda_2 \vec{a}_2$$

dans l'ancienne base donne

$$\begin{pmatrix} L_1 + \lambda_1 L_j \\ L_2 + \lambda_2 L_j \\ L_3 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix},$$

en procédant ainsi, nous voyons que la substitution

$$\vec{a}_j \mapsto \vec{a}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \vec{a}_i$$

dans l'ancienne base donne la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} L_1 + \lambda_1 L_j \\ \vdots \\ L_{j-1} + \lambda_{j-1} L_j \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

dans la base $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{j-1}, \vec{a}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n)$.

Ces opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ont généralement le but suivant : modifier la base de départ pour qu'une matrice-colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

soit transformée en

$$X' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

C'est possible si $x_j \neq 0$ en posant, pour $1 \leq i \leq j-1$, $\lambda_i = -\frac{x_i}{x_j}$ car alors x_i devient

$$x_i + \lambda_i x_j = x_i - \frac{x_i}{x_j} x_j = 0.$$

Le réel non nul x_j pourra alors devenir un **pivot**.

2.11 TRANSFORMATION D'UNE MATRICE PAR LA MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS

La méthode du pivot de Gauss consiste à transformer, si possible, une matrice à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, d'échanges de lignes ou d'échanges de colonnes de manière à faire apparaître des pivots. L'étude de la matrice et de la famille de vecteurs qu'elle représente en sera ainsi simplifiée.

Notations : nous désignons par

$$\begin{array}{lll} \alpha_{ij} & L_i & C_j \\ \alpha'_{ij} & L'_i & C'_j \\ \alpha''_{ij} & L''_i & C''_j \\ \alpha'''_{ij} & L'''_i & C'''_j \end{array}$$

l'élément de la i^{e} ligne et j^{e} colonne, la i^{e} ligne, la j^{e} colonne respectivement des matrices successives A, A', A'', A''' .

**EXERCICE
RÉSOLU 1**

Soit la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ représentée par la matrice canonique

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer, par la méthode du pivot, que cette famille est libre.

Cherchons à obtenir une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 \\ \cdot & \star & 0 \\ \cdot & \cdot & \star \end{pmatrix}$$

qui est une matrice réduite de Gauss du type (I) (cf. § 2.8d)).

Pour faire apparaître le pivot $\alpha_{43} = 2$, faisons les substitutions

$$L_1 \mapsto L_1 - L_4, \quad L_2 \mapsto L_2 + \frac{3}{2} L_4, \quad L_3 \mapsto L_3 - \frac{1}{2} L_4 :$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & \textcircled{2} \end{pmatrix}.$$

Pour faire apparaître le pivot $\alpha'_{32} = 1$, faisons la substitution $L'_2 \mapsto L'_2 + 4L'_3$:

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ -2 & \textcircled{1} & 0 \\ 2 & -6 & \textcircled{2} \end{pmatrix}.$$

Pour faire apparaître le pivot $\alpha''_{21} = -5$, faisons la substitution $L''_1 \mapsto L''_1 + \frac{1}{5} L''_2$:

$$A''' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{-5} & 0 & 0 \\ -2 & \textcircled{1} & 0 \\ 2 & -6 & \textcircled{2} \end{pmatrix}$$

qui est bien du type cherché.

**EXERCICE
RÉSOLU 2**

Soit la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ représentée par la matrice canonique

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 - m & 0 & -1 \\ m - 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, par la méthode du pivot, pour quelles valeurs du paramètre m la famille est libre.

Comme $\alpha_{43} = 0$, pour faire apparaître un pivot $\alpha'_{43} \neq 0$, nous devons, par exemple, échanger L_3 et L_4 (on pourrait échanger les colonnes C_2 et C_3 ce qui revient à échanger $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$) :

$$A' = \begin{pmatrix} m & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ m-5 & -2 & 0 \\ 2-m & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour faire apparaître le pivot $\alpha'_{43} = -1$, faisons les substitutions $L'_1 \mapsto L'_1 + 2L'_4$ et $L'_2 \mapsto L'_2 - L'_4$:

$$A'' = \begin{pmatrix} 4-m & 1 & 0 \\ m & 3 & 0 \\ m-5 & -2 & 0 \\ 2-m & 0 & \textcircled{-1} \end{pmatrix}.$$

Pour faire apparaître le pivot $\alpha''_{32} = -2$, faisons les substitutions $L''_1 \mapsto L''_1 + \frac{1}{2}L''_3$ et $L''_2 \mapsto L''_2 + \frac{3}{2}L''_3$:

$$A''' = \begin{pmatrix} \frac{3-m}{2} & 0 & 0 \\ \frac{5m-15}{2} & 0 & 0 \\ m-5 & \textcircled{-2} & 0 \\ 2-m & 0 & \textcircled{-1} \end{pmatrix}.$$

- Si $m \neq 3$, alors $\frac{5m-15}{2} \neq 0$ et pour faire apparaître le pivot $\frac{5m-15}{2}$, faisons la substitution $L'''_1 \mapsto L'''_1 + \frac{1}{5}L'''_2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{5m-15}{2} & 0 & 0 \\ m-5 & \textcircled{-2} & 0 \\ 2-m & 0 & \textcircled{-1} \end{pmatrix}$$

matrice réduite de Gauss du type (I) (cf. § 2.8 d)). La famille est libre.

- Si $m = 3$, la matrice A''' s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & \textcircled{-2} & 0 \\ -1 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix}$$

elle a un palier horizontal (cf. § 2.8 e)) donc la famille est liée (on trouve d'ailleurs facilement que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$).

2.12 TRANSFORMATION DE LA MATRICE D'UNE FAMILLE LIBRE DE $\mathbb{R}^n$ PAR LA METHODE DU PIVOT

Soit la matrice canonique d'une famille libre $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Transformons cette matrice par la méthode du pivot.

On a $\vec{v}_p \neq \vec{0}$ car si $\vec{v}_p = \vec{0}$ la famille serait liée (cf. § 2.5 c)). Donc l'une des coordonnées de $\vec{v}_p$ est non nulle. Rappelons que des échanges de vecteurs de la base entraînent des échanges de lignes de la matrice de la famille (cf. § 2.9 a)). On peut faire éventuellement un échange de la dernière ligne et d'une autre ligne de manière que cette coordonnée non nulle soit le terme α_{np} de la dernière ligne et dernière colonne. La matrice de la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ est alors :

$$A = \begin{pmatrix} & & & \alpha_{1p} \\ & & & \alpha_{2p} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \alpha_{np} \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha_{np} \neq 0.$$

Par des opérations élémentaires sur les lignes $L_i \mapsto L_i + \lambda_i L_n$, on aura le pivot α_{np} et la matrice :

$$A' = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & \alpha_{np} \end{pmatrix}$$

Les termes de l'avant-dernière colonne jusqu'à $(n-1)^e$ ne sont pas tous nuls car s'ils l'étaient la famille serait liée, sa matrice étant du type à palier horizontal étudié au § 2.8 e). A la suite d'un éventuel échange de L_{n-1} et d'une autre ligne, on aura :

$$A'' = \begin{pmatrix} & \cdot & & 0 \\ & \cdot & & 0 \\ & \cdot & & 0 \\ & \alpha''_{n-1,p-1} & & 0 \\ & \alpha''_{n,p-1} & & \alpha_{np} \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha''_{n-1,p-1} \neq 0.$$

Par des opérations élémentaires sur les lignes, on aura le pivot $\alpha''_{n-1,p-1}$ et

$$A''' = \begin{pmatrix} & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & \alpha''_{n-1,p-1} & & 0 \\ & \alpha''_{n,p-1} & & \alpha_{np} \end{pmatrix}$$

En procédant ainsi avec les p colonnes, on aura p pivots avec des zéros au-dessus et à droite des pivots donc nécessairement $p \leq n$ et la matrice obtenue sera une matrice réduite de Gauss de type

$$(I) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \star & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \star & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \star \end{pmatrix} \text{ ou } (II) \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \star & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \star & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \star \end{pmatrix}$$

dans ce dernier cas la famille est une base de $\mathbb{R}^n$ (cf. § 2.8 b)).

Réciproquement si l'on peut transformer, par la méthode du pivot, la matrice d'une famille en une matrice de type (I) ou (II), cette famille est libre (cf. § 2.8 a)). Concluons :

Théorèmes

1. Une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre si et seulement si sa matrice peut être transformée, par la méthode du pivot, en une matrice réduite de Gauss de type (I) ou (II).
2. Toute famille libre de $\mathbb{R}^n$ possède au plus n vecteurs.
3. Toute famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

2.13 THÉORÈME DE LA BASE INCOMPLÈTE

Soit une famille libre $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Supposons $p < n$. Par la méthode du pivot, nous arriverons à transformer la matrice canonique de la famille en une matrice de la forme, dans la nouvelle base :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & \star & 0 & 0 & 0 \\ . & . & \star & 0 & 0 \\ . & . & . & \star & 0 \\ . & . & . & . & \star \end{pmatrix}$$

Nous aurons une base de $\mathbb{R}^n$ en complétant la famille par $n - p$ vecteurs $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_{n-p}$ dont les coordonnées sont indiquées en rouge :

$$\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \star & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \star & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & \star & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & \star & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & \star \end{pmatrix}$$

Nous pouvons énoncer :

Théorème

Toute famille libre de p vecteurs ($p < n$) de $\mathbb{R}^n$ peut être complétée en une base de $\mathbb{R}^n$.

Ce théorème porte le nom de « **théorème de la base incomplète** ». En réalité, non seulement nous savons qu'il est possible d'obtenir une base à partir de la famille libre $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$, mais la méthode du pivot nous indique *comment* choisir les vecteurs $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_{n-p}$ qu'il faut ajouter à la famille libre pour obtenir une base

$$(\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_{n-p}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p).$$

EXERCICE RÉSOLU

On donne les vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (-1, 0, 0, 1), \quad \vec{v}_3 = (0, -1, 0, -1).$$

Montrer que la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est libre et compléter cette famille de manière à obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

La matrice canonique de la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ c'est-à-dire la matrice de la famille dans la base canonique $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient facilement

$$A' = \begin{pmatrix} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \\ L'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 - L_4 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la nouvelle base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 + \vec{a}_2)$ (n'oubliez pas qu'à la substitution $\vec{a}_j \mapsto \vec{a}_j - \lambda \vec{a}_i$ correspond la substitution $L_i \mapsto L_i + \lambda L_j$).

$$A'' = \begin{pmatrix} L''_1 \\ L''_2 \\ L''_3 \\ L''_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L'_1 \\ L'_3 \\ L'_2 \\ L'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \ominus 1 \end{pmatrix}$$

dans la nouvelle base $(\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_2, \vec{a}_4 + \vec{a}_2)$ (à l'échange $\vec{a}_2 \leftrightarrow \vec{a}_3$ correspond l'échange $L_2 \leftrightarrow L_3$).

$$A''' = \begin{pmatrix} L'''_1 \\ L'''_2 \\ L'''_3 \\ L'''_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L''_1 - L''_3 \\ L''_2 \\ L''_3 \\ L''_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ominus 1 & 0 \\ 1 & 1 & \ominus 1 \end{pmatrix}$$

dans la nouvelle base $(\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_2 + \vec{a}_1, \vec{a}_4 + \vec{a}_2)$.

$$A'''' = \begin{pmatrix} L'''_1 - L'''_2 \\ L'''_2 \\ L'''_3 \\ L'''_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & \ominus 1 & 0 \\ 1 & 1 & \ominus 1 \end{pmatrix}$$

dans la nouvelle base $(\vec{a}_1, \vec{a}_3 + \vec{a}_1, \vec{a}_2 + \vec{a}_1, \vec{a}_4 + \vec{a}_2)$.

A'''' est une matrice réduite de Gauss du type (I) donc la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est libre. On peut la compléter avec un vecteur dont les coordonnées, dans la nouvelle base sont indiquées en rouge :

$$\begin{pmatrix} \textcircled{\star} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \textcircled{1} & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & \ominus 1 & 0 \\ \cdot & 1 & 1 & \ominus 1 \end{pmatrix}.$$

Un tel vecteur a la première coordonnée non nulle (pivot rouge) et les autres coordonnées sont des réels quelconques, dans la nouvelle base. On peut prendre, par exemple :

$$\begin{aligned} 1\vec{a}_1 + 0(\vec{a}_3 + \vec{a}_1) + 0(\vec{a}_2 + \vec{a}_1) + 0(\vec{a}_4 + \vec{a}_2) &= \vec{a}_1 \\ -1\vec{a}_1 + 0(\vec{a}_3 + \vec{a}_1) + 1(\vec{a}_2 + \vec{a}_1) + 0(\vec{a}_4 + \vec{a}_2) &= \vec{a}_2 \\ -1\vec{a}_1 + 1(\vec{a}_3 + \vec{a}_1) + 0(\vec{a}_2 + \vec{a}_1) + 0(\vec{a}_4 + \vec{a}_2) &= \vec{a}_3 \\ -1\vec{a}_1 + 0(\vec{a}_3 + \vec{a}_1) + 0(\vec{a}_2 + \vec{a}_1) + 1(\vec{a}_4 + \vec{a}_2) &= \vec{a}_4 \end{aligned}$$

l'essentiel est que le coefficient de $\vec{a}_1$ soit non nul.

2.14 TRANSFORMATION DE LA MATRICE D'UNE FAMILLE GÉNÉRATRICE DE $\mathbb{R}^n$ PAR LA METHODE DU PIVOT

a) La matrice d'une famille génératrice peut-elle avoir une ligne nulle?

Soit $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ (canonique ou non) et une famille génératrice $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ de matrice associée A. Si l'une des lignes de A est nulle (c'est-à-dire formée uniquement de zéros), par exemple L_n (au besoin, par des échanges de vecteurs de la base on peut échanger les lignes de manière que ce soit la dernière qui soit nulle) :

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

on aurait :

$$\vec{a}_n = \sum_{j=1}^p \lambda_j \vec{v}_j$$

et en remplaçant les vecteurs $\vec{v}_j$ par :

$$\vec{v}_j = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ij} \vec{a}_i \quad (\text{puisque } \alpha_{nj} = 0)$$

on aurait une relation linéaire non triviale entre les $\vec{a}_i$. Ce qui est impossible. Donc :

Théorème

Les matrices d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$, dans des bases quelconques, ne présentent aucune ligne nulle.

b) Emploi de la méthode du pivot

Considérons la matrice canonique d'une famille génératrice $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Nous savons que la ligne L_n n'est pas nulle. Par un échange

éventuellement de deux colonnes, on peut supposer que l'un des termes non nuls de L_n soit α_{np} . La matrice de la famille est alors :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1p} \\ \alpha_{2p} \\ \vdots \\ \alpha_{np} \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha_{np} \neq 0.$$

Par des opérations élémentaires sur les lignes $L_i \mapsto L_i + \lambda L_n$, on aura le pivot α_{np} et

$$A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_{np} \end{pmatrix}$$

L'avant-dernière ligne L'_{n-1} n'est pas nulle. A la suite d'un éventuel échange de deux colonnes, on aura :

$$A'' = \begin{pmatrix} \cdot & 0 \\ \cdot & 0 \\ \cdot & 0 \\ \alpha''_{n-1,p-1} & 0 \\ \alpha''_{n,p-1} & \alpha_{np} \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha''_{n-1,p-1} \neq 0.$$

Par des opérations élémentaires sur les lignes, on aura le pivot $\alpha''_{n-1,p-1}$ et

$$A''' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha''_{n-1,p-1} & 0 \\ \alpha''_{n,p-1} & \alpha_{np} \end{pmatrix}$$

En procédant ainsi avec les n lignes, on aura n pivots avec des zéros au-dessus et à droite des pivots donc nécessairement $p \geq n$ et la matrice obtenue sera une matrice réduite de Gauss de type

$$(II) \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \star & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \star & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \star \end{pmatrix}$$

ou

$$(III) \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \star & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \star & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star \end{pmatrix}$$

dans le cas du type (II) la famille est une base de $\mathbb{R}^n$.

Réciproquement si l'on peut transformer, par la méthode du pivot, la matrice d'une famille en une matrice de type (II) ou (III), cette famille est génératrice (cf. § 2.8 c)). Concluons :

Théorèmes

1. Une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est génératrice si et seulement si sa matrice peut être transformée, par la méthode du pivot, en une matrice réduite de Gauss de type (II) ou (III).
2. Toute famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ possède au moins n vecteurs.
3. Toute famille génératrice de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

c) Un théorème à rapprocher du théorème de la base incomplète

Si $p > n$, soit la matrice du type (III). Les n dernières colonnes forment une matrice du type (II) et représentent une base de $\mathbb{R}^n$. Donc :

Théorème

De toute famille génératrice de p vecteurs ($p > n$) de $\mathbb{R}^n$, on peut extraire une base de $\mathbb{R}^n$.

EXERCICE
RÉSOLU

Soit la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6, \vec{v}_7)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ représentée par la matrice canonique

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que la famille est génératrice et extraire une base de $\mathbb{R}^4$ par la méthode du pivot.

Pour faire apparaître le pivot $\alpha_{47} = 2$, faisons les substitutions $L_2 \mapsto L_2 - \frac{1}{2}L_4$ et $L_3 \mapsto L_3 + \frac{1}{2}L_4$:

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 3 & \textcircled{2} \end{pmatrix}$$

Pour faire apparaître le pivot $\alpha'_{36} = \frac{3}{2}$, faisons les substitutions $L'_1 \mapsto L'_1 - \frac{2}{3}L'_3$ et $L'_2 \mapsto L'_2 + \frac{1}{3}L'_3$:

$$A'' = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \textcircled{\frac{3}{2}} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 3 & \textcircled{2} \end{pmatrix}$$

Pour faire apparaître le pivot $\alpha''_{23} = \frac{1}{3}$, faisons la substitution $L''_1 \mapsto L''_1 - L''_2$:

$$A''' = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \left(\frac{3}{2}\right) & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 3 & \textcircled{2} \end{pmatrix}.$$

On peut aussi considérer $\alpha'''_{11} = -4$ comme un pivot. En échangeant des colonnes, la matrice devient

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \textcircled{-4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{5}{3} & \left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \left(\frac{3}{2}\right) & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & \textcircled{2} \end{pmatrix}$$

matrice réduite du type (III) donc la famille donnée est génératrice.

D'autre part, la matrice

$$\begin{pmatrix} \textcircled{-4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & \left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \left(\frac{3}{2}\right) & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \textcircled{2} \end{pmatrix}$$

est une matrice réduite du type (II) donc la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_6, \vec{v}_7)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

2.15 TRANSFORMATION DE LA MATRICE D'UNE BASE PAR LA METHODE DU PIVOT

a) Notion de dimension

Nous avons vu au § 2.12 qu'une famille libre de $\mathbb{R}^n$ possède au plus n vecteurs et nous avons vu au § 2.14b) qu'une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ possède au moins n vecteurs. Comme une base est à la fois une famille libre et une famille génératrice, nous en déduisons :

Théorème et définition

Toute base de $\mathbb{R}^n$ possède exactement n vecteurs.
L'entier n est appelé la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

b) Conséquences

Il résulte du théorème précédent et des théorèmes du § 2.12 et du § 2.14 b) que l'on peut énoncer :

Théorèmes

1. Une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base si et seulement si sa matrice peut être transformée, par la méthode du pivot, en une matrice réduite de Gauss du type (II).
2. Une famille libre de $\mathbb{R}^n$ est une base si et seulement si elle possède exactement n vecteurs.
3. Une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ est une base si et seulement si elle possède exactement n vecteurs.

REMARQUES 1. Lorsqu'on a mis la matrice A sous la forme réduite

$$(II) \begin{pmatrix} \textcircled{\star} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \textcircled{\star} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \textcircled{\star} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \textcircled{\star} \end{pmatrix}$$

on dit qu'on a **triangularisé** la matrice A et que (II) est une **matrice triangulaire inférieure**. Les éléments **diagonaux** sont les pivots qui sont des réels *non nuls dans le cas d'une base*.

2. On peut, d'ailleurs, transformer une matrice triangulaire inférieure en une **matrice triangulaire supérieure** (les zéros sont au-dessous et à gauche des pivots). Par exemple, les échanges $L_1 \leftrightarrow L_4$ et $L_2 \leftrightarrow L_3$ transforment la matrice triangulaire inférieure :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

en la matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui peut rendre les mêmes services.

Exercices

Définition d'un espace vectoriel

2.1 Soit $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ des espaces vectoriels. On munit l'ensemble $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ des couples $(\vec{u}, \vec{v})$ ($\vec{u} \in \mathcal{U}$, $\vec{v} \in \mathcal{V}$) d'une addition définie par :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \oplus (\vec{u}', \vec{v}') = (\vec{u} + \vec{u}', \vec{v} + \vec{v}')$$

et de la multiplication par les réels λ définie par :

$$\lambda \otimes (\vec{u}, \vec{v}) = (\lambda \vec{u}, \lambda \vec{v}).$$

Montrer que l'on obtient ainsi un espace vectoriel.

2.2 On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2$ de l'addition définie dans l'exercice ci-dessus, et de la multiplication définie par :

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, 0).$$

Quelles sont les propriétés de définition d'un espace vectoriel qui sont vérifiées? Quelles sont celles qui ne le sont pas?

2.3 Soit $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non nuls. On munit l'ensemble $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ des opérations définies par les égalités

$$(x, y) + (x', y') = (xx', yy') \\ \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

(pour $\lambda \in \mathbb{R}$). A-t-on obtenu un espace vectoriel?

2.4 Soit $\mathcal{V}$ un ensemble muni de la structure d'espace vectoriel, à l'exception de la commutativité de l'addition.

En calculant le vecteur $(1+1)(\vec{u} + \vec{v})$ de deux manières différentes, montrer que $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel.

2.5 Montrer que $\mathbb{R}$, muni des opérations :

$$x \oplus y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \\ \lambda \otimes x = \sqrt[3]{\lambda} x$$

avec $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3$, est un espace vectoriel.

Calculs dans un espace vectoriel

2.6 Trouver trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que l'on ait :

$$\begin{cases} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2, 2, 5) \\ \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = (2, 0, 3) \\ \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (0, -2, -1) \\ -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (0, 4, 3) \end{cases}$$

2.7 Soit les vecteurs $\vec{a}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ($1 \leq i \leq n$) dans lesquels tous les éléments sont nuls sauf le i^{e} qui est égal à 1.

Combien de vecteurs $\vec{b}_{i,j} = \vec{a}_i - \vec{a}_j$ de $\mathbb{R}^n$ avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, peut-on calculer?

Combien de vecteurs distincts de $\mathbb{R}^n$ composent la famille des vecteurs $\vec{b}_{i,j}$?

Calculer la somme de ces vecteurs distincts.

2.8 Pour quelles valeurs du réel m existe-t-il un couple de réels (λ, μ) tel que l'on ait :

$$\lambda(m, 1, 0) + \mu(0, m, 1) + (0, 1, m) = (0, 0, 0)?$$

Calculer (λ, μ) dans chaque cas.

2.9 Connaissant n vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$, calculer les n vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ de $\mathcal{V}$ sachant que l'on a

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_1 - \vec{v}_3 \\ &\vdots \\ \vec{u}_p &= \vec{v}_1 - \vec{v}_{p+1} \\ &\vdots \\ \vec{u}_{n-1} &= \vec{v}_1 - \vec{v}_n \\ \vec{u}_n &= \sum_{i=1}^n \vec{v}_i. \end{aligned}$$

2.10 Même exercice avec $n = 5$ et

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 + \vec{v}_5 \\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 + \vec{v}_5 \\ \vec{u}_3 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_4 + \vec{v}_5 \\ \vec{u}_4 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_5 \\ \vec{u}_5 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4. \end{aligned}$$

2.11 Déterminer des réels (α, β, γ) tels que l'on ait :

$$\alpha(\vec{u} - \vec{w}) + \beta(\vec{u} - \vec{v}) + \gamma(\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} + 7\vec{v} - 8\vec{w}.$$

Même exercice en remplaçant le second membre par $(x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w})$. Les triplets (α, β, γ) trouvés sont-ils uniques?

2.12 On pose, dans $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} = (1, 0, 0), \quad \vec{b} = (0, 1, 0), \quad \vec{c} = (0, 0, 1), \\ \vec{d} = (-1, -1, -1).$$

Montrer que tout triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire sous la forme

$$(x, y, z) = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} + \delta \vec{d}$$

avec $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0$.

Application : déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dans le cas où $(x, y, z) = (-7, 5, -3)$.

2.13 Existe-t-il un triplet (α, β, γ) tel que l'on ait $\alpha\beta\gamma \neq 0$ et

$$\alpha(-\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}) + \beta(2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}) + \gamma(\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w}) = \vec{0}$$

pour tout triplet de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de $\mathbb{R}^5$?

Que peut-on dire si (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont deux solutions à cette question?

Sous-espaces vectoriels

2.14 Chacune des propriétés ci-dessous détermine un sous-ensemble de l'espace vectoriel des

fonctions f réelles définies sur le segment $[0, 1]$. Dire dans chaque cas si l'on obtient un sous-espace vectoriel :

(1) $f(0) + f(1) = 0$.

(2) $f(1) - 2f(0) = 1$.

(3) $f(x) = f(1-x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

(4) $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

(5) $f(x) = 1 - f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

(6) $f(x+1) = f(x) + f(1)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

(7) $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{f(1-x)} = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

2.15 Même exercice avec l'espace $\mathbb{R}^3$ et les propriétés :

(1) $x + 2y + 3z = 0$.

(2) $5x - 2y + z - 4 = 0$.

(3) $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

(4) $|y| = |x|$.

(5) $y^3 = x^3 = z^3$.

(6) $y - x\sqrt{2} = z\sqrt{3}$.

(7) $x + y + z \geq 0$.

2.16 Montrer que le sous-ensemble des vecteurs (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ satisfaisant aux égalités :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2.17 Montrer que les polynômes de degré au plus 4 qui s'annulent en 0 et en 1 forment un sous-espace vectoriel de l'espace des polynômes.

Combinaisons linéaires. Familles génératrices

2.18 Définir un sous-espace vectoriel $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^3$, distinct de $\mathbb{R}^3$, et contenant les vecteurs :

$$(6, 3, 0), (1, -1, 3), (0, 2, -4), (3, 1, 1).$$

2.19 Quel est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par la famille

$$((1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0))?$$

2.20 Même question qu'à l'exercice 2.19 avec :

$$((1, 0, 0, 0, 0), (1, -1, 0, 0, 0), (1, -1, 1, 0, 0), (1, -1, 1, -1, 0)).$$

2.21 Même question qu'à l'exercice 2.19 avec :

$$((1, 1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4, 5), (1, -2, 3, -4, 5)).$$

2.22 Quel est le sous-espace vectoriel de l'espace des polynômes de degré au plus 4 engendré par la famille

$$(x^4 - x^3, x^4 - 2x^3 + x^2, x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x)?$$

2.23 Montrer que la famille :

$$((0, 1, 1, 1), (-1, 0, 1, 1), (-1, -1, 0, 1), (-1, -1, -1, 0)) \text{ engendrent } \mathbb{R}^4.$$

2.24 Montrer que la famille :

$$((0, 1, 1, 1, 1), (-1, 0, 1, 1, 1), (-1, -1, 0, 1, 1), (-1, -1, -1, 0, 1), (-1, -1, -1, -1, 0))$$

n'engendre pas $\mathbb{R}^5$.

2.25 Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par l'ensemble des quadruplets (x, y, z, t) avec

$$xy = zt = 0.$$

2.26 Déterminer le sous-espace de $\mathbb{R}^2$ engendré par

$$((2 + \sqrt{3}, 1), (1, 2 - \sqrt{3})).$$

2.27 Déterminer l'intersection des sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ engendrés respectivement par

$$((3, 1, 2, -6), (0, -5, 5, 0), (2, 0, 2, -4))$$

et $((1, 6, -5, -2), (-3, 0, 0, 6)).$

2.28 Même question dans $\mathbb{R}^3$ avec

$$((1, 1, 2), (1, 2, 3))$$

et $((1, 0, 1), (3, 2, 5), (-1, 1, 0)).$

2.29 Montrer que, si $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une famille génératrice de $\mathcal{U}$, il en est de même de la famille

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}).$$

Dépendance et indépendance linéaire

2.30 Montrer que les fonctions réelles définies par

$$f_1(x) = x^2 + x + 1,$$

$$f_2(x) = -x^3 + x + 1,$$

$$f_3(x) = -x^3 - x^2 + 1,$$

$$f_4(x) = -x^3 - x^2 - x$$

sont indépendantes.

2.31 Même question avec

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \sin 2x,$$

$$f_3(x) = \sin 3x.$$

2.32 Même question avec

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \sqrt{x^2},$$

$$f_3(x) = \sqrt[3]{x^2}.$$

2.33 Même question avec

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = |x|,$$

$$f_3(x) = x^3, \quad f_4(x) = x|x|.$$

2.34 Sachant que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une famille libre, que peut-on dire des familles suivantes :

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}),$$

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} - 2\vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}),$$

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} - \vec{c})?$$

2.35 Dans l'espace vectoriel $\mathcal{U}$ des polynômes de degré au plus 2, on considère la famille (f, g, h, i) , avec

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x^2 + x - 1, \\ h(x) = x^2 - 2, \quad i(x) = x - 1.$$

a) Vérifier qu'elle est liée.

b) Étudier si la famille (f, g, h) est libre. Engendrer-t-elle $\mathcal{U}$?

c) Mêmes questions pour (g, h, i) .

2.36 Dans l'espace vectoriel des polynômes, la famille

$$F = (x, x - 1, x - 2, x - 3, x - 4)$$

est-elle libre? Donner une famille libre extraite de F et de cardinal maximum.

Même problème avec

$$F' = (x, x^2 - 1, x^3 - 2, x^4 - 3, x^5 - 4).$$

2.37 Montrer que, si $f(x) = ax^2 + bx + c$, la famille

$$(f(x), f(x+1), f(x+2))$$

est une famille libre de l'espace des fonctions réelles si $a \neq 0$, et une famille liée si $a = 0$.

2.38 Pour quelles valeurs du réel m la famille suivante

$$((m, 1, 1, 1, 1), (1, m, 1, 1, 1), (1, 1, m, 1, 1), \\ (1, 1, 1, m, 1), (1, 1, 1, 1, m))$$

est-elle liée dans $\mathbb{R}^5$? (On trouvera deux valeurs.)

2.39 Pour quelle valeur du réel m la famille

$$((1, 3, m, -1), (1, 2, 3, 0), (0, 1, 2, 4), (1, 3, 0, 3))$$

est-elle libre dans $\mathbb{R}^4$? Sinon, quelle relation non triviale existe-t-il entre ces vecteurs?

2.40 Même question que dans l'exercice précédent pour la famille

$$((1, 1, -1, 2), (m, 1, 1, 1), (1, -1, 3, -3), \\ (4, 2, 0, m)).$$

Examiner l'unicité d'une relation linéaire non triviale entre ces vecteurs.

Bases. Coordonnées

2.41 Soit $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ une base d'un espace $\mathcal{U}$.

Montrer que

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{a} + \vec{b}, -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c})$$

est une base de $\mathcal{U}$ et, connaissant (x, y, z) , calculer (α, β, γ) tels que

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}.$$

2.42 Même exercice avec

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}, \vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}, \vec{b} - 2\vec{c}).$$

2.43 Même exercice avec

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}, 2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}, 2\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}).$$

2.44 Même exercice avec

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (2\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}, -\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}, -\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}).$$

2.45 La famille

$$((-1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 1), (1, 1, -1, 1), (1, 1, 1, -1))$$

forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^4$?

2.46 Même exercice avec

$$((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, -1, 1, -1), (4, 3, 2, 1)).$$

2.47 a) Si $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, montrer que

$$(\vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n, \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n)$$

est une base de $\mathbb{R}^n$, notée $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$.

b) Si $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{b}_i$, calculer $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ connaissant $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, puis $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ connaissant $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

2.48 Soit $\mathcal{U}$ l'espace vectoriel des polynômes f de degré au plus égal à 2, $\mathcal{U}'$ le sous-espace vectoriel défini par $f(1) = 0$ et $\mathcal{U}''$ le sous-espace vectoriel défini par $f'(0) = f''(0)$ (f' et f'' sont les dérivées première et seconde de f).

Déterminer une base du sous-espace vectoriel $\mathcal{U}' \cap \mathcal{U}''$.

2.49 Soit S l'ensemble des suites u définies sur $\mathbb{N}$ telles que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

(a, b réels donnés).

1. Démontrer que S , muni de l'addition des suites et de la multiplication des suites par un réel, est un espace vectoriel.

2. Démontrer que la famille (s, t) telle que :

$s_0 = 1, s_1 = 0$, les autres termes de s vérifient la relation de récurrence,
 $t_0 = 0, t_1 = 1$, les autres termes de t vérifient la relation de récurrence,
est une base de S .

2.50 Soit S l'ensemble des suites u définies sur $\mathbb{N}$ telles que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = -\frac{1}{6} u_{n+1} + \frac{1}{3} u_n.$$

1. Démontrer que S , muni de l'addition des suites et de la multiplication des suites par un réel, est un espace vectoriel.

2. Démontrer qu'il existe deux suites géométriques non nulles formant une base de S .

3. On donne $u_0 = u_1 = 1$. Trouver la suite solution (on calculera le terme général u_n en fonction de n). Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?

2.51 Soit S l'ensemble des suites u définies sur $\mathbb{N}$, à valeurs complexes, telles que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n.$$

1. Démontrer que S , muni de l'addition des suites et de la multiplication des suites par un nombre complexe est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, une base étant formée de deux suites géométriques non nulles que l'on déterminera.

2. Démontrer qu'il existe deux suites de la forme $(r^n \cos \theta_n)$ et $(r^n \sin \theta_n)$ éléments de S .

Démontrer qu'elles forment une base de l'espace vectoriel des suites solutions, à valeurs réelles.

Déterminant de deux vecteurs

On rappelle que deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ d'un espace vectoriel muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont colinéaires ou linéairement dépendants ou encore que la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée si et seulement si

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad xy' - yx' = 0.$$

2.52 A quelle condition sur les réels α et β la famille $(\cos \alpha, \sin \alpha), (\cos \beta, \sin \beta)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^2$?

2.53 Soit $(\vec{a}, \vec{b})$ un couple de vecteurs d'un plan vectoriel, et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de ce plan. Montrer que l'ensemble des réels m tels que la famille $(\vec{a} - m\vec{i}, \vec{b} - m\vec{j})$ soit liée est un ensemble fini. Le déterminer pour

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{i} - \vec{j}, 2\vec{i} + 4\vec{j}).$$

2.54 Soit deux vecteurs

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

de $\mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

1. $(\vec{a}, \vec{b})$ est une famille libre.

2. Il existe un couple (i, j) , avec $1 \leq i < j \leq n$, tel que :

$$\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \neq 0.$$

3. Applications : Étudier si la famille $(\vec{a}, \vec{b})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est libre dans chacun des cas suivants (m, α, β étant des réels) :

$$\vec{a} (m, 1, 1), \quad \vec{b} (1, m, 1);$$

$$\vec{a} (m^2, m, 1), \quad \vec{b} (1, -1, m);$$

$$\vec{a} (\alpha, 0, \beta), \quad \vec{b} (\alpha, \beta, 0).$$

Matrices remarquables

2.55 Démontrer que les matrices ci-dessous représentent des familles libres de $\mathbb{R}^6$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.56 Démontrer que les matrices ci-dessous représentent des bases de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.57 Démontrer que les matrices ci-dessous représentent des familles génératrices de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.58 Démontrer que les matrices ci-dessous représentent des familles liées de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et donner des relations linéaires non triviales dans chaque cas.

Opérations élémentaires. Méthode du pivot de Gauss

Dans les exercices qui suivent, on donne, par une matrice A , les coordonnées canoniques dans $\mathbb{R}^n$ d'une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$. Par des opérations élémentaires sur les lignes, on mettra la matrice sous forme réduite de Gauss en indiquant les manipulations sous forme symbolique

$$(L_i \longleftrightarrow L_j, L_i \mapsto L_i + \lambda L_j),$$

et on indiquera si la famille étudiée est libre ou non, génératrice ou non, une base ou non.

2.59
$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 20 \\ 0 & -2 & -11 \\ 8 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.60
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.61
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.62 \begin{pmatrix} 5 & -9 & 0 & -23 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.63 \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}, \alpha \text{ réel.}$$

$$2.64 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{pmatrix}.$$

$$2.65 \begin{pmatrix} -128 & -173 & 163 \\ 91 & 123 & -116 \\ -51 & -69 & 65 \end{pmatrix}.$$

$$2.66 \begin{pmatrix} 62 & 2 & 18 \\ 25 & -3 & 0 \\ -13 & 11 & -18 \end{pmatrix}.$$

$$2.67 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 8 & -5 & -4 \\ 1 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.68 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.69 \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & -13 & 11 \\ 4 & 5 & -2 & -7 \\ 13 & -25 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.70 \begin{pmatrix} 4 & 10 & 1 & 0 \\ 8 & 18 & 7 & 4 \\ 18 & 40 & 17 & 10 \\ 7 & 17 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.71 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.72 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.73 \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ e & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5.$$

$$2.74 \begin{pmatrix} 21 & 36 & 41 & 6 \\ 13 & 35 & 40 & 6 \\ 32 & 42 & 48 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$2.75 \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

$$2.76 \begin{pmatrix} 1+x & 2 & -3 & 4 & -1 \\ 2+x & -1 & 3 & -4 & 2 \\ 3+x & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4+x & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1+x & -1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, (x \in \mathbb{R}).$$

$$2.77 \begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ a & 0 & c & d \\ a & b & 0 & d \\ a & b & c & 0 \end{pmatrix}, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

$$2.78 \begin{pmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$2.79 \begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.80 \begin{pmatrix} 294 & 217 & 53 \\ -84 & -62 & -15 \\ 61 & 45 & 11 \end{pmatrix}.$$

3

APPLICATIONS LINÉAIRES

Nous ne considérons que des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels que nous appellerons, pour simplifier : « espaces vectoriels ».

3.1 DÉFINITIONS. EXEMPLES. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

a) Application linéaire

Vous avez déjà vu des exemples d'applications linéaires en Première. Rappelons la définition :

Définition

Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$ des espaces vectoriels. On appelle **application linéaire de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{W}$** (ou vers $\mathcal{W}$) toute application φ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{W}$ possédant les deux propriétés de linéarité :

- (1) $(\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{U}^2) \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$
- (2) $(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall \vec{v} \in \mathcal{U}) \quad \varphi(\lambda \vec{v}) = \lambda \varphi(\vec{v}).$

On vérifiera que la conjonction des propriétés (1) et (2) est équivalente à :

$$(3) \quad (\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2) \quad (\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{U}^2) \quad \varphi(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda \varphi(\vec{u}) + \mu \varphi(\vec{v}).$$

EXEMPLES 1. Soit k un nombre réel *non nul* et $\mathcal{U}$ un espace vectoriel.

L'application

$$\begin{aligned} h_k : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{U} \\ \vec{v} &\longmapsto k\vec{v} \end{aligned}$$

est linéaire car quels que soient λ de $\mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathcal{U}$ on a :

$$\begin{aligned} h_k(\vec{u} + \vec{v}) &= k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} = h_k(\vec{u}) + h_k(\vec{v}) \\ h_k(\lambda \vec{v}) &= k(\lambda \vec{v}) = \lambda(k\vec{v}) = \lambda h_k(\vec{v}). \end{aligned}$$

Elle est appelée **homothétie vectorielle** de l'espace vectoriel $\mathcal{U}$, de rapport k .

2. L'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto 2x + 3y + z\end{aligned}$$

est linéaire car quels que soient λ de $\mathbb{R}$ et $(x, y, z), (x', y', z')$ de $\mathbb{R}^3$ on a :

$$\begin{aligned}\varphi((x, y, z) + (x', y', z')) &= \varphi((x + x', y + y', z + z')) \\ &= 2(x + x') + 3(y + y') + (z + z') \\ &= (2x + 3y + z) + (2x' + 3y' + z') \\ &= \varphi((x, y, z)) + \varphi((x', y', z'))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \varphi((x, y, z)) &= \lambda(2x + 3y + z) \\ &= 2(\lambda x) + 3(\lambda y) + (\lambda z) \\ &= \varphi(\lambda(x, y, z)).\end{aligned}$$

Une telle application linéaire est une forme linéaire. Plus généralement on appelle **forme linéaire** toute application linéaire d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{U}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}$.

3. L'application d qui associe à tout polynôme P le polynôme dérivé P' est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{P}$ des polynômes dans lui-même car, en appliquant les règles de calcul des dérivées, quels que soient le réel λ et les polynômes P et Q :

$$\begin{aligned}d(P + Q) &= (P + Q)' = P' + Q' = d(P) + d(Q) \\ d(\lambda P) &= (\lambda P)' = \lambda P' = \lambda d(P).\end{aligned}$$

REMARQUE Dans les exemples 1 et 3, l'espace vectoriel de départ est égal à l'espace vectoriel. D'une façon générale, une application linéaire d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$ dans lui-même est appelée **endomorphisme de $\mathcal{U}$** .

b) Premières propriétés

• Soit φ une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{U}$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{W}$. Appelons $\vec{0}$ et $\vec{0}'$ les vecteurs nuls respectivement de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$. Soit $\vec{v}$ un vecteur de $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{v}) &= \varphi(\vec{v} + \vec{0}) \\ \varphi(\vec{v}) &= \varphi(\vec{v}) + \varphi(\vec{0})\end{aligned}$$

d'où en simplifiant par $\varphi(\vec{v})$:

$$\varphi(\vec{0}) = \vec{0}'$$

• Quel que soit $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$:

$$\varphi(\vec{v}) + \varphi(-\vec{v}) = \varphi(\vec{v} + (-\vec{v})) = \varphi(\vec{0}) = \vec{0}'$$

donc

$$\varphi(-\vec{v}) = -\varphi(\vec{v})$$

(Notons que ces deux propriétés s'obtiennent aussi en faisant $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$ dans l'égalité (2) donnée dans la définition d'une application linéaire.)

- Quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$:

$$\varphi(\vec{u} - \vec{v}) = \varphi(\vec{u} + (-\vec{v})) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(-\vec{v})$$

d'où

$$\varphi(\vec{u} - \vec{v}) = \varphi(\vec{v}) - \varphi(\vec{v})$$

- On démontre, par récurrence, à l'aide de l'égalité (3) du § 3.1 a), la propriété suivante d'usage constant :

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(\vec{v}_i)$$

3.2 IMAGE ET NOYAU D'UNE APPLICATION LINÉAIRE DE $\mathcal{U}$ DANS $\mathcal{W}$

a) Image d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$

Soit $\mathcal{U}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$ et φ une application linéaire de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{W}$. Montrons que $\varphi(\mathcal{U})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{W}$:

- $\varphi(\mathcal{U})$ est une partie non vide de $\mathcal{W}$ puisque $\mathcal{U}$ n'est pas vide;
- $\varphi(\mathcal{U})$ est stable par combinaisons linéaires car quels que soient λ, μ de $\mathbb{R}$ et $\vec{u}', \vec{v}'$ de $\varphi(\mathcal{U})$ montrons que

$$\lambda \vec{u}' + \mu \vec{v}' \in \varphi(\mathcal{U}).$$

En effet il existe $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$ tels que

$$\varphi(\vec{u}) = \vec{u}' \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{v}) = \vec{v}'$$

$$\text{or} \quad \varphi(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda \varphi(\vec{u}) + \mu \varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{u}' + \mu \vec{v}'$$

$\lambda \vec{u}' + \mu \vec{v}'$ admet un antécédent $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ par φ , donc $\lambda \vec{u}' + \mu \vec{v}' \in \varphi(\mathcal{U})$.

Théorème

L'image d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$ par une application linéaire de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{W}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{W}$.

b) Image d'une application linéaire

En particulier $\varphi(\mathcal{U})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{W}$.

Définition

On appelle image d'une application linéaire φ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{W}$, l'image $\varphi(\mathcal{U})$ de $\mathcal{U}$ par φ .

On la note : $\text{Im } \varphi$. C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble d'arrivée $\mathcal{W}$.

**EXERCICE
RÉSOLU**

Déterminer l'image d'une forme linéaire.

Rappelons (cf. § 3.1 a)) qu'une forme linéaire φ est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ dans $\mathbb{R}$.

- Si φ est nulle, tous les vecteurs de $\mathcal{V}$ ont pour image 0 donc $\text{Im } \varphi = \{0\}$.
- Si φ n'est pas nulle, il existe $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ tel que $\varphi(\vec{v}) = a \neq 0$

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x &= \frac{x}{a} a = \frac{x}{a} \varphi(\vec{v}) \\ &= \varphi\left(\frac{x}{a} \vec{v}\right) \end{aligned}$$

donc $x \in \text{Im } \varphi$ d'où $\mathbb{R} \subset \text{Im } \varphi$ et comme $\text{Im } \varphi \subset \mathbb{R}$ on a donc $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}$.
L'image d'une forme linéaire est $\{0\}$ ou $\mathbb{R}$.

c) Noyau d'une application linéaire**Définition**

On appelle **noyau d'une application linéaire φ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{W}$** , l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{V}$ dont l'image par φ est le vecteur nul de $\mathcal{W}$.

On note ce noyau : $\text{Ker } \varphi$ (le mot allemand kernel signifie noyau). Montrons que $\text{Ker } \varphi$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de départ $\mathcal{V}$. Appelons $\vec{0}$ et $\vec{0}'$ les vecteurs nuls respectivement de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$:

- $\text{Ker } \varphi$ est une partie non vide de $\mathcal{V}$ puisque nous avons vu (cf. § 3.1 b)) que $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}'$ donc $\vec{0} \in \text{Ker } \varphi$.
- $\text{Ker } \varphi$ est stable par combinaisons linéaires car quels que soient λ, μ de $\mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v}$ de $\text{Ker } \varphi$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{u}) &= \vec{0}', & \varphi(\vec{v}) &= \vec{0}' \\ \varphi(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) &= \lambda \varphi(\vec{u}) + \mu \varphi(\vec{v}) = \vec{0}' \end{aligned}$$

donc $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in \text{Ker } \varphi$. Conclusion :

Théorème

Le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de départ.

**EXERCICE
RÉSOLU**

Déterminer le noyau de l'application linéaire définie au 3.1 a).

$$\begin{aligned} d : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ p &\longmapsto p' \end{aligned}$$

qui associe à tout polynôme sa dérivée.

$\text{Ker } d$ est l'ensemble des polynômes dont la dérivée est nulle sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire l'ensemble des polynômes constants : $x \longmapsto a$ (a réel quelconque).

d) Injectivité et noyau

On peut se demander à quelle condition $\text{Ker } \varphi = \{\vec{0}\}$?

Si l'application linéaire φ est injective, seul le vecteur nul $\vec{0}$ de $\mathcal{U}$ a pour image le vecteur nul $\vec{0}'$ de $\mathcal{W}$ donc $\text{Ker } \varphi = \{\vec{0}\}$.

Réciproquement soit φ une application linéaire de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{W}$ telle que $\text{Ker } \varphi = \{\vec{0}\}$. Quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$ tels que $\varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{v})$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v}) &= \vec{0}' \\ \varphi(\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{0}' \\ \vec{u} - \vec{v} &\in \text{Ker } \varphi \\ \vec{u} - \vec{v} &= \vec{0} \text{ (puisque } \text{Ker } \varphi = \{\vec{0}\}) \\ \vec{u} &= \vec{v}.\end{aligned}$$

Donc φ est injective. Conclusion :

Théorème

Une application linéaire φ est injective si et seulement si $\text{Ker } \varphi = \{\vec{0}\}$.

3.3 IMAGE DE FAMILLES DE VECTEURS

Nous appellerons image d'une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ de vecteurs de $\mathcal{U}$ par une application linéaire φ , la famille $(\varphi(\vec{v}_1), \varphi(\vec{v}_2), \dots, \varphi(\vec{v}_n))$.

a) Image d'une famille liée et d'une famille génératrice

- Soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ une famille liée de $\mathcal{U}$, la relation linéaire étant

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0},$$

les λ_i n'étant pas tous nuls. On en déduit :

$$\lambda_1 \varphi(\vec{v}_1) + \lambda_2 \varphi(\vec{v}_2) + \dots + \lambda_n \varphi(\vec{v}_n) = \vec{0} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(\vec{v}_i) = \vec{0}.$$

On obtient la *même* relation linéaire.

- Soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ une famille génératrice de $\mathcal{U}$ ce qui signifie que $\mathcal{U}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i$ (les λ_i décrivant $\mathbb{R}$). Donc $\varphi(\mathcal{U}) = \text{Im } \varphi$ est l'ensemble des vecteurs

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(\vec{v}_i)$$

c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de $\mathcal{W}$ engendré par la famille $(\varphi(\vec{v}_1), \varphi(\vec{v}_2), \dots, \varphi(\vec{v}_n))$. Cette famille est donc une famille génératrice de $\text{Im } \varphi$.

Théorèmes

Soit φ une application linéaire de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{W}$.

1. L'image de toute famille liée de $\mathcal{U}$ est une famille liée de $\mathcal{W}$, la relation linéaire étant la même pour les deux familles.

2. L'image de toute famille génératrice de $\mathcal{U}$ est une famille génératrice de $\text{Im } \varphi$.

b) Image d'une famille libre

A quelle condition l'image de *toute* famille libre de $\mathcal{U}$ est-elle une famille libre de $\mathcal{W}$? S'il en est ainsi pour toute famille libre de $\mathcal{U}$, l'image en particulier d'une famille libre à un élément $\vec{v} \neq \vec{0}$ est une famille libre de $\mathcal{W}$ c'est-à-dire que $\varphi(\vec{v}) \neq \vec{0}$. On a donc $\varphi(\vec{v})$ non nul pour tout vecteur $\vec{v}$ non nul, donc $\text{Ker } \varphi = \{\vec{0}\}$. L'application linéaire φ est injective.

Réciproquement, si φ est injective, soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ une famille libre de $\mathcal{U}$. Montrons que

$$(\varphi(\vec{v}_1), \varphi(\vec{v}_2), \dots, \varphi(\vec{v}_n))$$

est une famille libre de $\mathcal{W}$:

si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(\vec{v}_i) = \vec{0}'$, alors

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i\right) = \vec{0}'$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0} \quad (\text{car } \text{Ker } \varphi = \{\vec{0}\})$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \quad (\text{car } (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) \text{ est libre})$$

donc $(\varphi(\vec{v}_1), \varphi(\vec{v}_2), \dots, \varphi(\vec{v}_n))$ est libre. Énonçons :

Théorème

Soit φ une application linéaire de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{W}$.

L'image de toute famille libre de $\mathcal{U}$ est une famille libre de $\mathcal{W}$ si et seulement si φ est injective.

c) Image d'une base

Il résulte des théorèmes des sous-paragraphes b) et c) que si φ est une application linéaire injective, l'image de *toute* base, quand elle existe, de $\mathcal{U}$ (famille génératrice de $\mathcal{U}$ et libre) est une famille génératrice de $\text{Im } \varphi$ et libre, c'est-à-dire une base de $\text{Im } \varphi$.

Réciproquement s'il existe *une* base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ de $\mathcal{U}$ dont l'image $(\varphi(\vec{v}_1), \varphi(\vec{v}_2), \dots, \varphi(\vec{v}_n))$ soit une base de $\text{Im } \varphi$, montrons que φ est injective. Pour cela, montrons que $\text{Ker } \varphi = \{\vec{0}\}$. Soit

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i$$

un vecteur de $\text{Ker } \varphi$, on a : $\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i\right) = \vec{0}$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(\vec{v}_i) = \vec{0}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \text{ (car } (\varphi(\vec{v}_1), \varphi(\vec{v}_2), \dots, \varphi(\vec{v}_n)) \text{ est une base)}$$

$$\vec{v} = \vec{0}$$

donc $\text{Ker } \varphi = \{\vec{0}\}$. Conclusion :

Théorème

Si φ est une application linéaire injective de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{W}$, l'image de toute base de $\mathcal{U}$, quand il y en a, est une base de $\text{Im } \varphi$.

Réciproquement, s'il existe une base de $\mathcal{U}$ qui ait pour image une base de $\text{Im } \varphi$ par une application linéaire φ , alors φ est injective.

Cas particulier. Si φ est une application linéaire bijective (c'est-à-dire injective et surjective) de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{W}$, d'après le théorème précédent, l'image de toute base de $\mathcal{U}$ est une base de $\text{Im } \varphi$ qui est égale à $\mathcal{W}$ puisque φ est surjective.

Réciproquement, s'il existe *une* base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ de $\mathcal{U}$ dont l'image

$$(\varphi(\vec{v}_1), \varphi(\vec{v}_2), \dots, \varphi(\vec{v}_n))$$

soit une base de $\mathcal{W}$. Cette dernière est une famille génératrice de $\mathcal{W}$, mais elle est aussi génératrice de $\text{Im } \varphi$ (d'après § 3.3.a) l'image d'une famille génératrice de $\mathcal{U}$ est une famille génératrice de $\text{Im } \varphi$) donc $\text{Im } \varphi = \mathcal{W}$, par suite φ est surjective. D'après le théorème précédent, φ est aussi injective. Donc φ est bijective.

Théorème

Si φ est une application linéaire bijective de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{W}$, l'image de toute base de $\mathcal{U}$, quand il y en a, est une base de $\mathcal{W}$.

Réciproquement, s'il existe une base de $\mathcal{U}$ qui ait pour image une base de $\mathcal{W}$ par une application linéaire φ , alors φ est bijective.

3.4 ISOMORPHISME D'ESPACES VECTORIELS

a) Application réciproque d'une application linéaire bijective

Le théorème précédent caractérise les applications linéaires bijectives, lorsque $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$ ont des bases.

D'une façon générale, soit φ une application linéaire bijective de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{W}$ ($\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$ admettent ou non des bases), l'application réciproque φ^{-1} est une bijection de $\mathcal{W}$ sur $\mathcal{U}$. Démontrons que φ^{-1} est aussi une application linéaire : quels que soient $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ de $\mathcal{W}$, il existe $\vec{u}$ unique et $\vec{v}$ unique de $\mathcal{U}$ tels que :

$$\varphi(\vec{u}) = \vec{u}', \quad \varphi(\vec{v}) = \vec{v}'.$$

Si λ et μ sont des réels quelconques, on a :

$$\varphi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{u}) + \mu\varphi(\vec{v})$$

$$\varphi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\vec{u}' + \mu\vec{v}'$$

donc

$$\varphi^{-1}(\lambda\vec{u}' + \mu\vec{v}') = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

$$\varphi^{-1}(\lambda\vec{u}' + \mu\vec{v}') = \lambda\varphi^{-1}(\vec{u}') + \mu\varphi^{-1}(\vec{v}')$$

ce qui exprime que φ^{-1} est linéaire.

Théorème et définitions

L'application réciproque d'une application linéaire bijective de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{W}$ est une application linéaire bijective de $\mathcal{W}$ sur $\mathcal{U}$.

Une application linéaire bijective de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{W}$ est appelée un *isomorphisme* de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{W}$. On dit, dans ce cas, que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$ sont *isomorphes*.

Lorsque $\mathcal{U} = \mathcal{W}$, un isomorphisme de $\mathcal{U}$ sur lui-même est appelé un *automorphisme* de $\mathcal{U}$.

b) Un isomorphisme fondamental

Dans le chapitre 2, nous avons étudié essentiellement les propriétés de $\mathbb{R}^n$ et nous avons remarqué que toutes les bases de $\mathbb{R}^n$ avaient le même nombre n de vecteurs. L'entier n a été appelé la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Soit $\mathcal{U}$ un espace vectoriel possédant une base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$. Considérons l'application φ qui associe à tout n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ le vecteur

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i \quad \text{de } \mathcal{U}.$$

On vérifie facilement que φ est linéaire, surjective et injective donc φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{U}$.

Théorème fondamental

Tout espace vectoriel ayant une base de n vecteurs est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Il en résulte alors, en appliquant les théorèmes donnés au § 3.3 à l'isomorphisme fondamental φ précédent que toutes les propriétés établies au chapitre 2 sur $\mathbb{R}^n$ sont encore vraies pour $\mathcal{U}$, pourvu que $\mathcal{U}$ admette une base de n vecteurs. Énonçons ces propriétés :

Théorèmes

Soit $\mathcal{U}$ un espace vectoriel ayant une base de n vecteurs.

1. Toute famille libre de $\mathcal{U}$ possède au plus n vecteurs.
2. Toute famille libre de n vecteurs de $\mathcal{U}$ est une base de $\mathcal{U}$.
3. Toute famille libre de p vecteurs ($p < n$) de $\mathcal{U}$ peut être complétée en une base de $\mathcal{U}$.
4. Toute famille génératrice de $\mathcal{U}$ possède au moins n vecteurs.
5. Toute famille génératrice de n vecteurs de $\mathcal{U}$ est une base de $\mathcal{U}$.
6. De toute famille génératrice de p vecteurs ($p > n$) de $\mathcal{U}$, on peut extraire une base de $\mathcal{U}$.
7. Toute base de $\mathcal{U}$ possède exactement n vecteurs.

Il résulte du théorème 7 précédent que si $\mathcal{U}$ admet une base de n vecteurs, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs.

Définition

On dit qu'un espace vectoriel est de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) si et seulement s'il possède une base de n vecteurs.

La dimension d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$ se note : $\dim \mathcal{U}$.

L'espace vectoriel $\{\vec{0}\}$ n'a pas de base puisque tout vecteur d'une base est non nul. On convient de dire que la dimension de $\{\vec{0}\}$ est nulle : $\dim \{\vec{0}\} = 0$.

Un espace vectoriel de dimension un entier naturel est appelé espace vectoriel de dimension finie.

Tout espace vectoriel de dimension 1 est appelé droite vectorielle; tout espace vectoriel de dimension 2 est appelé plan vectoriel.

Soit $\mathcal{U}$ un espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) et φ un endomorphisme de $\mathcal{U}$. On a :

$$\begin{aligned}
 \varphi \text{ est injectif} &\iff \text{l'image d'une base de } \mathcal{U} \text{ est une base de } \text{Im } \varphi \\
 &\quad (\text{cf. § 3.3. c)}) \\
 &\iff \text{Im } \varphi = \mathcal{U} \\
 &\iff \varphi \text{ est surjectif.}
 \end{aligned}$$

Dire que φ est injectif équivaut donc à dire que φ est surjectif, donc que φ est bijectif.

Le résultat est encore vrai si $n = 0$. On peut énoncer :

Théorème

Pour tout endomorphisme φ d'un espace vectoriel de dimension finie, les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) φ est injectif
- (2) φ est surjectif
- (3) φ est bijectif.

3.5 DÉTERMINATION D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

a) Détermination par l'image d'une base

Soit $\mathcal{U}$ un espace vectoriel ayant une base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ et $\mathcal{W}$ un espace vectoriel de dimension finie ou non. Cherchons s'il existe une application linéaire φ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{W}$ telle que, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ étant des vecteurs donnés de $\mathcal{W}$:

$$\varphi(\vec{a}_1) = \vec{v}_1, \quad \varphi(\vec{a}_2) = \vec{v}_2, \quad \dots, \quad \varphi(\vec{a}_n) = \vec{v}_n.$$

- Si φ existe, nécessairement l'image d'un vecteur quelconque $\sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i$ est :

$$(1) \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i\right) = \sum x_i \vec{v}_i.$$

- Réciproquement, l'application définie par (1) est-elle linéaire? Quels que soient les réels λ et μ et les vecteurs $\sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i$ et $\sum_{i=1}^n y_i \vec{a}_i$ de $\mathcal{U}$ on a :

$$\begin{aligned}
 \varphi\left(\lambda \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i + \mu \sum_{i=1}^n y_i \vec{a}_i\right) &= \varphi\left(\lambda \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i\right) + \varphi\left(\mu \sum_{i=1}^n y_i \vec{a}_i\right) \\
 &= \lambda \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i\right) + \mu \varphi\left(\sum_{i=1}^n y_i \vec{a}_i\right)
 \end{aligned}$$

donc φ est bien linéaire.

D'après (1), les images par φ des vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ sont bien $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

Donc l'application linéaire cherchée est l'application *unique* de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{W}$ définie par (1).

Théorème

Pour toute base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$ et toute famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ de n vecteurs d'un espace vectoriel $\mathcal{W}$, il existe une application linéaire et une seule φ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{W}$ telle que

$$\varphi(\vec{a}_1) = \vec{v}_1, \quad \varphi(\vec{a}_2) = \vec{v}_2, \quad \dots, \quad \varphi(\vec{a}_n) = \vec{v}_n.$$

On dit que φ est déterminée par l'image d'une base.

b) Détermination par une matrice

EXEMPLE Soit un espace vectoriel $\mathcal{U}$ ayant une base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ et un espace vectoriel $\mathcal{W}$ de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne, dans $\mathcal{W}$, les vecteurs $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$, $\vec{d}'$ dont les matrices des coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On sait qu'il existe une application linéaire unique φ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{W}$ déterminée par l'image $(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}', \vec{d}')$ de la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$, c'est-à-dire par la donnée des matrices-colonnes précédentes. Cela revient à se donner la matrice de la famille $(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}', \vec{d}')$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + t\vec{d}$ un vecteur quelconque de $\mathcal{U}$, calculons $\varphi(\vec{v})$:

$$\varphi(\vec{v}) = x\varphi(\vec{a}) + y\varphi(\vec{b}) + z\varphi(\vec{c}) + t\varphi(\vec{d})$$

or

$$\varphi(\vec{a}) = \vec{a}' = -\vec{i} + 2\vec{k}$$

$$\varphi(\vec{b}) = \vec{b}' = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\varphi(\vec{c}) = \vec{c}' = -2\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\varphi(\vec{d}) = \vec{d}' = -3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \varphi(\vec{v}) &= x(-\vec{i} + 2\vec{k}) + y(3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) + z(-2\vec{i} + 4\vec{j}) + t(-3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\ &= (-x + 3y - 2z - 3t)\vec{i} + (y + 4z + t)\vec{j} + (2x - 2y + t)\vec{k}. \end{aligned}$$

Les coordonnées de $\varphi(\vec{v})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont :

$$\begin{cases} x' = -x + 3y - 2z - 3t & (1) \\ y' = y + 4z + t & (2) \\ z' = 2x - 2y + t & (3) \end{cases}$$

Vous remarquez que dans (1), (2) et (3) les coefficients de x, y, z, t sont respectivement ceux de la 1^{re} ligne, 2^e ligne et 3^e ligne de la matrice A .

Généralisation

Supposons que $\mathcal{U}$ possède une base $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_p)$ ($1 \leq i \leq p$) et $\mathcal{W}$ une base $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_i, \dots, \vec{b}_n)$ ($1 \leq i \leq n$). Il existe une application linéaire unique φ

de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{W}$ déterminée par les images des $\vec{a}_j$, ces images étant définies par des matrices-colonnes :

$$C_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{i1} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \dots, C_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{ij} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}, \dots, C_p = \begin{pmatrix} \alpha_{1p} \\ \vdots \\ \alpha_{ip} \\ \vdots \\ \alpha_{np} \end{pmatrix}$$

ou encore par la matrice de la famille $(\varphi(\vec{a}_1), \dots, \varphi(\vec{a}_j), \dots, \varphi(\vec{a}_p))$ dans la base $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_i, \dots, \vec{b}_n)$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{np} \end{pmatrix}$$

Soit $\vec{v} = \sum_{j=1}^p x_j \vec{a}_j$ un vecteur quelconque de $\mathcal{U}$, calculons les coordonnées $y_1, \dots, y_i, \dots, y_n$ de $\varphi(\vec{v})$:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{v}) &= \sum_{j=1}^p x_j \varphi(\vec{a}_j) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \vec{b}_i \right) \\ &= x_1(\alpha_{11} \vec{b}_1 + \dots + \alpha_{n1} \vec{b}_n) + \dots + x_p(\alpha_{1p} \vec{b}_1 + \dots + \alpha_{np} \vec{b}_n) \\ &= (\alpha_{11} x_1 + \dots + \alpha_{1p} x_p) \vec{b}_1 + \dots + (\alpha_{n1} x_1 + \dots + \alpha_{np} x_p) \vec{b}_n \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p \alpha_{ij} x_j \right) \vec{b}_i \end{aligned}$$

donc

$$y_i = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} x_j$$

dans le calcul de la i^e coordonnée y_i , les coefficients des x_j sont ceux de la i^e ligne de A .

3.6 SYSTÈMES D'EQUATIONS LINEAIRES

a) Deux interprétations

Un système d'équations linéaires (que vous avez déjà rencontré dans les classes précédentes) est un système de la forme :

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1p}x_p = \beta_1 \\ \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{ip}x_p = \beta_i \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{np}x_p = \beta_n \end{cases}$$

ou encore pour $1 \leq i \leq n$:

$$\sum_{j=1}^p \alpha_{ij} x_j = \beta_i,$$

dans lequel $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{np}, \beta_1, \dots, \beta_n$ sont des réels donnés et les p réels $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont des *inconnues*. On dit aussi que l'*inconnue* est $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui, lorsqu'elle vérifie (S), est une *solution* de (S).

■ Première interprétation

Soit $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ et $\vec{v}$ les vecteurs de $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique, dont les matrices-colonnes des coordonnées sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{i1} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{i2} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_{1p} \\ \vdots \\ \alpha_{ip} \\ \vdots \\ \alpha_{np} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

(S) est équivalent à :

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_p \vec{v}_p = \vec{v}$$

La recherche des solutions de (S) revient à décomposer le vecteur $\vec{v}$ dans la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$:

- si $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ est libre, la décomposition de $\vec{v}$, donc le système (S), admet *au plus* une solution : zéro solution si $\vec{v} \notin \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$, une solution si $\vec{v} \in \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$;
- si $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$, (S) admet *au moins* une solution;
- si $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, (S) admet une solution *unique*.

■ Deuxième interprétation

On peut considérer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ comme les images de la base canonique $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p)$ de $\mathbb{R}^p$ par une application linéaire φ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. Le système (S) est alors équivalent à :

$$x_1 \varphi(\vec{a}_1) + x_2 \varphi(\vec{a}_2) + \dots + x_p \varphi(\vec{a}_p) = \vec{v}$$

$$\varphi(x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_p \vec{a}_p) = \vec{v}$$

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{v}$$

en posant $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$. La recherche des solutions de (S) revient à la recherche des antécédents $\vec{x}$ de $\vec{v}$ par l'application linéaire φ :

- si φ est injective, il y a *au plus* un antécédent : aucun si $\vec{v} \notin \text{Im } \varphi$, un seul si $\vec{v} \in \text{Im } \varphi$;
- si φ est surjective, il y a *au moins* un antécédent;
- si φ est bijective, il y a un antécédent *unique*.

b) Système de Cramer

Définition

Un système de Cramer est un système de n équations linéaires à n inconnues ayant une solution unique.

Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues.

D'après la première interprétation précédente, si $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on sait que la décomposition de $\vec{v}$ dans cette base est unique : (S) est un système de Cramer.

Réciproquement, si (S) est un système de Cramer. Montrons que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ est libre : si elle est liée on a

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ non tous nuls donc

$$\begin{cases} \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \\ x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = \vec{0} \end{cases}$$

et en additionnant membre à membre

$$(x_1 + \lambda_1) \vec{v}_1 + (x_2 + \lambda_2) \vec{v}_2 + \dots + (x_n + \lambda_n) \vec{v}_n = \vec{0}$$

une autre solution que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est $(x_1 + \lambda_1, x_2 + \lambda_2, \dots, x_n + \lambda_n)$. Ce qui est impossible puisque (S) est un système de Cramer. Donc la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ est libre. Le nombre de ses vecteurs est $n = \dim \mathbb{R}^n$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^n$. Nous pouvons énoncer :

Théorème

Un système de n équations linéaires à n inconnues est un système de Cramer si et seulement si les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ formés avec les coefficients des inconnues forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Si l'on utilise la seconde interprétation de (S), un système de n équations linéaires à n inconnues est un système de Cramer si et seulement si φ est bijective, c'est-à-dire un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

c) Exemples de résolution par la méthode du pivot

Nous appellerons $L_1, L_2, \dots, L_n$
 $L'_1, L'_2, \dots, L'_n$
 $L''_1, L''_2, \dots, L''_n$

respectivement les *premiers membres des équations* de (S), de (S'), de (S'') qui sont des systèmes d'équations linéaires de la même forme que (S) et **équivalents** entre eux (c'est-à-dire ayant les mêmes solutions).

Règle fondamentale

Soit $L_i = \beta_i$ et $L_j = \beta_j$ deux équations de (S). On obtient un système équivalent à (S) si l'on fait une opération élémentaire sur la ligne du premier membre : $L_i \mapsto L_i = \lambda L_j$ et la même opération élémentaire sur le second membre : $\beta_i \mapsto \beta_i + \lambda \beta_j$.

Si l'on fait alors apparaître des zéros par la méthode du pivot, on obtiendra un système plus facile à résoudre : en particulier, lorsque la matrice canonique de $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ devient une matrice réduite de Gauss de type I ou II ou III ou une matrice à palier horizontal (cf. § 2.8 d) et 2.8 e)).

EXERCICE
RÉSOLU 1

Résoudre dans $\mathbb{R}^4$:

$$(S) \begin{cases} 2x + 2y - 2z + 5t = -6 \\ 3x \quad \quad - z + t = -3 \\ 2x - y \quad \quad - 3t = 2 \\ 2x - y + z - t = 1. \end{cases}$$

Faisons les substitutions $L_1 \mapsto L_1 + 5L_4$, $L_2 \mapsto L_2 + L_4$, $L_3 \mapsto L_3 - 3L_4$:

$$(S') \begin{cases} 12x - 3y + 3z \quad = -1 \\ 5x - y \quad \quad = -2 \\ -4x + 2y - 3z \quad = -1 \\ 2x - y + z - t = 1. \end{cases}$$

Faisons la substitution $L'_1 \mapsto L'_1 + L'_3$:

$$(S'') \begin{cases} 8x - y \quad \quad = -2 \\ 5x - y \quad \quad = -2 \\ -4x + 2y - 3z = -1 \\ 2x - y + z - t = 1. \end{cases}$$

Faisons la substitution $L''_1 \mapsto L''_1 - L''_2$:

$$(S''') \begin{cases} 3x \quad \quad \quad = 0 \\ 5x - y \quad \quad = -2 \\ -4x + 2y - 3z = -1 \\ 2x - y + z - t = 1. \end{cases}$$

La matrice de $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ dans la nouvelle base est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrice réduite de Gauss du type (II) (cf. § 2.8 d)) donc $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. (S) est un système de Cramer. La solution unique de (S) est celle de (S''') qui est un système triangulaire dont la solution est immédiate :

$$\left(0, 2, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

**EXERCICE
RÉSOLU 2**Résoudre dans $\mathbb{R}^4$:

$$(S) \begin{cases} 3x - 2y + 2z - 3t = 2 \\ 5x + y - z + 2t = -1 \\ 2x - y + z - 3t = 4 \\ 2x + y - z + t = 1. \end{cases}$$

Faisons les substitutions $L_1 \mapsto L_1 + 3L_4$, $L_2 \mapsto L_2 - 2L_4$, $L_3 \mapsto L_3 + 3L_4$:

$$(S') \begin{cases} 9x + y - z = 5 \\ x - y + z = 1 \\ 8x + 2y - 2z = 7 \\ 2x + y - z + t = 1. \end{cases}$$

Faisons l'échange $L_2' \leftrightarrow L_3'$ (pour éviter des fractions) :

$$(S'') \begin{cases} 9x + y - z = 5 \\ 8x + 2y - 2z = 7 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + y - z + t = 1. \end{cases}$$

Faisons les substitutions $L_2'' \mapsto L_1'' + L_3''$, $L_2'' \mapsto L_2'' + 2L_3''$:

$$\begin{cases} 10x = 6 \\ 10x = 9 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + y - z + t = 1. \end{cases}$$

Ce qui est impossible ($6 \neq 9$). Donc (S) n'admet *aucune solution*.Interprétation : la matrice de $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$, dans la nouvelle base, est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \star & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \star \end{pmatrix}$$

elle a un palier horizontal (cf. § 2.8e)). La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est donc liée. Remarquons que $\vec{v}_3 = -\vec{v}_2$ donc $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4)$ et $\vec{v} \notin \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4)$.

**EXERCICE
RÉSOLU 3**Résoudre dans $\mathbb{R}^5$:

$$(S) \begin{cases} 2x - 14y + 7z - 7t + 11u = -1 \\ 4x - 10y + 5z - 5t + 7u = 1 \\ x + 2y - z + t - 2u = 1 \\ 2x - 2y + z - t + u = 1. \end{cases}$$

Faisons les substitutions $L_1 \mapsto L_1 - 11L_4$, $L_2 \mapsto L_2 - 7L_4$, $L_3 \mapsto L_3 + 2L_4$:

$$(S') \begin{cases} -20x + 8y - 4z + 4t = -12 \\ -10x + 4y - 2z + 2t = -6 \\ 5x - 2y + z - t = 3 \\ 2x - 2y + z - t + u = 1. \end{cases}$$

Faisons les substitutions $L_1' \mapsto L_1' + 4L_3'$, $L_2' \mapsto L_2' + 2L_3'$:

$$(S'') \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 5x - 2y + z - t = 3 \\ 2x - 2y + z - t + u = 1. \end{cases}$$

La matrice de $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$, dans la nouvelle base, est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ominus 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \oplus 1 \end{pmatrix}.$$

Comme dans l'exercice précédent, elle a un palier horizontal mais, cette fois-ci, $\vec{v} \in \text{Vect}(\vec{v}_4, \vec{v}_5)$.

Le système

$$\begin{cases} 5x - 2y + z - t = 3 \\ 2x - 2y + z - t + u = 1 \end{cases}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} -t = 3 - 5x + 2y - z \\ -t + u = 1 - 2x + 2y - z \end{cases}$$

sous cette forme, la matrice associée est

$$\begin{pmatrix} \ominus 1 & 0 \\ -1 & \oplus 1 \end{pmatrix}$$

matrice réduite de Gauss du type (II). Chaque fois que l'on se donne x, y, z , le couple (t, u) est unique :

$$\begin{cases} t = -3 + 5x - 2y + 2 \\ u = -2 + 3x. \end{cases}$$

Le système (S) admet une *infinité de solutions* qui sont

$$(x, y, z, -3 + 5x - 2y + 2, -2 + 3x) = (0, 0, 0, -3, -2) + x(1, 0, 0, 5, 3) \\ + y(0, 1, 0, -2, 0) + z(0, 0, 1, 1, 0)$$

où x, y, z sont des réels arbitraires.

3.7 COMPOSITION DES APPLICATIONS LINÉAIRES

a) La composée de deux applications linéaires est-elle une application linéaire?

Soit $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ des espaces vectoriels. Considérons l'application $\psi \circ \varphi$ où φ est une application linéaire de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ et ψ une application linéaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{U} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{V} \xrightarrow{\psi} \mathcal{W}.$$

Quels que soient λ, μ de $\mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathcal{U}$, on a :

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) &= \psi(\varphi(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v})) \\ &= \psi(\lambda \varphi(\vec{u}) + \mu \varphi(\vec{v})) \\ &= \lambda \psi(\varphi(\vec{u})) + \mu \psi(\varphi(\vec{v})) \\ &= \lambda(\psi \circ \varphi)(\vec{u}) + \mu(\psi \circ \varphi)(\vec{v}) \end{aligned}$$

donc $\psi \circ \varphi$ est une application linéaire de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{W}$. On peut énoncer :

Théorème

L'application composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

En particulier l'application composée de deux endomorphismes de $\mathcal{U}$ est un endomorphisme de $\mathcal{U}$.

EXEMPLE Soit φ et ψ les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x - y, x - y) \\ \psi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x - y, 0).\end{aligned}$$

Calculons $\theta = \psi \circ \varphi$:

$$\begin{aligned}\theta(x, y) &= \psi(\varphi(x, y)) = \psi(x - y, x - y) \\ &= ((x - y) - (x - y), 0) = (0, 0).\end{aligned}$$

La composée θ est l'application nulle.

(Cet exemple nous montre que l'application composée de deux endomorphismes peut être nulle sans qu'aucun d'eux ne le soit.)

b) Le groupe linéaire de $\mathcal{U}$

Rappelons qu'un automorphisme de $\mathcal{U}$ est un isomorphisme de $\mathcal{U}$ sur lui-même (cf. § 3.4 a)), c'est-à-dire une application linéaire bijective de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}$. Étudions l'ensemble des automorphismes de $\mathcal{U}$, muni de la composition des applications :

- la loi $\circ$ est *interne* dans l'ensemble des automorphismes de $\mathcal{U}$ car, quels que soient les automorphismes φ et ψ de $\mathcal{U}$, $\psi \circ \varphi$ est bijective (composée de deux bijections) et $\psi \circ \varphi$ est un endomorphisme de $\mathcal{U}$;
- la composition des applications est toujours *associative* donc elle l'est aussi dans l'ensemble des automorphismes de $\mathcal{U}$;
- l'*élément neutre* est $\text{id}_{\mathcal{U}}$ qui est un automorphisme de $\mathcal{U}$;
- tout automorphisme φ de $\mathcal{U}$ admet un *symétrique* φ^{-1} qui est aussi un automorphisme de $\mathcal{U}$ (cf. § 3.4 a) où $\mathcal{U} = \mathcal{W}$). Donc :

Théorème et définition

L'ensemble des automorphismes de $\mathcal{U}$, muni de la composition des applications, est un groupe.
Ce groupe est appelé le **groupe linéaire de $\mathcal{U}$** . On le note $(\mathcal{GL}(\mathcal{U}), \circ)$.

c) Le groupe des homothéties vectorielles de $\mathcal{U}$

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties vectorielles de $\mathcal{U}$, muni de la composition des applications. On vérifie facilement que $(\mathcal{H}, \circ)$ est un groupe *commutatif* (en appelant h_k l'homothétie vectorielle de $\mathcal{U}$ de rapport $k \neq 0$, $h_{k'} \circ h_k = h_{k'k}$ donc la loi $\circ$ est interne, elle est associative, commutative, $h_1 = \text{id}_{\mathcal{U}}$ est l'élément neutre, $h_k^{-1} = h_{1/k}$).

On peut remarquer que l'application θ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathcal{H} : k \mapsto h_k$ est bijective et que, quels que soient les réels non nuls k et k' :

$$\theta(k'k) = h_{k'k} = h_{k'} \circ h_k$$

$$\theta(k'k) = \theta(k') \circ \theta(k)$$

on dit encore que θ est un *isomorphisme* de $(\mathbb{R}^*, \times)$ sur $(\mathcal{H}, \circ)$.

Théorème

L'ensemble des homothéties vectorielles de $\mathcal{U}$, muni de la composition des applications, est un sous-groupe commutatif du groupe linéaire de $\mathcal{U}$. Il est isomorphe au groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$.

3.8 SOUS-ESPACES VECTORIELS SUPPLÉMENTAIRES

a) Introduction

Soit $\mathcal{U}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré 4 au plus et du polynôme nul c'est-à-dire l'ensemble des polynômes de la forme

$$f : x \mapsto a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4.$$

- L'ensemble $\mathcal{U}'$ des polynômes *pairs*, c'est-à-dire de la forme

$$g : x \mapsto a + cx^2 + ex^4$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$ (partie non vide de $\mathcal{U}$, stable par combinaisons linéaires).

- L'ensemble $\mathcal{U}''$ des polynômes *impairs*, c'est-à-dire de la forme

$$h : x \mapsto bx + dx^3$$

est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$.

- L'intersection de $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}''$ est formée de polynômes f tels que $b = d = 0$ puisqu'ils appartiennent à $\mathcal{U}'$ et tels que $a = c = e = 0$ puisqu'ils appartiennent à $\mathcal{U}''$ donc $\mathcal{U}' \cap \mathcal{U}''$ est le polynôme nul.

- Tout élément f de $\mathcal{U}$ est somme d'un élément de $\mathcal{U}'$ et d'un élément de $\mathcal{U}''$ car $f = g + h$.

- Cette décomposition est unique car si on a une autre égalité

$$f = g_1 + h_1 \quad \text{avec} \quad g_1 \in \mathcal{U}' \quad \text{et} \quad h_1 \in \mathcal{U}''$$

alors

$$g + h = g_1 + h_1$$

$$g - g_1 = h_1 - h$$

ce dernier vecteur est à la fois un élément de $\mathcal{U}'$ (comme g et g_1) et de $\mathcal{U}''$ (comme h et h_1), il est donc nul. Donc $g = g_1$ et $h = h_1$.

Nous allons généraliser cette situation.

b) Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soit $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}''$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{U}$. Démontrons que les propositions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \begin{cases} \mathcal{U}' \cap \mathcal{U}'' = \{\vec{0}\} \\ \text{tout vecteur } \vec{v} \text{ de } \mathcal{U} \text{ s'écrit d'au moins une façon :} \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}'' \text{ avec } \vec{v}' \in \mathcal{U}', \vec{v}'' \in \mathcal{U}'' \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \text{Tout vecteur } \vec{v} \text{ de } \mathcal{U} \text{ s'écrit d'une façon unique :} \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}'' \text{ avec } \vec{v}' \in \mathcal{U}', \vec{v}'' \in \mathcal{U}'' \end{cases}$$

$$(1) \implies (2) \text{ car :}$$

si

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}'' = \vec{v}'_1 + \vec{v}''_1$$

avec

$$\vec{v}' \in \mathcal{U}', \vec{v}'_1 \in \mathcal{U}', \vec{v}'' \in \mathcal{U}'', \vec{v}''_1 \in \mathcal{U}'',$$

alors

$$\vec{v}' - \vec{v}'_1 = \vec{v}''_1 - \vec{v}''$$

cette différence appartient à la fois à $\mathcal{U}'$ (comme $\vec{v}'$ et $\vec{v}'_1$) et à $\mathcal{U}''$ (comme $\vec{v}''$ et $\vec{v}''_1$) donc à $\mathcal{U}' \cap \mathcal{U}'' = \{\vec{0}\}$ donc $\vec{v}' = \vec{v}'_1$ et $\vec{v}'' = \vec{v}''_1$.

$$(2) \implies (1) \text{ car :}$$

soit $\vec{v}$ un vecteur de $\mathcal{U}' \cap \mathcal{U}''$, on a

$$\vec{v} = \vec{v} + \vec{0} \text{ avec } \vec{v} \in \mathcal{U}' \text{ et } \vec{0} \in \mathcal{U}''$$

$$\vec{v} = \vec{0} + \vec{v} \text{ avec } \vec{0} \in \mathcal{U}' \text{ et } \vec{v} \in \mathcal{U}''$$

comme la décomposition de $\vec{v}$ est unique, $\vec{v} = \vec{0}$.

Théorème et définition

Soit $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}''$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{U}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \begin{cases} \mathcal{U}' \cap \mathcal{U}'' = \{\vec{0}\} \\ \text{tout vecteur } \vec{v} \text{ de } \mathcal{U} \text{ s'écrit d'au moins une façon :} \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}'', \vec{v}' \in \mathcal{U}', \vec{v}'' \in \mathcal{U}'' \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \text{tout vecteur } \vec{v} \text{ de } \mathcal{U} \text{ s'écrit d'une façon unique :} \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}'', \vec{v}' \in \mathcal{U}', \vec{v}'' \in \mathcal{U}'' \end{cases}$$

Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}''$ d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$ sont dits supplémentaires si et seulement si l'une ou l'autre des propositions (1) ou (2) est vraie.

On écrit $\mathcal{V} = \mathcal{V}' \oplus \mathcal{V}''$.

Cette définition ne fait intervenir aucune dimension. Plaçons-nous dans le cas où $\mathcal{V}$ est de dimension finie.

c) Dimensions des sous-espaces vectoriels supplémentaires si $\dim \mathcal{V} = n$

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}''$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{V}$.

• Tout d'abord si $\mathcal{V}'$ ou $\mathcal{V}''$ est égal à $\{\vec{0}\}$ ou à $\mathcal{V}$ l'autre est égal à $\mathcal{V}$ ou à $\{\vec{0}\}$ et $\dim \mathcal{V}' + \dim \mathcal{V}'' = \dim \mathcal{V}$.

• Si $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}''$ sont des sous-espaces *propres*, c'est-à-dire différents de $\mathcal{V}$ et de $\{\vec{0}\}$. Nous admettrons qu'ils sont de dimensions finies p et q . Soit

$$(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_p) \quad \text{et} \quad (\vec{a}''_1, \dots, \vec{a}''_q)$$

des bases respectivement de $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}''$. Tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ s'écrit de façon unique : $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ avec

$$\vec{v}' = \sum_{i=1}^p x'_i \vec{a}'_i \quad \text{et} \quad \vec{v}'' = \sum_{i=1}^q x''_i \vec{a}''_i$$

donc $\vec{v}$ s'écrit de façon unique :

$$\vec{v} = x'_1 \vec{a}'_1 + \dots + x'_p \vec{a}'_p + x''_1 \vec{a}''_1 + \dots + x''_q \vec{a}''_q$$

donc $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_p, \vec{a}''_1, \dots, \vec{a}''_q)$ est une base de $\mathcal{V}$. Par suite :

$$p + q = \dim \mathcal{V}$$

c'est-à-dire : $\dim \mathcal{V}' + \dim \mathcal{V}'' = \dim \mathcal{V}$.

Dans tous les cas, on peut énoncer :

Théorème

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension finie. Si $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}''$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{V}$, on a :

$$\dim \mathcal{V}' + \dim \mathcal{V}'' = \dim \mathcal{V}.$$

Si, de plus, $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}''$ sont des sous-espaces propres, on obtient une base de $\mathcal{V}$ en réunissant une base de $\mathcal{V}'$ et une base de $\mathcal{V}''$.

d) Existence d'un supplémentaire de $\mathcal{V}'$

Nous supposons toujours que $\mathcal{V}$ est de dimension finie n . Soit $\mathcal{V}'$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$. Comment trouver un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}''$ supplémentaire de $\mathcal{V}'$?

• Si $\mathcal{V}' = \{\vec{0}\}$ son supplémentaire unique est $\mathcal{V}$ et si $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$ son supplémentaire unique est $\{\vec{0}\}$.

• Si $\mathcal{U}'$ est un sous-espace propre, de dimension p . Soit $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p')$ une base de $\mathcal{U}'$, on a $p \leq n$ car cette base est une famille libre et on sait que toute famille libre de $\mathcal{U}$ possède au plus n vecteurs. Comme $\mathcal{U}'$ est un sous-espace propre, on a $p < n$. D'après le théorème de la base incomplète (cf. § 2.12), on peut compléter cette base avec $n - p$ vecteurs $\vec{a}_1'', \dots, \vec{a}_{n-p}''$ de manière à former une base $(\vec{a}_1', \dots, \vec{a}_p', \vec{a}_1'', \dots, \vec{a}_{n-p}'')$ de $\mathcal{U}$. Dans cette base, tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$ s'écrit de façon *unique* :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^p x_i' \vec{a}_i' + \sum_{i=1}^{n-p} x_i'' \vec{a}_i''$$

on a $\sum_{i=1}^p x_i' \vec{a}_i' \in \mathcal{U}'$ et $\sum_{i=1}^{n-p} x_i'' \vec{a}_i'' \in \mathcal{U}''$, $\mathcal{U}''$ étant le sous-espace vectoriel ayant pour base $(\vec{a}_1'', \dots, \vec{a}_{n-p}'')$. Donc $\mathcal{U}''$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathcal{U}'$. Sa dimension est $n - p$.

Dans tous les cas, on peut énoncer :

Théorème

Soit $\mathcal{U}$ un espace vectoriel de dimension n . Quel que soit le sous-espace vectoriel $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$, de dimension p , on peut trouver un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathcal{U}'$, de dimension $n - p$.

EXEMPLES

1. Dans un plan vectoriel $\vec{P}$, une droite vectorielle $\vec{D}$ admet pour supplémentaire toute droite vectorielle $\vec{D}'$ distincte de $\vec{D}$ (raisonner comme précédemment, en « complétant » une base $(\vec{u})$ de $\vec{D}$ avec une base de $\vec{D}'$).
2. Dans l'espace vectoriel $\vec{E}$ (ensemble des vecteurs de l'espace E , de dimension 3), une droite vectorielle $\vec{D}$ admet pour supplémentaire tout plan vectoriel $\vec{P}$ qui ne la contient pas (compléter une base $(\vec{u})$ de $\vec{D}$ avec une base de $\vec{P}$). Inversement, si l'on se donne un plan vectoriel $\vec{P}$, toute droite vectorielle $\vec{D}$ ($\vec{D} \not\subset \vec{P}$) est un supplémentaire de $\vec{P}$.

e) Application

Soit φ une application linéaire d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$ de dimension finie dans un espace vectoriel $\mathcal{W}$. Soit $\mathcal{U}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\text{Ker } \varphi$. On a :

$$(1) \quad \dim \text{Ker } \varphi + \dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{U}.$$

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{U} &\longrightarrow \text{Im } \varphi \\ \vec{v}_2 &\longmapsto \psi(\vec{v}_2) = \varphi(\vec{v}_2). \end{aligned}$$

Si l'on démontre que ψ est un isomorphisme, alors $\dim \text{Im } \varphi = \dim \mathcal{U}$ et d'après (1), on aura :

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim \mathcal{U}.$$

En effet :

- ψ est *linéaire* puisque φ est linéaire et $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$;

- ψ est *surjective* car, quel que soit $\vec{v}'$ de $\text{Im } \varphi$, il existe $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$ tel que $\vec{v}' = \varphi(\vec{v})$. Comme $\mathcal{U} = \text{Ker } \varphi \oplus \mathcal{U}$, on a :

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \text{avec} \quad \vec{v}_1 \in \text{Ker } \varphi \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 \in \mathcal{U}$$

d'où :
$$\vec{v}' = \varphi(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \varphi(\vec{v}_2) = \psi(\vec{v}_2)$$

donc quel que soit $\vec{v}'$ de $\text{Im } \varphi$, le vecteur $\vec{v}'$ admet au moins un antécédent $\vec{v}_2$ dans $\mathcal{U}$ par l'application ψ ;

- ψ est *injective* car $\text{Ker } \psi = \text{Ker } \varphi \cap \mathcal{U} = \{\vec{0}\}$ puisque $\text{Ker } \varphi$ et $\mathcal{U}$ sont supplémentaires.

Théorème

Pour toute application linéaire φ d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$ de dimension finie dans un espace vectoriel, on a :

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim \mathcal{U}.$$

3.9 PROJECTIONS VECTORIELLES

a) Introduction

Reprenons l'exemple de l'introduction du § 3.8 a). Soit $\mathcal{U}$ l'espace vectoriel des polynômes de la forme

$$f : x \longmapsto a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4.$$

- On a vu que $\mathcal{U} = \mathcal{U}' \oplus \mathcal{U}''$, $\mathcal{U}'$ étant l'ensemble des polynômes pairs

$$g : x \longmapsto a + cx^2 + ex^4$$

et $\mathcal{U}''$ l'ensemble des polynômes impairs

$$h : x \longmapsto bx + dx^3.$$

- Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varpi : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{U} \\ f &\longmapsto g \end{aligned}$$

nous remarquons que $\varpi(g) = g$ donc $\varpi \circ \varpi$ que l'on écrit ϖ^2 est égale à ϖ .

- $\text{Ker } \varpi$ est l'ensemble des fonctions f dont l'image est le polynôme nul, c'est-à-dire telles que $a = c = e = 0$ donc $\text{Ker } \varpi = \mathcal{U}''$.

- Cherchons $\text{Im } \varpi$. Pour tout polynôme f de $\mathcal{U}$, on a $\varpi(f) = g$ qui appartient à $\mathcal{U}'$. Réciproquement soit

$$g : x \longmapsto a + cx^2 + ex^4$$

un élément de $\mathcal{U}'$, il admet pour antécédent, par l'application ϖ , tout polynôme de la forme

$$f : x \longmapsto a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4.$$

Donc

$$\text{Im } \varpi = \mathcal{U}'.$$

• $\varpi(f) = f$ si et seulement si $f = g$, c'est-à-dire si et seulement si $b = d = 0$ donc l'ensemble des polynômes invariants par ϖ est $\mathcal{U}'$.

Nous allons généraliser cette situation.

b) Projection vectorielle

Définition

Soit $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}''$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{U}$. Tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$ s'écrit d'une façon unique $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ avec $\vec{v}' \in \mathcal{U}'$ et $\vec{v}'' \in \mathcal{U}''$.

On appelle projection (ou projecteur) de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}'$ de direction $\mathcal{U}''$ (ou parallèlement à $\mathcal{U}''$) l'application

$$\begin{aligned} \varpi : \quad \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{U}' \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}'' &\longmapsto \vec{v}'. \end{aligned}$$

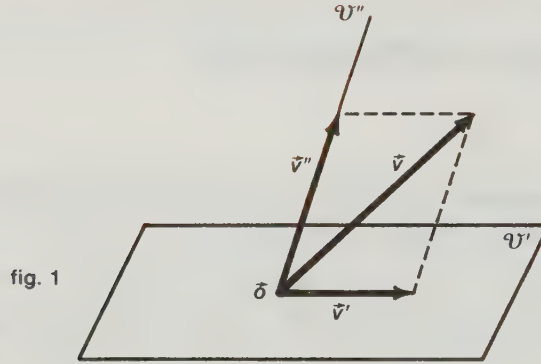


fig. 1

Propriétés

1. ϖ est une application linéaire car quels que soient λ et μ de $\mathbb{R}$, quels que soient $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$ (avec $\vec{u}' \in \mathcal{U}'$ et $\vec{u}'' \in \mathcal{U}''$) et $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ (avec $\vec{v}' \in \mathcal{U}'$ et $\vec{v}'' \in \mathcal{U}''$), on a :

$$\begin{aligned} \varpi(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) &= \varpi(\lambda(\vec{u}' + \vec{u}'') + \mu(\vec{v}' + \vec{v}'')) \\ &= \varpi((\lambda \vec{u}' + \mu \vec{v}') + (\lambda \vec{u}'' + \mu \vec{v}'')) \\ &= \lambda \vec{u}' + \mu \vec{v}' \\ &= \lambda \varpi(\vec{u}) + \mu \varpi(\vec{v}). \end{aligned}$$

Donc ϖ est un endomorphisme de $\mathcal{U}$.

Remarquons que l'on peut écrire pour tout $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$, avec les notations précédentes, en posant $\varpi^2 = \varpi \circ \varpi$:

$$\begin{aligned} \varpi(\vec{v}) &= \vec{v}' \\ \varpi^2(\vec{v}) &= \varpi(\vec{v}') = \vec{v}' \\ \varpi^2(\vec{v}) &= \varpi(\vec{v}) \end{aligned}$$

donc

$$\varpi^2 = \varpi.$$

2. Déterminons $\text{Ker } \varpi$. Quel que soit $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ avec $\vec{v}' \in \mathcal{U}'$ et $\vec{v}'' \in \mathcal{U}''$, on a :

$$\begin{aligned}\vec{v} \in \text{Ker } \varpi &\iff \varpi(\vec{v}) = \vec{0} \\ &\iff \vec{v}' = \vec{0}\end{aligned}$$

donc $\text{Ker } \varpi = \mathcal{U}''$. $\iff \vec{v} \in \mathcal{U}''$

3. Déterminons $\text{Im } \varpi$. Quel que soit $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$, $\varpi(\vec{v}) = \vec{v}' \in \mathcal{U}'$ donc $\text{Im } \varpi \subset \mathcal{U}'$.

Réciproquement soit $\vec{v}'$ un vecteur quelconque de $\mathcal{U}'$, il est l'image par ϖ du vecteur $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ obtenu en prenant $\vec{v}''$ arbitraire dans $\mathcal{U}''$, donc $\vec{v}' \in \text{Im } \varpi$ et on a $\mathcal{U}' \subset \text{Im } \varpi$.

Par suite $\text{Im } \varpi = \mathcal{U}'$.

4. Cherchons l'ensemble des vecteurs invariants par ϖ . Quel que soit $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ avec $\vec{v}' \in \mathcal{U}'$ et $\vec{v}'' \in \mathcal{U}''$, on a :

$$\begin{aligned}\varpi(\vec{v}) = \vec{v} &\iff \vec{v}' = \vec{v} \\ &\iff \vec{v}'' = \vec{0} \\ &\iff \vec{v} \in \mathcal{U}'\end{aligned}$$

donc l'ensemble des vecteurs invariants par ϖ est $\mathcal{U}'$.

En résumé :

Théorème

Soit $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}''$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{U}$ et ϖ la projection de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}'$ de direction $\mathcal{U}''$.

1. ϖ est un endomorphisme de $\mathcal{U}$ tel que $\varpi^2 = \varpi$.
2. $\text{Ker } \varpi = \mathcal{U}''$.
3. $\text{Im } \varpi = \mathcal{U}'$.
4. L'ensemble des vecteurs invariants par ϖ est $\mathcal{U}'$.

On remarque que $\varpi^k = \varpi$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que ϖ est **idempotent**.

c) Etude d'une réciproque

Nous avons vu que toute projection de $\mathcal{U}$ est un endomorphisme de $\mathcal{U}$ tel que $\varpi^2 = \varpi$. Réciproquement soit ϖ un endomorphisme de $\mathcal{U}$ tel que $\varpi^2 = \varpi$.

Montrons que ϖ est la projection de $\mathcal{U}$ sur $\text{Im } \varpi$, de direction $\text{Ker } \varpi$:

• $\mathcal{U} = \text{Im } \varpi \oplus \text{Ker } \varpi$ car si $\vec{v}$ est un vecteur quelconque de $\mathcal{U}$ et s'il existe un vecteur $\vec{v}'$ de $\text{Im } \varpi$ et un vecteur $\vec{v}''$ de $\text{Ker } \varpi$ tels que $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$, il existe alors un vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{U}$ tel que $\varpi(\vec{u}) = \vec{v}'$ (puisque $\vec{v}' \in \text{Im } \varpi$) et on a :

$$\begin{aligned}\varpi(\vec{v}) &= \varpi(\vec{v}' + \vec{v}'') = \varpi(\vec{v}') \quad (\text{puisque } \vec{v}'' \in \text{Ker } \varpi) \\ &= \varpi^2(\vec{u}) = \varpi(\vec{u}) \quad (\text{puisque } \varpi^2 = \varpi) \\ &= \vec{v}'\end{aligned}$$

par suite $\vec{v}'' = \vec{v} - \vec{v}' = \vec{v} - \varpi(\vec{v})$.

Donc s'il existe un vecteur $\vec{v}'$ de $\text{Im } \varpi$ et un vecteur $\vec{v}''$ de $\text{Ker } \varpi$ tels que $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$, alors $\vec{v}'$ est le vecteur *unique* $\varpi(\vec{v})$ et $\vec{v}''$ est le vecteur *unique* $\vec{v} - \varpi(\vec{v})$.

Réciproquement, quel que soit $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$, soit $\vec{v}' = \varpi(\vec{v})$ et $\vec{v}'' = \vec{v} - \varpi(\vec{v})$.

On a bien : $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$

avec $\vec{v}' = \varpi(\vec{v}) \in \text{Im } \varpi$

$$\vec{v}'' = \vec{v} - \varpi(\vec{v}) \in \text{Ker } \varpi \quad \text{car} \quad \varpi(\vec{v}'') = \varpi(\vec{v}) - \varpi^2(\vec{v}) = \vec{0}.$$

• ϖ est l'application de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$ qui associe au vecteur quelconque $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ le vecteur $\vec{v}' = \varpi(\vec{v})$. Donc ϖ est la projection de $\mathcal{U}$ sur $\text{Im } \varpi$ de direction $\text{Ker } \varpi$. Concluons :

Théorème

Tout endomorphisme ϖ de $\mathcal{U}$ tel que $\varpi^2 = \varpi$ est la projection de $\mathcal{U}$ sur $\text{Im } \varpi$, de direction $\text{Ker } \varpi$.

d) Cas où $\mathcal{U}$ est de dimension 1, 2 ou 3

On peut rassembler dans des tableaux les différentes projections possibles suivant les dimensions des sous-espaces vectoriels supplémentaires $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}''$ de $\mathcal{U}$. Nous désignons par $\text{id}_{\mathcal{U}}$ l'identité de $\mathcal{U}$ et par ω l'application nulle de $\mathcal{U}$.

Si $\dim \mathcal{U} = 1$:

$\mathcal{U}' = \mathcal{U}$	$\mathcal{U}'' = \{\vec{0}\}$	$\varpi = \text{id}_{\mathcal{U}}$
$\mathcal{U}' = \{\vec{0}\}$	$\mathcal{U}'' = \mathcal{U}$	$\varpi = \omega$

Si $\dim \mathcal{U} = 2$:

$\mathcal{U}' = \mathcal{U}$	$\mathcal{U}'' = \{\vec{0}\}$	$\varpi = \text{id}_{\mathcal{U}}$
$\mathcal{U}'$ est une droite vectorielle $\vec{D}$	$\mathcal{U}''$ est une droite vectorielle $\vec{D}'$ ($\vec{D}' \neq \vec{D}$)	ϖ est la projection de $\mathcal{U}$ sur $\vec{D}$ de direction $\vec{D}'$
$\mathcal{U}' = \{\vec{0}\}$	$\mathcal{U}'' = \mathcal{U}$	$\varpi = \omega$

Si $\dim \mathcal{U} = 3$:

$\mathcal{U}' = \mathcal{U}$	$\mathcal{U}'' = \{\vec{0}\}$	$\varpi = \text{id}_{\mathcal{U}}$
$\mathcal{U}'$ est un plan vectoriel $\vec{P}$	$\mathcal{U}''$ est une droite vectorielle $\vec{D}$ ($\vec{D} \not\subset \vec{P}$)	ϖ est la projection de $\mathcal{U}$ sur $\vec{P}$ de direction $\vec{D}$
$\mathcal{U}'$ est une droite vectorielle $\vec{D}$	$\mathcal{U}''$ est un plan vectoriel $\vec{P}$ ($\vec{D} \not\subset \vec{P}$)	ϖ est la projection de $\mathcal{U}$ sur $\vec{D}$ de direction $\vec{P}$
$\mathcal{U}' = \{\vec{0}\}$	$\mathcal{U}'' = \mathcal{U}$	$\varpi = \omega$

**EXERCICE
RÉSOLU**

Soit $\mathcal{U}$ un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{U}$ de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que φ est une projection vectorielle.
2. Trouver les deux sous-espaces vectoriels qui la caractérisent (en donner des bases).
1. Montrons que $\varphi^2 = \varphi$. Calculons les coordonnées (x', y', z') de $\varphi(\vec{v})$ et (x'', y'', z'') de $\varphi^2(\vec{v})$ connaissant les coordonnées (x, y, z) de $\vec{v}$:

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}z \\ y' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ z' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{5}{6}\left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}z\right) - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z\right) - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right) \\ y'' = -\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}z\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z\right) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right) \\ z'' = -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}z\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}z \\ y'' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ z'' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \end{cases}$$

On a $(\forall \vec{v} \in \mathcal{U}) \quad \varphi^2(\vec{v}) = \varphi(\vec{v})$ donc $\varphi^2 = \varphi$.

2. Déterminons $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.
 $\vec{v} \in \text{Ker } \varphi$ si et seulement si

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}z = 0 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y - (x + y) = 0 \\ x - 2y + (x + y) = 0 \\ z = x + y \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ z = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \left(x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}\right).$$

$\text{Ker } \varphi$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{u}(1, 2, 3)$.
On sait (cf. § 3.7 e)) que :

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim \mathcal{U}$$

donc

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = 3 - 1 = 2$$

et $\operatorname{Im} \varphi$ est un plan vectoriel. Les vecteurs $\varphi(\vec{i})$ et $\varphi(\vec{j})$ de matrices-colonnes respectives la première colonne et la deuxième colonne de A :

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants car

$$\lambda \varphi(\vec{i}) + \mu \varphi(\vec{j}) = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{5}{6}\lambda - \frac{1}{6}\mu = 0 \\ -\frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \\ -\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = 0.$$

Une base de $\operatorname{Im} \varphi$ est donc $(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}))$.

3.10 SYMÉTRIES VECTORIELLES

a) Définition. Propriétés

Définition

Soit $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}''$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{U}$. Tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$ s'écrit d'une façon unique $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ avec $\vec{v}' \in \mathcal{U}'$ et $\vec{v}'' \in \mathcal{U}''$.

On appelle symétrie vectorielle par rapport à $\mathcal{U}'$ de direction $\mathcal{U}''$ (ou parallèlement à $\mathcal{U}''$) l'application

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}'' & \longmapsto & \vec{v}' - \vec{v}'' \end{array}$$

Propriétés

1. Les notations étant celles de la définition, soit ϖ la projection de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}'$ de direction $\mathcal{U}''$. Cherchons une relation entre $\sigma(\vec{v})$ et $\varpi(\vec{v})$. On pourra alors déduire des propriétés de σ de celles de ϖ .

$$\begin{aligned} (\forall \vec{v} \in \mathcal{U}) \quad \varpi(\vec{v}) &= \vec{v}' \\ \sigma(\vec{v}) &= \vec{v}' - \vec{v}'' = 2\vec{v}' - (\vec{v}' + \vec{v}'') \\ &= 2\varpi(\vec{v}) - \vec{v}. \end{aligned}$$

Quels que soient λ et μ de $\mathbb{R}$, quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$, on a :

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= 2\varpi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) - (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \\ &= \lambda[2\varpi(\vec{u}) - \vec{u}] + \mu[2\varpi(\vec{v}) - \vec{v}] \\ &= \lambda\sigma(\vec{u}) + \mu\sigma(\vec{v})\end{aligned}$$

donc σ est un endomorphisme de $\mathcal{U}$.

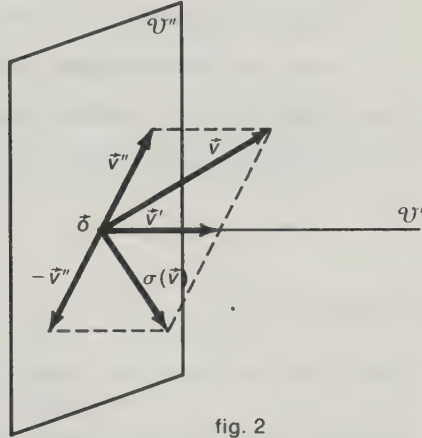


fig. 2

2. En utilisant la définition de σ ,

$$\sigma^2(\vec{v}) = \sigma(\vec{v}' - \vec{v}'') = \vec{v}' - (-\vec{v}'') = \vec{v}' + \vec{v}'' = \vec{v}$$

donc $\sigma^2 = \text{id}_{\mathcal{U}}$.

Rappelons qu'une application f d'un ensemble E dans E est dite **involutive** (on dit aussi qu'elle est une **involution** de E) si elle possède l'une des deux propriétés équivalentes :

- (1) $f^2 = \text{id}_E$
- (2) (f est bijective et $f = f^{-1}$).

Donc σ est un automorphisme involutif de $\mathcal{U}$. Il en résulte que $\text{Ker } \sigma = \{\vec{0}\}$ et $\text{Im } \sigma = \mathcal{U}$.

3. Cherchons l'ensemble des vecteurs invariants par σ

$$\begin{aligned}\sigma(\vec{v}) = \vec{v} &\iff \vec{v}' - \vec{v}'' = \vec{v}' + \vec{v}'' \\ &\iff \vec{v}'' = \vec{0} \\ &\iff \vec{v} \in \mathcal{U}'.\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des vecteurs invariants par σ est $\mathcal{U}'$.

4. Cherchons à caractériser $\mathcal{U}''$. Montrons que $\mathcal{U}''$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ tels que $\sigma(\vec{v}) = -\vec{v}$. En effet avec les notations précédentes :

$$\begin{aligned}\sigma(\vec{v}) = -\vec{v} &\iff \vec{v}' - \vec{v}'' = -(\vec{v}' + \vec{v}'') \\ &\iff \vec{v}' = \vec{0} \\ &\iff \vec{v} \in \mathcal{U}''.\end{aligned}$$

En résumé :

Théorème

Soit $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}''$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{U}$ et σ la symétrie par rapport à $\mathcal{U}'$ de direction $\mathcal{U}''$.

1. σ est l'endomorphisme de $\mathcal{U}$ défini par :

$$\sigma(\vec{v}) = 2\varpi(\vec{v}) - \vec{v},$$

ϖ étant la projection de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}'$ de direction $\mathcal{U}''$.

2. σ est un automorphisme involutif de $\mathcal{U}$.

3. L'ensemble des vecteurs invariants par σ est $\mathcal{U}'$.

4. L'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ tels que $\sigma(\vec{v}) = -\vec{v}$ est $\mathcal{U}''$.

b) Etude d'une réciproque

Nous avons vu que toute symétrie vectorielle de $\mathcal{U}$ est un automorphisme involutif de $\mathcal{U}$. Inversement soit σ un automorphisme involutif de $\mathcal{U}$. Montrons que c'est une symétrie vectorielle.

Soit $\mathcal{U}'$ l'ensemble des vecteurs invariants par σ et $\mathcal{U}''$ l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ tels que $\sigma(\vec{v}) = -\vec{v}$.

• $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}''$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{U}$ (on vérifie facilement que ce sont des parties non vides de $\mathcal{U}$ stables par combinaisons linéaires).

$\mathcal{U} = \mathcal{U}' \oplus \mathcal{U}''$ car si $\vec{v}$ est un vecteur quelconque de $\mathcal{U}$ et s'il existe un vecteur $\vec{v}'$ de $\mathcal{U}'$ et un vecteur $\vec{v}''$ de $\mathcal{U}''$ tels que

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}'', \quad \text{alors} \quad \sigma(\vec{v}) = \sigma(\vec{v}') + \sigma(\vec{v}'') = \vec{v}' - \vec{v}''.$$

On a donc :

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}'' \\ \sigma(\vec{v}) = \vec{v}' - \vec{v}'' \end{cases}$$

en additionnant et en retranchant membre à membre ces deux égalités on en déduit

$$\vec{v}' = \frac{1}{2} [\vec{v} + \sigma(\vec{v})], \quad \vec{v}'' = \frac{1}{2} [\vec{v} - \sigma(\vec{v})]$$

ce qui montre que les vecteurs $\vec{v}'$ et $\vec{v}''$ sont *uniques*.

Réciproquement tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$ peut s'écrire

$$\vec{v} = \frac{1}{2} [\vec{v} + \sigma(\vec{v})] + \frac{1}{2} [\vec{v} - \sigma(\vec{v})],$$

le vecteur $\vec{v}' = \frac{1}{2} [\vec{v} + \sigma(\vec{v})]$ appartient à $\mathcal{U}'$ car

$$\sigma(\vec{v}') = \frac{1}{2} [\sigma(\vec{v}) + \sigma^2(\vec{v})] = \frac{1}{2} [\sigma(\vec{v}) + \vec{v}] = \vec{v}',$$

le vecteur $\vec{v}'' = \frac{1}{2} [\vec{v} - \sigma(\vec{v})]$ appartient à $\mathcal{V}''$ car

$$\sigma(\vec{v}'') = \frac{1}{2} [\sigma(\vec{v}) - \sigma^2(\vec{v})] = \frac{1}{2} [\sigma(\vec{v}) - \vec{v}] = -\vec{v}''.$$

• σ est l'application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ qui associe au vecteur quelconque $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ le vecteur $\sigma(\vec{v}) = \vec{v}' - \vec{v}''$. Donc σ est la symétrie par rapport à $\mathcal{V}'$ de direction $\mathcal{V}''$. Concluons :

Théorème

Tout automorphisme involutif σ de $\mathcal{V}$ est la symétrie par rapport à $\mathcal{V}'$ de direction $\mathcal{V}''$, $\mathcal{V}'$ étant l'ensemble des vecteurs invariants par σ , $\mathcal{V}''$ étant l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ tels que $\sigma(\vec{v}) = -\vec{v}$.

c) Cas où $\mathcal{V}$ est de dimension 1, 2 ou 3

On peut rassembler dans des tableaux les différentes symétries vectorielles possibles suivant les dimensions des sous-espaces vectoriels supplémentaires $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}''$ de $\mathcal{V}$. Nous désignerons par $\text{id}_{\mathcal{V}}$ l'identité de $\mathcal{V}$ et par $-\text{id}_{\mathcal{V}}$ l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\longmapsto \mathcal{V} \\ \vec{v} &\longmapsto -\vec{v} \end{aligned}$$

c'est-à-dire l'homothétie vectorielle de rapport -1 .

Si $\dim \mathcal{V} = 1$:

$\mathcal{V}' = \mathcal{V}$	$\mathcal{V}'' = \{\vec{0}\}$	$\sigma = \text{id}_{\mathcal{V}}$
$\mathcal{V}' = \{\vec{0}\}$	$\mathcal{V}'' = \mathcal{V}$	$\sigma = -\text{id}_{\mathcal{V}}$

Si $\dim \mathcal{V} = 2$:

$\mathcal{V}' = \mathcal{V}$	$\mathcal{V}'' = \{\vec{0}\}$	$\sigma = \text{id}_{\mathcal{V}}$
$\mathcal{V}'$ est une droite vectorielle $\vec{D}$	$\mathcal{V}''$ est une droite vectorielle $\vec{D}'$ ($\vec{D}' \neq \vec{D}$)	σ est la symétrie par rapport à $\vec{D}$, de direction $\vec{D}'$
$\mathcal{V}' = \{\vec{0}\}$	$\mathcal{V}'' = \mathcal{V}$	$\sigma = -\text{id}_{\mathcal{V}}$

Si $\dim \mathcal{U} = 3$:

$\mathcal{U}' = \mathcal{U}$	$\mathcal{U}'' = \{\vec{0}\}$	$\sigma = \text{id}_{\mathcal{U}}$
$\mathcal{U}'$ est un plan vectoriel $\vec{P}$	$\mathcal{U}''$ est une droite vectorielle $\vec{D}$ ($\vec{D} \not\subset \vec{P}$)	σ est la symétrie par rapport à $\vec{P}$, de direction $\vec{D}$
$\mathcal{U}'$ est une droite vectorielle $\vec{D}$	$\mathcal{U}''$ est un plan vectoriel $\vec{P}$ ($\vec{D} \not\subset \vec{P}$)	σ est la symétrie par rapport à $\vec{D}$, de direction $\vec{P}$
$\mathcal{U}' = \{\vec{0}\}$	$\mathcal{U}'' = \mathcal{U}$	$\sigma = -\text{id}_{\mathcal{U}}$

**EXERCICE
RÉSOLU**

Soit $\mathcal{U}$ un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A tout vecteur $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de $\mathcal{U}$ on associe le vecteur $\sigma(\vec{v}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ par la symétrie σ par rapport au plan vectoriel $\vec{P}$ d'équation $x + y + z = 0$ et de direction la droite vectorielle $\vec{D}$ d'équations

$$\frac{x}{-1} = y = \frac{z}{-2}.$$

1. Soit $\vec{I} = \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{J} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{K} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Calculer $\sigma(\vec{I})$, $\sigma(\vec{J})$, $\sigma(\vec{K})$ en fonction de $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ puis en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
2. En déduire $\sigma(\vec{i})$, $\sigma(\vec{j})$, $\sigma(\vec{k})$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Déterminer la matrice de σ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
3. Calculer x' , y' , z' en fonction de x , y , z .

1. Le plan vectoriel $\vec{P}$ est l'ensemble des vecteurs invariants par σ :

$$\vec{I} = \vec{j} - \vec{k} \text{ appartient à } \vec{P} \text{ donc } \sigma(\vec{I}) = \vec{I} = \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{J} = \vec{i} - \vec{k} \text{ appartient à } \vec{D} \text{ donc } \sigma(\vec{J}) = \vec{i} - \vec{k}.$$

La droite vectorielle $\vec{D}$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ tels que $\sigma(\vec{v}) = -\vec{v}$:

$$\vec{K} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \text{ appartient à } \vec{D} \text{ donc } \sigma(\vec{K}) = -\vec{K} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

2. On a donc

$$\begin{cases} \vec{j} - \vec{k} = \sigma(\vec{I}) \\ \vec{i} - \vec{k} = \sigma(\vec{J}) \\ \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} = \sigma(\vec{K}). \end{cases}$$

Comme σ est involutive, $\sigma^2(\vec{I}) = \vec{I}$, $\sigma^2(\vec{J}) = \vec{J}$ et $\sigma^2(\vec{K}) = \vec{K}$ donc

$$\begin{cases} \sigma(\vec{j}) - \sigma(\vec{k}) = \vec{I} \\ \sigma(\vec{i}) - \sigma(\vec{k}) = \vec{J} \\ \sigma(\vec{i}) - \sigma(\vec{j}) + 2\sigma(\vec{k}) = \vec{K}. \end{cases}$$

En additionnant membre à membre les trois égalités de ce dernier système, on déduit :

$$\sigma(\vec{i}) = \frac{1}{2}(\vec{I} + \vec{J} + \vec{K}) = \vec{j} - 2\vec{k}$$

par suite

$$\sigma(\vec{k}) = \sigma(\vec{i}) - \vec{J} = \frac{1}{2}(\vec{I} - \vec{J} + \vec{K}) = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\sigma(\vec{j}) = \sigma(\vec{k}) + \vec{I} = \frac{1}{2}(3\vec{I} - \vec{J} + \vec{K}) = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

La matrice de σ est la matrice de $(\sigma(\vec{i}), \sigma(\vec{j}), \sigma(\vec{k}))$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Dans le système qui donne x', y', z' en fonction de x, y, z , les coefficients ont la même disposition que dans la matrice A :

$$\begin{cases} x' = & -y - z \\ y' = & x + 2y + z \\ z' = -2x - 2y - z. \end{cases}$$

REMARQUE On peut aussi calculer x', y', z' de la façon suivante :
quel que soit $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, cherchons à mettre $\vec{v}$ sous la forme : $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$

avec

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k} \in \vec{P} \\ \vec{v}'' &= X''\vec{i} + Y''\vec{j} + Z''\vec{k} \in \vec{D}. \end{aligned}$$

On a donc à résoudre le système d'inconnus $X', Y', Z', X'', Y'', Z''$:

$$\begin{cases} x = X' + X'' & (1) \\ y = Y' + Y'' & (2) \\ z = Z' + Z'' & (3) \\ X' + Y' + Z' = 0 & (4) \\ \frac{X''}{-1} = Y'' = \frac{Z''}{-2}. \end{cases}$$

En posant $\frac{X''}{-1} = Y'' = \frac{Z''}{-2} = \lambda$, on calculera X'', Y'', Z'' en fonction de λ , on reportera les valeurs trouvées dans (1), (2), (3) d'où X', Y', Z' en fonction de x, y, z, λ , on reportera les valeurs trouvées dans (4) d'où λ en fonction de x, y, z . On en déduira ensuite $X', Y', Z', X'', Y'', Z''$ en fonction de x, y, z . D'où les coordonnées de $\sigma(\vec{v}) = \vec{v}' - \vec{v}''$:

$$x' = X' - X''$$

$$y' = Y' - Y''$$

$$z' = Z' - Z''.$$

On retrouvera les résultats de la question 3.

Exercices

Dimension d'un espace vectoriel

3.1 Dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et du polynôme nul, les coefficients et la variable étant réels, soit les polynômes

$$\begin{aligned} f : x &\mapsto (m-14)x^2 + (m-5)x + 3 \\ g : x &\mapsto 5x^2 - 2mx + m. \end{aligned}$$

Pour quelles valeurs du paramètre réel m , le sous-espace vectoriel engendré par (f, g) est-il de dimension 2? de dimension 1?

3.2 On donne un entier naturel n . Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes

$$f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

définis sur $\mathbb{R}$, les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ étant des nombres réels donnés pour chaque polynôme.

1. Démontrer que $\mathcal{P}_n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa dimension?

2. On considère les polynômes

$$\begin{aligned} f_0 : x &\mapsto 1, \\ f_1 : x &\mapsto x, \\ f_2 : x &\mapsto x(x-1), \\ f_3 : x &\mapsto x(x-1)(x-2), \dots, \\ f_n : x &\mapsto x(x-1)(x-2)\dots[x-(n-1)]. \end{aligned}$$

Démontrer que $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$.

3. Calculer les coordonnées du polynôme

$$f : x \mapsto 5x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 1$$

dans la base $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$ de $\mathcal{P}_4$.

3.3 Les notations sont celles de l'exercice précédent. On utilisera le résultat de la question 1 précédente.

On considère les polynômes

$$\begin{aligned} g_0 : x &\mapsto x^n, \\ g_1 : x &\mapsto x^{n-1}(x+1), \\ g_2 : x &\mapsto x^{n-2}(x+1)^2, \dots, \\ g_n : x &\mapsto (x+1)^n. \end{aligned}$$

Démontrer que $(g_0, g_1, \dots, g_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$. Calculer les coordonnées du polynôme

$$f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + x - 1$$

dans la base $(g_0, g_1, g_2, g_3, g_4)$ de $\mathcal{P}_4$.

3.4 Les notations sont celles de l'exercice 3.2. On utilisera le résultat de la question 1 de cet exercice. On considère les polynômes (a étant un réel donné) :

$$\begin{aligned} h_0 : x &\mapsto 1, \\ h_1 : x &\mapsto x - a, \\ h_2 : x &\mapsto (x - a)^2, \dots, \\ h_n : x &\mapsto (x - a)^n. \end{aligned}$$

Démontrer que $(h_0, h_1, \dots, h_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$.

On suppose $a = 1$. Calculer les coordonnées du polynôme

$$f : x \mapsto x^4 - 2x^3 + x - 1$$

dans la base $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4)$ de $\mathcal{P}_4$.

3.5 Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère les fonctions

$$\begin{aligned} f_0 : x &\mapsto 1, \\ f_1 : x &\mapsto \cos x, \dots, \\ f_n : x &\mapsto \cos nx. \end{aligned}$$

1. Montrer que (f_0, f_1) est une famille libre.

2. On se propose de démontrer par récurrence que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre : démontrer que s'il existe des scalaires réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{p=0}^n \alpha_p \cos px = 0$$

alors en dérivant deux fois on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{p=0}^n p^2 \alpha_p \cos px = 0$$

par suite, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{p=0}^n (n^2 - p^2) \alpha_p \cos px = 0$$

achever le raisonnement par récurrence.

3. Montrer que l'ensemble des fonctions :

$$x \mapsto a \cos 2x + b \cos^2 x + c \sin^2 x + d$$

muni de l'addition des fonctions numériques et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel de dimension 2.

Applications linéaires

3.6 Soit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (2x + y, y + z). \end{aligned}$$

1. Démontrer que φ est une application linéaire.

2. Déterminer l'image et le noyau de φ .

3.7 Soit $\mathcal{U}$ un espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$. On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{U}$, de matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & m \end{pmatrix}$. Déterminer l'image et le noyau de φ (on discutera suivant les valeurs du paramètre réel m).

3.8 Mêmes questions qu'à l'exercice précédent avec

$$\begin{pmatrix} 1+m & -1 \\ 3 & 1-m \end{pmatrix}.$$

3.9 Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui associe à tout élément (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ l'élément (x', y', z') de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = x. \end{cases}$$

Déterminer l'image et le noyau de φ .

3.10 Soit $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des polynômes à coefficients et à variable réels, de degré inférieur ou égal à 2, et du polynôme nul.

Pour tout élément f de $\mathcal{P}_2$ défini pour tout x réel par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

on pose

$$f'(x) = 2ax + b, \quad f''(x) = 2a.$$

1. Démontrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}_2 &\longrightarrow \mathcal{P}_2 \\ f &\longmapsto f'' + 2f' + mf \end{aligned}$$

est linéaire (m étant un nombre réel donné).

2. Déterminer m pour que φ soit un automorphisme de $\mathcal{P}_2$.

3. On suppose $m = 1$ et f est défini pour tout x réel par

$$f(x) = 2x^2 - x + 1.$$

Calculer $\varphi(f)$.

Transformer la matrice A par la méthode du pivot et déterminer l'image et le noyau de l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ de matrice canonique A dans les cas suivants. On discutera suivant les valeurs du paramètre réel m éventuellement (ex. 3.11 à 3.14) :

$$\mathbf{3.11} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ m & 2 & 1 \\ -5m & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.12} \quad A = \begin{pmatrix} m+6 & m & 0 \\ m+2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.13} \quad A = \begin{pmatrix} m & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ m-5 & -2 & 0 \\ 2-m & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.14} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Homothéties vectorielles

3.15 Soit φ un endomorphisme de $\mathcal{U}$. On dit qu'une droite vectorielle $\vec{D}$ de $\mathcal{U}$ est invariante par φ si et seulement si $\varphi(\vec{D}) = \vec{D}$.

1. Montrer que toute homothétie vectorielle de $\mathcal{U}$ laisse invariante toutes les droites vectorielles de $\mathcal{U}$.

2. Réciproquement soit φ un endomorphisme de $\mathcal{U}$ tel que toutes les droites vectorielles de $\mathcal{U}$ soient invariantes par φ . Si $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont des vecteurs quelconques, non nuls, de $\mathcal{U}$, il existe donc des scalaires k et k' tels que

$$\varphi(\vec{v}) = k\vec{v} \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{v}') = k'\vec{v}'.$$

a) Si $(\vec{v}, \vec{v}')$ est une famille liée, montrer que $k = k'$.

b) Si $(\vec{v}, \vec{v}')$ est une famille libre, il existe un scalaire k'' tel que

$$\varphi(\vec{v} + \vec{v}') = k''(\vec{v} + \vec{v}').$$

Montrer que $k = k' = k''$.

c) En déduire que φ est une homothétie vectorielle.

3.16 1. Démontrer qu'une homothétie vectorielle h d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$ commute avec tout endomorphisme φ de $\mathcal{U}$ (c'est-à-dire que l'on a : $\varphi \circ h = h \circ \varphi$).

2. Réciproquement soit ψ un endomorphisme non nul d'un plan vectoriel $\vec{P}$ qui commute avec tout endomorphisme φ de $\vec{P}$. Les matrices de ψ et φ , dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Montrer que ψ est une homothétie vectorielle.

3.17 Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui associe à tout élément (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ l'élément (x', y', z') de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = z + x \\ z' = x + y. \end{cases}$$

Trouver le noyau de φ . En déduire que φ est bijectif. Montrer que les restrictions de φ à la droite d'équations $x = y = z$ et au plan d'équation $x + y + z = 0$ sont des homothéties vectorielles.

Formes linéaires

3.18 Soit $\vec{P}$ un plan vectoriel rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$. Trouver une forme linéaire φ définie sur $\vec{P}$ telle que :

$$(\vec{i}) = 2, \quad (\vec{j}) = -1.$$

Déterminer le noyau et l'image de φ .

3.19 Soit $\mathcal{U}$ un espace vectoriel de dimension 3 et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{U}$. Trouver une forme linéaire φ définie sur $\mathcal{U}$ telle que :

$$\varphi(\vec{i}) = 2, \quad \varphi(\vec{j}) = -1, \quad \varphi(\vec{k}) = 1.$$

Déterminer le noyau et l'image de φ .

3.20 Soit $\mathcal{U}$ un espace vectoriel de dimension 3 et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{U}$

1. Trouver les formes linéaires φ et ψ définies sur $\mathcal{U}$ telles que :

$$\varphi(\vec{i}) = 2, \quad \varphi(\vec{j}) = -1, \quad \varphi(\vec{k}) = 4$$

$$\psi(\vec{i}) = 3, \quad \psi(\vec{j}) = -2, \quad \psi(\vec{k}) = -5.$$

2. Trouver des bases de $\text{Ker } \varphi$, $\text{Ker } \psi$, $(\text{Ker } \varphi) \cap (\text{Ker } \psi)$.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

3.21 Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ et paires. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ et impaires.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3.22 Dans $\mathbb{R}^3$, soit E l'ensemble des triplets de la forme $(a - b, 2a, 3a + 2b)$ et F l'ensemble des triplets de la forme $(0, 3c, 5c)$ où a, b, c sont des réels quelconques.

Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Donner une base de E , de F . En déduire une base de $\mathbb{R}^3$.

3.23 Mêmes questions qu'à l'exercice précédent en considérant, dans $\mathbb{R}^4$, les ensembles E et F des quadruplets de la forme $(a, -a + b, a + b, b)$ et $(-c + d, -d, c, c)$ où a, b, c, d sont des réels quelconques.

3.24 Soit $\mathcal{U}$ un espace vectoriel de dimension 3 et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{U}$. On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{U}$ défini par :

$$\varphi(\vec{i}) = -\vec{i} + \vec{k}, \quad \varphi(\vec{j}) = \vec{j} + \vec{k}, \quad \varphi(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j}.$$

Déterminer le noyau et l'image de φ . Montrer que ce sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{U}$.

3.25 Soit $\mathcal{U}'$ un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $\mathcal{U}$.

1. Démontrer que la relation $\mathcal{R}$ définie, quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{U}$, par :

$$\vec{u} \mathcal{R} \vec{v} \iff \vec{u} - \vec{v} \in \mathcal{U}',$$

est une relation d'équivalence sur $\mathcal{U}$.

2. Démontrer que $\mathcal{R}$ est compatible avec l'addition dans $\mathcal{U}$ et la multiplication externe c'est-à-dire que, quels que soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}', \vec{v}'$ de $\mathcal{U}$ et quel que soit λ de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (\vec{u} \mathcal{R} \vec{v} \text{ et } \vec{u}' \mathcal{R} \vec{v}') &\implies (\vec{u} + \vec{u}') \mathcal{R} (\vec{v} + \vec{v}') \\ (\vec{u} \mathcal{R} \vec{v}) &\implies (\lambda \vec{u}) \mathcal{R} (\lambda \vec{v}). \end{aligned}$$

3. On appelle $\mathcal{U}/_{\mathcal{U}'}$ l'ensemble quotient de $\mathcal{U}$ par $\mathcal{R}$ et on définit l'addition dans cet ensemble et la multiplication par un réel, quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{U}/_{\mathcal{U}'}$, et quel que soit λ de $\mathbb{R}$, par :

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \vec{u} + \vec{v} \\ \lambda \vec{u} &= \lambda \vec{u}. \end{aligned}$$

Démontrer que $\mathcal{U}/_{\mathcal{U}'}$ a une structure d'espace vectoriel.

4. Soit $\mathcal{U}''$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathcal{U}'$ dans $\mathcal{U}$. Démontrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{U}'' &\longrightarrow \mathcal{U}/_{\mathcal{U}'} \\ \vec{v}'' &\longmapsto \vec{v}'' \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire, si $\mathcal{U}$ est de dimension finie, que :

$$\dim \mathcal{U}/_{\mathcal{U}'} = \dim \mathcal{U} - \dim \mathcal{U}'.$$

Composition des applications linéaires

3.26 Soit $\mathcal{U}$ un plan vectoriel.

1. On suppose que φ est un endomorphisme de $\mathcal{U}$ tel que $\text{Im } \varphi = \text{Ker } \varphi$.

a) Démontrer que $\dim \text{Im } \varphi = \dim \text{Ker } \varphi = 1$.

b) Soit $\vec{i}$ un vecteur non nul de $\text{Ker } \varphi$. Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{j}$ tel que $\varphi(\vec{j}) = \vec{i}$ et tel que $(\vec{i}, \vec{j})$ soit une base de $\mathcal{U}$.

c) On pose $\varphi \circ \varphi = \varphi^2$ et ω désigne l'application nulle de $\mathcal{U}$.

Démontrer que $\varphi^2 = \omega$.

2. Réciproquement soit φ un endomorphisme de $\mathcal{U}$ tel que :

$$\varphi \neq \omega \quad \text{et} \quad \varphi^2 = \omega.$$

Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ tel que $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}))$ soit une base de $\mathcal{U}$. Quelle est la matrice de φ dans cette base? Montrer que $\text{Im } \varphi = \text{Ker } \varphi$.

3.27 Soit $\mathcal{U}$ un espace vectoriel de dimension 3 et φ un endomorphisme de $\mathcal{U}$. On pose $\varphi \circ \varphi = \varphi^2$ et $\varphi \circ \varphi \circ \varphi = \varphi^3$. On désigne par ω l'application nulle de $\mathcal{U}$. On suppose que

$$\varphi^2 \neq \omega \quad \text{et} \quad \varphi^3 = \omega.$$

1. Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ tel que $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}), \varphi^2(\vec{u}))$ soit une base de $\mathcal{U}$.

2. Soit $\vec{v} = x\vec{u} + y\varphi(\vec{u}) + z\varphi^2(\vec{u})$ un vecteur quelconque de $\mathcal{U}$. Calculer $\varphi(\vec{v}), \varphi^2(\vec{v}), \varphi^3(\vec{v})$. En déduire le noyau et l'image de $\varphi, \varphi^2, \varphi^3$.

3.28 Soit un espace vectoriel $\mathcal{U}$ de dimension $n \leq 3$. On se propose de déterminer la dimension de $\mathcal{U}$ pour qu'il existe un endomorphisme φ de $\mathcal{U}$ tel que :

$$(1) \quad \varphi \circ \varphi = -\text{id}_{\mathcal{U}}$$

où $\text{id}_{\mathcal{U}}$ désigne l'application identique de $\mathcal{U}$.

1. Montrer que l'image par φ d'une droite vectorielle $\vec{D}$ est une droite vectorielle $\varphi(\vec{D})$ et que l'intersection de $\vec{D}$ et $\varphi(\vec{D})$ est le vecteur nul [on pourra vérifier, $\vec{u}$ étant un vecteur directeur de $\vec{D}$, que les réels α et β tels que $\alpha\vec{u} = \beta\varphi(\vec{u})$ sont nécessairement nuls compte tenu de (1)]. En déduire, si un tel endomorphisme existe : $n \geq 2$.

2. $\vec{D}$ étant une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}$ non nul, quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{U}'$ engendré par $\vec{u}$ et $\varphi(\vec{u})$? Quelle est l'image de $\mathcal{U}'$ par φ ?

3. Soit $n = 2$. $\vec{u}$ étant un vecteur non nul de $\mathcal{U}$, montrer, si φ existe et vérifie (1), que $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}))$ est une base de $\mathcal{U}$. Quelle est la matrice de φ dans cette base?

4. Soit $n = 3$. On suppose qu'il existe un endomorphisme φ de $\mathcal{U}$ vérifiant (1). $\vec{u}$ étant un vecteur non nul, montrer qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}), \vec{v})$ soit une base de $\mathcal{U}$. Compte tenu de l'expression de $\varphi(\vec{v})$ dans cette base, quelle est la matrice de φ dans cette base? En déduire une contradiction. Que peut-on en conclure?

(Bac C. Besançon. 1976, partiel)

3.29* Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$.

1. Démontrer que

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} \varphi^2 &\subset \operatorname{Im} \varphi \\ \operatorname{Ker} \varphi &\subset \operatorname{Ker} \varphi^2.\end{aligned}$$

2. On suppose que $\mathcal{V}$ est de dimension finie. Démontrer que les propositions :

$$(1) \quad \operatorname{Im} \varphi \oplus \operatorname{Ker} \varphi = \mathcal{V}$$

$$(2) \quad \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im} \varphi^2$$

$$(3) \quad \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \varphi^2$$

sont équivalentes [on montrera que l'on a :

$$(1) \implies (2), (2) \implies (3), (3) \implies (1)].$$

Systèmes d'équations linéaires

On utilisera la méthode du pivot dans les exercices qui suivent (ex. 3.30 à 3.35) :

3.30 Résoudre dans $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{cases} 3x + 16y - 8z + 5t = 18 \\ 5x + 6y - 3z - 2t = -1 \\ x + 4y - 2z + t = 4. \end{cases}$$

3.31 Déterminer le noyau de l'application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$ de matrice ($\mathbb{R}^5$ et $\mathbb{R}^4$ étant rapportés à leur base canonique) :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3.32 Montrer que l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^4$ de matrice dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est bijectif. Déterminer l'antécédent par φ du vecteur $(0, -2, -3, 1)$.

3.33 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ et discuter :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z = m \\ x + y + 5z = -7 \\ x + 3y + z = 5 \\ 2x + y + z = 2. \end{cases}$$

3.34 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ et discuter :

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2. \end{cases}$$

(On échangera la 1^{re} et 3^e équation et on appliquera la méthode du pivot.)

3.35 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ et discuter :

$$\begin{cases} (3m-4)x + 2(m-1)y + (3m-2)z = 1 \\ 2(m-1)x + 2(m-1)y + (3m-2)z = m-1 \\ mx + my + 2mz = m^2 - 2m + 1. \end{cases}$$

Projections et symétries vectorielles

3.36 Soit $\mathcal{V}$ un plan vectoriel rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{V}$ de matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Trouver la nature de φ .

2. Trouver les deux sous-espaces vectoriels qui le caractérisent.

3.37 Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{V}$ rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$ tel que :

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{i}) &= a\vec{i} - \vec{j} \quad (a \text{ réel donné}) \\ \varphi^2(\vec{i}) &= \varphi(\vec{j}).\end{aligned}$$

1. Trouver la matrice de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2. Trouver la nature de φ .

3. Trouver les deux sous-espaces vectoriels qui le caractérisent.

3.38 Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension 3 et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{V}$. On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{V}_3$ défini par :

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = -\vec{j} - \vec{k} \\ \varphi(\vec{j}) = -\vec{i} - \vec{k} \\ \varphi(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}. \end{cases}$$

1. Trouver la nature de φ .

2. Trouver les deux sous-espaces vectoriels qui le caractérisent.

3.39 Mêmes questions qu'à l'exercice précédent, la matrice de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.40 Mêmes questions qu'à l'exercice 3.38 avec :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.41 Mêmes questions qu'à l'exercice 3.38 avec :

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = \frac{1}{2}(-\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k}) \\ \varphi(\vec{j}) = \vec{j} \\ \varphi(\vec{k}) = \frac{1}{2}(3\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k}). \end{cases}$$

Trouver l'image par φ de la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et du plan vectoriel d'équation cartésienne $x + y + z = 0$.

3.42 Soit $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des polynômes à coefficients et à variable réels, de degré inférieur ou égal à 2, et du polynôme nul. Soit φ l'application de $\mathcal{P}_2$ dans $\mathcal{P}_2$ qui associe à tout élément f de

$$\mathcal{P}_2 : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

le polynôme

$$\varphi(f) : x \mapsto cx^2 + bx + a.$$

1. Trouver la nature de φ .

2. Trouver les deux sous-espaces vectoriels qui la caractérisent.

3.43 Soit π la projection de $\mathbb{R}^3$ sur le plan vectoriel $\tilde{P}$ d'équation $x + y + z = 0$ et de direction la droite vectorielle $\tilde{D}$ d'équations $x = y = z$. L'application π associe à tout élément (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ l'élément (x', y', z') de $\mathbb{R}^3$. Calculer x', y', z' en fonction de x, y, z .

3.44 Même question qu'à l'exercice précédent avec la projection π de $\mathbb{R}^3$ sur la droite vectorielle $\tilde{D}$ de vecteur directeur $(1, -1, 3)$ et de direction le plan vectoriel $\tilde{P}$ d'équation $x + 2y - z = 0$.

3.45 Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension 3 et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{V}$. On considère le plan vectoriel $\tilde{P}$ contenant les vecteurs $\vec{i} - \vec{k}$ et $2\vec{i} - \vec{j}$ et la droite vectorielle $\tilde{D}$ contenant le vecteur $\vec{i} + \vec{k}$.

1. La symétrie σ par rapport à $\tilde{P}$, de direction $\tilde{D}$, associe à tout vecteur $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de $\mathcal{V}$ le vecteur $\sigma(\vec{v}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$. Calculer x', y', z' en fonction de x, y, z .

2. La symétrie σ' par rapport à $\tilde{D}$, de direction $\tilde{P}$, associe à tout vecteur $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de $\mathcal{V}$ le vecteur $\sigma'(\vec{v}) = x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}$. Calculer x'', y'', z'' en fonction de x, y, z .

3. Définir l'application $\sigma' \circ \sigma$.

4. Définir analytiquement les projections vectorielles sur $\tilde{P}$, de direction $\tilde{D}$, et sur $\tilde{D}$, de direction $\tilde{P}$ (on utilisera les questions précédentes).

Révision

3.46 Soit $\mathcal{V}$ un plan vectoriel rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{V}$ de matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{pmatrix} 2m & \frac{5}{16}(m-1) \\ m-1 & m+1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau et l'image de φ (on discutera suivant les valeurs du paramètre réel m).

2. Existe-t-il des valeurs de m pour lesquelles φ est une homothétie vectorielle? une projection vectorielle? une symétrie vectorielle? Les caractériser quand elles existent.

3.47 Soit $\mathcal{V}$ un plan vectoriel rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. Soit φ_m l'endomorphisme de $\mathcal{V}$ dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est :

$$A_m = \begin{pmatrix} m & m-1 \\ m+1 & m-2 \end{pmatrix}$$

1. a) Pour quelles valeurs de m , φ_m est-il bijectif? Quelle est alors la matrice de φ_m^{-1} relativement à la base $\mathcal{B}$?

b) Déterminer m pour que φ_m soit involutif. Préciser, dans ce cas, les éléments caractéristiques de φ_m .

2. a) On suppose $m \neq 0$.

Montrer que l'égalité : $\varphi_m(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ n'est vérifiée par des vecteurs $\vec{u}$ non nuls que pour deux valeurs λ_1 et λ_2 de $\lambda (\lambda \in \mathbb{R})$. On notera λ_1 la valeur indépendante de m .

b) Soit $F_1 = \{\vec{u} \in E : \varphi_m(\vec{u}) = \lambda_1\vec{u}\}$

$$F_2 = \{\vec{u} \in E : \varphi_m(\vec{u}) = \lambda_2\vec{u}\}.$$

Montrer que F_1 et F_2 sont des droites vectorielles.

c) Soit $(\vec{u}_1)$ une base de F_1 et $(\vec{u}_2)$ une base de F_2 . Montrer que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{V}$.

Quelle est la matrice A'_m de φ_m relativement à la base $\mathcal{B}'$?

3. On donne à m la valeur $\frac{1}{2}$. Déduire de l'étude

faite dans la question 2 que $\varphi_{\frac{1}{2}}$ est la composée d'une projection vectorielle et d'une homothétie vectorielle que l'on caractérisera.

(Bac E. Toulouse. 1975, partiel)

3.48 Soit $\mathcal{V}$ un plan vectoriel rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{V}$ de matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix}$$

λ, a, b étant des nombres réels donnés. On suppose a et b non tous deux nuls.

1. Déterminer le noyau et l'image de φ . A quelle condition, $\text{Im } \varphi = \text{Ker } \varphi$?

2. On suppose $\text{Im } \varphi \neq \text{Ker } \varphi$. En prenant pour nouvelle base $(\vec{I}, \vec{J})$ avec $\vec{I} \in \text{Im } \varphi$ et $\vec{J} \in \text{Ker } \varphi$, trouver la matrice de φ dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$. Montrer que φ est la composée de deux endomorphismes simples que l'on définira.

3. On suppose $\text{Im } \varphi = \text{Ker } \varphi$. Montrer que l'on a : $b \neq 0$ et que $(b\vec{i} - a\vec{j}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}$. Quelle est la matrice de φ dans cette base? Que peut-on dire de $\varphi \circ \varphi$?

3.49 Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{V}$ défini par :

$$\varphi(\vec{i}) = \varphi(\vec{j}) = \varphi(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

1. Déterminer le noyau et l'image de φ .

2. En prenant pour nouvelle base : $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ avec $\vec{I}$ et $\vec{J}$ dans $\text{Ker } \varphi$ et $\vec{K}$ dans $\text{Im } \varphi$, montrer que φ est la composée d'une projection vectorielle et d'une homothétie vectorielle. Montrer qu'il en est de même de $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$, $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$, ..., $\varphi^n = \varphi^{n-1} \circ \varphi$ pour n entier ≥ 2 .

3.50 On désigne par $\vec{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 et on note $\mathcal{B}$ une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\vec{E}$.

Étant donné deux réels a et b , on considère l'application linéaire $\varphi_{a,b}$ de $\tilde{E}$ dans $\tilde{E}$ définie par

$$\varphi_{a,b}(\tilde{i}) = \tilde{i} + (a-1)\tilde{j}$$

$$\varphi_{a,b}(\tilde{j}) = (b-1)\tilde{j}$$

$$\varphi_{a,b}(\tilde{k}) = a\tilde{i} + b\tilde{k}.$$

1. a) Soit $\tilde{u}$ un vecteur de $\tilde{E}$ de coordonnées x , y et z dans la base $\mathcal{B}$. Quelles sont les coordonnées de $\varphi_{a,b}(\tilde{u})$ dans cette base?

b) Déterminer le noyau et l'image de $\varphi_{a,b}$.

Montrer que $\varphi_{a,b}$ est bijective si et seulement si $b \neq 0$ et $b \neq 1$.

Lorsque $b = 0$ ou $b = 1$, vérifier que le noyau et l'image de $\varphi_{a,b}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\tilde{E}$.

2. Existe-t-il un couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tel que $\varphi_{a,b}$ soit une projection vectorielle? Dans l'affirmative, la caractériser.

3. Soit $\tilde{P}$ le plan vectoriel de base $(\tilde{i}, \tilde{j})$.

a) Vérifier que $\varphi_{0,0}(\tilde{P}) = \tilde{P}$.

Soit σ l'application de $\tilde{P}$ dans $\tilde{P}$ qui, à tout vecteur $\tilde{V}$ de $\tilde{P}$, associe $\varphi_{0,0}(\tilde{V})$.

Démontrer que σ est une symétrie vectorielle de $\tilde{P}$ que l'on caractérisera.

b) Démontrer que $\varphi_{0,0} = \tau \circ \sigma \circ \psi$ où τ est l'application :

$$\tilde{P} \longrightarrow \tilde{E}$$

$$\tilde{V} \longmapsto \tilde{V}$$

et ψ une application linéaire de $\tilde{E}$ dans $\tilde{P}$ que l'on caractérisera.

4. Vérifier que $\varphi_{1,1}(\tilde{E})$ est le plan vectoriel de base $(\tilde{i}, \tilde{k})$. Quel est l'ensemble $A(\tilde{W})$ des éléments de $\tilde{E}$ dont l'image par $\varphi_{1,1}$ est un vecteur quelconque $\tilde{W}$ de ce plan?

(Bac. C. Paris. 1977, partiel)

3.51 Soit $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel de tous les polynômes et $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel formé du polynôme nul et des polynômes de degré inférieur ou égal à n (n entier ≥ 2). Soit α et β deux réels distincts.

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{P}_n$?

2. a) Montrer que les trois sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{P}_n$:

E_α ensemble des polynômes de $\mathcal{P}_n$ possédant la racine α ;

E_β ensemble des polynômes de $\mathcal{P}_n$ possédant la racine β ;

E ensemble des polynômes de $\mathcal{P}_n$ possédant les racines α et β .

b) Démontrer que les polynômes :

$$x \mapsto x - \alpha, \quad x \mapsto x(x - \alpha),$$

$$x \mapsto x^2(x - \alpha), \dots, \quad x \mapsto x^{n-1}(x - \alpha),$$

forment une base de E_α .

c) Démontrer que les polynômes

$$x \mapsto (x - \alpha)(x - \beta), \quad x \mapsto x(x - \alpha)(x - \beta),$$

$$x \mapsto x^2(x - \alpha)(x - \beta), \dots,$$

$$x \mapsto x^{n-2}(x - \alpha)(x - \beta)$$

forment une base de E .

3. Soit φ l'application de $\mathcal{P}_n$ dans lui-même qui associe à tout polynôme P de $\mathcal{P}_n$ le polynôme :

$$x \mapsto P(\alpha)x + P(\beta).$$

a) Montrer que φ est une application linéaire.

b) Déterminer le noyau de φ .

c) Démontrer que $\varphi(\mathcal{P}_n)$ est le sous-espace de $\mathcal{P}_n$ formé par les polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

4. a) Démontrer qu'il existe des réels λ et μ tels que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \lambda(x - \alpha) + \mu(x - \beta) = 1.$$

b) On appelle F l'ensemble des polynômes, sommes d'un polynôme quelconque de E_α et d'un polynôme quelconque de E_β .

Démontrer que tout polynôme constant appartient à F .

c) Démontrer que tout polynôme : $x \mapsto x^p$ de $\mathcal{P}_n$ appartient à F .

[On rappelle que, pour $p \geq 2$,

$$x^p - \alpha^p = (x - \alpha)(x^{p-1} + x^{p-2}\alpha + \dots + \alpha^{p-1}).]$$

d) En déduire que $\mathcal{P}_n = F$.

e) Vérifier la relation :

$$\dim E_\alpha + \dim E_\beta = \dim \mathcal{P}_n + \dim (E_\alpha \cap E_\beta).$$

4

CALCUL BARYCENTRIQUE

Dans ce chapitre et le suivant, pour pouvoir traiter en même temps tous les cas, il sera commode de désigner par X la droite, le plan, ou l'espace et par $\vec{X}$ l'ensemble des vecteurs de X . On sait que $\vec{X}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (de dimension 1, 2 ou 3 selon que X est la droite, le plan, ou l'espace). Rappelons que, un point O étant choisi dans X , l'application $M \mapsto \overrightarrow{OM}$ réalise une bijection de X sur $\vec{X}$.

Enfin, si Y est un point, une droite ou un plan de X , l'ensemble des vecteurs de Y est un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$ (de dimension 0, 1 ou 2) qu'on appelle la **direction** de Y et qu'on note $\vec{Y}$.

4.1 BARYCENTRE D'UNE FAMILLE $((A_i, \alpha_i))_{i \in [1, n]}$

On connaît depuis la classe de Seconde la définition du barycentre de deux, trois ou quatre points du plan. On se propose ici d'étendre cette définition.

a) Définition du barycentre

Appelons **point pondéré** le couple (A, α) formé par un point A de X et un réel α appelé **coefficient** ou **masse** de A .

Considérons une famille finie $((A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n))$ de n points pondérés ($n \geq 1$). Nous noterons cette famille $((A_i, \alpha_i))_{i \in [1, n]}$. C'est une famille de couples.

On appelle **fonction vectorielle de Leibniz** associée à la famille $((A_i, \alpha_i))_{i \in [1, n]}$ l'application

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \vec{X} \\ M &\longmapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}. \end{aligned}$$

Étudions si cette application est bijective. Pour cela, cherchons les points M de X tels que $f(M) = \vec{v}$ où $\vec{v}$ est un vecteur donné de $\vec{X}$. Choisissons une origine O et déterminons $\overrightarrow{OM}$. Les égalités suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} (1) \quad f(M) &= \vec{v} \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} &= \vec{v} \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OM}) &= \vec{v} \\ \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{OM} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} - \vec{v} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{OM} = f(O) - \vec{v}.$$

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, quel que soit le vecteur $\vec{v}$ de $\vec{X}$, le point M cherché est unique; c'est le point défini par :

$$(3) \quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} (f(O) - \vec{v}).$$

L'application f est *bijective*.

En particulier, il existe un unique point G en lequel f s'annule. Ce point est caractérisé par $f(G) = \vec{0}$ ou, ce qui est équivalent d'après (3), par

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} f(O).$$

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, distinguons deux cas :

ou bien $\vec{v} \neq f(O)$, l'équation (2), donc l'équation (1) n'ont aucune solution;

ou bien $\vec{v} = f(O)$, l'équation (2), donc l'équation (1) admettent pour solution tous les points de X.

Donc, lorsque $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, l'application f est *constante*.

Retenons :

Théorème et définition

Soit $((A_i, \alpha_i))_{i \in [1, n]}$ une famille de points pondérés.

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, il existe un unique point G tel que

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

ou encore, O étant un point quelconque de X,

$$(5) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \right).$$

Ce point est appelé **barycentre** de la famille $((A_i, \alpha_i))_{i \in [1, n]}$ ou encore **barycentre** des points $A_1, \dots, A_n$ affectés des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. On le note

$$G = \text{Bar}((A_i, \alpha_i))_{i \in [1, n]}$$

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, le vecteur $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est indépendant du point M de X.

b) Propriétés du barycentre

1. Il résulte de (4) ou de (5) que :

le barycentre ne change pas si on change l'ordre des couples (A_i, α_i) .

2. Si λ est un nombre réel non nul, on a

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i) \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

ce qui montre que :

si $\lambda \neq 0$, $\text{Bar}((A_i, \alpha_i))_{i \in [1, n]} = \text{Bar}((A_i, \lambda \alpha_i))_{i \in [1, n]}$

Remarquons, en particulier, qu'on peut choisir λ de telle sorte que la somme

des nouveaux coefficients soit égale à 1 : $\lambda = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$.

3. Supposons qu'il existe une partie J de $[1, n]$ ($J \neq \emptyset$ et $J \neq [1, n]$) telle que

$\sum_{i \in J} \alpha_i \neq 0$. Posons $K = [1, n] - J$. On a :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \iff \sum_{i \in J} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} + \sum_{i \in K} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

or, d'après (5) où on remplace O par G et G par $G' = \text{Bar}((A_i, \alpha_i))_{i \in J}$:

$$\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{\sum_{i \in J} \alpha_i} \left(\sum_{i \in J} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} \right)$$

$$\text{donc} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \iff \left(\sum_{i \in J} \alpha_i \right) \overrightarrow{GG'} + \sum_{i \in K} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

ce qui montre que G est également le barycentre de G' affecté du coefficient

$\sum_{i \in J} \alpha_i$ et des points pondérés (A_i, α_i) , l'indice i décrivant K. Autrement dit :

le barycentre ne change pas si l'on remplace plusieurs points, dont la somme des coefficients est non nulle, par leur barycentre affecté de la somme de ces coefficients.

C'est la propriété dite « d'associativité » du barycentre.

4. Coordonnées du barycentre. Plaçons-nous, par exemple, dans le cas où X est l'espace E. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de E, (x_i, y_i, z_i) les coordonnées du point A_i , (x, y, z) celles du barycentre G. La formule (5) montre que :

$$x = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right); \quad y = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \right); \quad z = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i \right)$$

On a des formules analogues pour le plan et la droite.

c) Exemples

D'une façon générale, si tous les coefficients sont égaux et non nuls, le barycentre de la famille $((A_i, \alpha_i))_{i \in [1, n]}$ est appelé **l'isobarycentre** (ou **éuibarycentre**) des points $A_1, A_2, \dots, A_n$. C'est aussi le barycentre de la famille $((A_i, 1))_{i \in [1, n]}$ d'après la propriété 2 du barycentre.

Comme nous l'avons déjà dit, X désigne une droite, un plan ou l'espace E éventuellement.

■ Milieu d'un point (A, B) ou d'un segment $[A, B]$

Soit A et B deux points de X . Le milieu du bipoint (A, B) ou du segment $[A, B]$ est l'isobarycentre G des points A et B . Il est donc défini, d'après (4), par :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

ou encore, en choisissant une origine O , d'après (5) :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

En particulier, en prenant O en A :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}.$$

On sait que le segment $[A, B]$ est l'ensemble des points M de X tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ où le réel λ décrit $[0, 1]$. Le milieu du segment $[A, B]$ est donc un point de ce segment, de plus $\|\overrightarrow{GA}\| = \|\overrightarrow{GB}\|$. Notons que le milieu de $[A, B]$ est l'unique point du segment $[A, B]$ (et même de la droite (AB)) équidistant de A et de B .

■ Centre de gravité d'un triangle ABC

Soit trois points A, B, C non alignés de X . Nous appellerons centre de gravité G du triangle ABC l'isobarycentre des points A, B, C . Il est donc défini, d'après (4), par :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

ou encore, en choisissant une origine O , d'après (5) :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

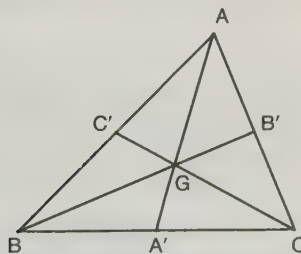


fig. 1

D'après la propriété 3 du barycentre, pour déterminer G (fig. 1) on peut remplacer (B, 1) et (C, 1) par (A', 2) où A' est le milieu de [B, C]. Donc G est le barycentre de (A, 1) et (A', 2). On a donc, pour un point O quelconque :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'}).$$

En particulier, pour O = A :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA'}.$$

On aura des résultats analogues en remplaçant (A, 1) et (C, 1) par (B', 2) et en remplaçant (A, 1) et (B, 1) par (C', 2), les points B' et C' étant respectivement les milieux de [A, C] et [A, B]. On retrouve la propriété :

les trois médianes [A, A'], [B, B'], [C, C'] d'un triangle ABC sont concourantes au centre de gravité du triangle, situé aux $\frac{2}{3}$ de chacune d'elles à partir du sommet.

■ Centre de gravité d'un tétraèdre ABCD

Soit quatre points A, B, C, D non coplanaires de X. Ils déterminent un tétraèdre ABCD (fig. 2). Nous appellerons centre de gravité G du tétraèdre ABCD l'isobarycentre des points A, B, C, D. Il est donc défini, d'après (4) ou (5), par

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

ce qui est équivalent, en choisissant une origine O, à :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

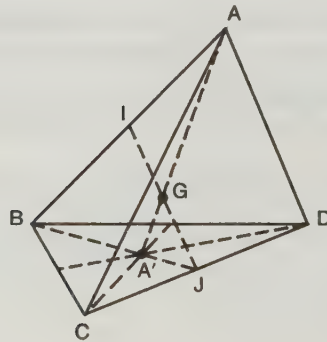


fig. 2

D'après la propriété 3 du barycentre, pour déterminer G on peut remplacer :

(A, 1) et (B, 1) par (I, 2), I étant le milieu de [A, B]

(C, 1) et (D, 1) par (J, 2), J étant le milieu de [C, D].

Le point G est le barycentre de (I, 2) et (J, 2) c'est-à-dire le milieu de [I, J].

On peut aussi remplacer (B, 1), (C, 1) et (D, 1) par (A', 3), A' étant le centre de gravité du triangle ABC. Le point G est le barycentre de (A, 1) et (A', 3).

On a donc, pour un point O quelconque :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OA'}).$$

En particulier pour $O = A$:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AA'}.$$

On aura des résultats analogues en associant ainsi les sommets deux à deux ou encore trois de ces sommets A, B, C, D. On appelle *arêtes* les segments joignant deux sommets, et *arêtes opposées* deux arêtes n'ayant pas de sommet commun. Les *médianes* du tétraèdre sont les segments tels que $[A, A']$ joignant un sommet au centre de gravité du triangle formé par les trois autres sommets. En résumé :

Les trois segments joignant les milieux des arêtes opposées et les quatre médianes d'un tétraèdre sont concourants au centre de gravité du tétraèdre. Ce point est situé au milieu de chacun des trois premiers segments et aux $\frac{3}{4}$ de chaque médiane à partir du sommet.

4.2 REPÈRE CARTÉSIEN ET REPÈRE AFFINE. COORDONNÉES CARTÉSIENNES ET COORDONNÉES BARYCENTRIQUES

a) Repère cartésien et repère affine

Soit (A_1, A_2) un couple de points, *distincts*, d'une droite D. Le couple $(A_1, \overrightarrow{A_1A_2})$ est un repère cartésien de D. Le couple (A_1, A_2) est appelé **repère affine de D**.

Soit (A_1, A_2, A_3) un triplet de points, *non alignés*, d'un plan P. La famille $(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3})$ est une base de $\vec{P}$ et $(A_1, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3})$ est un repère cartésien de P. Le triplet (A_1, A_2, A_3) est appelé **repère affine de P**.

Soit enfin un quadruplet (A_1, A_2, A_3, A_4) de points, *non coplanaires*, de l'espace E. La famille $(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4})$ est une base de $\vec{E}$ et $(A_1, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4})$ est un repère cartésien de E. Le quadruplet (A_1, A_2, A_3, A_4) est appelé **repère affine de E**.

b) Coordonnées cartésiennes et coordonnées barycentriques

● Soit M un point quelconque de X et $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ un repère affine de X où n est égal à 2, 3 ou 4 suivant que X est une droite D, un plan P ou l'espace E. On sait qu'il existe un système de coordonnées cartésiennes unique $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ du point M dans le repère cartésien $(A_1, \overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_n})$ tel que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1M} &= x_1 \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + x_{n-1} \overrightarrow{A_1A_n} \\ &= (1 - x_1 - \dots - x_{n-1}) \overrightarrow{A_1A_1} + x_1 \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + x_{n-1} \overrightarrow{A_1A_n} \end{aligned}$$

donc (on reconnaît une égalité définissant un barycentre, l'origine étant A_1) :

$$M = \text{Bar}((A_1, 1 - x_1 - \dots - x_{n-1}), (A_2, x_1), \dots, (A_n, x_{n-1})).$$

• Réciproquement si $M = \text{Bar}((A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n))$, on a :

$$\overrightarrow{A_1 M} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} (\alpha_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_1 A_n})$$

ce qui montre que M appartient à X , ses coordonnées cartésiennes dans le repère cartésien $(A_1, \overrightarrow{A_1 A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_n})$ étant $\frac{\alpha_2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_n}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$.

Concluons :

Théorème

Soit X une droite ou un plan ou l'espace. X est l'ensemble des barycentres des points d'un repère affine de X .

Si M est le barycentre de $((A_i, \alpha_i))_{i \in [1, n]}$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est appelé **système de coordonnées barycentriques** de M dans le repère affine $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ de X .

REMARQUES

1. On sait (cf. § 4.1 b) propriété 2 du barycentre) que si $\lambda \neq 0$, $(\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n)$ est aussi un système de coordonnées barycentriques de M . Montrons que l'on obtient, de cette façon, tous les systèmes de coordonnées barycentriques de M :

si

$$M = \text{Bar}((A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)) = \text{Bar}((A_1, \alpha'_1), (A_2, \alpha'_2), \dots, (A_n, \alpha'_n))$$

alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1 M} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} (\alpha_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_1 A_n}) = k (\alpha_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_1 A_n}) \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha'_i} (\alpha'_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \dots + \alpha'_n \overrightarrow{A_1 A_n}) = k' (\alpha'_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \dots + \alpha'_n \overrightarrow{A_1 A_n}) \end{aligned}$$

en posant

$$k = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \quad \text{et} \quad k' = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha'_i}.$$

D'où (unicité du système de coordonnées cartésiennes) :

$$\begin{aligned} k \alpha_2 &= k' \alpha'_2, \dots, k \alpha_n = k' \alpha'_n \\ \alpha'_2 &= \frac{k}{k'} \alpha_2, \dots, \alpha'_n = \frac{k}{k'} \alpha_n \end{aligned}$$

par suite :

$$\begin{aligned}\alpha'_1 &= \sum_{i=1}^n \alpha'_1 - \alpha'_2 - \dots - \alpha'_n = \frac{1}{k'} - \frac{k}{k'} \alpha_2 - \dots - \frac{k}{k'} \alpha_n \\ &= \frac{k}{k'} \left(\frac{1}{k} - \alpha_2 - \dots - \alpha_n \right) = \frac{k}{k'} \alpha_1.\end{aligned}$$

Donc tous les coefficients α'_i ($1 \leq i \leq n$) sont de la forme $\lambda \alpha_i$ avec $\lambda = \frac{k}{k'}$.

2. Reprenons la démonstration du théorème précédent avec les mêmes notations et en ne considérant qu'un segment $[A_1, A_2]$ qui est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{A_1 M} = x_1 \overrightarrow{A_1 A_2}$ avec $x_1 \in [0, 1]$. Nous en déduisons :

un segment est l'ensemble des barycentres de ses extrémités affectés de coefficients positifs.

EXERCICE RÉSOLU

Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan P . La bissectrice intérieure issue de A coupe le segment $[B, C]$ en un point A' . Déterminer un système de coordonnées barycentriques de A' dans le repère affine (B, C) . En déduire que les trois bissectrices intérieures du triangle ABC sont concourantes et déterminer un système de coordonnées barycentriques de leur point de concours I dans le repère affine (A, B, C) .

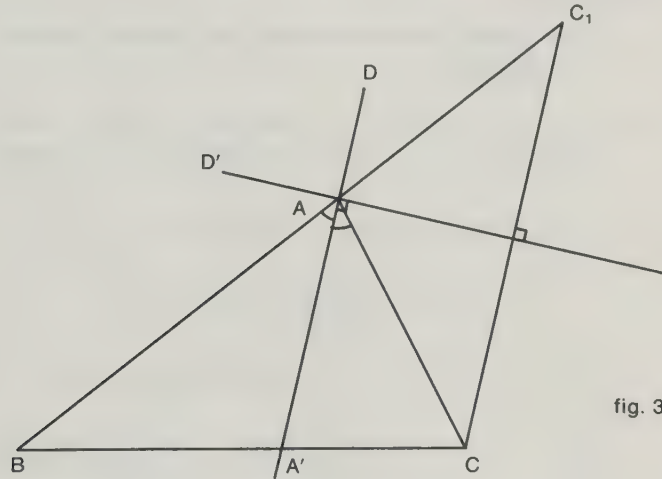


fig. 3

Soit D la bissectrice intérieure issue de A , D' la bissectrice extérieure. On pose

$$\|\overrightarrow{AC}\| = b, \quad \|\overrightarrow{AB}\| = c, \quad \|\overrightarrow{BC}\| = a.$$

Notons s_D (resp. $s_{D'}$) la symétrie orthogonale par rapport à la droite D (resp. D'). Comme D et D' sont perpendiculaires, on a

$$s_{D'} \circ s_D = s_A$$

où s_A est la symétrie par rapport au point A .

Comme D est la bissectrice intérieure, on a $s_D([AB]) = [AC]$ d'où, en posant $C_1 = s_{D'}(C)$:

$$[AC_1] = s_{D'}([AC]) = s_{D'} \circ s_D([AB]) = s_A([AB]).$$

On en déduit que A appartient au segment $[B, C_1]$ et, comme $\|\overrightarrow{AB}\| = c$ et $\|\overrightarrow{AC_1}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = b$,

$$b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC_1} = \vec{0}$$

d'où, d'après le théorème de Thalès :

$$b\overrightarrow{A'B} + c\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$$

donc

$$A' = \text{Bar}((B, b), (C, c)).$$

Notons au passage que $\frac{\|\overrightarrow{A'B}\|}{\|\overrightarrow{A'C}\|} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}$.

Les trois points pondérés (A, a) , (B, b) , (C, c) ont un barycentre I puisque $a + b + c \neq 0$. Par associativité, I est le barycentre de (A, a) et de $(A', b + c)$, c'est donc un point de D . Un raisonnement analogue montre que I est sur les autres bissectrices intérieures : les trois bissectrices intérieures sont concourantes en un point dont un système de coordonnées barycentriques est (a, b, c) dans le repère affine (A, B, C) .

4.3 FONCTION SCALAIRE DE LEIBNIZ

On utilise dans ce paragraphe, contrairement au précédent, la notion de produit scalaire de deux vecteurs de $\vec{X}$.

a) Définition et formules de Leibniz

On appelle **fonction scalaire de Leibniz** associée à la famille $((A_i, \alpha_i))_{i \in [1, n]}$ l'application

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2. \end{aligned}$$

Quels que soient les points M et M' de X on a :

$$\begin{aligned} g(M) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A_i})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MM'}^2 + 2\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{M'A_i} + \overrightarrow{M'A_i}^2) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MM'}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{M'A_i} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{M'A_i}^2 \\ &= \overrightarrow{MM'}^2 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) + 2\overrightarrow{MM'} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} \right) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{M'A_i}^2 \\ &= g(M') + 2\overrightarrow{MM'} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} \right) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MM'}^2. \end{aligned}$$

■ 1^{er} cas : $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$

Nous avons démontré (cf. § 4.1 a)) que le vecteur $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{M'A_i}$ est un vecteur constant $\vec{v}$, on a donc :

(1)

$$g(M) = g(M') + 2\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{v}$$

REMARQUE Dans le cas où le vecteur $\vec{v}$ est nul, la fonction scalaire de Leibniz est constante.

■ 2^e cas : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$

Le barycentre G de la famille $((A_i, \alpha_i))_{i \in [1, n]}$ existe et est défini par :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

On a :
$$g(M) = g(G) + 2\overrightarrow{MG} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} \right) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MG}^2$$

d'où

(2)

$$g(M) = g(G) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MG}^2$$

Les formules (1) et (2) sont connues sous le nom de « **formules de Leibniz** ».

■ Cas particulier

Soit A et B deux points d'une droite D , I le milieu de (A, B) . Soit M un point quelconque de X et H le projeté orthogonal de M sur D .

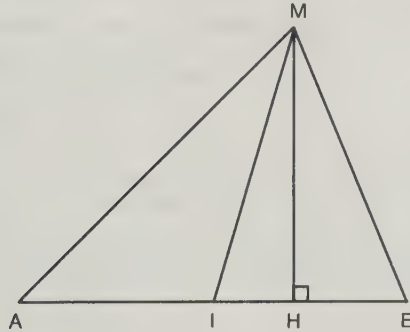


fig. 4

En appliquant ce qui précède aux deux points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 1)$, on obtient le « **théorème de la médiane** ».

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{\overrightarrow{AB}^2}{2}$$

En utilisant maintenant les deux points pondérés $(A, 1)$ et $(B, -1)$, on obtient

$$MA^2 - MB^2 = IA^2 - IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \vec{v}$$

avec $\vec{v} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$:

$$\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB}$$

(les mesures algébriques sont calculées par rapport à un vecteur unitaire de D).

b) Ensemble des points M tels que $g(M) = k$ ($k \in \mathbb{R}$)

Étant donnés n points pondérés (A_i, α_i) et une constante k réelle, on se propose d'étudier l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M de X tels que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2 = k.$$

■ Premier cas : $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$

On sait alors que le vecteur $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est indépendant du point M. Soit O un point quelconque de X. D'après la formule (1), on a :

$$g(M) = g(O) + 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{v}.$$

Un point M de X appartient à $\mathcal{E}$ si, et seulement si,

$$g(O) + 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{v} = k$$

c'est-à-dire
$$\overrightarrow{MO} \cdot \vec{v} = \frac{k - g(O)}{2}.$$

• Si $\vec{v} = \vec{0}$ et $k - g(O) \neq 0$, l'ensemble $\mathcal{E}$ est vide.

• Si $\vec{v} = \vec{0}$ et $k - g(O) = 0$, l'ensemble $\mathcal{E}$ est X entier.

• Si $\vec{v} \neq \vec{0}$:

Soit D la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{v}$. Soit M un point quelconque de X, H le projeté orthogonal de M sur D. Posons $\overrightarrow{OH} = \lambda \vec{v}$. Comme

$$\overrightarrow{MO} \cdot \vec{v} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HO}) \cdot \vec{v} = \overrightarrow{HO} \cdot \vec{v} = -\lambda \vec{v}^2$$

$$\text{on a : } M \in \mathcal{E} \iff \overrightarrow{MO} \cdot \vec{v} = \frac{k - g(O)}{2} \iff \lambda = \frac{g(O) - k}{2\vec{v}^2}.$$

Soit H_0 le point de D défini par $\overrightarrow{OH_0} = \left(\frac{g(O) - k}{2\vec{v}^2} \right) \vec{v}$.

$\mathcal{E}$ est l'ensemble des points de X qui se projettent orthogonalement en H_0 sur D. Si X est un plan, $\mathcal{E}$ est une droite; si X est l'espace, $\mathcal{E}$ est un plan.

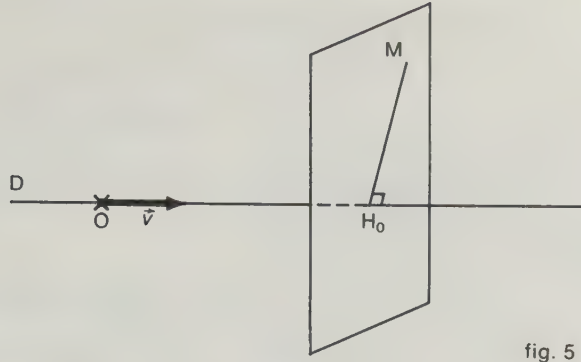


fig. 5

REMARQUES 1. Si on connaît *a priori* un point M_0 de $\mathcal{E}$:

- si $\vec{v} = \vec{0}$, $\mathcal{E}$ est égal à X ;
- si $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\mathcal{E}$ est la droite ou le plan passant par M_0 et orthogonal à $\vec{v}$.

2. Si on ne connaît pas de point de $\mathcal{E}$, on choisit O de telle sorte que le calcul de $g(O)$ soit le plus simple possible.

■ Deuxième cas : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$

Soit G le barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$.

En appliquant la formule (2), on obtient :

$$g(M) = g(G) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MG}^2.$$

D'où :

$$M \in \mathcal{E} \iff \overrightarrow{MG}^2 = \frac{k - g(G)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}.$$

- Si $\frac{k - g(G)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} < 0$, l'ensemble $\mathcal{E}$ est vide.
- Si $k - g(G) = 0$, l'ensemble $\mathcal{E}$ est égal à $\{G\}$.
- Si $\frac{k - g(G)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} > 0$, l'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle (resp. la sphère) de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{k - g(G)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}}$ si X est un plan (resp. l'espace E).

REMARQUES

1. La discussion fait apparaître le nombre $k - g(G)$. Il est donc utile de savoir calculer $g(G)$ en fonction des données, qui sont les A_i et les α_i . Faisons le calcul lorsque $n = 3$. La formule de Leibniz :

$$(\forall M \in X) \quad g(M) = g(G) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \overrightarrow{MG}^2$$

donne, en l'appliquant successivement avec M en A_1, A_2 ou A_3 :

$$g(A_1) = g(G) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \overrightarrow{A_1G}^2$$

$$g(A_2) = g(G) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \overrightarrow{A_2G}^2$$

$$g(A_3) = g(G) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \overrightarrow{A_3G}^2.$$

En multipliant ces égalités respectivement par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et en faisant ensuite la somme membre à membre, on obtient :

$$2(\alpha_1\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2}^2 + \alpha_2\alpha_3\overrightarrow{A_2A_3}^2 + \alpha_3\alpha_1\overrightarrow{A_3A_1}^2) = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)g(G)$$

$$g(G) = \frac{\alpha_1\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2}^2 + \alpha_2\alpha_3\overrightarrow{A_2A_3}^2 + \alpha_3\alpha_1\overrightarrow{A_3A_1}^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}.$$

2. Si on connaît un point M_0 de $\mathcal{E}$, la discussion est sans objet : $\mathcal{E}$ est le cercle (ou la sphère) de centre G et passant par M_0 .

EXERCICE RÉSOLU

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$, A et B deux points distincts d'un plan P . Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M de P tels que $\|\overrightarrow{MA}\| = k \|\overrightarrow{MB}\|$.

Comme $k, \|\overrightarrow{MA}\|, \|\overrightarrow{MB}\|$ sont des nombres positifs ou nuls, on a

$$M \in \mathcal{E} \iff \|\overrightarrow{MA}\| = k \|\overrightarrow{MB}\| \iff \overrightarrow{MA}^2 - k^2 \overrightarrow{MB}^2 = 0.$$

• Si $k = 1$, $\mathcal{E}$ est la médiatrice de $[A, B]$.

• Si $k \neq 1$, soit G le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -k^2)$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est soit vide, soit un cercle centré en G .

Or, on peut remarquer que les deux points

$$I = \text{Bar}((A, 1), (B, k)) \quad \text{et} \quad J = \text{Bar}((A, 1), (B, -k)),$$

qui existent tous deux, sont des points de $\mathcal{E}$, qui ne peut donc être vide. L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc le cercle de diamètre $[I, J]$.

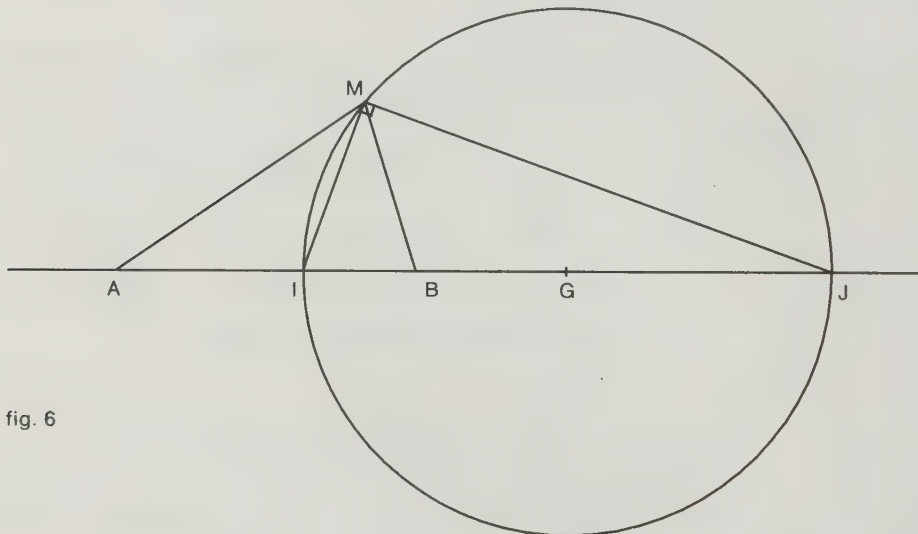


fig. 6

Comme $k > 0$, le point I appartient au segment $[A, B]$. Le point J est sur la droite (AB) mais en dehors du segment $[A, B]$. Les deux points I et J sont du même côté du milieu de $[A, B]$. En effet,

$$\frac{\|\overrightarrow{IA}\|}{\|\overrightarrow{IB}\|} = \frac{\|\overrightarrow{JA}\|}{\|\overrightarrow{JB}\|} = k,$$

donc les rapports

$$\frac{\|\overrightarrow{IA}\|}{\|\overrightarrow{IB}\|} \quad \text{et} \quad \frac{\|\overrightarrow{JA}\|}{\|\overrightarrow{JB}\|}$$

sont tous deux plus grands que 1 ou tous deux plus petits que 1.

Soit M un point de $\mathcal{E}$ autre que I et J . On a

$$I = \text{Bar}\left((A, 1), \left(B, \frac{\|\overrightarrow{MA}\|}{\|\overrightarrow{MB}\|}\right)\right) = \text{Bar}\left((A, \|\overrightarrow{MB}\|), (B, \|\overrightarrow{MA}\|)\right).$$

Il en résulte (cf. exercice résolu du § 4.2 b)) que la droite (MI) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{AMB}$. Comme (MJ) est perpendiculaire à (MI) , la droite (MJ) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{AMB}$.

Exercices

Barycentres

4.1 Soit G le barycentre d'une famille $((A_i, \alpha_i))_{i \in [1, n]}$ de points pondérés telle que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0.$$

Soit $J \subset [1, n]$ et $K = [1, n] - J$. On suppose

$$\sum_{i \in J} \alpha_i = 0.$$

Montrer que la famille $((A_i, \alpha_i))_{i \in K}$ a un barycentre G' .

Que peut-on dire de la position de G par rapport à G' ?

4.2 Soit $((A_i, \alpha_i))_{i \in [1, n]}$ une famille de points pondérés telle que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$.

Soit $J \subset [1, n]$ tel que $\sum_{i \in J} \alpha_i \neq 0$. Les deux familles $((A_i, \alpha_i))_{i \in J}$ et $((A_i, \alpha_i))_{i \in K}$ ont des barycentres, respectivement G_1 et G_2 . Montrer que $\overline{G_1 G_2}$ appartient à une droite vectorielle fixe (c'est-à-dire indépendante du choix de J).

4.3 Dans l'espace E , on considère quatre points A, B, C, D . Soit f et g les applications suivantes de E dans $\vec{E}$:

$$\begin{aligned} f : M &\longmapsto 2\overline{MA} + 4\overline{MB} - 3\overline{MC} - 3\overline{MD} \\ g : M &\longmapsto 2\overline{MA} + 4\overline{MB} + 3\overline{MC} + 3\overline{MD}. \end{aligned}$$

On donne un vecteur $\vec{u}$ de $\vec{E}$. Trouver l'ensemble des points M de E dans chacun des cas suivants :

- $f(M) = \vec{u}$
- $g(M) = \vec{u}$
- $f(M)$ et $g(M)$ sont colinéaires.

4.4 Soit un triangle ABC et α, β, γ des nombres réels tels que

$$\alpha + \beta + \gamma \neq 0, \beta + \gamma \neq 0, \gamma + \alpha \neq 0, \alpha + \beta \neq 0.$$

Soit :

- G le barycentre de $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$
- A' le barycentre de $((B, \beta), (C, \gamma))$
- B' le barycentre de $((C, \gamma), (A, \alpha))$
- C' le barycentre de $((A, \alpha), (B, \beta))$.

1. Déterminer α', β', γ' en fonction de α, β, γ pour que G soit le barycentre de $((A', \alpha'), (B', \beta'), (C', \gamma'))$.

2. Quelle propriété obtient-on si $\alpha = \beta = \gamma$?

4.5 Soit un triangle ABC et α, β, γ des nombres réels non nuls tels que

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \beta + \gamma \neq 0, \gamma + \alpha \neq 0, \alpha + \beta \neq 0.$$

Soit :

- A' le barycentre de $((B, \beta), (C, \gamma))$
- B' le barycentre de $((C, \gamma), (A, \alpha))$
- C' le barycentre de $((A, \alpha), (B, \beta))$.

Démontrer que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles.

4.6 Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles de l'espace E , ayant même centre de gravité.

1. Démontrer que $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = \vec{0}$.

2. En déduire (si $A \neq A', B \neq B', C \neq C'$) que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles à un même plan.

4.7 Soit $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux tétraèdres de l'espace E .

1. Démontrer que si $ABCD$ et $A'B'C'D'$ ont même centre de gravité :

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} + \overline{DD'} = \vec{0}.$$

2. Réciproque.

4.8 Dans l'espace E , soit D et D' deux droites non coplanaires. La droite D est définie par un point A de D et un vecteur directeur $\vec{u}$ et la droite D' par un point A' de D' et un vecteur directeur $\vec{u}'$. Deux points M et M' décrivent D et D' de manière que :

$$\overline{AM} = \lambda \vec{u}, \quad \overline{A'M'} = \lambda' \vec{u}'.$$

1. Quel est l'ensemble décrit par le barycentre G des points M et M' affectés de coefficients donnés α et α' ($\alpha + \alpha' \neq 0$) quand λ et λ' décrivent $\mathbb{R}$?

2. Quel est l'ensemble décrit par le point G précédent quand λ et λ' varient de manière que $\lambda = \lambda'$?

4.9 Soit un triangle ABC et les nombres réels λ et μ qui varient de manière que $\lambda + \mu = 1$. Soit :

- A' le barycentre de $((B, \lambda), (C, \mu))$
- B' le barycentre de $((C, \lambda), (A, \mu))$
- C' le barycentre de $((A, \lambda), (B, \mu))$
- G l'isobarycentre des points A', B', C' .

Montrer que G est fixe.

4.10 Soit un triangle ABC . On désigne par :

- G_1 le barycentre de $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$
- G_2 le barycentre de $((A, -\alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$
- G_3 le barycentre de $((A, \alpha), (B, -\beta), (C, \gamma))$
- G_4 le barycentre de $((A, \alpha), (B, \beta), (C, -\gamma))$.

1. Démontrer que les droites $(AG_2), (BG_3), (CG_4)$ sont concourantes en G_1 .

2. Démontrer que les droites $(G_2G_3), (G_3G_4), (G_2G_4)$ passent respectivement par C, A, B .

4.11 1. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

2. Soit P un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On pose $I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ où n est un entier naturel non nul donné. On désigne par $A_{m,p}$ le point dont le couple de coordonnées est un élément (m, p) de

$I \times I$. On affecte chaque point $A_{m,p}$ du coefficient $m + p$. Calculer les coordonnées du barycentre G de la famille $((A_{m,p}, m + p))_{(m,p) \in I \times I}$ (pour calculer l'abscisse de G , on remplacera les points de même abscisse par leur barycentre affecté de la somme des coefficients de ces points).

4.12 Dans un plan P rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les deux points A et B de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(0, 1)$. A tout point M de coordonnées (x, y) on associe, lorsqu'il existe, le barycentre M' des points pondérés $(O, 1)$, (A, x) , (B, y) . On définit ainsi une fonction :

$$\begin{aligned} f : P &\longrightarrow P \\ M &\longmapsto M'. \end{aligned}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{E}$ de f .
2. Déterminer l'image de $\mathcal{E}$ par f .
3. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que $f(M) = M$.

(D'après Exercice. Bac C. Nantes. 1981)

4.13 Dans un plan P , soit un point fixe O et la suite de points $M_0, M_1, \dots, M_n, \dots$ tels que

$$(1) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \overrightarrow{OM}_{n+2} = 2a\overrightarrow{OM}_{n+1} - a^2\overrightarrow{OM}_n$$

où a est un réel donné, $a \neq 1$.

1. Soit G_{n+1} le barycentre de M_{n+1} et de M_n affectés respectivement des coefficients 1 et $-a$. Vérifier que G_{n+1} et G_{n+2} sont alignés avec O . Comment G_n se déduit-il simplement de G_{n-1} ?

2. Dans tout ce qui suit $a = \frac{1}{2}$. M_0 et M_1 ont pour coordonnées respectives $(2, 0)$ et $(1, 1)$ dans un repère orthonormé d'origine O . Placer sur un graphique les points M_0, M_1, G_1 , et expliquer la construction par laquelle chacun des points G_2, M_2 se déduit des précédents.

3. On suppose connu que, pour toute suite réelle (u_n) vérifiant

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n,$$

il existe des constantes α et β telles que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\alpha + \beta n).$$

Calculer en fonction de n , les coordonnées x_n et y_n de M_n . Les suites (x_n) et (y_n) sont-elles convergentes?

M_n a-t-il une position limite pour n infini?

(D'après Bac C. Rouen. 1981)

4.14 Dans un plan P on donne trois points A, B, C non alignés. A tout nombre réel λ on associe le barycentre G , lorsqu'il existe, de la famille :

$$((A, 3), (B, \lambda - 2), (C, -\lambda + 1)).$$

Quel est l'ensemble décrit par G ? (on prendra pour repère cartésien : $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.)

4.15 Même question qu'à l'exercice précédent avec :

$$((A, -\lambda^2 + 4), (B, \lambda^2 - 4), (C, \lambda + 2)).$$

4.16 Dans l'espace E , on donne quatre points A, B, C, D non coplanaires. A tout nombre réel λ on associe le barycentre G , lorsqu'il existe, de la famille :

$$((A, \lambda - 1), (B, \lambda + 2), (C, 2\lambda + 3), (D, -4\lambda - 2)).$$

Quel est l'ensemble décrit par G ? (On prendra pour repère cartésien : $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.)

4.17 Même question qu'à l'exercice précédent avec :

$$((A, \lambda + \mu), (B, 2\lambda + 3\mu - 1), (C, -\lambda - 2\mu + 2), (D, -2\lambda - 2\mu)),$$

où λ et μ décrivent $\mathbb{R}$.

4.18 Dans un plan rapporté à un repère affine (A, B, C) , on donne les points P et Q de coordonnées barycentriques respectives : $(1, 2, -1)$ et $(-1, -1, 3)$. Soit M le point de coordonnées barycentriques (α, β, γ) .

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante vérifiée par α, β, γ pour que le point M appartienne à la droite (PQ) . On prendra pour repère cartésien : $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2. Déterminer un système de coordonnées barycentriques des points d'intersection, s'ils existent, de la droite (PQ) avec les droites $(AB), (BC), (CA)$.

4.19 Dans un plan rapporté à un repère affine (A, B, C) , quel est l'ensemble des points M de coordonnées barycentriques (α, β, γ) vérifiant la relation $2\alpha + 3\beta - \gamma = 0$?

4.20 Dans un plan P , on considère trois points A, B, C non alignés. La bissectrice intérieure (resp. extérieure) du triangle ABC issue de A coupe le segment $[B, C]$ (resp. la droite (BC)) en A' (resp. A''), si $\|\overrightarrow{AB}\| \neq \|\overrightarrow{AC}\|$.

Déterminer un système de coordonnées barycentriques de A' et de A'' dans le repère affine (B, C) . En déduire que la bissectrice intérieure issue de A et les bissectrices extérieures issues de B et de C sont concourantes en un point dont on donnera un système de coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C) .

4.21 Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan P .

1. Construire le barycentre G de

$$((A, 1), (B, 2), (C, -1)).$$

2. Déterminer l'ensemble E des points M du plan pour lesquels

$$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \quad \text{et} \quad \vec{v} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$$

sont colinéaires.

3. Déterminer l'ensemble F des points M du plan pour lesquels $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

4.22 Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan P . Soit M un point de P de coordonnées

barycentriques α, β, γ par rapport à (A, B, C) . Soit O un point de P . Montrer

$$\overrightarrow{OM}^2 = \frac{\alpha \overrightarrow{OA}^2 + \beta \overrightarrow{OB}^2 + \gamma \overrightarrow{OC}^2}{\alpha + \beta + \gamma} - \frac{\alpha \beta \overrightarrow{AB}^2 + \beta \gamma \overrightarrow{BC}^2 + \gamma \alpha \overrightarrow{CA}^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}.$$

Quel est l'ensemble des points M de P dont les coordonnées barycentriques vérifient :

$$\alpha \beta \overrightarrow{AB}^2 + \beta \gamma \overrightarrow{BC}^2 + \gamma \alpha \overrightarrow{CA}^2 = 0?$$

Fonction scalaire de Leibniz

4.23 Soit A, B, C trois points d'un plan P , α, β, γ trois nombres réels non nuls tels que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. On suppose qu'il existe un point O du plan P tel que

$$\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

1. Montrer que les points A, B, C sont alignés.

2. Soit la fonction scalaire de Leibniz définie par :

$$f(M) = \alpha \overrightarrow{MA}^2 + \beta \overrightarrow{MB}^2 + \gamma \overrightarrow{MC}^2.$$

Montrer que

$$f(M) = \alpha \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \beta \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \gamma \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}.$$

4.24 Soit A, B, C trois points distincts alignés sur une droite D ; montrer que pour tout point M de l'espace E et pour toute orientation de la droite D

$$\overrightarrow{MA}^2 \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}^2 \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}^2 \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}.$$

(On pourra utiliser l'exercice 4.23.) La relation précédente est appelée *relation de Stewart*.

4.25 Soit P un plan. Si M et N sont deux points du plan P , on note MN leur distance.

1. Soit A, B, C trois points de P tels que

$$AB = AC = 5 \quad \text{et} \quad BC = 6.$$

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2. On désigne par G le barycentre de $(A, 2), (B, 3), (C, 3)$. Construire le point G et calculer la distance GA .

3. On considère l'application f de P dans $\mathbb{R}$ qui à tout point M de P associe le réel

$$f(M) = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}.$$

Démontrer que l'on a, pour tout point M de P :

$$f(M) = f(G) + 4MG^2.$$

Calculer numériquement $f(A)$ et $f(G)$.

4. Déterminer et construire l'ensemble E des points M tels que $f(M) = f(A)$.

(Exercice Bac. C. Paris. Session de remplacement. 1981)

4.26 On considère l'espace E , la distance de deux points quelconques M et N de E est notée MN .

1. Soit trois points A, B, C non alignés et I le point défini par :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}.$$

De quels coefficients a, b, c faut-il affecter respectivement les points A, B, C pour que I soit leur barycentre?

2. On suppose maintenant que le triangle ABC est rectangle en A et que $AB = 2$ et $AC = 1$. On pose :

$$S = \{M/M \in E, \quad MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3\}.$$

Démontrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

(Exercice Bac. C. Aix-en-Provence. 1980)

4.27 Soit A, B, C trois points alignés, deux à deux distincts dans un plan P associé au plan vectoriel $\vec{P}$. On pose $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le triplet (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ pour que la propriété suivante soit vérifiée

A est le barycentre du système $(B, \beta), (C, \gamma)$ et B est le barycentre du système $(C, \gamma), (A, \alpha)$ et C est le barycentre du système $(A, \alpha), (B, \beta)$.

b) On vérifiera que l'ensemble X des triplets (α, β, γ) satisfaisant à cette condition est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $\vec{u} = (\lambda - 1, -\lambda, 1)$, privée du vecteur nul.

2. Soit (α, β, γ) un élément de X .

a) Soit f l'application de P dans $\vec{P}$ définie par :

$$(\forall M \in P) \quad f(M) = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}$$

déterminer l'image de P par f .

b) On considère l'application ϕ de P dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(\forall M \in P) \quad \phi(M) = \alpha \overrightarrow{MA}^2 + \beta \overrightarrow{MB}^2 + \gamma \overrightarrow{MC}^2.$$

Montrer que ϕ est constante.

(Exercice Bac. C. Orléans-Tours. 1980)

Révision

4.28 Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan P . On appelle $\vec{P}$ l'ensemble des vecteurs de P .

1. On considère les applications

$$\begin{aligned} f : P &\longrightarrow \vec{P} \\ M &\longmapsto \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : P &\longrightarrow \vec{P} \\ M &\longmapsto 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}. \end{aligned}$$

Déterminer l'ensemble des points M du plan P dans chacun des cas suivants :

a) $\|f(M)\| = 2 \|g(M)\|$.

b) $f(M)$ et $g(M)$ sont colinéaires.

c) $f(M) \cdot g(M) = 2$.

2. Traiter les mêmes questions a), b), c) avec la même application f et avec

$$\begin{aligned} g : P &\longrightarrow \vec{P} \\ M &\longmapsto 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}. \end{aligned}$$

5

APPLICATIONS AFFINES

5.1 APPLICATIONS AFFINES. DÉFINITIONS. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Vous savez que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} : x \mapsto ax$ est appelée application linéaire et que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} : x \mapsto ax + b$ est appelée application affine.

Nous allons généraliser cette dernière notion d'application affine. Les notations sont les mêmes qu'au chapitre 4.

a) Application affine de $\vec{X}$ dans $\vec{X}$

Définition

On dit qu'une application f de $\vec{X}$ dans $\vec{X}$ est affine si et seulement s'il existe un endomorphisme φ de $\vec{X}$ et un vecteur $\vec{b}$ de $\vec{X}$ tels que :

$$(\forall \vec{v} \in \vec{X}) \quad f(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}) + \vec{b}$$

Remarquons que, pour une application affine f donnée de $\vec{X}$ dans $\vec{X}$, $\vec{b} = f(\vec{0})$ donc $\vec{b}$ est *unique* et l'endomorphisme φ aussi puisque

$$(\forall \vec{v} \in \vec{X}) \quad \varphi(\vec{v}) = f(\vec{v}) - \vec{b}.$$

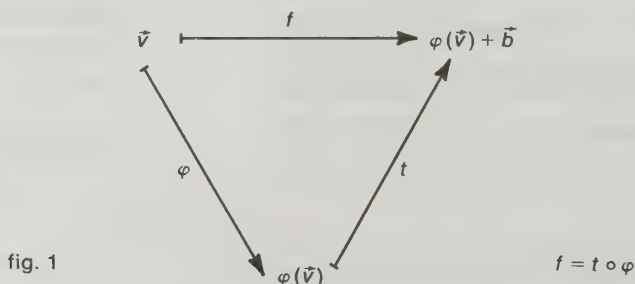
φ est appelé l'**endomorphisme associé** à f ou encore la **partie linéaire** de f .

EXEMPLES

1. Tout endomorphisme de $\vec{X}$ est une application affine ($\vec{b} = \vec{0}$).
2. Toute application constante de $\vec{X}$ dans $\vec{X}$ est affine (φ est l'endomorphisme nul).
3. Toute application $t : \vec{v} \mapsto \vec{v} + \vec{b}$, où $\vec{b}$ est donné, est affine ($\varphi = \text{id}_{\vec{X}}$). Une telle application est appelée **translation vectorielle** de vecteur $\vec{b}$.

REMARQUE

Une application affine de $\vec{X}$ dans $\vec{X}$ est la composée d'un endomorphisme de $\vec{X}$ et d'une translation vectorielle (fig. 1).



b) Application affine de X dans X

Soit f une application de X dans X . Il sera commode de noter $O', M', N', \dots$ les images par f des points $O, M, N, \dots$ On appellera **couple de points homologues** (M, M') tout couple formé par un point M de X et son image M' par f .

Définition

On dit qu'une application : $M \mapsto M'$ de X dans X est affine si et seulement s'il existe un point O de X tel que l'application : $\overrightarrow{OM} \mapsto \overrightarrow{OM'}$ de $\vec{X}$ dans $\vec{X}$ soit affine.

Autrement dit une application f de X dans X est affine si et seulement s'il existe un point O de X , un endomorphisme φ de $\vec{X}$ et un vecteur $\vec{b}$ de $\vec{X}$ tels que quel que soit le couple de points homologues (M, M') :

$$\overrightarrow{OM'} = \varphi(\overrightarrow{OM}) + \vec{b}.$$

Soit O' l'image de O , on a en faisant $M = O$ dans la relation précédente,

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{b}$$

donc :

(1)

$$\overrightarrow{OM'} = \varphi(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{OO'}$$

L'égalité (1) est équivalente à :

$$\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OO'} = \varphi(\overrightarrow{OM})$$

(2)

$$\overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM})$$

On peut alors énoncer :

Théorème 1

Une application de X dans X est affine si et seulement s'il existe un couple de points homologues (O, O') et un endomorphisme φ de $\vec{X}$ tels que, quel que soit le couple de points homologues (M, M') :

(2)

$$\overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM})$$

Soit (N, N') un autre couple de points homologues pour une telle application affine :

$$\overrightarrow{O'N'} = \varphi(\overrightarrow{ON})$$

d'où $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{O'N'} - \overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{ON}) - \varphi(\overrightarrow{OM}) = \varphi(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = \varphi(\overrightarrow{MN})$.

Réciproquement soit une application f de X dans X telle qu'il existe un endomorphisme φ de $\vec{X}$ pour lequel, quels que soient les couples (M, M') et (N, N') de points homologues, on ait :

$$(3) \quad \overrightarrow{M'N'} = \varphi(\overrightarrow{MN})$$

Si l'on choisit un point particulier $N = O$, on en déduit (2) pour tout couple de points homologues (M, M') donc f est affine. On peut énoncer :

Théorème 2

Une application de X dans X est affine si et seulement s'il existe un endomorphisme φ de $\vec{X}$ tel que, quels que soient les couples de points homologues (M, M') et (N, N') :

$$(3) \quad \overrightarrow{M'N'} = \varphi(\overrightarrow{MN})$$

REMARQUE On remarquera la différence entre les énoncés des théorèmes 1 et 2 : dans l'égalité (2) le couple de points homologues (O, O') est fixé et le couple de points homologues (M, M') est quelconque; dans l'égalité (3) les couples de points homologues (M, M') et (N, N') sont quelconques.

5.2 DÉTERMINATION D'UNE APPLICATION AFFINE

a) On donne O, O', φ

Soit f une application affine de X dans X . L'endomorphisme φ intervenant dans la définition ou les théorèmes 1 ou 2 précédents est *indépendant de O et unique*.

En effet, lorsqu'on a (3) on déduit (2) ou (1) en choisissant $N = O$ quelconque.

D'autre part soit ψ un autre endomorphisme associé à f , pour lequel on a quels que soient les couples de points homologues (M, M') et (N, N') : $\overrightarrow{M'N'} = \psi(\overrightarrow{MN})$.

Quel que soit $\vec{v}$ de $\vec{X}$, soit (M, N) un bipoint tel que $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$ et M' et N' les images de M et N par f :

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{v}) &= \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'} \\ \psi(\vec{v}) &= \psi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'} \end{aligned}$$

donc $(\forall \vec{v} \in \vec{X}) \varphi(\vec{v}) = \psi(\vec{v})$, et, par suite, $\varphi = \psi$.

Cet unique endomorphisme est appelé l'**endomorphisme associé** à f ou encore la **partie linéaire** de f .

Réciproquement à un endomorphisme φ de $\vec{X}$, on peut associer plusieurs applications affines. Par exemple si $O' \neq O''$, les applications de X dans X définies par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM'} &= \varphi(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{OO'} \\ \overrightarrow{OM''} &= \varphi(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{OO''}\end{aligned}$$

sont des applications affines différentes associées au même endomorphisme φ . Montrons que, par contre, si l'on se donne un couple (O, O') de points de X et un endomorphisme φ de $\vec{X}$, il existe une application affine f unique de X dans X telle que $O' = f(O)$ et d'endomorphisme associé φ :

Existence. L'application f de X dans X définie par

$$\overrightarrow{OM'} = \varphi(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{OO'}$$

répond à la question.

Unicité. Soit g une autre application affine répondant à la question. Appelons M' et M'' les images d'un point M quelconque de X respectivement par f et par g :

$$\overrightarrow{OM'} = \varphi(\overrightarrow{OM}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM''} = \varphi(\overrightarrow{OM})$$

donc $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM''}$ par suite $M' = M''$. Ainsi $(\forall M \in X) \quad f(M) = g(M)$ donc $f = g$. Énonçons :

Théorème

Soit O et O' deux points de X et φ un endomorphisme de $\vec{X}$.

Il existe une application affine f unique de X dans X telle que $O' = f(O)$ et d'endomorphisme associé φ .

b) On donne les points d'un repère affine et leurs images

Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ un repère affine de X où n est égal à 2 ou 3 ou 4 suivant que X est une droite, un plan ou l'espace. On donne également des points $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ de X . Il existe un endomorphisme unique φ de $\vec{X}$ tel que les images des vecteurs de la base $(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \dots, \overrightarrow{A_1A_n})$ soient les vecteurs $\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_3}, \dots, \overrightarrow{A'_1A'_n}$. Donc il existe une application affine f unique de X dans X telle que $A'_1 = f(A_1)$ et d'endomorphisme associé φ . Les images par f des points $A_2, A_3, \dots, A_n$ sont les points $A''_2, A''_3, \dots, A''_n$ tels que :

$$\overrightarrow{A'_1A''_2} = \varphi(\overrightarrow{A_1A_2}) = \overrightarrow{A'_1A'_2} \quad \text{donc} \quad A''_2 = A'_2$$

$$\overrightarrow{A'_1A''_n} = \varphi(\overrightarrow{A_1A_n}) = \overrightarrow{A'_1A'_n} \quad \text{donc} \quad A''_n = A'_n.$$

Concluons :

Théorème

Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ un repère affine de X et des points $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ de X .

Il existe une application affine f unique de X dans X telle que les images par f des points $A_1, A_2, \dots, A_n$ soient respectivement les points $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$.

c) Détermination analytique

EXERCICE RÉSOLU

Soit l'espace E rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application affine f de E dans E telle que O a pour image $O'(1, 2, -1)$ et dont l'endomorphisme associé φ est défini par :

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{i}) &= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \varphi(\vec{j}) &= \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \\ \varphi(\vec{k}) &= -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}.\end{aligned}$$

Trouver les coordonnées (x', y', z') du point M' image de $M(x, y, z)$ par f .

M' est défini par : $\overrightarrow{OM'} = \varphi(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{OO'}$.

La matrice de $(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}), \varphi(\vec{k}))$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de M' sont :
$$\begin{cases} x' = x + y - z + 1 \\ y' = x - y + 3z + 2 \\ z' = x + 2y + z - 1. \end{cases}$$

■ Cas général

Si O a pour image $O'(x_0, y_0, z_0)$ et si l'on connaît la matrice de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

soit l'application affine f telle que $O' = f(O)$ et d'endomorphisme associé φ . Les coordonnées du point M' image par f du point $M(x, y, z)$ sont :

$$\begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + x_0 \\ y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + y_0 \\ z' = \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + z_0. \end{cases}$$

Réciproquement des formules du type précédent définissent une application affine.

Vous définirez, de même, des formules analogues dans le cas où X est un plan ou une droite.

5.3 PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS AFFINES

a) Conservation du barycentre

On dit qu'une application f de X dans X conserve le barycentre si, pour toute famille $((A_i, \alpha_i))_{i \in [1, n]}$ de points pondérés de barycentre G , $(\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0)$, la famille $((A'_i, \alpha_i))_{i \in [1, n]}$ a pour barycentre G' .

(On note toujours $A'_i = f(A_i)$, $G' = f(G)$.)

Soit f une application affine et $G = \text{Bar}((A_i, \alpha_i))_{i \in [1, n]}$. On a :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

En appliquant l'endomorphisme φ associé à f aux deux membres de cette égalité, on obtient :

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\overrightarrow{GA_i}) = \vec{0}$$

donc
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0}$$

ce qui exprime que $G' = \text{Bar}((A'_i, \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$: toute application affine conserve le barycentre.

Réciproquement, soit f une application de X dans X conservant le barycentre. Nous allons prouver que f est affine. Soit O un point de X et φ l'application de $\vec{X}$ dans $\vec{X}$ qui au vecteur $\overrightarrow{OM}$ associe le vecteur $\overrightarrow{O'M'}$. La démonstration consiste à montrer que φ est linéaire.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{X}$, P , Q et R les points de X tels que $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OR} = \vec{u} + \vec{v}$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \iff \overrightarrow{OR} = -\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \\ &\iff R = \text{Bar}((O, -1), (P, 1), (Q, 1)). \end{aligned}$$

Comme f conserve le barycentre, on en déduit

$R' = \text{Bar}((O', -1), (P', 1), (Q', 1))$. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR'} &= -\overrightarrow{O'O'} + \overrightarrow{O'P'} + \overrightarrow{O'Q'} \iff \overrightarrow{OR'} = \overrightarrow{O'P'} + \overrightarrow{O'Q'} \\ &\iff \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}). \end{aligned}$$

Soit maintenant un réel λ et S le point de X tel que $\overrightarrow{OS} = \lambda \vec{u}$. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \lambda \overrightarrow{OP} \iff \overrightarrow{OS} = (1 - \lambda) \overrightarrow{OO} + \lambda \overrightarrow{OP} \\ &\iff S = \text{Bar}((O, 1 - \lambda), (P, \lambda)). \end{aligned}$$

On en déduit $S' = \text{Bar}((O', 1 - \lambda), (P', \lambda))$. On a les équivalences :

$$\overrightarrow{OS'} = (1 - \lambda) \overrightarrow{O'O'} + \lambda \overrightarrow{O'P'} \iff \overrightarrow{OS'} = \lambda \overrightarrow{O'P'} \iff \varphi(\lambda \vec{u}) = \lambda \varphi(\vec{u}).$$

Nous avons donc prouvé :

Théorème

Une application f de X dans X est affine si et seulement si elle conserve le barycentre.

APPLICATIONS

1. Soit D une droite de X , A et B deux points distincts de D . On a vu (cf. § 4.2 b)) que D est l'ensemble des barycentres des deux points A et B . Soit f une application affine de X dans X . Puisque f conserve le barycentre, $f(D)$ est l'ensemble des barycentres de A' et B' . Donc :

- Si $A' = B'$, $f(D)$ est le singleton $\{A'\}$.
- Si $A' \neq B'$, $f(D)$ est la droite D' définie par les deux points A' et B' .
Donc **une application affine conserve l'alignement** (trois points alignés ont des images alignées ou confondues).

Dans les deux cas ($A' = B'$ ou $A' \neq B'$), la direction de $f(D)$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{v} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$ où λ décrit $\mathbb{R}$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \lambda \varphi(\overrightarrow{AB}) \\ \vec{v} &= \varphi(\lambda \overrightarrow{AB}).\end{aligned}$$

Quand λ décrit $\mathbb{R}$, $\lambda \overrightarrow{AB}$ décrit la direction $\vec{D}$ de D et $\vec{v}$ décrit $\varphi(\vec{D})$. Donc la **direction de $f(D)$ est $\varphi(\vec{D})$** .

Il en résulte que si deux droites ont même direction, leurs images ont même direction.

2. Nous allons maintenant traiter le cas d'un plan P de X . Soit A, B, C trois points non alignés de P . On a vu (cf. § 4.2 b)) que P est l'ensemble des barycentres de A, B et C . L'image de P par l'application affine f est donc l'ensemble des barycentres des points A', B', C' . Donc :

- Si $A' = B' = C'$, $f(P)$ est le singleton $\{A'\}$.
- Si A', B', C' sont alignés sur une droite D sans être tous confondus, $f(P)$ est égal à cette droite D .
- Si A', B', C' sont non alignés, $f(P)$ est le plan défini par les trois points A', B', C' .

Donc une **application affine conserve la coplanarité** (quatre points coplanaires ont des images coplanaires ou alignées ou confondues).

Dans les trois cas précédents, la direction de $f(P)$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{v} = \lambda \overrightarrow{A'B'} + \mu \overrightarrow{A'C'}$ où λ et μ décrivent $\mathbb{R}$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \lambda \varphi(\overrightarrow{AB}) + \mu \varphi(\overrightarrow{AC}) \\ \vec{v} &= \varphi(\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}).\end{aligned}$$

Quand λ et μ décrivent $\mathbb{R}$, $\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ décrit la direction $\vec{P}$ de P et $\vec{v}$ décrit $\varphi(\vec{P})$. Donc la **direction de $f(P)$ est $\varphi(\vec{P})$** .

Il en résulte que si deux plans ont même direction, leurs images ont même direction.

3. Si une droite D est parallèle à un plan P , on a $\vec{D} \subset \vec{P}$ par suite $\varphi(\vec{D}) \subset \varphi(\vec{P})$. Si l'image de D est une droite, alors $f(P)$ est une droite ou un plan et $f(D)$ est parallèle à $f(P)$.

On peut résumer les études faites dans les applications 1, 2 et 3 en disant : **une application affine conserve le parallélisme**.

b) Conservation de la convexité

Définition

Une partie C de X est dite **convexe** si et seulement si

$$(\forall (M, N) \in C^2) \quad [M, N] \subset C$$

Exemples

Un singleton, un segment, une demi-droite ouverte ou fermée, une droite, un demi-plan ouvert ou fermé, un disque, un plan, un demi-espace ouvert ou fermé, une boule ouverte ou fermée, l'espace E entier sont des parties convexes.

Soit C_1 et C_2 deux parties convexes de X . Quels que soient les points M et N de leur intersection, le segment $[M, N]$ est, par hypothèse, à la fois dans C_1 et dans C_2 , donc dans leur intersection. Nous venons de montrer :

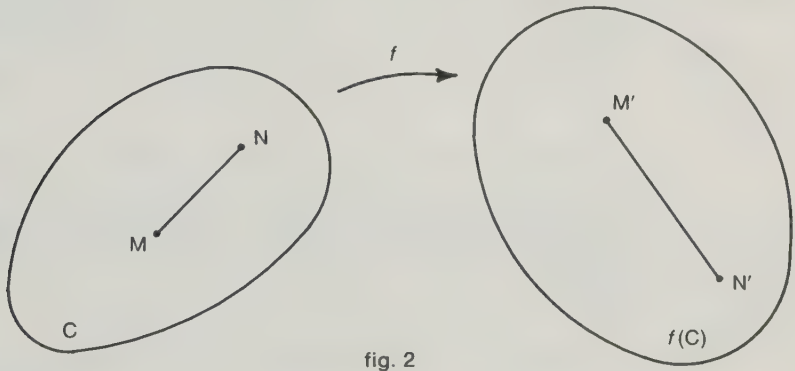
Théorème

L'intersection de deux parties convexes est convexe.

Notons que *la réunion de deux parties convexes n'est pas nécessairement convexe*. Par exemple, la réunion de deux singletons $\{A\}$ et $\{B\}$, avec $A \neq B$, n'est pas convexe.

Étudions maintenant l'image d'une partie convexe par une application affine f . Pour cela, étudions tout d'abord l'image d'un segment $[M, N]$.

On sait (cf. § 4.2 b) Remarque 2) que $[M, N]$ est l'ensemble des barycentres P de $((M, \alpha), (N, \beta))$ avec $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$. Puisque f conserve le barycentre, l'image de $[M, N]$ est l'ensemble des barycentres P' de $((M', \alpha), (N', \beta))$ avec $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ c'est-à-dire le segment $[M', N']$. Donc l'image d'un segment $[M, N]$ par une application affine est le segment $[M', N']$.



Soit alors C une partie convexe de X (fig. 2). Quels que soient les points M' et N' de $f(C)$, il existe M et N de C tels que $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$. On a :

$$[M, N] \subset C \quad \text{donc} \quad f([M, N]) \subset f(C) \quad \text{c'est-à-dire} \quad [M', N'] \subset f(C).$$

Énonçons :

Théorème

L'image d'une partie convexe par une application affine est convexe.

c) Applications affines injectives, surjectives, bijectives

Soit f une application affine de X dans X définie par

$$\overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM})$$

où φ est l'endomorphisme associé à f et $O' = f(O)$.

• Si f est injective, montrons que φ est injectif. Pour cela (cf. § 3.2 d)), montrons que $\text{Ker } \varphi = \{\vec{0}\}$. Choisissons $\overrightarrow{OM} = \vec{v} \in \text{Ker } \varphi$, on a alors :

$$\begin{aligned} \vec{v} \in \text{Ker } \varphi &\implies \varphi(\overrightarrow{OM}) = \vec{0} \implies \overrightarrow{O'M'} = \vec{0} \implies M' = O' \\ &\implies M = O \text{ (car } f \text{ est injective)} \\ &\implies \overrightarrow{OM} = \vec{0} \implies \vec{v} = \vec{0}. \end{aligned}$$

• Réciproquement si φ est injectif, montrons que f est injective. Pour cela, montrons que si $f(M) = f(N)$ alors $M = N$:

$$\begin{aligned} f(M) = f(N) &\implies \varphi(\overrightarrow{OM}) = \varphi(\overrightarrow{ON}) \implies \varphi(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = \vec{0} \\ &\implies \varphi(\overrightarrow{MN}) = \vec{0} \\ &\implies \overrightarrow{MN} = \vec{0} \text{ (car } \varphi \text{ est injectif)} \\ &\implies M = N. \end{aligned}$$

• Si f est surjective, montrons que φ est surjectif. Pour cela, montrons que tout vecteur $\vec{v}'$ de $\vec{X}$ est l'image par φ d'au moins un vecteur de $\vec{X}$. Choisissons $\overrightarrow{O'M'} = \vec{v}'$. Il existe au moins un point M d'image M' par f (puisque f est surjective). On a : $\vec{v}' = \overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM})$ donc $\vec{v}'$ est l'image de $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ par φ .

• Réciproquement si φ est surjectif, montrons que f est surjective. Pour cela, montrons que tout point M' de X est l'image par f d'au moins un point de X . Si l'on se donne M' , soit $\vec{v}' = \overrightarrow{O'M'}$, il existe $\vec{v}$ de $\vec{X}$ tel que $\vec{v}' = \varphi(\vec{v})$ (car φ est surjectif), soit M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$, on a $\overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM})$ donc M' est l'image de M .

• Comme $\vec{X}$ est un espace vectoriel de dimension finie et φ un endomorphisme de $\vec{X}$, on sait que l'on a :

$$\varphi \text{ injectif} \iff \varphi \text{ surjectif} \iff \varphi \text{ bijectif.}$$

En résumé :

Théorème

Soit f une application affine de X dans X et φ son endomorphisme associé. Les six propositions suivantes sont équivalentes :

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| (1) f est injective | (2) f est surjective | (3) f est bijective |
| (4) φ est injective | (5) φ est surjective | (6) φ est bijective. |

5.4 COMPOSITION DES APPLICATIONS AFFINES

a) Composée de deux applications affines

Soit f et g deux applications affines de X dans X d'endomorphismes associés φ et ψ . Montrons que $g \circ f$ est affine en utilisant le théorème 2 du § 5.1 b).

Soit M et N deux points quelconques de X . On a :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & X \\ M & \mapsto & M' & \mapsto & M'' \\ N & \mapsto & N' & \mapsto & N'' \end{array}$$

On sait que $\overrightarrow{M'N'} = \varphi(\overrightarrow{MN})$ et $\overrightarrow{M''N''} = \psi(\overrightarrow{M'N'})$.

D'où $(\forall (M, N) \in X^2) \quad \overrightarrow{M''N''} = \psi(\varphi(\overrightarrow{MN})) = (\psi \circ \varphi)(\overrightarrow{MN})$

ce qui montre que $g \circ f$ est une application affine d'endomorphisme associé $\psi \circ \varphi$. Donc :

Théorème

Soit f et g deux applications affines de X dans X , d'endomorphismes associés φ et ψ .

La composée $g \circ f$ est une application affine de X dans X d'endomorphisme associé $\psi \circ \varphi$.

b) Le groupe affine de X

On sait (cf. § 5.3 c)) qu'une application affine de X dans X est bijective si et seulement si son endomorphisme associé est bijectif. Une telle application affine est appelée une **bijection affine** de X ou encore une **transformation affine** de X (une transformation de X étant une bijection de X sur lui-même).

Soit E l'ensemble des bijections affines de X , muni de la composition des applications :

- la loi $\circ$ est *interne* dans E car quelles que soient les bijections affines f et g de X , d'endomorphismes associés φ et ψ , on vient de voir que l'application $g \circ f$ est une application affine de X dans X d'endomorphisme associé $\psi \circ \varphi$ et, comme φ et ψ sont bijectifs, $\psi \circ \varphi$ est bijectif donc $g \circ f$ est une bijection affine de X ;
- la composition des applications étant *associative*, elle l'est dans E ;
- l'*élément neutre* est id_X qui est une bijection affine de X ;
- soit f une bijection affine de X , d'endomorphisme associé φ . L'application f^{-1} est une bijection de X sur lui-même. Montrons que f^{-1} est une application affine. Soit M' et N' des points quelconques de X , ce sont les images par f de deux points M et N :

$$\overrightarrow{M'N'} = \varphi(\overrightarrow{MN}),$$

comme φ est bijectif,

$$\overrightarrow{MN} = \varphi^{-1}(\overrightarrow{M'N'}),$$

donc f^{-1} est une application affine d'endomorphisme associé φ^{-1} . Donc tout élément f de E admet un *symétrique* f^{-1} appartenant à E . Conclusion :

Théorème et définition

L'ensemble des bijections affines d'un espace affine X muni de la composition des applications, est un groupe.
Ce groupe est appelé le *groupe affine* de X .

Nous allons étudier quelques applications affines. Certaines ont été déjà vues en Seconde ou Première.

5.5 TRANSLATIONS ET HOMOTHÉTIES AFFINES

a) Translations affines

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur donné de $\vec{X}$. On appelle translation affine $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ l'application de X dans X qui à tout point M de X associe le point M' de X tel que

$$(1) \quad \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

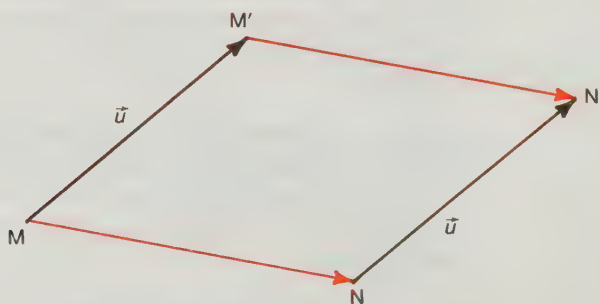


fig. 3

Quels que soient les couples de points homologues (M, M') et (N, N') , on a

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{NN'} = \vec{u}$$

d'où

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{MN} = \text{id}_{\vec{X}}(\overrightarrow{MN}).$$

Ce qui prouve que $t_{\vec{u}}$ est une application affine dont l'endomorphisme associé est $\text{id}_{\vec{X}}$.

Réciproquement, soit f une application affine dont l'endomorphisme associé est $\text{id}_{\vec{X}}$. Soit A un point fixé de X , M un point quelconque. On sait que

$$\overrightarrow{A'M'} = \text{id}_{\vec{X}}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}.$$

D'où $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.

f est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Nous avons prouvé :

Théorème

Soit f une application de X dans X . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est une translation affine.
2. f est affine et d'endomorphisme associé $\text{id}_{\vec{X}}$.
3. Quels que soient les points M et N d'images M' et N'

$$(2) \quad \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$$

■ Points invariants

M est invariant par $t_{\vec{u}}$ si et seulement si $t_{\vec{u}}(M) = M$, c'est-à-dire, d'après (1), si et seulement si $\overrightarrow{MM} = \vec{u}$.

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, il n'y a pas de point invariant.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$, $t_{\vec{0}}$ est l'identité de X et tous les points sont invariants.

■ Détermination analytique

Supposons $X = E$ (l'espace habituel) rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}(a, b, c)$. Le point $M(x, y, z)$ a pour image $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OM'} &= \overrightarrow{OM} + \vec{u} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c. \end{cases}$$

Réciproquement des formules du type précédent définissent une translation.

■ Le groupe des translations

Puisque $\text{id}_{\vec{X}}$ est un endomorphisme bijectif, toute translation est une bijection affine de X . Appelons $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations.

- La loi $\circ$ est *interne* dans $\mathcal{T}$. En effet, si $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ sont des translations, soit $M \in X$, $t_{\vec{u}}(M) = M'$, $t_{\vec{v}}(M') = M''$. On a $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$, d'où $\overrightarrow{MM''} = \vec{u} + \vec{v}$. Ceci prouve que $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}$.

Notons que $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u} + \vec{v}} = t_{\vec{v} + \vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$, ce qui prouve que la loi $\circ$ est *commutative*.

- La composition des applications étant *associative*, elle l'est dans $\mathcal{C}$.
- L'*élément neutre* est id_X qui est bien une translation : $\text{id}_X = t_{\vec{0}}$.
- Soit $t_{\vec{u}}$ une translation et M un point quelconque de X . On a $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, d'où $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$, ce qui prouve que $(t_{\vec{u}})^{-1}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$.
Nous avons finalement prouvé :

Théorème

L'ensemble $\mathcal{C}$ des translations muni de la composition des applications est un groupe commutatif. C'est un sous-groupe du groupe affine de X .

REMARQUE On sait que $(\vec{X}, +)$ est un groupe commutatif. L'application θ de $(\vec{X}, +)$ dans $(\mathcal{C}, \circ) : \vec{u} \mapsto t_{\vec{u}}$ est un *isomorphisme*, c'est-à-dire qu'elle est bijective et vérifie $\theta(\vec{u} + \vec{v}) = \theta(\vec{u}) \circ \theta(\vec{v})$ quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\vec{X}$.

b) Homothéties affines

Définition

Soit I un point donné de X et k un nombre réel donné *non nul*.
On appelle *homothétie affine* de centre I et de rapport k l'application de X dans X qui à tout point M de X associe le point M' de X tel que

$$(1) \quad \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$$

Nous noterons $H(I, k)$ cette homothétie.

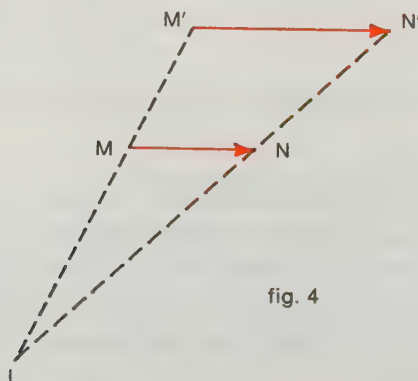


fig. 4

Quels que soient les couples de points homologues (M, M') et (N, N') , on a

$$\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IN'} = k\overrightarrow{IN}$$

d'où
$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'I} + \overrightarrow{IN'} = -k\overrightarrow{IM} + k\overrightarrow{IN} = k\overrightarrow{MN} = h_k(\overrightarrow{MN}),$$

en désignant par h_k l'homothétie vectorielle de rapport k . Ceci prouve que $H(I, k)$ est une application affine, d'endomorphisme associé h_k .

Réciproquement, soit f une application affine dont l'endomorphisme associé est l'homothétie vectorielle de rapport k (k réel non nul donné). Ce qui signifie :

$$(2) \quad (\forall (M, N) \in X^2) \quad \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}.$$

Soit (A, A') un couple de points homologues particuliers. Un point I de X est invariant si, et seulement si, en faisant dans (2) $M = M' = I$, $N = A$, $N' = A'$, on a

$$\overrightarrow{IA'} = k\overrightarrow{IA}$$

c'est-à-dire

$$k\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA'} = \vec{0}.$$

Si $k \neq 1$, cette égalité détermine un point I et un seul : le barycentre des points pondérés (A, k) et $(A', -1)$. En faisant dans (2), $N = N' = I$, on en déduit, pour tout point M de X

$$\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$$

donc f est l'homothétie $H(I, k)$.

Si $k = 1$, on a vu que f est une translation. Nous avons prouvé :

Théorème

Soit f une application de X dans X et k un réel différent de 0 et de 1. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1. f est une homothétie affine.**
- 2. f est affine et d'endomorphisme associé l'homothétie vectorielle de rapport k .**
- 3. Quels que soient les points M et N d'images M' et N'**

$$(2) \quad \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$$

■ Points invariants

M est invariant par $H(I, k)$ si, et seulement si $\overrightarrow{IM} = k\overrightarrow{IM}$, c'est-à-dire $(1 - k)\overrightarrow{IM} = \vec{0}$. Donc :

si $k \neq 1$, I est le seul point invariant;

si $k = 1$, $H(I, 1)$ est l'identité de X et tous les points sont invariants.

■ Détermination analytique

Supposons $X = E$ (vous raisonnerez, de même, si X est un plan ou une droite). Supposons E rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $I(x_0, y_0, z_0)$ un point

de E et $H(I, k)$ l'homothétie de centre $I(x_0, y_0, z_0)$ et de rapport k . Le point $M(x, y, z)$ a pour image $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IM'} &= k\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OI} &= k(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OI}) \\ \overrightarrow{OM'} &= k\overrightarrow{OM} + (1-k)\overrightarrow{OI}\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \\ z' = kz + (1-k)z_0 \end{cases}$$

$a = (1-k)x_0$, $b = (1-k)y_0$, $c = (1-k)z_0$ sont les coordonnées de l'image O' de O (faire $x = y = z = 0$ dans le système précédent). On peut aussi écrire :

$$\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \\ z' = kz + c. \end{cases}$$

Réciproquement des formules du type précédent définissent l'homothétie (si $k \neq 0$ et $k \neq 1$) de rapport k et de centre le point I de coordonnées

$$x_0 = \frac{a}{1-k}, \quad y_0 = \frac{b}{1-k}, \quad z_0 = \frac{c}{1-k}.$$

■ Le groupe des homothéties de centre donné

Puisque h_k est un endomorphisme bijectif pour tout réel k non nul, toute homothétie est une bijection affine de X . Appelons $\mathcal{H}_I$ l'ensemble des homothéties de centre I donné. On vérifie aisément les points suivants :

- la loi $\circ$ est *interne* dans $\mathcal{H}_I$, elle est *commutative* et *associative*;
- l'*élément neutre* est $\text{id}_X = H(I, 1)$;
- l'homothétie $H(I, k)$ a pour *symétrique* l'homothétie $H\left(I, \frac{1}{k}\right)$.

Théorème

L'ensemble $\mathcal{H}_I$ des homothéties de centre I muni de la composition des applications est un groupe commutatif. C'est un sous-groupe du groupe affine de X .

REMARQUE On sait que $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif. L'application θ_I de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(\mathcal{H}_I, \circ)$: $k \mapsto H(I, k)$ est un *isomorphisme*, c'est-à-dire qu'elle est bijective et vérifie $\theta_I(k'k) = \theta_I(k') \circ \theta_I(k)$ quels que soient k et k' dans $\mathbb{R}^*$.

■ Le groupe des homothéties et translations

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties. Nous allons prouver que $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ est un groupe pour la composition des applications. D'après les études faites précédemment, nous savons qu'une bijection affine est élément de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ si, et seulement si, son endomorphisme associé est une homothétie vectorielle h_k (h_1 est l'identité).

- la loi $\circ$ est *interne* dans $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$, en effet, si f et f' sont deux éléments de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$, d'endomorphismes associés h_k et $h_{k'}$, la bijection affine $f' \circ f$ a pour endomorphisme associé $h_{k'} \circ h_k = h_{k'k}$, c'est donc un élément de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$;
- la loi $\circ$ étant toujours *associative*, elle l'est donc dans $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$;
- l'*élément neutre* est id_X qui appartient bien à $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$;
- soit f un élément de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ d'endomorphisme associé h_k . La bijection affine f^{-1} a pour endomorphisme associé $h_k^{-1} = h_{\frac{1}{k}}$, c'est donc un élément de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$: tout élément de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ a un *symétrique* dans $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$.

Théorème

L'ensemble des homothéties et translations de X muni de la composition des applications est un groupe. C'est un sous-groupe du groupe affine de X .

EXERCICE RÉSOLU

Soit f_1 et f_2 deux éléments de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$. Déterminer les éléments caractérisant $f_2 \circ f_1$ connaissant les éléments caractérisant f_1 et f_2 .

1. Si $f_1 = t_{\vec{u}_1}$ et $f_2 = t_{\vec{u}_2}$, on a vu que $f_2 \circ f_1$ est la translation de vecteur $\vec{u}_2 + \vec{u}_1$.
2. Si $f_1 = H(I_1, k_1)$ et $f_2 = H(I_2, k_2)$ sont deux éléments de $\mathcal{H}$, $f_2 \circ f_1$ est un élément de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ d'homothétie vectorielle associée $h_{k_2} \circ h_{k_1} = h_{k_2 k_1}$.

a) si $k_2 k_1 = 1$, $f_2 \circ f_1$ est une translation. Le vecteur de cette translation est $\overrightarrow{AA''}$ où A est un point de X et $A'' = (f_2 \circ f_1)(A)$. Prenons $A = I_1$ (fig. 5). Soit $J = (f_2 \circ f_1)(I_1)$. Calculons le vecteur $\overrightarrow{I_1 J}$ de la translation à l'aide des données I_1, I_2, k_1, k_2 :

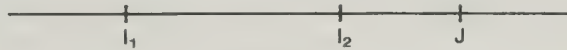


fig. 5

$$f_1(I_1) = I_1, \quad J = (f_2 \circ f_1)(I_1) = f_2(I_1)$$

donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{I_2 J} &= k_2 \overrightarrow{I_2 I_1} \\ \overrightarrow{I_1 J} &= \overrightarrow{I_2 J} - \overrightarrow{I_2 I_1} = k_2 \overrightarrow{I_2 I_1} - \overrightarrow{I_2 I_1} \\ \overrightarrow{I_1 J} &= (1 - k_2) \overrightarrow{I_1 I_2}. \end{aligned}$$

$f_2 \circ f_1$ est la translation de vecteur $(1 - k_2) \overrightarrow{I_1 I_2}$

b) si $k_2 k_1 \neq 1$, $f_2 \circ f_1$ est une homothétie de rapport $k_2 k_1$. Son centre est le point invariant I par $f_2 \circ f_1$ unique puisque $k_2 k_1 \neq 1$ (cf. § 5.5 b)) c'est-à-dire le point I tel que :

$$I \xrightarrow{f_1} I' \xrightarrow{f_2} I$$

$$\overrightarrow{I_1 I'} = k_1 \overrightarrow{I_1 I} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{I_2 I} = k_2 \overrightarrow{I_2 I'}.$$

Calculons $\overrightarrow{I_1 I}$ à l'aide des données I_1, I_2, k_1, k_2 (fig. 6) :



fig. 6

$$\begin{aligned}
\overline{I_1 I} &= \overline{I_1 I_2} + \overline{I_2 I} \\
&= \overline{I_1 I_2} + k_2 \overline{I_2 I'} \\
&= \overline{I_1 I_2} + k_2 (\overline{I_1 I'} - \overline{I_1 I_2}) \\
&= (1 - k_2) \overline{I_1 I_2} + k_2 k_1 \overline{I_1 I} \\
\overline{I_1 I} &= \frac{1 - k_2}{1 - k_2 k_1} \overline{I_1 I_2}.
\end{aligned}$$

3. Si $f_1 = t_{\vec{u}_1}$ et $f_2 = H(I_2, k_2)$, $f_2 \circ f_1$ est un élément de $\mathcal{H} \cup \mathcal{C}$ d'homothétie vectorielle associée $h_{k_2} \circ \text{id}_{\vec{X}} = h_{k_2}$.

a) Si $k_2 = 1$, $f_2 = \text{id}_{\vec{X}}$ et $f_2 \circ f_1 = t_{\vec{u}_1}$.

b) Si $k_2 \neq 1$, $f_2 \circ f_1$ est une homothétie de rapport k_2 . Son centre est le point invariant I par $f_2 \circ f_1$ unique puisque $k_2 k_1 = k_2 \neq 1$ (cf. § 5.5 b)) c'est-à-dire le point I tel que :

$$I \xrightarrow{t_{\vec{u}_1}} I' \xrightarrow{f_2} I$$

$$\overline{I I'} = \vec{u}_1 \quad \text{et} \quad \overline{I_2 I} = k_2 \overline{I_2 I'}.$$

Calculons $\overline{I_2 I}$ à l'aide des données $\vec{u}_1$, k_2 :

$$\overline{I_2 I} = k_2 \overline{I_2 I'} = k_2 (\overline{I_2 I} + \overline{I I'}) = k_2 (\overline{I_2 I} + \vec{u}_1)$$

d'où

$$\overline{I_2 I} = \frac{k_2}{1 - k_2} \vec{u}_1.$$

4. Si $f_1 = H(I_1, k_1)$ et $f_2 = t_{\vec{u}_2}$, $f_2 \circ f_1$ est un élément de $\mathcal{H} \cup \mathcal{C}$ d'homothétie vectorielle associée $\text{id}_{\vec{X}} \circ h_{k_1} = h_{k_1}$.

a) Si $k_1 = 1$, $f_1 = \text{id}_{\vec{X}}$ et $f_2 \circ f_1 = t_{\vec{u}_2}$.

b) Si $k_1 \neq 1$, $f_2 \circ f_1$ est une homothétie de rapport k_1 . Son centre est le point invariant I par $f_2 \circ f_1$ tel que :

$$I \xrightarrow{f_1} I' \xrightarrow{t_{\vec{u}_2}} I$$

$$\overline{I_1 I'} = k_1 \overline{I_1 I} \quad \text{et} \quad \overline{I I'} = \vec{u}_2.$$

Calculons $\overline{I_1 I}$ à l'aide des données k_1 , $\vec{u}_2$:

$$\overline{I_1 I} = \overline{I_1 I'} + \overline{I I'} = k_1 \overline{I_1 I} + \vec{u}_2$$

d'où

$$\overline{I_1 I} = \frac{1}{1 - k_1} \vec{u}_2.$$

5.6 PROJECTIONS AFFINES

Dans les paragraphes 5.6, 5.7, 5.8, Y désignera un point ou une droite ou un plan contenu dans X, ou encore X entier. Soit $\vec{Y}$ la direction de Y et $\vec{Z}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$ supplémentaire de $\vec{Y}$. Étant donné un point M de X, on appellera Z_M le point ou la droite ou le plan ou l'espace passant par M et de direction $\vec{Z}$. On sait que $Y \cap Z_M$ est un singleton. On peut donc donner la définition suivante :

a) Définitions. Propriétés

Définition

On appelle **projection affine** de X sur Y de direction $\vec{Z}$ (ou parallèlement à $\vec{Z}$) l'application de X dans X qui à tout point M de X associe le point d'intersection M' de Y avec Z_M . Le point M' est encore caractérisé par les deux conditions suivantes :

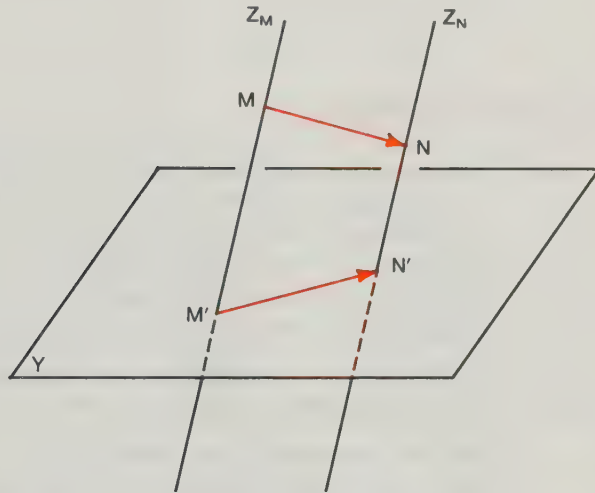
$$\begin{cases} M' \in Y \\ \overrightarrow{MM'} \in \vec{Z} \end{cases}$$

On dit que M' est le *projeté* de M sur Y parallèlement à $\vec{Z}$. Y s'appelle *base* de la projection.

Lorsque $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ sont orthogonaux, on dit que la projection est *orthogonale*.

La figure suivante est faite dans le cas où Y est un plan de l'espace X .

fig. 7



Propriétés

1. Soit p une projection affine. Quels que soient les couples de points homologues (M, M') et (N, N') , on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{N'N} \\ &= \overrightarrow{M'N'} + (\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{N'N}). \end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ appartient à $\vec{Y}$ et le vecteur $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{N'N}$ appartient à $\vec{Z}$. Les sous-espaces vectoriels $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ sont supplémentaires dans $\vec{X}$. Soit ϖ la projection vectorielle sur $\vec{Y}$ parallèlement à $\vec{Z}$. On a

$$\forall (M, N) \in X^2 \quad \overrightarrow{M'N'} = \varpi(\overrightarrow{MN})$$

ce qui prouve que p est affine d'endomorphisme associé ϖ .

2. Quel que soit M de X d'image $p(M) = M'$, on a

$$p^2(M) = p(M') = M'$$

donc quel que soit M dans X :

$$p^2(M) = p(M)$$

d'où

$$p^2 = p.$$

3. Un point M de X d'image $M' = p(M)$, est invariant si et seulement si $M = M'$ c'est-à-dire si, et seulement si M appartient à Y .

En résumé :

Théorème

1. La projection affine p de X sur Y parallèlement à $\vec{Z}$ est une application affine dont l'endomorphisme associé est la projection vectorielle de $\vec{X}$ sur $\vec{Y}$ parallèlement à $\vec{Z}$.
2. p est une application affine de X dans X vérifiant $p^2 = p$.
3. L'ensemble des points invariants par p est Y .

b) Étude d'une réciproque

La réciproque de la propriété 1 du théorème précédent est fausse, c'est-à-dire qu'une application affine de X dans X dont l'endomorphisme associé est une projection vectorielle n'est pas nécessairement une projection affine (cf. exercice 5.21 en fin de chapitre). Par contre, montrons qu'une application affine p de X dans X telle que $p^2 = p$ est une projection affine. Pour cela, cherchons les éléments Y et $\vec{Z}$ qui la caractérisent :

- Soit ϖ l'endomorphisme de $\vec{X}$ associé à p . Puisque $p^2 = p$, on a $\varpi^2 = \varpi$ (cf. 5.4 a)) donc ϖ est la projection sur $\vec{Y} = \text{Im } \varpi$ parallèlement à $\vec{Z} = \text{Ker } \varpi$.
- Soit maintenant A un point de X et $A' = p(A)$. Soit Y la droite, le plan ou l'espace passant par A' et de direction $\vec{Y}$. Appelons p' la projection affine sur Y parallèlement à $\vec{Z}$. L'endomorphisme associé à p' est ϖ . D'autre part, $p'(A') = A'$ car A' appartient à Y et $p(A') = p^2(A) = p(A) = A'$. Par suite p et p' sont deux applications affines transformant toutes deux A en A' et ayant même endomorphisme associé. On sait (cf. 5.2 a)) que cela implique $p = p'$. Concluons :

Théorème

Toute application affine p de X dans X vérifiant $p^2 = p$ est une projection affine.

Remarque pratique. La base de la projection p est l'ensemble de ses points invariants et sa direction est le noyau de ϖ .

c) Classification des diverses projections affines

Nous allons maintenant rassembler dans trois tableaux les différentes projections possibles suivant les dimensions de X et de Y .

Si X est la droite :

$Y = X$	$\vec{Z} = \{\vec{0}\}$	$p = \text{id}_X$
$Y = \{A\}$	$\vec{Z} = \vec{X}$	p est l'application constante : $M \mapsto A$

Si X est le plan :

$Y = X$	$\vec{Z} = \{\vec{0}\}$	$p = \text{id}_X$
Y est une droite D	$\vec{Z}$ est une droite vectorielle ($\vec{Z} \neq \vec{D}$)	p est la projection de X sur D parallèlement à $\vec{Z}$
$Y = \{A\}$	$\vec{Z} = \vec{X}$	p est l'application constante $M \mapsto A$

Si X est l'espace :

$Y = X$	$\vec{Z} = \{\vec{0}\}$	$p = \text{id}_X$
Y est un plan P	$\vec{Z}$ est une droite vectorielle ($\vec{Z} \not\subset \vec{P}$)	p est la projection de X sur P parallèlement à $\vec{Z}$
Y est une droite D	$\vec{Z}$ est un plan vectoriel ($\vec{D} \not\subset \vec{Z}$)	p est la projection de X sur D parallèlement à $\vec{Z}$
$Y = \{A\}$	$\vec{Z} = \vec{X}$	p est l'application constante $M \mapsto A$

EXERCICE RÉSOLU

On considère l'espace E rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit f l'application de E dans E qui associe à tout point $M(x, y, z)$ de E le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$(1) \begin{cases} x' = -2y + z - 1 \\ y' = -x - y + z - 1 \\ z' = -2x - 4y + 3z - 2. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une projection affine et donner les éléments qui la caractérisent.
2. Trouver l'image de la droite de E d'équations :

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{4}.$$

3. Trouver l'image du plan Q de E d'équation :

$$x + y - z + 5 = 0.$$

1. • Soit O' le point de coordonnées $-1, -1$ et 2. Soit φ l'endomorphisme de $\vec{E}$ dont la matrice, par rapport à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Le système (1) équivaut à :

$$\overrightarrow{OM'} = \varphi(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{OO'}$$

ce qui prouve que f est l'application affine telle que $O' = f(O)$ et d'endomorphisme associé φ .

• Montrons que $f^2 = f$. Quel que soit $M(x, y, z)$, $f^2(M) = f(M')$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x'' = -2y' + z' - 1 \\ y'' = -x' - y' + z' - 1 \\ z'' = -2x' - 4y' + 3z' - 2. \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} x'' = -2(-x - y + z - 1) + (-2x - 4y + 3z - 2) - 1 = -2y + z - 1 \\ y'' = -(-2y + z - 1) - (-x - y + z - 1) + (-2x - 4y + 3z - 2) - 1 \\ \quad = -x - y + z - 1 \\ z'' = -2(-2y + z - 1) - 4(-x - y + z - 1) + 3(-2x - 4y + 3z - 2) - 2 \\ \quad = -2x - 4y + 3z - 2. \end{cases}$$

Donc, pour tout M de E , on a $f^2(M) = M$. Par suite $f^2 = f$. L'application f de E dans E est une application affine telle que $f^2 = f$: c'est une projection affine.

• L'ensemble des points invariants par f est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que

$$\begin{cases} x = -2y + z - 1 \\ y = -x - y + z - 1 \\ z = -2x - 4y + 3z - 2 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x + 4y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

l'ensemble des points invariants par f est le plan P d'équation cartésienne :

$$x + 2y - z + 1 = 0.$$

• La direction de la projection affine f est $\text{Ker } \varphi$ (direction de la projection vectorielle φ) c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $\vec{v}(x, y, z)$ tels que

$$\begin{cases} -2y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ -2x - 4y + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = y = \frac{z}{2}.$$

La direction de la projection affine f est la droite vectorielle $\vec{D}$ de $\vec{E}$ de vecteur directeur $\vec{u}(1, 1, 2)$.

L'application f est la projection de E sur P , de direction $\vec{D}$.

2. La droite L d'équations $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{4}$ passe par le point $A(1, 0, 3)$ et elle a pour vecteur directeur $\vec{w}(-1, 2, 4)$.

Le point $A' = f(A)$ a pour coordonnées $(2, 1, 5)$, elles sont obtenues en faisant $x = 1$, $y = 0$, $z = 3$ dans (1).

Le vecteur $\varphi(\vec{w})$ a pour composantes $(0, 3, 6)$, elles sont obtenues à partir de la matrice de φ écrite dans la première question.

$f(L)$ est donc la droite passant par A' et dirigée par $\varphi(\vec{w})$. Un vecteur directeur plus simple de $f(L)$ est le vecteur de coordonnées $(0, 1, 2)$. La droite $f(L)$ admet pour équations :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y - 1 = \frac{z - 5}{2}. \end{cases}$$

3. Le plan Q contient le point $B(-5, 0, 0)$, une base de sa direction $\vec{Q}$ est formée par les deux vecteurs $\vec{u}(1, 1, 2)$ et $\vec{v}(0, 1, 1)$.

Le point $B' = f(B)$ a pour coordonnées $(-1, 4, 8)$.

D'autre part, $\varphi(\vec{Q})$ est engendrée par $\varphi(\vec{u}) = \vec{0}$ et $\varphi(\vec{v})$ qui a pour composantes $(-1, 0, -1)$, $\varphi(\vec{Q})$ est donc une droite vectorielle.

Finalement, $f(Q)$ est donc la droite passant par B' et dirigée par $\varphi(\vec{v})$. Elle a pour équations :

$$\begin{cases} \frac{x+1}{-1} = \frac{z-8}{-1} \\ y-4=0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x-z+9=0 \\ y-4=0. \end{cases}$$

5.7 SYMÉTRIES AFFINES

a) Définition. Propriétés

Les notations sont les mêmes qu'au paragraphe précédent.

Définition

On appelle **symétrie affine par rapport à Y de direction $\vec{Z}$** (ou **parallèlement à $\vec{Z}$**), l'application de X dans X qui à tout point M associe le point M' tel que $I = p(M)$ soit le milieu du bipoint (M, M') .

On dit que M' est le *symétrique* de M par rapport à Y parallèlement à $\vec{Z}$. Si Y est une droite, Y s'appelle l'*axe* de la symétrie. Dans le cas général Y est appelé *base* de la symétrie.

Si $Y = \{A\}$ et $\vec{Z} = \vec{X}$, la symétrie est appelée **symétrie centrale de centre A** ou encore **symétrie par rapport au point A** . C'est aussi l'homothétie de centre A et de rapport -1 .

Si $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ sont orthogonaux, on dit que la symétrie est *orthogonale*.

Si Y est une droite et $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ orthogonaux, la symétrie est dite **axiale**.

La figure suivante est faite dans le cas où Y est une droite et X l'espace.

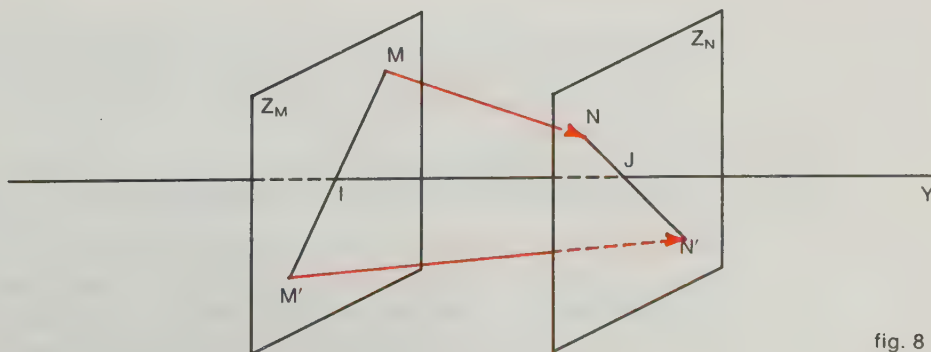


fig. 8

Propriétés

1. Soit s une symétrie affine. Montrons que s est une application affine et cherchons l'endomorphisme associé. Quels que soient les couples de points homologues (M, M') et (N, N') de milieux respectifs $I = p(M)$ et $J = p(N)$, (cf. fig. 8) on a :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JN} = \overrightarrow{IJ} + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JN})$$

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'I} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JN'} = \overrightarrow{IJ} - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JN}).$$

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ appartient à $\vec{Y}$ et le vecteur $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JN}$ appartient à $\vec{Z}$. Les sous-espaces $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ sont supplémentaires dans $\vec{X}$. Soit σ la symétrie vectorielle par rapport à $\vec{Y}$ parallèlement à $\vec{Z}$. On a

$$(\forall (M, N) \in X^2) \quad \overrightarrow{M'N'} = \sigma(\overrightarrow{MN})$$

ce qui prouve que s est affine d'endomorphisme associé σ .

2. Quel que soit M dans X , d'image $s(M) = M'$, on a :

$$s^2(M) = s(M') = M$$

donc $s^2 = \text{id}_X$ et s est une application affine involutive (ou involution affine) de X .

Il en résulte, en particulier, que s est une bijection affine ($s^{-1} = s$).

3. Un point M de X d'image $s(M) = M'$ est invariant si et seulement si $M = M'$ c'est-à-dire $M = p(M)$, ce qui équivaut à $M \in Y$.

En résumé

Théorème

1. La symétrie affine s par rapport à Y parallèlement à $\vec{Z}$ est une application affine dont l'endomorphisme associé est la symétrie vectorielle par rapport à $\vec{Y}$ parallèlement à $\vec{Z}$.
2. s est une application affine involutive de X , donc une bijection affine.
3. L'ensemble des points invariants par s est Y .

b) Étude d'une réciproque

La réciproque de la propriété 1 du théorème précédent est fausse, c'est-à-dire qu'une application affine de X dans X dont l'endomorphisme associé est une symétrie vectorielle n'est pas nécessairement une symétrie de X (cf. ex. 5.26 en fin de chapitre).

Par contre, montrons qu'une application affine involutive s de X est une symétrie de X . Pour cela, cherchons les éléments Y et $\vec{Z}$ qui la caractérisent :

• Soit σ l'endomorphisme de $\vec{X}$ associé à s . Puisque $s^2 = \text{id}_X$, on a $\sigma^2 = \text{id}_{\vec{X}}$ donc σ est la symétrie vectorielle par rapport à un sous-espace $\vec{Y}$ parallèlement à un sous-espace $\vec{Z}$, $\vec{Y}$ étant l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ tels que $\sigma(\vec{v}) = \vec{v}$ et $\vec{Z}$ étant l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ tels que $\sigma(\vec{v}) = -\vec{v}$.

• Soit A un point de X et $A' = s(A)$. Le milieu I de (A, A') est invariant par s . En effet $I = \text{Bar}((A, 1), (A', 1))$ entraîne (cf. § 5.3 a)) $s(I) = \text{Bar}((s(A), 1), (s(A'), 1))$ or $s(A) = A'$ et $s(A') = s^2(A) = A$. On a donc $s(I) = I$.

Soit maintenant Y le point, la droite, le plan ou l'espace passant par I et dirigée par $\vec{Y}$. Soit s' la symétrie affine par rapport à Y parallèlement à $\vec{Z}$. s et s' sont deux applications affines transformant toutes deux A en A' et ayant même endomorphisme associé : σ . On sait (cf. § 5.2 a)) que cela implique $s = s'$.

Concluons :

Théorème

Toute application affine involutive de X est une symétrie affine.

c) Classification des diverses symétries affines

Nous allons maintenant rassembler dans trois tableaux les différentes symétries possibles suivant les dimensions de X et de Y .

Si X est la droite

$Y = X$	$\vec{Z} = \{\vec{0}\}$	$s = \text{id}_X$
$Y = \{A\}$	$\vec{Z} = \vec{X}$	s est la symétrie par rapport à A .

Si X est le plan

$Y = X$	$\vec{Z} = \{\vec{0}\}$	$s = \text{id}_X$
Y est une droite D	$\vec{Z}$ est une droite vectorielle ($\vec{Z} \neq \vec{D}$)	s est la symétrie par rapport à D parallèlement à $\vec{Z}$.
$Y = \{A\}$	$\vec{Z} = \vec{X}$	s est la symétrie par rapport à A .

Si X est l'espace

$Y = X$	$\vec{Z} = \{\vec{0}\}$	$s = \text{id}_X$
Y est un plan P	$\vec{Z}$ est une droite vectorielle ($\vec{Z} \not\subset \vec{P}$)	s est la symétrie par rapport à P parallèlement à $\vec{Z}$
Y est une droite D	$\vec{Z}$ est un plan vectoriel ($\vec{D} \not\subset \vec{Z}$)	s est la symétrie par rapport à D parallèlement à $\vec{Z}$
$Y = \{A\}$	$\vec{Z} = \vec{X}$	s est la symétrie par rapport à A.

d) Exercices résolus

EXERCICE 1 On considère l'espace E rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit D la droite de E de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

et $\vec{Z}$ le plan vectoriel d'équation $x + y + 2z = 0$. Calculer les coordonnées (x', y', z') de M' image de $M(x, y, z)$ dans la symétrie par rapport à D parallèlement à $\vec{Z}$. Le milieu I de (M, M') a pour coordonnées :

$$\frac{x + x'}{2}, \quad \frac{y + y'}{2}, \quad \frac{z + z'}{2}$$

I appartient à D si et seulement s'il existe un réel λ tel que :

$$\begin{cases} \frac{x + x'}{2} = 1 + \lambda \\ \frac{y + y'}{2} = 3 - 2\lambda \\ \frac{z + z'}{2} = -\lambda \end{cases} \quad \text{soit (1)} \quad \begin{cases} x' = -x + 2 + 2\lambda \\ y' = -y + 6 - 4\lambda \\ z' = -z - 2\lambda. \end{cases}$$

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x' - x = -x + 2 + 2\lambda - x = -2x + 2 + 2\lambda \\ y' - y = -y + 6 - 4\lambda - y = -2y + 6 - 4\lambda \\ z' - z = -z - 2\lambda - z = -2z - 2\lambda. \end{cases}$$

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartient à $\vec{Z}$ si et seulement si :

$$(-2x + 2 + 2\lambda) + (-2y + 6 - 4\lambda) + 2(-2z - 2\lambda) = 0$$

après réduction :

$$\lambda = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{4}{3}.$$

En portant cette valeur de λ dans (1) on déduit :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-5x - 2y - 4z + 14) \\ y' = \frac{1}{3}(4x + y + 8z + 2) \\ z' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z - 8). \end{cases}$$

EXERCICE 2 Dans un plan P , on considère les quatre sommets A, B, C, D d'un parallélogramme. Étudier l'ensemble G des applications affines f du plan laissant globalement invariant l'ensemble $\{A, B, C, D\}$. (C'est-à-dire telles que $\{A, B, C, D\} = f(\{A, B, C, D\})$.)

• De telles applications sont *bijectives*. En effet, soit φ l'endomorphisme associé à l'un des éléments f de E . Puisque l'image par f de $\{A, B, C, D\}$ est $\{A, B, C, D\}$, l'image par φ de la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de $\vec{P}$ est une base de $\vec{P}$ donc φ est bijective et (cf. § 5.3 c)) f est bijective.

• L'ensemble G est un groupe pour la composition des applications :

★ la composition des applications est une *loi interne* de G , *associative*;

★ l'identité de P est *élément neutre* de G ;

★ si $f \in G$, f^{-1} laisse globalement invariant $\{A, B, C, D\}$, donc appartient aussi à G : tout élément de G a un *symétrique* dans G .

• L'isobarycentre O de A, B, C, D , c'est-à-dire le point de concours des diagonales du parallélogramme $ABCD$ est invariant par tout élément f de G .

En effet, on sait qu'une application affine conserve le barycentre, donc :

$$f(O) = \text{Bar}((f(A), 1), (f(B), 1), (f(C), 1), (f(D), 1))).$$

Comme $\{f(A), f(B), f(C), f(D)\} = \{A, B, C, D\}$, $f(O)$ est aussi l'isobarycentre de A, B, C, D . On a donc $f(O) = O$.

• Il ne reste plus qu'à déterminer les endomorphismes φ associés aux éléments f de G . Considérons le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ (fig. 9). L'endomorphisme φ cherché laisse globalement invariant $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\}$. Envisageons les divers cas :

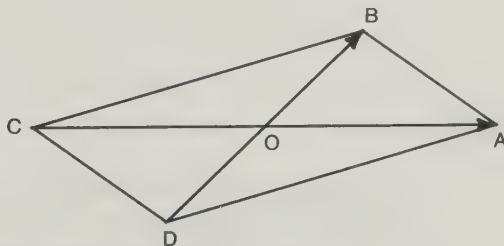


fig. 9

★ si $\varphi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA}$, on ne peut avoir $\varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA}$ car φ est bijective ($\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne peuvent avoir la même image $\overrightarrow{OA}$). On ne peut avoir $\varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OC}$ car on aurait $\varphi(-\overrightarrow{OB}) = -\overrightarrow{OC}$ c'est-à-dire $\varphi(\overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ auraient la même image $\overrightarrow{OA}$. On a donc *nécessairement* $\varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB}$ ou $\varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OD}$ et les matrices possibles de φ sont :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Appelons f_0 et f_1 les applications affines associées à M_0 et M_1 . Elles répondent à la question : elles laissent bien invariant $\{A, B, C, D\}$ globalement. $f_0 = \text{id}_P$ et f_1 est la symétrie par rapport à (OA) parallèlement à $\overrightarrow{OB}$.

★ si $\varphi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB}$, on verra que nécessairement $\varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA}$ ou $\varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OC}$, f_2 et f_3 ont pour matrices associées :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

f_2 est la symétrie par rapport à la droite passant par les milieux de (A, B) et (C, D) parallèlement à $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BA}$.

f_3 n'est pas une symétrie car elle n'est pas involutive.

★ si $\varphi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OC}$, on verra que $\varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB}$ ou $\varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OD}$

$$M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

f_4 est la symétrie par rapport à (OB) parallèlement à $\overrightarrow{OA}$.

f_5 est la symétrie par rapport à O.

★ si $\varphi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OD}$, on verra que $\varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB}$ ou $\varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OD}$

$$M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

f_6 n'est pas une symétrie car elle n'est pas involutive.

f_7 est la symétrie par rapport à la droite passant par les milieux de (A, D) et (B, C) parallèlement à $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CB}$.

L'ensemble cherché est :

$$G = \{\text{id}_P, f_1, \dots, f_7\}.$$

REMARQUES 1. f_3 et f_6 ne sont pas des symétries mais on peut remarquer que :

$$f_3^2 = f_6^2 = f_5 \quad \text{et} \quad f_3^4 = f_6^4 = \text{id}_P.$$

2. D'une façon générale, l'ensemble des bijections affines laissant globalement invariante une partie F de X est un groupe (sous-groupe du groupe affine de X). Si F est une partie finie, l'isobarycentre des points de F est un point invariant par tous les éléments de ce groupe.

5.8 AFFINITÉS

Les notations sont les mêmes que dans les deux paragraphes précédents. Les projections, les symétries et les homothéties affines sont des cas particuliers d'applications affines que nous allons définir.

Définition

Soit k un réel donné.

On appelle **affinité par rapport à Y de direction $\vec{Z}$ (ou parallèlement à $\vec{Z}$) et de rapport k** l'application de X dans X qui à tout point M associe le point M' tel que

$$\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$$

où $I = p(M)$.

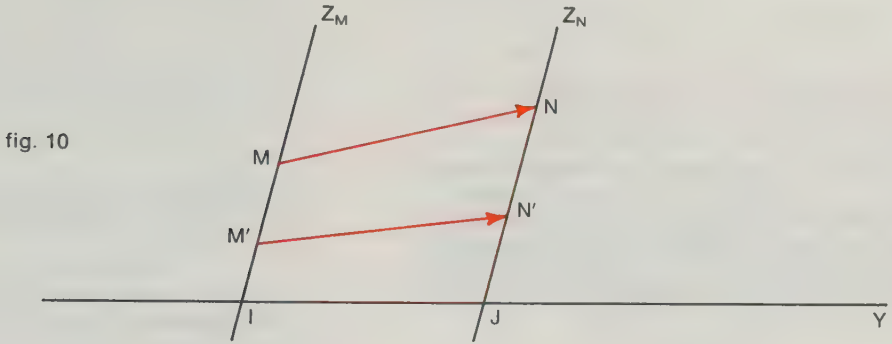
Si Y est une droite, Y s'appelle l'*axe* d'affinité. Dans le cas général, Y est la *base* de l'affinité. Si $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ sont orthogonaux, on dit que l'affinité est *orthogonale*.

Si $k = 0$, on retrouve la projection de X sur Y parallèlement à $\vec{Z}$.

Si $k = -1$, on retrouve la symétrie par rapport à Y parallèlement à $\vec{Z}$.

Si $k \neq 0$ et $Y = \{A\}$, on retrouve l'homothétie de centre A et de rapport k .

La figure suivante est faite dans le cas où Y est une droite et X le plan.



Propriétés

1. Soit f une affinité quelconque. Montrons que f est une application affine et cherchons l'endomorphisme associé. Soit (M, M') et (N, N') deux couples quelconques de points homologues. Cherchons une relation entre $\overrightarrow{M'N'}$ et $\overrightarrow{MN}$. Soit I et J les projetés respectifs de M et N sur Y parallèlement à $\vec{Z}$ (fig. 10). On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{M'I} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JN'} \\ &= k\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} + k\overrightarrow{JN} \\ &= \overrightarrow{IJ} + k(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JN})\end{aligned}$$

or

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JN}$$

donc

$$\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JN} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{IJ}$$

d'où

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{IJ} + k(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{IJ}) \\ &= (1-k)\overrightarrow{IJ} + k\overrightarrow{MN} \\ &= (1-k)\varpi(\overrightarrow{MN}) + k\overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

l'application φ de $\vec{X}$ dans $\vec{X} : \vec{v} \mapsto (1-k)\varpi(\vec{v}) + k\vec{v}$ est linéaire car quels que soient λ et μ de $\mathbb{R}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{X}$:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= (1-k)\varpi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) + k(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \\ &= (1-k)[\lambda\varpi(\vec{u}) + \mu\varpi(\vec{v})] + k(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \\ &= \lambda[(1-k)\varpi(\vec{u}) + k\vec{u}] + \mu[(1-k)\varpi(\vec{v}) + k\vec{v}] \\ &= \lambda\varphi(\vec{u}) + \mu\varphi(\vec{v}).\end{aligned}$$

Donc f est une application affine d'endomorphisme associé φ .

2. M est invariant par f si, et seulement si, $\overrightarrow{IM} = k\overrightarrow{IM}$, c'est-à-dire $(1-k)\overrightarrow{IM} = \vec{0}$. Donc :

Si $k \neq 1$, M est invariant si et seulement si M appartient à Y .

Si $k = 1$, tous les points de X sont invariants : $f = \text{id}_X$.

3. Une affinité de rapport k est bijective si et seulement si $k \neq 0$. L'application réciproque est l'affinité de même base, de même direction et de

rapport $\frac{1}{k}$. On peut d'ailleurs prouver que l'ensemble des affinités de base et de direction données et de rapport non nul, muni de la composition des applications, forme un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Exercices

Applications affines (détermination, exemples, propriétés)

5.1 Soit P un plan rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et associé à un espace vectoriel $\vec{P}$ rapporté à la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Calculer les coordonnées x', y' du point M' image de $M(x, y)$ par l'application affine f qui associe à $A(1, 2)$ le point $A'(-1, 3)$ et qui a pour endomorphisme associé φ de matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

5.2 Soit, dans un plan P rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points :

$$\begin{array}{lll} A(1, 1), & B(0, 2), & C(-1, 2) \\ A'(3, 4), & B'(1, -1), & C'(0, 3). \end{array}$$

1. Montrer qu'il existe une application affine f unique de P dans P telle que

$$f(A) = A', \quad f(B) = B', \quad f(C) = C'.$$

2. Calculer les coordonnées x', y' du point M' image de $M(x, y)$ par l'application affine f .

5.3 Soit, dans l'espace E rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points :

$$\begin{array}{ll} A(1, 0, 0), & B(0, 1, 0), \\ C(0, 0, 1), & D(1, 1, 1) \\ A'(0, 2, 1), & B'(-1, 0, 0), \\ C'(0, -1, -1), & D'(2, 0, 3). \end{array}$$

1. Montrer qu'il existe une application affine f unique de E dans E telle que

$$f(A) = A', \quad f(B) = B', \quad f(C) = C', \quad f(D) = D'.$$

2. Calculer les coordonnées x', y', z' du point M' image de $M(x, y, z)$ par l'application affine f .

5.4 1. Soit A, B, C trois points non alignés du plan P et A', B', C' trois points quelconques de P . Montrer que l'unique application affine f telle que $f(A) = A', f(B) = B'$ et $f(C) = C'$ est bijective si et seulement si A', B', C' sont non alignés. Dans le cas contraire, quel est l'ensemble $f(P)$?

2. Démontrer qu'une application affine du plan P dans lui-même ayant trois points invariants non alignés est égale à l'identité de P .

3. Soit A, B, C trois points distincts alignés du plan P , A', B', C' trois points quelconques de P . A quelle condition nécessaire et suffisante (sur A', B', C') existe-t-il une application affine f telle que

$$f(A) = A', \quad f(B) = B', \quad f(C) = C'?$$

4. Énoncer et démontrer des propriétés analogues aux précédentes dans l'espace.

5.5 Montrer qu'une application de l'espace E dans lui-même qui conserve le barycentre est affine en utilisant la détermination d'une application affine par les images de quatre points non coplanaires.

5.6 Soit f une application affine de X dans X , A un point de X . Montrer qu'il existe un couple unique (t, g) tel que

$$\begin{cases} \bullet f = t \circ g \\ \bullet t \text{ est une translation affine} \\ \bullet g \text{ est une application affine ayant } A \text{ comme point invariant.} \end{cases}$$

5.7 Soit P un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et f l'application de P dans P transformant le point $M(x, y)$ en le point $M'(x', y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une application affine bijective.

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que O, M, M' soient alignés.

3. Soit D une droite du plan. Dans quels cas D et $f(D)$ sont-elles parallèles? confondues?

5.8 Soit P un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\vec{P}$ l'espace vectoriel associé. On appelle f l'application affine de P dans P telle que :

$$f(A) = A_1 \quad \text{avec} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et l'application linéaire φ associée à f a pour matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point quelconque de P , $M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ son image par f et $M_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ l'image de M_1 par f .

1. Établir les relations

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + 2 \\ y_1 = 3x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

2. a) Montrer que f est bijective.

b) Soit D une droite quelconque de P , $f(D)$ la droite transformée de D par f . D et $f(D)$ peuvent-elles être parallèles?

c) En déduire que pour tout point M de P tel que $f(M) \neq M$, les points M, M_1, M_2 ne sont pas alignés.

3. Calculer les coordonnées x' et y' du barycentre G des points M, M_1, M_2 affectés d'un même coefficient non nul (G est l'isobarycentre des points M, M_1, M_2).

Vérifier que G est indépendant de M et montrer que G est le seul point invariant par f . En déduire que $f^3 = f \circ f \circ f$ est l'application identique de P c'est-à-dire $f^3 = \text{id}_P$.

5.9 Un plan affine P est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la courbe H d'équation : $x^2 - 2y^2 = 1$. On appelle E l'ensemble des applications affines F de P dans P telles que $F(O) = O$ et $F(H) = H$ cette dernière condition exprimant que la courbe H est globalement invariante par F . On appelle f l'application linéaire associée à F de matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

A. 1. a) Quelle peut-être, par une application affine non bijective, l'image du plan P ? En déduire que tout élément de E est une bijection.

b) Montrer que $(E, \circ)$ est un groupe.

2. Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tels que $M' = F(M)$. On aura

$$\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy. \end{cases}$$

Écrire l'équation de $F^{-1}(H)$ en fonction de (a, b, c, d) . En déduire que

$$F^{-1}(H) = H \iff \begin{cases} a^2 - 2b^2 = 1 \\ c^2 - 2d^2 = -2 \\ ac - 2bd = 0 \end{cases}$$

On pourra utiliser pour cela les points $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, points qui appartiennent à la courbe H .

3. En déduire que F est élément de E si et seulement si la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & 2\epsilon b \\ b & \epsilon a \end{pmatrix}$ avec $\epsilon \in \{-1, +1\}$ et $a^2 - 2b^2 = 1$.

B. Soit E' le sous-ensemble des applications F de E telles que $\epsilon = +1$.

1. Montrer que E' est stable pour $\circ$.

2. Soit L l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$x^2 - 2y^2 = 1 \quad \text{avec} \quad (x, y) \in \mathbb{N}^2.$$

Vérifier que $M_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiennent à L .

Soit F_1 l'application affine de E' telle que $a = 3$ et $b = 2$. On considère la suite des points $M_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$, telle que :

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0, \quad M_{n+1} = F_1(M_n).$$

Montrer que $M_n = F_1^n(M_0)$ où $F_1^2 = F_1 \circ F_1$ et $F_1^n = F_1^{n-1} \circ F_1$. Vérifier que M_n est un élément de L . Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont croissantes strictement.

3. Établir par récurrence que :

$$\begin{aligned} (3 + 2\sqrt{2})^n &= x_n + y_n \sqrt{2} \\ (3 - 2\sqrt{2})^n &= x_n - y_n \sqrt{2}, \end{aligned}$$

quel que soit n élément de $\mathbb{N}$. En déduire x_n et y_n en fonction de n .

4. On appelle T l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de H pour lesquels x et y appartiennent à $\mathbb{R}_+$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, on appelle A_n l'ensemble défini par :

$$A_n = \{M \mid M \in T, x_n \leq x < x_{n+1}\}.$$

Montrer que A_{n+1} est l'image par F_1 de A_n . En déduire que :

$$M \in A_n \implies (F_1^{-1})^n(M) \in A_0.$$

Montrer que :

$$M \in L \cap A_{n+1} \implies F_1^{-1}(M) \in L.$$

En déduire que tout point de L est un élément de la suite (M_n) . (On supposera connu le fait que l'équation $3 = 2y^2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.)

5.10 Soit E l'espace rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{E}$ l'espace vectoriel associé à E et rapporté à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f de E dans E qui associe à tout point $M(x, y, z)$ le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x - y + 2 \\ z' = y + z - 3. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une application affine. Montrer que f est bijective.

2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

3. Soit P le plan d'équation

$$ax + by + cz + d = 0 \quad ((a, b, c) \neq (0, 0, 0)).$$

Déterminer $P' = f(P)$.

4. Déterminer les plans P invariants par f (c'est-à-dire tels que $f(P) = P$).

5. Soit la droite D de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3\lambda. \end{cases}$$

Trouver une représentation paramétrique de $f(D)$.

5.11 **1.** On considère n points $A_1, \dots, A_n$ de X (X est une droite, un plan ou l'espace). Soit C l'ensemble des barycentres de $A_1, \dots, A_n$ affectés de coefficients positifs ou nuls (non tous nuls). Montrer que C est une partie convexe contenant $A_1, \dots, A_n$ et que toute partie convexe contenant $A_1, \dots, A_n$, contient également C . On appelle C l'enveloppe convexe de $A_1, \dots, A_n$.

2. Exemples

a) Quelle est l'enveloppe convexe de deux points A_1, A_2 ?

b) Montrer que l'enveloppe convexe de trois points non alignés A_1, A_2, A_3 du plan P est l'intersection du demi-plan limité à (A_1A_2) et contenant A_3 et des deux autres demi-plans analogues.

3. Montrer que si C est l'enveloppe convexe de $A_1, \dots, A_n$ et si f est une application affine de X dans X , alors $f(C)$ est l'enveloppe convexe de $f(A_1), \dots, f(A_n)$.

5.12 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe si, et seulement si :

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1] \\ f(\lambda x + (1 - \lambda)x') \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x').$$

Soit Γ le graphe de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan P .

1. Interpréter géométriquement la définition précédente.

2. Montrer

$$f \text{ convexe} \iff \{M(x, y); y \geq f(x)\} \text{ est convexe.}$$

3. Montrer que les fonctions suivantes sont convexes :

$$x \longrightarrow ax + b; \quad x \longmapsto x^2.$$

Translations - Homothéties

5.13 Un triangle ABC est tel que A et B sont fixes et C décrit une droite ou un cercle. Quels sont les ensembles décrits par

1. le milieu A' de (B, C)
2. le milieu B' de (A, C)
3. le centre de gravité G du triangle ABC.

5.14 1. Un parallélogramme ABCD est tel que A et B sont fixes et C décrit une droite D₁. Quels sont les ensembles décrits par

- a) le quatrième sommet D
- b) le centre du parallélogramme.

2. Construire un parallélogramme ABCD sachant que les sommets A et B sont donnés et que les sommets C et D appartiennent respectivement à deux droites données D₁ et D₂ d'un plan contenant A et B.

5.15 Soit P un plan rapporté à un repère cartésien (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), $\vec{P}$ le plan vectoriel associé à P et rapporté à la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$). On donne les droites D et D' d'équations respectives :

$$x + y - 1 = 0, \quad x + y + 2 = 0.$$

1. Existe-t-il des translations $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}(\lambda, -\lambda)$, où λ est un nombre réel, telles que

$$t_{\vec{u}}(D) = D'?$$

2. Même question avec $\vec{u}(2\lambda, 3\lambda)$.

5.16 Les notations et les droites D et D' sont celles de l'exercice précédent. On donne l(1, 1).

1. Calculer les coordonnées x' , y' du point M' image de M(x, y) par l'homothétie de centre I et de rapport k.

2. Calculer k de manière que D ait pour image D' par cette homothétie.

5.17 Soit I et I' deux points distincts de l'espace E. On pose $\vec{II'} = \vec{u}$. On désigne par H(I, k) l'homothétie de centre I et de rapport k, H(I', k') l'homothétie de centre I' et de rapport k', $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de :

$$H(I', k') \circ t_{\vec{u}} \circ H(I, k).$$

5.18 Soit P un plan rapporté à un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), A et B les points de coordonnées respectives (1, 0) et (-1, 0). Soit k_1 et k_2 deux réels non nuls. Un point M quelconque de P a pour image M₁ dans l'homothétie de centre A et de rapport k_1 , le même point M a pour image M₂ dans l'homothétie de centre B et de rapport k_2 . Soit alors M' l'image de O

dans la translation de vecteur $\vec{M_1M_2}$; f est l'application de P vers P qui à M associe M'.

1. Chercher si f admet des points invariants.

2. Si $k_1 \neq k_2$, montrer que f est soit une translation, soit une homothétie que l'on précisera.

3. Étudier le cas particulier $k_1 = k_2$.

5.19 Soit un triangle ABC et trois points α , β , γ appartenant respectivement aux droites (BC), (CA), (AB). On supposera α , β , γ distincts des sommets du triangle dans tout le problème.

1. Théorème de Ménélaüs :

a) On suppose α , β , γ alignés (on dit que la droite ($\alpha\beta\gamma$) est une transversale du triangle ABC). Montrer que la composée des deux homothéties :

$$H\left(\beta, \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}}\right) \circ H\left(\alpha, \frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}}\right)$$

est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport. En déduire que l'on a :

$$(1) \quad \frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}} \times \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}} \times \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma A}} = 1.$$

b) Réciproquement on suppose que l'on a (1), démontrer que α , β , γ sont alignés.

2. Théorème de Ceva :

a) On suppose que les droites ($A\alpha$), ($B\beta$), ($C\gamma$) sont concourantes en I. En appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle $AB\alpha$ et à la transversale ($CI\gamma$) puis au triangle $AC\alpha$ et à la transversale ($BI\beta$), en déduire que l'on a :

$$(2) \quad \frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}} \times \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}} \times \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma A}} = -1.$$

Montrer que l'on a encore (2) si les droites ($A\alpha$), ($B\beta$), ($C\gamma$) sont parallèles.

b) Réciproquement on suppose que l'on a (2), démontrer que les droites ($A\alpha$), ($B\beta$), ($C\gamma$) sont concourantes ou parallèles.

3. On suppose, dans ce qui suit, que les droites ($A\alpha$), ($B\beta$), ($C\gamma$) sont concourantes en I :

a) Démontrer que l'on a :

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{I\alpha}} = \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}} + \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}.$$

b) Soit α' , β' , γ' les symétriques respectifs de α , β , γ par rapport aux points A', B', C' milieux de (B, C), (C, A), (A, B). Démontrer que les droites ($A\alpha'$), ($B\beta'$), ($C\gamma'$) sont concourantes.

5.20 On donne un triangle ABC. On appelle A', B', C' les milieux respectivement de (B, C), (C, A), (A, B). Soit H, G, O l'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. On appelle Γ ce dernier cercle et Γ' le cercle circonscrit au triangle A'B'C'.

1. Montrer que Γ' est l'homothétique de Γ dans une homothétie de centre G. Quelle est l'image de H par cette homothétie? En déduire que :

$$\overline{GO} = -\frac{1}{2} \overline{GH}.$$

Quelle est l'image O' de O par cette homothétie? En déduire que O' est le milieu de (H, O) .

La droite contenant H, G, O, O' (quand elle est définie) est appelée **droite d'Euler** du triangle ABC .

2. Soit A'', B'', C'' les projetés orthogonaux de A, B, C respectivement sur $(BC), (CA), (AB)$. Montrer que Γ' passe par A'', B'', C'' .

3. Montrer que Γ' est l'homothétique de Γ dans une homothétie de centre H . En déduire que Γ' passe par les milieux α, β, γ respectivement de $(H, A), (H, B), (H, C)$.

Le cercle Γ' contenant 9 points remarquables $A', B', C', A'', B'', C'', \alpha, \beta, \gamma$ est appelé **cercle des 9 points** ou **cercle d'Euler** du triangle ABC .

4. On suppose B et C fixes et A décrit le cercle Γ privé de B et C . Quel est l'ensemble décrit par H ? (Indication : on cherchera une relation entre $\overline{AH}$ et $\overline{OA'}$.)

Projections affines

5.21 On reprend les notations précisées au début du § 5.6. Soit p la projection de X sur Y parallèlement à $\vec{Z}$, ω la projection vectorielle associée à p , $t_{\vec{u}}$ la translation de X de vecteur $\vec{u}$ non nul appartenant à $\vec{Y}$.

1. Quel est l'endomorphisme de $\vec{X}$ associé à $t_{\vec{u}} \circ p$?

2. Montrer que $t_{\vec{u}} \circ p$ n'a pas de point invariant et que, par conséquent, $t_{\vec{u}} \circ p$ n'est pas une projection affine.

3. En déduire qu'une application affine de X dont l'endomorphisme associé est une projection vectorielle, n'est pas nécessairement une projection affine.

5.22 Dans l'espace E rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan P d'équation

$$x - y + 2z + 1 = 0,$$

et la droite D contenant le point $A(1, 3, 1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1, 2, 1)$. Définir analytiquement la projection p de E sur P parallèlement à D et la projection q de E sur D parallèlement à P . Que peut-on dire de $p \circ q$ et de $q \circ p$?

5.23 Soit P un plan rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f de P dans P qui associe à tout point $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x + 2y - 1) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2). \end{cases}$$

Quelle est la nature de f ? Donner les éléments qui la caractérisent.

5.24 Soit E l'espace rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f de E dans E qui associe à tout point $M(x, y, z)$ le point $M'(x', y', z')$ défini par :

$$x' = y' = z' = \frac{1}{4}(x + 2y + z).$$

1. Quelle est la nature de f ? Donner les éléments qui la caractérisent.

2. Quelle est l'image de la droite d'équations :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+3}{1}.$$

5.25 Un plan P étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit f l'application de P dans P définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}(x + y - 1) \\ y' = -\frac{1}{2}(x + y - 3). \end{cases}$$

1. Démontrer que f est une application affine et déterminer la matrice de son endomorphisme associé dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2. Démontrer qu'il existe un point invariant I unique par f .

3. Démontrer que l'image de P par f est une droite D .

4. Démontrer que le noyau de l'endomorphisme associé à f est une droite vectorielle $\vec{\Delta}$.

5. Un point $M(x, y)$ quelconque a pour images $M'(x', y')$ par f et $M''(x'', y'')$ par la projection p de P sur D parallèlement à $\vec{\Delta}$. Calculer x'' et y'' en fonction de x et y . Montrer que I est le milieu de (M', M'') . En déduire une construction simple de M' connaissant M .

Symétries affines

5.26 Un plan étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit f l'application de P dans P définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y - 1 \\ y' = -x - 2y + 3. \end{cases}$$

Montrer que l'endomorphisme φ associé à f est involutif, mais que f n'est pas involutive donc n'est pas une symétrie affine.

5.27 Un plan P étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit f l'application de P dans P définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(-4x + y + 2). \end{cases}$$

Quelle est la nature de f ? Donner les éléments qui la caractérisent.

5.28 Dans un plan P rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit les droites D et D' d'équations respectives :

$$x + y - 1 = 0 \quad 2x - y + 2 = 0.$$

Définir analytiquement les symétries s par rapport à D parallèlement à D' et s' par rapport à D' parallèlement à D . Étudier $s' \circ s$ et $s \circ s'$.

5.29 Soit E l'espace rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f de E dans E définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = 3x - 4z - 4 \\ y' = 2x - y - 2z - 2 \\ z' = 2x - 3z - 4. \end{cases}$$

1. Quelle est la nature de f ? Donner les éléments qui la caractérisent.

2. Quelle est l'image de la droite passant par $A(1, 0, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 2, 3)$?

3. Quelle est l'image du plan d'équation :

$$x - z + 2 = 0?$$

5.30 Dans l'espace E rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit le plan P d'équation :

$$x + y - z + 2 = 0.$$

On désigne par s la symétrie par rapport à P parallèlement à la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{u}(1, 2, 1)$. Calculer les coordonnées x', y', z' de $s(M)$ en fonction des coordonnées x, y, z de M .

5.31 1. Dans un plan P , on considère deux droites D et D' concourantes. Soit s la symétrie par rapport à D parallèlement à D' . Quelles sont les droites invariantes par s ?

2. Dans l'espace E , on considère un plan P et une droite D non parallèle au plan P . Soit s la symétrie par rapport à P parallèlement à D et s' la symétrie par rapport à D parallèlement à P .

Quelles sont les droites invariantes par s ? par s' ?

Quels sont les plans invariants par s ? par s' ?

5.32 1. Étudier la composée de deux symétries centrales, de trois symétries centrales, plus généralement de n symétries centrales.

2. Application : construire un polygone $A_1, A_2, \dots, A_n$ connaissant les milieux $O_1, O_2, \dots, O_n$ respectivement de $(A_1, A_2), (A_2, A_3), \dots, (A_n, A_1)$.

5.33 Dans un plan P , soit D_1 et D_2 deux droites concourantes en O , $\vec{i}_1$ et $\vec{i}_2$ des vecteurs directeurs de D_1 et D_2 . En prenant pour repère $(O, \vec{i}_1, \vec{i}_2)$, définir analytiquement :

la symétrie centrale s_O par rapport à O ,

la symétrie s_1 par rapport à D_1 parallèlement à D_2 ,

la symétrie s_2 par rapport à D_2 parallèlement à D_1 .

En posant $e = id_P$ montrer que $\{e, s_O, s_1, s_2\}$ est un groupe commutatif pour la composition des applications et construire la table de ce groupe.

5.34 Dans l'espace E , soit D_1, D_2, D_3 trois droites concourantes en O et non coplanaires, $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ des vecteurs directeurs de D_1, D_2, D_3 . En prenant pour repère $(O, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$, définir analytiquement les symétries s_1, s_2, s_3 par rapport à D_1, D_2, D_3 parallèlement au plan des deux autres droites.

En posant $e = id_E$ montrer que $\{e, s_1, s_2, s_3\}$ est un groupe commutatif pour la composition des applications et construire la table de ce groupe.

5.35 Soit un plan P rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. A tout point $M(x, y)$ on associe les points $A(0, x)$ et $B(-y, 0)$, puis le point $M'(x', y')$ barycentre des points M, A, B affectés respectivement des

coefficients $(1 - \alpha - \beta)$; α ; β . (α et β sont des nombres réels.) On désigne par $f_{\alpha, \beta}$ l'application de P dans P telle que

$$f_{\alpha, \beta}(M) = M'.$$

1. Montrer que x' et y' vérifient

$$\begin{cases} x' = (1 - \alpha - \beta)x - \beta y \\ y' = \alpha x + (1 - \alpha - \beta)y. \end{cases}$$

En déduire que $f_{\alpha, \beta}$ est une application affine laissant au moins un point invariant.

2. Déterminer les couples de réels (α, β) tels que $f_{\alpha, \beta}$ soit involutive.

3. Déterminer la nature de l'involution qui correspond à $\alpha > \beta$. (On pourra chercher d'abord l'ensemble des points invariants.)

(D'après Bac. C. Japon 1980.)

5.36 Soit P un plan rapporté au repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application affine de P dans P transformant le point O en $O'(1, 4)$ et dont l'endomorphisme associé a pour matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{P}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les coordonnées (x', y') de M' image par f du point M de coordonnées (x, y) .

2. On cherche à montrer que f est la composée de deux symétries affines. Soit s_1 et s_2 deux symétries affines d'axes respectifs D_1 et D_2 et dont les endomorphismes associés ψ_1 et ψ_2 ont respectivement pour matrices dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier que ψ_1 et ψ_2 sont des symétries vectorielles. Quelles sont les directions des symétries affines s_1 et s_2 ? Que peut-on dire des droites D_1 et D_2 ?

b) Montrer que $s_1 \circ s_2 = f$ si, et seulement si

$$(s_1 \circ s_2)(O) = O'.$$

c) En déduire, connaissant O et O' , une construction de $O_2 = s_2(O)$ pour que

$$s_1 \circ s_2 = f.$$

Calculer alors les coordonnées de O_2 puis des équations de D_1 et D_2 . Déterminer complètement s_1 et s_2 .

(D'après Bac. E. Session de remplacement. Besançon 1980.)

Affinités

5.37 Soit E l'espace rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f de E dans E qui associe à tout point $M(x, y, z)$ le point $M'(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y - 2z \\ y' = 2x + 3y - 2z \\ z' = 2x + 2y - z. \end{cases}$$

1. Montrer que l'ensemble des points invariants par f est un plan P .

2. Montrer que le vecteur $\overline{MM'}$ appartient à une droite vectorielle Δ fixe.

3. Soit I le point d'intersection de P et de la droite passant par M de direction Δ . Calculer les coordonnées de I en fonction des coordonnées x, y, z de M . En déduire que

$$\overline{IM'} = k\overline{IM},$$

k étant un nombre réel que l'on calculera, et que f est une affinité.

5.38 Soit E l'espace rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer analytiquement l'affinité par rapport à la droite D passant par $A(1, 0, 1)$ de vecteur directeur $\vec{u}(-1, 2, 3)$, la direction étant celle du plan P d'équation

$$x + 2y + z = 0,$$

le rapport étant $k = -2$.

5.39 Soit P un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f de P dans P qui associe à tout point $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = 10x + 4y - 3 \\ y' = -8x - 2y + 1. \end{cases}$$

1. Démontrer que f est une application affine de P et déterminer la matrice de l'endomorphisme φ associé à f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Démontrer que f est bijective.

2. Démontrer que f admet un point invariant unique A .

3. Calculer les valeurs du nombre réel λ pour lesquelles il existe des vecteurs $\vec{v}$ non nuls tels que :

$$(1) \quad \varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v}.$$

Montrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ vérifiant l'égalité (1) est la réunion de deux droites vectorielles $\vec{\Delta}$ et $\vec{\Delta}'$.

4. En déduire que les deux droites D et D' passant par A et de directions respectives $\vec{\Delta}$ et $\vec{\Delta}'$ sont globalement invariantes par f .

5. Soit $\vec{I} = \vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{J} = \vec{i} - \vec{j}$. Calculer $\varphi(\vec{I})$ et $\varphi(\vec{J})$. Quelle est la matrice de φ dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$? En déduire l'expression analytique (calcul des coordonnées (X', Y') de $M' = f(M)$ en fonction des coordonnées (X, Y) de M) de l'application f dans le nouveau repère $(A, \vec{I}, \vec{J})$.

6. Montrer que f est la composée commutative d'une homothétie et d'une affinité que l'on précisera.

5.40 Montrer que l'ensemble des affinités de base donnée Y , de direction donnée $\vec{Z}$ et de rapport k variant dans $\mathbb{R}^*$, muni de la composition des applications, est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$.

5.41 Dans l'espace E , on considère Y et Z (point, droite, plan ou espace) tels que $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ soient supplémentaires dans E . Soit :

f_1 l'affinité par rapport à Y , de direction $\vec{Z}$ et de rapport $k \neq 0$

f_2 l'affinité par rapport à Z , de direction $\vec{Y}$ et de même rapport k .

Étudier $f_1 \circ f_2$ et $f_2 \circ f_1$.

Révision

5.42 On considère dans le plan P rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'application $g_{\alpha, \beta}$ qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') définies par

$$\begin{cases} x' = \alpha x - 2\alpha y, \\ y' = 2\beta x + \beta y, \end{cases}$$

α, β étant deux réels.

1. Déterminer les réels α et β pour que $g_{\alpha, \beta}$ soit une projection affine dont on précisera les éléments caractéristiques.

2. Déterminer les réels α et β pour que $g_{\alpha, \beta}$ soit une involution que l'on précisera.

5.43 Dans un plan P rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par A et B les points définis par $\vec{OA} = \vec{i}$ et $\vec{OB} = \vec{j}$.

Soit v un réel donné; on construit une suite de points $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

A_0 est le barycentre de $(O, 1+v)$ et $(A, -v)$;

A_1 est le barycentre de $(A_0, 1+v)$ et $(O, -v)$;

A_{n+2} est le barycentre de $(A_{n+1}, 1+v)$ et $(A_n, -v)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

A. On désigne par x_n l'abscisse de A_n .

1. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = vx_n - v.$$

2. On suppose, dans cette question, $v = 1$.

Exprimer x_n en fonction de n et étudier la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. On suppose $v \neq 1$.

a) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $X_n = x_n + \lambda$; déterminer λ pour que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit géométrique.

b) Exprimer X_n puis x_n en fonction de n et v .

c) Étudier la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

d) Étudier les suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $v = 0$ et $v = -1$.

B. 1. Montrer qu'il existe une application affine unique f_v du plan affine telle que

$$f_v(O) = A_0, \quad f_v(A) = O \quad \text{et} \quad f_v(B) = B.$$

Si φ_v désigne l'endomorphisme associé à f_v , donner la matrice de φ_v dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Si un point M du plan de coordonnées (x, y) a pour image par f_v le point M' de coordonnées (x', y') , donner les expressions de x' et y' en fonction de x, y et v .

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_v(A_n) = A_{n+1}$.

3. Montrer que f_v admet une droite de points invariants notée D_v . Discuter, suivant les valeurs de v , la position de D_v .

4. Montrer que, quel que soit v , la droite (OA) est stable par f_v ($f_v(OA)$ est inclus dans (OA)); on désigne par g_v l'application de (OA) dans (OA) définie par $g_v(M) = f_v(M)$ pour tout point M de la droite (OA) . Discuter suivant les valeurs de v la nature de l'application g_v .

5. On suppose $v = 1$. Donner une construction géométrique simple de l'image d'un point du plan par f_v . (On pourra utiliser l'application g_v pour $v = 1$ définie précédemment.)

6. On suppose $v \neq 1$. Soit m la projection sur D_v suivant la direction de (OA) d'un point M quelconque du plan. Montrer qu'il existe un réel k tel que, pour tout point M , on ait $\overrightarrow{mf_v(M)} = k\overrightarrow{mM}$. En déduire la nature de f_v pour $v = 0$ et $v = -1$.

(Problème. Bac. C. Paris 1981.)

5.44 $\mathcal{F}$ désigne le plan de repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\vec{\mathcal{F}}$ le plan vectoriel associé de base $\mathcal{B}_1 = (\vec{i}, \vec{j})$.

Pour $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on considère l'endomorphisme $\varphi_{(a,b)}$ de $\vec{\mathcal{F}}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_1$ est

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+2b & -2b \\ b & a-b \end{pmatrix}$$

et l'application affine $f_{(a,b)}$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ d'endomorphisme associé $\varphi_{(a,b)}$ et telle que O ait pour image le point O' de coordonnées $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{R}$.

A. 1. Soit $\vec{v}_1 = \varphi_{(a,b)}(\vec{v})$ et $M_1 = f_{(a,b)}(M)$.

Exprimer les coordonnées (x_1, y_1) de $\vec{v}_1$ dans $\mathcal{B}_1$ en fonction des coordonnées (x, y) de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}_1$; exprimer les coordonnées (X_1, Y_1) de M_1 dans $\mathcal{R}$ en fonction des coordonnées (X, Y) de M dans $\mathcal{R}$.

2. Montrer qu'il existe deux droites vectorielles $\vec{\Delta}_1$ et $\vec{\Delta}_2$ invariantes par $\varphi_{(a,b)}$. Donner une équation cartésienne de chacune de ces droites.

3. Soit $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \vec{\Delta}_1 \times \vec{\Delta}_2$ avec $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{u}_2 \neq \vec{0}$.

a) Prouver que $\mathcal{B}_2 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base de $\vec{\mathcal{F}}$ et calculer la matrice $N_{(a,b)}$ de $\varphi_{(a,b)}$ dans $\mathcal{B}_2$.

b) Caractériser les couples (a, b) tels que $\varphi_{(a,b)}$ soit bijective.

B. 1. a) Montrer que $\varphi_1 = \varphi_{(0,b)}$ et $\varphi_2 = \varphi_{(a,-a)}$ où $a \in \mathbb{R}^*$ sont les composées d'une projection et d'une homothétie qu'on caractérisera.

b) Montrer que $f_{(0,1)}$ et $f_{(1,-1)}$ sont les composés d'une translation et d'une projection affine. Déterminer dans chacun de ces deux cas les couples (α, β) pour lesquels $f_{(0,1)}$ ou $f_{(1,-1)}$ sont des projections affines.

2. Existe-t-il des applications $\varphi_{(a,b)}$ qui sont involutives? Si oui, préciser leurs éléments caractéristiques.

3. a) Quelle condition (C_1) doit vérifier (a, b) pour que $\varphi_{(a,b)}$ admette des vecteurs invariants non nuls?

b) On suppose que (a, b) vérifie (C_1) . Quelle condition (C_2) doit vérifier (α, β) pour que $f_{(a,b)}$ admette des points invariants?

c) On suppose (C_1) et (C_2) vérifiées. Donner une construction géométrique du point $M_1 = f_{(a,b)}(M)$, où M est donné. Quelle est la nature de $f_{(a,b)}$?

(D'après problème Bac. E. Bordeaux. Session de remplacement 1981.)

5.45 Soit $\mathcal{F}$ un plan rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle P le plan vectoriel associé. On considère une application affine f qui à tout point $M(x, y)$ de $\mathcal{F}$ associe le point $M_1(x_1, y_1)$ de $\mathcal{F}$ et on désigne par F l'endomorphisme associé à f ; soit $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de F dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout point M de $\mathcal{F}$, on note $M_1 = f(M)$, $M_2 = f(M_1)$, $M_3 = f(M_2)$, $M_4 = f(M_3)$ et G l'isobarycentre des points M, M_1, M_2 et M_3 .

1. Démontrer que $F^2 = -\text{id}_P$ si, et seulement si, $a + d = 0$ et $a^2 + bc = -1$.

2. Dans cette question, $a = 2$, $b = 1$ et $F^2 = -\text{id}_P$.

a) Écrire la matrice de F dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. En déduire que l'application affine f admettant F pour endomorphisme associé et telle que $f(O) = O'$, O' étant le point de coordonnées $(2, 0)$, est définie par :

$$\begin{cases} x_1 = 2x - 5y + 2 \\ y_1 = x - 2y \end{cases}$$

Démontrer que f est bijective.

b) On désigne par $\mathcal{D}' = f(\mathcal{D})$ l'image par f d'une droite quelconque $\mathcal{D}$ du plan $\mathcal{F}$. Démontrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles. En déduire que, quel que soit le point M de $\mathcal{F}$, les points M, M_1 et M_2 lorsqu'ils sont distincts, ne sont pas alignés.

c) Préciser la nature des applications : $f^2 = f \circ f$ et $f^4 = f^2 \circ f^2$.

d) Soit $M(x, y)$ un point quelconque de $\mathcal{F}$. En utilisant le c) déterminer les coordonnées du point G isobarycentre de M, M_1, M_2, M_3 . En déduire que le point G est indépendant du choix de M et que G est le seul point invariant par f .

e) Faire une figure en indiquant les positions respectives des points M, M_1, M_2 et M_3 lorsque M est le point de coordonnées $(2, 1)$.

(D'après problème Bac. C. et E. Amiens. Session de 1979.)

5.46 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien du plan P . On désigne par f une application affine de P dans P telle que $f(O) = O$ et dont l'endomorphisme φ

associé a pour matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan vectoriel $\vec{P}$ associé à P .

A. Dans cette partie, on suppose que

$$\varphi(\vec{i} + \vec{j}) = (a + b)(\vec{i} + \vec{j})$$

et que $b \neq 0$.

1. Calculer c et d en fonction de a et b .

2. Soit $\vec{E}_k = \{\vec{u} \in \vec{P}; \varphi(\vec{u}) = k\vec{u}\}$ où $k \in \mathbb{R}$. Calculer k pour que $\vec{E}_k$ soit différent de $\{\vec{0}\}$. Déterminer $\vec{E}_k$ pour ces valeurs de k .

3. On pose $\vec{I} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{J} = \vec{i} - \vec{j}$. Quelle est la matrice de φ dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$? On pose $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ et plus généralement $\varphi^n = \varphi^{n-1} \circ \varphi$ pour tout n de $\mathbb{N}^* - \{1\}$. Donner, en fonction de $a + b$ et $\beta = a - b$ la matrice de φ^n dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$ puis dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Soit A le point défini par $\vec{OA} = \vec{i}$. Trouver les coordonnées de $f^n(A)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en fonction de a, b et n .

B. Dans cette partie, on suppose que $f \circ f = f_O$ et que $f \neq f_O$, f_O étant l'application affine qui à tout point de P fait correspondre le point O .

1. Lorsque $b = 1$, calculer c et d en fonction de a et démontrer que l'image de P par f est une droite D passant par O telle que sa droite vectorielle associée $\vec{D}$ soit le noyau de φ .

2. Dans le cas général, démontrer que $\varphi(\vec{P})$ est contenue dans $\text{Ker } \varphi$. En déduire que $\text{Ker } \varphi$, puis $\varphi(\vec{P})$ sont de dimension 1. Retrouver ainsi le résultat du 1.

C. On suppose, dans cette partie que

$$f \circ f \circ f = f^3 = f_O$$

et que $f \circ f = f^2 \neq f_O$.

1. $\vec{u}$ étant un vecteur de $\vec{P}$ tel que $\varphi^2(\vec{u}) \neq \vec{0}$. Prouver qu'il n'existe pas de réel k tel que $\varphi(\vec{u}) = k\vec{u}$. En déduire qu'il existe deux réels λ et λ' tels que

$$\varphi^2(\vec{u}) = \lambda\varphi(\vec{u}) + \lambda'\vec{u}.$$

2. Calculer $\varphi^3(\vec{u})$ en fonction de λ , λ' , $\vec{u}$ et $\varphi(\vec{u})$. Que peut-on en déduire pour λ et λ' puis pour $\varphi^2(\vec{u})$? Existe-t-il une application f telle que l'on ait à la fois $f^3 = f_O$ et $f^2 \neq f_O$?

(D'après problème
Bac. C. Clermont-Ferrand 1979.)

5.47* A. Dans un plan (plan muni d'une distance et de l'orthogonalité), soit une droite D munie d'un repère $(O, \vec{i})$. On suppose $\vec{i}$ unitaire. Soit B et C deux points de D et A un point n'appartenant pas à D . On suppose que ABC n'est pas un triangle rectangle. Soit M_0 un point quelconque de D , P_0 son projeté orthogonal sur (AB) , Q_0 le projeté orthogonal de P_0 sur (AC) , M_1 le projeté orthogonal de Q_0 sur D .

1. Montrer que l'application $f : M_0 \mapsto M_1$ est une application affine de D dans D .

2. Soit x_0 et x_1 les abscisses de M_0 et M_1 dans le repère $(O, \vec{i})$. On a donc une relation de la forme $x_1 = ax_0 + b$.

a) Soit M'_0 un autre point de D d'image M'_1 par f . Montrer que

$$\|\vec{M_1M'_1}\| = \|\vec{M_0M'_0}\| \times |\cos A \cos B \cos C|,$$

A, B, C étant les mesures (comprises entre 0 et π) des angles du triangle ABC .

b) En déduire que $|a| = |\cos A \cos B \cos C|$.

c) Montrer que f admet un point invariant unique Ω .

3. On définit une suite de points de D par :

$$M_0 \in D \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) M_{n+1} = f(M_n).$$

On appelle X_n l'abscisse du point M_n dans le repère $(\Omega, \vec{i})$. Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On dit alors que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

4. Soit R_0 le point d'intersection des droites (M_0P_0) et (M_1Q_0) , U le projeté orthogonal de Ω sur (AB) , V le projeté orthogonal de U sur (AC) .

a) Montrer que les deux triangles $P_0Q_0R_0$ et $UV\Omega$ sont homothétiques dans une homothétie de centre A .

b) En déduire une construction de Ω .

B. Dans l'espace, soit trois droites D_1, D_2, D_3 . On considère un point M_0 quelconque de D_1 , P_0 son projeté orthogonal sur D_2 , Q_0 le projeté orthogonal de P_0 sur D_3 , M_1 le projeté orthogonal de Q_0 sur D_1 .

1. Montrer que l'application $f : M_0 \mapsto M_1$ est une application affine de D_1 dans D_1 ayant, en général, un point invariant unique. Quel est le cas d'exception?

2. On définit une suite de points de D_1 par :

$$M_0 \in D_1 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) M_{n+1} = f(M_n).$$

Montrer que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (s'inspirer de la méthode donnée au A. 3.).

6

ANGLES ORIENTÉS

Ce chapitre figure au programme de Terminale C et ne figure pas au programme de Terminale E.

6.1 RAPPELS

a) Angle orienté d'un couple de vecteurs non nuls

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs non nuls du plan, $\vec{u}$ ayant pour coordonnées (x, y) et $\vec{v}$ pour coordonnées (x', y') . Le produit scalaire de $(\vec{u}, \vec{v})$ est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

et le déterminant, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, de $(\vec{u}, \vec{v})$ est :

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'.$$

On appelle cosinus du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ le nombre :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

On appelle sinus du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ le nombre :

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

Définition

L'ensemble des couples de vecteurs non nuls ayant même cosinus et même sinus que le couple de vecteurs non nuls $(\vec{u}, \vec{v})$ est appelé angle orienté du couple $(\vec{u}, \vec{v})$.

REMARQUE Si l'on change de repère orthonormé, on démontre que $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ ne change pas et que $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ ne change pas ou est changé en son opposé, mais l'angle orienté de $(\vec{u}, \vec{v})$ ne change pas.

b) Angle orienté d'un couple de demi-droites de même origine

Nous appellerons **cosinus** et **sinus** d'un couple de demi-droites (Ox, Oy) le cosinus et le sinus d'un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Ox et $\vec{v}$ un vecteur directeur de Oy .

Définition

L'ensemble des couples de demi-droites de même origine, cette origine décrivant le plan, ayant même cosinus et même sinus que le couple de demi-droites (Ox, Oy) est appelé **angle orienté** du couple (Ox, Oy) .

c) Mesures d'un angle orienté de vecteurs ou de demi-droites

Le plan étant supposé **orienté**, on peut associer à tout angle orienté de couple de vecteurs non nuls ou de demi-droites de même origine une infinité de nombres réels $\alpha + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

On dit que tous ces réels sont congrus à α modulo 2π . L'un quelconque de ces nombres est appelé une **mesure** du couple de vecteurs ou de demi-droites ou encore une mesure de l'angle orienté associé. Une mesure se notera :

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \quad \text{ou} \quad (\widehat{Ox, Oy}).$$

Rappelons que la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, quels que soient x et x' de $\mathbb{R}$, par :

$$(x \mathcal{R} x') \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, x - x' = k2\pi),$$

est une relation d'équivalence appelée **congruence modulo 2π** ; on écrit :

$$x \equiv x' \pmod{2\pi}$$

on écrit aussi :

$$x \equiv x' [2\pi].$$

Si $x \equiv x' [2\pi]$ et $y \equiv y' [2\pi]$, alors $x + y \equiv x' + y' [2\pi]$, on dit que *la congruence est compatible avec l'addition dans $\mathbb{R}$* .

Si α est une mesure du couple (Ox, Oy) on a :

$$(\widehat{Ox, Oy}) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \text{ qu'on écrit aussi } (\widehat{Ox, Oy}) \equiv \alpha [2\pi].$$

Le cosinus et le sinus de α sont le cosinus et le sinus de l'un des couples de vecteurs de l'angle orienté associé.

- REMARQUES**
1. Si l'on change l'orientation du plan, les mesures de l'angle orienté de $(\vec{u}, \vec{v})$ changent de signe, mais l'angle orienté de $(\vec{u}, \vec{v})$ ne change pas.
 2. Les angles orientés des couples (Ox, Oy) et (Oy, Ox) ont même cosinus et des sinus opposés. Leurs mesures sont opposées deux à deux. On dit que ces angles orientés sont opposés.

d) Relation de Chasles

Théorème

Quelles que soient les demi-droites Ox , Oy , Oz du plan orienté :

$$(\widehat{Ox, Oy}) + (\widehat{Oy, Oz}) \equiv (\widehat{Ox, Oz}) \quad [2\pi].$$

e) Bissectrices d'un couple de demi-droites de même origine

Rappelons le théorème préliminaire suivant :

Lemme

Soit Ox une demi-droite du plan orienté et α un nombre réel. Il existe une unique demi-droite Oy telle que

$$(\widehat{Ox, Oy}) \equiv \alpha \quad [2\pi].$$

Soit Ox et Oy deux demi-droites d'origine O telles que $(\widehat{Ox, Oy}) \equiv \alpha \quad [2\pi]$. Nous allons utiliser le lemme précédent pour déterminer les demi-droites Oz (fig. 1) telle que

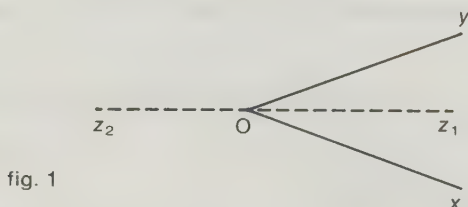


fig. 1

$$(\widehat{Ox, Oz}) \equiv (\widehat{Oz, Oy}) \quad [2\pi].$$

En appliquant la relation de Chasles, cette égalité est équivalente à :

$$(\widehat{Ox, Oz}) \equiv (\widehat{Oz, Ox}) + (\widehat{Ox, Oy}) \quad [2\pi]$$

c'est-à-dire (en ajoutant aux deux membres $(\widehat{Ox, Oz})$) :

$$(1) \quad (\widehat{Ox, Oz}) + (\widehat{Ox, Oz}) \equiv (\widehat{Ox, Oy}) \quad [2\pi].$$

Posons $(\widehat{Ox, Oz}) \equiv \theta \quad [2\pi]$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) 2\theta = \alpha + k \cdot 2\pi \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \theta = \frac{\alpha}{2} + k \cdot \pi. \end{aligned}$$

Il y a donc deux demi-droites Oz_1 et Oz_2 répondant à la question, définies par :

$$(\widehat{Ox, Oz_1}) \equiv \frac{\alpha}{2} [2\pi] \quad \text{et} \quad (\widehat{Ox, Oz_2}) \equiv \frac{\alpha}{2} + \pi [2\pi].$$

Les demi-droites Oz_1 et Oz_2 sont donc opposées, on peut conclure :

Théorème et définition

Soit Ox et Oy deux demi-droites de même origine O du plan orienté. Il existe deux demi-droites opposées Oz_1 et Oz_2 d'origine O telles que

$$(\widehat{Ox, Oz_1}) \equiv (\widehat{Oz_1, Oy}) [2\pi] \quad \text{et} \quad (\widehat{Ox, Oz_2}) \equiv (\widehat{Oz_2, Oy}) [2\pi]$$

Oz_1 et Oz_2 sont appelées les demi-droites bissectrices du couple (Ox, Oy) .

La droite $(z_1z_2) = Oz_1 \cup Oz_2$ est appelée la droite bissectrice du couple (Ox, Oy) .

6.2 ANGLE ORIENTÉ D'UN COUPLE DE DROITES OU D'UN COUPLE DE DROITES VECTORIELLES

a) Définitions

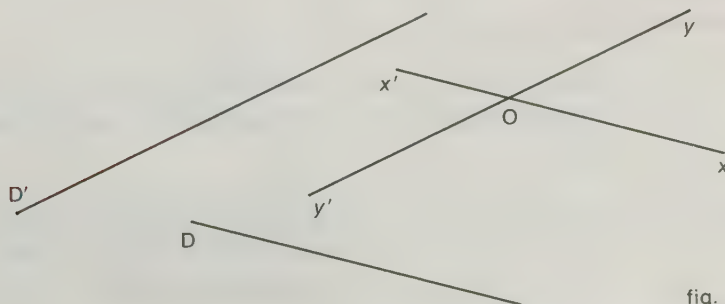
Supposons le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. L'ensemble des couples de droites (D, D') tels que l'on peut trouver un couple $(\vec{u}, \vec{v})$, où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D et $\vec{v}$ un vecteur directeur de D' , ayant même cosinus et même sinus est appelé angle orienté du couple (D, D') .

2. L'ensemble des couples de droites vectorielles $(\vec{D}, \vec{D}')$ tels que l'on peut trouver un couple $(\vec{u}, \vec{v})$, où $\vec{u}$ est un vecteur non nul de $\vec{D}$ et $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\vec{D}'$, ayant même cosinus et même sinus est appelé angle orienté du couple $(\vec{D}, \vec{D}')$.

b) Mesures

Soit deux droites D et D' du plan supposé **orienté**. Par un point O , menons les parallèles $x'x$ et $y'y$ respectivement à D et D' (fig. 2).



Au couple de droites (D, D') on peut associer quatre couples de demi-droites d'origine O ayant pour premier élément une demi-droite de $x'x$ et pour deuxième élément une demi-droite de $y'y$:

$$(Ox, Oy), (Ox, Oy'), (Ox', Oy), (Ox', Oy').$$

Soit α une mesure de (Ox, Oy) . On a :

$$(\widehat{Ox, Oy}) \equiv \alpha \quad [2\pi]$$

$$(\widehat{Ox, Oy'}) \equiv (\widehat{Ox, Oy}) + (\widehat{Oy, Oy'}) \equiv \alpha + \pi \quad [2\pi]$$

$$(\widehat{Ox', Oy}) \equiv (\widehat{Ox', Ox}) + (\widehat{Ox, Oy}) \equiv \pi + \alpha \quad [2\pi]$$

$$(\widehat{Ox', Oy'}) \equiv (\widehat{Ox', Oy}) + (\widehat{Oy, Oy'}) \equiv (\pi + \alpha) + \pi \equiv \alpha \quad [2\pi].$$

L'une quelconque des mesures des quatre couples associés à (D, D') est donc :

$$\alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chacun de ces nombres est appelé une **mesure** de (D, D') ou de $(\vec{D}, \vec{D}')$ ou encore une mesure de l'angle orienté associé. Une telle mesure se notera :

$$(\widehat{D, D'}) \quad \text{ou} \quad (\widehat{\vec{D}, \vec{D}'}).$$

La relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, quels que soient x et x' de $\mathbb{R}$, par

$$(x \mathcal{R} x') \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, x - x' = k\pi)$$

est une relation d'équivalence appelée **congruence modulo π** ; on écrit :

$$x \equiv x' \pmod{\pi}$$

on écrit aussi :

$$x \equiv x' \quad [\pi].$$

On vérifiera que cette congruence est *compatible avec l'addition dans $\mathbb{R}$* c'est-à-dire que si

$$x \equiv x' \quad [\pi] \quad \text{et} \quad y \equiv y' \quad [\pi], \quad \text{alors} \quad x + y \equiv x' + y' \quad [\pi].$$

Si α est une mesure du couple de droites (D, D') ou du couple $(\vec{D}, \vec{D}')$, on a :

$$(\widehat{D, D'}) \equiv \alpha \quad [\pi], \quad (\widehat{\vec{D}, \vec{D}'}) \equiv \alpha \quad [\pi].$$

REMARQUES

1. Si l'on change l'orientation du plan, les mesures de l'angle orienté de (D, D') changent de signe, mais l'angle orienté de (D, D') ne change pas.

2. Les angles orientés des couples (D, D') et (D', D) sont dits **opposés** car leurs mesures sont opposées deux à deux.

c) Relation de Chasles

Soit D, D', D'' des droites du plan orienté. Par un point O menons des demi-droites Ox, Ox', Ox'' parallèles respectivement à D, D', D'' (fig. 3). On a :

$$(\widehat{D, D'}) \equiv (\widehat{Ox, Ox'}) \quad [\pi]$$

$$(\widehat{D', D''}) \equiv (\widehat{Ox', Ox''}) \quad [\pi]$$

$$(\widehat{D, D''}) \equiv (\widehat{Ox, Ox''}) \quad [\pi]$$

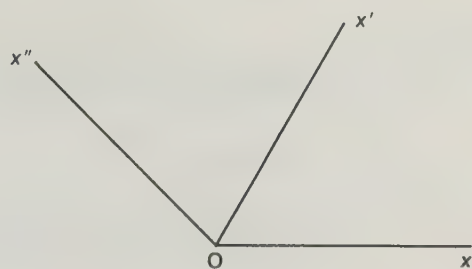
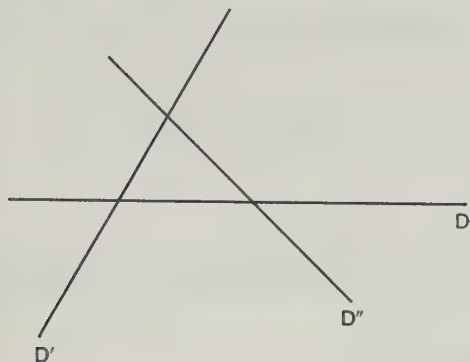


fig. 3

d'où :

$$\begin{aligned} (\widehat{D, D'}) + (\widehat{D', D''}) &\equiv (\widehat{Ox, Ox'}) + (\widehat{Ox', Ox''}) \quad [\pi] \\ &\equiv (\widehat{Ox, Ox''}) \quad [\pi] \\ &\equiv (\widehat{D, D''}) \quad [\pi]. \end{aligned}$$

Énonçons :

Théorème

Quelles que soient les droites D, D', D'' du plan orienté :

$$(\widehat{D, D'}) + (\widehat{D', D''}) \equiv (\widehat{D, D''}) \quad [\pi].$$

d) Bissectrices d'un couple de droites

Démontrons, tout d'abord, un théorème préliminaire : soit D une droite du plan orienté, O un point de D et α un réel, montrons qu'il existe une droite unique D' passant par O telle que $(\widehat{D, D'}) \equiv \alpha \quad [\pi]$.

En effet soit Ox une demi-droite de support D et d'origine O , il existe une demi-droite unique Ox' telle que $(\widehat{Ox, Ox'}) \equiv \alpha \quad [2\pi]$ (cf. 6.1 e)).

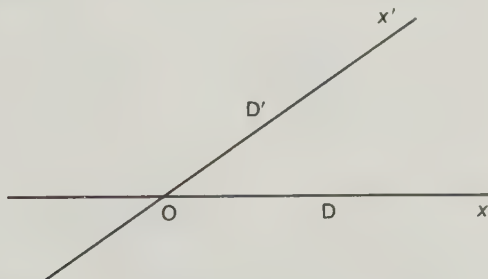


fig. 4

Soit D' (fig. 4) la droite support de Ox' . On a $(\widehat{D, D'}) \equiv \alpha \quad [\pi]$ et elle est unique car s'il en existait une autre D'' on aurait

$$(\widehat{D, D'}) \equiv (\widehat{D, D''}) \equiv \alpha \quad [\pi]$$

$$\text{d'où} \quad (\widehat{D, D'}) + (\widehat{D'', D}) \equiv 0 \quad [\pi]$$

$$(\widehat{D'', D'}) \equiv 0 \quad [\pi]$$

les droites D' et D'' passant par O sont donc confondues. On peut énoncer :

Lemme

Soit D une droite du plan orienté, O un point de D et α un réel. Il existe une droite D' unique passant par O telle que

$$(\widehat{D, D'}) \equiv \alpha \quad [\pi].$$

Soit un couple de droites (D, D') passant par un point O du plan. Nous allons utiliser le lemme pour déterminer les droites Δ passant par O telles que (fig. 5) :

$$(\widehat{D, \Delta}) \equiv (\widehat{\Delta, D'}) \quad [\pi].$$

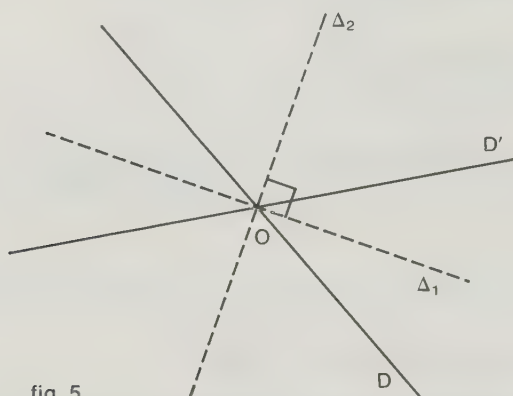


fig. 5

En appliquant la relation de Chasles, cette égalité est équivalente à :

$$(\widehat{D, \Delta}) \equiv (\widehat{\Delta, D}) + (\widehat{D, D'}) \quad [\pi]$$

c'est-à-dire (en ajoutant aux deux membres $(\widehat{D, \Delta})$) :

$$(1) \quad (\widehat{D, \Delta}) + (\widehat{D, \Delta}) \equiv (\widehat{D, D'}) \quad [\pi].$$

Posons $(\widehat{D, \Delta}) \equiv \theta \quad [\pi]$ et $(\widehat{D, D'}) \equiv \alpha \quad [\pi]$.

On peut écrire

$$(1) \quad \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad 2\theta = \alpha + k\pi$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \theta = \frac{\alpha}{2} + k \frac{\pi}{2}.$$

D'après le lemme précédent, il y a deux droites Δ_1 et Δ_2 répondant à la question, définies par :

$$(\widehat{D, \Delta_1}) \equiv \frac{\alpha}{2} \quad [\pi] \quad \text{et} \quad (\widehat{D, \Delta_2}) \equiv \frac{\alpha}{2} + k \frac{\pi}{2} \quad [\pi].$$

Les deux droites Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales. Concluons :

Théorème et définition

Soit un couple de droites (D, D') du plan orienté, passant par un point O . Il existe deux droites orthogonales Δ_1 et Δ_2 passant par O telles que

$$(\widehat{D, \Delta_1}) \equiv (\widehat{\Delta_1, D'}) [\pi] \quad \text{et} \quad (\widehat{D, \Delta_2}) \equiv (\widehat{\Delta_2, D'}) [\pi].$$

Les droites Δ_1 et Δ_2 sont appelées les bissectrices du couple (D, D') .

6.3 PROBLÈMES D'ANGLES

Dans tout le paragraphe, P désigne un plan orienté.

a) Ensemble des points M de P tels que $(\widehat{MA, MB}) \equiv \alpha [\pi]$

Soit A et B deux points distincts de P . Si M est distinct de A et de B , nous désignerons, pour simplifier, par (MA, MB) le couple formé par les droites (MA) et (MB) . Soit α un réel donné. Cherchons l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M de P tels que $(\widehat{MA, MB}) \equiv \alpha [\pi]$. On peut écrire pour tout point M du plan distinct de A et de B :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\iff [(\widehat{MA, MB}) \equiv \alpha [\pi] \text{ ou } (\widehat{MA, MB}) \equiv \alpha + \pi [2\pi]] \\ &\iff \sin[(\widehat{MA, MB}) - \alpha] = 0 \\ (1) \quad &\iff \sin(\widehat{MA, MB}) \cos \alpha - \cos(\widehat{MA, MB}) \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

Soit O le milieu de (A, B) , $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ et $\vec{j}$ le vecteur unitaire tel que $(O, \vec{i}, \vec{j})$

soit un repère orthonormé direct de P .

Les coordonnées de A et B dans ce repère sont respectivement : $(-a, 0)$ et $(a, 0)$ où a est un réel strictement positif. Si (x, y) sont les coordonnées d'un point M de P distinct de A et de B , on a :

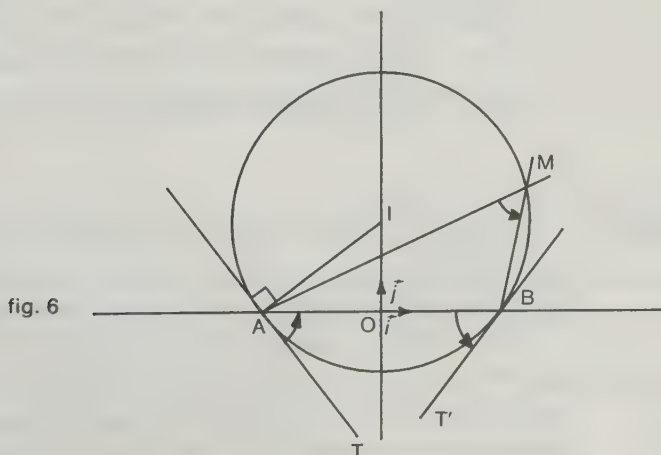


fig. 6

$$\cos(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) = \frac{\vec{MA} \cdot \vec{MB}}{\|\vec{MA}\| \times \|\vec{MB}\|} = \frac{(-a-x)(a-x) + (-y)(-y)}{\|\vec{MA}\| \times \|\vec{MB}\|}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - a^2}{\|\vec{MA}\| \times \|\vec{MB}\|}$$

$$\sin(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) = \frac{\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{MA}, \vec{MB})}{\|\vec{MA}\| \times \|\vec{MB}\|} = \frac{\begin{vmatrix} -a-x & a-x \\ -y & -y \end{vmatrix}}{\|\vec{MA}\| \times \|\vec{MB}\|} = \frac{2ay}{\|\vec{MA}\| \times \|\vec{MB}\|}.$$

La condition (1) est équivalente à

$$\frac{2ay}{\|\vec{MA}\| \times \|\vec{MB}\|} \cos \alpha - \frac{x^2 + y^2 - a^2}{\|\vec{MA}\| \times \|\vec{MB}\|} \sin \alpha = 0.$$

Ce qui est équivalent, les vecteurs $\vec{MA}$ et $\vec{MB}$ étant non nuls, à

$$2ay \cos \alpha - (x^2 + y^2 - a^2) \sin \alpha = 0.$$

Distinguons deux cas :

- $\sin \alpha = 0$ c'est-à-dire $\alpha \equiv 0 [\pi]$.

La condition (1) est équivalente à $y = 0$. L'ensemble $\mathcal{E}$ des points du plan tels que $(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) \equiv 0 [\pi]$ est la droite (AB) privée des points A et B.

- $\sin \alpha \neq 0$ c'est-à-dire $\alpha \not\equiv 0 [\pi]$.

La condition (1) est équivalente à :

$$x^2 + y^2 - 2ay \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - a^2 = 0.$$

Les coordonnées des points A et B vérifient l'équation précédente.

L'ensemble des points M tels que $(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) \equiv \alpha [\pi]$ est un cercle passant par A et B privé de A et de B. Le centre du cercle a pour coordonnées $\left(0, a \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)$. On peut conclure :

Théorème

Soit A et B deux points du plan orienté et α un nombre réel.

L'ensemble des points M du plan tels que $(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) \equiv \alpha [\pi]$ est :

- si $\alpha \equiv 0 [\pi]$, la droite (AB) privée des points A et B,
- si $\alpha \not\equiv 0 [\pi]$, un cercle contenant les points A et B privé des points A et B.

REMARQUE Soit $I\left(0, a \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)$ le centre du cercle précédent et (AT) la droite passant par A telle que $(\widehat{AT, AB}) \equiv \alpha [\pi]$. Il existe un vecteur unitaire, directeur $\vec{u}$ de (AT) tel que $(\vec{u}, \vec{i}) \equiv \alpha [2\pi]$; on a $(\vec{i}, \vec{u}) \equiv -\alpha [2\pi]$, le vecteur $\vec{u}$ a donc pour coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$: $(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$ donc $(\cos \alpha, -\sin \alpha)$. Le vecteur $\vec{IA}$ a pour coordonnées $\left(-b, -b \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)$ on a donc $\vec{u} \cdot \vec{IA} = 0$. La droite (AT) est orthogonale à (IA); donc (AT) est la tangente au cercle en A. On verra, de même, que la droite (AT') passant par B telle que $(\widehat{BA, BT'}) \equiv \alpha [\pi]$ est la tangente au cercle en B.

On peut ainsi construire le centre I du cercle : on construit (AT) telle que

$$(\widehat{AT, AB}) \equiv \alpha [\pi],$$

I est le point d'intersection de la perpendiculaire en A à (AT) et de la médiatrice de (A, B).

b) Ensemble des points M de P tels que $(\widehat{MA, MB}) \equiv \alpha [2\pi]$

Soit A et B deux points distincts du plan P orienté, α un nombre réel donné. Désignons par $\mathcal{E}'$ l'ensemble des points M du plan P tels que

$$(\widehat{MA, MB}) \equiv \alpha [2\pi].$$

Pour tout point M du plan distinct de A et B on a

$$(\widehat{MA, MB}) \equiv \alpha [2\pi] \implies (\widehat{MA, MB}) \equiv \alpha [\pi]$$

donc $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ étant l'ensemble trouvé au sous-paragraphe précédent.

- Si $\alpha \equiv 0 [2\pi]$ ou $\alpha \equiv \pi [2\pi]$ (c'est-à-dire $\alpha \equiv 0 [\pi]$) on a vu que $\mathcal{E} = (AB) - \{A, B\}$.

Pour tout point M de $(AB) - [A, B]$ on a $(\widehat{MA, MB}) \equiv 0 [2\pi]$.

Pour tout point M de $]A, B[$ on a $(\widehat{MA, MB}) \equiv \pi [2\pi]$.

Donc si $\alpha \equiv 0 [2\pi]$, $\mathcal{E}' = (AB) - [A, B]$

si $\alpha \equiv \pi [2\pi]$, $\mathcal{E}' =]A, B[$.

- Si $\alpha \not\equiv 0 [2\pi]$ et $\alpha \not\equiv \pi [2\pi]$ (c'est-à-dire $\alpha \not\equiv 0 [\pi]$), on a vu que $\mathcal{E}$ est un cercle passant par A et B privé des points A et B. Si $M \in \mathcal{E}'$, on sait que $M \in \mathcal{E}$

et puisque $\sin \alpha = \frac{2ay}{\|\vec{MA}\| \times \|\vec{MB}\|}$, comme $a > 0$, $\|\vec{MA}\| > 0$ et $\|\vec{MB}\| > 0$, on

a donc $y \sin \alpha > 0$.

Réciproquement soit M un point de P tel que : $M \in \mathcal{E}$ et $y \sin \alpha > 0$ où y est l'ordonnée de M.

Puisque $M \in \mathcal{E}$ on a

$$(\widehat{MA, MB}) \equiv \alpha [2\pi] \quad \text{ou} \quad (\widehat{MA, MB}) \equiv \alpha + \pi [2\pi]$$

si $(\widehat{MA, MB}) \equiv \alpha + \pi [2\pi]$ on aurait :

$$\sin(\widehat{MA, MB}) = \frac{2ay}{\|\vec{MA}\| \times \|\vec{MB}\|} = \sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$$

donc $y \sin \alpha < 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc $y \sin \alpha > 0$. On peut écrire pour tout point M de P :

$$M \in \mathcal{E}' \iff (M \in \mathcal{E} \text{ et } y \sin \alpha > 0).$$

L'ensemble des points M de P tel que $y \sin \alpha > 0$ est un demi-plan ouvert ayant pour frontière la droite (AB). $\mathcal{E}'$ est donc l'arc de cercle de $\mathcal{E}$ d'extrémités A et B contenu dans le demi-plan défini par $y \sin \alpha > 0$.

Conclusion :

Théorème

Soit A et B deux points distincts du plan orienté P et α un nombre réel.

L'ensemble des points M de P tels que $(\widehat{MA, MB}) \equiv \alpha [2\pi]$ est :

- si $\alpha \equiv 0 [2\pi]$, la droite (AB) privée du segment [A, B]
- si $\alpha \equiv \pi [2\pi]$, le segment ouvert]A, B[
- si $\alpha \not\equiv 0 [2\pi]$ et $\alpha \not\equiv \pi [2\pi]$, un arc de cercle d'extrémités A et B privé des points A et B.

c) Condition pour que quatre points A, B, C, D soient alignés ou cocycliques

Soit A, B, C, D quatre points distincts du plan orienté P.

- Si A, B, C, D sont alignés, on a $(\widehat{CA}, \widehat{CB}) \equiv (\widehat{DA}, \widehat{DB}) \equiv 0 [\pi]$.
- Si A, B, C, D sont cocycliques c'est-à-dire appartiennent à un même cercle. L'ensemble des points M tels que $(\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv (\widehat{CA}, \widehat{CB}) [\pi]$ est le cercle (ABC) privé des points A et B. Comme D appartient à ce cercle, on a $(\widehat{DA}, \widehat{DB}) \equiv (\widehat{CA}, \widehat{CB}) [\pi]$.

Réciproquement soit quatre points distincts A, B, C, D tels que

$$(\widehat{CA}, \widehat{CB}) \equiv (\widehat{DA}, \widehat{DB}) [\pi].$$

- Si les trois points A, B, C sont alignés on a $(\widehat{CA}, \widehat{CB}) \equiv 0 [\pi]$ donc $(\widehat{DA}, \widehat{DB}) \equiv 0 [\pi]$, le point D appartient à la droite (AB) et les quatre points A, B, C, D sont alignés.
- Si les points A, B, C ne sont pas alignés, le cercle (ABC) contient l'ensemble des points M tels que $(\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv (\widehat{CA}, \widehat{CB}) [\pi]$ donc il contient D. Les quatre points A, B, C, D sont donc cocycliques. On peut énoncer :

Théorème

Soit A, B, C, D quatre points distincts d'un plan orienté P. Ces points sont alignés ou cocycliques si et seulement si on a :

$$(\widehat{CA}, \widehat{CB}) \equiv (\widehat{DA}, \widehat{DB}) [\pi].$$

Exercices

Dans tous les exercices on supposera le plan orienté.

Angle orienté d'un couple de demi-droites de même origine ou d'un couple de vecteurs non nuls

6.1 Soit Ox, Oy, Oz, Ot quatre demi-droites telles que

$$(\widehat{Ox, Oy}) = (\widehat{Oz, Ot}) \quad [2\pi]$$

et

$$(\widehat{Oy, Oz}) = (\widehat{Ot, Ox}) \quad [2\pi].$$

Étudier les positions relatives des demi-droites Ox, Oy, Oz, Ot .

6.2 Même exercice que 6.1 avec les conditions

$$(\widehat{Ox, Oy}) = (\widehat{Ot, Ox}) \quad [2\pi]$$

et

$$(\widehat{Oy, Oz}) = (\widehat{Oz, Ot}) \quad [2\pi].$$

6.3 Soit Ox, Oy deux demi-droites du plan orienté P de même origine O . Déterminer les demi-droites Oz d'origine O telles que

$$4(\widehat{Ox, Oz}) = (\widehat{Ox, Oy}) \quad [2\pi].$$

6.4 Soit Ox, Oy deux demi-droites du plan orienté P de même origine O .

Déterminer les demi-droites Oz d'origine O telles que, n étant un entier naturel non nul :

$$n(\widehat{Ox, Oz}) = (\widehat{Ox, Oy}) \quad [2\pi].$$

6.5 Soit Ox, Oy, Oz, Ot quatre demi-droites d'origine O telles que

$$(\widehat{Ox, Oy}) = (\widehat{Oz, Ot}) \quad [2\pi].$$

Montrer que

$$(\widehat{Ox, Oz}) = (\widehat{Oy, Ot}) \quad [2\pi].$$

6.6 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

1. Calculer $(\widehat{\vec{v}, -\vec{v}}), (\widehat{-\vec{v}, \vec{v}}), (\widehat{-\vec{v}, -\vec{v}})$.

2. Démontrer que $(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) = \pi + (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \quad [2\pi]$.

6.7 Soit un triangle ABC . Démontrer que :

$$1. (\widehat{BA, BC}) = (\widehat{AB, CB}) \quad [2\pi].$$

$$2. (\widehat{AC, AB}) + (\widehat{BA, BC}) + (\widehat{CB, CA}) = \pi \quad [2\pi].$$

6.8 Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles orientés de couples de demi-droites, a et a' deux éléments de $\mathcal{A}$ dont des mesures sont α et α' . On appelle $a + a'$ l'élément de $\mathcal{A}$ dont une mesure est $\alpha + \alpha'$. Montrer que $\mathcal{A}$ muni de cette opération notée $+$ est un groupe commutatif.

Angle orienté d'un couple de droites

6.9 Même question qu'à l'exercice précédent en considérant l'ensemble $\mathcal{A}'$ des angles orientés de couples de droites.

6.10 Soit D et D' deux droites passant par O et D_1 et D'_1 deux droites passant par O et orthogonales respectivement à D et D' . Montrer que

$$(\widehat{D, D'}) = (\widehat{D_1, D'_1}) \quad [\pi].$$

6.11 On dit que deux couples de droites (D, D') et (D_1, D'_1) passant par O sont **isogonaux** si et seulement si (D, D') et (D_1, D'_1) ont les mêmes bissectrices. Démontrer que :

(D, D') et (D_1, D'_1) sont isogonaux

$$\iff (\widehat{D, D'}) = (\widehat{D_1, D'_1}) \quad [\pi].$$

Problèmes d'angles

6.12 On dit que deux couples de droites (D, D') et (D_1, D'_1) sont **antiparallèles** si et seulement si :

$$(\widehat{D, D'_1}) = (\widehat{D_1, D'}) \quad [\pi].$$

1. La relation définie précédemment est-elle une relation d'équivalence dans l'ensemble des couples de droites du plan ?

2. Montrer que quatre points A, B, C, D sont alignés ou cocycliques si et seulement si les couples de droites (AB, CD) et (AD, BC) sont antiparallèles.

3. Soit un triangle ABC . Montrer que le couple (AB, AC) et le couple formé par la droite (BC) et la tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC sont antiparallèles.

6.13 Soit un triangle ABC et M un point n'appartenant pas aux droites $(AB), (BC), (CA)$. On appelle A', B', C' les projetés orthogonaux de M respectivement sur $(BC), (CA), (AB)$.

1. Démontrer que :

$$(\widehat{C'A, C'M}) = (\widehat{BC, BM}) \quad [\pi]$$

$$(\widehat{C'B', C'M}) = (\widehat{AC, AM}) \quad [\pi].$$

2. Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC .

La droite $A'B'C'$ est appelée la **droite de Simson** associée à M .

6.14 Soit un triangle ABC et trois points A', B', C' respectivement sur les droites $(BC), (CA), (AB)$.

1. Montrer que les cercles $(AB'C'), (BC'A'), (CA'B')$, passent par un même point M .

2. Trouver une condition nécessaire et suffisante vérifiée par A', B', C' pour que M appartienne au cercle (ABC) .

6.15 Soit un triangle ABC . Construire un point M tel que :

$$(\widehat{MA, MB}) = (\widehat{MB, MC}) = (\widehat{MC, MA}) \quad [\pi].$$

6.16 On donne les points A, B, C, D ayant pour affixes respectives $-\frac{i}{4}, \frac{-1-i}{2}, \frac{i-1}{4}, \frac{-3+5i}{34}$ dans un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct. Calculer $(\widehat{CA}, \widehat{CB})$ et $(\widehat{DA}, \widehat{DB})$. En déduire que A, B, C, D sont cocycliques.

6.17 Soit quatre points distincts A, B, C, D ayant pour affixes respectives a, b, c, d dans un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct. Montrer que A, B, C, D sont alignés ou cocycliques si et seulement si

$$\frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)} \text{ est réel.}$$

Révision

6.18 On suppose le plan P orienté et rapporté à un repère orthonormé direct. Pour tout nombre réel k on définit la transformation ponctuelle φ_k du plan qui, à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que

$$x' = x \quad \text{et} \quad y' = -2kx + y.$$

1. Prouver que, quels que soient les réels k et k' ,

$$\varphi_{k'} \circ \varphi_k = \varphi_{(k'+k)}.$$

2. Établir que l'ensemble $\mathcal{F}$ des transformations φ_k est un groupe commutatif pour la loi $\circ$.

3. Déterminer les droites du plan globalement invariantes par toute transformation φ_k .

4. Soit D_1 et D_2 les droites d'équations respectives $y = m_1x$ et $y = m_2x$, où m_1 et m_2 désignent deux réels.

a) Si D_1 et D_2 ne sont pas orthogonales, calculer $\text{tg}(\widehat{D_1, D_2})$ en fonction de m_1 et m_2 .

b) Établir une relation que doivent vérifier m_1 et m_2 pour que l'on ait

$$(\widehat{D_1, D_2}) \equiv (\widehat{D'_1, D'_2}) \quad [\pi],$$

D'_1 et D'_2 étant les transformées respectives de D_1 et D_2 par une transformation φ_k donnée. Discuter.

6.19 B et C étant deux points donnés, soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points A tels que $(\widehat{AB, AC}) \equiv \alpha \quad [\pi]$. On suppose $\alpha \neq 0 \quad [\pi]$.

1. Montrer que le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle ABC est le point d'intersection d'une bissectrice intérieure ou extérieure de l'angle $\widehat{CBA}$ et d'une bissectrice intérieure ou extérieure de l'angle $\widehat{BCA}$.

Combien y a-t-il de tels cercles?

2. Montrer que si I est le centre de l'un de ces cercles, on a

$$(\widehat{IB, IC}) \equiv \frac{\alpha}{2} \quad \left[\frac{\pi}{2} \right].$$

3. Déterminer l'ensemble décrit par chacun de ces centres, lorsque A décrit $\mathcal{E}$.

4. Construire un triangle ABC connaissant la longueur a de $[B, C]$, une mesure A de l'angle $\widehat{BAC}$ ($0 < A < \pi$) et le rayon r du cercle inscrit dans le triangle ABC. Discuter suivant les valeurs de a, A, r .

6.20 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(1) \quad (z-1)^5 = (z+1)^5.$$

2. Dans un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, déterminer :

a) l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1;$$

b) l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$\arg \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \equiv 0 \quad [2\pi].$$

3. Quelles sont les affixes des points d'intersection des deux ensembles précédents?

7

ISOMÉTRIES DU PLAN

Nous ferons l'étude dans un plan P et nous noterons $\vec{P}$ l'espace vectoriel associé (ensemble des vecteurs du plan).

Vous avez étudié en Seconde et en Première les translations, rotations, symétries centrales, symétries orthogonales du plan P qui sont des isométries (applications de P dans P conservant les distances).

Nous allons faire une étude des isométries, plus générale, à la lumière des endomorphismes de $\vec{P}$ associés (isométries vectorielles de $\vec{P}$) et des résultats acquis en Première.

7.1 ISOMÉTRIES VECTORIELLES

Définition

On appelle isométrie vectorielle de $\vec{P}$ tout endomorphisme de $\vec{P}$ conservant la norme.

Soit φ une application de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$. Montrons que les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) φ est un *endomorphisme* conservant la norme (c'est-à-dire une isométrie vectorielle de $\vec{P}$).

(2) φ est une *application* conservant le produit scalaire.

(3) φ est un *endomorphisme* tel qu'il existe une base orthonormée ayant pour image une base orthonormée.

Il suffit de montrer que l'on a les implications (1) $\implies$ (2), (2) $\implies$ (3),

(3) $\implies$ (1).

■ Démonstration de (1) $\implies$ (2)

Soit φ un endomorphisme de $\vec{P}$ conservant la norme ce qui veut dire :

$$(\forall \vec{v} \in \vec{P}) \quad \|\varphi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|.$$

Calculons $\vec{v} \cdot \vec{v}'$ et $\varphi(\vec{v}) \cdot \varphi(\vec{v}')$ à l'aide des normes. Quels que soient $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ de $\vec{P}$, on a :

$$\|\vec{v} + \vec{v}'\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{v}'\|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{v}'$$

donc
$$\vec{v} \cdot \vec{v}' = \frac{1}{2} (\|\vec{v} + \vec{v}'\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}'\|^2)$$

de même

$$\varphi(\vec{v}) \cdot \varphi(\vec{v}') = \frac{1}{2} (\|\varphi(\vec{v}) + \varphi(\vec{v}')\|^2 - \|\varphi(\vec{v})\|^2 - \|\varphi(\vec{v}')\|^2)$$

comme φ est un endomorphisme de $\vec{P}$ qui conserve la norme :

$$\|\varphi(\vec{v}) + \varphi(\vec{v}')\| = \|\varphi(\vec{v} + \vec{v}')\| = \|\vec{v} + \vec{v}'\|$$

$$\|\varphi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|, \quad \|\varphi(\vec{v}')\| = \|\vec{v}'\|$$

donc

$$\varphi(\vec{v}) \cdot \varphi(\vec{v}') = \vec{v} \cdot \vec{v}'$$

on dit que φ conserve le produit scalaire.

■ Démonstration de (2) $\implies$ (3)

Soit φ une application de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$ qui conserve le produit scalaire.

● Montrons que φ est un endomorphisme de $\vec{P}$ c'est-à-dire que, quels que soient $\vec{v}$, $\vec{v}'$ de $\vec{P}$ et λ de $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \varphi(\vec{v} + \vec{v}') = \varphi(\vec{v}) + \varphi(\vec{v}') \\ \varphi(\lambda \vec{v}) = \lambda \varphi(\vec{v}) \end{cases}$$

pour cela montrons que

$$\begin{cases} (\varphi(\vec{v} + \vec{v}') - \varphi(\vec{v}) - \varphi(\vec{v}'))^2 = 0 \\ (\varphi(\lambda \vec{v}) - \lambda \varphi(\vec{v}))^2 = 0. \end{cases}$$

En effet :

$$\begin{aligned} & (\varphi(\vec{v} + \vec{v}') - \varphi(\vec{v}) - \varphi(\vec{v}'))^2 \\ &= \|\varphi(\vec{v} + \vec{v}')\|^2 + \|\varphi(\vec{v})\|^2 + \|\varphi(\vec{v}')\|^2 - 2\varphi(\vec{v} + \vec{v}') \cdot \varphi(\vec{v}) \\ & \quad - 2\varphi(\vec{v} + \vec{v}') \cdot \varphi(\vec{v}') + 2\varphi(\vec{v}) \cdot \varphi(\vec{v}') \\ &= \|\vec{v} + \vec{v}'\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{v}'\|^2 - 2(\vec{v} + \vec{v}') \cdot \vec{v} - 2(\vec{v} + \vec{v}') \cdot \vec{v}' + 2\vec{v} \cdot \vec{v}' \\ &= (\vec{v} + \vec{v}')^2 + \vec{v}^2 + \vec{v}'^2 - 2(\vec{v} + \vec{v}') \cdot \vec{v} - 2(\vec{v} + \vec{v}') \cdot \vec{v}' + 2\vec{v} \cdot \vec{v}' = 0; \\ & (\varphi(\lambda \vec{v}) - \lambda \varphi(\vec{v}))^2 = \|\varphi(\lambda \vec{v})\|^2 + \lambda^2 \|\varphi(\vec{v})\|^2 - 2\lambda \varphi(\lambda \vec{v}) \cdot \varphi(\vec{v}) \\ &= \|\lambda \vec{v}\|^2 + \lambda^2 \|\vec{v}\|^2 - 2\lambda^2 \vec{v} \cdot \vec{v} = 0. \end{aligned}$$

● Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de $\vec{P}$. Puisque φ conserve le produit scalaire :

$$\varphi(\vec{i}) \cdot \varphi(\vec{i}) = \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \quad \text{donc} \quad \|\varphi(\vec{i})\| = 1$$

$$\varphi(\vec{j}) \cdot \varphi(\vec{j}) = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \quad \text{donc} \quad \|\varphi(\vec{j})\| = 1$$

$$\varphi(\vec{i}) \cdot \varphi(\vec{j}) = \vec{i} \cdot \vec{j} = 0.$$

Donc $(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}))$ est une base orthonormée.

■ Démonstration de (3) $\implies$ (1)

Soit φ un endomorphisme de $\tilde{P}$ tel qu'il existe une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ ayant pour image une base orthonormée $(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}))$.

Quel que soit $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{v}) &= x\varphi(\vec{i}) + y\varphi(\vec{j}) \\ \|\varphi(\vec{v})\| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \|\vec{v}\|.\end{aligned}$$

La norme de tout vecteur est conservée.

Nous pouvons énoncer :

Théorème

Soit φ une application de $\tilde{P}$ dans $\tilde{P}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) φ est un *endomorphisme* conservant la norme (c'est-à-dire une isométrie vectorielle de $\tilde{P}$).
- (2) φ est une *application* conservant le produit scalaire.
- (3) φ est un *endomorphisme* tel qu'il existe une base orthonormée ayant pour image une base orthonormée.

L'image de *toute* base orthonormée par une isométrie vectorielle est une base orthonormée.

Puisque l'image d'une base (orthonormée) est une base (orthonormée) par une isométrie vectorielle φ , cette application est **bijective**. C'est donc un automorphisme de $\tilde{P}$.

REMARQUE Une *application* φ de $\tilde{P}$ dans $\tilde{P}$ qui conserve la norme n'est pas nécessairement un endomorphisme de $\tilde{P}$ (cf. ex. 7.1 à la fin du chapitre).

7.2 ISOMÉTRIES AFFINES

a) Définition. Propriétés

Définition

On appelle **isométrie de P** toute application de P dans P conservant les distances.

Soit f une application de P dans P. Montrons que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est une *application* conservant les distances (c'est-à-dire une isométrie de P).
- (2) f est une *application affine* dont l'endomorphisme associé est une isométrie vectorielle de $\tilde{P}$.

- Soit f une application de P dans P qui conserve les distances ce qui veut dire que quels que soient les couples de points homologues (M, M') et (N, N') :

$$\|\overrightarrow{M'N'}\| = \|\overrightarrow{MN}\|.$$

Soit O un point de P , d'image O' . Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \vec{P} &\longrightarrow \vec{P} \\ \overrightarrow{OM} &\longmapsto \overrightarrow{O'M'} \end{aligned}$$

montrons qu'elle conserve le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN}^2 &= (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{ON}^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \\ \overrightarrow{M'N'}^2 &= (\overrightarrow{O'N'} - \overrightarrow{O'M'})^2 = \overrightarrow{O'N'}^2 + \overrightarrow{O'M'}^2 - 2\overrightarrow{O'M'} \cdot \overrightarrow{O'N'}. \end{aligned}$$

Puisque les distances sont conservées, $\overrightarrow{M'N'}^2 = \overrightarrow{MN}^2$, $\overrightarrow{O'M'}^2 = \overrightarrow{OM}^2$, $\overrightarrow{O'N'}^2 = \overrightarrow{ON}^2$. Donc

$$\overrightarrow{O'M'} \cdot \overrightarrow{O'N'} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}.$$

L'application φ conserve le produit scalaire, c'est donc une isométrie vectorielle de $\vec{P}$. L'application f est une application affine d'endomorphisme associé φ .

- Réciproquement, soit f une application affine de P dans P d'endomorphisme associé une isométrie vectorielle φ . Quels que soient les couples de points homologues (M, M') et (N, N') on a :

$$\|\overrightarrow{M'N'}\| = \|\varphi(\overrightarrow{MN})\| = \|\overrightarrow{MN}\|.$$

Les distances sont conservées donc f est une isométrie de P . Concluons :

Théorème

Soit f une application de P dans P . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est une application conservant les distances (c'est-à-dire une isométrie de P).**
- (2) f est une application affine dont l'endomorphisme associé est une isométrie vectorielle de $\vec{P}$.**

Il en résulte qu'une isométrie de P a les propriétés d'une application affine et, de plus, les propriétés qui découlent de ce que l'endomorphisme associé est une isométrie vectorielle. En particulier :

- une isométrie de P est déterminée par la donnée d'un couple de points homologues et de l'isométrie vectorielle associée;
- une isométrie conserve le barycentre, la convexité;
- elle conserve l'alignement de points, le parallélisme et l'orthogonalité;
- elle est bijective puisque l'isométrie vectorielle associée est bijective (cf. § 5.3 c)).

b) Effet d'une isométrie sur les longueurs et les aires

Soit f une isométrie du plan P .

Considérons un cercle Γ de centre O et de rayon R . Soit Γ' le cercle de centre $O' = f(O)$ et de rayon R . On a :

$$M \in \Gamma \iff \|\vec{OM}\| = R \iff \|\vec{O'M'}\| = R \iff M' \in \Gamma'.$$

Autrement dit $f(\Gamma) = \Gamma'$. La longueur de Γ est $2\pi R$ et celle de Γ' également.

Le disque circulaire D bordé par Γ :

$$\{M \in P; \|\vec{OM}\| \leq R\}$$

est transformé par f en le disque circulaire D' bordé par Γ' . Ces deux disques ont même rayon donc même aire πR^2 .

Soit A, B, C trois points non alignés d'images A', B', C' et H le projeté orthogonal de A sur (BC) . Son image est H' projeté orthogonal de A' sur $(B'C')$ puisque f conserve l'orthogonalité. L'aire du triangle ABC est

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{\|\vec{BC}\| \cdot \|\vec{AH}\|}{2}$$

et l'aire du triangle $A'B'C'$ est

$$\mathcal{A}(A'B'C') = \frac{\|\vec{B'C'}\| \cdot \|\vec{A'H'}\|}{2} = \frac{\|\vec{BC}\| \cdot \|\vec{AH}\|}{2}.$$

Soit $A_1 A_2 \dots A_n$ un polygone convexe de P , son image est un polygone $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ convexe puisque f conserve la convexité. L'aire du polygone $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ est

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(A'_1 A'_2 \dots A'_n) &= \mathcal{A}(A'_1 A'_2 A'_3) + \mathcal{A}(A'_1 A'_3 A'_4) + \dots + \mathcal{A}(A'_1 A'_{n-1} A'_n) \\ &= \mathcal{A}(A_1 A_2 A_3) + \mathcal{A}(A_1 A_3 A_4) + \dots + \mathcal{A}(A_1 A_{n-1} A_n) \\ &= \mathcal{A}(A_1 A_2 \dots A_n). \end{aligned}$$

Plus généralement, nous *admettons* que si F est une partie du plan de longueur l (resp. d'aire a), son image par une isométrie a pour longueur l (resp. pour aire a).

c) Groupe des isométries de P

Soit J l'ensemble des isométries du plan P . Montrons que cet ensemble, muni de la composition des applications, est un groupe.

- la loi $\circ$ est *interne* car si f et g sont deux isométries de P , quels que soient M et N de P :

$$M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M''$$

$$N \xrightarrow{f} N' \xrightarrow{g} N''.$$

$$\text{On a } \|\vec{M'N'}\| = \|\vec{MN}\| \quad \text{et} \quad \|\vec{M''N''}\| = \|\vec{M'N'}\|$$

$$\text{donc } \|\vec{M''N''}\| = \|\vec{MN}\|$$

et $g \circ f$ est une isométrie de P .

- la composition des applications est toujours *associative* donc en particulier dans J ;
- l'*élément neutre* est id_P qui est une isométrie de P ;

- si $f \in \mathcal{I}$, on a vu que f est bijective. Montrons que f^{-1} est une isométrie de P . Quels que soient M' et N' de P , soit M et N les antécédents uniques de M' et N' par f :

$$M \xrightarrow{f} M'$$

$$N \xrightarrow{f} N'.$$

On a $\|\overrightarrow{M'N'}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$ puisque $f \in \mathcal{I}$. Les points M et N sont les images de M' et N' par f^{-1} et on a $\|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{M'N'}\|$ donc f^{-1} est une isométrie de P .
Donc tout élément f de $\mathcal{I}$ admet un *symétrique* f^{-1} élément de $\mathcal{I}$.

Rappelons que le groupe affine de P est l'ensemble des bijections affines de P , muni de la composition des applications. Donc :

Théorème

L'ensemble $\mathcal{I}$ des isométries du plan P , muni de la composition des applications, est un groupe. C'est un sous-groupe du groupe affine de P .

7.3 RAPPELS DE PREMIÈRE

Rappelons, sans les démontrer, les résultats de la classe précédente.

a) Isométries de P laissant invariant un point donné

- L'ensemble $\mathcal{I}_I$ des isométries de P laissant invariant un point donné I est un groupe non commutatif pour la composition des applications; c'est un sous-groupe de $(\mathcal{I}, \circ)$.

- $\mathcal{I}_I$ est formé de :

— l'ensemble $\mathcal{I}_I^-$ des symétries orthogonales (ou axiales) d'axes passant par I ,

— l'ensemble $\mathcal{I}_I^+$ des rotations de centre I , composées de deux symétries orthogonales d'axes passant par I .

$(\mathcal{I}_I^+, \circ)$ est un sous-groupe commutatif de $(\mathcal{I}_I, \circ)$.

$\{\mathcal{I}_I^-, \mathcal{I}_I^+\}$ est une partition de $\mathcal{I}_I$ c'est-à-dire que :

$$\mathcal{I}_I^- \cup \mathcal{I}_I^+ = \mathcal{I}_I \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_I^- \cap \mathcal{I}_I^+ = \emptyset.$$

b) Isométries vectorielles associées

- L'isométrie vectorielle associée à la symétrie orthogonale d'axe D passant par I est la **symétrie orthogonale d'axe $\vec{D}$** qui associe à tout vecteur $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ ($\vec{v}' \in \vec{D}$, $\vec{v}''$ orthogonal à $\vec{D}$) le vecteur $\vec{v}' - \vec{v}''$.

Elle transforme un angle orienté de vecteurs en son opposé.

- L'isométrie vectorielle associée à la rotation de centre I et d'angle θ (nous dirons « angle θ » pour « angle orienté de mesure θ », le plan étant supposé orienté) est la **rotation vectorielle d'angle θ** qui associe à tout vecteur $\vec{v}$ le vecteur $\vec{v}'$ tel que :

$$\begin{cases} \|\vec{v}\| = \|\vec{v}'\| \\ \text{si } \vec{v} \neq \vec{0}, (\widehat{\vec{v}, \vec{v}'}) \equiv \theta \quad [2\pi]. \end{cases}$$

Elle conserve les angles orientés de vecteurs.

7.4 ENSEMBLE DES ISOMÉTRIES VECTORIELLES DE $\tilde{P}$

Soit φ une isométrie vectorielle quelconque de $\tilde{P}$. Considérons un point I de P et f l'application affine laissant I invariant et d'endomorphisme associé φ . L'application f est une isométrie de P (cf. § 7.2), laissant I invariant donc $f \in \mathcal{I}_1$. Par suite, φ est soit une symétrie vectorielle orthogonale, soit une rotation vectorielle.

Théorème

L'ensemble des isométries vectorielles de $\tilde{P}$ est l'ensemble des symétries vectorielles orthogonales et des rotations vectorielles de $\tilde{P}$.

7.5 DÉPLACEMENTS

a) Définitions. Exemples

Définitions

On appelle **déplacement de P** toute isométrie de P dont l'endomorphisme associé est une rotation vectorielle.
L'angle d'un déplacement est l'angle de la rotation vectorielle associée.

- EXEMPLES**
1. Une translation de P est un déplacement car l'endomorphisme associé est $\text{id}_{\tilde{P}}$ qui est la rotation vectorielle d'angle nul.
 2. Une rotation de centre I et d'angle θ est un déplacement car l'endomorphisme associé est la rotation vectorielle d'angle θ (cf. § 7.3 b)).

b) Groupe des déplacements de P

Notons $\mathcal{J}^+$ l'ensemble des déplacements du plan P. Montrons que cet ensemble, muni de la composition des applications, est un groupe.

- Soit f_1 et f_2 deux déplacements de P . On sait que $f_2 \circ f_1$ est une isométrie de P (la composée de deux isométries est une isométrie cf. § 7.2 b)). Appelons ρ_{θ_1} et ρ_{θ_2} les rotations vectorielles d'angles θ_1 et θ_2 associées à f_1 et f_2 . On a

$$\rho_{\theta_2} \circ \rho_{\theta_1} = \rho_{\theta_2 + \theta_1}.$$

Donc l'endomorphisme associé à $f_2 \circ f_1$ est la rotation vectorielle $\rho_{\theta_2 + \theta_1}$. Par suite, $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{J}^+$. Donc la loi $\circ$ est *interne* dans $\mathcal{J}^+$.

- La composition des applications est toujours *associative* donc en particulier dans $\mathcal{J}^+$.

- L'*élément neutre* est id_P qui est un déplacement.

- Si $f \in \mathcal{J}^+$, on sait que f^{-1} est une isométrie de P (cf. § 7.2 b)). Soit ρ_θ la rotation vectorielle associée à f . L'endomorphisme associé à f^{-1} est $(\rho_\theta)^{-1} = \rho_{-\theta}$ qui est la rotation vectorielle d'angle $-\theta$. Donc $f^{-1} \in \mathcal{J}^+$. Tout élément f de $\mathcal{J}^+$ admet bien un *symétrique* f^{-1} élément de $\mathcal{J}^+$.

Théorème

L'ensemble $\mathcal{J}^+$ des déplacements du plan P , muni de la composition des applications, est un groupe. C'est un sous-groupe du groupe $\mathcal{J}$ des isométries de P .

Si l'on compose des translations et des rotations obtient-on des translations ou des rotations? Existe-t-il des déplacements de P qui ne soient pas une translation, ni une rotation? Nous allons répondre à ces questions en cherchant à décomposer une translation ou une rotation de P en symétries orthogonales.

c) Composition de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

Soit s_D et $s_{D'}$ deux symétries orthogonales d'axes parallèles D et D' (fig. 1).

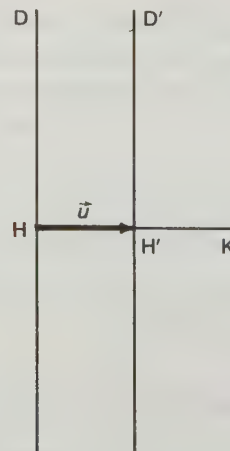


fig. 1

Elles sont associées au même endomorphisme σ qui est la symétrie vectorielle orthogonale d'axe la direction $\vec{D}$ de D et D' . L'application $s_{D'} \circ s_D$ est une isométrie d'endomorphisme associé $\sigma \circ \sigma = \text{id}_P$ donc $s_{D'} \circ s_D$ est une translation. Déterminons le vecteur de cette translation : soit H un point de D , on a

$$s_{D'} \circ s_D(H) = s_{D'}(H) = K$$

où K est le symétrique de H par rapport à D' . Soit H' le milieu de (H, K) , le vecteur de la translation est

$$\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{HH'} = 2\vec{u},$$

$\vec{u}$ étant le vecteur orthogonal à la direction de D et D' et tel que D a pour image D' par la translation $t_{\vec{u}}$. On peut écrire :

$$s_{D'} \circ s_D = t_{2\vec{u}}$$

Théorème

La composée $s_{D'} \circ s_D$ de deux symétries orthogonales s_D et $s_{D'}$ d'axes parallèles D et D' est la translation $t_{2\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est le vecteur orthogonal à la direction de D et D' et tel que $t_{\vec{u}}(D) = D'$.

Réciproquement soit $t_{\vec{v}}$ une translation de P de vecteur $\vec{v}$. Cherchons à la décomposer sous la forme $s_{D'} \circ s_D$:

- on peut choisir D arbitrairement mais de direction orthogonale à $\vec{v}$, soit $D' = t_{\frac{1}{2}\vec{v}}(D)$, on a bien $s_{D'} \circ s_D = t_{\vec{v}}$;
- on peut commencer par choisir arbitrairement D' de direction orthogonale à $\vec{v}$ soit alors $D = t_{-\frac{1}{2}\vec{v}}(D')$, on a bien encore $s_{D'} \circ s_D = t_{\vec{v}}$. Concluons :

Théorème

Toute translation de P est la composée, d'une infinité de manières, de deux symétries orthogonales d'axes parallèles.

d) Composition de deux symétries orthogonales d'axes sécants

Rappelons la démonstration faite en Première. Supposons P orienté.

Soit s_D et $s_{D'}$ deux symétries orthogonales d'axes D et D' sécants en I . Soit $M' = s_D(M)$, $M'' = s_{D'}(M')$ et H et H' les milieux respectivement de (M, M') et (M', M'') .

Si M est en I , M' et M'' sont aussi confondus en I .

Si $M \neq I$, $\|\overrightarrow{IM}\| = \|\overrightarrow{IM'}\| = \|\overrightarrow{IM''}\|$

$$\begin{aligned} (\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM''}}) &= (\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}}) + (\widehat{\overrightarrow{IM'}, \overrightarrow{IM''}}) & [2\pi] \\ &= 2(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{IM'}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{IM'}, \vec{u}'}) & [2\pi] \end{aligned}$$

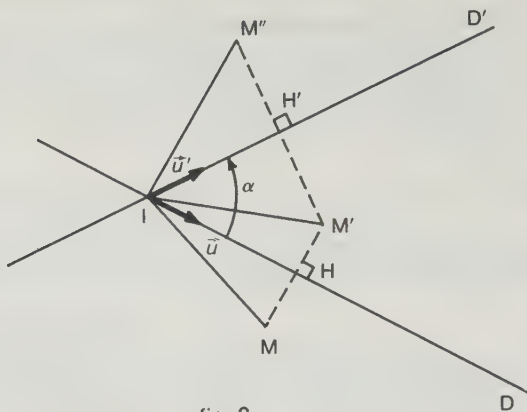


fig. 2

(en appelant $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs directeurs de D et D')

$$\equiv 2(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) \quad [2\pi]$$

$$\equiv 2\alpha \quad [2\pi]$$

(en appelant α une mesure de l'angle orienté du couple (D, D')). On peut écrire :

$$s_{D'} \circ s_D = r(I, 2\alpha)$$

Théorème

La composée $s_{D'} \circ s_D$ de deux symétries orthogonales s_D et $s_{D'}$ d'axes D et D' sécants en I est la rotation de centre I et d'angle de mesure $2(\widehat{D, D'})$.

Réciproquement soit $r(I, \theta)$ une rotation de P , de centre I et d'angle θ . Cherchons à la décomposer sous la forme $s_{D'} \circ s_D$:

- On peut commencer par choisir D arbitraire passant par I . Soit D' la droite passant par I et telle que $(\widehat{D, D'}) \equiv \frac{\theta}{2} \quad [\pi]$. On a bien :

$$s_{D'} \circ s_D = r\left(I, 2 \frac{\theta}{2}\right) = r(I, \theta).$$

- On peut commencer par choisir D' arbitraire passant par I , soit alors D la droite passant par I et telle que $(\widehat{D', D}) \equiv -\frac{\theta}{2} \quad [\pi]$. On a bien :

$$s_{D'} \circ s_D = r\left(I, 2 \frac{\theta}{2}\right) = r(I, \theta).$$

Concluons :

Théorème

Toute rotation de P de centre I est la composée, d'une infinité de manières, de deux symétries orthogonales d'axes sécants en I .

e) Composition de deux rotations

Soit r_1 et r_2 deux rotations de centres I_1 et I_2 et d'angles θ_1 et θ_2 . La composée de ces deux déplacements est un déplacement d'endomorphisme associé la rotation vectorielle d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

• Si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \pmod{2\pi}$, cette rotation vectorielle est $\text{id}_{\mathbb{P}}$ donc $r_2 \circ r_1$ est une translation (cf. § 5.5 a)); le vecteur de cette translation est $\overrightarrow{I_1 I'_1}$ en appelant I'_1 l'image de I_1 par $r_2 \circ r_1$ c'est-à-dire le point

$$I'_1 = r_2 \circ r_1(I_1) = r_2(I_1).$$

• Si $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$:

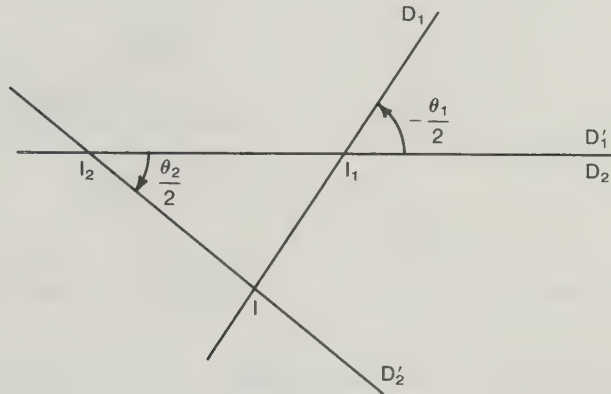


fig. 3

si $I_1 = I_2$, $r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre I_1 et d'angle $\theta_1 + \theta_2$;
si $I_1 \neq I_2$, utilisons la décomposition du sous-paragraphe précédent. On peut écrire r_1 et r_2 sous la forme :

$$r_1 = s_{D'_1} \circ s_{D_1} \quad \text{et} \quad r_2 = s_{D'_2} \circ s_{D_2}$$

d'où

$$r_2 \circ r_1 = s_{D'_2} \circ s_{D_2} \circ s_{D'_1} \circ s_{D_1}.$$

On pourra simplifier si l'on choisit $D_2 = D'_1 = (I_1 I_2)$, on aura alors $s_{D_2} \circ s_{D'_1} = \text{id}_{\mathbb{P}}$ d'où

$$r_2 \circ r_1 = s_{D'_2} \circ s_{D_1}.$$

D_1 étant la droite passant par I_1 telle que $(\widehat{D'_1}, \widehat{D_1}) \equiv -\frac{\theta_1}{2} \pmod{\pi}$.

D'_2 étant la droite passant par I_2 telle que $(\widehat{D_2}, \widehat{D'_2}) \equiv \frac{\theta_2}{2} \pmod{\pi}$.

Les droites D_1 et D'_2 ne sont pas parallèles car :

$$\begin{aligned} (\widehat{D_1}, \widehat{D'_2}) &\equiv (\widehat{D_1}, \widehat{D'_1}) + (\widehat{D'_1}, \widehat{D'_2}) \pmod{\pi} \\ &\equiv \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} \pmod{\pi} \\ &\not\equiv 0 \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Soit I le point d'intersection de D_1 et D'_2 . On a :

$$r_2 \circ r_1 = s_{D'_2} \circ s_{D_1} = r\left(I, 2 \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) = r(I, \theta_1 + \theta_2).$$

f) Composition d'une translation et d'une rotation

Soit t une translation de vecteur $\vec{v}$ et r une rotation de centre I et d'angle θ .

Si $\vec{v} = \vec{0}$, $r \circ t = r$.

Si $\theta \equiv 0 [2\pi]$, $r \circ t = t$.

Supposons $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\theta \neq 0 [2\pi]$, pour étudier $r \circ t$ utilisons des décompositions en symétries axiales de la forme :

$$t = s_{D'_1} \circ s_{D_1} \quad \text{et} \quad r = s_{D'_2} \circ s_{D_2}$$

d'où

$$r \circ t = s_{D'_2} \circ s_{D_2} \circ s_{D'_1} \circ s_{D_1}.$$

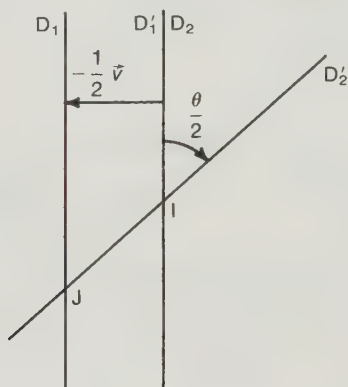


fig. 4

On pourra simplifier si l'on choisit $D_2 = D'_1$ droite contenant I et de direction orthogonale à $\vec{v}$ (fig. 4), on aura alors $s_{D_2} \circ s_{D'_1} = \text{id}_P$. D'où :

$$r \circ t = s_{D'_2} \circ s_{D_1}$$

D_1 étant l'image de D'_1 par la translation $t_{-\frac{1}{2}\vec{v}}$.

D'_2 étant la droite passant par I telle que $(\widehat{D_2, D'_2}) \equiv \frac{\theta}{2} [\pi]$.

Les droites D_1 et D'_2 ne sont pas parallèles car

$$(\widehat{D_1, D'_2}) \equiv (\widehat{D_2, D'_2}) [\pi]$$

$$\equiv \frac{\theta}{2} [\pi]$$

$$\neq 0 [\pi].$$

Soit J le point d'intersection de D_1 et D'_2 . On a :

$$r \circ t = s_{D'_2} \circ s_{D_1} = r\left(J, \frac{2\theta}{2}\right) = r(J, \theta).$$

REMARQUE Vous étudierez, de même, $t \circ r$.

g) conséquence

Existe-t-il d'autres déplacements de P que les translations et les rotations ?
 Soit f un déplacement quelconque de P . Considérons un couple de points homologues particuliers (A, A') et un couple de points homologues (M, M') quelconques (fig. 5).

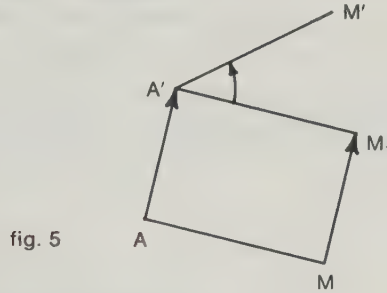


fig. 5

Soit $t_{\overrightarrow{AA'}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. On a :

$$A \xrightarrow{t_{\overrightarrow{AA'}}} A' \xrightarrow{g} A'$$

$$M \xrightarrow{\quad} M_1 \xrightarrow{\quad} M'$$

g étant telle que : $f = g \circ t_{\overrightarrow{AA'}}$. Donc en composant à droite par $t_{\overrightarrow{A'A}}$:

$$f \circ t_{\overrightarrow{A'A}} = g$$

g est la composée de deux déplacements, donc g est un déplacement. Ce déplacement a un point invariant A' , donc g est une rotation de centre A' . Puisque $f = g \circ t_{\overrightarrow{AA'}}$, l'application f composée d'une translation et d'une rotation est une translation ou une rotation d'après le sous-paragraphe précédent.

Théorème

L'ensemble des déplacements du plan P est l'ensemble des translations et des rotations de ce plan.

7.6 DÉTERMINATION D'UN DÉPLACEMENT

a) Détermination analytique

Le plan P étant orienté et rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit f un déplacement qui transforme O en $O'(x_0, y_0)$ et d'endomorphisme associé la rotation vectorielle ρ_θ d'angle θ . L'image M' d'un point quelconque M de P est définie par :

$$\overrightarrow{OM'} = \rho_\theta(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{OO'}.$$

Déterminons la matrice de ρ_θ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Les colonnes de la matrice sont formées des coordonnées des images $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ de $\vec{i}$ et $\vec{j}$. On a (fig. 6) :

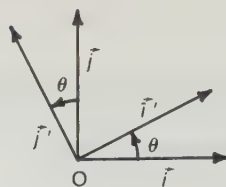


fig. 6

$$(\widehat{i, i'}) = \theta \quad [2\pi] \quad \text{et} \quad (\widehat{j, j'}) = \theta \quad [2\pi]$$

d'où :

$$i' = \cos \theta \, i + \sin \theta \, j$$

on a :

$$(\widehat{i, j'}) = (\widehat{i, j}) + (\widehat{j, j'}) = \frac{\pi}{2} + \theta \quad [2\pi]$$

d'où :

$$j' = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) i + \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) j \\ = -\sin \theta \, i + \cos \theta \, j.$$

La matrice de ρ_θ dans la base (i, j) est donc :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées du point M' image par f du point $M(x, y)$ sont :

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta + x_0 \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta + y_0. \end{cases}$$

Réciproquement l'application qui associe à $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = ax - by + x_0 \\ y' = bx + ay + y_0 \end{cases}$$

(a, b, x_0, y_0 réels donnés et $a^2 + b^2 = 1$) est le déplacement qui associe à O le point $O'(x_0, y_0)$ et d'endomorphisme associé la rotation vectorielle d'angle θ déterminé à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) par :

$$\begin{cases} \cos \theta = a \\ \sin \theta = b. \end{cases}$$

b) Exercice résolu

Étant donnés quatre points A, B, A', B' du plan orienté P tels que $A \neq B$ et $\|A'B'\| = \|AB\|$, déterminer un déplacement f de P tel que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$. Lorsque ce déplacement est une rotation, construire son centre.

Si f existe, l'endomorphisme associé est nécessairement la rotation vectorielle ρ_θ d'angle de mesure $\theta \equiv (\widehat{AB, A'B'}) \quad [2\pi]$.

Réciproquement, l'application affine f qui associe à A le point A' et d'endomorphisme associé ρ_θ répond à la question : c'est un déplacement transformant A en A' et, puisque $\rho_\theta(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$, il transforme B en B' .

Précisons ce déplacement.

f est une translation si et seulement si $\rho_\theta = \text{id}_P$ c'est-à-dire $\theta \equiv 0 \quad [2\pi]$ c'est-à-dire $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. Dans ce cas, f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

- Si $\theta \neq 0 \ [2\pi]$, f est une rotation de centre I que nous allons construire :
 - si $A = A'$, le centre I est en A ;
 - si $B = B'$, le centre I est en B ;
 - si $\theta \equiv \pi \ [2\pi]$, on a $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$. Le point I est le milieu commun de (A, A') et (B, B') et f est la symétrie de centre I ;
 - écartons les cas particuliers précédents, puisque

$$\|\overrightarrow{IA}\| = \|\overrightarrow{IA'}\| \quad \text{et} \quad (\widehat{IA}, \widehat{IA'}) \equiv \theta \ [2\pi],$$

I est le point d'intersection de la médiatrice de (A, A') et de l'arc de cercle ensemble des points M tels que $(\widehat{MA}, \widehat{MA'}) \equiv \theta \ [2\pi]$ (cf. § 6.3 b)) (fig. 7).

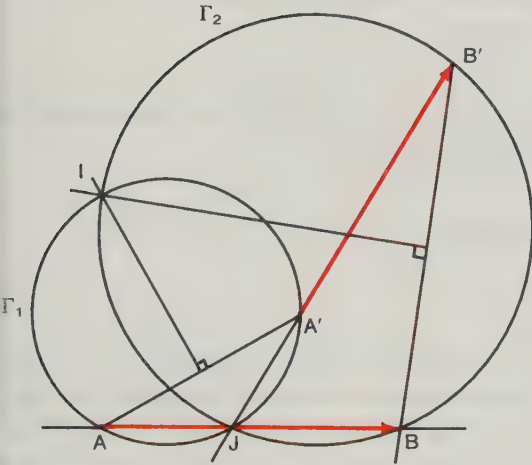


fig. 7

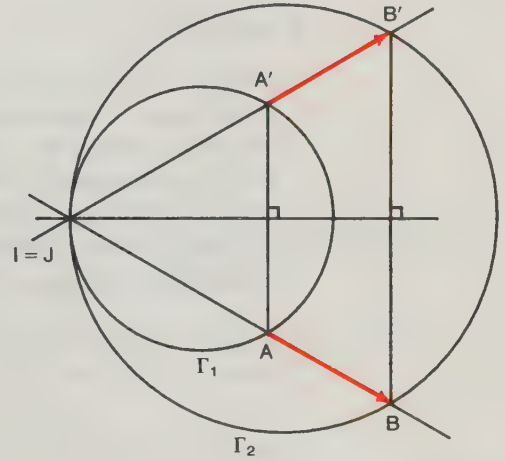


fig. 8

Remarque

Donnons d'autres constructions de I en écartant les cas évidents $A = A'$, $B = B'$, $\theta \equiv \pi \ [2\pi]$.

— I est également sur la médiatrice de (B, B') et sur l'arc ensemble des points M tels que $(\widehat{MB}, \widehat{MB'}) \equiv \theta \ [2\pi]$.

— Soit J le point de concours des droites (AB) et $(A'B')$. Supposons J distinct de A, A', B, B' :

$$(\widehat{JA}, \widehat{JA'}) \equiv (\widehat{IA}, \widehat{IA'}) \quad [\pi]$$

$$(\widehat{JB}, \widehat{JB'}) \equiv (\widehat{IB}, \widehat{IB'}) \quad [\pi]$$

les points I, J, A, A' sont donc cocycliques sur un cercle Γ_1 et les points I, J, B, B' sont cocycliques sur un cercle Γ_2 . Si Γ_1 et Γ_2 sont tangents en I , on a $I = J$ (fig. 8). Si Γ_1 et Γ_2 ne sont pas tangents, le point I est le point d'intersection de Γ_1 et Γ_2 autre que J . En effet, si I était en J , dans la rotation de centre J , les droites (AA') et (BB') seraient parallèles et les cercles Γ_1 et Γ_2 seraient tangents.

7.7 ANTIDÉPLACEMENTS (ne figurent pas au programme de Terminale E)

a) Définition. Exemple

Définition

On appelle **antidépacement** de P toute isométrie de P dont l'endomorphisme associé est une symétrie vectorielle orthogonale.

EXEMPLE Une symétrie orthogonale d'axe D est un antidépacement car l'endomorphisme associé est la symétrie vectorielle orthogonale d'axe $\vec{D}$.

b) Étude de l'ensemble des antidépacements

■ Ensemble $\mathcal{J}^-$

Notons $\mathcal{J}^-$ l'ensemble des antidépacements du plan P . Cet ensemble n'est pas stable pour la composition des applications puisque la composée de deux symétries orthogonales est une translation ou une rotation (cf. § 7.5 c) et d)). Plus généralement, la composée d'un nombre pair (resp. impair) d'antidépacements est un déplacement (resp. un antidépacement).

$\mathcal{J}^+$ désignant l'ensemble des déplacements de P et $\mathcal{J}$ désignant l'ensemble des isométries de P , on a :

$$\mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^- = \mathcal{J} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}^+ \cap \mathcal{J}^- = \emptyset$$

donc $\{\mathcal{J}^+, \mathcal{J}^-\}$ est une partition de $\mathcal{J}$.

■ Recherche de tous les éléments de $\mathcal{J}^-$

Existe-t-il d'autres antidépacements de P que les symétries orthogonales? Nous allons raisonner comme au § 7.5 g). Soit f un antidépacement quelconque de P . Considérons un couple de points homologues particuliers (A, A') et un couple de points homologues (M, M') quelconques (fig. 9).

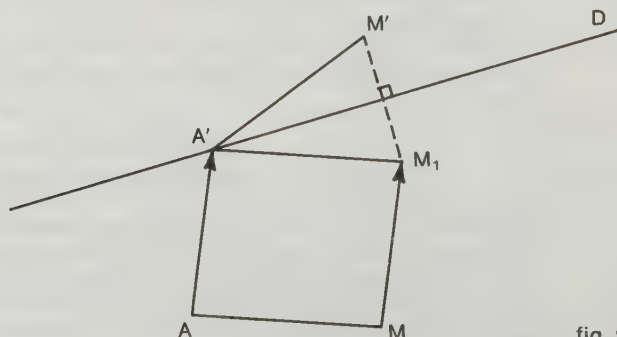


fig. 9

Soit $t_{\overrightarrow{AA'}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. On a :

$$A \xrightarrow{t_{\overrightarrow{AA'}}} A' \xrightarrow{g} A'$$

$$M \xrightarrow{\quad} M_1 \xrightarrow{\quad} M'$$

g étant telle que : $f = g \circ t_{\overrightarrow{AA'}}$. Donc en composant à droite par $t_{\overrightarrow{A'A}}$:

$$f \circ t_{\overrightarrow{A'A}} = g$$

g est la composée de deux isométries de P donc g est une isométrie. Si l'on appelle σ la symétrie vectorielle orthogonale associée à f , l'endomorphisme associé à g est $\sigma \circ \text{id}_P = \sigma$. De plus, A' est invariant par g . Donc (cf. § 7.3) g est une symétrie orthogonale d'axe D passant par A' , la direction $\vec{D}$ de D étant l'axe de la symétrie vectorielle orthogonale σ .

Puisque $f = g \circ t_{\overrightarrow{AA'}}$, l'antidépacement f est la composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale.

Il existe une infinité de décomposition de ce type puisque le choix du couple de points homologues (A, A') est arbitraire. Cherchons une forme plus simple.

• Si $\overrightarrow{AA'}$ est orthogonal à $\vec{D}$, on peut décomposer $t_{\overrightarrow{AA'}}$ sous la forme $s_D \circ s_{D'}$ avec $D' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}}(D)$. On a alors :

$$f = s_D \circ s_{D'} \circ s_{D'}$$

$$f = s_{D'}$$

f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D' parallèle à D .

• Si $\overrightarrow{AA'}$ n'est pas orthogonal à $\vec{D}$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{v}' + \vec{v}'' \quad \text{avec } \vec{v}' \in \vec{D} \text{ et } \vec{v}'' \text{ orthogonal à } \vec{D}$$

on a alors :

$$f = s_D \circ t_{\overrightarrow{AA'}} = s_D \circ t_{\vec{v}''} \circ t_{\vec{v}'}$$

Comme $\vec{v}''$ est orthogonal à $\vec{D}$, $s_D \circ t_{\vec{v}''}$ est une symétrie orthogonale $s_{D'}$ par rapport à une droite D' parallèle à D d'où finalement

$$f = s_{D'} \circ t_{\vec{v}'}$$

avec $\vec{v}' \in \vec{D}'$ (ou $\vec{D}$ puisque $\vec{D}' = \vec{D}$).

• Montrons que la décomposition précédente est *unique* donc indépendante du couple de points homologues (A, A') . Supposons qu'il existe une autre décomposition $f = s_{D_1} \circ t_{\vec{v}_1}$ avec $\vec{v}_1 \in \vec{D}_1$:

$$s_{D'} \circ t_{\vec{v}'} = s_{D_1} \circ t_{\vec{v}_1}$$

d'où en composant à gauche par s_{D_1} et à droite par $t_{-\vec{v}'}$:

$$s_{D_1} \circ s_{D'} = t_{\vec{v}_1} \circ t_{-\vec{v}'} = t_{\vec{v}_1 - \vec{v}'}$$

$s_{D_1} \circ s_{D'}$ étant une translation, D_1 et D' sont parallèles, appelons $\vec{D}$ leur direction commune, on a $\vec{v}_1 - \vec{v}'$ orthogonal à $\vec{D}$ mais $\vec{v}_1 - \vec{v}' \in \vec{D}$ donc $\vec{v}_1 - \vec{v}' = \vec{0}$. Par suite $t_{\vec{v}_1} = t_{\vec{v}'}$ d'où $s_{D_1} = s_{D'}$.

- Montrons que les deux applications $s_{D'}$ et $t_{\vec{v}'}$ commutent c'est-à-dire que

$$s_{D'} \circ t_{\vec{v}'} = t_{\vec{v}'} \circ s_{D'}.$$

En effet, $s_{D'} \circ t_{\vec{v}'}$ et $t_{\vec{v}'} \circ s_{D'}$ ont le même endomorphisme associé

$$\sigma \circ \text{id}_{\vec{P}} = \text{id}_{\vec{P}} \circ \sigma = \sigma,$$

il suffit de montrer qu'il existe un point B ayant même image par $s_{D'} \circ t_{\vec{v}'}$ et $t_{\vec{v}'} \circ s_{D'}$. Soit B un point de D' :

$$s_{D'} \circ t_{\vec{v}'}(B) = t_{\vec{v}'}(B)$$

$$t_{\vec{v}'} \circ s_{D'}(B) = t_{\vec{v}'}(B).$$

On a bien

$$(1) \quad s_{D'} \circ t_{\vec{v}'} = t_{\vec{v}'} \circ s_{D'}$$

c'est la *forme réduite* ou *canonique* de l'antidépacement f .

- Réciproquement toute application composée du type (1) est un antidépacement car c'est une isométrie de P (composée de deux isométries) d'endomorphisme associé $\sigma \circ \text{id}_{\vec{P}} = \sigma$, σ étant la symétrie vectorielle associée à $s_{D'}$.

Théorème

L'ensemble des antidépacements de P est l'ensemble :

- des symétries orthogonales;
- des composées d'une translation et d'une symétrie orthogonale, le vecteur de la translation appartenant à la direction de l'axe de la symétrie orthogonale (les deux applications commutent).

REMARQUE Considérons la forme réduite (1) de l'antidépacement f . La droite D' est l'ensemble des milieux des couples de points homologues (M, M') . Sa direction est l'axe $\vec{D}$ de la symétrie vectorielle orthogonale associée à f .

c) Détermination analytique

Le plan P étant orienté et rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit f un antidépacement qui transforme O en $O'(x_0, y_0)$ et d'endomorphisme associé la symétrie vectorielle orthogonale σ d'axe $\vec{D}$. L'image M' d'un point quelconque M de P est définie par :

$$\overrightarrow{OM'} = \sigma(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{OO'}.$$

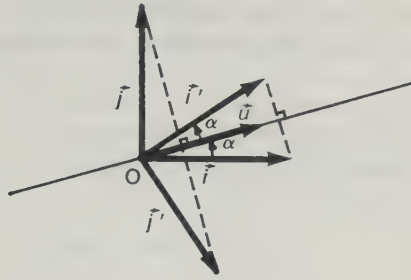


fig. 10

Déterminons la matrice de σ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Les colonnes de la matrice sont formées des coordonnées des images $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ par σ . Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\vec{D}$. Posons $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) \equiv \alpha \quad [2\pi]$ (fig. 10). On a :

$$(\widehat{\vec{i}, \vec{i}'}) \equiv 2\alpha \quad [2\pi].$$

$$(\widehat{\vec{i}', \vec{j}'}) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

$$(\widehat{\vec{i}, \vec{j}'}) \equiv (\widehat{\vec{i}, \vec{i}'}) + (\widehat{\vec{i}', \vec{j}'}) \equiv 2\alpha - \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

d'où :

$$\vec{i}' = \cos 2\alpha \vec{i} + \sin 2\alpha \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{j}' &= \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \vec{i} + \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \vec{j} \\ &= \sin 2\alpha \vec{i} - \cos 2\alpha \vec{j}. \end{aligned}$$

La matrice de σ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est donc :

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées du point M' image par f du point $M(x, y)$ sont :

$$\begin{cases} x' = x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha + x_0 \\ y' = x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha + y_0. \end{cases}$$

Réciproquement l'application qui associe à $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = ax + by + x_0 \\ y' = bx - ay + y_0 \end{cases}$$

$$(a, b, x_0, y_0 \text{ réels donnés et } a^2 + b^2 = 1)$$

est l'antidépacement qui associe à O le point $O'(x_0, y_0)$ et d'endomorphisme associé la symétrie vectorielle orthogonale d'axe $\vec{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) \equiv \alpha \quad [\pi]$, le réel 2α étant déterminé à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) par :

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = a \\ \sin 2\alpha = b. \end{cases}$$

7.8 CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES
(ne figure pas au programme de Terminale E)

Soit E l'ensemble des points invariants par une isométrie d'un plan P. L'étude précédente des déplacements (cf. § 7.5) et les antidéplacements (cf. § 7.7) de P conduit à la classification suivante :

	déplacement	antidéplacement
$E = P$	id_P	
E est une droite D		symétrie orthogonale par rapport à D
$E = \{I\}$	rotation de centre I et d'angle non nul	
$E = \emptyset$	translation de vecteur non nul	composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite D et d'une translation de vecteur non nul appartenant à la direction de D (les deux applications commutent)

7.9 GROUPE DES ISOMÉTRIES LAISSANT INVARIANTE UNE PARTIE DU PLAN (ne figure pas au programme de Terminale E)

a) Généralités

Soit F une partie non vide du plan. Appelons J_F l'ensemble des isométries laissant globalement invariante la partie F. On pose

$$J_F^+ = J_F \cap J^+ \quad \text{et} \quad J_F^- = J_F \cap J^-.$$

On démontre facilement les propriétés générales suivantes :

- 1. $(J_F, \circ)$ est un groupe, sous-groupe de $(J, \circ)$.
- 2. $(J_F^+, \circ)$ est un groupe, sous-groupe de $(J_F, \circ)$.
- 3. Si J_F^- n'est pas vide, soit $f_0 \in J_F^-$. L'application :

$$f \longmapsto f_0 \circ f$$

est une bijection de J_F^+ sur J_F^- . Quand ces deux ensembles sont finis, ils ont donc le même cardinal :

$$\text{card } J_F^+ = \text{card } J_F^- = \frac{1}{2} \text{card } J_F.$$

4. Si F est finie, l'isobarycentre O des points de F est invariant par tout élément de J_F . Par suite les éléments de J_F^+ , sont des rotations de centre O et les éléments de J_F^- sont des symétries axiales dont l'axe passe par O .
5. Si F est finie ($\text{card } F = n$) et si F contient au moins trois points non alignés, deux éléments de J_F coïncidant sur F sont égaux (cf. § 5.2 b)). Par suite le cardinal de J_F est inférieur ou égal au nombre de permutations de F , soit $n!$:

$$\text{card } J_F \leq n!$$

b) Exemples de déterminations de J_F quand F est fini

Pour identifier les déplacements ou antidéplacements à l'aide de leurs points invariants, on se reportera au tableau du § 7.8.

- $F = \{A\}$. On a dans ce cas $J_F = J_A$ dont on a étudié les éléments en classe de Première : voir les rappels § 7.3.
- $F = \{A, B\}$ avec $A \neq B$. Soit O le milieu de (A, B) .
Soit $f \in J_F$. Deux cas sont possibles : A et B sont tous deux invariants par f ou bien f échange A et B .
Si A et B sont tous deux invariants. Le seul déplacement répondant à la question est id_P , le seul antidéplacement répondant à la question est la symétrie orthogonale s_D par rapport à la droite $D = (AB)$.

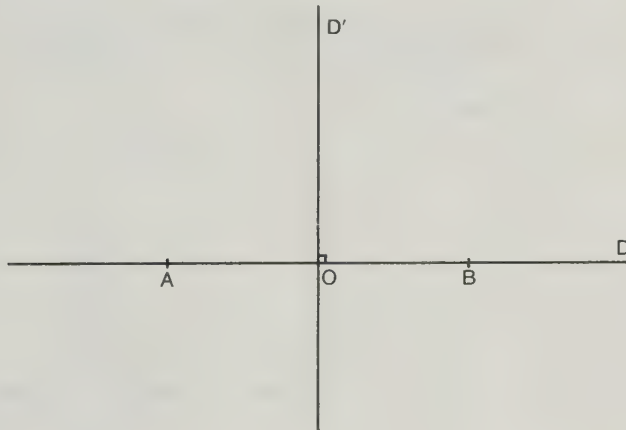


fig. 11

Si $f(A) = B$ et $f(B) = A$. Le milieu O de (A, B) étant invariant par f , le seul déplacement répondant à la question est s_O , symétrie par rapport à O (rotation de centre O et d'angle π); le seul antidéplacement répondant à la question est la symétrie $s_{D'}$ par rapport à la médiatrice D' de (A, B) .

Réciproquement, il est évident que id_P , s_O , s_D et $s_{D'}$ appartiennent à J_F :

$$J_F = \{\text{id}_P, s_O, s_D, s_{D'}\}; \quad J_F^+ = \{\text{id}_P, s_O\}.$$

La table du groupe J_F est la suivante :

	id_P	s_O	s_D	$s_{D'}$
id_P	id_P	s_O	s_D	$s_{D'}$
s_O	s_O	id_P	$s_{D'}$	s_D
s_D	s_D	$s_{D'}$	id_P	s_O
$s_{D'}$	$s_{D'}$	s_D	s_O	id_P

Un tel groupe commutatif, à 4 éléments involutifs, est appelé **groupe de Klein**.

- $F = \{A, B, C\}$, A, B, C non alignés

Premier cas : le triangle ABC n'est pas isocèle.
Soit $f \in J_F$. Supposons $f(A) = B$. On a alors
ou bien $f(B) = C$, d'où $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$, ce qui est exclu
ou bien $f(B) = A$, d'où $f(C) = C$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$, ce qui est exclu.
On voit de même qu'on ne peut avoir $f(A) = C$. On a donc $f(A) = A$, et de même $f(B) = B$ et $f(C) = C$. Comme une application affine du plan est déterminée par ses valeurs en trois points non alignés, on a $f = \text{id}_P$:

$$J_F = \{\text{id}_P\}.$$

Deuxième cas : le triangle ABC est isocèle, non équilatéral :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| \neq \|\overrightarrow{BC}\|.$$

Soit $f \in J_F$. En raisonnant comme dans le premier cas, on voit que $f(A) = A$. L'isobarycentre O de A, B, C est également invariant, par suite $f = \text{id}_P$ ou $f = s_D$, D étant la droite (AO) . Réciproquement, ces deux isométries sont éléments de J_F :

$$J_F = \{\text{id}_P, s_D\}; \quad J_F^+ = \{\text{id}_P\}.$$

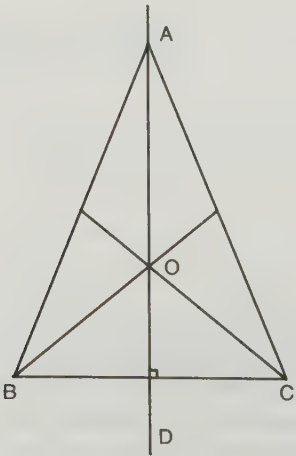


fig. 12

Troisième cas : le triangle ABC est équilatéral.
Soit O l'isobarycentre de A, B, C.

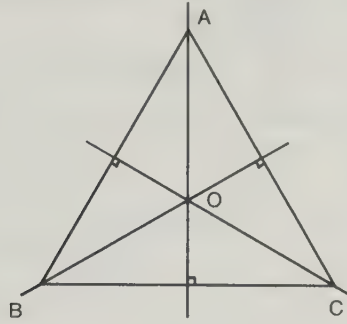


fig. 13

D'après ce qui a été vu en début de paragraphe, $\text{card } \mathcal{J}_F^+ \leq 3$, $\text{card } \mathcal{J}_F^- \leq 3$. Or l'identité de P et les deux rotations $r_1\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$ et $r_2\left(O, \frac{-2\pi}{3}\right)$ sont dans $\mathcal{J}_F^+$, les trois symétries s_{OA} , s_{OB} , s_{OC} respectivement par rapport aux droites (OA), (OB), (OC) sont dans $\mathcal{J}_F^-$. D'où

$$\mathcal{J}_F = \{\text{id}_P, r_1, r_2, s_{OA}, s_{OB}, s_{OC}\}; \quad \mathcal{J}_F^+ = \{\text{id}_P, r_1, r_2\}.$$

On a donc dans ce cas : $\text{card } \mathcal{J}_F = 6 = 3!$

La table du groupe est la suivante :

	id_P	r_1	r_2	s_{OA}	s_{OB}	s_{OC}
id_P	id_P	r_1	r_2	s_{OA}	s_{OB}	s_{OC}
r_1	r_1	r_2	id_P	s_{OC}	s_{OA}	s_{OB}
r_2	r_2	id_P	r_1	s_{OB}	s_{OC}	s_{OA}
s_{OA}	s_{OA}	s_{OB}	s_{OC}	id_P	r_1	r_2
s_{OB}	s_{OB}	s_{OC}	s_{OA}	r_2	id_P	r_1
s_{OC}	s_{OC}	s_{OA}	s_{OB}	r_1	r_2	id_P

Notons que ce groupe est non commutatif. $\mathcal{J}_F^+ = \{\text{id}_P, r_1, r_1^2\}$ est commutatif.

■ $F = \{A, B, C, D\}$, le quadrilatère ABCD étant un carré

Nous utiliserons les notations et les résultats de l'exercice 2 du § 5.7 d). (Pour une étude directe, voir l'exercice 7.59.)

Puisque toute isométrie est une application affine, le groupe $\mathcal{J}_F$ est contenu dans le groupe G des applications affines laissant F globalement invariante. Ce groupe G comprend huit éléments f_k , $0 \leq k \leq 7$ et on a déterminé les matrices

des endomorphismes associés φ_k dans la base $(\vec{OA}, \vec{OB})$. Or, ABCD étant un carré, on a $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ et $\|\vec{OA}\| = \|\vec{OB}\|$. On en déduit que tous les endomorphismes φ_k sont des isométries vectorielles. En effet, si $\vec{v} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$, on a :

$$\|\varphi_k(\vec{v})\| = \sqrt{x^2 + y^2} \|\vec{OA}\| = \|\vec{v}\|.$$

Les applications f_k sont donc des isométries et $J_F = G$.

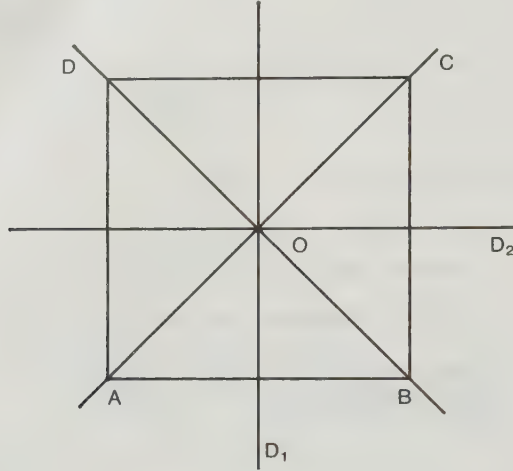


fig. 14

On peut donner la nature des éléments de J_F :

$$f_0 = \text{id}_P$$

$$f_1 = s_{OA}, \text{ symétrie axiale par rapport à la diagonale (OA)}$$

$$f_2 = s_{D_1} \text{ où } D_1 \text{ est la médiatrice de (A, B)}$$

$$f_3 = r_1\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_4 = s_{OB}, \text{ symétrie axiale par rapport à la diagonale (OB)}$$

$$f_5 = s_O, \text{ symétrie par rapport au centre du carré}$$

$$f_6 = r_2\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_7 = s_{D_2} \text{ où } D_2 \text{ est la médiatrice de (A, D)}.$$

$$J_F = \{\text{id}_P, r_1, s_O, r_2, s_{OA}, s_{OB}, s_{D_1}, s_{D_2}\}$$

$$J_F^+ = \{\text{id}_P, r_1, s_O, r_2\} = \{\text{id}_P, r_1, r_1^2, r_1^3\}.$$

c) Détermination de J_R lorsque R est un réseau

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère quelconque de P . On appelle **réseau** R construit sur ce repère l'ensemble des points $A_{p,q}$ dont les coordonnées p et q sont des entiers relatifs.

Nous supposons que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé. On appellera **carré du réseau** tout carré de sommets $A_{p,q}, A_{p+1,q}, A_{p,q+1}, A_{p+1,q+1}$ (fig. 15).

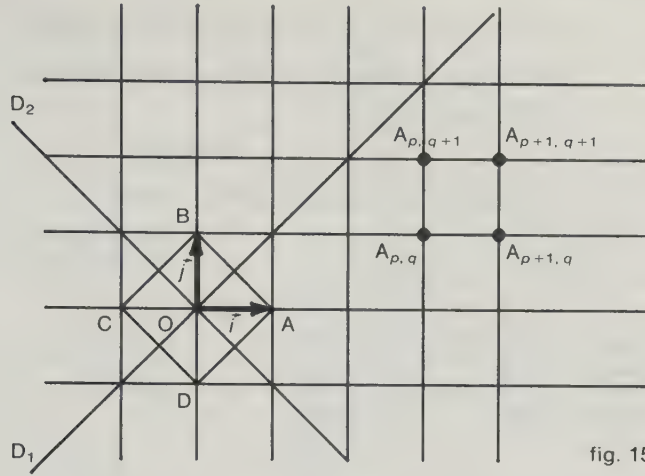


fig. 15

Nous allons étudier l'ensemble $\mathcal{J}_R$ des isométries laissant invariant le réseau R .

- Soit f un élément quelconque de $\mathcal{J}_R$, il transforme O en un point $A_{k,l}$ du réseau.

Considérons la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA_{k,l}}$ et g l'application telle que $f = t \circ g$, c'est-à-dire en composant à gauche par t^{-1} : $t^{-1} \circ f = g$.

L'application g est la composée de deux éléments de $\mathcal{J}_R$ donc $g \in \mathcal{J}_R$ et g laisse O invariant car :

$$g(O) = t^{-1}(f(O)) = t^{-1}(A_{k,l}) = O$$

g laisse aussi invariant l'ensemble F des quatre points situés à la distance 1 de O :

$$F = \{A, B, C, D\} = \{A_{1,0}, A_{0,1}, A_{-1,0}, A_{0,-1}\} \quad (\text{fig. 15}).$$

Donc $g \in \mathcal{J}_F$, $\mathcal{J}_F$ étant l'ensemble étudié à l'exemple 4 du sous-paragraphe précédent, les notations étant celles de cet exemple :

$$\mathcal{J}_F = \{\text{id}_P, r_1, s_O, r_2, s_{OA}, s_{OB}, s_{D_1}, s_{D_2}\}.$$

- Réciproquement si $g \in \mathcal{J}_F$, $g \in \mathcal{J}_R$ car quel que soit $A_{p,q}$ de R :

$$\begin{aligned} \text{id}_P(A_{p,q}) &= A_{p,q} & r_1(A_{p,q}) &= A_{-q,p} \\ s_O(A_{p,q}) &= A_{-p,-q} & r_2(A_{p,q}) &= A_{q,-p} \\ s_{OA}(A_{p,q}) &= A_{p,-q} & s_{OB}(A_{p,q}) &= A_{-p,-q} \\ s_{D_1}(A_{p,q}) &= A_{q,p} & s_{D_2}(A_{p,q}) &= A_{-q,-p} \end{aligned}$$

et toute application $f = t \circ g$, où $g \in \mathcal{J}_F$ et où t est la translation de vecteur $\overrightarrow{OA_{k,l}}$ (en prenant $A_{k,l}$ arbitraire dans R), est un élément de $\mathcal{J}_R$.

- Conclusion : l'ensemble $\mathcal{J}_R$ est l'ensemble des composées $t \circ g$ définies précédemment.

■ Forme réduite d'un élément de $\mathcal{J}_R^+$

On a vu que :

$$\mathcal{J}_F^+ = \{\text{id}_P, r_1, s_O, r_2\}$$

les éléments f de $\mathcal{J}_R^+$ s'obtiennent en composant par t l'un des éléments de $\mathcal{J}_F^+$.

- Si $g = \text{id}_P$, $f = t$.

- Si $g = r_1\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$, $f = t \circ r_1$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont nous allons déterminer le centre. C'est le point de rencontre des médiatrices de $(O, f(O))$ et de $(A_{k,l}, f(A_{k,l}))$.

$$f(O) = A_{k,l}$$

$$f(A_{k,l}) = t(A_{-l,k}) = A_{k-l, k+l}.$$

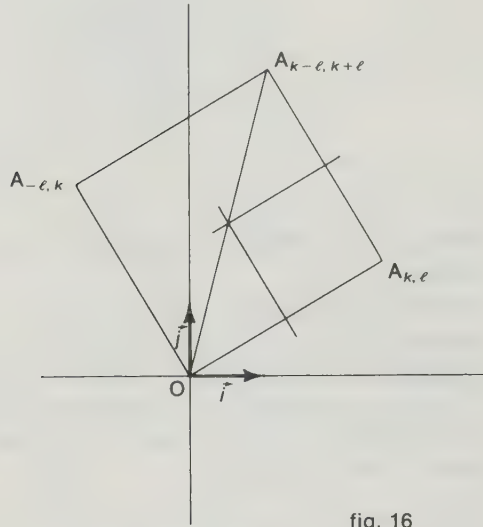


fig. 16

Le centre de la rotation f est le milieu de $(O, A_{k-l, k+l})$ (fig. 16). Ses coordonnées sont $\frac{k-l}{2}, \frac{k+l}{2}$. Comme $k+l$ et $k-l$ sont de même parité, le centre de la rotation f est un sommet ou le centre d'un carré du réseau.

- Si $g = s_O$, $f = t \circ s_O$ est la symétrie par rapport au point de coordonnées $\frac{k}{2}, \frac{l}{2}$ (point invariant par $t \circ s_O$). Ce point est un sommet ou le centre ou le milieu d'un côté d'un carré du réseau.

- Si $g = r_2\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$, vous verrez, de même, que $f = t \circ r_2$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre un sommet ou le centre d'un carré du réseau.

■ Forme réduite d'un élément de $\mathcal{J}_R^-$

$$\mathcal{J}_F^- = \{s_{OA}, s_{OB}, s_{D_1}, s_{D_2}\}$$

les éléments f de $\mathcal{J}_R^-$ s'obtiennent en composant l'un des éléments de $\mathcal{J}_F^-$ par t . La forme réduite de f est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation, le vecteur de la translation appartenant à la direction de l'axe de la symétrie orthogonale (les deux applications commutent). Cette direction est celle de (OA) ou (OB) ou D_1 ou D_2 .

Exercices

Isométries vectorielles

7.1 Soit $\vec{D}$ une droite vectorielle du plan vectoriel $\vec{P}$. On définit une application φ de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$ de la façon suivante

$$\begin{cases} (\forall \vec{v} \in \vec{D}) & \varphi(\vec{v}) = \vec{v} \\ (\forall \vec{v} \in \vec{P} - \vec{D}) & \varphi(\vec{v}) = -\vec{v}. \end{cases}$$

Montrer que φ est une application qui conserve la norme mais qui n'est pas linéaire.

7.2 Soit φ une application de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$ telle que

$$\begin{cases} \varphi(\vec{0}) = \vec{0} \\ (\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{P}^2) & \|\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|. \end{cases}$$

Montrer que φ conserve le produit scalaire, puis que φ est une isométrie vectorielle. Réciproque?

7.3 Soit φ une isométrie vectorielle et $\vec{D}$ une droite vectorielle de $\vec{P}$ stable par φ . Montrer que l'on a :

$$(\forall \vec{v} \in \vec{D}) \varphi(\vec{v}) = \vec{v} \quad \text{ou} \quad (\forall \vec{v} \in \vec{D}) \varphi(\vec{v}) = -\vec{v}.$$

7.4 Soit φ une symétrie vectorielle par rapport à la droite $\vec{D}$ parallèlement à la droite $\vec{D}'$. A quelle condition nécessaire et suffisante φ est-elle une isométrie? Quelles sont les isométries vectorielles involutives du plan vectoriel?

7.5 Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs de $\vec{P}$ tels que

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\| \neq 0.$$

Montrer qu'il existe une rotation vectorielle ρ et une seule telle que $\rho(\vec{u}) = \vec{u}'$.

Montrer qu'il existe une symétrie vectorielle orthogonale σ et une seule telle que $\sigma(\vec{u}) = \vec{u}'$. Montrer que $\vec{u} + \vec{u}'$ appartient à l'axe $\vec{D}$ de σ et que $\vec{u} - \vec{u}'$ est orthogonal à $\vec{D}$.

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de $\vec{P}$. Écrire la matrice de σ dans cette base dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u} = \vec{i}$ et $\vec{u}' = \vec{j}$

b) $\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ et $\vec{u}' = \sqrt{2}(\vec{i} + \vec{j})$.

7.6 Soit σ et σ' deux symétries vectorielles orthogonales, respectivement par rapport à deux droites vectorielles $\vec{D}$ et $\vec{D}'$. On définit l'endomorphisme $\sigma + \sigma'$ par :

$$(\forall \vec{v} \in \vec{P}) (\sigma + \sigma')(\vec{v}) = \sigma(\vec{v}) + \sigma'(\vec{v}).$$

L'endomorphisme $\sigma + \sigma'$ peut-il être une rotation vectorielle? une symétrie vectorielle orthogonale?

7.7 Soit $\vec{P}$ un plan vectoriel rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$. Déterminer les matrices des rotations vectorielles φ de $\vec{P}$ telles que :

$$\varphi^3 = \text{id}_{\vec{P}}.$$

7.8 Déterminer les rotations vectorielles φ d'un plan vectoriel $\vec{P}$ telles que :

$$\varphi^3 = -\text{id}_{\vec{P}}$$

(on calculera les matrices dans une base orthonormée).

7.9 Soit $\vec{P}$ un plan vectoriel rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$. Déterminer analytiquement la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle Δ de vecteur directeur $2\vec{i} - \vec{j}$ (on calculera les coordonnées x', y' de l'image de $\vec{v}(x, y)$).

7.10 Même question qu'à l'exercice précédent, Δ ayant pour équation :

$$3x + y = 0.$$

7.11 Soit φ l'endomorphisme d'un plan vectoriel $\vec{P}$ de matrice dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que φ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle que l'on déterminera.

2. Trouver les rotations vectorielles ρ qui commutent avec φ c'est-à-dire telles que :

$$\rho \circ \varphi = \varphi \circ \rho.$$

7.12 Soit $\vec{P}$ rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$. On considère l'endomorphisme ρ de $\vec{P}$ de matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que ρ est une rotation vectorielle.

2. Soit φ la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{i}$. Déterminer les symétries orthogonales ψ_1 et ψ_2 (on déterminera les matrices et les axes de ces symétries) telles que :

$$\rho = \psi_2 \circ \varphi = \varphi \circ \psi_1.$$

7.13 Mêmes questions qu'à l'exercice précédent sachant que ρ a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

et φ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle d'équation $y = x$.

7.14 Soit $\vec{P}$ rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$. On considère l'endomorphisme φ de $\vec{P}$ de matrice :

$$\begin{pmatrix} a+2b & 2b \\ 2b & a-b \end{pmatrix}$$

où a et b sont des nombres réels.

1. Déterminer a et b pour que φ soit une rotation vectorielle.

2. Déterminer a et b pour que φ soit une symétrie vectorielle orthogonale. Indiquer les axes des symétries trouvées.

3. On suppose $a = 2b \neq 0$. Démontrer que le noyau et l'image de φ sont deux droites vectorielles orthogonales. Quelle est la matrice de φ dans une base $(\vec{I}, \vec{J})$ où $\vec{I} \in \text{Im } \varphi$ et $\vec{J} \in \text{Ker } \varphi$? Montrer que $\varphi = h \circ \pi = \pi \circ h$ où h est une homothétie vectorielle et π une projection vectorielle orthogonale (projection vectorielle telle que $\text{Im } \pi$ et $\text{Ker } \pi$ sont orthogonaux).

7.15 Soit $\vec{D}$ et $\vec{D}'$ des droites vectorielles de $\vec{P}$, $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ des vecteurs unitaires appartenant respectivement à $\vec{D}$ et $\vec{D}'$. En prenant une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, le vecteur $\vec{i}'$ s'écrit :

$$\vec{i}' = a\vec{i} + b\vec{j} \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

1. Démontrer qu'il existe exactement deux rotations vectorielles et deux symétries vectorielles orthogonales transformant $\vec{D}$ et $\vec{D}'$.

2. En faisant $\vec{D} = \vec{D}'$, en déduire que l'ensemble des isométries de $\vec{P}$ laissant $\vec{D}$ invariante, muni de la composition des applications, est un groupe de Klein (groupe ayant quatre éléments, ces quatre éléments étant involutifs).

Isométries affines

Dans tous les énoncés suivants, la distance de deux points A et B quelconques d'un plan P sera notée indifféremment $\|\vec{AB}\|$ ou AB .

7.16 Soit un plan P orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f qui associe à tout point $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = -x + 2. \end{cases}$$

Trouver la nature de f et les éléments qui la caractérisent.

7.17 Soit un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f qui associe à tout point $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \sqrt{3}. \end{cases}$$

Trouver la nature de f et les éléments qui la caractérisent.

7.18 Soit un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f qui associe à tout point $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x - 2. \end{cases}$$

Trouver la nature de f et sa forme réduite $t_D \circ s_D$ où s_D est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D et t_D une translation de vecteur $\vec{u}$ appartenant à la direction Δ de D (on déterminera Δ et on remarquera que D est l'ensemble des points M d'image $M' = f(M)$ tels que $\vec{MM}'$ appartient à Δ).

7.19 Mêmes notations qu'à l'exercice précédent avec f définie par

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1. \end{cases}$$

1. Trouver la nature de f et sa forme réduite (procéder comme à l'exercice précédent).

2. Trouver l'équation cartésienne de l'image par f de la droite d'équation :

$$x + y - 1 = 0.$$

7.20 Soit un plan P orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère, pour θ réel donné, l'application affine T_θ de P dans P définie par $T_\theta(O) = O$ et la matrice de l'application linéaire associée à T_θ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

1. Calculer θ pour que T_θ soit une rotation; préciser, suivant les valeurs de θ , le centre et l'angle de chaque rotation.

2. Calculer θ pour que T_θ soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite; préciser, suivant les valeurs de θ , l'axe de chaque symétrie.

7.21 Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points A, B, C, D de coordonnées respectives

$$(1, 1), (-3, 3), (2, 2), (-4, 4).$$

On appelle E et F les milieux respectifs de (A, C) et (B, D) .

1. Démontrer qu'il existe une rotation affine unique $\mathcal{R}$ qui transforme A en B et C en D . Déterminer son angle et son centre I .

2. Démontrer qu'il existe une rotation affine unique $\mathcal{R}'$ qui transforme A en D et C en B . Déterminer son angle et son centre J .

3. Que peut-on dire du quadrilatère $IEJF$? Étudier $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}'$.

7.22 Soit P un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit M' le transformé d'un point M de P dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite D d'équation $y = x$. Soit M'' l'image de M' dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = 0$.

Exprimer, en fonction des coordonnées (x et y) de M , les coordonnées x'' et y'' de M'' .

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation, t_1 , de P qui à M associe M'' .

Retrouver géométriquement ce résultat.

2. Soit t_2 la transformation de P qui à $M(x, y)$ associe $N(X, Y)$ tel que

$$X = 1 + y, \quad Y = 1 - x.$$

Caractériser la transformation t_2 , puis la transformation $t_2 \circ t_1$.

7.23 Soit un plan P orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit R_1, R_2, R_3 les rotations de centres respectifs $A_1(2, 0), A_2(0, 2), A_3(-2, 0)$ et dont les angles ont pour mesures en radians respectivement $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{2}$. Soit S_1, S_2, S_3 les symétries orthogonales par rapport aux droites d'équations respectives

$$D_1: y = 0, \quad D_2: x + y = 2, \quad D_3: -x + y = 2.$$

1. Définir analytiquement les applications $R_1, R_2, R_3, S_1, S_2, S_3$.

2. Déterminer analytiquement et géométriquement les applications

$$S_1 \circ S_2, \quad S_2 \circ S_3, \quad S_3 \circ S_1.$$

3. Déterminer l'application $R_1 \circ R_2 \circ R_3$.

7.24 Dans un plan P orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(1, 0)$ et $B(0, 1)$. Soit R la rotation de centre O et de mesure $\frac{\pi}{2}$, et T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Déterminer les applications $R \circ T$ et $T \circ R$.

7.25 Dans un plan P orienté, on donne trois points A, B, C distincts et on désigne par R_A, R_B, R_C les rotations de centres respectifs A, B, C et de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

1. Décomposer R_A en le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des droites passant par A , la deuxième de ces droites étant (AB) . Décomposer R_B en le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des droites passant par B , la première de ces droites étant (AB) . En déduire le centre D et l'angle de la rotation

$$R_D = R_B \circ R_A.$$

2. En procédant de manière analogue pour R_D et R_C , déterminer $T = R_C \circ R_B \circ R_A$.

3. Les points A et B étant donnés, où faut-il placer C pour que T soit la transformation identique?

4. On donne A et B , soit M un point quelconque de P d'image $M' = T(M)$. Déterminer l'ensemble décrit par C dans chacun des deux cas :

a) $\|\overrightarrow{MM'}\| = \ell$ ($\ell > 0$ donné);

b) $\overrightarrow{MM'}$ appartient à une direction donnée $\vec{\Delta}$.

5. On donne B et C . Déterminer l'ensemble décrit par A dans chacun des deux cas a) et b) précédents.

6. On donne A et C . Déterminer l'ensemble décrit par B dans chacun des deux cas a) et b) précédents.

7.26 Soit f et g deux isométries du plan P . On se propose d'étudier $g^{-1} \circ f \circ g$.

1. Montrer que si f est un déplacement (resp. un antidéplacement), $g^{-1} \circ f \circ g$ est également un déplacement (resp. un antidéplacement).

2. On suppose que f est la rotation de centre O et d'angle θ . Montrer que $g^{-1} \circ f \circ g$ est une rotation dont on déterminera le centre.

Quel est l'angle de cette rotation? (distinguer selon que g est un déplacement ou un antidéplacement).

3. On suppose que f est la symétrie axiale s_D . Que peut-on dire de $g^{-1} \circ f \circ g$?

7.27 Soit A, B, A', B' quatre points du plan P tels que

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\| \neq 0.$$

Montrer qu'il existe un antidéplacement f unique tel que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

Cas d'isométrie des triangles

7.28 Soit deux triangles ABC et $A'B'C'$ d'un plan P . On suppose

$$A'B' = AB, \quad B'C' = BC, \quad C'A' = CA.$$

1. Démontrer que $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2. Démontrer que l'application affine f qui associe à A, B, C respectivement A', B', C' est une isométrie (quels que soient les points M et N d'images M' et N' par f , on posera $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ et on montrera que $\|\overrightarrow{M'N'}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$).

7.29 Soit deux triangles ABC et $A'B'C'$ d'un plan P orienté.

1. Démontrer que si

$$A'B' = AB, \quad A'C' = AC$$

$$\text{et} \quad (\widehat{A'B'}, \widehat{A'C'}) \equiv (\widehat{AB}, \widehat{AC}) [2\pi],$$

il existe un déplacement unique transformant A, B, C respectivement en A', B', C' .

2. Démontrer que si $A'B' = AB$,

$$(\widehat{A'B'}, \widehat{A'C'}) \equiv (\widehat{AB}, \widehat{AC}) [2\pi]$$

$$\text{et} \quad (\widehat{B'A'}, \widehat{B'C'}) \equiv (\widehat{BA}, \widehat{BC}) [2\pi],$$

il existe un déplacement unique transformant A, B, C respectivement en A', B', C' .

7.30 Soit deux triangles ABC et $A'B'C'$ d'un plan P orienté.

1. Démontrer que si

$$A'B' = AB, \quad A'C' = AC$$

$$\text{et} \quad (\widehat{A'B'}, \widehat{A'C'}) \equiv -(\widehat{AB}, \widehat{AC}) [2\pi],$$

il existe un antidéplacement unique transformant A, B, C respectivement en A', B', C' .

2. Démontrer que si

$$A'B' = AB, \quad (\widehat{A'B'}, \widehat{A'C'}) \equiv -(\widehat{AB}, \widehat{AC}) [2\pi]$$

$$\text{et} \quad (\widehat{B'A'}, \widehat{B'C'}) \equiv -(\widehat{BA}, \widehat{BC}) [2\pi]$$

il existe un antidéplacement unique transformant A, B, C respectivement en A', B', C' .

Effet d'une transformation sur des fonctions numériques ou vectorielles

Soit g une application d'un plan P dans un ensemble quelconque E , f une transformation affine de P . On peut considérer l'application $g \circ f$ de P dans E . On dira que f conserve g si $g \circ f = g$.

7.31 Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des transformations affines conservant g , muni de la composition des applications, est un groupe.

Déterminer $\mathcal{F}$ dans chacun des cas suivants (ex. 7.32 à 7.35) :

7.32 g est l'application $M \mapsto \|\overrightarrow{AM}\|$ où A est un point donné du plan P .

7.33 g est l'application $M \mapsto \overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2$ où A et B sont deux points donnés du plan. Plus généralement, g est l'application

$$M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2$$

où les points A_i sont donnés ainsi que les réels α_i vérifiant $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$.

7.34 g est l'application $M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ où A et B sont deux points donnés du plan.

7.35 g est l'application $M \mapsto \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2$ où A et B sont deux points distincts de P . On introduira un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est milieu de (A, B) et $\vec{i}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. On donnera l'expression analytique des éléments de $\mathcal{F}$. Quels sont les éléments de $\mathcal{F}$ qui sont des isométries?

7.36 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer les isométries du plan laissant O invariant et conservant l'application g :

$$M(x, y) \mapsto ax^2 + by^2$$

où $(a, b) \neq (0, 0)$ est un élément donné de $\mathbb{R}^2$. Discuter.

Utilisation des isométries

7.37 On donne un triangle ABC et on construit à l'extérieur du triangle les carrés $ABDE$ et $ACFG$. Soit K le point tel que $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AE}$. On supposera le plan orienté, la base $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG})$ étant directe.

1. Trouver la rotation qui transforme A, B, C respectivement en G, K, A . En déduire que les droites (KA) et (BC) sont perpendiculaires.

2. Démontrer que les droites (BF) et (KC) sont perpendiculaires ainsi que les droites (CD) et (KB) . Qu'en conclure pour les droites $(KA), (BF), (CD)$?

7.38 Soit ABC un triangle du plan P . On construit un rectangle $BCDE$ ($\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}$). Montrer que les trois droites passant par A, D, E et respectivement perpendiculaires à $(BC), (AB)$ et (AC) sont concourantes.

7.39 On considère un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle Γ . Montrer que les six droites passant par le milieu d'un côté ou d'une diagonale et perpendiculaires au côté ou à la diagonale opposée sont concourantes.

7.40 Dans un plan P on considère un triangle équilatéral (A, B, C) inscrit dans un cercle (Γ) . Soit M un point, distinct de A et de C , situé sur celui des arcs AC dont B n'est pas élément. I est le point du segment $[MB]$ tel que

$$MI = MA.$$

1. Montrer que le triangle (I, M, A) est équilatéral.
2. On oriente le plan P de façon qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit $+\frac{\pi}{3}$. Soit r la rotation de centre A et dont une mesure de l'angle est $+\frac{\pi}{3}$. Déterminer les images par r des points B et I . En déduire

$$MA + MC = MB.$$

(Exercice. Bac C. Bordeaux 1982.)

7.41 On considère deux cercles Γ et Γ' de même rayon d'un plan P .

Soit ω (resp. ω') le centre de Γ (resp. Γ'). Un point M décrit Γ , un point M' décrit Γ' de telle sorte que

$$(\widehat{\omega M, \omega' M'}) = \theta [2\pi]$$

où θ est un réel donné non congru à 0 modulo 2π . Montrer que la médiatrice de (M, M') passe par un point fixe.

7.42 Soit Γ un cercle de centre O , A un point de Γ . Une rotation r de centre A et d'angle θ transforme Γ en un cercle Γ' qui coupe Γ en A et B . Soit M un point de Γ , $M \neq A$, et $M' = r(M)$. Montrer que la droite (MM') passe par B .

7.43 On se reportera à la figure 7 du cours. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles IAB et $IA'B'$ ont même rayon et se coupent en I et en K point d'intersection de (AA') et (BB') . (On pourra utiliser l'exercice précédent.)

7.44 On considère un triangle ABC d'orthocentre H et Γ son cercle circonscrit.

1. Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle ABC appartiennent à Γ .
2. Soit M un point de Γ . Montrer que H et les symétriques de M par rapport aux côtés du triangle ABC sont alignés (droite de Steiner). [Indication : considérer la rotation composée des symétries orthogonales par rapport à (BC) et (BA) et utiliser l'exercice 7.42.]
3. En déduire que les projetés orthogonaux de M sur les côtés du triangle ABC sont alignés (droite de Simson).

7.45 Soit ABC un triangle direct du plan orienté P . On considère les points A', B', C' tels que les triangles BAC', CBA', ACB' soient équilatéraux directs :

$$(\widehat{BA', BC'}) = (\widehat{CB', CA'}) = (\widehat{AC', AB'}) = \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

Montrer que

$$\|\overrightarrow{AA'}\| = \|\overrightarrow{BB'}\| = \|\overrightarrow{CC'}\|.$$

Montrer que les trois droites (AA') , (BB') , (CC') sont concourantes en un point M tel que

$$(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = (\widehat{MB}, \widehat{MC}) = (\widehat{MC}, \widehat{MA}) = \frac{2\pi}{3} [\pi].$$

Reprendre ces questions en supposant BAC' , CBA' , ACB' équilatéraux indirects.

7.46 Soit D une droite d'un plan P , A et B deux points de P situés du même côté de D . Un point M décrit D . Montrer qu'il existe un unique point M_0 de D réalisant le minimum de $\|\overrightarrow{MA}\| + \|\overrightarrow{MB}\|$. Déterminer M_0 .

7.47 Soit ABC un triangle du plan P et D , E , F des points appartenant respectivement aux segments $[B, C]$, $[C, A]$, $[A, B]$.

1. Montrer que, pour un point D donné, le périmètre du triangle DEF est minimum lorsque la droite (EF) passe par les symétriques P et Q de D par rapport à (AB) et (AC) .

2. En déduire que le périmètre du triangle DEF est minimum lorsque D , E , F sont les projetés orthogonaux respectifs de A , B , C sur (BC) , (CA) , (AB) .

7.48 Soit r la rotation de centre O et d'angle θ et A un point distinct de O . Soit M un point quelconque du plan, on pose $M' = r(M)$.

1. Ensemble des points M tels que les points O , A , M , M' soient cocycliques.

2. Ensemble des points M tels que

$$(\widehat{AM}, \widehat{AM'}) = \mu [\pi],$$

μ réel donné.

7.49 Soit A et B deux points diamétralement opposés sur un cercle Γ . Un point M décrit Γ et se projette orthogonalement en M' sur (AB) . Quel est l'ensemble des points P et Q communs au cercle de centre O passant par M' et au diamètre de Γ passant par M ?

7.50 Soit ABC un triangle isocèle ($\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$). Une droite variable D passe par A . Soit C' le symétrique de C par rapport à D . La droite BC' coupe D en M . Déterminer l'ensemble des points C' , l'ensemble des points M .

7.51 Soit deux droites D_1 et D_2 concourantes en O et un point fixe A distinct de O . Une droite variable D passe par A . Les symétriques de la droite D par rapport à D_1 et D_2 se coupent en M . Quel est l'ensemble des points M ?

7.52 On considère un rectangle $ABCD$ et M un point variable de son plan. On pose

$$M_1 = s_{(AB)}(M), \quad M_2 = s_{(BC)}(M_1), \quad M_3 = s_{(CA)}(M_2).$$

Quel est l'ensemble des milieux des segments $[M, M_3]$?

7.53 On donne, dans un plan P , deux cercles Γ et Γ' de même rayon R et de centres respectifs O et O' . Soit A et A' deux points fixes appartenant

respectivement à Γ et Γ' . Un point M décrit Γ , un point M' décrit Γ' de telle sorte que

$$(\widehat{AO}, \widehat{AM}) = -(\widehat{A'O'}, \widehat{A'M'}) [\pi].$$

(Quand $M = A$ ou $M' = A'$, on remplace (AM) ou $(A'M')$ par la tangente.)

1. Soit I le milieu de (M, M') . Montrer que I appartient à la droite D passant par les milieux de (O, O') et de (A, A') . Quel est l'ensemble des points I ?

2. Les droites (AM) et $(A'M')$ coupent D en N et N' . Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{NN'}$?

7.54 On donne, dans un plan P , quatre droites D_1 , D'_1 , D_2 , D'_2 . Les droites D_1 et D'_1 sont parallèles ainsi que les droites D_2 et D'_2 . Soit O un point de P . Construire une droite passant par O et rencontrant D_1 en A_1 , D'_1 en A'_1 , D_2 en A_2 , D'_2 en A'_2 tels que

$$\|\overrightarrow{A_1A'_1}\| = \|\overrightarrow{A_2A'_2}\|.$$

Discussion.

7.55 On donne deux droites D_1 et D_2 d'un plan P , A un point de P . Construire un triangle équilatéral ABC tel que B appartienne à D_1 et C à D_2 . Discussion.

7.56 Construire un cercle passant par un point A donné et tangent à deux cercles concentriques Γ et Γ' donnés. Discussion.

7.57 On donne un cercle Γ de centre O et de rayon R , deux points A et B de son plan tels que

$$\|\overrightarrow{OA}\| > R \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{OB}\| < R$$

et un réel $\ell > 0$. Construire deux points P et Q de Γ tels que (AP) et (BQ) soient parallèles et que $\|\overrightarrow{PQ}\| = \ell$. Discussion.

Groupe des isométries laissant globalement invariante une partie du plan

Les notations sont celles du cours.

7.58 Donner un exemple de partie F du plan telle que $\mathcal{J}_F$ ne soit pas réduit à l'identité et ne contienne que des rotations.

7.59 Déterminer le groupe des isométries du carré directement (c'est-à-dire sans utiliser les résultats de l'exercice 2 du § 5.7d). On pourra, par exemple, se ramener au cas où l'un des sommets est invariant.

Déterminer le groupe $\mathcal{J}_F$ dans chacun des cas suivants.

7.60 F est un rectangle non carré.

7.61 F est un losange non carré.

7.62 F est un parallélogramme qui n'est ni un rectangle ni un losange.

7.63 F est la réunion de deux droites concourantes D et D' .

7.64 F est une droite.

7.65 F est la réunion de deux droites parallèles distinctes.

7.66 $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant deux vecteurs donnés, indépendants

$$F = \{p\vec{i} + q\vec{j}; \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\}$$

(le cas $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ a été étudié en cours). On traitera les cas suivants :

a) $\|\vec{i}\| \neq \|\vec{j}\|, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} \neq 0.$

b) $\|\vec{i}\| \neq \|\vec{j}\|, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0.$

c) $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} \neq 0, \quad (\widehat{(\vec{i}, \vec{j})}) \neq 0 \left| \frac{\pi}{3} \right|.$

Révision

7.67 Soit P un plan orienté muni d'un repère orthonormé de sens direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et soit $\mathcal{F}$ le plan vectoriel associé. On considère l'application affine f_m qui à tout point M de P de coordonnées (x, y) associe le point M' de P de coordonnées (x', y') définies par

$$\begin{cases} x' = -mx + (m-1)y + m + 1 \\ y' = (m-1)x - my - 5m + 1, \end{cases}$$

où m est un réel donné.

Les parties A), B) et C) sont indépendantes.

A. 1. Déterminer suivant les valeurs de m les points invariants par f_m .

2. Pour quelles valeurs de m , f_m est-elle bijective?

3. Soit m_0 la valeur de m pour laquelle f_m n'est pas bijective.

a) Montrer que f_{m_0} transforme le plan P tout entier en une droite Δ , dont on donnera une équation.

b) On désigne par p la projection orthogonale sur la droite Δ , montrer qu'il existe une homothétie h telle que

$$f_{m_0} = h \circ p$$

et indiquer son centre et son rapport.

B. 1. a) Pour quelles valeurs de m , f_m est-elle une isométrie?

b) Préciser, pour chaque valeur m' et m'' ($m' < m''$) ainsi trouvées, la nature de f_m et ses éléments caractéristiques.

2. On pose $g = f_{m'} \circ f_{m''}$, montrer qu'il existe une symétrie orthogonale s et une translation t telles que

$$g = s \circ t = t \circ s.$$

Expliciter s et t .

C. On suppose, dans cette question $m = -1$.

1. On désigne par φ l'endomorphisme de $\mathcal{F}$ associé à l'application affine f_{-1} .

a) Écrire la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. Déterminer les nombres réels λ tels qu'il existe des vecteurs $\vec{u}$ non nuls vérifiant $\varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$. On trouvera deux valeurs λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$). Montrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $\varphi(\vec{u}) = \lambda_1\vec{u}$ est la droite vectorielle de base $(\vec{i} + \vec{j})$ et que l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $\varphi(\vec{u}) = \lambda_2\vec{u}$ est la droite vectorielle de base $(\vec{i} - \vec{j})$.

b) Écrire la matrice M' de φ dans la base

$$\mathcal{B}' = (\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j}).$$

n étant un entier naturel non nul, on pose

$$\varphi^1 = \varphi \quad \text{et} \quad \varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n.$$

Calculer par récurrence sur n la matrice de l'endomorphisme φ^n dans la base $\mathcal{B}'$ et en déduire la matrice de φ^n dans la base $\mathcal{B}$.

7.68 Soit P un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\tilde{P}$ le plan vectoriel associé à P .

A. Pour tout couple (u, b) de nombres réels, on considère l'application $f_{(u, b)}$ de P dans P qui à tout point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ fait correspondre le point M' de coordonnées (x', y') dans le même repère, x' et y' vérifiant les relations :

$$\begin{cases} x' = x + u \\ y' = -y + 2b. \end{cases}$$

1. Montrer que $f_{(u, b)}$ est un antidéplacement de P .

2. Caractériser l'application $f_{(0, b)}$.

3. On se place dans le cas où u est un réel non nul. $f_{(u, b)}$ possède-t-elle des points invariants?

Montrer que $f_{(u, b)}$ peut se décomposer en le produit d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite D et d'une translation de vecteur $\vec{V}$ colinéaire à D . (On déterminera l'équation de D et les coordonnées de $\vec{V}$ en fonction de u et b .)

Cette décomposition est-elle unique?

Le produit est-il commutatif?

4. (u, b) et (u', b') étant deux couples de nombres réels quelconques, déterminer l'application $f_{(u', b')} \circ f_{(u, b)}$. Ce produit est-il commutatif? Déterminer l'application réciproque de $f_{(u, b)}$.

5. On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ de toutes les applications $f_{(u, b)}$ quand (u, b) décrit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et l'ensemble $\mathcal{C}$ de toutes les translations de P . Montrer que l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ muni de la loi de composition des applications est un groupe non commutatif.

B. Pour tout nombre réel φ appartenant à l'intervalle

$$\left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[$$

et pour tout couple (u, b) de nombres réels, on considère l'application $f_{(\varphi, u, b)}$ de P dans P qui à tout point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ fait correspondre le point M' de coordonnées (x', y') dans le même repère, x' et y' vérifiant les relations :

$$\begin{cases} x' = x \cos 2\varphi + y \sin 2\varphi + u - b \sin 2\varphi \\ y' = x \sin 2\varphi - y \cos 2\varphi + 2b \cos^2 \varphi + u \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$$

1. Que peut-on dire de l'application $f_{(0, u, b)}$?

2. Pour φ différent de zéro, caractériser l'endomorphisme associé à l'application affine $f_{(\varphi, u, b)}$ en montrant que l'ensemble des vecteurs invariants par cet endomorphisme est la droite vectorielle $\tilde{\Delta}$ d'équation :

$$y = x \operatorname{tg} \varphi.$$

3. Pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$, caractériser l'application $f_{(\pi/4, u, b)}$.

4. Revenant au cas général, en posant $a = \operatorname{tg} \varphi$, exprimer x' et y' en fonction de a , b et u .

Montrer que si $u = 0$ tout point de la droite D d'équation $y = ax + b$ est invariant. En déduire la nature de l'application affine $f_{(\varphi, 0, b)}$.

Enfin si u différent de 0, montrer que $f_{(\varphi, u, b)}$ est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à la droite affine D d'équation $y = ax + b$ (avec $a = \operatorname{tg} \varphi$) et d'une translation de vecteur $\vec{V}$ colinéaire à D .

7.69 Dans tout le problème, des figures simples pourront suggérer les démonstrations demandées.

1. $\mathcal{E}_2$ est un plan vectoriel orienté et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_2$.

a) $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont les droites vectorielles de bases respectives :

$$\vec{u}_1 = \vec{i} + \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 = \vec{j}.$$

Soit s_1 et s_2 les symétries vectorielles orthogonales par rapport, respectivement à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Déterminer l'application composée $r = s_2 \circ s_1$.

b) $\mathcal{D}_3$ est la droite vectorielle de base $\vec{u}_3 = \vec{i} + 4\vec{j}$ et s_3 la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\mathcal{D}_3$. Montrer que s_3 a pour matrice, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

$$\frac{1}{17} \begin{pmatrix} -15 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}.$$

c) Démontrer l'existence d'une symétrie vectorielle orthogonale unique s_4 , telle que

$$s_4 \circ s_3 = s_2 \circ s_1.$$

Donner une base de son axe $\mathcal{D}_4$. Quel est l'angle des droites vectorielles $(\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4)$?

2. E_2 est un plan affine associé à $\mathcal{E}_2$ et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de E_2 .

Soit $A(5, 0)$, $B(4, 1)$, $A'(-3, 2)$, $B'(-4, 1)$ quatre points de E_2 .

a) Montrer qu'il existe un déplacement, f de E_2 , et un seul, tel que

$$f(A) = A' \quad \text{et} \quad f(B) = B'.$$

Donner sa nature et ses éléments fondamentaux.

b) ω est le point de coordonnées $(0, -3)$ et D la droite (ωA) , s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D . Montrer qu'il existe une droite D' , et une seule, telle que

$$f = s_{D'} \circ s_D.$$

Faire une figure.

c) R est la rotation de centre A et dont l'angle α pour mesure $\frac{\pi}{2}$ et T la translation affine de vecteur

$\vec{AA}'$. Montrer que $f = T \circ R$.

Soit $B_1 = R(B)$. Quelle est la nature du quadrilatère $AA'B'B_1$?

d) g est l'antidéplacement tel que $g(A) = A'$ et d'endomorphisme associé s_1 (défini au 1. a)).

Montrer que g est la composée commutative d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ et d'une translation de vecteur $\vec{V}$ appartenant à la direction de Δ . Préciser Δ et $\vec{V}$ et vérifier que le milieu I de (A, A') est sur Δ .

e) Montrer que les cinq points O, I, A, B, ω sont cocycliques.

(Problème Bac C. Sport-études. 1982, partiel)

8

SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN. APPLICATIONS $z \mapsto f(z)$

Dans tout le chapitre, P désignera un plan orienté, de direction $\vec{P}$.

8.1 SIMILITUDES DIRECTES

On se propose, dans ce paragraphe, d'étudier les applications composées de déplacements et d'homothéties.

a) Généralités

Définition

Une application f de P dans P est une **similitude directe** si et seulement s'il existe un déplacement g de P et une homothétie affine H de P tels que

$$f = H \circ g$$

Notons déjà que toute similitude directe est une *bijection affine* (car composée de deux bijections affines). L'endomorphisme associé à une similitude directe est appelé **similitude directe vectorielle**.

EXEMPLES

1. Tout déplacement est une similitude directe.
2. Toute homothétie affine est une similitude directe.

Considérons une similitude directe quelconque $f = H \circ g$ où g est un déplacement et H l'homothétie de centre $A \in P$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$. On peut écrire $f = g \circ H'$ où $H' = g^{-1} \circ H \circ g$.

Étudions H' . Soit ρ la rotation vectorielle associée à g . L'endomorphisme associé à H' est

$$\rho^{-1} \circ k \operatorname{id}_{\vec{P}} \circ \rho = k \rho^{-1} \circ \rho = k \operatorname{id}_{\vec{P}}.$$

De plus :

$$H'(g^{-1}(A)) = (g^{-1} \circ H \circ g)(g^{-1}(A)) = (g^{-1} \circ H)(A) = g^{-1}(A).$$

Par suite, H' est l'homothétie affine de centre $g^{-1}(A)$ et de rapport k . Réciproquement on prouverait de façon analogue qu'une application $f = g \circ H'$ où g est un déplacement et H' une homothétie, peut s'écrire sous la forme $f = H \circ g$ où H est une homothétie.

Notons bien que, en général, H et g ne commutent pas.

D'autre part, reprenons une similitude directe $f = H \circ g$ (H homothétie de centre A et de rapport k , g déplacement). Si $k < 0$, on peut écrire

$$H = H_1 \circ s_A$$

où H_1 est l'homothétie de centre A et de rapport $|k|$. D'où

$$f = H_1 \circ g_1$$

où $g_1 = s_A \circ g$ est encore un déplacement.

Nous avons finalement prouvé le théorème suivant :

Théorème

Soit f une application de P dans P .

1. f est une similitude directe si et seulement s'il existe un déplacement g et une homothétie affine H' tels que

$$f = g \circ H'$$

2. f est une similitude directe si et seulement s'il existe un déplacement g_1 et une homothétie affine H_1 , de rapport strictement positif, tels que $f = H_1 \circ g_1$ (ou une homothétie affine H'_1 , de rapport strictement positif, et un déplacement g_1 tels que $f = g_1 \circ H'_1$).

REMARQUE On appelle similitude *indirecte* (ou *inverse*) la composée d'un antidéplacement et d'une homothétie de rapport positif. L'étude des similitudes indirectes est proposée dans les exercices 8.16 à 8.20.

8) Étude de l'endomorphisme associé à une similitude directe. Rapport et angle

• Soit f une similitude directe. Il existe un déplacement g et une homothétie H de rapport $k > 0$ tels que $f = H \circ g$. Soit ρ la rotation vectorielle associée à g . L'endomorphisme φ associé à f est :

$$\varphi = k \operatorname{id}_P \circ \rho = k\rho.$$

• Montrons maintenant que le réel strictement positif k et la rotation vectorielle ρ sont uniques. Supposons donc que $k\rho = k'\rho'$ avec $k > 0$, $k' > 0$, ρ et ρ' rotations vectorielles. On a pour tout vecteur $\vec{v}$ non nul :

$$\|\varphi(\vec{v})\| = k \|\rho(\vec{v})\| = k' \|\rho'(\vec{v})\|$$

comme $\|\rho(\vec{v})\| = \|\rho'(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$, on en déduit $k = k'$, par suite $\rho = \rho'$.

• Réciproquement, considérons une application affine f dont l'endomorphisme associé est de la forme $k\rho$ ($k > 0$, ρ rotation vectorielle). Soit A un point quelconque de P et $H\left(A, \frac{1}{k}\right)$ l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{k}$.

L'endomorphisme associé à $g = H\left(A, \frac{1}{k}\right) \circ f$ est :

$$\frac{1}{k} \text{id}_P \circ k\rho = \rho.$$

Par suite, g est un déplacement et $f = H(A, k) \circ g$ est une similitude directe. Nous pouvons donc énoncer :

Théorème et définitions

Soit f une application affine de P dans P .

f est une similitude directe si et seulement si l'endomorphisme associé à f est de la forme $k\rho$ où $k \in \mathbb{R}_+^*$ et où ρ est une rotation vectorielle.

De plus, pour une similitude directe donnée f , k et ρ sont uniques : k s'appelle rapport de la similitude f et l'angle de ρ s'appelle angle de la similitude f .

Les similitudes directes de rapport égal à 1 sont les déplacements.

Les similitudes directes d'angle nul sont les homothéties de rapport positif et les translations.

On notera qu'une homothétie de rapport $k < 0$ est une similitude de rapport $|k|$ et d'angle π .

REMARQUE La démonstration du théorème montre que l'écriture d'une similitude donnée sous la forme $H \circ g$ où H est une homothétie de rapport $k > 0$ et g un déplacement n'est pas unique. En effet, on peut choisir arbitrairement le centre de H .

c) Le groupe des similitudes directes

Appelons $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des similitudes directes du plan P .

• La composition des applications est une *loi interne* de $\mathcal{S}^+$. En effet, si f et f' sont deux similitudes directes, d'endomorphismes associés respectifs $k\rho$ et $k'\rho'$, l'endomorphisme associé à $f' \circ f$ est $k'k(\rho' \circ \rho)$. L'application $f' \circ f$ est donc une similitude directe. La composition des applications est *associative*.

• L'identité de P est une similitude, c'est l'*élément neutre* de $\mathcal{S}^+$.

• Soit $f \in \mathcal{S}^+$, d'endomorphisme associé $k\rho$. On sait que f est une bijection affine. L'application f^{-1} a pour endomorphisme associé $\frac{1}{k} \rho^{-1}$, c'est donc une similitude directe : tout élément de $\mathcal{S}^+$ a un *symétrique* dans $\mathcal{S}^+$.

Théorème

L'ensemble $\mathcal{S}^+$, muni de la composition des applications, est un groupe.
 Soit f (resp. f') une similitude directe de rapport k et d'angle θ (resp. de rapport k' et d'angle θ').

$f' \circ f$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$.

f^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.

d) Propriété caractéristique des similitudes directes

Soit f une similitude directe du plan P d'endomorphisme associé $k\rho$ ($k > 0$) où ρ est la rotation vectorielle d'angle θ . On considérera les couples de points homologues (M, M') , (N, N') , (Q, Q') , (R, R') .

• On a

$$(1) \quad \|\overrightarrow{M'N'}\| = \|(k\rho)(\overrightarrow{MN})\| = k \|\rho(\overrightarrow{MN})\| = k \|\overrightarrow{MN}\|.$$

Une similitude directe de rapport k multiplie donc les distances par k .

On a de même $\|\overrightarrow{Q'R'}\| = k \|\overrightarrow{QR}\|$. Si l'on suppose $Q \neq R$, alors $Q' \neq R'$ et on a :

$$\frac{\|\overrightarrow{M'N'}\|}{\|\overrightarrow{Q'R'}\|} = \frac{\|\overrightarrow{MN}\|}{\|\overrightarrow{QR}\|}.$$

On dit qu'une similitude directe conserve le rapport des distances.

• Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\vec{P}$ et $\vec{v}' = (k\rho)(\vec{v})$. On a :

$$\theta = (\widehat{\vec{v}, \rho(\vec{v})}) = (\widehat{\vec{v}, \vec{v}'})[2\pi] \quad (\text{car } k > 0).$$

Par conséquent, si $M \neq N$, on a :

$$(2) \quad (\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) \equiv \theta [2\pi].$$

On en déduit, si $M \neq N$ et $M \neq Q$:

$$\begin{aligned} (\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'Q'}}) &\equiv (\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{MN}}) + (\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}}) + (\widehat{\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{M'Q'}}) [2\pi] \\ &\equiv -\theta + (\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}}) + \theta [2\pi] \\ (\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'Q'}}) &\equiv (\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}}) [2\pi]. \end{aligned}$$

Une similitude directe conserve donc les angles orientés de vecteurs.

En particulier, une similitude directe transforme deux droites orthogonales en deux droites orthogonales.

• Nous avons prouvé (cf. (1) et (2)) que l'on a, quels que soient les couples de points homologues (M, M') et (N, N') , M et N étant distincts :

$$(3) \quad \begin{cases} \|\overrightarrow{M'N'}\| = k \|\overrightarrow{MN}\| \\ (\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) \equiv \theta [2\pi]. \end{cases}$$

Réciproquement, soit $k \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$ et f une application de P dans P telle que pour tous les couples de points homologues (M, M') , (N, N') , M et N étant distincts, on ait les relations (3). Soit A un point quelconque de P .

L'application $g = H\left(A, \frac{1}{k}\right) \circ f$ est un déplacement d'angle θ . En effet, quels que soient M et N distincts, on a (en notant $M'' = g(M)$ et $N'' = g(N)$) :

$$\begin{cases} \|\vec{M''N''}\| = \|\vec{MN}\| \\ (\widehat{\vec{MN}, \vec{M''N''}}) = \theta [2\pi] \end{cases}$$

donc $f = H(A, k) \circ g$ est une similitude de rapport k et d'angle θ .

Théorème

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Une application f de P dans P est une similitude directe de rapport k et d'angle θ si, et seulement si, quels que soient les points distincts M et N de P d'images M' et N' , on a :

$$\begin{cases} \|\vec{M'N'}\| = k \|\vec{MN}\| \\ (\widehat{\vec{MN}, \vec{M'N'}}) = \theta [2\pi] \end{cases}$$

e) Effet d'une similitude directe sur les longueurs et les aires

Soit f une similitude directe du plan P , de rapport k .

Considérons un cercle Γ de centre O et de rayon R . Soit Γ' le cercle de centre $O' = f(O)$ et de rayon kR . On a :

$$M \in \Gamma \iff \|\vec{OM}\| = R \iff \|\vec{O'M'}\| = kR \iff M' \in \Gamma'.$$

Autrement dit, $f(\Gamma) = \Gamma'$. La longueur de Γ est $2\pi R$, celle de Γ' est $k2\pi R$.

Le disque circulaire D bordé par Γ :

$$\{M \in P; \|\vec{OM}\| \leq R\}$$

est transformé par f en le disque circulaire D' bordé par Γ' . Or D est d'aire πR^2 et D' d'aire $k^2 \pi R^2$.

En raisonnant comme au § 7.2 b), on voit que si $A_1 A_2 \dots A_n$ est un polygone convexe de P dont l'image est le polygone convexe $A'_1 A'_2 \dots A'_n$, on a :

$$\mathcal{A}(A'_1 A'_2 \dots A'_n) = k^2 \mathcal{A}(A_1 A_2 \dots A_n).$$

Nous *admettons* que les résultats précédents se généralisent, c'est-à-dire que si F est une partie du plan de longueur l (resp. d'aire a), son image par une similitude directe de rapport k a pour longueur kl (resp. pour aire $k^2 a$).

En particulier, une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$ et les aires par k^2 .

Point invariant d'une similitude

Soit f une similitude directe de rapport k , d'angle θ et d'endomorphisme associé $\varphi = k\rho$.

• Si $k = 1$, f est un déplacement. L'ensemble des points invariants de f est donc, vide si f est une translation de vecteur non nul, égal à P si f est l'identité et un singleton si f est une rotation autre que l'identité.

• Si $k \neq 1$, on sait que, quels que soient les points distincts M et N d'images M' et N' , on a :

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{M'N'}\| = k \|\overrightarrow{MN}\| \\ (\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) \equiv \theta [2\pi]. \end{cases}$$

Soit (A, A') un couple de points homologues particuliers ($A \neq A'$), I est invariant si et seulement si (en faisant $M = M' = I$, $N = A$ et $N' = A'$).

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{IA'}\| = k \|\overrightarrow{IA}\| \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \quad (2)$$

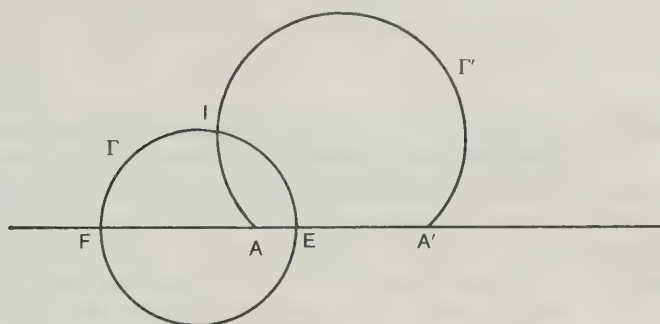


fig. 1

L'ensemble des points I vérifiant (1) est le cercle Γ de diamètre $[E, F]$ avec $E = \text{Bar}((A, k), (A', 1))$ et $F = \text{Bar}((A, -k), (A', 1))$ (cf. § 4.3 b)).

L'ensemble Γ' des points I vérifiant (2) est un arc de cercle d'extrémités A et A' ou $]A, A'[$ ou $(AA') - [A, A']$ (cf. § 6.3 b)). Il existe un point unique I d'intersection de Γ et Γ' .

Théorème et définition

Toute similitude directe f du plan P , de rapport k différent de 1, admet un point invariant unique. Ce point est appelé centre de la similitude.

Forme réduite

Les notations sont les mêmes que précédemment.

Supposons le rapport k de f différent de 1. Soit I le centre de f et H l'homothétie de centre I et de rapport k . Les applications affines $H^{-1} \circ f$ et $f \circ H^{-1}$ ont toutes deux ρ pour endomorphisme associé et I comme point invariant. Elles sont donc égales : $H^{-1} \circ f = f \circ H^{-1} = g$ où g est la rotation de centre I et d'angle θ . On a prouvé :

Théorème

Toute similitude directe f du plan, de rapport k différent de 1 et d'angle θ , s'écrit sous la forme :

$$f = H \circ g = g \circ H$$

où H est l'homothétie de rapport k et de centre le point invariant I de f et g la rotation de centre I et d'angle θ .

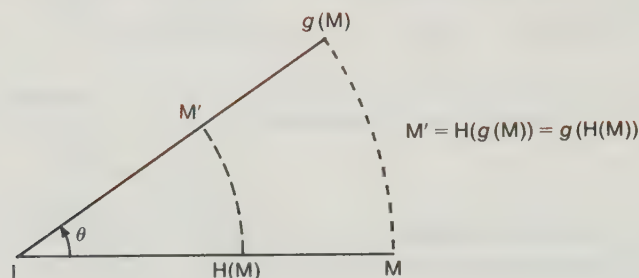


fig. 2

REMARQUE Soit $I \in P$, $k \in \mathbb{R}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$. Il existe une similitude directe et une seule f ayant I comme point invariant, de rapport k et d'angle θ (c'est l'application affine transformant I en I et d'endomorphisme associé $\varphi = k\rho_\theta$). On dit que le triplet (I, k, θ) caractérise f .

EXERCICE
RÉSOLU

Soit quatre points A, B, A', B' du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Montrer qu'il existe une similitude directe et une seule f transformant A en A' et B en B' . On suppose que les droites $D = (AB)$ et $D' = (A'B')$ se coupent en un point J distinct de A, A', B, B' . Montrer que f a un centre I unique et que les points I, J, A, A' d'une part, I, J, B, B' d'autre part, sont cocycliques.

- S'il existe une similitude directe f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$, le rapport de f est $k = \frac{\|\vec{A'B'}\|}{\|\vec{AB}\|}$ et l'angle de f a pour mesure $\theta \equiv (\widehat{AB, A'B'}) [2\pi]$.

Réciproquement, la similitude directe transformant A en A' et d'endomorphisme associé $k\rho$, où ρ est la rotation vectorielle d'angle θ , répond à la question : elle transforme B en B'' tel que :

$$\|\vec{A'B''}\| = k \|\vec{AB}\|, \quad (\widehat{AB, A'B''}) \equiv \theta [2\pi]$$

donc $B'' = B'$.

- Supposons maintenant que les droites $D = (AB)$ et $D' = (A'B')$ se coupent en J , distinct de A, A', B, B' . La similitude f ne peut être une translation (sinon D et D' seraient parallèles), f a donc un point invariant unique I . On a :

$$(\widehat{D, D'}) \equiv (\widehat{AB, A'B'}) \equiv \theta [\pi]$$

d'où

$$(\widehat{JA, JA'}) \equiv \theta \equiv (\widehat{IA, IA'}) [\pi].$$

Comme $\theta \neq 0[\pi]$, les quatre points I, J, A, A' sont cocycliques. On montre de même que les quatre points I, J, B, B' sont cocycliques.

Soit Γ_1 et Γ_2 les deux cercles correspondants.

— Si Γ_1 et Γ_2 sont tangents en I , on a $I = J$.

— Si Γ_1 et Γ_2 ne sont pas tangents, le point I est le point d'intersection de Γ_1 et Γ_2 autre que J . En effet, si I était en J , les droites (AA') et (BB') seraient parallèles, Γ_2 se déduirait de Γ_1 par une homothétie de centre I , Γ_1 et Γ_2 seraient donc tangents.

Nous avons donc ainsi donné une construction géométrique simple de I .

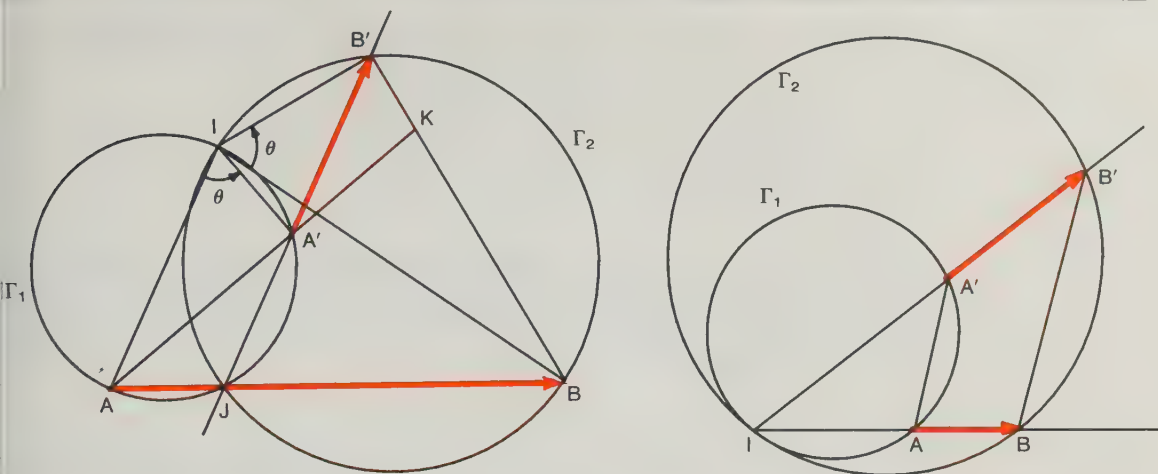


fig. 3

REMARQUE Nous avons

$$(\widehat{\overrightarrow{IA}}, \overrightarrow{IA'}) = (\widehat{\overrightarrow{IB}}, \overrightarrow{IB'}) = \theta [2\pi] \quad \text{et} \quad \frac{\|\overrightarrow{IA'}\|}{\|\overrightarrow{IA}\|} = \frac{\|\overrightarrow{IB'}\|}{\|\overrightarrow{IB}\|} = k.$$

On en déduit :

$$(\widehat{\overrightarrow{IA}}, \overrightarrow{IB}) = (\widehat{\overrightarrow{IA'}}, \overrightarrow{IB'}) [2\pi] \quad \text{et} \quad \frac{\|\overrightarrow{IB}\|}{\|\overrightarrow{IA}\|} = \frac{\|\overrightarrow{IB'}\|}{\|\overrightarrow{IA'}\|},$$

ce qui s'interprète ainsi : I est également le centre de la similitude qui transforme A en B et A' en B'. Si K est l'intersection des deux droites (AA') et (BB'), les cercles circonscrits aux triangles JAA', JBB', KAB et K'A'B' sont concourants en I. (Voir à ce sujet l'exercice 8.10).

8.2 REPRÉSENTATION ANALYTIQUE ET REPRÉSENTATION COMPLEXE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

a) Représentation analytique

Supposons le plan P rapporté à un repère *orthonormé* $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit f une similitude directe de P de rapport k et d'endomorphisme associé $\varphi = k\rho$. L'endomorphisme ρ est une rotation vectorielle de $\vec{P}$ donc, sa matrice dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a_1^2 + b_1^2 = 1.$$

Donc la matrice de φ est $\begin{pmatrix} ka_1 & -kb_1 \\ kb_1 & ka_1 \end{pmatrix}$ que l'on peut écrire :

$\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ en posant $a' = ka_1$ et $b' = kb_1$. Remarquons que a' et b' sont des réels non tous deux nuls car $a'^2 + b'^2 = k^2 \neq 0$.

Soit $O'(x_0, y_0)$ l'image de l'origine O par f . L'image $M'(x', y')$ d'un point quelconque $M(x, y)$ est définie par :

$$\overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM})$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x' - x_0 = a'x - b'y \\ y' - y_0 = b'x + a'y \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$(1) \quad \begin{cases} x' = a'x - b'y + x_0 \\ y' = b'x + a'y + y_0. \end{cases}$$

Réciproquement, soit f une application de P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ dans P qui associe à tout point $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$ tel que l'on ait des relations du type (1) où a', b', x_0, y_0 sont des nombres réels donnés avec $(a', b') \neq (0, 0)$. On peut écrire :

$$\overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM})$$

$O'(x_0, y_0)$ étant l'image par f de O et φ étant l'endomorphisme de $\tilde{P}$ de matrice dans la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

$$\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}.$$

Donc f est une application affine d'endomorphisme associé φ .

L'endomorphisme $\rho = \frac{1}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} \varphi$ a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} & \frac{-b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} \\ \frac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} & \frac{a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} \end{pmatrix}$$

cette matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a_1^2 + b_1^2 = 1$$

donc ρ est une rotation vectorielle de $\tilde{P}$.

On en déduit (cf. § 8.1 b)) que f est une similitude directe puisque c'est une application affine d'endomorphisme associé $\sqrt{a'^2 + b'^2} \rho$, ρ étant une rotation vectorielle. Donc :

Théorème

Soit P un plan rapporté à un repère orthonormé.

Une application f de P dans P est une similitude directe si et seulement s'il existe des nombres réels a', b', x_0, y_0 ($(a', b') \neq (0, 0)$) tels que, quel que soit le point $M(x, y)$ d'image $M'(x', y')$ par f , on ait :

$$(1) \quad \begin{cases} x' = a'x - b'y + x_0 \\ y' = b'x + a'y + y_0 \end{cases}$$

Le rapport de f est $\sqrt{a'^2 + b'^2}$ et, si le plan est orienté et rapporté à un repère orthonormé direct, une mesure de l'angle de f est l'un des nombres réels θ tels que

$$\cos \theta = \frac{a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

b) Représentation complexe d'une similitude directe

Soit i le nombre complexe affixe du point de P de coordonnées $(0, 1)$.
Le système (1) équivaut à :

$$\begin{aligned}x' + iy' &= (a'x - b'y + x_0) + i(b'x + a'y + y_0) \\x' + iy' &= (a' + ib')(x + iy) + x_0 + iy_0\end{aligned}$$

ce qui est équivalent, en posant

$$z = x + iy, \quad z' = x' + iy', \quad a = a' + ib', \quad b = x_0 + iy_0,$$

à :

$$z' = az + b.$$

La condition $(a', b') \neq (0, 0)$ est équivalente à $a \neq 0$. On peut donc énoncer :

Théorème

Soit P un plan rapporté à un repère orthonormé.

Une application f de P dans P est une similitude directe si et seulement s'il existe un couple (a, b) de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que, quel que soit le point M d'image M' par f , les affixes respectives z et z' de M et M' vérifient la relation :

$$z' = az + b$$

Le rapport de la similitude directe f est $\sqrt{a'^2 + b'^2} = |a|$ et, si le plan est orienté et rapporté à un repère orthonormé direct, une mesure de l'angle de f est $\arg a$.

REMARQUE On peut étudier les similitudes directes en utilisant la représentation complexe et retrouver, par cette méthode, tous les résultats du paragraphe 8.1.

**EXERCICE
RÉSOLU**

Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct. On considère l'application f de P dans P qui associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe :

$$z' = (1 + i)z + 2 - i.$$

Déterminer la nature de f et trouver les éléments qui la caractérisent.

L'application f est une similitude directe de rapport $|1 + i| = \sqrt{2}$, une mesure de l'angle de la similitude est

$$\arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

le centre I de la similitude (il existe car le rapport de similitude est différent de 1) est le point d'affixe z_0 tel que :

$$z_0 = (1 + i)z_0 + 2 - i$$

on trouve

$$z_0 = 1 + 2i.$$

Le centre de la similitude est donc le point $I(1, 2)$.

8.3 UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES EN GÉOMÉTRIE PLANE (ne figure pas au programme de Terminale E)

Le plan P orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Nous noterons souvent $M(z)$ le point du plan P dont l'afixe est le nombre complexe z .

La méthode qui consiste à étudier les propriétés géométriques d'une figure à l'aide des propriétés algébriques des affixes de ses points, ou vice versa, est particulièrement féconde. Nous venons ainsi de voir que toute similitude directe avait une représentation complexe très simple que nous utiliserons dans de nombreux exercices.

a) Étude de l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\frac{z-a}{z-b}$ ait un module ou un argument donné

Soit a et b deux nombres complexes distincts, d'images A et B dans P . Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Soit $M(z)$ un point du plan P distinct de A et de B . On a les équivalences suivantes :

$$\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = k \iff \frac{|z-a|}{|z-b|} = k \iff \frac{\|\vec{AM}\|}{\|\vec{BM}\|} = k.$$

L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = k \neq 1$ est donc le cercle de diamètre $[I, J]$ où $I = \text{Bar}((A, 1), (B, k))$ et $J = (\text{Bar}(A, 1), (B, -k))$. (Cet ensemble a été étudié au § 4.3 b)).

L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = 1$ est la médiatrice de $[A, B]$.

- Soit $M(z)$ un point du plan P distinct de A et de B . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \arg \frac{z-a}{z-b} \equiv \alpha [2\pi] &\iff \arg(z-a) - \arg(z-b) \equiv \alpha [2\pi] \\ &\iff (\widehat{\vec{e}_1, \vec{AM}}) - (\widehat{\vec{e}_1, \vec{BM}}) \equiv \alpha [2\pi] \\ &\iff (\widehat{\vec{BM}, \vec{AM}}) \equiv \alpha [2\pi] \\ &\iff (\widehat{\vec{MB}, \vec{MA}}) \equiv \alpha [2\pi]. \end{aligned}$$

L'ensemble des points M tels que $(\widehat{\vec{MB}, \vec{MA}}) \equiv \alpha [2\pi]$ a été étudié dans le § 6.3 b). Il s'agit :

si $\alpha \equiv 0 [2\pi]$, de la droite (AB) privée du segment $[A, B]$,

si $\alpha \equiv \pi [2\pi]$, du segment $[A, B]$ privé de A et B ,

si $\alpha \not\equiv 0 [\pi]$, d'un arc de cercle d'extrémités A et B privé de A et B .

REMARQUES

1. L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg \frac{z-a}{z-b} \equiv \alpha [\pi]$ s'étudie de façon analogue.

On trouve donc :

si $\alpha \equiv 0 [\pi]$, la droite (AB) privée de A et B ,

si $\alpha \not\equiv 0 [\pi]$, un cercle passant par A et B , privé de A et B .

2. Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points de P distincts de A et de B . On sait (cf. § 6.3 c)) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que M, M', A, B soient cocycliques ou alignés est

$$(\widehat{MB}, \widehat{MA}) \equiv (\widehat{M'B}, \widehat{M'A}) [\pi]$$

ce qui équivaut à :

$$\arg \frac{z-a}{z-b} \equiv \arg \frac{z'-a}{z'-b} [\pi]$$

ou encore

$$\arg \left(\frac{z-a}{z-b} : \frac{z'-a}{z'-b} \right) \equiv 0 [\pi].$$

Par suite, M, M', A, B sont cocycliques ou alignés si, et seulement si

$$\frac{z-a}{z-b} : \frac{z'-a}{z'-b} \in \mathbb{R}^*.$$

b) Étude de l'application $M(z) \mapsto M'\left(\frac{1}{z}\right)$

Appelons P^* le plan P privé de O et f l'application de P^* dans P^* qui au point M d'affixe z associe M' d'affixe $z' = \frac{1}{z}$. Nous nous proposons d'étudier certaines des propriétés géométriques de f .

- L'application f est involutive et, par conséquent, bijective : $f^{-1} = f$.
- Les points $M(z)$ invariants sont caractérisés par

$$z = \frac{1}{z} \iff z^2 = 1.$$

Il y a donc deux points invariants : les points d'affixes 1 et -1 .

- Le point $M'(z')$ est caractérisé par :

$$\begin{cases} |z'| = \frac{1}{|z|} \\ \arg z' \equiv -\arg z [2\pi] \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

$$(I) \quad \begin{cases} \|\overrightarrow{OM'}\| = \frac{1}{\|\overrightarrow{OM}\|} \\ (\widehat{\vec{e}_1, \overrightarrow{OM'}}) \equiv -(\widehat{\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}}) [2\pi]. \end{cases}$$

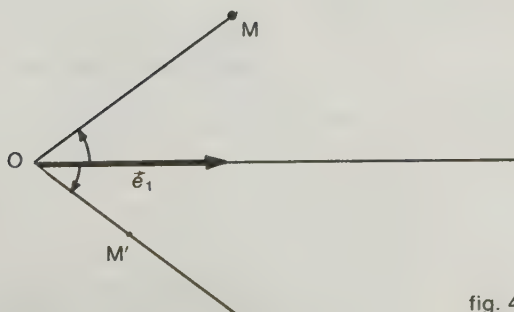


fig. 4

- Le point $M'(z')$ peut être défini analytiquement par ses coordonnées x' et y' .

Or :

$$x' + iy' = z' = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

d'où

$$(II) \begin{cases} x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

- Cherchons maintenant l'image d'une droite D .

Premier cas : la droite D passe par O .

Soit D' la droite déduite de D par la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par O et dirigée par $\vec{e}_1$. Les formules (I) montrent que l'image de D privée de O est la droite D' privée de O .

Deuxième cas : la droite D ne passe pas par O .

Soit $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts de D , $M(z)$ un point de P^* distinct de A et B . Si on pose $z' = \frac{1}{z}$, $a' = \frac{1}{a}$, $b' = \frac{1}{b}$, on a

$$\frac{z' - a'}{z' - b'} = \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{z} - \frac{1}{b}} = \frac{b}{a} \left(\frac{z - a}{z - b} \right).$$

D'où les équivalences :

$$M(z) \in D \iff \arg \frac{z - a}{z - b} \equiv 0 [\pi] \iff \arg \frac{z' - a'}{z' - b'} \equiv \arg \frac{b}{a} [\pi].$$

Observons que $\arg \frac{b}{a} \not\equiv 0 [\pi]$ (sinon O , A , B seraient alignés et D passerait par O). L'ensemble des points d'affixes z' vérifiant $\arg \frac{z' - a'}{z' - b'} \equiv \arg \frac{b}{a} [\pi]$ est donc (cf. § 8.3.a) un cercle passant par A' et B' , et privé de A' et B' . Ce cercle passe par O puisque $\frac{0 - a'}{0 - b'} = \frac{b}{a}$.

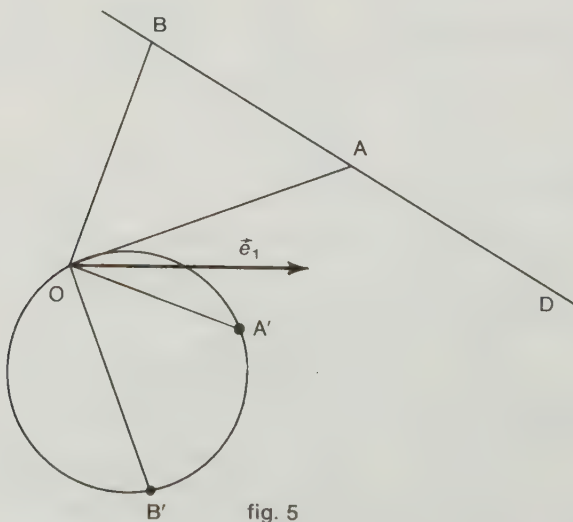


fig. 5

Nous avons donc finalement prouvé que $f(D)$ est un cercle passant par O , privé de O .

On aurait pu trouver ces résultats analytiquement, à partir des formules (II) (cf. exercice 8.45 à la fin du chapitre).

Nous constatons, en particulier, que l'application f ne conserve pas l'alignement.

REMARQUES

1. Le caractère involutif de f permet de déduire du résultat précédent que l'image par f d'un cercle passant par O et privé de O est une droite ne passant pas par O .

2. L'application f transforme quatre points cocycliques ou alignés en quatre points cocycliques ou alignés (cf. exercice 8.46 à la fin du chapitre).

• Considérons maintenant un arc Γ de représentation paramétrique :

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow P \\ t &\longmapsto F(t) = (f_1(t), f_2(t)) \end{aligned}$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Nous supposons que Γ ne contient pas le point O .

Supposons F dérivable en $t_0 \in I$ et le vecteur dérivé $F'(t_0)$ non nul. On sait alors (cf. tome I, § 8.4 b)) que Γ admet au point $M_0 = F(t_0)$ une tangente D_0 dirigée par $F'(t_0)$.

D'après (II), $f(\Gamma)$ admet la représentation paramétrique :

$$\begin{aligned} G : I &\longrightarrow P \\ t &\longmapsto G(t) = \left(\frac{f_1(t)}{f_1^2(t) + f_2^2(t)}, \frac{-f_2(t)}{f_1^2(t) + f_2^2(t)} \right) \end{aligned}$$

Calculons les composantes du vecteur $G'(t_0)$. On pose $x_0 = f_1(t_0)$ et $y_0 = f_2(t_0)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \right)'(t_0) &= \frac{f_1'(t_0)(x_0^2 + y_0^2) - x_0(2x_0f_1'(t_0) + 2y_0f_2'(t_0))}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \\ &= \frac{y_0^2 - x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} f_1'(t_0) - \frac{2x_0y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} f_2'(t_0) \\ \left(\frac{-f_2}{f_1^2 + f_2^2} \right)'(t_0) &= \frac{-f_2'(t_0)(x_0^2 + y_0^2) + y_0(2x_0f_1'(t_0) + 2y_0f_2'(t_0))}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \\ &= \frac{2x_0y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} f_1'(t_0) + \frac{y_0^2 - x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} f_2'(t_0). \end{aligned}$$

Interprétons ce résultat. Soit φ l'endomorphisme de $\tilde{P}$ dont la matrice, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est :

$$\begin{pmatrix} \frac{y_0^2 - x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} & \frac{-2x_0y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \\ \frac{2x_0y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} & \frac{y_0^2 - x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (a', b') \neq (0, 0).$$

L'endomorphisme φ est donc une similitude directe vectorielle et on a :

$$G'(t_0) = \varphi (F'(t_0)).$$

Comme $F'(t_0)$ n'est pas nul, il en est de même de $G'(t_0)$: l'arc $f(\Gamma)$ admet donc, au point $M'_0 = f(M_0) = G(t_0)$ une tangente $\tilde{D}$. (Attention, $\tilde{D}$ n'est pas la transformée de D par f).

La direction de $\tilde{D}$ se déduit de celle de D par la similitude directe vectorielle φ qui, notons-le, dépend de M_0 , *mais non de Γ* .

Soit alors Γ_1 un autre arc paramétré passant par M_0 :

$$\begin{aligned} F_1 : J &\longrightarrow P \\ u &\longmapsto F_1(u). \end{aligned}$$

J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose qu'en $u_0 \in J$, on a $F_1(u_0) = M_0$ et $F'_1(u_0) \neq \vec{0}$. L'arc Γ_1 admet en M_0 une tangente D_1 dirigée par $F'_1(u_0)$. L'arc $f(\Gamma_1)$ admet donc en $M'_0 = f(M_0)$ une tangente $\tilde{D}_1$ dont la direction se déduit de celle de D_1 par la même similitude directe vectorielle φ . Il en résulte :

$$(\widehat{D, D_1}) \equiv (\widehat{\tilde{D}, \tilde{D}_1}) [\pi]$$

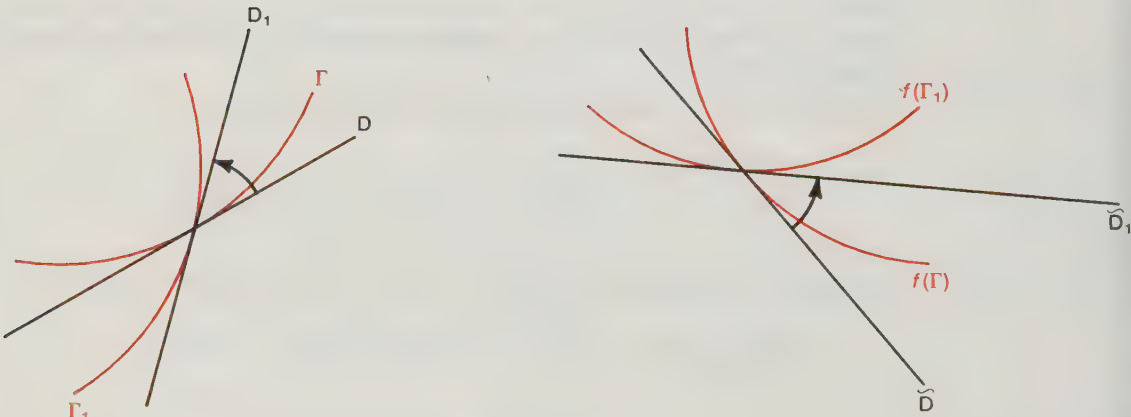


fig. 6

On dit que f « conserve les angles orientés d'arcs ». En particulier, f transforme deux arcs tangents en deux arcs tangents, deux arcs orthogonaux (c'est-à-dire dont les tangentes au point commun sont orthogonales) en deux arcs orthogonaux.

Exercices

Similitudes directes

8.1 Trouver toutes les similitudes directes involutives. Trouver toutes les similitudes directes f vérifiant $f^n = \text{id}_P$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

8.2 Soit f et f' deux similitudes directes. Montrer qu'il existe une translation t et une seule telle que $f' \circ f = t \circ (f \circ f')$.

8.3 f_0 étant une similitude directe. Quelles sont les similitudes directes f telles que $f^2 = f_0$?

8.4 Soit I un point du plan P . Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_I^+$ des similitudes directes admettant I pour centre est un sous-groupe commutatif de $(\mathcal{S}^+, \circ)$.

8.5 Soit f_0 une similitude directe. Quel est l'ensemble des similitudes directes qui permutent avec f_0 ?

8.6 Soit G un sous-groupe de $\mathcal{S}^+$ tel que tout élément de G admette au moins un point invariant.

1. s et σ étant deux éléments de G , que peut-on dire de $s \circ \sigma \circ s^{-1} \circ \sigma^{-1}$? Montrer que G est commutatif.

2. Montrer l'existence d'un point A invariant par tout élément de G .

8.7 Soit A et A' deux points du plan P , $k \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe une similitude directe f et une seule, de rapport k , d'angle θ et telle que $f(A) = A'$. Donner une construction du centre de f quand celui-ci existe et est unique.

8.8 Soit D et D' deux droites du plan P concourantes en A . Quel est l'ensemble des centres des similitudes directes de rapport $k > 0$ donné transformant D en D' ?

8.9 a) On donne deux cercles C et C' . Trouver l'ensemble des centres des similitudes directes qui transforment C en C' .

b) On donne deux cercles C et C' sécants en A et B . Montrer qu'il existe une similitude directe de centre A qui transforme C en C' .

Soit M un point de C , M' l'image de M par cette similitude. Montrer que M, M', B sont alignés.

8.10 Soit f la similitude directe de centre I transformant A en A' et B en B' . On a donc

$$\begin{cases} \|\vec{IA'}\| = \|\vec{IB'}\| = \|\vec{A'B'}\| \\ \|\vec{IA}\| = \|\vec{IB}\| = \|\vec{AB}\| \\ (\widehat{IA}, \widehat{IA'}) = (\widehat{IB}, \widehat{IB'}) = (\widehat{AB}, \widehat{A'B'}) \end{cases} [2\pi].$$

Montrer que I est également centre d'une similitude directe transformant A en B et A' en B' . En déduire :

$$\begin{cases} \|\vec{IB}\| = \|\vec{IB'}\| = \|\vec{BB'}\| \\ \|\vec{IA}\| = \|\vec{IA'}\| = \|\vec{AA'}\| \\ (\widehat{IA}, \widehat{IB}) = (\widehat{IA'}, \widehat{IB'}) = (\widehat{AA'}, \widehat{BB'}) \end{cases} [2\pi].$$

8.11 Soit f une similitude directe de centre I . Étudier :

a) l'application f_1 qui à tout point M associe le milieu de $(M, f(M))$;

b) l'application f_2 qui à tout point M associe le milieu de $(I, f(M))$. Comment peut-on généraliser ces résultats?

8.12 Les notations sont celles de l'exercice 8.9 b). Quel est l'ensemble des points M'' milieux de (M, M') ?

8.13 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère quelconque du plan P , A un point donné de la droite D définie par O et $\vec{i}$, A' un point de la droite D' définie par O et $\vec{j}$. A tout point M de D , on associe le point M' de D' tel que $A'M' = kAM$ où k est un réel non nul donné. Montrer qu'il existe une unique similitude directe f telle que $f(M) = M'$, pour tout point M de D . Quel est l'ensemble des milieux de (M, M') ?

8.14 Dans un plan orienté, une similitude directe $\mathcal{S}_O$ de centre O transforme un couple donné (A, B) de points distincts, autres que O , en un couple (A', B') .

La similitude directe $\mathcal{S}_A$ de centre A qui transforme B en B' , transforme O en P . La similitude directe $\mathcal{S}_B$ de centre B qui transforme A en A' , transforme O en Q .

Démontrer que O est le milieu de (P, Q) .

(Extrait d'exercice Bac C. Groupe 1 bis. 1982.)

Triangles semblables d'un plan P

8.15 On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables si et seulement s'il existe une similitude directe f telle que :

$$f(A) = A', \quad f(B) = B', \quad f(C) = C'.$$

1. Montrer que si

$$\frac{\|\vec{A'B'}\|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\|\vec{A'C'}\|}{\|\vec{AC}\|} \quad \text{et} \quad (\widehat{A'B'}, \widehat{A'C'}) = (\widehat{AB}, \widehat{AC}) \quad [2\pi]$$

les triangles ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables.

2. Montrer que si

$$\begin{cases} (\widehat{A'B'}, \widehat{A'C'}) = (\widehat{AB}, \widehat{AC}) & [2\pi] \\ (\widehat{B'A'}, \widehat{B'C'}) = (\widehat{BA}, \widehat{BC}) & [2\pi] \end{cases}$$

les triangles ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables.

Similitudes inverses du plan

Une application f de P dans P est une similitude inverse (ou indirecte) s'il existe une homothétie affine H et un antidéplacement g tels que $f = H \circ g$. On note $\mathcal{S}^-$ l'ensemble des similitudes inverses et $\mathcal{S} = \mathcal{S}^+ \cup \mathcal{S}^-$.

8.16 Énoncer et démontrer, pour les similitudes inverses, un théorème analogue à celui du § 8.1 a).

8.17 Soit f une application affine. Montrer que f est une similitude inverse si et seulement si l'endomorphisme φ associé à f est de la forme $k\sigma$ où σ est une symétrie vectorielle orthogonale et $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer que k et σ sont uniquement déterminés par f . Le nombre k est appelé rapport de f . Montrer que $(\mathcal{S}, \circ)$ est un groupe non commutatif.

8.18 Point invariant. Forme réduite. Soit f une similitude inverse de rapport $k \neq 1$. Montrer que f admet un point invariant unique I . Montrer que f est la composée de l'homothétie de rapport k et de centre I et d'une symétrie axiale par rapport à une droite passant par I . Ces deux applications sont permutables.

8.19 Représentation analytique. Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Montrer qu'une application f de P dans P est une similitude inverse si, et seulement s'il existe des nombres réels a', b', x_0, y_0 ($(a', b') \neq (0, 0)$) tels que, quel que soit le point $M(x, y)$ d'image $M'(x', y')$ par f , on ait :

$$\begin{cases} x' = a'x + b'y + x_0 \\ y' = b'x - a'y + y_0 \end{cases}$$

Représentation complexe. Dans les mêmes conditions, montrer que f est une similitude inverse si, et seulement s'il existe un couple (a, b) de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que, quel que soit le point M d'image M' par f , les affixes respectives z et z' de M et de M' vérifient la relation

$$z' = a\bar{z} + b.$$

8.20 Montrer qu'une application f de P dans P est une similitude (directe ou inverse) si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout point M et pour tout point N de P d'images $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$, l'on ait :

$$\| \vec{M'N'} \| = k \| \vec{MN} \|.$$

8.21 Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles du plan P tels que

$$\frac{\| \vec{A'B'} \|}{\| \vec{AB} \|} = \frac{\| \vec{B'C'} \|}{\| \vec{BC} \|} = \frac{\| \vec{C'A'} \|}{\| \vec{CA} \|}.$$

1. Montrer qu'il existe une similitude directe ou une similitude inverse f telle que :

$$f(A) = A', \quad f(B) = B', \quad f(C) = C'.$$

2. Montrer que f est unique.

Représentation analytique et représentation complexe d'une similitude directe

8.22 Soit E un plan, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de E . Pour tout réel α on désigne par s_α l'application de E dans E telle que si M est le point de coordonnées (x, y) , $s_\alpha(M)$ est le point de coordonnées (x', y') avec

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \alpha y, \\ y' = \alpha x + \frac{1}{2}y + 1. \end{cases}$$

1. a) Démontrer que s_α est une similitude plane directe.

b) Pour tout point A de E on désigne par E_A l'ensemble des images du point A par les applications s_α . Quelle est la nature de E_A ? Discuter. Donner une construction géométrique simple de E_A à partir des points O et A . Soit (F) l'ensemble des points A tels que A appartient à E_A . Donner une équation cartésienne de (F) et représenter (F) .

2. Soit

(L) la droite d'équation $x = 2$,

(L') la droite d'équation $y = x + 1$.

Montrer qu'il existe un réel β , et un seul, tel que l'image de (L) par s_β soit (L') . Quels sont le rapport, l'angle et le centre ω_β de cette similitude s_β ?

8.23 Un plan orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f qui, à tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, fait correspondre le

point $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ défini par

$$\begin{cases} x' = x - \sqrt{3}y + \sqrt{3}, \\ y' = \sqrt{3}x + y + \sqrt{3}. \end{cases}$$

Démontrer que f est une similitude directe et déterminer les éléments caractéristiques de f .

8.24 Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application affine de ce plan dans lui-même, qui, à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que

$$\begin{cases} x' - a = x(1 + \cos \theta) - y \sin \theta, \\ y' - b = x \sin \theta + y(1 + \cos \theta). \end{cases}$$

θ est un nombre réel tel que $-\pi < \theta \leq \pi$, a et b sont des nombres réels donnés.

1. a) Montrer que l'endomorphisme φ associé à f est le composé d'une rotation vectorielle d'angle $\frac{\theta}{2}$ et d'une homothétie vectorielle.

b) Calculer les coordonnées du point invariant I par f . Quelle est la nature de f ? Caractériser cette application.

c) Montrer $\| \vec{MI} \| = \| \vec{MM'} \|$.

d) f peut-elle être une rotation?

e) Si θ varie, a et b étant fixés, quel est l'ensemble des points invariants par f ?

8.25 Soit P un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application affine f qui à tout point $M(x, y)$ de P associe le point $M'(x', y')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y + 3 \\ y' = -\frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3}. \end{cases}$$

1. Montrer que l'endomorphisme φ associé à f est la composée d'une homothétie vectorielle, dont on déterminera le rapport, et d'une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite vectorielle que l'on précisera.

2. Montrer que f a un unique point fixe I . Montrer que f est la composée d'une homothétie affine de centre I et d'une symétrie axiale dont l'axe passe par I .

8.26 Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et A_t l'application affine de P dans P qui à $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{t}(\cos 2t)x - \frac{1}{t}(\sin 2t)y \\ y' = \frac{1}{t}(\sin 2t)x + \frac{1}{t}(\cos 2t)y. \end{cases}$$

1. Montrer que A_t est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

2. a) Déterminer l'ensemble des réels $t \in \mathbb{R}_+^*$ tels que A_t soit une rotation.

b) Déterminer l'ensemble des réels $t \in \mathbb{R}_+^*$ tels que A_t soit une homothétie.

(D'après Bac C. Maroc 1981.)

8.27 Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les points A, B, C, A', B' et C' de ce plan ont respectivement pour coordonnées dans ce repère

$$\begin{array}{lll} A(3, 1), & B(3, -1), & C(2, 1), \\ A'(2, 5), & B'(4, 3), & C'(1, 4). \end{array}$$

1. Prouver rapidement, en utilisant les résultats du cours, qu'il existe une application affine unique g , de P dans P , telle que les images par g des points A, B et C soient respectivement les points A', B' et C' . Trouver, en fonction des coordonnées (x, y) d'un point M de P , les coordonnées du point $g(M)$, image de M par g . Déterminer le point invariant I de g . Quelle est la nature géométrique de g ?

2. Déterminer le barycentre des points I, A, B affectés respectivement des coefficients 6, 1, 1. En déduire le barycentre des points I, A', B' affectés des mêmes coefficients respectifs.

(Exercice Bac C. Clermont-Ferrand 1980.)

8.28 Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui au nombre complexe z , associe le nombre complexe Z défini par :

$$Z = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i).$$

1. Trouver le nombre complexe ω , invariant par f .

2. Soit m, M et Ω les images de z, Z et ω dans le plan. Quelle est la nature de la transformation qui au point m , associe le point M ?

3. Montrer que le triangle $\Omega m M$ est rectangle.

8.29 Soit l'application définie dans $\mathbb{C}$ par :

$$z \mapsto z' = (i - \sqrt{3})z + 3 + \sqrt{3} + i(2\sqrt{3} + 1).$$

1. Caractériser géométriquement la transformation qui à tout point M du plan complexe d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' .

2. Le point $M(x, y)$ ayant pour homologue le point $M'(x', y')$ exprimer x' et y' en fonction de x et de y .

3. Déterminer la transformée de la droite passant par le point $A(1 - 2\sqrt{3}, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{V}(\sqrt{3}, 1)$.

8.30 Le plan orienté (P) étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle affixe d'un point de (P) de coordonnées x, y le nombre complexe $z = x + iy$.

On appelle S_1 la similitude dans laquelle un point M de P , d'affixe z , a pour image le point M_1 de (P) d'affixe

$$z_1 = (1 + i)z - i.$$

S_2 la similitude dans laquelle M a pour image le point M_2 d'affixe

$$z_2 = \frac{1}{2}(-1 + i)z + \frac{i - 3}{2},$$

et S la composée $S_2 \circ S_1$ de S_1 et de S_2 .

Préciser le rapport, l'angle et le point invariant de chacune des similitudes S_1 et S_2 , la nature de S et son point invariant I .

Placer sur une même figure les points invariants A_1 et A_2 de S_1 et S_2 , le point I , ainsi que les points $I_1 = S_1(I)$ et $A' = S_2(A_1)$.

8.31 On considère l'expression :

$$f(z) = z^3 - (1 + 14i)z^2 - 2(29 - i)z + 68i$$

où z est un nombre complexe.

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on notera a . Montrer qu'il existe des coefficients complexes b et c tels que

$$f(z) = (z - a)(z - b)(z - c).$$

En déduire les autres solutions de l'équation. On notera b la solution dont la partie réelle est négative, c l'autre.

2. Soit A, B, C les images des nombres complexes a, b, c dans le plan complexe. Déterminer les éléments géométriques de la similitude directe laissant A invariant et transformant B en C .

(Exercice Bac C. Antilles-Guyane 1982.)

8.32 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - [(1 + 2i)u + 1]z + (-1 + i)u^2 + iu = 0$$

où z est l'inconnue complexe et u un paramètre complexe. On appellera z' la racine qui est un polynôme du premier degré en u et dont le coefficient de u est $(1 + i)$, z'' l'autre racine.

2. Dans le plan complexe, on appelle P le point d'affixe u , M' celui d'affixe z' , M'' celui d'affixe z'' . Par quelles transformations du plan passe-t-on de P à M' ? (On appellera T_1 cette transformation et on explicitera ses éléments géométriques). Puis de P à M'' ? (On appellera T_2 cette transformation et on explicitera ses éléments géométriques.)

3. Par quelle transformation T passe-t-on alors de M' à M'' ? Donner les éléments caractérisant T .

(Exercice Bac C. Nancy-Metz 1982.)

8.33 Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan orienté $\mathcal{E}$, on donne les points $A(\frac{2}{3}, 0)$ et $B(1, -1)$. On considère l'application S de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui, à tout point M associe M' ainsi défini : M_1 est l'image de M par la rotation de centre A et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$, puis M' est l'image de M_1 par l'homothétie de centre B et de rapport 3.

1. $\mathcal{E}$ étant identifié au plan complexe, on note z l'affixe du point M , z_1 celle de M_1 , z' celle de M' . Exprimer z' en fonction de z .

Déterminer la nature de S et ses éléments caractéristiques.

2. Soit (P) la parabole dont une équation est $y^2 - \frac{8}{3}x = 0$.

Montrer que l'image de (P) par l'application S est une parabole (P') dont on donnera l'équation.

(Exercice Bac C. Amérique du Sud 1981.)

8.34 Dans le plan complexe on appelle A le point d'affixe $2 + i$, H_1 l'homothétie de centre A et de rapport 2, H_2 l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$, R la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Étudier $f = H_2 \circ R \circ H_1$.

8.35 Un plan orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On se propose de déterminer l'ensemble E des points M de ce plan dont les affixes $z = x + iy$ (x et y réels) vérifient

$$|(1+i)z - 2i| = 2.$$

Les deux questions proposent chacune une méthode et peuvent être résolues de façon indépendante l'une de l'autre.

1. Calculer le carré du module du complexe $(1+i)z - 2i$ en fonction des coordonnées (x, y) de M . Déterminer E par une équation cartésienne. Reconnaitre E puis le dessiner.

2. On note s la similitude directe de centre O , de rapport $\sqrt{2}$, d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$, et t la translation de vecteur $-2\vec{v}$.

a) Un point M ayant pour affixe z , calculer l'affixe du point $s(M)$ puis l'affixe du point $t \circ s(M)$.

b) Soit C l'ensemble des points M' d'affixe z' tels que $|z'| = 2$. Reconnaitre C et le dessiner. Déterminer l'ensemble $t \circ s(E)$; en déduire l'ensemble E .

(Exercice Bac C. Poitiers 1982.)

8.36 On associe à tout nombre complexe son image dans un plan P rapporté à un repère orthonormé.

1. Déterminer les nombres complexes z tels que z^2, z^3, z^4 aient des images deux à deux distinctes.

2. Démontrer que si z, z^2, z^3, z^4 ont des images distinctes situées sur un cercle C , z^2, z^3, z^4, z^5 ont des images situées sur un cercle C' . Comparer les rayons de ces cercles.

3. En déduire l'ensemble des nombres complexes z tels que z, z^2, z^3, z^4 aient des images situées sur un cercle.

(Exercice Bac C. Nantes. Session de remplacement 1980.)

8.37 Déterminer les nombres complexes z tels que les images, dans le plan complexe de z, z^2, z^3 forment les sommets d'un triangle dont O est l'orthocentre.

8.38 Dans le plan complexe, on considère trois points A, B, C d'affixes a, b, c . Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si

$$a + bj + cj^2 = 0.$$

8.39 On donne un plan orienté $\mathcal{F}$ dont le plan vectoriel associé est noté P , un triangle $A_1A_2A_3$ de $\mathcal{F}$ et une similitude vectorielle directe $\mathcal{S}$ de P . On note $B_1B_2B_3$ le triangle de $\mathcal{F}$ défini par :

$$\overrightarrow{A_2B_1} = \mathcal{S}(\overrightarrow{A_2A_3}),$$

$$\overrightarrow{A_3B_2} = \mathcal{S}(\overrightarrow{A_3A_1}),$$

$$\overrightarrow{A_1B_3} = \mathcal{S}(\overrightarrow{A_1A_2}).$$

1. On désigne par G l'isobarycentre du triangle $A_1A_2A_3$ (barycentre des sommets affectés de coefficients égaux). Montrer que G est aussi l'isobarycentre du triangle $B_1B_2B_3$.

2. On rapporte le plan $\mathcal{F}$ à un repère orthonormé direct d'origine G . On appelle a_1, a_2, a_3 les affixes de A_1, A_2, A_3 et b_1, b_2, b_3 les affixes de B_1, B_2, B_3 . On désignera par s le nombre complexe associé à la similitude $\mathcal{S}$ c'est-à-dire que, si z est le nombre complexe associé à un vecteur $\vec{v}$ de P et z' le nombre complexe associé au vecteur $\vec{v}'$ transformé de $\vec{v}$ par $\mathcal{S}$, on a $z' = sz$.

Montrer qu'il existe, en général, deux similitudes $\mathcal{S}$ telles que le triangle $B_1B_2B_3$ soit équilatéral et que celles-ci sont indépendantes du choix du triangle $A_1A_2A_3$.

Quel est le cas d'exception?

N.B. On utilisera le nombre complexe j de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

(Exercice Bac C. Groupe I. 1982.)

8.40 Soit un plan orienté P , muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne le nombre complexe

$$a = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

et on désigne par F l'application de P dans lui-même qui au point M d'affixe le nombre complexe z associe le point M' d'affixe

$$z' = z + a\bar{z}.$$

1. On désigne par M_1 le point d'axe $a\bar{z}$. Donner la nature et la détermination géométrique de l'application F_1 de P dans P qui transforme M en M_1 .

2. Montrer que F est la composée de deux applications simples que l'on précisera. Déterminer $F(P)$ (on pourra construire sur une figure les points M, M_1, M').

3. Déterminer l'ensemble des images dans P des solutions de l'équation

$$z + a\bar{z} = 2 \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

soit en utilisant la transformation F , soit par le calcul.

(Exercice Bac C. Paris. Session de remplacement 1979.)

8.41 Dans le plan complexe, on considère l'application f qui à M d'axe z associe le point M' d'axe z' définie par :

$$z' = \bar{z} + 1.$$

Quelle est la nature de f ?

8.42 Dans le plan complexe, on considère l'application f qui à M d'axe z associe le point M' d'axe z' définie par

$$z' = (-3 + 4i)\bar{z} + 12 + 6i.$$

a) Donner l'expression analytique de f .

b) Montrer que f admet un point invariant et un seul I .

c) Étudier l'endomorphisme φ associé à f .

d) Montrer que f est la composée d'une homothétie de centre I et d'une symétrie axiale par rapport à une droite passant par I (similitude inverse).

Utilisation des nombres complexes en géométrie plane

P est un plan complexe, (plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$). On note $M(z), A(a), \dots$ les points M d'axe z, A d'axe $a, \dots$

8.43 Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2, a \neq b$ et $Z \in \mathbb{C}$. Existe-t-il un nombre complexe z tel que $\frac{z-a}{z-b} = Z$? Lorsqu'il en existe, donner une construction géométrique de $M(z)$. Comparer avec l'exercice 8.7.

Dans les exercices suivants, f est l'application étudiée en cours $M(z) \mapsto M' \left(\frac{1}{z} \right)$ (du plan privé de O dans lui-même) et $\bar{f}$ l'application $M(z) \mapsto M' \left(\frac{1}{\bar{z}} \right)$. (ex. 8.44 à 8.48).

8.44* Soit $M(z)$ et $M' \left(\frac{1}{z} \right)$, $A(-1)$ et $B(1)$.

a) Montrer que les points M, M', A, B sont cocycliques ou alignés.
Montrer que

$$\frac{\| \vec{MA} \|}{\| \vec{MB} \|} = \frac{\| \vec{M'A} \|}{\| \vec{M'B} \|} \quad (\text{si } z \neq 1).$$

b) Soit I le milieu de (M, M') . Montrer

$$\frac{\| \vec{IA} \|}{\| \vec{IB} \|} = \left(\frac{\| \vec{MA} \|}{\| \vec{MB} \|} \right)^2$$

et $(\widehat{IA}, \widehat{IB}) \equiv 2(\widehat{MA}, \widehat{MB}) [2\pi]$.

c) Montrer

$$\| \vec{OM} \| + \| \vec{OM'} \| = \| \vec{IA} \| + \| \vec{IB} \|.$$

8.45 Montrer analytiquement que f transforme une droite ne passant pas par O en un cercle passant par O , privé de O .

8.46 Soit Γ un cercle ne passant pas par O . Montrer que $\Gamma' = f(\Gamma)$ est un cercle ne passant pas par O :

a) analytiquement;

b) en utilisant la seconde remarque du § 8.3 a).

8.47 Soit Γ un cercle ne passant pas par O et $\Gamma'' = \bar{f}(\Gamma)$. Montrer que Γ'' est un cercle (on peut utiliser l'exercice précédent). Montrer que O est centre d'une homothétie H transformant Γ en Γ'' . Étudier la disposition des points $M(M \in \Gamma), M''$ et $H(M)$.

8.48 Soit g la fonction $M(z) \mapsto M' \left(\frac{z-i}{z+i} \right)$.

1. Quel est son domaine de définition? Quelle est son image?

2. Montrer que g définit une bijection du demi-plan $\{M(x+iy); y > 0\}$ sur le disque

$$\{M(z); |z| < 1\}.$$

Quelle est l'image de l'axe réel?

3. En écrivant :

$$\frac{z-i}{z+i} = 1 \cdot \frac{2i}{z+i},$$

montrer que g est la composée de $f \left(M(z) \mapsto M' \left(\frac{1}{z} \right) \right)$ et de certaines transformations simples que l'on déterminera.

4. En déduire que g transforme un cercle ou une droite en un cercle ou une droite. Retrouver ce résultat en utilisant la seconde remarque du § 8.3 a).

8.49 Généraliser les résultats précédents à toute fonction $M(z) \mapsto M' \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right)$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres complexes donnés tels que

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

8.50 Cet exercice utilise (questions 4 et 5) certains résultats concernant les coniques.

$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \right)$ et $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \right)$ sont des équations cartésiennes respectivement d'une ellipse et d'une hyperbole.)

Soit h l'application $M(z) \mapsto M' \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right)$ de P privé de O dans P .

1. L'application h est-elle surjective? injective? Existe-t-il des points invariants?

- Définir h analytiquement.
- Quelle est l'image par h de l'axe réel privé de O ? de l'axe des imaginaires purs privé de O ?
- Quelle est l'image d'un cercle de centre O ?
- Quelle est l'image d'une droite passant par O privée de O ?

Révision

8.51 Notations. On considère le plan P , de direction $\vec{P}$, f_1 et f_2 deux applications affines de E dans E , $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ les endomorphismes associés respectivement à f_1 et f_2 . Pour tout point M de E , on notera M_1 le point $f_1(M)$ et M_2 le point $f_2(M)$. Étant donné deux réels α_1 et α_2 tels que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, on étudie dans la suite du problème l'application f (qui dépend de $f_1, f_2, \alpha_1, \alpha_2$) qui à tout point M de P associe le point $f(M)$, barycentre de M_1 affecté du coefficient α_1 et de M_2 affecté du coefficient α_2 . On notera M' l'image par f du point M .

A. Étude de deux cas particuliers.

1. Dans cette question $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont deux éléments de $\vec{P}$, f_1 est la translation de vecteur $\vec{V}_1$ et f_2 est la translation de vecteur $\vec{V}_2$.
Montrer que f est la translation de vecteur $\alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2$.

2. Dans cette question, D est une droite de P , $\vec{D}'$, une droite vectorielle de $\vec{P}$, distincte de la direction de D , $f_1 = id_P$ et f_2 est la projection affine sur D de direction $\vec{D}'$.

a) Montrer que les points de D sont invariants par f .

b) Exprimer $\overrightarrow{M_2 M'}$ en fonction de α_1 et de $\overrightarrow{M_2 M}$. Dessiner l'image M' d'un point M par f dans le cas où $\alpha_1 = 2$. Quelle est l'application f dans le cas où $\alpha_1 = -1$?

B. 1. Soit O un point de E . Montrer que

$$\overrightarrow{O M'} = \alpha_1 \vec{f}_1(\overrightarrow{O M}) + \alpha_2 \vec{f}_2(\overrightarrow{O M})$$

pour tout point M de E (on rappelle que M' désigne $f(M)$ et O' désigne $f(O)$). En déduire que f est une application affine, préciser son endomorphisme associé.

2. Si f_1 et f_2 sont deux homothéties de rapports respectifs k_1 et k_2 , quelle est la nature de f (discuter)?

3. a) On considère un parallélogramme de P ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$), g est une application affine. Montrer que $(g(A), g(B), g(C), g(D))$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

b) Soit (A_1, B_1, C_1, D_1) et (A_2, B_2, C_2, D_2) deux parallélogrammes

$$(\overrightarrow{A_1 B_1} = \overrightarrow{D_1 C_1}, \overrightarrow{A_2 B_2} = \overrightarrow{D_2 C_2}).$$

(On suppose que (A_1, B_1, C_1, D_1) n'est pas aplati), montrer qu'il existe une application affine notée f_2 telle que

$$f_2(A_1) = A_2, \quad f_2(B_1) = B_2, \\ f_2(C_1) = C_2 \quad \text{et} \quad f_2(D_1) = D_2.$$

c) Soit A', B', C', D' les barycentres respectifs de (A_1, α_1) et (A_2, α_2) , (B_1, α_1) et (B_2, α_2) , (C_1, α_1) et (C_2, α_2) , (D_1, α_1) et (D_2, α_2) .
Montrer que (A', B', C', D') est un parallélogramme.

C. Dans ce paragraphe, P est orienté et rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. A tout point M de E on associe son affixe z .

1. Soit f_1 et f_2 deux similitudes directes de P . Montrer que f est soit une similitude directe, soit une application constante (on pourra utiliser les nombres complexes).

2. f_1 et f_2 sont deux similitudes directes de même rapport k ($k > 0$), de même angle θ , de centres respectifs A_1 et A_2 . Montrer que f est la similitude directe de rapport k , d'angle θ et de centre A barycentre de (A_1, α_1) et (A_2, α_2) .

3. a) Soit un carré (A, B, C, D) ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$) et g une similitude directe. Montrer que $(g(A), g(B), g(C), g(D))$ est un carré tel que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv (g(A)g(B), g(A)g(D)) [2\pi].$$

b) (A_1, B_1, C_1, D_1) et (A_2, B_2, C_2, D_2) sont deux carrés dont la longueur des côtés est non nulle tels que

$$\overrightarrow{A_1 B_1} = \overrightarrow{D_1 C_1}, \quad \overrightarrow{A_2 B_2} = \overrightarrow{D_2 C_2}$$

et $(\overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_1 D_1}) \equiv (\overrightarrow{A_2 B_2}, \overrightarrow{A_2 D_2}) [2\pi]$.

Montrer qu'il existe une similitude directe f_2 telle que

$$A_2 = f_2(A_1), \quad B_2 = f_2(B_1), \\ C_2 = f_2(C_1), \quad D_2 = f_2(D_1).$$

A', B', C', D' , étant définis comme dans B.3.c) montrer que (A', B', C', D') est un carré, éventuellement réduit à un point.

N.B. Pour a) et b) l'usage des nombres complexes est déconseillé.

4. On se donne trois points A_1, A_2, B distincts. M_1 décrit le cercle de centre A_1 contenant B d'un mouvement uniforme tel que

$$(\overrightarrow{A_1 B}, \overrightarrow{A_1 M_1}) = \omega t [2\pi] \quad (\omega \neq 0).$$

M_2 décrit le cercle de centre A_2 contenant B d'un mouvement uniforme tel que

$$(\overrightarrow{A_2 B}, \overrightarrow{A_2 M_2}) \equiv \omega t [2\pi].$$

M' est le barycentre de (M_1, α_1) et (M_2, α_2) . Quel est le mouvement de M' (utiliser la question C. 2.)?

(Problème. Bac C. Pondichéry 1982.)

8.52 $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct d'un plan P orienté. Soit $\vec{P}$ le plan vectoriel associé à P . On appelle $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications affines de P transformant toute droite D de P en une droite D' orthogonale à D .

A. 1. Vérifier que la rotation R de centre O dont l'angle a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ radian est un élément de $\mathcal{A}$.

2. On appelle φ l'endomorphisme du plan vectoriel $\vec{P}$ associé à l'application affine f .

Montrer que f appartient à $\mathcal{A}$ si, et seulement si, pour tout vecteur non nul $\vec{u}$:

$$\varphi(\vec{u}) \neq \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \varphi(\vec{u}) = 0.$$

3. Montrer que si f appartient à $\mathcal{A}$, la matrice de φ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ est de la forme $\begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$ où λ est un réel non nul.

En déduire que f est une similitude directe, en préciser le rapport et l'angle suivant les valeurs de λ .

4. En déduire quel est l'ensemble $\mathcal{A}$.

B. Dans cette partie, on désigne par $\mathcal{B}$ l'ensemble des applications (*non supposées affines*) de P dans P , transformant toute droite D de P en une droite D' de P orthogonale à D . On se propose de montrer qu'une telle application est nécessairement affine et donc que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

1. Soit f_1 un élément de $\mathcal{B}$.

a) Montrer qu'il existe au moins un couple de points (A, B) tel que

$$A \neq B \quad \text{et} \quad f_1(A) \neq f_1(B).$$

On notera $A' = f_1(A)$ et $B' = f_1(B)$.

b) On appelle M un point de P n'appartenant pas à la droite AB . Montrer que $M' = f_1(M)$ peut être obtenu comme intersection de deux droites que l'on précisera.

En déduire une construction de M' .

2. Soit f_2 la similitude plane directe transformant A en A' et B en B' (c'est-à-dire que $f_2(A) = f_1(A)$ et $f_2(B) = f_1(B)$).

a) Donner une mesure de l'angle de f_2 .

b) Si M n'est pas un point de la droite AB , montrer que $f_2(M) = f_1(M)$.

c) Si M est un point de la droite AB , indiquer une construction de $f_1(M)$. (On pourra introduire un point C n'appartenant pas à la droite AB .)

d) En déduire que $f_1 = f_2$. On a ainsi prouvé que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

C. R désigne toujours la rotation de centre O dont l'angle a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ radian. La loi $\circ$ est la composition des applications.

1. Montrer qu'on définit une loi interne, notée $\star$ sur $\mathcal{A}$ en posant :

$$(\forall f \in \mathcal{A})(\forall g \in \mathcal{A}) \quad f \star g = f \circ R \circ g.$$

2. Montrer qu'il existe dans $\mathcal{A}$ un élément e neutre pour la loi $\star$.

3. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des homothéties de rapport non nul et des translations. Montrer que pour tout h appartenant à $\mathcal{D}$, $e \circ h$ appartient à $\mathcal{A}$. Soit L l'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{A}$ qui à h associe $e \circ h$. Montrer que L est un isomorphisme du groupe $(\mathcal{D}, \circ)$ sur $(\mathcal{A}, \star)$.

(Problème. Bac C. Rennes 1981.)

8.53 P est un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. À tout point M de P de coordonnées (x, y) on associe le nombre complexe $z = x + iy$ appelé affixe de M .

A. 1. Étant donné un complexe non nul $\omega = u + iv$, avec u et v réels, et un réel ℓ , déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\bar{\omega}z + \omega\bar{z} = \ell$.

2. Soit D une droite de P dont une équation est

$$ax + by + c = 0$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$; $(a, b) \neq (0, 0)$.

Trouver un complexe non nul ω et un réel ℓ tels que D soit l'ensemble des points de P dont l'affixe z vérifie

$$\bar{\omega}z + \omega\bar{z} = \ell.$$

B. 1. Étant donné un complexe ω et un réel k , déterminer l'ensemble des points M de P dont l'affixe z vérifie

$$z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} + k = 0.$$

(on aura à discuter en fonction du signe de $|\omega|^2 - k$.)

2. Soit C le cercle de centre le point de coordonnées (a, b) , de rayon R . Trouver un complexe ω et un réel k tels que C soit l'ensemble des points de P dont l'affixe z vérifie

$$z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} + k = 0.$$

C. On considère l'application f de $P - \{O\}$ dans $P - \{O\}$ qui au point M d'affixe z associe le point M'

d'affixe z' telle que $z' = \frac{1}{z}$.

1. Montrer que pour tout point M de $P - \{O\}$, les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O .

2. Montrer que f est involutive. Préciser l'ensemble des points M de P tels que $f(M) = M$ et donner ses éléments remarquables.

3. a) Soit D une droite ne contenant pas le point O . En utilisant les parties A et B, déterminer l'image de D par l'application f . Préciser la nature géométrique de cette image et donner ses éléments remarquables.

b) Soit U une droite contenant O . Déterminer l'image de $U - \{O\}$ par f .

4. Soit C un cercle passant par O . Déterminer l'image de $C - \{O\}$ par f . Préciser la nature géométrique de cette image.

D. Si M et N sont deux points quelconques de P , on rappelle que la distance MN de M et N est égale au module de la différence des affixes de M et de N .

1. Soit A et B deux points distincts de $P - \{O\}$ d'images respectives A' et B' par f . Exprimer $A'B'$ en fonction de AB , OA et OB .

2. Soit un cercle C passant par O et trois points R , S , T sur ce cercle tels que O , R , S et T soient deux à deux distincts et que le point d'intersection des droites (OS) et (RT) appartienne au segment $[R, T]$. Montrer que

$$OS \cdot RT = OR \cdot TS + OT \cdot RS.$$

(On pourra considérer l'image par f de $C - \{O\}$ et utiliser le fait qu'un point B appartient à un segment $[A, C]$ si, et seulement si, $AB + BC = AC$.)

3. Soit trois points R , S , T du plan P tels que O , R , S , T soient distincts deux à deux et tels que

$$OS \cdot RT = OR \cdot TS + OT \cdot RS.$$

Montrer que O , R , S , T sont sur un même cercle ou sur une même droite.

(Problème. Bac C. Toulouse 1980.)

8.54 Soit P un plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A tout nombre complexe $z = x + iy$, x et y désignant des réels, on associe son image m , de coordonnées (x, y) , dans P .

Soit λ un complexe non nul. On désigne par :

ω_λ et A_λ les images dans P des nombres λ et 2λ ;

P_λ le plan P privé du point ω_λ ;

D_λ la droite $(O\omega_\lambda)$ privée du point ω_λ ;

Δ_λ la droite perpendiculaire à D_λ en ω_λ privée de ω_λ ;

Ω_λ le cercle de centre ω_λ passant par O .

On se propose d'étudier la famille des applications φ_λ de P_λ dans P qui au point m image de z associent le point n image de u tel que

$$u = \frac{z^2}{2(z - \lambda)}.$$

A. Soit f et g les fonctions de variable réelle qui à x associent respectivement

$$f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^2-1}{2x}.$$

Étudier les variations des fonctions f et g et représenter graphiquement ces fonctions sur une même figure, dans un plan muni d'un repère orthonormé. Étudier les asymptotes des courbes représentatives.

B. Dans toute cette partie on choisit $\lambda = 1$.

1. Déterminer les points invariants de φ_1 .

2. Déterminer $\varphi_1(D_1)$ et $\varphi_1(\Delta_1)$.

3. Soit m un point du cercle Ω_1 . Montrer que $\varphi_1(m)$ se déduit simplement de m . En déduire $\varphi_1(\Omega_1)$. (On pourra repérer la position de m sur Ω_1 par le réel θ , détermination de la mesure de l'angle $(\vec{u}, \widehat{\omega_1 m})$.)

4. Déterminer l'ensemble des points m de P_1 dont l'image par φ_1 est un point de la droite $(O, \vec{u})$.

5. Soit n un point de P non invariant par φ_1 ; montrer que n a deux antécédents m et m' par φ_1 , et que ces points vérifient les propriétés suivantes :

n est le milieu du segment $[m, m']$

$$\begin{cases} \|\widehat{\omega_1 m}\| \|\widehat{\omega_1 m'}\| = 1 \\ (\widehat{\vec{u}, \omega_1 m}) + (\widehat{\vec{u}, \omega_1 m'}) \equiv 0[2\pi] \end{cases}$$

Vérifier que ces propriétés restent valables lorsque m et m' sont confondus en un point invariant de φ_1 . Retrouver ainsi une partie des résultats des questions 2. et 3.

C. On suppose que λ est un complexe quelconque non nul. Soit S_λ la similitude plane directe du plan P qui admet O pour centre et qui transforme ω_1 en ω_λ .

1. Démontrer $\varphi_\lambda = S_\lambda \circ \varphi_1 \circ S_\lambda^{-1}$.

2. Déterminer $\varphi_\lambda(\Omega_\lambda)$.

(Problème. Bac C. Paris-Créteil-Versailles 1981.)

9

ISOMÉTRIES DE L'ESPACE

Dans tout le chapitre, nous nous placerons dans l'espace E , de direction $\vec{E}$. Tous les repères utilisés seront orthonormés.

9.1 ISOMÉTRIES VECTORIELLES ET ISOMÉTRIES AFFINES

a) Isométries vectorielles

Définition

On appelle **isométrie vectorielle** de $\vec{E}$ tout endomorphisme de $\vec{E}$ conservant la norme.

On démontre de façon identique à celle du § 7.1 :

Théorème

Soit φ une application de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) φ est un *endomorphisme* conservant la norme (c'est-à-dire une isométrie vectorielle de $\vec{E}$).
- (2) φ est une *application* conservant le produit scalaire.
- (3) φ est un *endomorphisme* tel qu'il existe une base orthonormée ayant pour image une base orthonormée.

L'image de *toute* base orthonormée par une isométrie vectorielle est une base orthonormée.

Puisque l'image d'une base (orthonormée) est une base (orthonormée) par une isométrie vectorielle φ , cette application est **bijective**. C'est donc un automorphisme de $\vec{E}$.

EXEMPLES

1. Soit $\vec{P}$ un plan vectoriel de $\vec{E}$, la **symétrie vectorielle orthogonale σ par rapport à $\vec{P}$** est l'application de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$ qui associe à tout vecteur $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ avec $\vec{v}' \in \vec{P}$ et $\vec{v}''$ orthogonal à $\vec{P}$, le vecteur $\vec{v}' - \vec{v}''$. Cette application est un endomorphisme de $\vec{E}$ (cf. § 3.10) et la norme de tout vecteur $\vec{v}$ est conservée :

$$\|\sigma(\vec{v})\| = \sqrt{(\vec{v}' - \vec{v}'')^2} = \sqrt{\vec{v}'^2 + \vec{v}''^2} = \|\vec{v}\|.$$

2. Soit $\vec{D}$ une droite vectorielle de $\vec{E}$, la **symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\vec{D}$** est l'application de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$ qui associe, à tout vecteur $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ avec $\vec{v}' \in \vec{D}$ et $\vec{v}''$ orthogonal à $\vec{D}$, le vecteur $\vec{v}' - \vec{v}''$. On voit, comme dans l'exemple précédent, que cette application est une isométrie vectorielle de $\vec{E}$.

b) Isométries affines

Définition

On appelle **isométrie de E** toute application de E dans E conservant les distances.

On démontre de façon identique à celle du § 7.2 a) :

Théorème

Soit f une application de E dans E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est une application conservant les distances (c'est-à-dire une isométrie de E).
- (2) f est une application affine dont l'endomorphisme associé est une isométrie vectorielle de $\vec{E}$.

EXEMPLES

1. Toute translation de E est une isométrie affine.
2. Toute symétrie orthogonale s_P par rapport à un plan P de E est une isométrie affine. En effet, son endomorphisme associé est l'isométrie vectorielle σ_P .
3. Toute symétrie orthogonale s_D par rapport à une droite D de E est une isométrie affine puisque son endomorphisme associé est l'isométrie vectorielle σ_D . L'application s_D est appelée **demi-tour** ou **retournement** d'axe D.
4. Toute symétrie par rapport à un point A de E est une isométrie affine, son endomorphisme associé étant $-\text{id}_{\vec{E}}$.

REMARQUE

On montre aisément qu'une isométrie affine f est involutive si, et seulement si, f est une symétrie orthogonale.

c) Propriétés des isométries affines

- Les propriétés d'une isométrie de E sont celles d'une application affine et celles qui découlent du fait que l'endomorphisme associé est une isométrie vectorielle :
 - une isométrie de E est déterminée par la donnée d'un couple de points homologues et de l'isométrie vectorielle associée;

— une isométrie de E conserve le barycentre, la convexité, l'alignement de points, le parallélisme et l'orthogonalité;

— elle est bijective puisque l'isométrie vectorielle associée est bijective.

• On vérifie facilement que l'ensemble $\mathcal{I}$ des isométries de E , muni de la composition des applications, est un groupe (démonstration identique à celle du § 7.2 c)).

• On peut vérifier sur des exemples simples (cercle, disque, sphère, boule, polygone convexe, parallélépipède, pyramide) qu'une isométrie de E conserve les longueurs, les aires et les volumes.

Nous *admettrons* que si F est une partie de l'espace E de longueur l (resp. d'aire a , de volume v), son image par une isométrie a pour longueur l (resp. pour aire a , pour volume v).

d) Détermination analytique

L'espace E étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit f l'application affine qui transforme O en $O'(x_0, y_0, z_0)$ et dont l'endomorphisme associé φ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

Rappelons que les matrices colonnes

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

sont les matrices des coordonnées respectivement de $\varphi(\vec{i})$, $\varphi(\vec{j})$, $\varphi(\vec{k})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'application affine f est une isométrie affine si et seulement si φ est une isométrie vectorielle c'est-à-dire si et seulement si $(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}), \varphi(\vec{k}))$ est une base orthonormée (cf. § 9.1 a)) ce qui équivaut encore à :

$$(I) \quad \begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 = \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 = 1 \\ \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = \alpha_{11}\alpha_{13} + \alpha_{21}\alpha_{23} + \alpha_{31}\alpha_{33} \\ \quad = \alpha_{12}\alpha_{13} + \alpha_{22}\alpha_{23} + \alpha_{32}\alpha_{33} = 0. \end{cases}$$

L'image $M'(x', y', z')$ d'un point quelconque $M(x, y, z)$ de E est définie par :

$$\overrightarrow{OM'} = \varphi(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{OO'}$$

$$\begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + x_0 \\ y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + y_0 \\ z' = \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + z_0 \end{cases}$$

Ces formules définissent une isométrie affine de E si et seulement si les coefficients α_{ij} vérifient les relations (I).

9.2 ISOMÉTRIES DE E LAISSANT INVARIANT UN POINT DONNÉ

Soit A un point de E . Nous nous proposons d'étudier l'ensemble J_A des isométries de E laissant A invariant.

On vérifie facilement que $(J_A, \circ)$ est un sous-groupe de $(J, \circ)$.

Nous connaissons déjà des éléments de J_A :

- Toute symétrie orthogonale par rapport à un plan passant par A est élément de J_A .
- Tout demi-tour dont l'axe passe par A est élément de J_A .
- La symétrie par rapport à A est un élément de J_A .

Toute composée d'isométries de l'un des types précédents appartient à J_A .

Nous allons maintenant démontrer que tout élément de J_A est la composée de symétries orthogonales par rapport à des plans contenant A .

Soit f un élément fixé de J_A . Considérons un repère affine (A, B, C, D) de E tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ soit une base orthonormée de $\vec{E}$. Soit B', C', D' les images de B, C, D par f . Distinguons plusieurs cas.

■ Premier cas.

Les trois points B, C, D sont invariants.

$B = B', C = C', D = D'$. Dans ce cas $f = \text{id}_E$ (en effet, rappelons qu'une application affine de l'espace E est déterminée lorsqu'on connaît les images de quatre points d'un repère affine).

■ Deuxième cas.

Deux des trois points B, C, D sont invariants. Par exemple :

$$B = B', \quad C = C', \quad D \neq D' \text{ (fig. 1).}$$

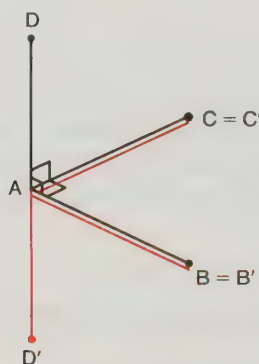


fig. 1

f est la symétrie orthogonale par rapport au plan (ABC) car f et cette symétrie, transformant les points du repère affine (A, B, C, D) suivant les mêmes points, sont égales.

■ Troisième cas.

Un des trois points B, C, D est invariant. Par exemple :

$$B = B', \quad C \neq C', \quad D \neq D' \text{ (fig. 2).}$$

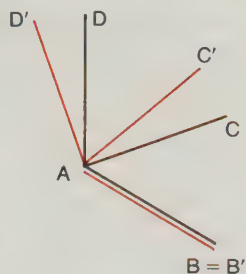


fig. 2

Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur de (C, C') . On a $s(C) = C'$. On peut avoir deux possibilités :

- si $s(D) = D'$, alors $f = s$;
- si $s(D) = D'' \neq D'$, soit s' la symétrie par rapport au plan $(AB'C')$, on a :

$$(A, B, C, D) \xrightarrow{s} (A, B', C', D'') \xrightarrow{s'} (A, B', C', D')$$

donc $f = s' \circ s$.

■ Quatrième cas.

Aucun des points B, C, D n'est invariant : $B \neq B', C \neq C', D \neq D'$. Soit s'' la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur de (B, B') :

$$(A, B, C, D) \xrightarrow{s''} (A, B', C'', D'')$$

les repères affines (A, B', C'', D'') et (A, B', C', D') ont au moins deux points communs A et B' . Donc on transforme l'un en l'autre par l'une des applications du 1^{er} ou 2^e ou 3^e cas. On en déduit que f est une symétrie orthogonale par rapport à un plan ou la composée de deux ou trois symétries orthogonales par rapport à des plans passant par A . En résumé :

Théorème

Toute isométrie de E ayant un point invariant A est l'identité ou une symétrie orthogonale par rapport à un plan passant par A ou la composée de deux ou trois symétries orthogonales par rapport à des plans passant par A .

EXEMPLES

Nous avons noté au début du paragraphe que J_A contenait les demi-tours d'axes passant par A ainsi que la symétrie par rapport à A . Décomposons ces éléments particuliers de J_A .

1. Soit s_Δ le demi-tour d'axe Δ passant par A . Considérons deux plans perpendiculaires P et Q contenant Δ (fig. 3). On peut choisir un repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ de telle sorte que B appartienne à P , C à Q et D à Δ .

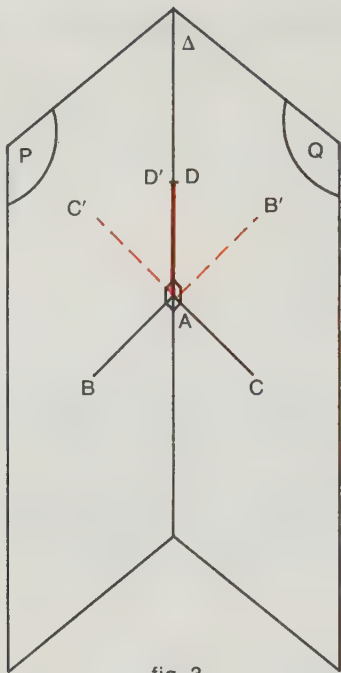


fig. 3

On a alors : $s_{\Delta} = s_Q \circ s_P = s_P \circ s_Q$.
Le demi-tour d'axe Δ est la composée des symétries orthogonales par rapport à deux plans perpendiculaires contenant Δ (ces deux symétries commutent).

2. Soit s_A la symétrie par rapport au point A. Considérons trois plans P, Q, R deux à deux perpendiculaires et contenant A. On peut choisir un repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ de E tel que $B \in P \cap R, C \in R \cap Q, D \in Q \cap P$ (fig. 4).

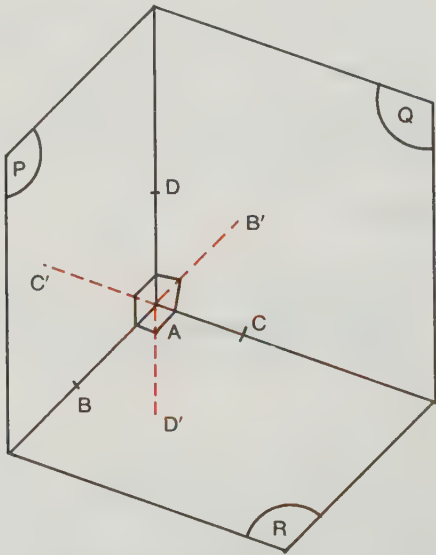


fig. 4

On a alors : $s_A = s_R \circ s_Q \circ s_P$.
La symétrie par rapport au point A est la composée des symétries orthogonales par rapport à trois plans deux à deux perpendiculaires et contenant A (ces trois symétries commutent entre elles).

REMARQUE Soit f une isométrie quelconque de E , elle transforme le repère affine (A, B, C, D) en un repère affine (A', B', C', D') . Supposons toujours $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ repère cartésien orthonormé. Si $A \neq A'$, soit s''' la symétrie par rapport au plan médiateur de (A, A') . On a :

$$(A, B, C, D) \xrightarrow{s'''} (A', B'', C'', D'')$$

les repères affines (A', B'', C'', D'') et (A', B', C', D') ont au moins un point commun A' donc on transforme l'un en l'autre par l'une des applications du 1^{er} ou 2^e ou 3^e ou 4^e cas de la démonstration précédant le théorème. On en déduit que toute isométrie de E est l'identité ou une symétrie orthogonale par rapport à un plan ou la composée de deux ou trois ou quatre symétries orthogonales par rapport à des plans.

9.3 COMPOSITION DE DEUX SYMÉTRIES ORTHOGONALES PAR RAPPORT A DEUX PLANS

Étudions, avec plus d'attention, le cas où une isométrie de E est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à deux plans.

a) Les deux plans sont parallèles

La démonstration est *identique* à celle (cf. § 7.5 c)) relative à la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles D et D' . On remplacera D et D' par deux plans parallèles P et P' . Nous énoncerons :

Théorème

La composée $s_{P'} \circ s_P$ de deux symétries orthogonales par rapport à deux plans parallèles P et P' est la translation $t_{2\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est le vecteur orthogonal à la direction de P et P' et tel que $t_{\vec{u}}(P) = P'$.

Réciproquement toute translation de E est la composée, d'une infinité de manières, de deux symétries orthogonales par rapport à deux plans parallèles.

b) Les deux plans ont une droite en commun. Rotation de E

Supposons les plans P et P' ayant en commun une droite D : les deux plans peuvent être sécants suivant la droite D ou confondus et, dans ce dernier cas, D est incluse dans les deux plans.

Définition

On appelle rotation de l'espace E la composée de deux symétries orthogonales par rapport à deux plans ayant une droite en commun.

■ Relation entre rotation de l'espace et rotation plane

Soit $r = s_{P'} \circ s_P$ une rotation de E et $D \subset P \cap P'$ (fig. 5).

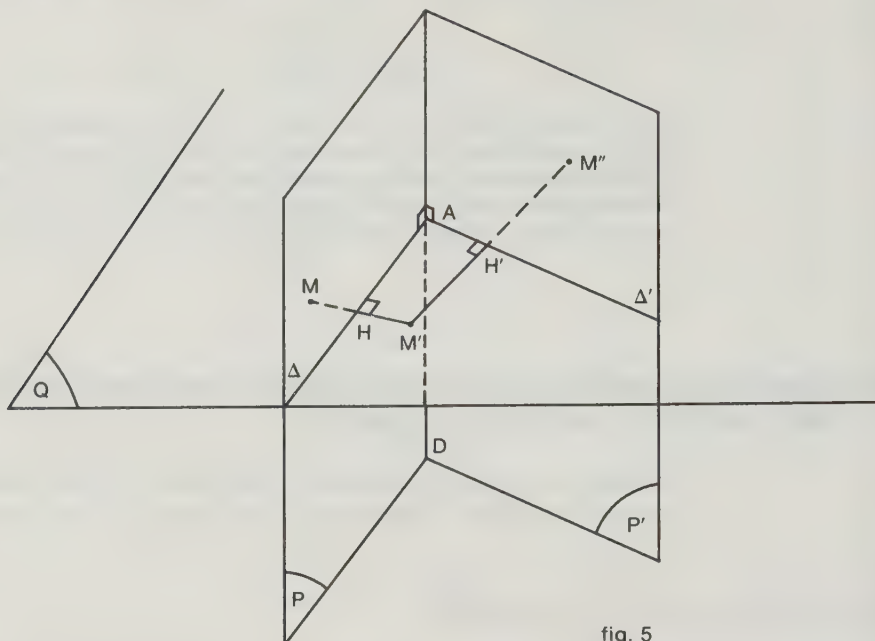


fig. 5

• La droite D est stable par r (c'est-à-dire que tout point de D a pour image un point de D) et la restriction de r à D est l'identité de D .

• Soit Q un plan orthogonal à D . Il est stable par s_P et $s_{P'}$ et par conséquent par r . En effet, quel que soit M de Q , posons $M' = s_P(M)$ et $M'' = s_{P'}(M')$, soit A le point d'intersection de Q et D ; puisque s_P et $s_{P'}$ sont des isométries l'orthogonalité est conservée donc $\overrightarrow{AM}$ orthogonal à $\overrightarrow{D}$ implique $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AM''}$ orthogonaux à $\overrightarrow{D}$ donc M' et M'' appartiennent au plan Q .

Les restrictions de s_P et $s_{P'}$ au plan Q sont les symétries orthogonales s_Δ et $s_{\Delta'}$ par rapport aux droites d'intersection Δ et Δ' de Q avec P et P' . La restriction de r au plan Q est $\bar{r} = s_{\Delta'} \circ s_\Delta$ qui est une rotation de Q , de centre A .

• Étudions la réciproque. Soit f une application affine de E dans E . On suppose qu'il existe une droite D et un plan Q orthogonal à D coupant D en A tels que :

- D est stable par f et la restriction de f à D est id_D ;
- Q est stable par f et la restriction de f à Q est une rotation $\bar{r}$ de centre A .

On sait trouver (cf. § 7.5 d)) d'une infinité de manières, deux droites Δ et Δ' dans Q , passant par A et telles que $\bar{r} = s_{\Delta'} \circ s_\Delta$. Soit P (resp. P') le plan contenant D et Δ (resp. D et Δ'). Les deux applications affines $s_{P'} \circ s_P$ et r coïncident sur D et sur Q , elles sont donc égales.

Théorème 1

Une application affine f de E dans E est une rotation si et seulement s'il existe une droite D et un plan Q orthogonal à D coupant D en A tels que :

1. D est stable par f et la restriction de f à D est l'identité de D ;
2. Q est stable par f et la restriction de f à Q est une rotation de centre A .

■ Axe de la rotation

Tous les points de D sont évidemment invariants.

Supposons maintenant $r \neq \text{id}_E$, c'est-à-dire $P \neq P'$. On a alors $s_\Delta \neq s_{\Delta'}$ et $\bar{r}$ est donc une rotation de Q autre que l'identité de Q . Par suite A est le seul point de Q invariant par $\bar{r}$, donc aussi par r .

Comme Q est un plan quelconque orthogonal à D , on a ainsi prouvé que les seuls points de E invariants par r sont les points de D .

Réciproquement, soit f une isométrie de E dont l'ensemble des points invariants est une droite D . Soit (A, B, C, F) un repère affine de E tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF})$ soit une base orthonormée de $\vec{E}$, A et B appartenant à D . D'après l'étude faite au paragraphe 9.2 (troisième cas), on peut affirmer que f est :

- soit une symétrie orthogonale par rapport à un plan contenant D ;
- soit la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des plans P et P' contenant D c'est-à-dire une rotation.

Comme le premier cas est exclu car l'ensemble des points invariants de f n'est pas un plan, on a ainsi montré que f était une rotation.

Finalement, nous avons caractérisé les rotations autres que l'identité de E :

Théorème 2 et définition

L'ensemble des points invariants d'une rotation $r = s_{P'} \circ s_P$, autre que l'identité, est la droite $D = P \cap P'$. Cette droite est appelée axe de la rotation.

Réciproquement, toute isométrie f de E dont l'ensemble des points invariants est une droite D est une rotation, autre que l'identité, et d'axe D .

On peut convenir que toute droite de E est axe de la rotation identité.

■ Angle d'une rotation

Soit r une rotation autre que l'identité et D son axe.

La rotation $\bar{r}$ introduite précédemment dépend du plan Q orthogonal à D considéré, mais la rotation vectorielle $\bar{\rho}$ de $\vec{Q}$ qui lui est associée en est indépendante (car $\vec{\Delta}$ et $\vec{\Delta}'$ ne dépendent pas de Q).

Définition

L'angle de la rotation vectorielle $\bar{\rho}$ de $\vec{Q}$ est appelé angle de la rotation r . On dit que la rotation identité est d'angle nul.

Pour pouvoir définir les mesures de cet angle, il nous faut orienter $\vec{Q}$.

Nous supposons, à partir de maintenant, avoir fait choix d'une orientation de $\vec{E}$ et d'une orientation de la droite vectorielle $\vec{D}$ (c'est-à-dire d'un vecteur unitaire $\vec{w}$ de $\vec{D}$). On a vu, en classe de Première, qu'il existait une orientation unique de $\vec{Q}$ telle que, pour toute base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\vec{Q}$, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe de $\vec{E}$ (autrement dit, $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$). On dit alors que les orientations de $\vec{D}$ et de $\vec{Q}$ sont compatibles.

Soit θ l'une des mesures de l'angle de $\bar{\rho}$ dans le plan $\vec{Q}$ ainsi orienté. On dit abusivement que la rotation r considérée est d'axe D , orienté par $\vec{w}$, et « d'angle θ ».

On convient de dire que la rotation identité est « d'angle 0 » ou « d'angle $2k\pi$ », $k \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLE Les mesures de l'angle d'un demi-tour d'axe D sont les nombres de la forme

$$\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ces mesures sont indépendantes de l'orientation de $\vec{Q}$ choisie.

Notons bien que, ce cas particulier mis à part, les mesures de l'angle d'une rotation autre que l'identité dépendent essentiellement de l'orientation de $\vec{Q}$, c'est-à-dire :

- d'une part de l'orientation de E choisie;
- d'autre part de l'orientation de l'axe D choisie.

Si on change l'une de ces orientations, les mesures sont changées en leurs opposées.

REMARQUE Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\vec{Q}$, $\vec{v}$ le vecteur unitaire de $\vec{Q}$ directement orthogonal à $\vec{u}$. On a, en appelant θ l'une des mesures de l'angle de r et ρ l'endomorphisme associé à r :

$$\rho(\vec{u}) = \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{v}$$

d'où :

$\vec{u} \cdot \rho(\vec{u}) = \cos \theta$

 et

$\vec{u} \wedge \rho(\vec{u}) = \sin \theta \vec{w}$

ce qui permet pratiquement de déterminer θ modulo 2π .

■ Décomposition d'une rotation

Soit r une rotation autre que l'identité, D son axe et un plan P quelconque contenant D . Soit Q un plan orthogonal à D coupant P selon la droite Δ et D en A . La restriction $\bar{r}$ de r à Q est une rotation de centre A . On peut donc trouver une droite Δ' , et une seule, de Q telle que $\bar{r} = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$. Plus précisément, si $\vec{Q}$ est orienté (par le choix d'orientations de E et de D) et si l'angle de r a pour mesure θ , Δ' est déterminée par

$$(\widehat{\Delta, \Delta'}) \equiv \frac{\theta}{2} \quad [\pi].$$

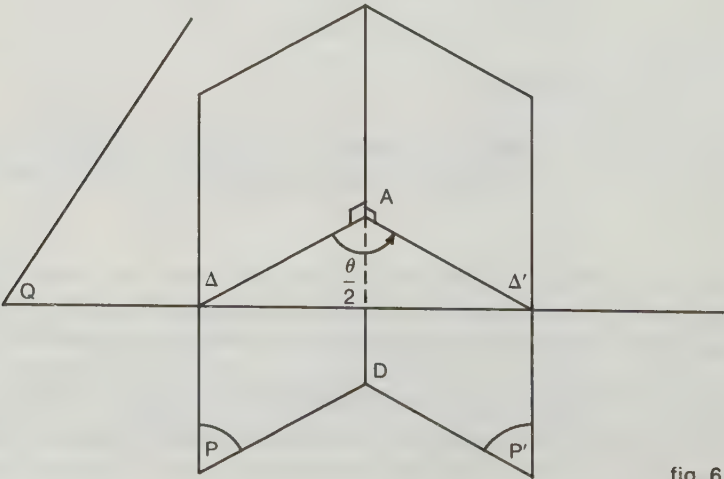


fig. 6

Soit alors P' le plan contenant les deux droites D et Δ' . L'isométrie $s_{P'} \circ s_P$ coïncide avec r sur D et sur P . Par suite

$$r = s_{P'} \circ s_P.$$

On montre de même que si P' est un plan donné passant par D , il existe un plan P et un seul passant par D et tel que $r = s_{P'} \circ s_P$.

Ces résultats sont évidemment encore valables lorsque r est l'identité de E et D une droite quelconque de E . Nous avons donc prouvé :

Théorème 3

Toute rotation d'axe D est la composée, d'une infinité de façons, de deux symétries orthogonales par rapport à des plans passant par D . Le choix de l'un de ces plans est arbitraire.

EXERCICE RÉSOLU

Soit E l'espace orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f de E dans E qui au point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(3x + y + \sqrt{6}z) \\ y' = \frac{1}{4}(x + 3y - \sqrt{6}z) \\ z' = \frac{1}{4}(-\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z). \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Chercher l'ensemble des points invariants. En déduire que f est une rotation.
3. Déterminer l'angle de f .

1. Nous utilisons la caractérisation analytique des isométries (§ 9.1 d)

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{6}}{4} \right)^2 = \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{6}}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 1 \\ \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{3}{4} \right) + \left(\frac{-\sqrt{6}}{4} \right) \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right) = \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{-\sqrt{6}}{4} \right) + \left(\frac{-\sqrt{6}}{4} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \\ \qquad \qquad \qquad = \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right) + \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{-\sqrt{6}}{4} \right) + \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = 0. \end{cases}$$

On peut aussi montrer que f est une isométrie en remarquant que, φ étant l'endomorphisme associé à f et $\vec{v}(x, y, z)$ un vecteur quelconque d'image $\vec{v}'(x', y', z')$, la norme est conservée car :

$$\begin{aligned} \|\vec{v}'\|^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ &= \frac{1}{16}(3x + y + \sqrt{6}z)^2 + \frac{1}{16}(x + 3y - \sqrt{6}z)^2 + \frac{1}{16}(-\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

2. Le point $M(x, y, z)$ est invariant si, et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(3x + y + \sqrt{6}z) = x \\ \frac{1}{4}(x + 3y - \sqrt{6}z) = y \\ \frac{1}{4}(-\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z) = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + \sqrt{6}z = 0 \\ x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ -x + y - \frac{2}{\sqrt{6}}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des points invariants est la droite D d'équations $x = y$ et $z = 0$. Donc (cf. Théorème 2 de ce sous-paragraphe), f est une rotation d'axe D .

3. Orientons D par le choix du vecteur unitaire $\vec{w} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$. Le vecteur $\vec{k}$ est orthogonal à D . Donc (cf. Remarque de ce sous-paragraphe), si θ est une mesure de l'angle de f et si φ est l'endomorphisme associé à f , on a : $\cos \theta = \vec{k} \cdot \varphi(\vec{k})$ et $\sin \theta \vec{w} = \vec{k} \wedge \varphi(\vec{k})$. Rappelons que, lorsqu'on a dans une base orthonormée

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$. Dans notre exercice :

$$\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{k}) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d'où $\cos \theta = \frac{1}{2}$

et $\sin \theta \vec{w} = \frac{\sqrt{6}}{4} \vec{i} + \frac{\sqrt{6}}{4} \vec{j} = \frac{\sqrt{6}}{4}(\vec{i} + \vec{j}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{w}$.

Donc :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Par suite, $\theta \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

9.4 COMPOSITION DE TRANSLATIONS ET DE ROTATIONS DE E

Lorsqu'on compose des translations et des rotations de E, obtient-on des translations ou des rotations comme en géométrie plane (cf. § 7.5 g) ?

On sait déjà (cf. 5.5 a)) que l'ensemble $\mathcal{T}$ des translations de E, muni de la composition des applications, est un groupe commutatif.

a) Le groupe des rotations d'axe donné

Soit $\mathcal{R}_D$ l'ensemble des rotations admettant une droite D donnée pour axe.

- Soit r_1 et r_2 deux éléments de $\mathcal{R}_D$. La restriction de r_1 (resp. r_2) à D est l'identité de D. La restriction de r_1 (resp. r_2) à un plan Q orthogonal à D et coupant D en A est une rotation $\bar{r}_1$ (resp. $\bar{r}_2$) de centre A. Il en résulte que la restriction de $r_2 \circ r_1$ à D est l'identité de D et la restriction de $r_2 \circ r_1$ à Q est $\bar{r}_2 \circ \bar{r}_1$. D'après § 9.3 b) (théorème 1) $r_2 \circ r_1$ est donc une rotation d'axe D. De plus, l'ensemble des rotations de Q de centre A étant un groupe commutatif, on a $\bar{r}_2 \circ \bar{r}_1 = \bar{r}_1 \circ \bar{r}_2$ et, par conséquent $r_2 \circ r_1 = r_1 \circ r_2$.

La composition des applications est donc une loi interne commutative de $\mathcal{R}_D$. On sait d'autre part que cette loi est associative.

- L'identité de E est élément neutre de $\mathcal{R}_D$.
- La rotation d'axe D dont la restriction à Q est $\bar{r}_1^{-1}$ est le symétrique de r_1 dans $\mathcal{R}_D$.

Théorème

L'ensemble des rotations d'axe donné, muni de la composition des applications, est un groupe commutatif.

Ajoutons que si E et D sont orientés, si r_1 et r_2 ont pour angles respectifs θ_1 et θ_2 , alors $r_2 \circ r_1$ a pour angle $\theta_1 + \theta_2$ et r_1^{-1} a pour angle $-\theta_1$.

b) Composée de deux rotations d'axes parallèles distincts

Soit r_1 et r_2 deux rotations d'axes respectifs D_1 et D_2 parallèles ($D_1 \neq D_2$).

Soit P le plan contenant D_1 et D_2 , il existe des plans P_1 et P_2 tels que :

$$r_1 = s_P \circ s_{P_1} \quad \text{et} \quad r_2 = s_{P_2} \circ s_P.$$

On en déduit :

$$r_2 \circ r_1 = (s_{P_2} \circ s_P) \circ (s_P \circ s_{P_1}) = s_{P_2} \circ s_{P_1}.$$

Par suite,

- si P_1 et P_2 sont parallèles, $r_2 \circ r_1$ est une translation de vecteur orthogonal à P_1 et P_2 donc aussi orthogonal à D_1 et D_2 .

- Si P_1 et P_2 sont sécants selon la droite D , $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'axe D . Observons que D est parallèle à D_1 et D_2 .

On peut préciser cette discussion de la façon suivante : supposons E et $\vec{D}_1 = \vec{D}_2$ orientés, soit θ_1 (resp. θ_2) l'angle de r_1 (resp. r_2). En considérant les rotations planes, restrictions de r_1 et r_2 à un plan orthogonal à D_1 et D_2 , on voit (cf. § 7.5 e)) que $r_2 \circ r_1$ est une translation si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0[2\pi]$ et une rotation si $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0[2\pi]$. Dans ce dernier cas, $r_2 \circ r_1$ a pour angle $\theta_1 + \theta_2$.

Théorème

Soit D_1 et D_2 deux droites parallèles de l'espace E . On suppose E orienté ainsi que $\vec{D}_1 = \vec{D}_2$. Soit r_1 (resp. r_2) la rotation d'axe D_1 (resp. D_2) et d'angle θ_1 (resp. θ_2).

- Si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0[2\pi]$, $r_2 \circ r_1$ est une translation de vecteur orthogonal à D_1 et D_2 .
- Si $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0[2\pi]$, $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'axe D parallèle à D_1 et D_2 et d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

c) Composée de deux rotations d'axes concourants

Raisonnons comme précédemment.

Soit r_1 et r_2 deux rotations d'axes respectifs D_1 et D_2 se coupant en un point A . Soit P le plan contenant D_1 et D_2 . On sait qu'il existe des plans P_1 et P_2 tels que

$$r_1 = s_P \circ s_{P_1} \quad \text{et} \quad r_2 = s_{P_2} \circ s_P.$$

On en déduit

$$r_2 \circ r_1 = (s_{P_2} \circ s_P) \circ (s_P \circ s_{P_1}) = s_{P_2} \circ s_{P_1}.$$

Ici, les plans P_1 et P_2 ayant A en commun ont aussi en commun une droite D passant par A . Par suite, $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'axe D .

Théorème

Soit r_1 et r_2 deux rotations d'axes respectifs D_1 et D_2 se coupant en A . La composée $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'axe D passant par A .

EXERCICE RÉSOLU

Il peut être intéressant d'étudier $r_2 \circ r_1$ analytiquement. Montrons-le sur un exemple. Dans l'espace E orienté, on considère deux droites D_1 et D_2 orthogonales, se coupant en A .

Soit r_1 et r_2 les rotations d'angle $+\frac{\pi}{2}$ et d'axes respectivement D_1 orienté par un vecteur unitaire $\vec{e}_1$ et D_2 orienté par un vecteur unitaire $\vec{e}_2$ (fig. 7). Étudier $r = r_2 \circ r_1$.

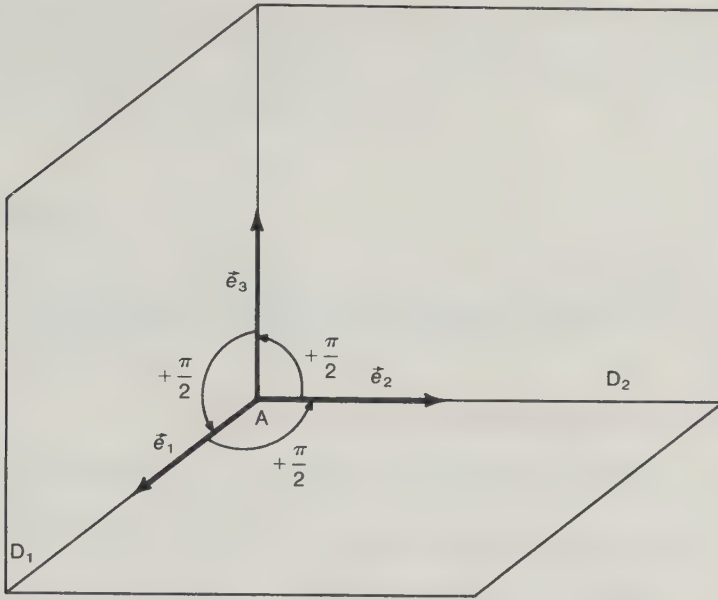


fig. 7

Soit $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ le repère orthonormé direct. Appelons ρ_1, ρ_2, ρ les endomorphismes associés respectivement à r_1, r_2, r . On a :

$$\begin{cases} \rho_1(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \\ \rho_1(\vec{e}_2) = \vec{e}_3 \\ \rho_1(\vec{e}_3) = -\vec{e}_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \rho_2(\vec{e}_1) = -\vec{e}_3 \\ \rho_2(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 \\ \rho_2(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \rho(\vec{e}_1) = -\vec{e}_3 \\ \rho(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 \\ \rho(\vec{e}_3) = -\vec{e}_2 \end{cases}$$

La matrice de ρ , dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'image $M'(x', y', z')$ d'un point $M(x, y, z)$ est définie dans le repère orthonormé $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par : $\vec{AM}' = \rho(\vec{AM})$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -z \\ z' = -x \end{cases}$$

L'ensemble des points invariants est la droite D d'équations $x = y = -z$ (on retrouve ainsi le fait que $r = r_2 \circ r_1$ est une rotation).

Orientons cette droite D par le choix du vecteur unitaire $\vec{w} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3)$.

Le vecteur $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$ est unitaire et orthogonal à $\vec{w}$. Par suite, si θ est une mesure de l'angle de r , on a :

$$\cos \theta = \vec{u} \cdot \rho(\vec{u}) \quad \text{et} \quad \sin \theta \vec{w} = \vec{u} \wedge \rho(\vec{u}).$$

On a :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\vec{u}) = \frac{\sqrt{2}}{2}[\rho(\vec{e}_1) - \rho(\vec{e}_2)] = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{e}_3 - \vec{e}_1)$$

de matrice-colonne $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

d'où $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin \theta \vec{w} = \frac{1}{2} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \vec{e}_2 - \frac{1}{2} \vec{e}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{w}$.

Donc :

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Par suite, $\theta \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

La rotation r a pour axe D orienté par $\vec{w}$ et pour angle $\frac{2\pi}{3}$.

d) Composée d'une translation et d'une rotation

Soit t une translation de vecteur $\vec{v}$ et r une rotation d'axe D. Étudions $r \circ t$.

■ Etude d'un cas particulier

Supposons $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{D}$.
Si $\vec{v} = \vec{0}$, on a $r \circ t = r$.
Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, on peut écrire

$$r \circ t = s_{P'} \circ s_{P'} \circ s_P \circ s_P = s_{P'} \circ s_P$$

en choisissant P' plan passant par D et orthogonal à $\vec{v}$ et on sait trouver les plans P et P'' tels que

$$t = s_{P'} \circ s_P \quad \text{et} \quad r = s_{P'} \circ s_P$$

(cf. § 9.3 a) et b)).

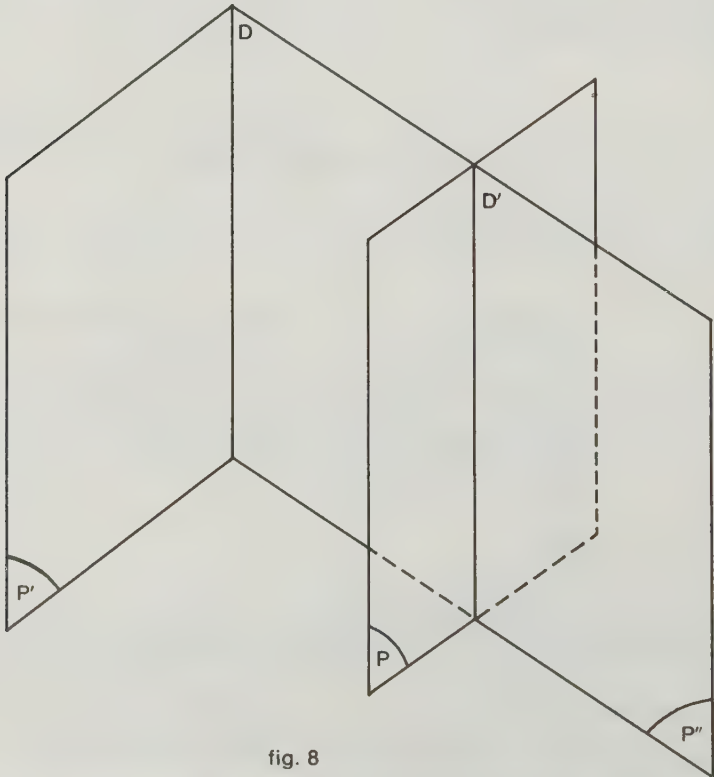


fig. 8

Par suite $r \circ t$ est une rotation d'axe la droite D' intersection de P et P'' . Cette droite est parallèle à D puisque P et P' sont parallèles. L'angle de $r \circ t$ est le même que celui de r (puisque les restrictions à un plan orthogonal à D sont des rotations de même angle cf. § 7.5f)).

Théorème

La composée d'une translation et d'une rotation d'axe D , le vecteur de la translation étant orthogonal à $\vec{D}$, est une rotation de même angle et d'axe parallèle à D .

REMARQUE Vous étudierez, de même, $t \circ r$.

■ Etude du cas général

- Supposons $\vec{v}$ non orthogonal à $\vec{D}$. On peut écrire :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}'' \quad \text{avec} \quad \vec{v}' \in \vec{D} \quad \text{et} \quad \vec{v}'' \text{ orthogonal à } \vec{D}.$$

On a alors :

$$r \circ t = r \circ t'' \circ t'$$

en appelant t' la translation de vecteur $\vec{v}'$ et t'' la translation de vecteur $\vec{v}''$. Comme $\vec{v}''$ est orthogonal à $\vec{D}$, $r \circ t''$ est une rotation r' de même angle que r et d'axe D' parallèle à D . Donc :

$$r \circ t = r' \circ t' \quad \text{avec} \quad \vec{v}' \in \vec{D}'.$$

- Montrons que la décomposition précédente est *unique*. Soit

$$(1) \quad r' \circ t' = r_1 \circ t_1$$

où t_1 est une translation de vecteur $\vec{v}_1$ appartenant à la direction $\vec{D}_1$ de l'axe de la rotation r_1 . Les applications $r' \circ t'$ et $r_1 \circ t_1$ ont le même endomorphisme associé ρ qui est celui associé à r' et à r_1 . L'axe D' est l'ensemble des points M invariants par r' c'est-à-dire, en appelant A un point de D' , l'ensemble des points M tels que $\overline{AM} = \rho(\overline{AM})$. Donc la direction $\vec{D}'$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $\vec{u} = \rho(\vec{u})$. Il en est de même pour la direction $\vec{D}_1$. On déduit de (1), en composant à gauche par r_1^{-1} et à droite par t'^{-1} :

$$r_1^{-1} \circ r' = t_1 \circ t'^{-1}$$

puisque les axes de r' et r_1^{-1} sont parallèles, le vecteur de la translation $t_1 \circ t'^{-1}$ est orthogonal à $\vec{D}'$ (cf. § 9.4 b)). Mais ce vecteur appartient à $\vec{D}'$ donc il est nul :

$$r_1^{-1} \circ r' = t_0 = \text{id}_E$$

donc $r' = r_1$ et, par suite, $t' = t_1$.

- Montrons que $r' \circ t' = t' \circ r'$. En effet, $r' \circ t'$ et $t' \circ r'$ ont le même endomorphisme associé et un point de D' a la même image par $r' \circ t'$ et $t' \circ r'$.

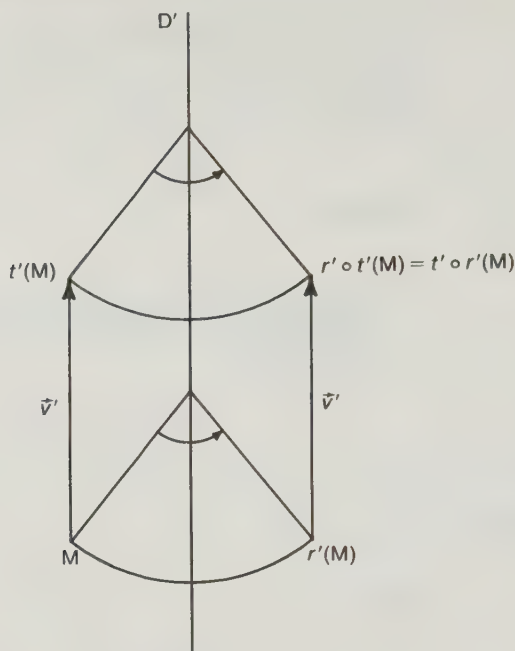


fig. 9

Théorème et définitions

La composée d'une translation et d'une rotation se met, d'une façon unique, sous la forme :

$$r' \circ t' = t' \circ r'$$

le vecteur de la translation t' appartenant à la direction de l'axe de la rotation r' .

L'application $r' \circ t' = t' \circ r'$ est appelée un **vissage**. L'axe, l'angle, le vecteur du vissage sont respectivement l'axe de r' , l'angle de r' , le vecteur de t' .

REMARQUES

1. Si le vecteur de t' n'est pas nul, soit M un point quelconque de E . Il appartient à un plan Q orthogonal à D' , son image $r' \circ t'(M)$ appartient au plan $t'(Q)$ parallèle à Q et distinct de Q . Donc le vissage $r' \circ t'$ n'a aucun point invariant.
2. On verra, de même, que la composée d'une rotation et d'une translation est aussi un vissage.
3. Nous pouvons alors répondre à la question posée au début de ce paragraphe : lorsqu'on compose des translations et des rotations, on n'a pas nécessairement une translation, ni une rotation comme en géométrie plane. On peut obtenir un vissage $r' \circ t'$ qui n'est ni une translation, ni une rotation si $r' \neq \text{id}_E$ et si $t' \neq \text{id}_E$.

EXERCICE RÉSOLU

Dans l'espace E orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère l'application f qui au point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = z - 1 \\ z' = -y + 3 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie.

2. Montrer que f est un vissage dont on déterminera l'axe D , l'angle et le vecteur.

1. L'endomorphisme associé φ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ d'où :

$$\varphi(\vec{i}) = \vec{i}, \quad \varphi(\vec{j}) = -\vec{k}, \quad \varphi(\vec{k}) = \vec{j}$$

il transforme une base orthonormée en une base orthonormée. Donc f est une isométrie.

2. Si f est un vissage, la direction de son axe est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ tels que $\vec{u} = \varphi(\vec{u})$ c'est-à-dire tels que :

$$\begin{cases} x = x \\ y = z \\ z = -y \end{cases}$$

c'est-à-dire $y = z = 0$. Un vecteur directeur de l'axe est $\vec{i}$.

L'axe D est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{MM'}$ soit colinéaire à $\vec{i}$.

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x' - x = 1 \\ y' - y = z - 1 - y \\ z' - z = -y + 3 - z. \end{cases}$$

$\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{i}$ si et seulement si

$$\begin{cases} z - 1 - y = 0 \\ -y + 3 - z = 0. \end{cases}$$

L'axe du vissage est la droite D d'équations $y = 1$ et $z = 2$.

Le vecteur du vissage est $\overrightarrow{MM'}$ où $M \in D$. C'est donc le vecteur de coordonnées $(1, 0, 0)$ c'est-à-dire $\vec{i}$.

Réciproquement l'application $f = t_{\vec{i}} \circ g$ avec $g = t_{-\vec{i}} \circ f$ est bien un vissage car g est définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x'' = x \\ y'' = z - 1 \\ z'' = -y + 3 \end{cases}$$

l'ensemble des points invariants par g est caractérisé par :

$$\begin{cases} x = x \\ y = z - 1 \\ z = -y + 3 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} y = 1 \\ z = 2. \end{cases}$$

Cet ensemble est la droite D trouvée plus haut donc g est une rotation (cf. § 9.3 b) Théorème 2), par suite $f = t_{\vec{i}} \circ g$ est un vissage d'axe D , de vecteur $\vec{i}$.

Il nous reste à trouver l'angle. Orientons D par le choix de $\vec{i}$, le vecteur $\vec{j}$ est unitaire et orthogonal à $\vec{i}$. Si θ est une mesure de l'angle de g , on a :

$$\begin{cases} \cos \theta = \vec{j} \cdot \varphi(\vec{j}) = \vec{j} \cdot (-\vec{k}) = 0 \\ \sin \theta \vec{i} = \vec{j} \wedge \varphi(\vec{j}) = \vec{j} \wedge (-\vec{k}) = -\vec{i} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos \theta = 0 \\ \sin \theta = -1 \end{cases}$$

d'où

$$\theta \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi].$$

Exercices

Isométries

9.1 Soit un espace orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Définir analytiquement (calculer les coordonnées de l'image d'un point) :

1. la rotation d'axe Oz orienté par le vecteur $\vec{k}$, de mesure θ réel donné;

2. le demi-tour d'axe la droite D d'équations :

$$x = y = z;$$

3. la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation :

$$y = x \operatorname{tg} \theta$$

$$\left(\theta \text{ réel donné tel que } \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \right).$$

9.2 Dans l'espace E rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan (P) d'équation

$$2x + y - z + 3 = 0.$$

Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan (P).

1. M étant un point de E de coordonnées (a, b, c) , déterminer les coordonnées (a', b', c') du point M' image par s du point M.

2. On considère la droite (D) passant par O et de vecteur directeur

$$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}.$$

Déterminer des équations paramétriques de la droite (D') ensemble des images par s des points de (D).

9.3 Soit E un espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désigne par f l'application affine de E dans E qui à tout point M de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$ associe le point M' de coordonnées (x', y', z') dans $\mathcal{R}$ tel que

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{4}{3} \\ y' = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{8}{3} \\ z' = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{4}{3} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie de E.

2. Montrer que f est involutive.

3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

4. Donner la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

(Exercice. Bac. E. Session de remplacement. Lille 1981.)

9.4 L'espace E étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit D une droite passant par le point A(a, b, c) et de vecteur unitaire $\vec{u}$.

1. Si M' désigne l'image de M dans le demi-tour d'axe D, montrer que

$$\overrightarrow{AM'} = 2(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u})\vec{u} - \overrightarrow{AM}.$$

2. En déduire les coordonnées (x', y', z') de M' en fonction des coordonnées (x, y, z) de M.

3. Appliquer le résultat précédent au cas où D est la droite d'équations :

$$x = y, \quad z = 1.$$

Rotations

9.5 Soit E un espace orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f qui associe à tout point M(x, y, z) de E le point M'(x', y', z') de E tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{x - 2y + 2z}{3} \\ y' = \frac{-2x + y + 2z}{3} \\ z' = \frac{-2x - 2y - z}{3} \end{cases}$$

1. Déterminer la nature de f et donner ses éléments caractéristiques.

2. Quelles sont les droites L de E telles que $f(L)$ soit parallèle à L?

9.6 Soit E un espace orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f qui associe à tout point M(x, y, z) de E le point M'(x', y', z') de E tel que :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z + 1 \\ z' = x - 1 \end{cases}$$

1. Quelle est la nature de f ? Donner ses éléments caractéristiques.

2. Déterminer l'ensemble des points M tels que, M' étant l'image de M par f , le milieu de (M, M') décrive :

a) le plan d'équation $2x + y - z = 0$

b) la droite d'équations $x = y = z$.

9.7 Soit E un espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f qui associe à tout point M(x, y, z) de E le point M'(x', y', z') de E tel que :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Quelle est la nature de f ? Donner ses éléments caractéristiques.

9.8 Soit l'espace E orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. f désigne l'application affine de E dans E définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ z' = z. \end{cases}$$

Démontrer que f est une rotation; préciser son axe et une mesure de son angle.

2. On considère les quatre points :

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; B \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}; C \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}; D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On pose $\mathcal{F} = \{A, B, C, D\}$.

a) Vérifier que ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité O .

b) Vérifier que l'application f laisse $\mathcal{F}$ globalement invariant.

3. Soit g une isométrie de E qui laisse $\mathcal{F}$ globalement invariant.

a) Déterminer l'isobarycentre G des quatre points A, B, C, D . Calculer

$$\|\vec{GA}\|, \|\vec{GB}\|, \|\vec{GC}\|, \|\vec{GD}\|.$$

b) En déduire que g laisse invariant les points G et D .

(D'après Bac. C. Nantes 1982.)

9.9 X est un espace orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On appelle $\mathcal{C}$ le cube de sommets : O, A, B, C, D, E, F, G , défini par

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= \vec{i}, \quad \vec{OC} = \vec{j}, \quad \vec{OE} = \vec{i} + \vec{j}, \\ \vec{AE} &= \vec{OD} = \vec{CG} = \vec{BF} = \vec{k}. \end{aligned}$$

1. Dessiner $\mathcal{C}$; soit r_1 la rotation de X d'axe (OA) dirigé par $\vec{i}$, dont une mesure de l'angle est $+\frac{\pi}{2}$.

Soit r_2 la rotation de X d'axe (OC) dirigé par $\vec{j}$, dont une mesure de l'angle est $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $f = r_2 \circ r_1$ et $g = r_1 \circ r_2$.

Montrer que f et g sont des rotations de X définies par

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow X \\ M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} &\longmapsto f(M) \begin{vmatrix} -y \\ -z \\ x \end{vmatrix} \\ g : X &\longrightarrow X \\ M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} &\longmapsto g(M) \begin{vmatrix} -z \\ -x \\ y \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(On ne cherchera ni l'axe ni l'angle de chacune des rotations f et g .)

2. On note $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1$, les images respectives par f des points A, B, C, D, E, F, G , et $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2$, les images respectives par g des points A, B, C, D, E, F, G .

Montrer que

$$\begin{aligned} \{A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1\} \\ = \{A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2\}. \end{aligned}$$

3. On pose $\varphi = g \circ f^{-1}$. Quelle est l'image $\mathcal{C}_2$ par φ de la liste ordonnée de points

$$\mathcal{C}_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1)?$$

Montrer que φ est une rotation dont on précisera l'axe.

(D'après Bac. C. Orléans-Tours 1982.)

9.10 L'espace E orienté étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne la droite D passant par A et de vecteur unitaire $\vec{u}$.

1. M étant un point quelconque de E , soit M' l'image de M par la rotation d'axe D orienté par $\vec{u}$ et d'angle α .

Montrer que

$$\begin{aligned} \vec{AM'} &= \cos \alpha \vec{AM} \\ &+ (1 - \cos \alpha)(\vec{AM} \cdot \vec{u})\vec{u} + \sin \alpha (\vec{u} \wedge \vec{AM}). \end{aligned}$$

2. En déduire les coordonnées (x', y', z') de M' en fonction des coordonnées (x, y, z) de M sachant que

$$\alpha \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi], \quad \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{k})$$

et

$$A = O.$$

Vissages

9.11 Soit un espace E orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f qui associe à tout point $M(x, y, z)$ de E le point $M'(x', y', z')$ de E tel que :

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = x + 1 \\ z' = y + 2. \end{cases}$$

4. Montrer que f est un vissage dont on déterminera les éléments caractéristiques.

9.12 L'espace E orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit Δ la droite de E dont un vecteur directeur est $\vec{i}$ et qui passe par le point H de coordonnées $0, 0, 2$.

On désigne par r la rotation d'axe Δ dans laquelle le point O a pour image le point A de coordonnées $0, -2, 2$, et par t la translation de vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Quelle est la nature géométrique de la transformation $t \circ r$ composée de r et de t ? Préciser ses éléments caractéristiques.

9.13 Soit un espace E orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la rotation R_1 d'axe la droite D_1 d'équations $y = 0, z = 1$ et transformant $A(0, -1, 1)$ en O , la rotation R_2 d'axe la droite D_2 d'équations $x = 0, z = -1$ et transformant O en $B(1, 0, -1)$.

1. Calculer les coordonnées (x', y', z') de M' image de $M(x, y, z)$ par l'application $f = R_2 \circ R_1$.

2. Montrer que f est un vissage dont on déterminera les éléments caractéristiques.

9.14 Soit E un espace orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne l'application f_α de E dans E qui au point M de coordonnées (x, y, z) associe le point $f_\alpha(M) = M'$ de coordonnées (x', y', z') définies par

$$\begin{cases} x' = -z + \alpha \\ y' = -x \\ z' = y - 2 \end{cases}$$

où α est un réel donné.

1. Montrer que f_α est une isométrie.
2. Pour quelle valeur de α f_α est-elle une rotation? Préciser dans ce cas l'axe de rotation.
3. On suppose dans cette question que $\alpha = 1$. Montrer que f_1 est un vissage dont on précisera les éléments caractéristiques.

(D'après Bac. C. Paris 1982.)

9.15 L'espace E orienté est rapporté au repère orthonormé direct

$$R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

m étant un nombre réel, on désigne par A_m le point

de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ m \end{pmatrix}$ dans R et par F_m le vissage

de E qui transforme O en A_m et dont l'endomorphisme associé φ a pour matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer qu'il existe un unique réel m_0 tel que F_{m_0} soit une rotation. Préciser les éléments caractéristiques de F_{m_0} .

2. Déterminer la rotation r_m et la translation t_m de vecteur parallèle à l'axe de r_m telles que

$$F_m = r_m \circ t_m = t_m \circ r_m.$$

D_m désigne l'axe de r_m . Démontrer que D_m est contenue dans un plan indépendant de m .

3. Soit Q le plan ayant pour équation cartésienne dans le repère R :

$$x - y + \frac{1}{2} = 0.$$

Démontrer que Q est globalement invariant par F_m . Caractériser la restriction de F_m à Q.

4. Soit ψ l'endomorphisme défini par

$$\begin{cases} \psi(\vec{i}) = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} \\ \psi(\vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} \\ \psi(\vec{k}) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}. \end{cases}$$

On désigne par B_m le point de coordonnées

$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2m \end{pmatrix}$ dans R et par G_m l'application affine de E

dans E dont l'endomorphisme associé est ψ et qui transforme O en B_m .

Si H désigne l'homothétie de centre O et de rapport 3, montrer qu'il existe une translation T telle que

$$G_m = T \circ H \circ F_m.$$

Déterminer T.

5. En déduire que D_m est globalement invariant par G_m .

(D'après Bac. C. Session de remplacement. Nice 1981.)

Composées d'isométries

9.16 L'espace E est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit M un point de E de coordonnées (x, y, z) . Déterminer les coordonnées (x', y', z') du point M', image de M dans la symétrie orthogonale s par rapport au plan (P) dont une équation est

$$2x + 3y - z - 5 = 0.$$

2. Soit f l'application de E dans E qui au point M associe le point M'' de coordonnées (x'', y'', z'') tel que

$$\begin{cases} x'' = \frac{3x - 6y + 2z + 17}{7} \\ y'' = \frac{-6x - 2y + 3z + 29}{7} \\ z'' = \frac{2x + 3y + 6z + 51}{7}. \end{cases}$$

Montrer que f est une isométrie qui n'a pas de point invariant et que l'on peut décomposer en

$$f = g \circ s = s \circ g$$

où g est une application que l'on déterminera.

9.17 Soit un espace E rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f de E, dans E qui associe au point M(x, y, z) le point M'(x', y', z') défini par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 8 \\ z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 8. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie ayant un seul point invariant I dont on calculera les coordonnées.

2. Soit φ l'endomorphisme associé à f . Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants de $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ est une droite vectorielle $\vec{D}$.

3. Former l'équation cartésienne du plan P contenant I et de direction orthogonale à $\vec{D}$. Calculer les coordonnées (x_1, y_1, z_1) du point M₁ image de M(x, y, z) par la symétrie orthogonale s_P par rapport au plan P.

4. Montrer que $f = r \circ s_P$, r étant une rotation que l'on déterminera. Montrer que l'axe de r est la droite D contenant I de direction la droite vectorielle trouvée à la question 2.

9.18 L'espace E est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désigne par P le plan de E d'équation

$$x + y + z = 3,$$

et par D la droite passant par le point A de coordonnées (0, 3, 0), et dirigée par $\vec{j} - \vec{k}$.

1. Montrer que D est située dans P.

2. Montrer qu'il existe un unique plan P_1 tel que la symétrie s_D orthogonale d'axe D (demi-tour d'axe D) soit la composée de la symétrie s_P orthogonale par rapport à P et de la symétrie s_{P_1} orthogonale par rapport à P_1 .

Donner une équation cartésienne de P_1 .

3. Soit P_2 le plan parallèle à P_1 passant par O.

a) Donner une équation cartésienne de P_2 .

b) Déterminer les coordonnées de l'image de A par la projection orthogonale sur P_2 .

c) Déterminer, sans nouveaux calculs, $s_{P_2} \circ s_{P_1}$, où s_{P_2} désigne la symétrie orthogonale par rapport à P_2 .

9.19 L'espace E est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan P dont une équation est :

$$y + 3z - 5 = 0.$$

Étant donné un point M de E de coordonnées (x, y, z) , calculer les coordonnées (x', y', z') de son image M' par s .

2. On considère l'application f de l'espace E qui, à tout point M, de coordonnées (x, y, z) par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, associe le point M'', dont les coordonnées (x'', y'', z'') sont données par les relations

$$\begin{cases} x'' = x \\ y'' = \frac{-4y + 3z - 3}{5} \\ z'' = \frac{3y + 4z + 1}{5} \end{cases}$$

Montrer que f est une isométrie involutive. Préciser sa nature et ses éléments remarquables.

3. Trouver la nature et les éléments remarquables de $f \circ s$ par des remarques géométriques simples.

(Exercice Bac. C. Limoges 1981.)

9.20 L'espace E orienté est rapporté au repère orthonormé direct $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points O', A, B' de E dont les coordonnées dans R sont : $O'(a, 0, a)$, $A(a, 0, 0)$, $B'(0, 0, a)$ où a est un réel strictement positif. Soit f l'application affine de E dont l'endomorphisme associé φ est défini par :

$$\varphi(\vec{i}) = \vec{j}, \quad \varphi(\vec{j}) = -\vec{i}, \quad \varphi(\vec{k}) = -\vec{k}$$

et qui transforme O en O' .

A. 1. Montrer que f est une isométrie.

Définir analytiquement f . Préciser les coordonnées des points A' et B tels que

$$A' = f(A), \quad B' = f(B).$$

Montrer qu'il existe un seul point invariant I par f .

2. Soit h la symétrie orthogonale par rapport au plan P d'équation $z = \frac{a}{2}$. Montrer qu'il existe une isométrie g et la déterminer telle que

$$f = h \circ g = g \circ h.$$

3. Soit ℓ un réel strictement positif. On note C_ℓ l'ensemble des points M de E tels que

$$\|\overline{Mf(M)}\| = \ell.$$

Montrer que C_ℓ est globalement invariant par f . Montrer que l'intersection de C_ℓ et $\mathcal{P}$ est un cercle dont on précisera les coordonnées du centre et le rayon.

4. On note G l'ensemble des points M de E tels que

$$\overline{OM} \cdot \overline{Of(M)} = 0.$$

Montrer qu'une équation de G dans R est

$$ax - z^2 + az = 0.$$

Montrer que l'intersection de G et du plan d'équation $y = 0$ est une parabole dont on déterminera le sommet et l'axe de symétrie. Construire cette parabole dans le cas où $a = 4$.

B. On considère les triplets $F = \{O; A; B\}$ et $F' = \{O'; A'; B'\}$.

On se propose de déterminer l'ensemble Q des isométries de E qui transforment F en F'.

1. Montrer que Q est non vide.

2. Soit q un élément de Q.

a) Montrer que $q(O) = O'$.

b) Déterminer l'image par q du milieu du bipoint (A, B).

c) Soit X l'endomorphisme associé à q . Déterminer les images possibles de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ par X. En déduire que P est globalement invariant par X. Montrer alors que

$$X(\vec{k}) = \vec{k} \quad \text{ou} \quad X(\vec{k}) = -\vec{k}.$$

3. Déterminer les quatre endomorphismes qui peuvent être associés à q .

4. Déterminer analytiquement tous les éléments de Q.

(D'après Bac. C. Antilles-Guyanne. 1982.)

Composition de demi-tours

9.21 Soit s_D et $s_{D'}$ deux demi-tours d'axes deux droites D et D' de E.

1. On suppose D et D' parallèles.

a) Quel est l'endomorphisme associé à $s_{D'} \circ s_D$? En déduire que $s_{D'} \circ s_D$ est une translation dont on déterminera le vecteur.

b) Réciproquement montrer que toute translation t_v est la composée de deux demi-tours d'axes parallèles de direction orthogonale à $\vec{v}$, l'un de ces demi-tours pouvant être choisi arbitrairement.

2. On suppose D et D' sécantes en O.

a) Montrer que $s_{D'} \circ s_D$ est une rotation r d'axe la droite L orthogonale en O au plan P contenant D et D'. Quelle est la restriction de $s_{D'} \circ s_D$ à P? En déduire l'angle de la rotation r .

b) Réciproquement montrer que toute rotation d'axe L est la composée de deux demi-tours d'axes concourants, rencontrant L et orthogonaux à L, l'un de ces demi-tours pouvant être choisi arbitrairement.

3. On suppose D et D' non coplanaires.

a) Soit L la perpendiculaire commune à D et D', rencontrant D en H et D' en H', D₁ la droite contenant H et parallèle à D'. On peut écrire

$$s_{D'} \circ s_D = (s_{D'} \circ s_{D_1}) \circ (s_{D_1} \circ s_D).$$

En déduire que $s_{D'} \circ s_D$ est un vissage dont on précisera les éléments.

b) Réciproquement montrer que tout vissage d'axe L est la composée de deux demi-tours d'axes rencontrant L et orthogonaux à L, l'un de ces demi-tours pouvant être choisi arbitrairement.

9.22 Démontrer que la composée de deux rotations d'axes non coplanaires est un vissage (on décomposera chaque rotation en deux demi-tours convenablement choisis).

9.23 Soit D₁, D₂, D₃ trois droites de E concourantes en O et orthogonales deux à deux. On désigne par s₁, s₂, s₃ les demi-tours d'axes respectifs D₁, D₂, D₃. Montrer que {id_E, s₁, s₂, s₃}, muni de la composition des applications, est un groupe de Klein (groupe commutatif formé de 4 éléments involutifs).

9.24 Soit un parallélépipède rectangle ABCDA'B'C'D' (les arêtes AA', BB', CC', DD' sont orthogonales au plan ABCD). On considère les demi-tours s₁, s₂, s₃ d'axes respectifs (AD), (BB'), (C'D'). Démontrer que s₃ ∘ s₂ ∘ s₁ est une translation et déterminer le vecteur de cette translation.

Révision

9.25 Soit E un espace orienté rapporté au repère orthonormé direct (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

On désigne par ρ l'application de E dans E dans laquelle tout point M, de coordonnées x, y, z, a pour image le point M' de coordonnées x' = y, y' = -z, z' = -x.

A. 1. Préciser la nature de cette application ρ.

2. Soit P le plan de E d'équation z = 1. Déterminer l'ensemble (H) des points M du plan tels que les vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{OM}'$ soient orthogonaux.

La courbe (H) admet un centre de symétrie Ω. Écrire l'équation de (H) relativement au repère (Ω, $\vec{i}$, $\vec{j}$) et indiquer la nature de la courbe (H).

3. On définit par leurs coordonnées dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), les points suivants de E : S(0, 0, 1), A(0, 1, 1), B(1, 0, 1). On constate que les points A, S, B, Ω sont les sommets consécutifs d'un carré (Γ). Soit C = ρ(A), S' = ρ(S), D = ρ(B), Ω' = ρ(Ω); ces points sont les sommets d'un carré (Γ') image de (Γ) par ρ.

On désigne enfin par α le point de E tel que S soit le milieu de Aα, et par β le point de E tel que B soit le milieu de Ωβ.

Montrer qu'il existe une rotation δ, autre que ρ, telle que δ(Γ) = (Γ') et dans laquelle α et β sont invariants (il est conseillé de préciser d'abord les images par δ des points A, S, B et Ω).

Vérifier que la courbe (H) a même image (H') par ρ et par δ.

B. Les lettres E, O, ρ ont la même signification que dans la partie A.

1. On donne un nombre réel k, strictement positif, et l'on appelle (L_k) l'ensemble des points M,

appartenant au plan de E d'équation z = 0, et tels que MM' = kOM [en posant encore M' = ρ(M)]. Écrire l'équation de (L_k) dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). On pose x = λ cos θ, y = λ sin θ, avec λ ≥ 0. Montrer que si le point M de coordonnées x, y appartient à (L_k) et si λ > 0, alors sin 2θ s'exprime simplement en fonction de k.

En déduire, suivant les valeurs de k, la nature géométrique de l'ensemble (L_k).

Application numérique : $k = \frac{\sqrt{6}}{2}$; calculer les valeurs correspondantes de θ.

9.26 Soit E un espace rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), on désigne par Ox, Oy, Oz les trois axes qui ont pour vecteurs directeurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

1. On considère la transformation affine R de E qui laisse fixe le point O et telle que l'application linéaire associée transforme $\vec{i}$ en $-\vec{k}$, $\vec{j}$ en $-\vec{i}$ et $\vec{k}$ en $\vec{j}$.

On considère la transformation affine T de E qui laisse fixe le point O et telle que l'application linéaire associée transforme $\vec{i}$ en $\vec{k}$, $\vec{j}$ en $-\vec{i}$ et $\vec{k}$ en $\vec{j}$.

Montrer que ce sont des isométries.

Donner les formules qui fournissent les coordonnées (x', y', z') du point M' = R(M) et les coordonnées (x'', y'', z'') du point M'' = T(M) en fonction des coordonnées (x, y, z) du point M.

Quels sont les points de E fixes dans T?

Quels sont les points de E fixes dans R?

Reconnaitre les transformations

$$R \circ R \circ R \text{ et } T \circ T \circ T.$$

2. On considère le point A défini par $\vec{OA} = a(\vec{i} + \vec{j})$ où le nombre a est une constante strictement positive; on désigne par D la demi-droite Oz qui a pour origine O et pour vecteur unitaire le vecteur $\vec{k}$; on désigne par D' la demi-droite qui a pour origine A et pour vecteur directeur le vecteur $\vec{j}$.

Soit P et P' deux points variables définis par $\vec{OP} = \lambda \vec{k}$ et $\vec{AP'} = \lambda \vec{j}$; montrer qu'il existe un point S du plan xOy, et un seul, tel que l'on ait pour tout réel λ, SP = SP'.

Montrer que s'il existe une rotation transformant la demi-droite D en la demi-droite D' son axe passe par S; en déduire la manière dont dans l'application linéaire associée, seraient transformés les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{SO}$ puis le triplet ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

En déduire l'existence d'une telle rotation; on la désigne par R₁.

3. Trouver les formules qui donnent les coordonnées (x₁, y₁, z₁) du transformé M₁ = R₁(M) du point M.

Démontrer que la transformation R ∘ R₁ ∘ R est une translation.

Soit $\vec{K}$ un vecteur unitaire de l'axe de la rotation R₁; soit $\vec{I}$ et $\vec{J}$ deux vecteurs tels que (S, $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$) soit un repère orthonormé.

Dire pourquoi les formules qui donneraient les coordonnées (X₁, Y₁, Z₁) de M₁ dans ce repère en fonction des coordonnées (X, Y, Z) de M seraient de la forme :

$$\begin{cases} X_1 = aX - bY \\ Y_1 = bX + aY \\ Z_1 = Z. \end{cases}$$

Calculer a et |b|; peut-on donner b?

10.1 ÉQUATIONS CARTÉSIENNES ET CONSTRUCTIONS DES CONIQUES

a) Équation cartésienne d'un ensemble de points

Soit un plan P rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle **équation cartésienne** d'un ensemble Γ de points du plan une relation de la forme $f(x, y) = 0$ (f fonction des variables réelles x et y) qui exprime une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $M(x, y)$ du plan appartienne à Γ .

Par exemple, $ax + by + c = 0$, où a et b sont des réels donnés non tous deux nuls, est une équation cartésienne d'une droite.

Si le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ (qu'on peut mettre sous la forme $f(x, y) = 0$ en faisant passer R^2 au premier membre) est une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R .

Nous allons nous préoccuper des ensembles d'équations cartésiennes dans un repère orthonormé :

$$y = ax^2 \quad (a \neq 0)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a > 0, b > 0).$$

Ces ensembles sont appelés des **coniques** parce que l'on démontre que l'intersection d'un **cône de révolution** par un plan peut être l'un des trois ensembles précédents. Elle peut être aussi un point, une droite ou la réunion de deux droites : on dit alors que l'intersection est une **conique dégénérée**.

b) Parabole

Définition

On dit qu'un ensemble Γ de points du plan est une parabole si et seulement s'il existe un repère orthonormé dans lequel une équation cartésienne de Γ est de la forme :

$$y = ax^2 \quad (a \neq 0).$$

Vous avez déjà étudié la parabole d'équation $y = ax^2$ ($a \neq 0$) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en Seconde.

Rappelons que la fonction $f : x \mapsto ax^2$ est paire donc l'axe $(O, \vec{j})$ est axe de symétrie de la courbe. On démontre que c'est le seul axe de symétrie de la parabole. On l'appelle l'axe de la parabole. La fonction f admet un minimum ou un maximum en $x = 0$ suivant que $a > 0$ ou $a < 0$ (fig. 1). L'origine O est le sommet de la parabole.

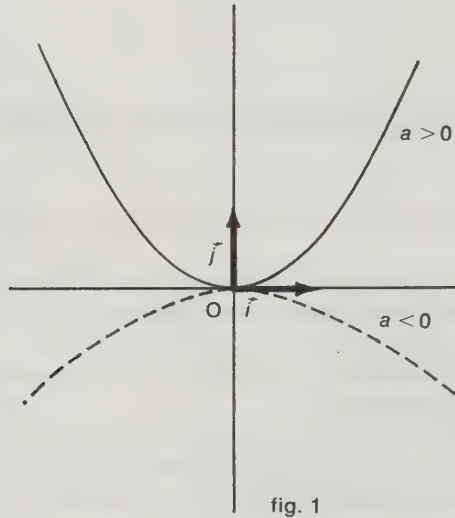


fig. 1

EXEMPLES 1. Vous avez également étudié, dans les classes précédentes, la courbe Γ d'équation

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

que l'on peut mettre sous la forme $Y = aX^2$ en mettant $ax^2 + bx + c$ sous sa forme canonique :

$$\begin{aligned} y &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Si l'on suppose le repère initial $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, la courbe Γ est la parabole d'équation $Y = aX^2$ en posant

$$x + \frac{b}{2a} = X \quad \text{et} \quad y - \frac{4ac - b^2}{4a} = Y,$$

le nouveau repère étant $(S, \vec{i}, \vec{j})$, le sommet S ayant pour coordonnées

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

dans l'ancien repère.

2. Toute équation de la forme $x = ay^2$ ($a \neq 0$) représente aussi, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, une parabole car elle peut s'écrire $Y = aX^2$ dans le repère $(O, \vec{j}, \vec{i})$ (fig. 2).

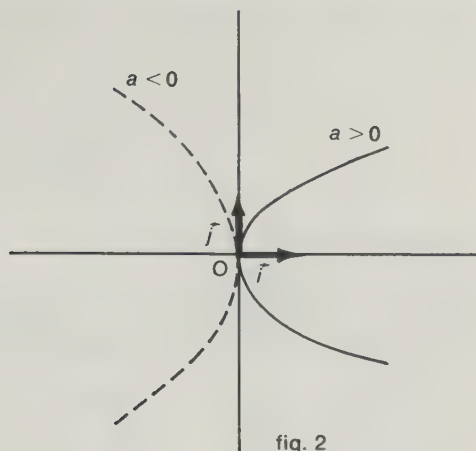


fig. 2

3. Toute équation de la forme $x = ay^2 + by + c$ ($a \neq 0$) représente aussi, dans un repère orthonormé, une parabole car on se ramène au cas précédent en mettant $ay^2 + by + c$ sous sa forme canonique.

EXERCICE RÉSOLU

On suppose le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Quel est l'ensemble Γ des points du plan d'équation :

$$(1) \quad y^2 + (m-4)x + 2y - m + 1 = 0?$$

(On discutera suivant les valeurs du paramètre réel m .)

Cherchons à faire apparaître des carrés de la forme $(x + \alpha)^2$ ou $(y + \beta)^2$. L'équation (1) peut s'écrire :

$$(2) \quad (y+1)^2 + (m-4)x - m = 0.$$

• Si $m = 4$, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} (y+1)^2 - 4 &= 0 \\ (y+1-2)(y+1+2) &= 0 \\ (y-1)(y+3) &= 0. \end{aligned}$$

Γ est la réunion de deux droites parallèles d'équations respectives :

$$y = 1 \quad \text{et} \quad y = -3 \quad (\text{fig. 3}).$$

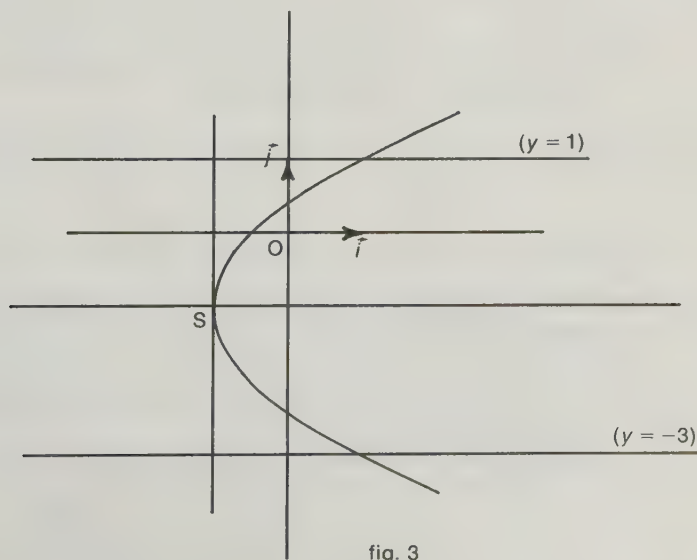


fig. 3

- Si $m \neq 4$, (2) est équivalente à :

$$\begin{aligned}(y+1)^2 &= (4-m)\left(x + \frac{m}{4-m}\right) \\ Y^2 &= (4-m)X \\ X &= \frac{Y^2}{4-m}\end{aligned}$$

en posant $x + \frac{m}{4-m} = X$ et $y+1 = Y$.

Γ est une parabole de *sommet* le point S de coordonnées $\left(-\frac{m}{4-m}, -1\right)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'axe de Γ est la droite $(S, \vec{i})$ (fig. 3 faite pour $m=2$).

c) Ellipse

Définition

On dit qu'un ensemble Γ de points du plan est une ellipse si et seulement s'il existe un repère orthonormé dans lequel une équation cartésienne de Γ est de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a > 0, b > 0).$$

Dans le cas où $a = b$, l'ellipse est le cercle de centre O et de rayon a . Nous avons déjà étudié l'ellipse dans le tome 1. Rappelons sa construction dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On peut écrire :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \iff \begin{cases} y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \\ \text{ou} \\ y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \end{cases}$$

Γ est donc la réunion des représentations graphiques dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$\begin{aligned}f_1 : x &\mapsto \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \\ f_2 : x &\mapsto -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.\end{aligned}$$

Les représentations graphiques des fonctions f_1 et f_2 sont symétriques par rapport à $(O, \vec{i})$.

L'ensemble de définition de f_1 est $[-a, a]$. Comme f_1 est paire, la droite $(O, \vec{j})$ est axe de symétrie de la représentation graphique de f_1 et l'ensemble d'étude de f_1 est $[0, a]$.

La fonction dérivée f'_1 est définie sur $[0, a[$ par :

$$f'_1 : x \mapsto \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Le tableau de variations de f_1 est :

x	0	a
$f'_1(x)$	0	—
$f_1(x)$	b	$\searrow$ 0

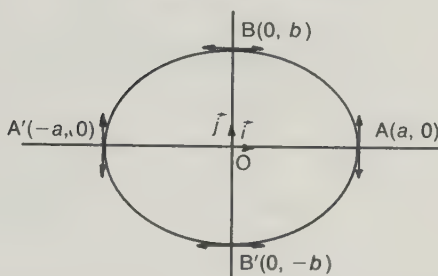


fig. 4

On a vu que les droites $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ sont des axes de symétrie de l'ellipse. On démontre que ce sont les seuls. On les appelle les **axes** de l'ellipse.

Si M appartient à Γ , son image par la composée des deux symétries axiales précédentes, c'est-à-dire la symétrie de centre O , appartient aussi à Γ . Donc O est un centre de symétrie de Γ . On démontre que c'est le seul. On l'appelle le **centre** de l'ellipse.

Les points $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$, $B'(0, -b)$ sont les **sommets** de l'ellipse : $f'_1(0) = f'_2(0) = 0$ donc les tangentes en B et B' sont parallèles à l'axe $(O, \vec{i})$.

f_1 est continue sur $[-a, a]$ et $\lim_{a} f'_1 = -\infty$, $\lim_{-a} f'_1 = +\infty$ donc (cf. § 4.6 c) tome 1) l'ellipse admet des tangentes en A et A' parallèles à l'axe $(O, \vec{j})$.

REMARQUE

$AA' = 2a$ et $BB' = 2b$. Si $a > b$, on a $AA' > BB'$. Pour cette raison, on dit que $(O, \vec{i})$ est le « **grand axe** » et $(O, \vec{j})$ le « **petit axe** » de l'ellipse. On dit aussi que $2a$ est la « longueur du grand axe » et $2b$ est la « longueur du petit axe ». On dit aussi que a est le « demi-grand axe » et b est le « demi-petit axe ».

Si $a < b$, les rôles de « grand axe » et de « petit axe » sont échangés.

EXERCICE RÉSOLU

Construire l'ensemble Γ des points du plan d'équation, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$(1) \quad 9x^2 + 4y^2 - 18x - 24y + 9 = 0.$$

On indiquera les éléments remarquables (centre, axes, sommets).

Faisons apparaître des carrés de la forme $(x + \alpha)^2$ et $(y + \beta)^2$ de manière à obtenir une équation réduite du type précédent en posant $x + \alpha = X$ et $y + \beta = Y$. L'équation (1) est équivalente à :

$$\begin{aligned} 9x^2 - 18x + 9 + 4y^2 - 24y &= 0 \\ 9(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 - 6y) &= 0 \\ 9(x - 1)^2 + 4(y^2 - 6y + 9) - 36 &= 0 \\ 9(x - 1)^2 + 4(y - 3)^2 - 36 &= 0 \\ \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

en posant $x - 1 = X$ et $y - 3 = Y$. La courbe Γ est une ellipse (fig. 5)

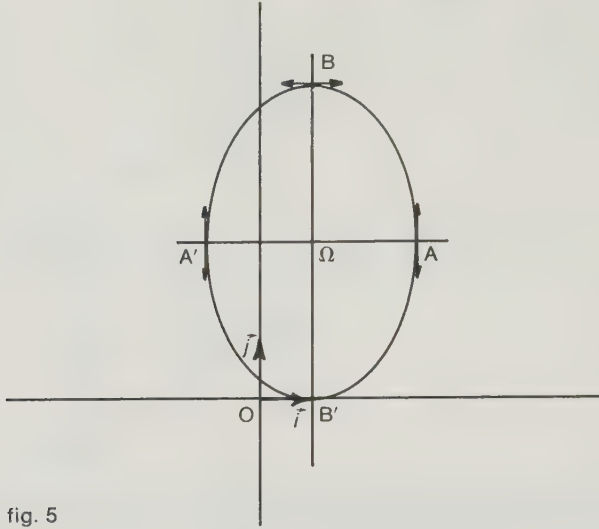


fig. 5

de centre le point Ω de coordonnées $(1, 3)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$;
d'axes les droites $(\Omega, \vec{i})$ et $(\Omega, \vec{j})$ d'équations respectives $x = 1$ et $y = 3$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$;
de sommets les points de coordonnées :

$A(2, 0), A'(-2, 0), B(0, 3), B'(0, -3)$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$
 $A(3, 3), A'(-1, 3), B(1, 6), B'(1, 0)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

d) Ellipse et cercle

Le plan P étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit Γ l'ellipse d'équation

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a > 0, b > 0).$$

• Si l'on pose

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = \frac{b}{a} y_1 \end{cases}$$

le point $M_1(x_1, y_1)$ a pour image $M(x, y)$ par l'affinité a_1 orthogonale d'axe $(O, \vec{i})$ et de rapport $\frac{b}{a}$ (cf. § 5.8). On peut écrire :

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \iff \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2} - 1 = 0 \iff x_1^2 + y_1^2 = a^2 \\ &\iff M_1 \text{ appartient au cercle } C_1 \text{ de centre } O \text{ et de rayon } a. \end{aligned}$$

Donc Γ est l'image de C_1 par l'affinité orthogonale a_1 .

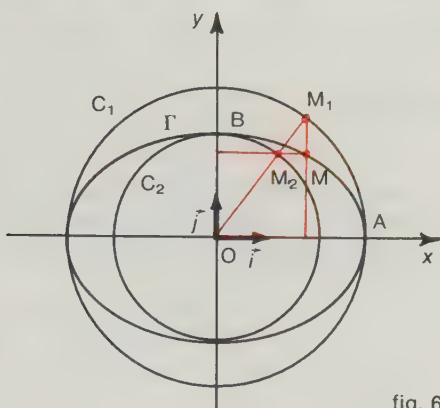


fig. 6

- Si l'on pose

$$\begin{cases} x = \frac{a}{b} x_2 \\ y = y_2 \end{cases}$$

le point $M_2(x_2, y_2)$ a pour image $M(x, y)$ par l'affinité a_2 orthogonale d'axe $(O, \vec{j})$ et de rapport $\frac{a}{b}$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \iff \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - 1 = 0 \iff x_2^2 + y_2^2 = b^2 \\ &\iff M_2 \text{ appartient au cercle } C_2 \text{ de centre } O \text{ et de rayon } b. \end{aligned}$$

Donc Γ est l'image de C_2 par l'affinité orthogonale a_2 . On peut énoncer :

Théorème

Soit Γ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ($a > 0$, $b > 0$) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Γ est l'image des cercles C_1 et C_2 de centre O et de rayon a et b respectivement par les affinités orthogonales d'axes $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ et de rapport $\frac{b}{a}$ et $\frac{a}{b}$.

Il en résulte que l'on peut ainsi construire un point quelconque M de Γ comme image d'un point M_1 de C_1 ou d'un point M_2 de C_2 par l'une des affinités précédentes (voir l'ex. 10.20 en fin de chapitre).

On peut remarquer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}_1$ et $\overrightarrow{OM}_2$ ont pour composantes :

$$\begin{pmatrix} x \\ \frac{a}{b} y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \frac{b}{a} x \\ y \end{pmatrix}$$

donc $\overrightarrow{OM}_2 = \frac{b}{a} \overrightarrow{OM}_1$, ce qui montre que M_1 et M_2 appartiennent à une même demi-droite d'origine O . On en déduit la construction suivante d'un point M de Γ : on trace une demi-droite d'origine O , elle coupe C_1 et C_2 respectivement en M_1 et M_2 . Le point d'intersection M des droites passant par M_1 et M_2 et parallèles respectivement aux axes $(O, \vec{j})$ et $(O, \vec{i})$, est un point de l'ellipse.

e) Hyperbole

Définition

On dit qu'un ensemble Γ de points du plan est une hyperbole si et seulement s'il existe un repère orthonormé dans lequel une équation cartésienne de Γ est de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a > 0, b > 0).$$

On a :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \iff \begin{cases} y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \\ \text{ou} \\ y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \end{cases}$$

Soit f_1 et f_2 les fonctions définies par :

$$\begin{aligned} f_1 : x &\mapsto \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \\ f_2 : x &\mapsto -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \end{aligned}$$

L'hyperbole Γ est la réunion des représentations graphiques Γ_1 et Γ_2 des fonctions f_1 et f_2 . On peut remarquer que Γ_2 est symétrique de Γ_1 par rapport à $(O, \vec{i})$; nous étudierons donc seulement la fonction f_1 .

L'ensemble de définition de f_1 est $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$, la fonction f_1 est paire donc $(O, \vec{j})$ est axe de symétrie de Γ_1 et l'ensemble d'étude de f_1 est $[a, +\infty[$.

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f_1(x) - \frac{b}{a} x \right] = 0.$$

La droite $y = \frac{b}{a} x$ est asymptote à Γ_1 .

La fonction dérivée f'_1 est définie sur $]a, +\infty[$ par :

$$f'_1 : x \mapsto \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$$

d'où le tableau de variations de f_1 :

x	a	$+\infty$
$f'_1(x)$	$\parallel$	$+$
$f_1(x)$	0	$\nearrow +\infty$

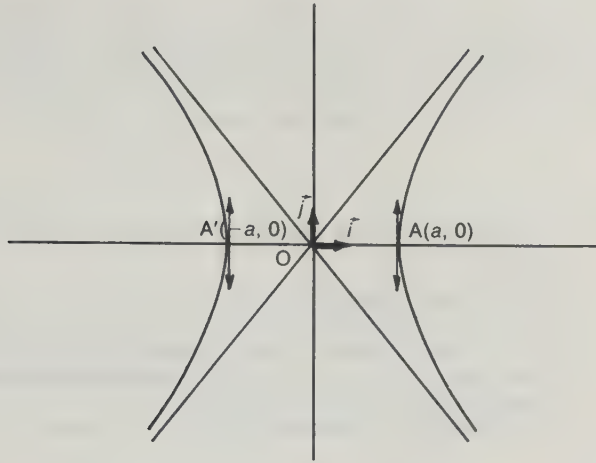


fig. 7

On a vu que les droites $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ sont des axes de symétrie de l'hyperbole. On démontre que ce sont les seuls. On les appelle les **axes** de l'hyperbole. Seul l'axe $(O, \vec{i})$ rencontre Γ en deux points $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$. Tandis que l'axe $(O, \vec{j})$ n'a aucun point commun avec Γ . C'est pourquoi, l'axe $(O, \vec{i})$ est appelé l'**axe transverse** de Γ .

Si M appartient à Γ , son image par la composée des deux symétries axiales précédentes, c'est-à-dire la symétrie de centre O , appartient aussi à Γ . Donc O est un centre de symétrie de Γ . On démontre que c'est le seul. On l'appelle le **centre** de l'hyperbole.

Les points A et A' sont les **sommets** de Γ :

f_1 est continue sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ et $\lim_{a} f_1' = +\infty$, $\lim_{-a} f_1' = -\infty$ donc (cf. § 4.6 c) tome 1) l'hyperbole admet des tangentes en A et A' parallèles à l'axe $(O, \vec{j})$.

Γ admet deux **asymptotes** d'équations respectives $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$. On dit qu'une hyperbole est **équilatère** si et seulement si ses asymptotes sont orthogonales. Donc Γ est équilatère si et seulement si les vecteurs directeurs des asymptotes $\vec{u}\left(1, \frac{b}{a}\right)$ et $\vec{u}'\left(1, -\frac{b}{a}\right)$ sont orthogonaux c'est-à-dire :

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$$

$$1 - \frac{b^2}{a^2} = 0$$

$$a = b.$$

REMARQUES 1. Soit Γ l'hyperbole d'équation :

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Quelle est l'équation de Γ dans le repère $(O, \vec{j}, \vec{i})$? Soit M un point quelconque de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) dans $(O, \vec{j}, \vec{i})$. On a :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{j} + Y\vec{i}$$

donc $x = Y$ et $y = X$. On a :

$$M \in \Gamma \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \iff \frac{Y^2}{a^2} - \frac{X^2}{b^2} - 1 = 0 \iff \frac{X^2}{b^2} - \frac{Y^2}{a^2} + 1 = 0.$$

Donc Γ a pour équation dans le repère $(O, \tilde{i}, \tilde{j})$:

$$(2) \quad \frac{X^2}{b^2} - \frac{Y^2}{a^2} + 1 = 0.$$

Ce qui montre que toute équation du type (2) est encore une équation cartésienne d'une hyperbole.

2. On peut donner une autre interprétation de l'équation (2). Soit M un point de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \tilde{i}, \tilde{j})$ et M' le point de coordonnées $X = y$ et $Y = x$ dans le même repère orthonormé $(O, \tilde{i}, \tilde{j})$. Ces deux points sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère. Quand M décrit Γ , le point M' décrit la symétrique Γ' de Γ par rapport à la première bissectrice du repère. L'équation (2) est une équation cartésienne de Γ' dans le repère $(O, \tilde{i}, \tilde{j})$.

EXERCICE RÉSOLU 1

Construire les ensembles Γ et Γ' des points du plan d'équations respectives, dans un repère orthonormé $(O, \tilde{i}, \tilde{j})$:

$$(1) \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} - 1 = 0 \quad \text{et} \quad (2) \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} + 1 = 0.$$

On indiquera les éléments remarquables (centre, axes, sommets, asymptotes).

L'équation (1) est du type $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ avec $a = 4$ et $b = 3$. Donc Γ est une hyperbole de centre O , d'axes les droites $(O, \tilde{i})$ et $(O, \tilde{j})$, de sommets les points de coordonnées $(4, 0)$ et $(-4, 0)$. Les asymptotes ont pour équations respectives $y = \frac{3}{4}x$ et $y = -\frac{3}{4}x$ (fig. 8).

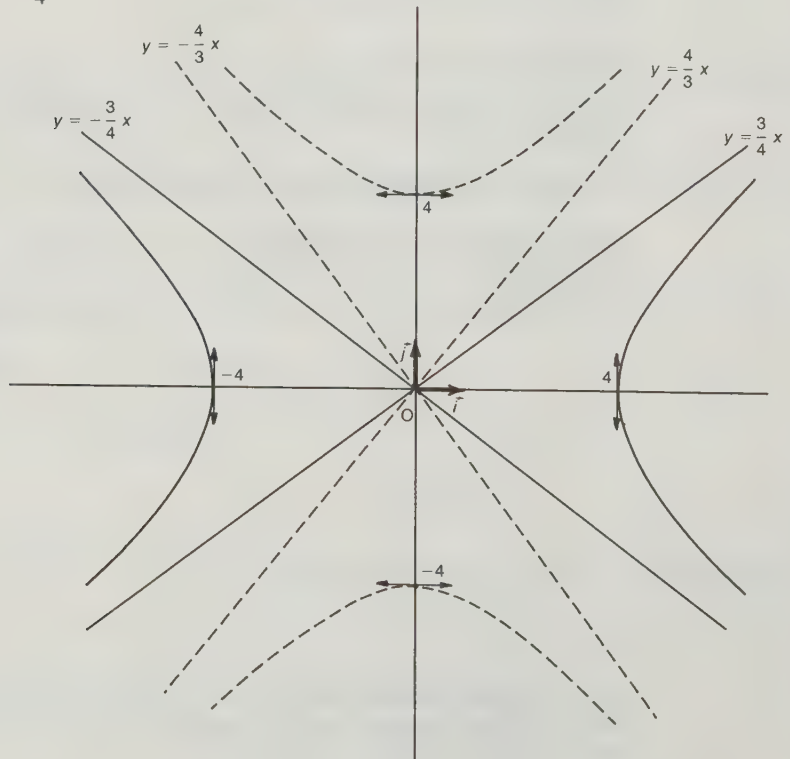


fig. 8

D'après les remarques précédentes, Γ' est l'hyperbole symétrique de Γ par rapport à la première bissectrice du repère. Son *centre* est O , ses *axes* sont encore les droites $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ mais c'est la droite $(O, \vec{j})$ qui est l'axe transverse, les *sommets* sont les points de coordonnées $(0, 4)$ et $(0, -4)$. Les *asymptotes* ont pour équations

$$x = \frac{3}{4}y \quad \text{c'est-à-dire} \quad y = \frac{4}{3}x$$

et
$$x = -\frac{3}{4}y \quad \text{c'est-à-dire} \quad y = -\frac{4}{3}x.$$

EXERCICE RÉSOLU 2

On suppose le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Quel est l'ensemble Γ des points du plan d'équation :

$$(1) \quad 4x^2 - y^2 + 16x + 2y + 15 - 4m^2 = 0?$$

(On discutera suivant les valeurs du paramètre réel m .)

Cherchons à faire apparaître des carrés de la forme $(x + \alpha)^2$ et $(y + \beta)^2$ de manière à obtenir une équation de l'un des types précédents en posant $x + \alpha = X$ et $y + \beta = Y$. L'équation (1) est équivalente à :

$$(2) \quad \begin{aligned} &4(x^2 + 4x) - (y^2 - 2y) + 15 - 4m^2 = 0 \\ &4[(x + 2)^2 - 4] - [(y - 1)^2 - 1] + 15 - 4m^2 = 0 \\ &4(x + 2)^2 - (y - 1)^2 - 4m^2 = 0. \end{aligned}$$

- Si $m = 0$, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} &4(x + 2)^2 - (y - 1)^2 = 0 \\ &[2(x + 2) - (y - 1)][2(x + 2) + (y - 1)] = 0 \\ &(2x - y + 5)(2x + y + 3) = 0 \end{aligned}$$

Γ est la réunion de deux droites d'équations respectives :

$$y = 2x + 5 \quad \text{et} \quad y = -2x - 3.$$

Ces deux droites se coupent au point $\Omega(-2, 1)$.

- Si $m \neq 0$, (2) est équivalente à :

$$\begin{aligned} &\frac{(x + 2)^2}{m^2} - \frac{(y - 1)^2}{4m^2} - 1 = 0 \\ &\frac{X^2}{m^2} - \frac{Y^2}{4m^2} - 1 = 0, \end{aligned}$$

en posant $x + 2 = X$ et $y - 1 = Y$.

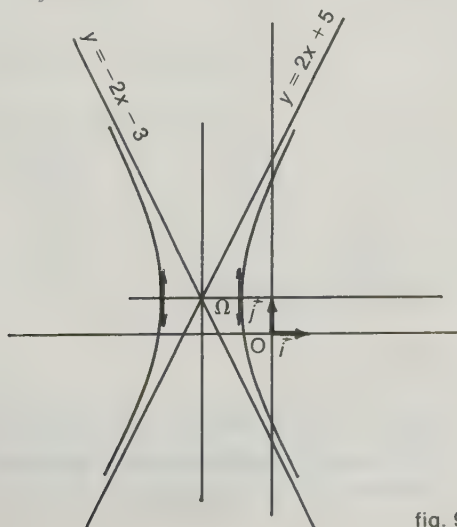


fig. 9

Γ est une hyperbole de centre $\Omega(-2, 1)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les axes de Γ sont les droites $(\Omega, \vec{i})$ et $(\Omega, \vec{j})$ d'équations respectives $x = -2$ et $y = 1$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les asymptotes ont pour équations

$$Y = \frac{2m}{m} X = 2X \quad \text{et} \quad Y = -2X$$

dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ et $y = 2x + 5$ et $y = -2x - 3$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les sommets ont pour coordonnées $(m, 0)$ et $(-m, 0)$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ et $(m - 2, 1)$ et $(-m - 2, 1)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (fig. 9).

f) Équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

Soit Γ une hyperbole, il existe un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel l'équation de Γ est :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{avec} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad b > 0.$$

Les équations des asymptotes D et D' sont respectivement

$$y = \frac{b}{a} x \quad \text{et} \quad y = -\frac{b}{a} x,$$

les vecteurs $\vec{u}(\alpha a, \alpha b)$ et $\vec{u}'(\beta a, -\beta b)$ sont des vecteurs directeurs de D et de D' (α et β étant deux réels non nuls).

Déterminons l'équation de l'hyperbole Γ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{u}')$.

Soit M un point de coordonnées (x, y) et (X, Y) respectivement dans les repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O, \vec{u}, \vec{u}')$, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= x\vec{i} + y\vec{j} \\ &= X\vec{u} + Y\vec{u}' \\ &= X(\alpha a\vec{i} + \alpha b\vec{j}) + Y(\beta a\vec{i} - \beta b\vec{j}) \\ &= (a\alpha X + a\beta Y)\vec{i} + (a\alpha b X - \beta b Y)\vec{j} \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \begin{cases} x = \alpha a X + \beta a Y \\ y = \alpha b X - \beta b Y. \end{cases}$$

L'équation de Γ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{u}')$ sera :

$$\frac{(\alpha a X + \beta a Y)^2}{a^2} - \frac{(a\alpha b X - \beta b Y)^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\text{ou encore} \quad (\alpha X + \beta Y)^2 - (\alpha X - \beta Y)^2 - 1 = 0$$

$$\text{ou encore} \quad 4\alpha\beta XY = 1$$

$$\text{ou encore} \quad XY = \frac{1}{4\alpha\beta}.$$

On peut donc énoncer :

Théorème

Soit Γ une hyperbole de centre O et d'asymptotes les droites D et D'. Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs directeurs respectifs de D et de D'. L'hyperbole Γ a pour équation, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{u}')$, $XY = k$ où k est un réel non nul.

Sous la forme $Y = \frac{k}{X}$, on retrouve l'équation de l'hyperbole que vous avez rencontrée dans les classes précédentes.

10.2 ENSEMBLE DES POINTS DONT LE RAPPORT DES DISTANCES A UN POINT ET A UNE DROITE EST CONSTANT

Soit D une droite du plan P , F un point du plan n'appartenant pas à D et e un réel strictement positif.

Étudions l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$ où H est la projection orthogonale de M sur la droite D .

Soit $\vec{j}$ un vecteur unitaire de D et $\vec{i}$ un vecteur tel que $(F, \vec{i}, \vec{j})$ soit un repère orthonormé du plan (fig. 10).

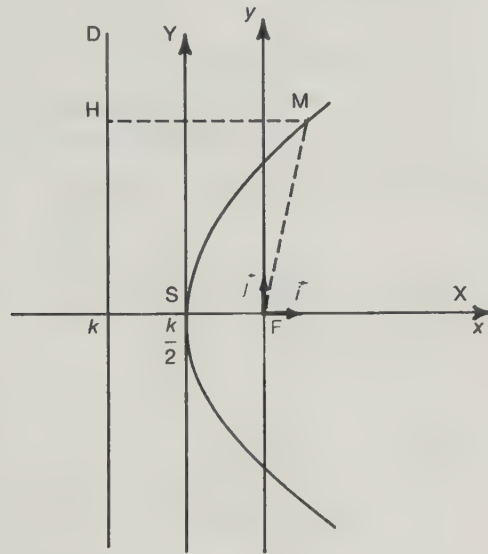


fig. 10

Dans ce repère le point F a pour coordonnées $(0, 0)$ et la droite D a pour équation $x = k$ ($k \neq 0$).

Pour tout point $M(x, y)$ du plan on a :

$$\begin{aligned}
 M \in \Gamma &\iff MF = e MH \\
 &\iff MF^2 = e^2 MH^2 \\
 &\iff x^2 + y^2 = e^2(x - k)^2 \\
 &\iff (1 - e^2)x^2 + y^2 + 2e^2kx - e^2k^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

a) Cas où $e = 1$

L'équation (1) devient

$$\begin{aligned}
 y^2 + 2kx - k^2 &= 0 \\
 y^2 + 2k\left(x - \frac{k}{2}\right) &= 0.
 \end{aligned}$$

Soit S le point de coordonnées $\left(\frac{k}{2}, 0\right)$ dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$. Prenons pour nouveau repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$, l'équation de Γ est :

$$Y^2 + 2kX = 0$$

c'est-à-dire
$$X = -\frac{Y^2}{2k}.$$

On reconnaît l'équation d'une parabole.

■ Étude d'une réciproque

Réciproquement **est-ce** que toute parabole Γ est l'ensemble des points équidistants d'un point F et d'une droite D ?

Il existe un repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé dans lequel l'équation d'une parabole Γ donnée peut s'écrire : $X = aY^2$ ($a \neq 0$) ou encore $X = -\frac{Y^2}{2k}$ avec $k = -\frac{1}{2a}$.

Soit F le point de coordonnées $\left(-\frac{k}{2}, 0\right)$ c'est-à-dire $\left(\frac{1}{4a}, 0\right)$ dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ et M un point quelconque de coordonnées (X, Y) dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ et (x, y) dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} X = x + \frac{1}{4a} \\ Y = y \end{cases}$$

l'équation de Γ dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{4a} &= ay^2 \\ y^2 &= \frac{x}{a} + \frac{1}{4a^2} \\ y^2 - \frac{x}{a} - \frac{1}{4a^2} &= 0 \end{aligned}$$

équation de la forme (1) où $e = 1$ et $k = -\frac{1}{2a}$. Donc Γ est l'ensemble des points équidistants de F et de la droite D d'équation $x = -\frac{1}{2a}$. On admettra que le point F et la droite D sont déterminés de manière unique. On peut donc énoncer :

Théorème et définitions

L'ensemble des points du plan équidistants d'un point F et d'une droite D ne contenant pas F est une parabole.

Il existe pour toute parabole un couple unique (F, D) , le point F n'appartenant pas à la droite D , tel que la parabole soit l'ensemble des points équidistants de F et de D .

Le point F est appelé le *foyer* de la parabole. La droite D est appelée la *directrice* de la parabole.

Le rapport $e = \frac{MF}{MH} = 1$ est l'**excentricité** de la parabole. La distance p du foyer F à la directrice D est appelée le **paramètre** de la parabole. On peut toujours choisir le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ de manière que l'équation de la parabole soit $X = a Y^2$ avec $a > 0$, la distance du foyer à la directrice est

$$p = |k| = \frac{1}{2a}$$

et l'équation de la parabole dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ s'écrit :

$$Y^2 = \frac{X}{a}$$

$$Y^2 = 2pX$$

EXERCICE RÉSOLU

Construire la parabole Γ d'équation, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$y = -\frac{x^2}{4} + x - 2.$$

Déterminer son foyer et sa directrice.

Mettons $-\frac{x^2}{4} + x - 2$ sous sa forme canonique de manière à aboutir à une équation de la forme $Y = aX^2$:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 8) \\ &= -\frac{1}{4}[(x - 2)^2 + 8 - 4] \\ &= -\frac{1}{4}[(x - 2)^2 + 4] \\ &= -\frac{1}{4}(x - 2)^2 - 1 \end{aligned}$$

posons $x - 2 = X$ et $y + 1 = Y$. L'équation de Γ devient :

$$Y = -\frac{1}{4}X^2$$

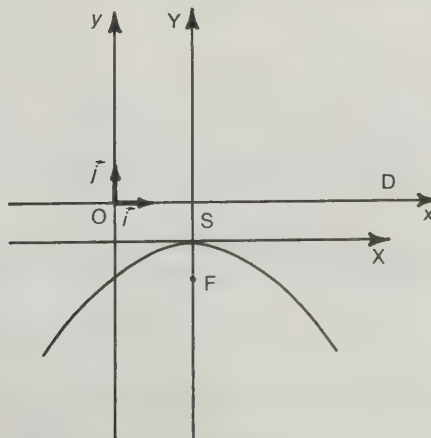


fig. 11

que l'on peut écrire : $X^2 = -4Y$. Le paramètre de Γ est $p = 2$. Il suffit de porter sur l'axe de Γ de part et d'autre du sommet S la distance $\frac{p}{2} = 1$ pour obtenir le foyer F et la directrice D (fig. 11).

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, S a pour coordonnées $(2, -1)$, F a pour coordonnées $(2, -2)$ et D a pour équation : $y = 0$.

b) Cas où $e \neq 1$

L'équation (1) s'écrit :

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{2e^2k}{1-e^2}x + \frac{y^2}{1-e^2} - \frac{e^2k^2}{1-e^2} &= 0 \\ \left(x + \frac{e^2k}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} - \frac{e^2k^2}{1-e^2} - \frac{e^4k^2}{(1-e^2)^2} &= 0 \\ \left(x + \frac{e^2k}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} - \frac{e^2k^2}{(1-e^2)^2} &= 0. \end{aligned}$$

Soit Ω le point de coordonnées $\left(-\frac{e^2k}{1-e^2}, 0\right)$ dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$.

L'équation de l'ensemble Γ cherché dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, (X, Y) désignant les coordonnées d'un point M dans ce repère, est :

$$\begin{aligned} X^2 + \frac{Y^2}{1-e^2} - \frac{e^2k^2}{(1-e^2)^2} &= 0 \\ (2) \quad \frac{X^2}{\frac{e^2k^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{e^2k^2}{1-e^2}} - 1 &= 0. \end{aligned}$$

- Si $e < 1$, l'équation (2) est de la forme $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$ donc Γ est une ellipse de centre Ω et d'axes $(\Omega, \vec{i})$ et $(\Omega, \vec{j})$. Ce n'est pas un cercle car $(1-e^2)^2 \neq 1-e^2$.

- Si $e > 1$, l'équation (2) est de la forme $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$ donc Γ est une hyperbole de centre Ω et d'axes $(\Omega, \vec{i})$ et $(\Omega, \vec{j})$.

■ Etude d'une réciproque

Réciproquement est-ce que toute ellipse qui n'est pas un cercle et toute hyperbole peuvent être considérées comme ensembles de points dont le rapport des distances à un point F et à une droite D est constant?

- Soit Γ une ellipse donnée qui n'est pas un cercle, il existe un repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel l'équation de Γ est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (\text{avec } a > b > 0). \quad (3)$$

Nous cherchons un point F, une droite D et un nombre e tel que Γ soit l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MH} = e$ c'est-à-dire tels que les coordonnées

(x, y) de M vérifient une relation de la forme (2). L'équation (3) peut se mettre sous la forme (2) si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{e^2 k^2}{(1-e^2)^2} = a^2 \\ \frac{e^2 k^2}{1-e^2} = b^2. \end{cases}$$

C'est un système d'inconnue (e, k) , les données étant a et b ($a > b > 0$). Il est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \\ k^2 = \frac{b^2(1-e^2)}{e^2} \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \\ k^2 = \frac{b^2(1-e^2)}{e^2}. \end{cases}$$

Posons $c^2 = a^2 - b^2$ avec $c > 0$. On a : $e = \frac{c}{a}$. On a bien $e < 1$. D'autre part

$$k^2 = \frac{b^2 \times \frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^4}{c^2} \quad \text{donc} \quad k = \frac{b^2}{c} \quad \text{ou} \quad k = -\frac{b^2}{c}.$$

Si F existe, on a vu que $\overrightarrow{F\Omega} = -\frac{e^2 k}{1-e^2} \vec{i}$ donc $\overrightarrow{\Omega F} = \frac{e^2 k}{1-e^2} \vec{i}$ et dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ les abscisses des points F cherchés sont (fig. 12) :

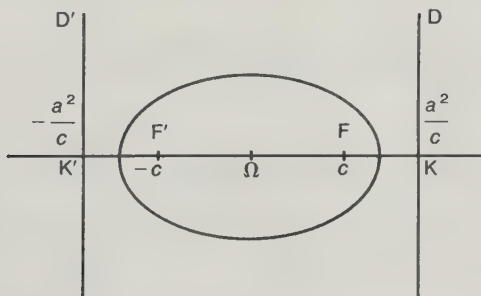


fig. 12

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega F} &= \frac{e^2 k}{1-e^2} = c \quad \text{lorsqu'on remplace } e \text{ par } \frac{c}{a} \text{ et } k \text{ par } \frac{b^2}{c} \\ \overrightarrow{\Omega F'} &= \frac{e^2 k}{1-e^2} = -c \quad \text{lorsqu'on remplace } e \text{ par } \frac{c}{a} \text{ et } k \text{ par } -\frac{b^2}{c}. \end{aligned}$$

Soit K la projection orthogonale de F sur D , on a $\overrightarrow{FK} = k\vec{i}$ donc dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ les abscisses des points K sont :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega K} &= \overrightarrow{\Omega F} + \overrightarrow{FK} = c + \frac{b^2}{c} = \frac{c^2 + b^2}{c} = \frac{a^2}{c} \\ \overrightarrow{\Omega K'} &= \overrightarrow{\Omega F'} + \overrightarrow{F'K'} = -c - \frac{b^2}{c} = -\frac{c^2 + b^2}{c} = -\frac{a^2}{c} \end{aligned}$$

ce qui détermine deux droites D et D' .

L'ensemble des points M tels que le rapport des distances à F et à D (ou à F' et à D') est $e = \frac{c}{a} < 1$ a pour équation (2) dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ c'est-à-dire (3).

Cet ensemble est donc l'ellipse Γ .

• Soit Γ une hyperbole donnée, il existe un repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel l'équation de Γ est :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (\text{avec } a > 0 \text{ et } b > 0). \quad (4)$$

On procède comme avec l'ellipse :

(4) peut se mettre sous la forme (2) si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{e^2 k^2}{(e^2 - 1)^2} = a^2 \\ \frac{e^2 k^2}{e^2 - 1} = b^2 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} \frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1 \\ k^2 = \frac{b^2(e^2 - 1)}{e^2} \end{cases}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \\ k^2 = \frac{b^2(e^2 - 1)}{e^2}. \end{cases}$$

Posons $c^2 = a^2 + b^2$ avec $c > 0$. On a : $e = \frac{c}{a} > 1$. D'autre part

$$k^2 = \frac{b^2 \times \frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^4}{c^2} \quad \text{donc} \quad k = \frac{b^2}{c} \quad \text{ou} \quad k = -\frac{b^2}{c}.$$

La détermination de (F, D) et (F', D') se fait comme pour l'ellipse.

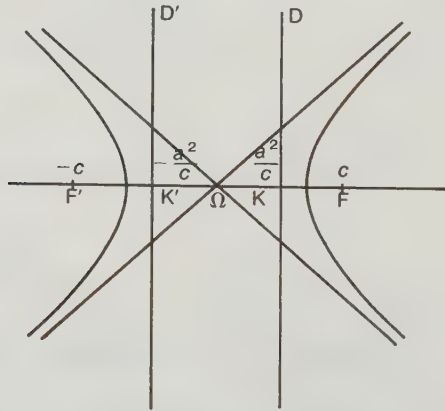


fig. 13

Les points F et F' sont les points de l'axe $(\Omega, \vec{i})$ d'abscisses :

$$\overline{\Omega F} = \frac{e^2 k}{1 - e^2} = c \quad \text{lorsqu'on remplace } e \text{ par } \frac{c}{a} \text{ et } k \text{ par } -\frac{b^2}{c}.$$

$$\overline{\Omega F'} = \frac{e^2 k}{1 - e^2} = -c \quad \text{lorsqu'on remplace } e \text{ par } \frac{c}{a} \text{ et } k \text{ par } \frac{b^2}{c}.$$

Les projections orthogonales de F et F' sur D et D' sont les points K et K' d'abscisses (en remarquant qu'on a toujours $\overrightarrow{FK} = k\vec{i}$) :

$$\overline{\Omega K} = \overline{\Omega F} + \overline{FK} = c - \frac{b^2}{c} = \frac{c^2 - b^2}{c} = \frac{a^2}{c}$$

$$\overline{\Omega K'} = \overline{\Omega F'} + \overline{F'K'} = -c + \frac{b^2}{c} = \frac{-c^2 + b^2}{c} = -\frac{a^2}{c}.$$

L'ensemble des points M tels que le rapport des distances à F et à D (ou à F' et à D') est $e = \frac{c}{a} > 1$ a pour équation (2) dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ c'est-à-dire (4). Cet ensemble est donc l'hyperbole Γ . En résumé :

Théorème et définitions

L'ensemble des points du plan dont le rapport des distances à un point F et à une droite D ne contenant pas F est égal à e ($e > 0$ donné) est une ellipse si $e < 1$, une hyperbole si $e > 1$.

Pour toute ellipse qui n'est pas un cercle et pour toute hyperbole, il existe deux couples (F, D) et (F', D') tels que la conique soit l'ensemble des points dont le rapport des distances à F et à D (ou à F' et à D') soit constant.

Ce rapport, qui est le même pour le couple (F, D) et pour le couple (F', D'), est appelé *excentricité* de la conique. Les points F et F' sont appelés les *foyers* de la conique, D et D' sont les *directrices* associées respectivement à F et F'.

La distance $FF' = 2c$ est la **distance focale**. La droite (FF') est appelée **axe focal**.

REMARQUES

- Une ellipse est strictement contenue dans la bande de plan déterminée par ses directrices.
- Une hyperbole est strictement à l'extérieur de la bande de plan déterminée par ses directrices.

10.3 DÉFINITION BIFOCAL DES CONIQUES A CENTRE

a) Ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$

Soit Γ une ellipse qui n'est pas un cercle, F et F' ses foyers, D et D' les directrices associées à F et F', K et K' les projections orthogonales de F et F' sur D et D' respectivement, $2c$ la distance focale, $2a$ la distance des sommets situés sur l'axe focal. Soit M un point quelconque de Γ se projetant orthogonalement en H et H' sur D et D' (fig. 14). On peut écrire, en appelant

$e = \frac{c}{a}$ l'excentricité de Γ :

$$MF = eMH, \quad MF' = eMH'$$

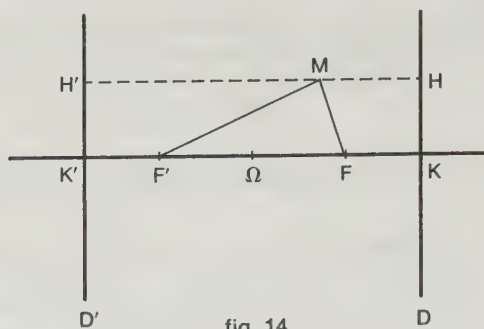


fig. 14

d'où (Γ étant toute entière contenue dans la bande limitée par D et D') :

$$\begin{aligned} MF + MF' &= e(MH + MH') = e \times HH' \\ &= e \times KK' = e \times 2 \frac{a^2}{c} = \frac{c}{a} \times 2 \frac{a^2}{c} \end{aligned}$$

donc quel que soit M de l'ellipse :

$$MF + MF' = 2a$$

Problème : étant donné deux points F et F' distincts du plan, a un réel strictement positif, déterminer l'ensemble Γ' des points M du plan tels que : $MF + MF' = 2a$.

Posons $FF' = 2c$. Remarquons que, pour tout point M du plan, on a : $MF + MF' \geq FF'$.

- Si $a < c$, $\Gamma' = \emptyset$.
- Si $a = c$, $\Gamma' = [F, F']$.
- Si $a > c$, soit Γ l'ellipse de foyers F et F' et de sommets A et A' sur l'axe focal tels que $AA' = 2a$, Γ existe et est unique car : soit O le milieu de (F, F') , $\vec{i} = \frac{1}{\|F'F\|} \overrightarrow{F'F}$, $\vec{j}$ tel que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit un repère orthonormé du plan, l'équation de Γ dans ce repère est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 = 0.$$

D'après le résultat précédent, pour tout point M de Γ on a : $MF + MF' = 2a$ donc $\Gamma \subset \Gamma'$.

Démontrons que l'on a : $\Gamma' \subset \Gamma$. Soit M un point quelconque de Γ' de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les points F et F' ont pour coordonnées dans ce repère : $(c, 0)$ et $(-c, 0)$. On a :

$$MF^2 = (x - c)^2 + y^2, \quad MF'^2 = (x + c)^2 + y^2$$

d'où

$$MF'^2 - MF^2 = (MF + MF')(MF' - MF) = 4cx.$$

Puisque $M \in \Gamma'$, $MF + MF' = 2a$ d'où $MF' - MF = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}$.

On a donc pour tout point $M(x, y)$ de Γ' :

$$\begin{cases} MF + MF' = 2a \\ MF' - MF = \frac{2cx}{a} \end{cases}$$

d'où $MF = a - \frac{cx}{a}$ et $MF' = a + \frac{cx}{a}$

d'où $MF^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2$

or $MF^2 = (x - c)^2 + y^2$

donc $(x - c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2$

après réduction, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 = 0$ donc tout point M de Γ' appartient à Γ ,
par suite $\Gamma' \subset \Gamma$. Donc $\Gamma' = \Gamma$. On peut énoncer :

Théorème

Soit F et F' deux points, distincts, du plan et a un nombre réel tel que $2a > FF'$.

L'ensemble des points M du plan tels que

$$MF + MF' = 2a$$

est l'ellipse de foyers F et F' et dont la distance des sommets de l'axe focal est $2a$.

) Ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$

Avec les notations du sous-paragraphe précédent (fig. 15), Γ étant cette fois-ci une hyperbole de foyers F et F' , de directrices associées D et D' , pour tout point M de Γ on a :

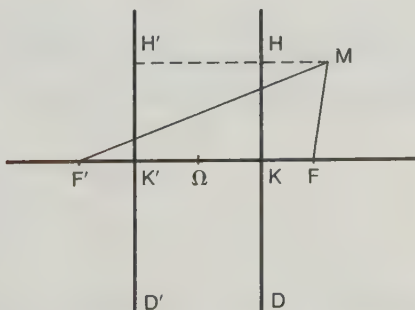


fig. 15

$$MF = eMH, \quad MF' = eMH'$$

d'où (Γ étant à l'extérieur de la bande limitée par D et D') :

$$\begin{aligned} |MF' - MF| &= e |MH' - MH| = e \times HH' \\ &= e \times KK' = e \times 2 \frac{a^2}{c} = \frac{c}{a} \times 2 \frac{a^2}{c} \end{aligned}$$

donc quel que soit M de l'hyperbole :

$$|MF' - MF| = 2a$$

Problème : étant donné deux points F et F' distincts du plan, a un nombre réel strictement positif, déterminer l'ensemble Γ' des points M du plan tels que :

$$|MF' - MF| = 2a.$$

Posons $FF' = 2c$. Remarquons que, pour tout point M du plan, on a :

$$|MF' - MF| \leq FF'.$$

- Si $a > c$, $\Gamma' = \emptyset$.
- Si $a = c$, Γ' est la droite (FF') privée du segment ouvert $]F, F'[$.
- Si $a < c$, soit Γ l'hyperbole de foyers F et F' et de sommets A et A' sur l'axe focal tels que $AA' = 2a$, Γ existe et est unique car : soit O le milieu de (F, F') ,

$\vec{i} = \frac{1}{\|\vec{F}'\vec{F}\|} \vec{F}'\vec{F}$, $\vec{j}$ tel que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit un repère orthonormé du plan,

l'équation de Γ dans ce repère est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} - 1 = 0.$$

D'après le résultat précédent, pour tout point M de Γ on a : $|MF' - MF| = 2a$ donc $\Gamma \subset \Gamma'$.

Démontrons que l'on a : $\Gamma' \subset \Gamma$. Soit M un point quelconque de Γ' de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les points F et F' ont pour coordonnées dans ce repère : $(c, 0)$ et $(-c, 0)$. On a :

$$MF^2 = (x - c)^2 + y^2, \quad MF'^2 = (x + c)^2 + y^2$$

d'où

$$MF'^2 - MF^2 = (MF' - MF)(MF' + MF) = 4cx.$$

Si $x > 0$, $MF' - MF$ est alors positif et si $M \in \Gamma'$, on a : $MF' - MF = 2a$

d'où $MF' + MF = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}$, donc

$$\begin{cases} MF' - MF = 2a \\ MF' + MF = \frac{2cx}{a} \end{cases}$$

d'où $MF = \frac{cx}{a} - a$ et $MF' = \frac{cx}{a} + a$.

Si $x < 0$, $MF' - MF$ est alors négatif et si $M \in \Gamma'$, on a : $MF - MF' = 2a$

d'où $MF + MF' = -\frac{4cx}{2a} = -\frac{2cx}{a}$,

donc

$$\begin{cases} MF - MF' = 2a \\ MF + MF' = -\frac{2cx}{a} \end{cases}$$

d'où $MF = a - \frac{cx}{a}$ et $MF' = -a - \frac{cx}{a}$.

Dans les deux cas ($x > 0$ ou $x < 0$), $MF^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2$

or $MF^2 = (x - c)^2 + y^2$

donc $(x - c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2$

après réduction, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 = 0$ donc tout point M de Γ' appartient à Γ , par suite $\Gamma' \subset \Gamma$. Donc $\Gamma' = \Gamma$. On peut énoncer :

Théorème

Soit F et F' deux points, distincts, du plan et a un nombre réel tel que $0 < 2a < FF'$.

L'ensemble des points M du plan tels que

$$|MF' - MF| = 2a$$

est l'hyperbole de foyers F et F' et dont la distance des sommets est 2a.

0.4 REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE CONIQUE

Nous avons donné, au chapitre 8 du tome 1, quelques représentations paramétriques ainsi que des applications géométriques et cinématiques.

) Parabole

Soit P la parabole d'équation $y^2 = 2px$ ($p > 0$) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Une représentation paramétrique de P s'obtient en prenant pour paramètre $y = t$ puisque x se calcule immédiatement en fonction de y :

$$(I) \quad \begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

) Ellipse

Le plan étant orienté et rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit E l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Si $M(x, y)$ appartient à E , on peut écrire :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

il existe un angle orienté de vecteurs, unique, dont une mesure est t telle que :

$$\cos t = \frac{x}{a} \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{y}{b}$$

d'où $x = a \cos t$ et $y = b \sin t$.

Réciproquement soit M un point du plan de coordonnées $(a \cos t, b \sin t)$, t étant un réel quelconque. On a $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ c'est-à-dire, en appelant x et y les coordonnées de M :

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

donc $M \in E$.

Une représentation paramétrique de E est :

$$(II) \quad \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Remarquons que si t décrit $[0, 2\pi[$, par exemple, l'ellipse est décrite une fois et une seule.

c) Hyperbole

Le plan étant orienté et rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit

H l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Si $M(x, y)$ appartient à H , faisons apparaître, comme précédemment, une somme de carrés égale à 1. Comme on a $x \neq 0$ (il n'y a pas de point sur H d'abscisse nulle), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} &= \frac{y^2}{b^2} + 1 \\ 1 &= \frac{a^2}{x^2} \frac{y^2}{b^2} + \frac{a^2}{x^2} \\ 1 &= \left(\frac{ay}{bx}\right)^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2 \end{aligned}$$

il existe un angle orienté de vecteurs, unique, dont une mesure est t telle que :

$$\begin{cases} \cos t = \frac{a}{x} & \text{avec } t \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \text{ puisque } \frac{a}{x} \neq 0 \\ \sin t = \frac{ay}{bx} \end{cases}$$

$$\text{d'où} \quad \begin{cases} x = \frac{a}{\cos t} & \text{avec } t \neq \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \\ y = \frac{bx}{a} \sin t = \frac{b}{a} \frac{a}{\cos t} \sin t = b \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Réciproquement soit M un point du plan de coordonnées $\left(\frac{a}{\cos t}, b \operatorname{tg} t\right)$ avec $t \neq \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$.

$$\text{On a :} \quad \frac{\left(\frac{a}{\cos t}\right)^2}{a^2} - \frac{(b \operatorname{tg} t)^2}{b^2} - 1 = \frac{1}{\cos^2 t} - \operatorname{tg}^2 t - 1 = 0$$

donc $M \in H$.

Une représentation paramétrique de H est :

$$(III) \quad \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{a}{\cos t} \\ y &= b \operatorname{tg} t \end{aligned}} \quad \left(t \neq \frac{\pi}{2} \quad [\pi]\right).$$

Remarquons que si t décrit $[0, 2\pi[- \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, l'hyperbole est décrite une fois et une seule.

REMARQUE Il existe d'autres représentations paramétriques de H proposées à l'exercice 10.50 en fin de chapitre.

0.5 TANGENTE A UNE CONIQUE

) Tangente en un point d'une parabole

Rappelons (cf. § 8.4 b) tome 1) que, si une fonction vectorielle F a une dérivée *non nulle* en t_0 , l'ensemble Γ des points M tels que $\overrightarrow{OM} = F(t)$ admet une tangente en M_0 , image de t_0 , de vecteur directeur $F'(t_0)$.

Soit la parabole P de représentation paramétrique (I) trouvée précédemment. La fonction vectorielle

$$F : t \longmapsto \frac{t^2}{2p} \vec{i} + t \vec{j}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(t) = t \vec{i} + \vec{j} \neq \vec{0}$$

donc P admet une tangente en tout point $M\left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$ de vecteur directeur $F'(t)$.

Cherchons une équation cartésienne de la tangente D_0 au point $M_0\left(\frac{t_0^2}{2p}, t_0\right)$.

Un point $Q(x, y)$ appartient à D_0 si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{M_0Q}$ et $F'(t_0)$ sont colinéaires (fig. 16) c'est-à-dire si et seulement si :

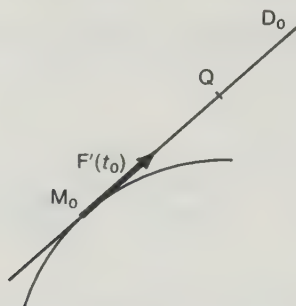


fig. 16

$$\begin{vmatrix} x - \frac{t_0^2}{2p} & \frac{t_0}{p} \\ y - t_0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui est équivalent à :

$$x - \frac{t_0^2}{2p} - y \frac{t_0}{p} + \frac{t_0^2}{p} = 0$$

$$x - x_0 - \frac{yy_0}{p} + 2x_0 = 0$$

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

On remarquera que cette équation se déduit de l'équation de la parabole $y^2 = 2px$ en remplaçant y^2 par yy_0 et $2x$ par $x + x_0$.

b) Tangente en un point d'une ellipse

Nous avons trouvé au § 8.4b) tome 1 (raisonner comme précédemment) comme équation de la tangente en $M_0(x_0, y_0)$ de E :

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$$

équation qui se déduit de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ par la même règle que précédemment (remplacer x^2 par xx_0 et y^2 par yy_0).

c) Tangente en un point d'une hyperbole

Soit l'hyperbole H de représentation paramétrique (III) trouvée précédemment. La fonction vectorielle

$$F : t \mapsto \frac{a}{\cos t} \vec{i} + b \operatorname{tg} t \vec{j}$$

est dérivable pour $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et l'on a

$$F'(t) = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} \vec{i} + \frac{b}{\cos^2 t} \vec{j} \neq \vec{0}$$

donc H admet une tangente en $M\left(\frac{a}{\cos t}, b \operatorname{tg} t\right)$ de vecteur directeur $F'(t)$.

Cherchons une équation cartésienne de la tangente D_0 en $M_0\left(\frac{a}{\cos t_0}, b \operatorname{tg} t_0\right)$, $t_0 \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$. Un point $Q(x, y)$ appartient à D_0 si et seulement si $\overrightarrow{M_0Q}$ et $F'(t_0)$ sont colinéaires (fig. 16) c'est-à-dire si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x - \frac{a}{\cos t_0} & \frac{a \sin t_0}{\cos^2 t_0} \\ y - b \operatorname{tg} t_0 & \frac{b}{\cos^2 t_0} \end{vmatrix} = 0$$

ce qui est équivalent, après simplification, à :

$$\begin{aligned} bx - \frac{ab}{\cos t_0} - ay \sin t_0 + ab \frac{\sin^2 t_0}{\cos t_0} &= 0 \\ bx \cos t_0 - ay \sin t_0 \cos t_0 - ab \cos^2 t_0 &= 0 \\ \frac{x}{a \cos t_0} - \frac{y}{b} \operatorname{tg} t_0 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0}$$

équation qui se déduit encore de l'équation de l'hyperbole en remplaçant x^2 par xx_0 et y^2 par yy_0 .

REMARQUE On sait (cf. § 4.1 d) tome 1) que, si f est une fonction numérique de la variable réelle dérivable en x_0 , une équation de la tangente à la représentation graphique de f est :

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

On peut retrouver les équations des tangentes précédentes en mettant les équations des coniques sous la forme : $y = f_1(x)$ ou $y = -f_1(x)$, équations qui contiennent des radicaux.

d) Propriétés de la tangente à une conique

Rappelons les propriétés démontrées au § 8.5 b) tome 1 :

Théorèmes

1. Si M est un point d'une *ellipse* de foyers F et F' ($M \notin (FF')$), la tangente en M est la bissectrice *extérieure* de $\widehat{FMF'}$.
2. Si M est un point d'une *hyperbole* de foyers F et F' ($M \notin (FF')$), la tangente en M est la bissectrice *intérieure* de $\widehat{FMF'}$.
3. Soit Γ une conique de foyer F et de directrice associée D , M un point de Γ n'appartenant pas à l'axe contenant le (ou les) foyer(s), T le point d'intersection de la tangente en M avec la directrice. Les droites (FT) et (FM) sont orthogonales.
 Dans le cas où Γ est une *parabole*, en appelant H le projeté orthogonal de M sur D , la tangente en M est, de plus, la bissectrice *intérieure* de $\widehat{FMH}$.

Exercices

Équations cartésiennes et constructions des coniques

10.1 1. Représenter graphiquement le sous-ensemble Γ_1 du plan P dont une équation est

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Quel est, suivant les valeurs de m , l'ensemble Γ_m d'équation :

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = m?$$

Si $m > 0$, montrer qu'il existe deux homothéties de centre O qui transforment Γ_1 en Γ_m .

10.2 m désignant un nombre réel, discuter suivant les valeurs de m , la nature du sous-ensemble Γ du plan dont une équation est

$$m^4 x^2 + y^2 - m^2 = 0$$

dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

10.3 Soit P un plan orienté, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de P et F l'application de (P) dans (P) qui associe à tout point M d'abscisse z le point $M' = F(M)$ d'abscisse z' tel que

$$z' = 2 - \frac{i}{2}(\bar{z} - 2)$$

($\bar{z}$ désigne le nombre conjugué de z).

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $b < a$ et (Γ) la courbe d'équation

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

a) Déterminer la nature de (Γ) et ses éléments de symétrie.

b) Déterminer une équation cartésienne de (Γ') image de (Γ) par F . Quelle est la nature de (Γ') ? Préciser ses éléments de symétrie.

c) Tracer (Γ) et (Γ') lorsque $a = 2$ et $b = 1$.

10.4 Soit (Γ_1) la courbe d'équation

$$x_1^2 + 5y_1^2 - 2x_1y_1 = 1.$$

On se propose de déterminer la nature de (Γ_1) . On oriente le plan dont un repère orthonormé est $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en choisissant $(O, \vec{i}, \vec{j})$ comme repère direct. Soit $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ le repère se déduisant de $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par la rotation de centre O et d'angle α ($\alpha \in [0, 2\pi[$).

Soit M_1 le point de coordonnées x_1 et y_1 dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et de coordonnées x' et y' dans $(O, \vec{i}', \vec{j}')$. On admettra que

$$x_1 = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha,$$

$$y_1 = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

1. Quelle est l'équation de (Γ_1) dans $(O, \vec{i}', \vec{j}')$?

2. Montrer qu'il existe une valeur et une seule α_1 de α , strictement comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, telle que l'équation de (Γ_1) dans le repère $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ soit de la forme

$$kx'^2 + \ell y'^2 = 1.$$

On pourra montrer que α_1 vérifie l'équation

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

3. Montrer alors que (Γ_1) est une ellipse dont on déterminera les axes.

4. Représenter graphiquement la courbe (Γ_1) .

10.5 Soit $\mathcal{P}$ un plan orienté et $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct de $\mathcal{P}$.

A tout nombre complexe z , $z = x + iy$, on associe le point M de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$. Le nombre complexe conjugué de z est noté $\bar{z}$. Soit (E) l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ dont l'abscisse z vérifie la relation

$$2|z|^2 - \frac{i}{2}(z^2 - (\bar{z})^2) = 1.$$

Soit r la rotation de centre O dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$ en radians. Soit (E') l'image de (E) , par r .

1. Déterminer une équation cartésienne de (E') dans le repère $\mathcal{R}$. Reconnaitre la nature de (E') .

2. En déduire le tracé de (E) dans le repère $\mathcal{R}$; on prendra 5 cm pour unité graphique.

(Exercice Bac. C. Aix-en-Provence 1982.)

10.6 Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation

$$y^2 - x^2 + 4x = 0$$

dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que (Γ) est la réunion des courbes représentatives (Γ_1) et (Γ_2) de deux fonctions f_1 et f_2 , que l'on précisera.

2. Étudier les variations de la fonction

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x}.$$

Étudier la dérivabilité de la fonction f_1 aux points d'abscisses 0 et 4, et préciser les tangentes en ces points; les asymptotes non parallèles aux axes de coordonnées : on donnera leurs équations et leur point d'intersection.

Construire la représentation graphique (Γ_1) de f_1 . En déduire celle de f_2 .

En déduire la nature de Γ .

10.7 Soit un plan P , $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P , λ étant un nombre réel non nul, on considère la courbe (C_λ) d'équation

$$x^2 - y^2 - \lambda = 0.$$

Préciser la nature de (C_λ) . Construire (C_1) , (C_{-1}) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

10.8 Dans un plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne les points A de coordonnées $(-1, 0)$ et A' de coordonnées $(1, 0)$ et le cercle (C) de centre O et de rayon égal à 1. On considère deux points P et P' du cercle (C) symétriques par rapport à la droite (AA') . On appelle θ une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OP})$; on suppose que $\theta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

1. On appelle I le point d'intersection des droites (AP) et $(A'P')$ quand il existe. Calculer en fonction de θ les coordonnées du point I .

2. On appelle $(\mathcal{H})$ l'ensemble des points I quand θ prend toutes les valeurs possibles.

a) Donner une équation cartésienne de $(\mathcal{H})$.

b) Représenter $(\mathcal{H})$; on précisera ses éléments caractéristiques.

3. Montrer que les bissectrices de l'angle de droites $(\widehat{IA}, \widehat{IA'})$ sont parallèles aux bissectrices des axes de coordonnées.

(Exercice Bac. E. Paris 1982.)

10.9 Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne l'ensemble des points (H) d'équation :

$$(1) \quad 9y^2 - x^2 - 2ax - a^2 = 36.$$

Soit Ω le point de coordonnées $(-a, 0)$. Écrire une équation de H dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer la nature de H suivant les valeurs de a . Représenter graphiquement H quand $a = 2$.

10.10 Représenter graphiquement l'ensemble des points du plan d'équation

$$|y| = 2x^2.$$

10.11 Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne l'ensemble Γ d'équation

$$(1) \quad x^2 + 10x - 4y + 9 = 0.$$

Soit Ω le point de coordonnées $(-5, -4)$. Écrire une équation de Γ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Préciser la nature de Γ et la représenter graphiquement.

10.12 Même exercice que précédemment Γ ayant pour équation :

$$y^2 + 4y + 6x - 2 = 0$$

et Ω ayant pour coordonnées $(1, -2)$.

10.13 Étudier la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 2x - 3}.$$

Dans le plan (P) , rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm), tracer la courbe représentative (C_1) de f , dont on déduira la courbe représentative (C_2) de $(-f)$. On montrera que la

réunion de (C_1) et (C_2) est composée d'une ellipse (E) et d'une hyperbole (H) dont on précisera les éléments remarquables : sommets, asymptotes.

10.14 1. a) Étudier la variation de la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[-1, +1]$ de $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x + \sqrt{2(1-x^2)}$$

(on trouvera que la dérivée de f change de signe au point $\frac{-1}{\sqrt{3}}$).

b) Le plan (Π) orienté étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct d'axes Ox, Oy , on appelle (C) la courbe représentative de f dans ce repère.

Préciser les tangentes à (C) aux points d'abscisses -1 et $+1$, au point A d'abscisse nulle, et au point B d'ordonnée nulle.

Tracer la courbe (C) , en prenant pour unité de longueur 5 cm.

2. a) Soit f_1 la fonction numérique définie sur $[-1, +1]$ par

$$f_1(x) = -x - \sqrt{2(1-x^2)}$$

et soit (C_1) la courbe représentative de f_1 dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan (Π) . Comparer, pour x quelconque, $f_1(x)$ et $f(-x)$ et interpréter géométriquement le résultat. Tracer la courbe (C_1) .

b) On désigne par (D) , (D') , (Δ) les droites du plan (Π) d'équations respectives $x = 1$, $x = -1$, $x + y = 0$, et l'on désigne respectivement par H , H' , K les projections orthogonales sur (D) , (D') , (Δ) d'un point quelconque P de (Π) .

On considère l'ensemble (E) des points P situés entre (D) et (D') , ou sur (D) ou (D') , tels que

$$PK^2 = PH \cdot PH'.$$

Calculer PK^2 et $PH \cdot PH'$ en fonction des coordonnées x, y du point P , et montrer que

$$(E) = (C) \cup (C_1).$$

Vérifier qu'une équation cartésienne de (E) est

$$(e) \quad 3x^2 + y^2 + 2xy - 2 = 0.$$

3. Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ les images respectives de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans la rotation vectorielle d'angle θ donné. On définit ainsi dans le plan (Π) un nouveau repère $(O, \vec{U}, \vec{V})$, et l'on désigne par X, Y les coordonnées dans ce repère du point ayant x, y pour coordonnées dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On pose alors

$$Z = X + iY, \quad z = x + iy$$

i nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que $z = Z(\cos \theta + i \sin \theta)$. En déduire les expressions de x et y en fonction de X, Y et θ , puis celle de

$$3x^2 + y^2 + 2xy$$

en fonction de X, Y et 2θ .

b) On suppose alors $\theta = \frac{\pi}{8}$. Trouver l'équation de (E) dans le repère $(O, \vec{U}, \vec{V})$ correspondant. En déduire que (E) est une ellipse dont on indiquera le

demi-grand axe α et le demi-petit axe β . Vérifier que $\frac{\beta}{\alpha}$ est égal à $\sqrt{2} - 1$.

10.15 Soit la courbe (E) dont une équation par rapport au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0.$$

Soit $(O, \vec{I}, \vec{J})$ le repère image de $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans la rotation de centre O et d'angle α .

Déterminer α ($0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$) pour que l'équation de (E) dans le nouveau repère soit de la forme

$$AX^2 + BY^2 + C = 0.$$

En déduire la nature de (E) et en donner les éléments caractéristiques.

10.16 Construire dans un plan rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient

$$4y^2 = |9x^2 - 36x|.$$

10.17 Construire relativement à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'un plan l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$16x|x| + 36y|y| = 576.$$

10.18 Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la courbe (Γ) d'équation

$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}.$$

Montrer que (Γ) est la réunion de parties de coniques dont on précisera les éléments caractéristiques.

10.19 Soit λ un paramètre réel.

1. Discuter, suivant les valeurs de λ , la nature de la courbe qui a pour équation, en axes orthonormés

$$y^2 + \lambda x^2 + (\lambda + 1)x - \frac{\lambda}{4} = 0.$$

2. Donner, le cas échéant, les coordonnées de son centre de symétrie et les équations de ses asymptotes.

Cercle et ellipse

10.20 On connaît les sommets A, A', B, B' d'une ellipse Γ , les axes de Γ étant la droite (AA') et la droite (BB'). Soit C_1 le cercle de diamètre [A, A']. A l'aide d'une affinité qui transforme C_1 en Γ (cf. § 10.1 d) du cours), construire l'image M d'un point M_2 de C_1 . Construire la tangente en M à Γ .

10.21 Soit une ellipse Γ . Une droite D varie dans le plan en gardant une direction fixe, elle coupe Γ en M' et M''. On appelle M'_1 et M''_1 les antécédents de M' et M'' par l'affinité de l'exercice précédent. Que peut-on dire de la direction de $(M'_1M''_1)$? Quel est l'ensemble des milieux I_1 de $(M'_1M''_1)$? Quel est l'ensemble des milieux I de $(M'M'')$?

Équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

10.22 1. Soit H une hyperbole d'équation $xy = k$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, Δ une sécante à l'hyperbole coupant celle-ci en M et M' et les asymptotes en P et P'. Montrer que (M, M') et (P, P') ont même milieu I.

2. Soit D et D' deux droites sécantes en O et A un point du plan n'appartenant ni à D ni à D'. Une droite Δ passant par A coupe D et D' en P et P'.

a) Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{PM} = \vec{AP'}$ lorsque Δ varie en passant par A.

b) Déterminer l'ensemble des milieux I des bipoints (P, P') lorsque Δ varie en passant par A.

10.23 La tangente en M à une hyperbole H coupe les asymptotes en T et T'. Montrer que M est le milieu de (T, T').

En déduire une construction de la tangente en un point M de H.

10.24 Soit H une hyperbole d'équation $xy = k$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La tangente à H en $M_1(x_1, y_1)$ coupe $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ respectivement en T_1 et T'_1 . De même, la tangente à H en un autre point $M_2(x_2, y_2)$ coupe $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ respectivement en T_2 et T'_2 .

1. Démontrer que les droites $(T_1T'_2)$ et $(T_2T'_1)$ sont parallèles.

2. Démontrer que la droite (M_1M_2) est parallèle à $(T_1T'_2)$ et $(T_2T'_1)$ (on utilisera l'ex. 10.23) et qu'elle rencontre $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ respectivement au milieu de (T_1, T_2) et (T'_1, T'_2) .

Foyers et directrices

10.25 Dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit Γ l'ensemble des points d'équation :

$$y^2 - 9x - 27 = 0.$$

Quelle est la nature de Γ ?

Construire Γ en précisant le ou les sommets, le ou les foyers, la ou les directrices ainsi que l'excentricité.

10.26 Mêmes questions qu'à l'exercice 10.25 avec :

$$x^2 - 4x - 4y = 0.$$

10.27 Mêmes questions qu'à l'exercice 10.25 avec :

$$x^2 + 4y^2 = 4.$$

10.28 Mêmes questions qu'à l'exercice 10.25 avec :

$$x^2 - 3x - 4y + \frac{9}{4} = 0.$$

10.29 Mêmes questions qu'à l'exercice 10.25 avec :

$$x^2 - 16y^2 - 6x + 16y + 1 = 0.$$

10.30 Mêmes questions qu'à l'exercice 10.25 avec :

$$36x^2 + 8y^2 - 36x - 56y + 35 = 0.$$

10.31 Mêmes questions qu'à l'exercice 10.25 avec :

$$16x^2 - 48x - 225y^2 - 64 = 0.$$

10.32 Dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point $F(4, 0)$, la droite D d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et l'excentricité $e = 1$.

Donner l'équation de la conique Γ de foyer F , de directrice D et d'excentricité e .

Construire Γ et préciser ses éléments caractéristiques.

10.33 Mêmes questions qu'à l'exercice 10.32 avec $F(0, -6)$, D d'équation $y = 2$, $e = 1$.

10.34 Mêmes questions qu'à l'exercice 10.32 avec $F(5, 0)$, $D : x = \frac{16}{5}$, $e = \frac{5}{4}$.

10.35 Mêmes questions qu'à l'exercice 10.32 avec $F(2, 0)$, $D : x = \frac{-10}{3}$, $e = \frac{3}{5}$.

10.36 Mêmes questions qu'à l'exercice 10.32 avec $F(0, 8)$, $D : y = \frac{24}{5}$, $e = \frac{5}{3}$.

10.37 Soit un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'orientation positive. Soit ε l'ensemble des courbes (Γ_α) d'équation

$$(\alpha^2 - 4)x^2 - 4y^2 - 4(\alpha^2 - 4) = 0$$

α appartenant à $\mathbb{R}$.

1. Comparer (Γ_α) et $(\Gamma_{-\alpha})$.

2. Étudier suivant les valeurs de α la nature de (Γ_α) et en préciser chaque fois les éléments fondamentaux (centre, sommets, foyers et asymptotes s'il y a lieu).

3. Dessiner les courbes (Γ_0) et $(\Gamma_{2\sqrt{2}})$ (sur une même figure).

10.38 P désigne, dans tout le problème, un plan rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans tout le problème, λ désigne un réel quelconque et k un réel *strictement positif*. A tout couple de réels (λ, k) , ainsi constitué, on associe la courbe $(C_{\lambda, k})$ dont une équation dans le repère $\mathcal{R}$ est

$$(1 + \lambda)x^2 + (1 - \lambda)y^2 = k.$$

1. Étudier les courbes

$$(C_{0, k}), (C_{1, k}) \text{ et } (C_{-1, k}).$$

2. a) Montrer que les deux coniques admettant respectivement pour équations

$$3x^2 + y^2 = 12, \quad 3x^2 - y^2 = 6$$

sont des courbes $(C_{\lambda, k})$.

b) Déterminer les éléments géométriques de ces coniques : foyers, sommets, asymptotes et les représenter sur deux figures distinctes.

3. On suppose λ différent de $-1, 0$ et 1 . Le réel k étant fixé, discuter, suivant la valeur de λ , la nature (ellipse ou hyperbole) de la conique $(C_{\lambda, k})$. Préciser son axe focal et calculer en fonction de λ le carré e^2 de son excentricité.

10.39 Déterminer l'ensemble des points M du plan dont la somme des distances à un point et à une droite donnés est constante.

10.40 1. Montrer qu'une parabole est l'ensemble des centres des cercles tangents à une droite fixe et passant par un point fixe non situé sur cette droite.

2. Construire la directrice d'une parabole connaissant le foyer et deux points de la parabole.

10.41 Construire la directrice D associée à un foyer F d'une conique Γ connaissant : le point F , l'excentricité e , deux points M et M' de Γ .

10.42 Construire la directrice D associée à un foyer F d'une conique Γ connaissant : le point F , l'excentricité e , deux points M et M' de Γ .

10.43 On donne une droite D , un point M n'appartenant pas à D et un réel e strictement positif. Quel est l'ensemble des foyers F , associés à D , des coniques Γ de directrice D , d'excentricité e et passant par M ?

Définition bifocale des coniques à centre

10.44 Dans le plan P rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points F et F' de coordonnées respectives $F(2, 2)$, $F'(8, 2)$. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que $MF + MF' = 10$. (On formera l'équation cartésienne et on construira la courbe.)

10.45 Même exercice que 10.44 avec :

$$F(-1, 7), \quad F'(-1, -3) \quad \text{et} \quad |MF - MF'| = 8.$$

10.46 Même exercice que 10.44 avec :

$$F(8, 1), \quad F'(-2, 1) \quad \text{et} \quad |MF - MF'| = 6.$$

10.47 Même exercice que 10.44 avec :

$$F(1, -6), \quad F'(1, 6) \quad \text{et} \quad MF + MF' = 20.$$

10.48 On donne les points F et M et un réel a strictement positif. Quels sont les ensembles des foyers F' et des centres O des ellipses Γ dont un foyer est F , passant par M et dont la distance des sommets de l'axe focal est $2a$?

10.49 Mêmes questions qu'à l'exercice précédent, Γ étant une hyperbole.

Représentation paramétrique d'une conique

10.50 1. Donner une représentation paramétrique très simple d'une hyperbole H , en considérant l'équation de H rapportée à ses asymptotes.

2. Soit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de H dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

En écrivant

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),$$

donner une représentation paramétrique de H.

10.51 On considère l'application f du plan dans lui-même rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ qui associe au point M d'abscisse le nombre complexe $z = x + iy$ le point M' d'abscisse z^2 .

Déterminer l'image par f de l'ellipse de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

10.52 Quel est l'ensemble des points du plan de représentation paramétrique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} x = a \cos t + c \sin t \\ y = b \cos t + d \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

où a, b, c, d sont des réels donnés tels que $ac + bd = 0$?

Tangente à une conique

10.53 Soit P la parabole d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $M_0(x_0, y_0)$ un point de P distinct du sommet O. On appelle K_0 le projeté orthogonal de M_0 sur la droite $(O, \vec{i})$. La tangente en M_0 à P rencontre la droite $(O, \vec{i})$ en T_0 . La normale à la parabole en M_0 est la droite perpendiculaire à la tangente en M_0 . Elle rencontre la droite $(O, \vec{i})$ en N_0 .

1. Donner des équations cartésiennes de la tangente et de la normale en M_0 .

2. Montrer que O est le milieu de (K_0, T_0) .

3. Montrer que $\overline{K_0 N_0} = p$.

10.54 Soit E l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $M_0(x_0, y_0)$ un point distinct des sommets. La tangente en M_0 à E rencontre l'axe focal en T_0 et la normale en M_0 (perpendiculaire à la tangente en M_0) rencontre l'axe focal en N_0 .

1. Donner des équations cartésiennes de la tangente et de la normale en M_0 .

2. Montrer que $\overline{OT_0} \cdot \overline{ON_0} = OF^2$, F étant un foyer.

10.55 Traiter le même exercice que précédemment avec l'hyperbole H d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

10.56 A. Soit E l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on suppose $a > b > 0$) et $M_0(x_0, y_0)$ un point distinct des sommets $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$. La tangente en M_0 à E rencontre les tangentes aux sommets A et A' respectivement en T_0 et T'_0 .

1. Donner une équation cartésienne de la tangente en M_0 et montrer que

$$\overline{AT_0} \cdot \overline{AT'_0}$$

est constant que M_0 décrit $E - \{A, A'\}$.

2. Soit F et F' les foyers de E. Montrer que les droites (FT_0) et (FT'_0) sont orthogonales ainsi que les droites $(F'T_0)$ et $(F'T'_0)$.

B. Traiter les mêmes questions avec une hyperbole H d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

10.57 Soit Γ une conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité e. Donner une construction d'un point M de Γ et de la tangente en M.

10.58 Soit P une parabole de foyer F et de directrice D. On suppose que M décrit la parabole P.

1. Quel est l'ensemble décrit par le symétrique du foyer par rapport à la tangente en M?

2. Quel est l'ensemble décrit par le projeté orthogonal du foyer sur la tangente en M?

10.59 Soit Γ une ellipse ou une hyperbole de foyers F et F', la distance des sommets de l'axe focal étant égale à $2a$. On suppose que M décrit Γ .

1. Quel est l'ensemble décrit par le symétrique de F par rapport à la tangente en M?

2. Quel est l'ensemble décrit par le projeté orthogonal de F sur la tangente en M?

Révision

10.60 A. Soit P un plan muni d'un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm).

Soit f_1 et f_2 les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_1(x) = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

$$f_2(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

On désigne par C_1 (respectivement C_2) la représentation graphique de f_1 (respectivement f_2) dans le repère R.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f_1 . Préciser les demi-tangentes aux points d'abscisses -1 et $+1$ de C_1 .

2. Étudier les variations de f_1 et tracer C_1 . On montrera en particulier que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote pour $x \rightarrow +\infty$.

3. Montrer que la restriction de f_1 à $[1, +\infty[$ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle I à préciser.

Montrer que la bijection réciproque g est définie par

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

pour x appartenant à I et tracer la courbe représentative Γ de g .

4. Soit λ un réel strictement supérieur à 1. Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine délimité par Γ et les trois droites d'équations respectives $y = \frac{x}{2}$, $x = 1$ et $x = \lambda$.

B. Soit C la courbe d'équation

$$y^2 - 2xy + 1 = 0.$$

1. Soit s la symétrie par rapport au point O. Montrer que $s(C_1) = C_2$ et tracer C_2 .

2. Prouver que C est égal à l'union de C_1 et C_2 .

3. a) Soit $\vec{u}$ le vecteur $\vec{i} + 2\vec{j}$. Montrer que $(O, \vec{i}, \vec{u})$ est un repère de P.

b) Déterminer une équation de C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{u})$.

C. A tout couple (a, b) de réels on associe l'application affine $\varphi_{a,b}$ définie par :

$$\varphi_{a,b} : M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

où $x' = ax$, $y' = bx - ay$.

1. a) Pour quelles valeurs du couple (a, b) , $\varphi_{a,b}$ est-elle une bijection?

b) Déterminer suivant les valeurs de a et de b l'ensemble des points invariants de $\varphi_{a,b}$.

c) Pour quelles valeurs du couple (a, b) , $\varphi_{a,b}$ est-elle une symétrie affine?

2. On suppose désormais $a = 1$ et $b = 2$.

a) Montrer que $\varphi_{1,2}$ est une symétrie affine dont on déterminera les éléments.

b) Montrer que $\varphi_{1,2}(C) = C$.

D. On considère dans le repère R, le mouvement du point M dont les coordonnées sont données en fonction du temps par

$$x(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y(t) = e^t \quad (t \geq 0).$$

1. Montrer que la trajectoire du mobile est une partie de C que l'on précisera.

2. Déterminer la nature du mouvement de M.

(Problème. Bac. E. Besançon 1982.)

10.61 Soit f la fonction définie par

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = x + 3 + \frac{1}{2} \sqrt{6x^2 + 24x}.$$

1. a) Étudier le comportement de la fonction f lorsque la variable devient infiniment grande, et montrer que la courbe représentative (C) de la fonction admet deux asymptotes, dont on déterminera les équations.

b) Étudier les variations de la fonction f . Est-elle dérivable dans tout son ensemble de définition? Étudier

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x) - f(-4)}{x + 4}.$$

Interpréter les résultats obtenus sur la courbe représentative (C).

c) Construire la courbe représentative (C) de la fonction f , le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Démontrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point, puis calculer l'abscisse de ce point.

2. Soit O' le point tel que $\vec{OO'} = -2\vec{i} + \vec{j}$.

Écrire l'équation $Y = F(X)$ de la courbe (C) rapportée au repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par (C') la courbe représentant dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$ la fonction G définie par

$$G(X) = X - \frac{1}{2} \sqrt{6X^2 - 24}.$$

Montrer que (C') est symétrique de (C) par rapport au point O' .

Déduire de cette étude, l'ensemble (Γ) des points du plan rapporté au repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$ dont les coordonnées X et Y sont liées par la relation

$$X^2 - 2Y^2 + 4XY - 12 = 0.$$

3. φ est l'endomorphisme du plan vectoriel $\mathcal{F}$, défini par sa matrice dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) φ est-il un automorphisme du plan vectoriel? φ est-il involutif?

b) Étant donné un nombre réel λ , on pose

$$E_\lambda = \{\vec{u}; \vec{u} \in \mathcal{F} \text{ et } \varphi(\vec{u}) = \lambda \vec{u}\}.$$

Montrer qu'il existe deux valeurs réelles de λ pour lesquelles $E_\lambda \neq \{\vec{0}_\mathcal{F}\}$. (Ces valeurs seront notées λ_1 et λ_2 ; $\lambda_1 > 0$.)

Démontrer que (E_{λ_1}) et (E_{λ_2}) sont deux droites vectorielles orthogonales.

Calculer $\vec{I}$ de (E_{λ_1}) et $\vec{J}$ de (E_{λ_2}) tels que $(\vec{I}, \vec{J})$ soit une base orthonormée.

4. (X, Y) étant les coordonnées d'un point M du plan rapporté au repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$ et (X', Y') les coordonnées du même point M dans le plan rapporté au repère $(O', \vec{I}, \vec{J})$, exprimer X et Y en fonction de X' et Y' .

Écrire l'équation de la courbe (Γ) de la deuxième question lorsque cette courbe est rapportée au repère $(O', \vec{I}, \vec{J})$.

Reconnaitre la courbe (Γ) .

10.62 P est un plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$; $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes; i est le nombre complexe de

module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Les affixes des points

de P sont toujours données par rapport au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. f et g sont les deux applications de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définies par, pour tout z de $\mathbb{C}$,

$$f(z) = z^3 + 4(1 - i)z^2 - 2(2 + 7i)z - 16 + 8i \\ g(z) = z^3 + 2 - 2i.$$

A. 1. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z vérifiant $g(z) = 0$. Représenter les points dont les affixes sont les nombres trouvés et démontrer que ces points forment un triangle équilatéral.

2. Démontrer qu'il existe un, et un seul, réel r , que l'on déterminera, qui vérifie $f(r) = 0$. Déterminer les deux nombres complexes a et b de façon à avoir :

$$f(z) = (z - r)(z^2 + az + b)$$

pour tout z de $\mathbb{C}$.

3. Résoudre l'équation :

$$z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = 0.$$

Démontrer que les points dont les affixes sont les solutions de cette équation forment un triangle rectangle dans le plan P .

4. A, B, C sont trois points de P dont les affixes respectives sont $-1 + 3i$, $1 + i$, -4 . Déterminer l'axe du barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 4, 3, 5.

5. On désigne par h l'application de P vers $\mathbb{R}$ qui à tout point M de P associe le réel

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}.$$

Calculer $h(C)$. Exprimer $h(M)$ en fonction de $\|\overrightarrow{MG}\|^2$ et $h(G)$. Déterminer et dessiner l'ensemble des points M de P qui vérifient $h(M) = 18$.

B. A tout point M de P d'axe z on associe le point M' de P d'axe

$$f(z) - g(z).$$

1. Déterminer les coordonnées (x', y') de M' dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ en fonction des coordonnées (x, y) de M dans le même repère.

2. A, B, C sont les points définis en A.4. Donner une équation de l'ensemble H_1 des points M de P tels que O, B et M' soient alignés. Démontrer que H_1 est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.

3. Donner une équation de l'ensemble H_2 des points M de P tels que O, I et M' soient alignés, I étant le centre de gravité de A, B, C.

Démontrer que H_2 est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes; on pourra, par exemple, donner une équation de H_2 sous forme $y = \Phi(x)$.

4. Démontrer qu'un point M est commun à H_1 et H_2 si, et seulement si, M' est confondu avec O.

Résoudre l'équation

$$z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = g(z).$$

En déduire les points communs à H_1 et H_2 .

Construire H_1 et H_2 dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

C. Un mobile du plan P a son axe $z(t)$ donnée, en fonction du temps t par

$$z(t) = f(t \cdot i) + 10 - 6i,$$

quand t décrit l'intervalle $[0, 2]$ de $\mathbb{R}$. On notera $M(t)$ le point correspondant à l'instant t .

1. Déterminer les coordonnées $(x(t), y(t))$ de $M(t)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, ainsi que les coordonnées dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ des vecteurs vitesse et accélération du mobile à l'instant t .

2. Faire un tableau indiquant les variations de x et de y en fonction de t .

3. Construire les points de la trajectoire du mobile correspondant aux valeurs : $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{7}{4}, 2$ du réel t et un vecteur directeur des tangentes à la trajectoire pour les valeurs $0, \frac{2}{3}, \frac{7}{4}, 2$ de t .

4. Déduire de ce qui précède le tracé de la trajectoire du mobile, en indiquant le sens du parcours, quand t décrit $[0, 2]$.

(Problème. Bac. C. Nantes 1982.)

Ce chapitre figure au programme de Terminale E et ne figure pas au programme de Terminale C.

Les ensembles de points que l'on étudiera seront des parties d'un espace E que l'on aura orienté.

11.1 ROTATION AUTOUR D'UN AXE VERTICAL OU DE BOUT

a) Image d'un point par une rotation autour d'un axe vertical

Soit M un point d'épure (m, m') , D une droite verticale d'épure (d, d') , déterminons $M_1(m_1, m'_1)$ image de M par une rotation r d'axe D et d'angle α . Les points M et M_1 appartiennent à un même plan orthogonal à la droite D donc ils ont la même cote. La projection horizontale m'_1 de M_1 est l'image de m par la rotation de centre d et d'angle α on a donc :

$$dm_1 = dm \quad \text{et} \quad (\widehat{dm}, \widehat{dm_1}) \equiv \alpha [2\pi].$$

Une épure est donnée par la figure 1.

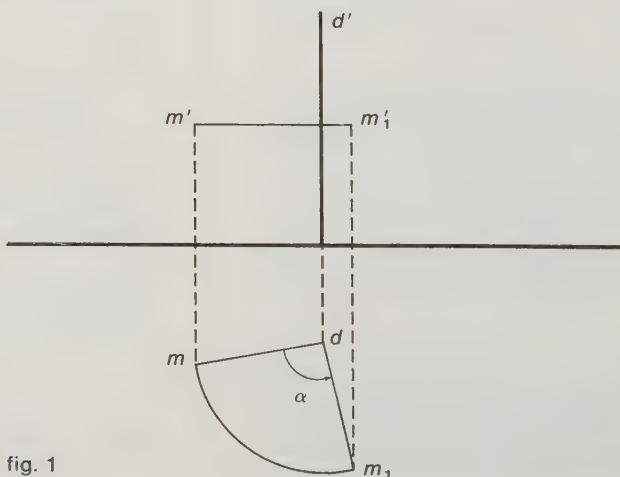


fig. 1

b) Image d'un point par une rotation autour d'un axe de bout

On échangera dans la construction précédente les rôles joués par les projections frontale et horizontale (fig. 2).

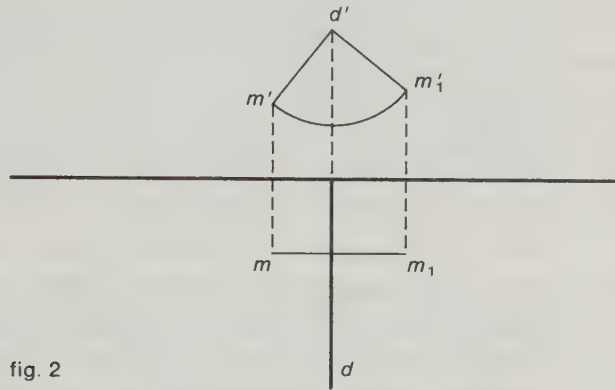


fig. 2

c) Image d'une droite

L'image d'une droite $\Delta(\delta, \delta')$ sera la droite passant par deux points images de deux points distincts de la droite Δ .

L'épure (fig. 3) est faite dans le cas où l'axe de la rotation est de bout et où une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$.

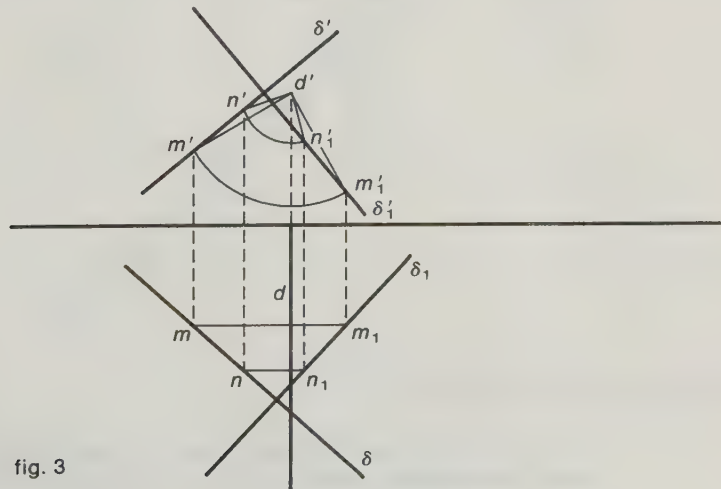


fig. 3

REMARQUE Dans des cas particuliers (droite Δ parallèle, orthogonale ou sécante à l'axe de la rotation D) des constructions plus simples pourront être faites.

d) Application : « Rendre une droite frontale (resp. horizontale) »

Soit D une droite verticale (resp. de bout), Δ une droite non frontale (resp. non horizontale) déterminons un angle α tel que l'image Δ_1 de Δ par une rotation autour de D d'angle α soit frontale (resp. horizontale). On dit que l'on a rendu Δ frontale (resp. horizontale).

Épure (fig. 4) dans le cas où l'on veut rendre une droite Δ horizontale : $\Delta(\delta, \delta')$ une droite non horizontale, $D(d, d')$ une droite de bout rencontrant la droite D en un point $A(a, a')$. Le point A est invariant dans toute rotation autour de D . L'image $\Delta_1(\delta_1, \delta'_1)$ de Δ par la rotation d'axe D devant être horizontale, δ'_1 est une droite parallèle à la ligne de terre passant par a' . Soit $B(b, b')$ un point de Δ différent de A , le cercle de centre d' passant par b' rencontre la droite δ'_1 en deux points b'_1 et b'_2 . Il existe deux rotations qui rendent Δ horizontale : la rotation r_1 autour de D d'angle $(\widehat{d'b'}, \widehat{d'b'_1})$ et la rotation r_2 autour de D d'angle $(\widehat{d'b'}, \widehat{d'b'_2})$. La projection horizontale δ_1 de Δ_1 image de Δ par la rotation r_1 passe par a et par b_1 intersection de la ligne de rappel menée par b'_1 et de la parallèle à la ligne de terre menée par b . De même on peut déterminer $\Delta_2(\delta_2, \delta'_1)$ image de Δ par r_2 .

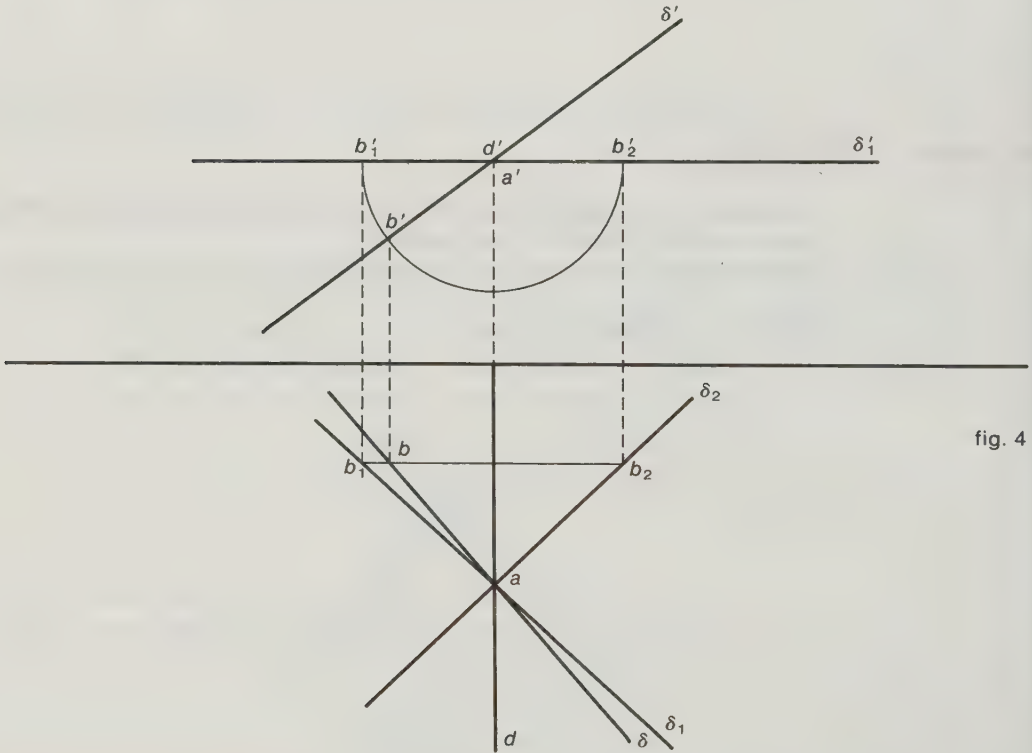


fig. 4

e) Distance de deux points

Soit $A(a, a')$ et $B(b, b')$ deux points de l'espace. Si la droite (AB) est frontale (resp. horizontale), $d(A, B) = d(a', b')$ (resp. $d(A, B) = d(a, b)$).

Dans le cas où la droite (AB) n'est ni frontale ni horizontale, on construira une droite (A_1B_1) image de (AB) dans une rotation autour d'un axe vertical (resp. de bout) telle que la droite (A_1B_1) soit frontale (resp. horizontale); on aura alors $d(A_1, B_1) = d(A, B)$.

11.2 RABATTEMENT D'UN PLAN SUR UN PLAN HORIZONTAL (RESP. FRONTAL)

Un plan H étant horizontal (resp. frontal) la projection de H sur le plan horizontal (resp. frontal) de projection est une isométrie. Si on doit étudier des problèmes de mesure de longueurs ou d'angles dans un plan P non horizontal (resp. non frontal), on associera à P un plan horizontal (resp. frontal) P_1 image de P par une rotation autour d'une horizontale (resp. une frontale) du plan P . Les mesures se feront alors sur l'épure en projection horizontale (resp. frontale). La rotation sera appelée dans ce cas **rabattement**, l'axe $D(d, d')$ de la rotation : **charnière du rabattement**. Par abus de langage si $M(m, m')$ est un point de P et $M_1(m_1, m'_1)$ son image dans P_1 on dira que m_1 (resp. m'_1) est le rabattement de m (resp. m'); ou que m (resp. m') est le relèvement de m_1 (resp. m'_1).

On démontre que si le plan P n'est pas vertical (resp. de bout) l'application qui à m (resp. m'), projection horizontale (resp. frontale) d'un point M quelconque de P , associe m_1 (resp. m'_1), projection horizontale (resp. frontale) de M_1 , est une affinité d'axe d (resp. d') et de rapport $\frac{1}{\cos \theta}$ où θ est l'angle de la rotation.

REMARQUE La charnière D étant choisie il y a deux rotations autour de D telle que l'image d'un plan P soit un plan horizontal (resp. frontal).

a) Épure dans le cas d'un rabattement sur un plan horizontal

Les seuls points invariants dans un rabattement sont les points de la charnière. Soit P un plan non horizontal, $D(d, d')$ une droite horizontale de P et $M(m, m')$ un point de P n'appartenant pas à D (fig. 5).

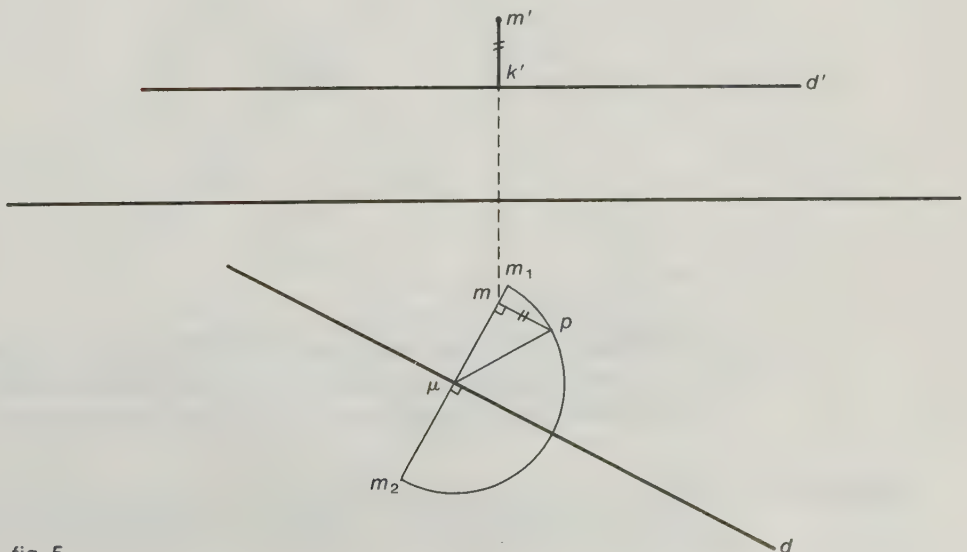


fig. 5

Un rabattement m_1 de m sera construit à l'aide de la méthode du triangle de rabattement. m_1 est sur la perpendiculaire à d projection horizontale de la charnière D menée par m ; cette droite δ coupe d en μ . Soit k' l'intersection de la ligne de rappel (mm') avec d' . Sur la parallèle à d menée par m marquons un point p tel que : $d(m, p) = d(m', k')$. Il existe deux points m_1 et m_2 de δ tel que $d(\mu, m_1) = d(\mu, m_2) = d(\mu, p)$. Les points m_1 et m_2 sont les deux rabattements possibles de m (correspondant aux deux rotations possibles). On en choisit un par exemple m_1 . Le rabattement d'un point étant construit, le rabattement de tout autre point du plan P est déterminé. Le triangle μmp est appelé *triangle de rabattement*.

Dans le cas d'un rabattement sur un plan frontal, on échangera dans la construction précédente les rôles joués par les projections frontales et horizontales.

b) Méthode des alignements

L'étude sera faite dans le cas d'un rabattement sur un plan horizontal. Soit P un plan, $A(a, a')$ un point de ce plan et a_1 le rabattement de a autour de la charnière D(d, d'); le rabattement de tout autre point $M(m, m')$ sera déterminé par la méthode des alignements.

- Si la droite (AM) est parallèle à la charnière D (fig. 6) m_1 rabattement de m est déterminé par : $\overrightarrow{a_1 m_1} = \overrightarrow{a m}$.

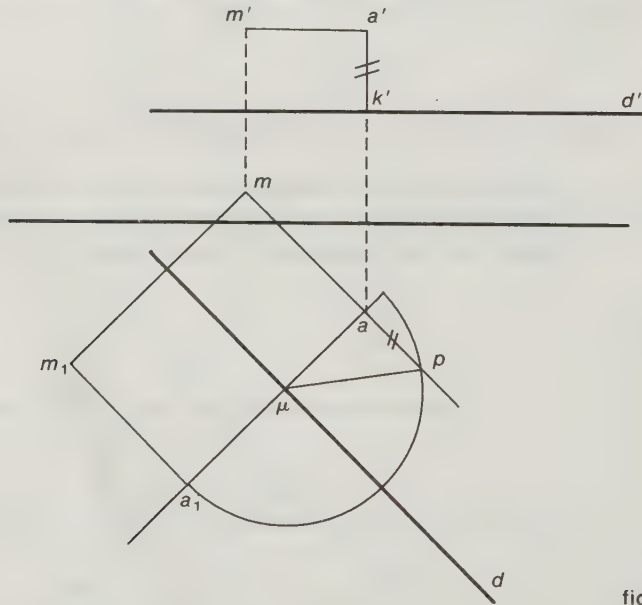


fig. 6

- Si la droite (AM) est sécante à la charnière D en O(o, o') (fig. 7) les points a_1, o, m sont alignés car les points a, o, m le sont; m_1 est donc l'intersection de la perpendiculaire menée par m à d et de la droite (oa_1).

REMARQUE

Si la droite (AM) coupe D en un point situé en dehors de la feuille on construira d'abord le rabattement d'un point $N(n, n')$ du plan P tel que la droite (mn) coupe d dans les limites de l'épure.

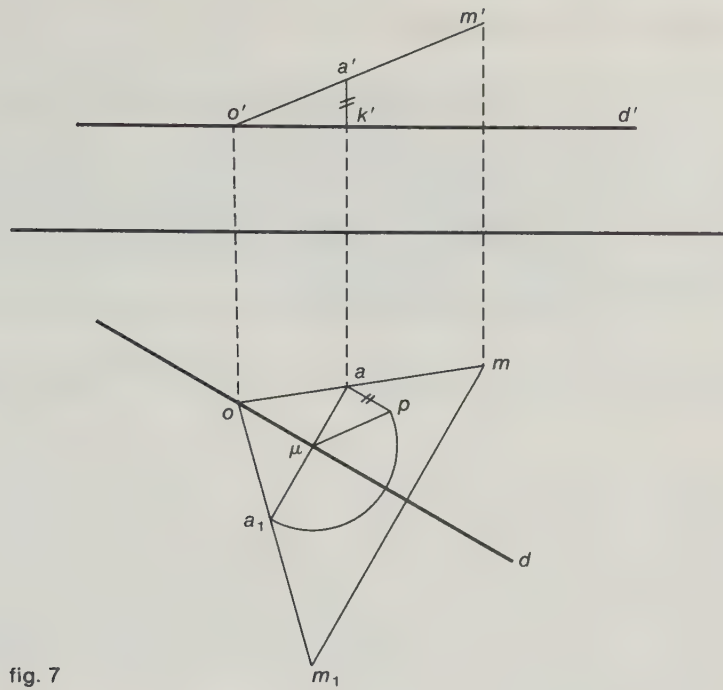


fig. 7

c) Application 1 : angle de deux droites

On rabat le plan contenant les deux droites $\Delta(\delta, \delta')$ et $D(d, d')$ sur un plan horizontal. Soit δ_1 et d_1 les rabattements de δ et d on aura :

$$(\widehat{\Delta, D}) \equiv (\widehat{\delta_1, d_1})[\pi]$$

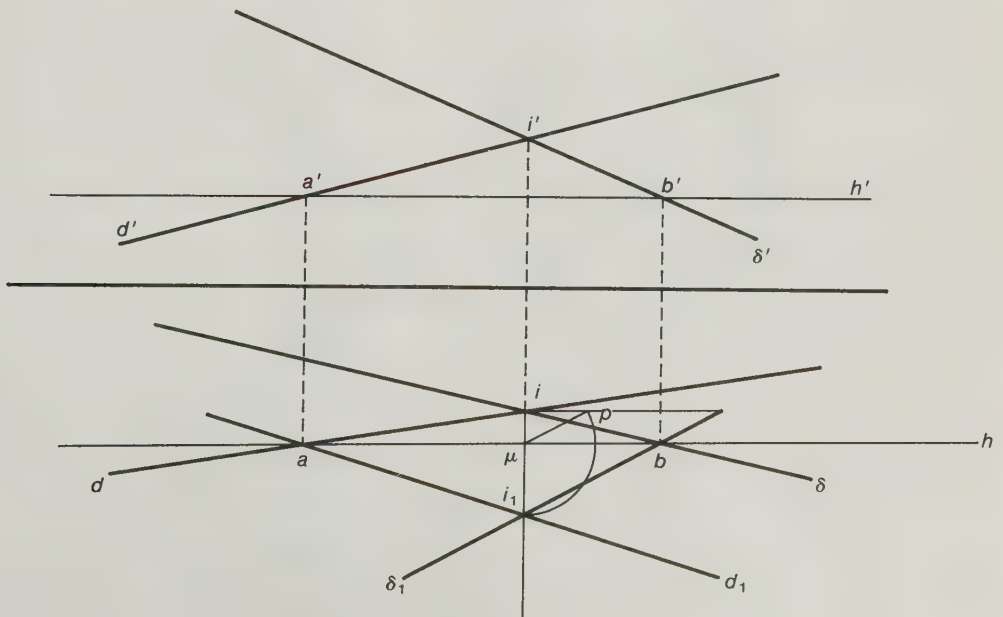


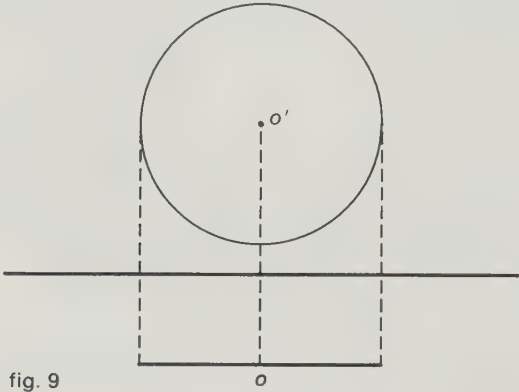
fig. 8

d) Application 2 : représentation d'un cercle

1. Le plan du cercle est horizontal (resp. frontal)

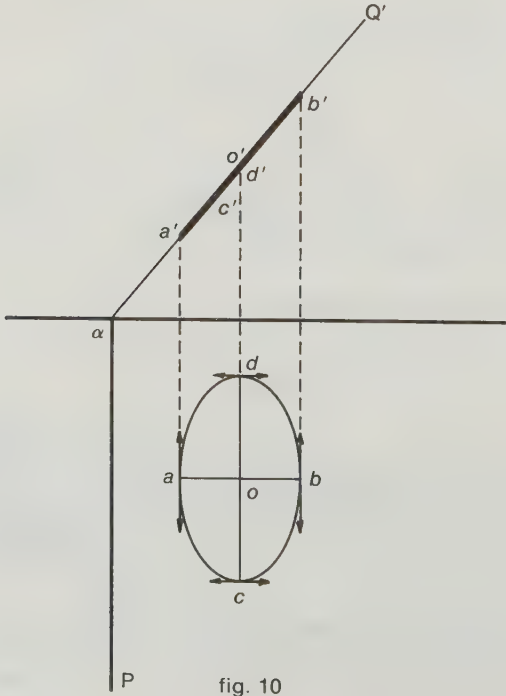
Soit un cercle C de centre O(o, o') de rayon R situé dans un plan horizontal (resp. frontal), sa projection frontale (resp. horizontale) est un segment de droite de milieu o' (resp. o) dont le support est parallèle à la ligne de terre et de longueur $2R$, sa projection horizontale (resp. frontale) est le cercle de centre o (resp. o') et de rayon R.

L'épure (fig. 9) est faite dans le cas où le plan du cercle est frontal.



2. Le plan du cercle est de bout non horizontal

Soit C un cercle O(o, o') de rayon R situé dans un plan de bout non horizontal. Soit $\alpha Q'$ (resp. αP) la trace frontale (resp. horizontale) du plan du cercle (fig. 10).



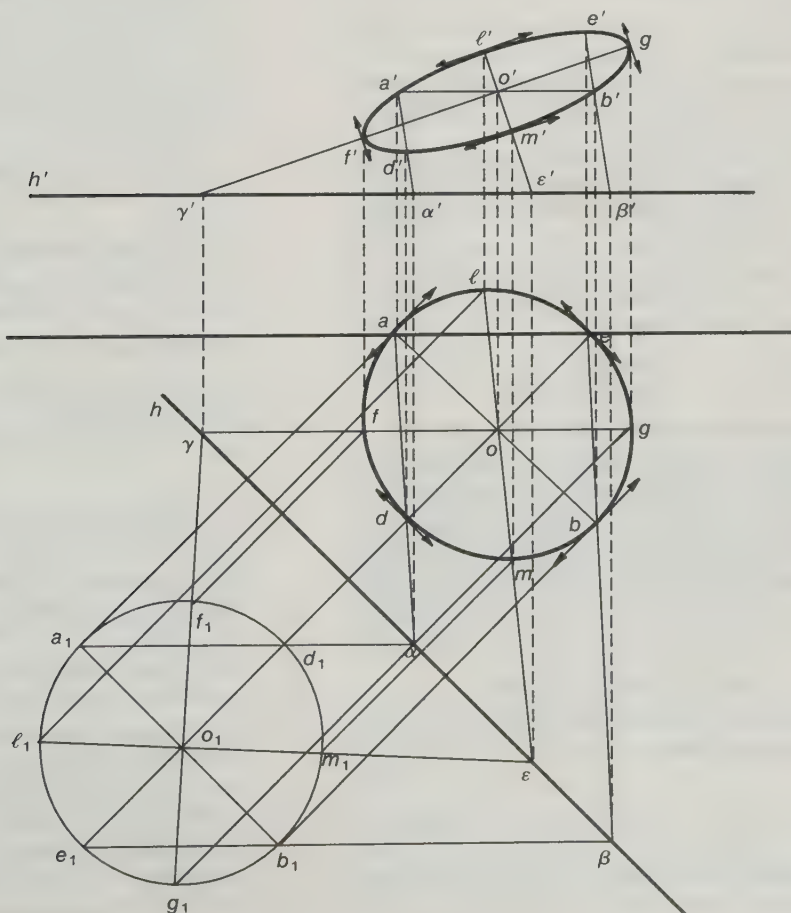
La projection frontale du cercle C est le segment $[a', b']$ de longueur $2R$ de milieu o' et de support $\alpha Q'$.

Pour déterminer la projection horizontale de C nous utiliserons un rabattement autour de l'horizontale du plan du cercle qui passe par O (cette horizontale est une droite de bout). Le rabattement C_1 de la projection horizontale de C est le cercle de centre o et de rayon R (le point O est invariant dans le rabattement car il appartient à la charnière). La projection horizontale de C est donc l'image de C_1 dans une affinité de rapport $\cos \theta$ où θ est l'angle du rabattement, c'est donc une ellipse de centre o de grand axe de longueur $2R$ et de support la projection horizontale de la charnière et de petit axe $[a, b]$.

REMARQUE Les constructions dans le cas où le plan du cercle est vertical (non frontal) se font en échangeant projection frontale et horizontale dans la construction précédente.

3. Le plan du cercle n'est ni vertical ni de bout

Soit C un cercle de centre $O(o, o')$ de rayon R situé dans un plan P . On démontre de la même manière que dans le cas précédent en effectuant un rabattement autour de l'horizontale du plan P passant par O que la projection horizontale de C est une ellipse (on démontrerait de même en effectuant un rabattement sur un plan frontal que la projection frontale de C est une ellipse). Le rabattement du centre du cercle étant construit, on obtient les relèvements des autres points du cercle C_1 par la méthode des alignements. On construit la projection frontale en rappelant la projection horizontale (fig. 11).



Exercices

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'axes Ox, Oy, Oz . On choisit le plan xOy pour plan horizontal de projection et le plan yOz pour plan frontal de projection. L'axe Oy est orienté positivement de gauche à droite. Ox est dirigé vers le bas de la feuille et Oz vers le haut. En général l'unité de longueur est le centimètre et le point O est au centre de la feuille, quand il n'y a aucune précision dans l'énoncé.

Rotation

11.1 Dans cette épure le point O sera placé à mi-hauteur et à gauche de la feuille. Soit P le plan d'équation

$$x - y + z = 0.$$

Montrer que A, B, C de coordonnées respectives $(1, 1, 0), (0, 1, 1)$ et $(1, 3, 2)$, sont trois points de (P) représentés par leurs projections $(a, a'), (b, b')$ et (c, c') .

1. Placer $(a, a'), (b, b')$ et (c, c') , puis construire les traces de (P) .

2. On fait subir au plan (P) la rotation d'axe $z'Oz$ qui transforme $A(a, a')$ en $A_1(a_1, a'_1)$, a_1 étant situé sur la demi-droite Ox .

$B_1(b_1, b'_1)$ et $C_1(c_1, c'_1)$ étant les transformés respectifs de B et de C , placer b_1, b'_1, c_1, c'_1 . Construire les traces de (P_1) transformé de (P) . Que peut-on dire de (P_1) ?

11.2 Dans cette épure le point O sera placé à mi-hauteur et à gauche de la feuille. Soit (P) le plan d'équation

$$x - 2y + 2z = 0,$$

A le point de coordonnées $(1, 8, 6)$.

1. Représenter l'épure du point A et du plan (P) .

2. Par une rotation autour de l'axe de bout contenant A , faire apparaître en vraie grandeur la distance de A à (P) . (L'indiquer sur l'épure.)

Mettre en évidence sur l'épure une section droite du dièdre formé par le plan (P) et le plan frontal de projection (en un autre langage, faire apparaître « en vraie grandeur » l'angle du plan (P) et du plan frontal).

11.3 On donne le plan (P) d'équation

$$x + y + 2z = 6,$$

le plan (Q) d'équation

$$2x - y + z = 6.$$

1. Construire les traces du plan P et celles du plan Q .

2. Déterminer l'épure de la droite D , intersection des plans (P) et (Q) .

3. Soit A et B les traces de la droite D . A l'aide d'une rotation faire apparaître la vraie grandeur du segment AB .

11.4 On prendra pour unité dans cette épure 2 centimètres.

a) Soit (P) le plan d'équation

$$5x + 6y - 4z + 6 = 0.$$

b) Soit I le point de coordonnées $(2, 0, 0)$.

c) Soit M le point de coordonnées $(2, 3, 1)$.

1. Construire les traces du plan (P) .

2. Parmi les images de (P) dans les rotations d'axe vertical passant par I , il existe deux plans de bout. Construire un de ces plans.

3. Mettre en évidence, sur l'épure la distance du point M au plan (P) .

11.5 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'axes Ox, Oy, Oz . L'unité de longueur est le centimètre. Le point O est placé au centre de la feuille. La ligne de terre $y'Oy$ est parallèle au petit côté de la feuille. Les plans xOy et yOz sont respectivement le plan horizontal de projection et le plan frontal de projection. L'axe Ox est dirigé vers le bas, l'axe Oy vers la droite et l'axe Oz vers le haut de la feuille.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant les points $A(0, -5, 0)$, $B(5, 0, 0)$ et $C(1, 0, 2)$.

2. Construire les traces du plan P .

3. On considère la verticale Δ passant par le point $D(2, 2, 0)$; soit r la rotation d'axe Δ orienté par $\vec{k}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$; soit $P_1 = r(P)$. Construire les traces de P_1 ; que constate-t-on? En déduire la distance du point D au plan P .

(D'après Bac. E. Session de remplacement. Paris 1980.)

11.6 On considère les points $A(2, -4, 2)$, $B(3, 6, 6)$ et $C(7, -4, 2)$.

1. Tracer l'épure du point $C(6, 3, z)$ sachant que la distance des points A et D est égale à la distance des points B et C et que la cote z de C est inférieure à celle de B .

On pourra effectuer une rotation autour de la verticale passant par B .

2. a) Tracer l'épure du barycentre du système pondéré $\{(A, 1); (B, 4)\}$.

b) Tracer l'épure du barycentre du système pondéré $\{(B, 2); (C, 3)\}$.

c) En déduire l'épure du barycentre du système pondéré

$$\{(A, 1); (B, 2); (C, 3); (D, 4)\}.$$

Rabatement

11.7 On donne les points $A(6, 4, 2)$; $B(4, 3, 1)$, $C(2, 7, 5)$. Soit (P) le plan contenant ces trois points.

1. Déterminer les projections frontales et horizontales des points A , B et C . Déterminer les traces du plan P . Que peut-on en conclure?

2. Représenter à l'aide d'un rabattement le triangle ABC en « vraie grandeur ».

11.8 L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est le plan horizontal de projection. Le point O est au centre de la feuille. L'unité de longueur est le centimètre.

On considère les points $A(3, 2, 5)$; $B(6, 0, 0)$; $C(2, -3, 1)$.

1. Construire les épures des points A , B , C ainsi que l'épure (h_b, h'_b) de l'horizontale du plan (A, B, C) passant par B .

2. Rabattre les points A , B , C sur le plan horizontal de projection en prenant l'horizontale (h_b, h'_b) pour charnière et de façon que a_1 (rabattement de A) et a (projection horizontale de A) soient de part et d'autre de h_b .

3. Construire l'épure (k, k') du point K , intersection des hauteurs du triangle ABC puis l'épure de la perpendiculaire en K au plan (A, B, C) .

(Exercice Bac. E. Bordeaux 1982.)

11.9 Soit E un espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'unité de longueur est le centimètre. On considère le plan π de E dont une équation cartésienne est

$$2x - 3y + 6z - 12 = 0.$$

1. Construire les traces du plan π en prenant pour plan horizontal de projection le plan d'équation $z = 0$ et pour plan frontal de projection le plan d'équation $x = 0$.

2. Soit M le point de π dont les coordonnées sont $(3; 2; 2)$.

a) Construire les projections (h, h') de l'horizontale H de π passant par M et celles (δ, δ') de la perpendiculaire Δ à H contenue dans π et passant par M .

b) Construire les projections des sommets $ABCD$ du carré de centre M ayant ses diagonales « portées » par H et Δ sachant que A et B appartiennent à H et $d(A, M) = 3$ cm. On pourra utiliser un rabattement en expliquant brièvement les constructions effectuées.

(Exercice Bac. E. Bordeaux 1980.)

11.10 Dans cette épure l'unité de longueur est 2 cm.

On considère le plan (P) d'équation

$$2x - 2y + 3z - 6 = 0.$$

On note A et C les deux points de (P) dont les projections horizontales sont respectivement

$$a(x = 3, y = 0) \text{ et } c(x = 3, y = 3).$$

1. Mettre en place, sur l'épure, la trace horizontale et la trace frontale de (P) , les points a et c . Construire les projections frontales a' et c' de A et C .

2. A l'aide d'un rabattement du plan (P) sur le plan (xOy) déterminer les projections b , b' , d , d' des deux points B et D du plan (P) tels que les points A , B , C , D soient les sommets consécutifs d'un carré (AC sera donc une diagonale du carré).

11.11 Soit les points $B(3; 2; 2)$, $C(1; -2; 2)$, $E(5; 0; 3,5)$.

1. Construire l'épure des traces du plan Q médiateur du segment BC .

2. Déterminer l'épure de l'intersection du plan Q et du plan P défini par les points B , C , E .

3. Construire l'épure du triangle ABC , équilatéral, contenu dans le plan P dont un côté est BC , tel que la cote de A soit supérieure à 2.
(On pourra utiliser un rabattement autour de BC .)

11.12 On donne les points $M(7, -3, 4)$, $N(1, 2, 4)$, $I(3, -1, 5)$.

1. Que peut-on dire de la droite déterminée par M et N ?

2. La projection horizontale a d'un point A du plan (M, N, I) a pour coordonnées $(3, -4, 0)$. Déterminer la projection frontale a' du point A .

3. Dans le plan (M, N, I) on considère le triangle équilatéral centré en I et dont un sommet est le point A ci-dessus. Soit B et C les deux autres sommets.

En effectuant un rabattement du plan (M, N, I) autour de la droite (MN) , déterminer le rabattement (a_1, b_1, c_1) du triangle équilatéral (A, B, C) sur le plan horizontal.

4. En déduire les projections horizontale et frontale du triangle (A, B, C) .

11.13 L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'unité de longueur est le centimètre.

Le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est le plan horizontal de projection et le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$ est le plan frontal de projection.

Le point O est placé à 3 cm du bord gauche de la feuille et à 15 cm au moins du bord inférieur de la feuille.

L'axe $(O, \vec{i})$ est dirigé vers le bas, $(O, \vec{j})$ vers la droite et $(O, \vec{k})$ vers le haut de la feuille

1. Placer les points $A(3, 3, 5)$; $B(10, 1, 2)$ et $C(0, 9, 2)$ et construire les traces horizontale et frontale du plan P déterminé par les trois points A , B et C .

2. On rabat le plan P sur le plan horizontal contenant (BC) . Construire le rabattement de (AB) . En déduire la distance du point C à la droite (AB) .

(Exercice Bac. E. Antilles-Guyane 1981.)

Mesures en « vraies grandeurs »

11.14 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est le plan horizontal de projection et $(O, \vec{j}, \vec{k})$ le plan frontal de projection. Le point O est à gauche de la feuille et à mi-hauteur la ligne de terre définie par $(O, \vec{j})$ est le petit axe de la feuille. On prendra 2 cm pour unité.

1. a) Construire les traces du plan R dont une équation cartésienne est

$$x - 2y + 2z = 0.$$

b) Tracer les projections de la droite Δ issue du point $\Omega \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et orthogonale au plan R.

c) Déterminer sur l'épure l'intersection H de R et de Δ .

d) Par la méthode de votre choix, donner une valeur approchée de α , distance de Ω au plan R, cette valeur étant mesurée sur l'épure.

2. On se propose dans cette question de vérifier par le calcul les résultats obtenus précédemment, pour cela on déterminera successivement :

a) une représentation paramétrique de la droite Δ ,

b) les coordonnées du point H,

c) la distance $d(\Omega, R)$ de Ω au plan R que l'on comparera avec la valeur mesurée.

(Exercice Bac. E. Besançon 1982.)

11.15 On considère les points A, B, C, I définis par leurs coordonnées $A \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $B(7, 0, 0)$, $C(3, 4, 5)$, $I(4, 2, 8)$.

1. Placer sur l'épure les couples (a, a') , (b, b') , (c, c') , (i, i') représentations des points A, B, C et I de l'espace. Construire les traces $(\alpha P, \alpha P')$ et $(\alpha Q, \alpha Q')$ du plan (π) défini par les points ABC.

2. Faire apparaître sur l'épure en vraie grandeur, la distance du point I au plan (π) .

11.16 On considère la droite (L) définie par les équations paramétriques :

$$x = p, \quad y = -p, \quad z = 6 - 3p.$$

1. Construire l'épure (l, l') de la droite (L).

2. Construire les traces du plan (Q), passant par (L) et dont les horizontales sont perpendiculaires à (L).

3. Construire la perpendiculaire Δ abaissée du point $M(2, 4, 2)$ sur le plan (Q).

4. Déterminer, par une méthode de géométrie descriptive, la distance de M au plan (Q).

11.17 Dans cette épure le point O est placé à 5 cm du bord gauche de la feuille et à 10 cm du bas de la feuille.

Une pyramide SABCD a pour base un carré ABCD situé dans le plan horizontal de projection et dont la longueur du côté est 5 cm.

1. Construire SABCD sachant que :

— A a pour coordonnées $(4, 0, 0)$;

— B est sur la ligne de terre et son ordonnée est positive;

— l'abscisse de C est positive;

— la cote de S est 5 et la projection orthogonale de S sur le plan horizontal est le centre du carré ABCD.

2. Construire les traces du plan SCD.

3. Déterminer la distance du point O au plan SCD. Expliquez brièvement la méthode utilisée.

11.18 On donne

1. le point A, de coordonnées $(6, 2, 9)$;

2. le plan (P), dont les intersections avec les plans xOy et yOz du repère sont respectivement les droites d'équations

$$3x - 4y = 0 \quad \text{et} \quad 2y - 5z = 0.$$

Déterminer la droite passant par le point A et orthogonale au plan (P), la projection orthogonale B du point A sur le plan (P) ainsi que la distance du point A au plan (P).

11.19 L'espace E est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le centimètre est l'unité de longueur.

Les plans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O, \vec{j}, \vec{k})$ sont respectivement le plan horizontal et le plan frontal de projection. L'origine est placée à 3 cm du bord gauche de la feuille et la ligne de terre $(O, \vec{j})$ est parallèle au petit côté.

Soit le plan π d'équation :

$$3x - 4y + 6z - 12 = 0$$

et soit les trois points :

$$A(3; 0; -3), \quad B(1; 7; 4), \quad C\left(4; \frac{13}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

1. Représenter les traces horizontale $(\alpha P, \alpha P')$ et frontale $(\alpha Q, \alpha Q')$ du plan π .

2. Construire l'épure du barycentre G du système constitué par les points A, B et C, affectés respectivement des coefficients 1, 1 et 2.

3. A l'aide d'un procédé de géométrie descriptive que le candidat précisera faire apparaître sur l'épure :

a) l'angle φ du plan π avec le plan horizontal de projection;

b) la distance du point G au plan π .

(Bac E. Session de remplacement. Amiens 1981.)

Représentation d'un cercle

11.20 On considère le triangle (ABC) défini par les points suivants :

$$A(6, 0, 6), \quad B(2, -2, 2) \quad \text{et} \quad C(1, 3, 2).$$

Construire puis mesurer à 1° près, chacun des angles (AB, AC), (BC, BA), (CA, CB).

Construire le centre du cercle circonscrit au triangle (A, B, C).

11.21 Construire les points $A(2, -1, 0)$, $B(3, 2, 4)$, $C(1, \frac{13}{2}, 10)$.

Montrer que le plan P contenant A , B et C est de bout.

Construire l'épure d'un cercle de centre B et de rayon 3 contenu dans P .

A l'aide d'un rabattement on construira les projections des points du cercle de cote 2, ainsi que la tangente en ces points.

11.22 Représenter, sur l'épure, les points A , B , C de coordonnées respectives

$$(4, 2, 0); \quad (4 + 2\sqrt{2}, 4, 2); \quad (4, 6, 4).$$

1. Déterminer les traces du plan $\mathcal{P}$ qui contient les trois points A , B et C .

2. Représenter les projections du cercle (Γ) du plan $\mathcal{P}$ qui passe par les points A , B et C .

11.23 Construire les points $A(3, -6, 7)$, $B(6, 0, 2)$, $C(3, 4, 5)$.

Démontrer que le triangle (A, B, C) est rectangle en B .

Dans le plan perpendiculaire en B à (BC) , on considère le cercle (Γ) de diamètre $[AB]$.

Construire les projections horizontale et frontale de ce cercle, ainsi que les axes de ces projections. Construire enfin les tangentes à (Γ) en A et B .

11.24 On donne, par leurs coordonnées, les points

$$A(9, -1, 4), B(3, -1, 4), C(9, 7, 4), D(9, 3, 4 + 4\sqrt{3}).$$

1. Il existe un cercle (Γ) passant par les points A , B , C et un cercle (Δ) passant par les points A , B , D .

Déterminer leurs centres respectifs I et J .

Montrer qu'il existe une rotation, que l'on précisera, qui transforme le cercle (Δ) en le cercle (Γ) .

2. Représenter sur l'épure chacun des cercles (Γ) et (Δ) , par ses projections horizontale et frontale.

11.25 Pour cette épure, on placera la ligne de terre à 8 cm du bord supérieur et le point O à 1 cm du bord gauche.

On donne les trois points A , B et C dont les coordonnées sont respectivement $(4, 4, 6)$, $(10, 6, 1)$ et $(3, 13, 1)$.

1. Construire l'épure du centre Ω du cercle (Γ) circonscrit au triangle (ABC) .

2. Construire le grand axe (DE) et le petit axe (FG) de la projection horizontale de ce cercle.

Problèmes posés au Concours général

Premier problème

La rigueur des démonstrations et le soin apporté à leur rédaction seront des éléments importants d'appréciation.

Les trois problèmes proposés, notés I, II et III, sont indépendants, tant du point de vue des résultats que de celui des notations.

Quels que soient les réels λ et μ tels que $\lambda < \mu$, on note $]\lambda, \mu[$ l'ensemble $\{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda < x < \mu\}$, et $[\lambda, \mu]$ l'ensemble $\{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda \leq x \leq \mu\}$.

Dans le problème I, tout groupe est désigné par la même lettre que l'ensemble de ses éléments. Soit G un groupe et $\mathcal{A}$ une partie de G ; le plus petit (au sens de l'inclusion) des sous-groupes de G qui contiennent $\mathcal{A}$ est, par définition, le sous-groupe de G , « engendré par $\mathcal{A}$ ».

I

Soit l'espace $\mathcal{E}$ associé à l'espace vectoriel E . On note $\mathcal{D}$ le groupe des déplacements de $\mathcal{E}$, et $\mathcal{R}$ le groupe des rotations de E (endomorphismes associés aux déplacements).

On considère, dans E , deux vecteurs unitaires indépendants $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et, dans $\mathcal{E}$, deux droites U et V , non concourantes, qui admettent $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour vecteurs directeurs respectifs. On note A le point de U et B le point de V tels que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. On considère, dans l'ensemble $\mathcal{R}$, la partie $\mathcal{S}$ constituée des rotations qui envoient le vecteur $\vec{u}$ sur le vecteur $\vec{v}$. On note $\mathcal{G}$ le sous-groupe de $\mathcal{R}$, engendré par $\mathcal{S}$.

a) Montrer que toute rotation vectorielle ρ telle que

$$\rho(\vec{u}) = \vec{u} \quad \text{ou} \quad \rho(\vec{u}) = \vec{v}$$

appartient à $\mathcal{G}$.

b) $\mathcal{G}$ est-il égal à $\mathcal{R}$?

2. On considère la partie $\mathcal{U}$ de l'ensemble $\mathcal{D}$ constituée des vissages qui envoient la droite U sur la droite V et dont les axes rencontrent chacune des droites U et V . On note $\mathcal{K}$ le sous-groupe de $\mathcal{D}$, engendré par $\mathcal{U}$.

a) Montrer que toute rotation affine d'axe U ou d'axe V appartient à $\mathcal{K}$.

b) Montrer que toute translation appartient à $\mathcal{K}$.

c) $\mathcal{K}$ est-il égal à $\mathcal{D}$?

II

Dans ce problème, on pourra utiliser le résultat suivant :

Quels que soient les réels x et y , il existe un réel z , compris entre x et y , tel que

$$\sin x - \sin y = (x - y) \cos z.$$

a et b désignant des suites réelles, on considère les suites réelles u et v définies par leurs premiers termes respectifs u_0 et v_0 et par la propriété

($\forall n \in \mathbb{N}$)

$$(u_{n+1} = a_n u_n + b_n \sin v_n \text{ et } v_{n+1} = a_n v_n + b_n \sin u_n).$$

1. On suppose que les suites a et b satisfont à la propriété

$$(\exists k \in]0, 1[), (\forall n \in \mathbb{N}) : (|a_n| + |b_n| \leq k).$$

Les suites u et v sont-elles convergentes? (On pourra considérer la suite de terme général $|u_n| + |v_n|$.)

2. On suppose que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \left(a_n = \frac{1}{2} \text{ et } b_n = \frac{1}{2} \right)$$

et que $0 \leq u_0 \leq v_0 \leq \pi$.

Les suites u et v sont-elles convergentes?

3. On suppose que

($\forall n \in \mathbb{N}$) :

$$\left(b_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} \text{ et } a_n = 1 - b_n \right)$$

et que $0 < u_0 < v_0 < \frac{\pi}{2}$.

a) Étudier la suite s telle que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \left(s_n = \sum_{p=0}^n \ln(1 - 2b_p) \right).$$

b) Montrer que les suites u et v sont convergentes.

c) Montrer que les limites des suites u et v sont distinctes.

III

1. Établir la propriété

$$(\forall \beta \in]0, \pi[), (\forall t \in]0, \beta[) : \sin t < \frac{\sin \beta}{\beta} t.$$

2. Montrer qu'il existe un seul réel α tel que

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \text{et} \quad \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Établir les deux propriétés

$$\frac{5\pi}{8} < \alpha < \frac{2\pi}{3}; \quad \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \pi.$$

3. Étudier les variations de l'application f de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$(\forall x \in [0, \pi]) : \left\{ f(x) = \frac{\alpha}{\sin \alpha} \sin \left(\frac{\alpha \sin x}{\sin \alpha} \right) \right\}.$$

4. Établir la propriété

$$(\forall x \in]0, \pi - \alpha[) : (f(x) > x).$$

5. Étudier le signe de la différence $(f(x) - x)$, lorsque le réel x décrit l'intervalle $[\pi - \alpha, \pi]$.

Suggestion : étudier les variations de l'application φ de $[\pi - \alpha, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$(\forall x \in [\pi - \alpha, \pi]) : (\varphi(x) = f(x) - x).$$

6. Tracer soigneusement, sur un même graphique, la courbe représentative de la fonction f , et celle de l'identité sur $[0, \pi]$.

7. Étudier la suite réelle w , dont le premier terme w_0 appartient à l'intervalle $]0, \pi[$, telle que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \left(w_{n+1} = \frac{\alpha}{\sin \alpha} \sin w_n \right).$$

(Concours général 1978.)

Deuxième problème

Chacun des résultats indiqués dans l'énoncé peut être admis pour l'étude d'une question ultérieure. Il est conseillé d'illustrer les démonstrations par des figures claires et bien disposées, et de préciser les notations, non fournies par l'énoncé, dont on se servirait.

Dans tout le problème II est un plan euclidien orienté. Si X, Y désignent deux parties de Π , $X \setminus Y$ désigne l'ensemble des éléments de X qui ne sont pas éléments de Y .

I

1. Sur un cercle Γ du plan Π on considère quatre points B, C, B_1, C_1 tels que les droites BB_1 et CC_1 soient parallèles. On convient dans ce qui suit, si U, V sont des points de Γ , d'appeler droite (UV) la droite qui coupe Γ en U et V quand ces points sont distincts, la tangente à Γ en U quand ils sont confondus.

Soient S et T deux points de Γ .

On suppose que les droites (SC) et (TB) se coupent en un point J , et que les droites (SB_1) et (TC_1) se coupent en un point K . Montrer que les droites JK et BB_1 sont parallèles.

[Indication : On pourra faire intervenir une rotation ρ telle que $C = \rho^2(B)$ et $B_1 = \rho^2(C_1)$, observer alors qu'il existe une homothétie ou une translation envoyant $\rho(S)$ sur $S, \rho^{-1}(T)$ sur T , et s'intéresser au transformé de $\rho(B)$].

Examiner brièvement la disposition des droites $(SB_1), (TC_1)$ lorsque les droites $(SC), (TB)$ sont parallèles.

2. On se donne dans Π le cercle Γ , une droite Δ , un point P de $\Gamma \setminus \Delta$, un point P' de $\Delta \setminus \Gamma$.

On associe, sauf impossibilité, les points M de Γ et M' de Δ par le procédé suivant : Q étant le point de Γ tel que (QM) passe par P' , M' est l'intersection de Δ et (PQ) . On note $M' = \varphi(M)$. Quel est le point $\varphi(P)$?

Soit σ la symétrie orthogonale par rapport au diamètre de Γ perpendiculaire à Δ . Montrer qu'il existe un point A de Γ vérifiant la propriété : pour tout point M de Γ ayant un associé, cet associé $\varphi(M)$ appartient à la droite $(A\sigma(M))$. Examiner la situation d'impossibilité; établir que φ est une bijection de $\Gamma \setminus \{A\}$ sur Δ .

3. Soit trois points $M_k (1 \leq k \leq 3)$ de $\Gamma \setminus \{A\}$ et leurs images $M'_k = \varphi(M_k)$ dans l'application ci-dessus.

Démontrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

M_1, M_2, M_3 sont des points alignés; M'_1, M'_2, M'_3 sont des points alignés.

Si l'une de ces propositions est réalisée, que peut-on dire des points M_1, M_2, M_3 ?

4. Considérant six points distincts $M_k (1 \leq k \leq 6)$ de Γ , montrer que si M_1M_2 et M_4M_5 se coupent sur Δ ainsi que M_2M_3 et M_5M_6 , alors M_3M_4 et M_6M_1 se coupent sur Δ ou sont parallèles à Δ .

II

On suppose désormais que Γ est un cercle de rayon unité, et Δ un diamètre de ce cercle. On choisit un repère orthonormé direct tel que, tout point de Π étant déterminé dans ce repère par son affixe complexe, le centre O de Γ ait pour affixe zéro, et tout point de Δ une affixe réelle.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\bar{z}$ le conjugué de l'élément z de $\mathbb{C}$, $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes z vérifiant $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

1. Soit u un élément non réel de $\mathbb{U}$ et u' un réel distinct de 1 et -1 . La similitude directe qui transforme -1 en u , et u' en 1, possède un élément invariant (centre); le déterminer en fonction de u et u' , calculer son module.

2. Soit α un élément non réel de $\mathbb{U}$, et τ la bijection de $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ définie par :

$$z \mapsto \tau(z) = \frac{\alpha z - 1}{z - \alpha}.$$

a) Calculer $\tau(-1)$ et $\tau(1)$ et montrer que $\tau(u)$ est réel lorsque u est élément de $\mathbb{U} \setminus \{\alpha\}$. Quand u^2 est distinct de 1, quel est l'élément invariant de la similitude directe qui transforme -1 en u et $\tau(u)$ en 1?

b) Montrer que si u est élément de $\mathbb{U} \setminus \{\alpha\}$,

$$\frac{1}{\frac{1}{u} + \alpha} \text{ est un nombre réel.}$$

Donner une description géométrique de la restriction de τ à $\mathbb{U} \setminus \{\alpha\}$ en utilisant la partie I.

c) Soient u, v, w des éléments de $\mathbb{U}$. Montrer, lorsque ces rapports sont définis, que

$$\frac{\tau(u) - v}{\tau(u) - w}, \quad \frac{\tau(v) - w}{\tau(v) - u}, \quad \frac{\tau(w) - u}{\tau(w) - v}$$

sont tous les trois réels ou tous les trois non réels.

III

Les notations de la partie II sont conservées; néanmoins les quatre premières questions ci-dessous se détachent de ce qui précède.

Soit l'application θ de $\mathbb{U} \setminus \{\alpha\}$ dans $\mathbb{C}$:

$$u \mapsto \theta(u) = u + \tau(u).$$

On note $M(u)$ le point d'affixe u , $N(u)$ le point d'affixe $\theta(u)$, Σ l'ensemble des points $N(u)$ quand u décrit l'ensemble $\mathbb{U} \setminus \{\alpha\}$.

1. Déterminer le point $N\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, que dans la suite on désigne par I. Établir :

$$\forall u \in \mathbb{U} \setminus \{\alpha\}, \quad \theta(u) = \frac{1 + u\tau(u)}{\alpha}.$$

2. Soit E l'ensemble des complexes z tels que $\frac{1}{z^2}$ soit réel.

$$z - \frac{1}{\alpha}$$

a) Montrer que, pour tout élément u de $\mathbb{U} \setminus \left\{\alpha, \frac{1}{\alpha}\right\}$, le complexe $\theta(u)$ est élément de E .

Déterminer en fonction de u l'angle $(\widehat{IO, IN(u)})$. Pour quelle relation entre u et v les points $N(u)$ et $N(v)$ de Σ sont-ils alignés avec I?

b) Pour u donné dans $\mathbb{U}$, rechercher les réels λ tels que $\frac{1 + \lambda u}{\alpha} \in E$.

c) Considérant l'ensemble $\Sigma^* = \Sigma \setminus \{O, I\}$, démontrer que Σ^* est l'ensemble des points H du plan Π tels que la symétrie de la droite IH par rapport à la droite OH soit parallèle à Δ .

3. Montrer que les quatre points $N(u)$, $N\left(\frac{1}{u}\right)$, $N(-u)$, $N\left(-\frac{1}{u}\right)$ forment en général un trapèze dont les côtés sont tangents à un même cercle.

4. Dessiner l'ensemble Σ dans le cas particulier où $\alpha = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$. On précisera la méthode de construction qui aura permis ce tracé par points.

5. Montrer que $\frac{\theta(u) - \theta(w)}{\theta(u) - \theta(v)}$ est réel si et seulement si $\frac{\tau(u) - w}{\tau(u) - v}$ est réel. On commencera par établir, dès lors que tous les quotients sont définis, l'égalité :

$$\frac{\theta(u) - \theta(w)}{\theta(u) - \theta(v)} = \frac{w - u}{v - u} \cdot \frac{v - \alpha}{w - \alpha} \cdot \frac{\tau(u) \cdot w}{\gamma(u) - v}$$

Étant donné deux points distincts $N(u)$ et $N(v)$ de Σ , étudier l'intersection de Σ et de la droite $N(u)N(v)$.

6. a) On considère sur Σ neuf points N_k ($1 \leq k \leq 9$) tels que (N_1, N_2, N_3) , (N_4, N_5, N_6) , (N_7, N_8, N_9) , (N_1, N_4, N_7) , (N_2, N_5, N_8) soient des triplets de points alignés. Montrer qu'il en est de même pour le triplet (N_3, N_6, N_9) .

b) Aux points N, N' de Σ on associe, lorsque cela est possible, le point noté $N \star N'$ obtenu de la manière suivante : N'' étant le troisième point d'intersection de Σ et de NN' , le point $N \star N'$ est le troisième point d'intersection de Σ et de la droite IN'' .

Comparer les composés $N_1 \star (N_2 \star N_3)$ et $(N_1 \star N_2) \star N_3$ lorsqu'ils existent pour trois points N_1, N_2, N_3 de Σ .

(Concours général 1980.)

Index

A

affinité	160
affiche d'un nombre complexe	11-12
angle d'une similitude directe	218
angle orienté	171-173
antiparallèles (couples de droites)	181
application affine	134-135
application linéaire	79
arguments d'un nombre complexe	18
asymptotes d'une hyperbole	271
automorphisme d'espace vectoriel	86
axe focal	281
axe transverse	271

B

barycentre	119
base	51
base canonique	51-52
bissectrices	172-175

C

centre d'une ellipse	267
centre d'une hyperbole	271
Chasles (relation de)	172-175
combinaison linéaire de vecteurs	45
composantes d'un vecteur	51
conique	263
conjugués (nombres complexes)	13
convexe (partie)	140
coordonnées barycentriques	124
coordonnées d'un vecteur	51
corps commutatif	7-9

D

demi-tour	240
déplacement	189
dimension	72-87
directrice d'une conique	276-281
distance focale	281
droite vectorielle	87

E

ellipse	266
endomorphisme	80
équilatère (hyperbole)	277-281
équibarycentre	121
espace vectoriel	40
Euler (formules d')	18
excentricité d'une conique	277-281

F

famille génératrice	46
famille libre	48
famille liée	48
forme algébrique ou cartésienne de z	11
forme linéaire	80
forme trigonométrique de z	19
foyers d'une conique	276-281

G

Gauss (méthode du pivot de)	63
groupe affine	144
groupe linéaire	96

H

homothétie affine	146
homothétie vectorielle	79
hyperbole	270

I

image d'une application linéaire	81
image d'un nombre complexe	11-12
imaginaire (partie)	11
imaginaire pur	11
involution (application)	107
isobarycentre	121
isogonaux (couples de droites)	181
isométrie affine	185-240
isométrie vectorielle	183-239
isomorphisme d'espaces vectoriels	86

L

Leibniz (fonction scalaire de)	126
Leibniz (fonction vectorielle de)	118

M

matrice canonique	54
matrice-colonne	51
matrice d'une famille de vecteurs	53
matrice-ligne	53
matrice réduite de Gauss	57
médiane (théorème de la)	127
module d'un nombre complexe	15
Moivre (formule de)	22

N

noyau d'une application linéaire	82
----------------------------------	----

O			S	
opérateur	40		scalaire	40
P			similitude directe vectorielle	216
parabole	263		Simson (droite de)	181
paramètre d'une parabole	277		sommets d'une conique	264-267-271
pivot	55		sous-espace vectoriel	43
plan vectoriel	87		sous-espaces vectoriels supplémentaires	98
projection affine	151		symétrie affine	155
projection vectorielle (ou projecteur)	102		symétrie vectorielle	106
R			T	
rabattement	301		translation affine	144
racines carrées d'un nombre complexe	27		translation vectorielle	134
racines $n^{\text{ièmes}}$	32		V	
rapport de similitude	218		vecteur	40
réelle (partie)	11		vecteurs linéairement dépendants	48
retournement	240		vecteurs linéairement indépendants	48
rotation	188-189-245-298		vissage	256

Photo couverture : The Image Bank : Jean Pragen

N° d'éditeur C 33280 I (PF.c.VII) MCP
imprimé en France. Avril 1983
par Mame à Tours (n° 9736)

■ NOUVELLE COLLECTION FERNAND NATHAN

Marc Gourion

Mathématiques Terminales C et E tome 1

Mathématiques Terminales C et E tome 2

Mathématiques Terminales D

Yolande Bellecave

Mathématiques Terminales B

■ Collection "EXERCICES ET PROBLÈMES RÉSOLUS"

Marc Gourion

Terminales C et E tome 1

Terminales C et E tome 2

Terminales D

Cet ouvrage est hors commerce SPECIMEN