

Collection du Conservatoire National des Arts et Métiers
fondée par L. Ragey et publiée sous la direction de G.A. Boutry et P. Guérin

MATHÉMATIQUES

TOME 1

5^e édition

A. HOCQUENGHEM
P. JAFFARD
R. CHENON

éléments
de calcul
différentiel
et intégral

MASSON 

MATHÉMATIQUES

TOME I

ÉLÉMENTS DE CALCUL
DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

Dans la même collection

- MATHÉMATIQUES, par A. HOCQUENGHEM, P. JAFFARD et R. CHENON
Tome 2. – Algèbre linéaire – Représentation des fonctions. Analyse vectorielle – Équations fonctionnelles. 2^e édition entièrement refondue (2^e tirage), 1979, 522 pages, 77 figures.
- INITIATION AUX MÉTHODES DE LA STATISTIQUE ET DU CALCUL DES PROBABILITÉS, par P. JAFFARD, 3^e tirage 1978, 340 pages, 86 figures.

Collection « Comprendre et appliquer »

- PROBABILITÉS. Résumé de cours, exercices, problèmes, par P. JAFFARD. 2^e tirage 1979, 68 pages, 15 figures.
- STATISTIQUES. Résumé de cours, exercices, problèmes, par P. JAFFARD. 2^e tirage, 1981, 56 pages.
- ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. Cours, exercices et tests, par C. GILORMINI et G. HIRSCH. 2^e édition révisée 1980, 56 pages.
- FONCTIONS NUMÉRIQUES D'UNE VARIABLE RÉELLE. Cours, exercices et tests, par C. GILORMINI et G. HIRSCH. 1980, 128 pages, 71 figures.
- CALCUL MATRICIEL. Cours, exercices et tests, par C. GILORMINI et G. HIRSCH. 1977, 112 pages.
- INTÉGRALES SIMPLES. Formulaires commentés. Exercices et tests, par G. HIRSCH et Jocelyne ROUYER, avec la collaboration de Joseph ROUYER. 1974, 84 pages, 18 figures.

Autres ouvrages

- CALCULATRICES DE POCHE ET INFORMATIQUE. Fonctionnement et applications, analyse numérique, par P. VITRANT. 1981, 292 pages, nombreuses figures.
- MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES A LA MÉCANIQUE, par J.-P. LARRALDE (coordonné par), *Collection des Industries mécaniques*, 1981, 124 pages.
- EXERCICES COMMENTÉS D'INFORMATIQUE PROGRAMMATION, par HUA THANH TE, J.-F. DAZY et S. ENSELME, 1981, 288 pages.
- INFORMATIQUE-PROGRAMMATION, par F.H. RAYMOND, 1980, 252 pages.

COLLECTION DU CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS
FONDÉE PAR L. RAGEY
ET PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE G. A. BOUTRY ET P. GUÉRIN

MATHÉMATIQUES

par

A. HOCQUENGHEM,
P. JAFFARD et R. CHENON

TOME I

ÉLÉMENTS DE CALCUL
DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

CINQUIÈME ÉDITION RÉVISÉE ET COMPLÉTÉE

2^e tirage

MASSON
Paris New York Barcelone Milan
Mexico Rio de Janeiro
1981

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés,
réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

© *Masson, Paris, 1975*

ISBN : 2-225-42405-5

MASSON S.A.
MASSON PUBLISHING USA Inc.
TORAY MASSON S.A.
MASSON ITALIA EDITORI S.p.A.
MASSON EDITORES
EDITORIA MASSON DO BRASIL Ltda

120, Bd Saint-Germain, 75280 Paris Cedex 06
133 East 58th Street, New York, N.Y. 10022
Balma 151, Barcelona 8
Via Giovanni Pascoli 55, 20133, Milano
Dakota 383, Colonia Napoles, Mexico 18 DF
Rua da Quitanda, 20/S. 301, Rio de Janeiro, R.J.

AVANT-PROPOS

PENDANT des années, des Maîtres éminents par leur savoir donnent un enseignement que les fondateurs du Conservatoire des Arts et Métiers ont défini dès 1819 comme celui d'une haute école d'application de la science au commerce et à l'industrie.

Ils introduisent dans leurs cours, dès qu'elles ouvrent la voie à quelque progrès technique, les acquisitions nouvelles. Ils méditent et améliorent continûment la clarté de leurs leçons pour les rendre plus fécondes. Et des foules croissantes de jeunes techniciens suivent ces cours du soir en volontaires assidus : 22 000 élèves fréquentent en 1970 les quelque 110 cours donnés dans la vieille maison de la rue Saint-Martin.

La compétence professionnelle de ces techniciens grandit grâce aux lumières de la science, elle devient disponible pour mettre en œuvre les perfectionnements technologiques, fondement d'une meilleure productivité.

Mais de ces efforts studieux quelle est la base matérielle, celle à laquelle il est sage de pouvoir faire référence ? Trop souvent des notes prises dans des amphithéâtres surchargés ou des polygraphies assez encombrantes et fragiles.

Nous avons pensé que le moment était venu de publier en une Collection d'ouvrages durables des enseignements aussi soigneusement élaborés. Telle est la Collection éditée par la librairie Masson.

Certes, nous avons hésité à donner la pérennité du livre à des enseignements que l'évolution scientifique doit tout naturellement affecter. Mais l'extension à l'ensemble du pays, à partir de 1952, de l'effort de Promotion supérieure obstinément poursuivi par le Conservatoire National des Arts et Métiers, la création progressive de plus de 35 centres régionaux associés, fréquentés par 23 000 élèves, le mouvement général qui porte la jeunesse vers l'étude des sciences appliquées, nous ont inspiré confiance.

Nous savons combien sont fructueux les investissements consacrés à la formation du personnel scientifique et technique. Nous connaissons l'étendue des besoins en techniciens supérieurs et en ingénieurs et nous savons que le moyen le plus efficace pour réduire assez rapidement l'insuffisance des effectifs français est justement la mobilisation de la volonté d'étude des hommes de métier en vue de la promotion supérieure du travail.

Il nous est donc permis de penser que les livres de cette Collection pourraient facilement se transformer au rythme de l'évolution.

Nous avons aussi l'espoir de mieux répondre aux légitimes curiosités de nos élèves. Pour être clair et mieux former l'esprit, le cours est obligatoirement un choix appuyé sur un nombre restreint de faits ou d'expériences. De là l'intérêt de pouvoir renvoyer à quelques développements complémentaires, à leur place dans un livre. Car l'étudiant fait ensuite carrière et les livres de sa jeunesse prendront place dans sa bibliothèque personnelle. Ils seront le secours immédiat aux défaillances de mémoire, le recueil offert pour retrouver une information nécessaire à la solution des problèmes de la vie professionnelle.

Louis RAGEY,

Directeur honoraire du Conservatoire National
des Arts et Métiers.

PRÉFACE DE LA PREMIÈRE ÉDITION

LE cours de *Mathématiques I* que publient, en cette année 1962, MM. Hocquenghem et Jaffard, est l'un de ces cours essentiels qui constituent la base, le point de départ obligatoire, d'études courageusement entreprises dans la France entière par un nombre considérable d'auditeurs dont il est superflu de souligner le mérite.

Certains de ces auditeurs sont destinés à s'élever peu à peu à une promotion supérieure et finalement à grossir les rangs d'une élite dont le pays a besoin et qu'il attend. Tout effort pour leur faciliter la tâche et augmenter leur nombre portera ses fruits. Ne serait-ce qu'à ce point de vue, nous devons être reconnaissants aux auteurs de ce livre d'avoir réalisé une œuvre d'une haute utilité.

D'autre part, nous ne sommes plus au temps où, seul, le Conservatoire National des Arts et Métiers organisait des cours du soir. Les Centres Associés se sont multipliés. Dans ces Centres, professeurs et auditeurs se référeront avec profit au livre de MM. Hocquenghem et Jaffard. Ainsi, l'homogénéité de l'enseignement, toujours souhaitable, se renforcera.

La matière traitée est celle qui est imposée par le programme de *Mathématiques de première année*. Elle comporte trois parties : le Calcul différentiel, qui occupe la place la plus importante et qui commande les deux autres : la Géométrie analytique, dans ses éléments les plus indispensables ; le Calcul intégral enfin, dont les applications sont fondamentales dans le métier d'ingénieur.

Des exercices proposés, judicieusement gradués, permettront aux utilisateurs de vérifier que les connaissances théoriques sont bien assimilées, et de mesurer leur force grâce à la progression des difficultés.

La longue expérience d'enseignement des auteurs les a incités à choisir une exposition et une présentation simples et attrayantes, parfaitement adaptées aux buts poursuivis. Souhaitons à leur livre un vif succès.

H. MILLOUX,

Membre de l'Institut,
Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux

INTRODUCTION

LE cours que nous publions aujourd'hui est celui que nous professons au Conservatoire des Arts et Métiers dans la chaire de « Mathématiques (en vue des applications aux arts et métiers) ». Et cela explique la présentation matérielle de ce livre et justifie son contenu.

Chacun des deux tomes de cet ouvrage correspond à l'enseignement d'une année et chacun des chapitres est le développement d'une heure de cours.

Notre intention dans ce premier tome est d'être accessible aux élèves ayant acquis un bagage mathématique voisin de celui du baccalauréat ou des brevets d'enseignement soit industriel, soit commercial ou, enfin, des mathématiques préparatoires aux enseignements du C. N. A. M. Une expérience déjà vieille de plus de dix ans nous a montré que de tels élèves pouvaient en une année scolaire de cours du soir et tout en exerçant leur métier être initiés aux techniques essentielles du calcul différentiel et intégral ainsi qu'à leur illustration géométrique (destinée plus à faciliter la compréhension des théories abstraites que considérée comme un but). La connaissance de cette première année de cours permet aux élèves de commencer à suivre avec profit la plupart des cours scientifiques, à la rigueur même cette connaissance peut suffire à la plus grande partie des besoins des enseignements les moins avancés dans la formulation mathématique (spécialement des enseignements ayant pour base la chimie ou les sciences naturelles).

Du point de vue méthodologique, nous avons essayé le plus possible de donner des définitions précises et de présenter des raisonnements rigoureux. Le danger dans le traitement mathématique d'un problème technique, c'est moins la faute de calcul, dont on finira toujours par s'apercevoir, que la légère faille dans le raisonnement qui conduira à des conclusions erronées. Il faut savoir que la subtilité apparente de certains faits mathématiques n'est pas uniquement un jeu de l'esprit, mais la traduction de difficultés qui se sont présentées au technicien.

Cependant nous n'avons pas perdu de vue que nos étudiants ne considèrent pas les Mathématiques comme un but, mais comme un moyen. Aussi nous est-il arrivé d'énoncer certaines propriétés sans démonstration lorsque ces démonstrations nous apparaissent à la fois trop longues et peu instructives. De même avons-nous volontairement écarté les développements secondaires qui auraient pu masquer les concepts essentiels du cours.

Évidemment, un raisonnement rigoureux exige un langage très dépouillé, et même les logiciens cherchent à réduire le rôle du langage à la définition de

quelques symboles. Nous avons préféré un langage comportant des redites et aussi proche que possible du langage courant. Il est bien connu qu'un des principaux obstacles à l'acquisition des connaissances est la langue ésotérique utilisée par les spécialistes; les mathématiciens ne sont pas les seuls à mériter ce reproche. Nous avons essayé d'éviter cet hermétisme inconscient et c'est une des raisons de l'épaisseur de cet ouvrage.

Du point de vue typographique, nous avons fait imprimer en caractères italiques les énoncés des théorèmes importants ainsi que les idées essentielles, en petits caractères ce que le lecteur pourra sauter à une première lecture (exemples compliqués ou compléments destinés à indiquer aux élèves l'extension de la question envisagée). Chaque chapitre est suivi d'exercices, les plus difficiles sont indiqués par une ou deux étoiles. Enfin, nous avons attaché une grande importance aux calculs numériques (auxquels sont consacrés exclusivement trois chapitres et de nombreux exercices) parce qu'ils sont l'aboutissement normal de toute utilisation des mathématiques.

Nous tenons à remercier M. L. Ragey d'avoir accueilli ce livre dans la Collection qu'il dirige, ainsi que la librairie Masson qui a édité ce livre avec le souci habituel de perfection, caractéristique de cette Maison. Nous sommes particulièrement reconnaissants à M. le Professeur Milloux, si dévoué à la cause de la Promotion Supérieure du Travail, d'avoir accepté de préfacier cet ouvrage.

Pour cette nouvelle édition nous avons tenu compte de l'évolution des programmes de mathématiques dans l'enseignement du second degré. De nombreux chapitres ont été entièrement réécrits. L'appendice qui figurait dans la troisième édition a été incorporé au texte.

A. HOCQUENGHEM, P. JAFFARD et R. CHENON.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS.	Pages v
PRÉFACE DE LA PREMIÈRE ÉDITION.	vii
INTRODUCTION.	ix

LIVRE PREMIER

Calcul différentiel

v RAPPELS. — <i>Ensembles, algèbre, géométrie analytique</i>	1
1. Ensembles (1); 2. Parties d'un ensemble (2); 3. Opérations sur les ensembles (3); 4. Produits d'ensembles (4); 5. Applications et fonctions (5); 6. Relations (8); 7. Loi de composition (11); 8. Groupes (16); 9. Anneaux (17); 10. Corps (19); 11. Loi de composition compatible avec une équivalence (20); 12. Vecteurs (22); 13. La droite réelle (24); 14. Le plan réel (26); 15. Normes, distances et angles (30); <i>Exercices</i> (35).	
CHAPITRE PREMIER. — <i>Dénombrements</i>	42
1. Ensembles finis (42); 2. Ensembles dénombrables (47); <i>Exercices</i> (49).	
CHAPITRE II. — <i>Nombres réels</i>	51
1. Propriétés algébriques (51); 2. Propriétés d'ordre (52); 3. Distances. Propriétés topologiques (53); 4. Suite de nombres réels. Limites (55); <i>Exercices</i> (57).	
x CHAPITRE III. — <i>Généralités sur les fonctions réelles d'une variable réelle (étude locale)</i>	59
1. Limite et continuité (59); 2. Limites infinies, limites à l'infini (61); 3. Théorèmes généraux (63); 4. Applications (66); <i>Exercices</i> (70).	
x CHAPITRE IV. — <i>Généralités sur les fonctions (étude globale)</i>	72
1. Continuité sur un intervalle (72); 2. Inversion d'une fonction (74); 3. Composition de fonctions (78); <i>Exercices</i> (80).	
x CHAPITRE V. — <i>Dérivées</i>	82
1. Définitions (82); 2. Signification géométrique (83); 3. Étude de quelques cas spéciaux (85); 4. Fonction dérivée (86); 5. Calcul des dérivées (87); 6. Dérivée d'une fonction réciproque (89); 7. Dérivée d'une fonction composée (90); 8. Différentielles (90); <i>Exercices</i> (92).	

	Pages
CHAPITRE VI. — <i>Le théorème de Rolle et ses applications.</i>	94
1. Le théorème de Rolle (94); 2. Formule des accroissements finis (96); 3. Variation des fonctions (96); 4. Discussion d'une équation (100); 5. PrIMITIVE d'une fonction (102); 6. Définition géométrique de la pri- mitive (103); <i>Exercices</i> (106).	
CHAPITRE VII. — <i>Logarithmes, exponentielles, puissances.</i>	107
1. Logarithme (107); 2. Exponentielle (109); 3. Puissance (111); 4. Expo- nentielles et logarithmes de base a (112); 5. Fonctions puissances (113); <i>Exercices</i> (115).	
CHAPITRE VIII. — <i>Fonctions trigonométriques, circulaires et hyper- boliques.</i>	117
1. Définition des fonctions trigonométriques (117); 2. La fonction sinus (118); 3. La fonction cosinus et la fonction tangente (121); 4. Remarques sur les dérivées des fonctions trigonométriques (122); 5. Fonction Arc sinus (123); 6. Fonction Arc cosinus (124); 7. Fonction Arc tangente (125); 8. Fonctions hyperboliques (126); 9. Variations de $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{th} x$ (127); 10. Fonctions hyperboliques inverses (128); <i>Exercices</i> (130).	
CHAPITRE IX. — <i>La formule de Taylor et ses conséquences.</i>	134
1. Formule de Taylor (134); 2. Application au calcul des valeurs d'une fonction (135); 3. Comportement d'une fonction près d'un point où la dérivée s'annule (136); 4. Développements limités (137); 5. Obtention de développements limités par la formule de Mac-Laurin (138); 6. Opé- rations sur les développements limités (141); 7. Relation entre les déve- loppements limités de f et de f' (141); 8. Développements limités d'une somme et d'un produit (143); 9. Développement limité d'un quotient (145); 10. Fonction de fonction (147); <i>Exercices</i> (149).	
CHAPITRE X. — <i>Formes indéterminées.</i>	151
1. Définition (151); 2. Forme $\frac{0}{0}$ (151); 3. Forme $\frac{\infty}{\infty}$ (154); 4. Croissances comparées des fonctions puissances, exponentielle et logarithme (155); 5. Forme $0 \times \infty$ (157); 6. Forme $\infty - \infty$ (157); 7. Formes indéter- minées ∞^0 , 0^0 , 1^∞ (159); <i>Exercices</i> (160).	
CHAPITRE XI. ² — <i>Courbes $y = f(x)$.</i>	162
1. Principes généraux (162); 2. Problèmes liés à la tangente (165); 3. Étude des branches infinies (168); <i>Exercices</i> (172).	

LIVRE II

Éléments de calcul intégral

CHAPITRE XII. — <i>Nombres complexes.</i>	175
1. Le corps $\mathbb{C}$ (175); 2. Représentations géométriques (176); 3. Translations et similitudes (182); 4. Formule de Moivre (182); <i>Exercices</i> (185).	

	Pages
CHAPITRE XIII. — <i>Polynômes</i>	187
1. Fonctions polynômes (187); 2. Algorithme de division. Racines d'un polynôme (189); 3. Plus grand commun diviseur (192); 4. Polynôme dérivé. Racines multiples (193); 5. Division des polynômes suivant les puissances croissantes (195); 6. Procédé de sommation (198); <i>Exercices</i> (199).	
CHAPITRE XIV. — <i>Équations algébriques</i>	201
1. Racines d'un nombre complexe (201); 2. Équations algébriques (203); 3. Polynômes à coefficients réels (205); 4. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme (206); 5. Fonctions rationnelles symétriques des racines d'un polynôme (207); <i>Exercices</i> (209).	
CHAPITRE XV. — <i>Fractions rationnelles et fonctions rationnelles</i> . .	211
1. Fractions rationnelles (211); 2. Décomposition en éléments simples (215); 3. Fonctions rationnelles (221); <i>Exercices</i> (222).	
CHAPITRE XVI. — <i>Fonctions à valeurs complexes</i>	223
1. Fonctions complexes d'une variable complexe (223); 2. Fonctions complexes d'une variable réelle (224); 3. Fonction e^{ax} (225); 4. Exponentielle complexe (226); 5. Fonctions trigonométriques et fonctions hyperboliques (227); 6. Fonction logarithmique (230); <i>Exercices</i> (231).	
CHAPITRE XVII. — <i>Intégrales définies</i>	233
1. Définition de l'intégrale définie (233); 2. Propriétés générales de l'intégrale définie (238); 3. Valeur moyenne d'une fonction (240); 4. Dérivée d'une intégrale définie par rapport à sa borne supérieure (241); 5. Changement de variable dans une intégrale définie (242); 6. Intégration par parties (244); 7. Inégalité de Schwarz (247); 8. Formule de la moyenne (248); 9. Cas d'une fonction à valeurs complexes (249); <i>Exercices</i> (250).	
CHAPITRE XVIII. — <i>Primitives simples</i>	252
1. Primitives usuelles (252); 2. Changement de variable (254); 3. Intégration par parties (256); 4. Intégration des polynômes en $\sin x$ et $\cos x$ et des polynômes en $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ (257); 5. Intégration des polynômes en x et e^{ax} (259); <i>Exercices</i> (262).	
CHAPITRE XIX. — <i>Primitives des fractions rationnelles</i>	263
1. Primitive d'une fraction rationnelle (263); 2. Étude d'un cas particulier (266); 3. Fractions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$ (267); 4. Fractions rationnelles en e^x (270); <i>Exercices</i> (271).	
CHAPITRE XX. — <i>Généralisation de la notion d'intégrale définie</i> . .	273
1. Intégrales ayant une borne d'intégration définie (273); 2. Critères de convergence (274); 3. Cas d'une fonction de signe quelconque (277); 4. Intégrales ayant deux bornes infinies (279); 5. Intégrale d'une fonction discontinue (280); <i>Exercices</i> (284).	

	Pages
CHAPITRE XXI. — <i>Équations différentielles du premier ordre</i>	287
1. Définitions (287); 2. Équations linéaires du premier ordre (288); 3. Équations à variables séparées (292); 4. Équations de Bernoulli (293); 5. Équations de Ricatti (294); 6. Conditions initiales (295); <i>Exercices</i> (296).	
CHAPITRE XXII. — <i>Notions sur les équations différentielles d'ordre supérieur au premier</i>	297
1. Généralités sur les équations différentielles d'ordre supérieur à un (297); 2. Cas d'abaissement de l'ordre (297); 3. Équations linéaires (300); 4. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants (305); <i>Exercices</i> (309).	
 <i>LIVRE III</i> 	
<i>Éléments de calculs géométriques</i>	
CHAPITRE XXIII. — <i>Géométrie analytique de l'espace</i>	313
1. Bases et repères (313); 2. Longueurs et angles (315); 3. Produit vectoriel (316); 4. Produit mixte (318); 5. Applications (320); <i>Exercices</i> (324).	
CHAPITRE XXIV. — <i>Dérivées partielles</i>	327
1. Fonctions de plusieurs variables (327); 2. Continuité (329); 3. Dérivées partielles (330); 4. Fonctions composées (333); 5. Formule des accroissements finis généralisés (335); 6. Extremum d'une fonction de deux variables (336); 7. Extremum d'une fonction de plusieurs variables (339); <i>Exercices</i> (340).	
CHAPITRE XXV. — <i>Différentielles</i>	342
1. Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables (342); 2. Changement de variables (345); <i>Exercices</i> (348).	
CHAPITRE XXVI. — <i>Calculs numériques</i>	349
1. Programme de calcul (349); 2. Incertitude absolue et relative sur la mesure d'une grandeur (349); 3. Incertitude due au processus de calcul (351); 4. Usage des tables (353); 5. Inversion de la table (355); 6. Calculs analogiques (357); <i>Exercices</i> (358).	
CHAPITRE XXVII. — <i>Résolution numérique des équations</i>	360
1. Méthodes graphiques (360); 2. Méthodes d'approximation (361); 3. Méthode d'interpolation de Lagrange (362); 4. Méthode de Newton (363); 5. Méthode générale d'itération (364); 6. Système de deux équations (368); <i>Exercices</i> (369).	
CHAPITRE XXVIII. — <i>Vecteurs variables</i>	370
1. Fonctions vectorielles d'une variable (370); 2. Dérivée d'un vecteur (370); 3. Calcul des dérivées (373); 4. Formule de Taylor (375); 5. Allure d'une courbe plane au voisinage d'un point (376); 6. Fonctions vectorielles de deux variables (380); 7. Plan tangent à une surface (381); 8. Plan osculateur à une courbe gauche (384); <i>Exercices</i> (387).	

	Pages
CHAPITRE XXIX. — <i>Construction des courbes paramétriques et polaires</i>	389
1. Principes généraux (389); 2. Points doubles (393); 3. Branches infinies (395); 4. Tracé d'une courbe en coordonnées polaires (397); 5. Points doubles. Branches infinies (399); <i>Exercices</i> (402).	
CHAPITRE XXX. — <i>Courbes d'équation $f(x, y) = 0$. Courbes algébriques. Intégrales abéliennes</i>	405
1. Fonctions implicites (405); 2. Principes généraux de construction (410); 3. Courbes algébriques (414); 4. Courbes du second degré (coniques) (416); 5. Intégrales abéliennes (421); 6. Remarques sur le paragraphe précédent (423); <i>Exercices</i> (426).	
CHAPITRE XXXI. — <i>Courbes définies géométriquement. Enveloppes</i>	430
1. Équations de courbes définies géométriquement (430); 2. Enveloppe d'une famille de courbes définies paramétriquement (435); 3. Enveloppe d'une famille de courbes définies implicitement (438); 4. Développées (442); <i>Exercices</i> (443).	
CHAPITRE XXXII. — <i>Intégrales multiples</i>	446
1. Intégrales doubles (446); 2. Calcul d'une intégrale double (449); 3. Intégrales triples (451); 4. Calcul d'une intégrale triple (453); 5. Application au calcul des volumes (456); 6. Intégrales n -uples (457); <i>Exercices</i> (458).	
CHAPITRE XXXIII. — <i>Applications géométriques des intégrales</i>	460
1. Calcul des aires (460); 2. Longueur d'un arc de courbe (461); 3. Abscisse curviligne (465); 4. Zone d'une surface de révolution (468); 5. Étude différentielle des courbes (470); <i>Exercices</i> (474).	
CHAPITRE XXXIV. — <i>Compléments sur les équations différentielles</i>	476
1. Équations différentielles (476); 2. Exemples de méthodes paramétriques (476); 3. Cas d'abaissement de l'ordre (483); 4. Familles de courbes à un paramètre (485); 5. Interprétation géométrique d'une équation différentielle du premier ordre (487); 6. Courbes définies par une propriété différentielle (489); 7. Trajectoires orthogonales d'une famille de courbes (490); <i>Exercices</i> (492).	
CHAPITRE XXXV. — <i>Résolution numérique approchée des équations différentielles</i>	494
1. Calcul numérique approché d'une intégrale définie (494); 2. Méthodes des rectangles (495); 3. Méthode des trapèzes (497); 4. Méthode de Simpson (498); 5. Exemple (499); 6. Calcul approché des dérivées (500); 7. Résolution approchée d'une équation différentielle du premier ordre par la méthode de Cauchy (501); 8. Méthodes de Runge-Kutta (503); <i>Exercices</i> (505).	
CHAPITRE XXXVI. — <i>Espaces vectoriels</i>	506
1. Les ensembles R^n (506); 2. Les espaces vectoriels R^n (506); 3. Espaces vectoriels réels (507); 4. Sous-espaces vectoriels (509); 5. Dépendance et indépendance linéaire (509); 6. Dimension. Bases (510); 7. Espaces vectoriels complexes (513); <i>Exercices</i> (514).	

	Pages
CHAPITRE XXXVII. — <i>Applications linéaires. Calcul matriciel.</i> . . .	517
1. Applications linéaires (517); 2. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ (519); 3. Composition d'applications linéaires (519); 4. L'anneau $\mathcal{L}(E)$ (520); 5. Représentations matricielles (520); 6. L'espace vectoriel $M_K(p, n)$ (525); 7. L'anneau $M_K(n)$ (525); 8. Inversion d'une matrice (526); <i>Exercices</i> (528).	
CHAPITRE XXXVIII. — <i>Espaces euclidiens</i>	532
1. Espaces euclidiens (532); 2. Norme euclidienne. Orthogonalité (533); 3. Construction de bases orthogonales (535); 4. Bases orthonormées (536); 5. Projections orthogonales (537); <i>Exercices</i> (539).	
CHAPITRE XXXIX. — <i>Changement de base.</i>	542
1. Changement de base (542); 2. Les matrices d'une application linéaire (544); 3. Changement de bases orthonormées (546); <i>Exercices</i> (548).	
<i>Index alphabétique des matières.</i>	551

LIVRE PREMIER

CALCUL DIFFÉRENTIEL

RAPPELS

ENSEMBLES, ALGÈBRE, GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1. — Ensembles.

Nous entendrons par *ensemble* une collection bien définie d'objets. Ces objets seront nommés les *éléments* de l'ensemble.

Étant donné un ensemble E et un objet x on a l'alternative :

ou bien x appartient à E (c'est-à-dire x est un élément de E), ce que l'on écrit :

$$x \in E \quad (\in \text{ est le signe d'appartenance});$$

ou bien x n'appartient pas à E , ce que l'on écrit :

$$x \notin E \quad (\notin \text{ est le signe de non-appartenance}).$$

EXEMPLES. — L'ensemble $\mathbf{N}$ des *entiers naturels*, éléments : 0, 1, 2, 3, ...

L'ensemble $\mathbf{Z}$ des *entiers rationnels*, éléments :

$$\dots - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

L'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres *rationnels*.

L'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres *réels*.

On a :

$$\sqrt{2} \in \mathbf{R}; \quad \sqrt{2} \notin \mathbf{Q}; \quad \frac{2}{5} \in \mathbf{Q}; \quad \frac{2}{3} \notin \mathbf{Z}$$

Les éléments d'un ensemble sont de nature quelconque et non pas nécessairement des « nombres » comme dans les précédents exemples. On peut envisager l'ensemble des points d'un plan, l'ensemble des droites d'un plan, etc.

Ensembles finis. — Si un ensemble ne comporte qu'un *nombre fini* d'éléments, on peut indiquer cet ensemble en écrivant ses éléments dans une accolade. Ainsi :

$$E = \{ 0, 1 \}.$$

L'ordre dans lequel on place les éléments est indifférent $\{ 0, 1 \} = \{ 1, 0 \}$.

L'ensemble n'ayant qu'un seul élément x se note $\{ x \}$. On désigne par $\emptyset$ l'*ensemble vide*, c'est-à-dire l'ensemble n'ayant *aucun* élément.

Égalité. — Si x et y désignent des éléments d'un ensemble E on a l'alternative :

ou bien x et y sont *égaux*, c'est-à-dire désignent le même élément de E , ce que l'on écrit : $x = y$;

ou bien x et y sont *différents* (on dit aussi *inégaux* ou *distincts*), ce que l'on écrit : $x \neq y$.

Cette relation d'égalité possède les propriétés (δ) suivantes (le *signe d'implication* ($\Rightarrow$) est une abréviation de « implique » ou « entraîne »).

$$\begin{array}{llllll} \xi_1 & x = x & & & & \\ \xi_2 & (x = y & \text{et} & y = z) & \Rightarrow & x = z \\ \xi_3 & x = y & \Rightarrow & y = x. & & \end{array}$$

2. — Parties d'un ensemble.

On dit que l'ensemble F est une *partie* de E , ou que F est un *sous-ensemble* de E , ou encore que F est *inclus* dans E si tout élément de F est élément de E . On note alors :

$$F \subset E$$

en utilisant le *signe d'inclusion* ($\subset$). Si F n'est pas inclus dans E on écrit :

$$F \not\subset E.$$

EXEMPLES.

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}; \quad \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}; \quad \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \\ \mathbf{Z} \not\subset \mathbf{N}$$

La relation d'inclusion a les propriétés suivantes (O) :

$$\begin{array}{llll} O_1 & E \subset E & & \\ O_2 & (E \subset F \text{ et } F \subset G) & \Rightarrow & E \subset G \\ O_3 & (E \subset F \text{ et } F \subset E) & \Rightarrow & E = F \end{array}$$

La définition de l'inclusion entraîne que l'ensemble vide est partie de tout ensemble :

$$\emptyset \subset E$$

Ensemble des parties. — Soit $E = \{ a, b, c \}$ un ensemble à 3 éléments.

Un tel ensemble a exactement 8 parties :

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

On peut considérer le nouvel ensemble $\mathcal{P}(E)$ qui a comme éléments toutes ces parties de E .

D'une façon générale, on désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble qui a comme éléments toutes les parties d'un ensemble E .

On a donc :

$$F \in \mathcal{P}(E) \quad \Longleftrightarrow \quad F \subset E$$

3. — Opérations sur les ensembles.

Intersection. — Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E .

On appelle *intersection* de A et de B et on désigne par $A \cap B$ (A « inter » B) l'ensemble des éléments de E appartenant à la fois à A et à B :

$$x \in A \cap B \quad \Longleftrightarrow \quad (x \in A \text{ et } x \in B)$$

D'après cette définition :

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \subset B &\Longleftrightarrow A \cap B = A \end{aligned}$$

En particulier :

$$A \cap \emptyset = \emptyset; \quad A \cap A = A$$

On dira que A et B sont *disjoints* si

$$A \cap B = \emptyset$$

c'est-à-dire si

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad x \notin B$$

EXEMPLE. — n étant un entier naturel ($n \in \mathbf{N}$) on désigne par $n\mathbf{Z}$ le sous-ensemble de $\mathbf{Z}$ formé par les multiples de n , c'est-à-dire les nombres de la forme nx ($x \in \mathbf{Z}$). On a :

$$4\mathbf{Z} \cap 6\mathbf{Z} = 12\mathbf{Z}$$

En effet, les entiers multiples à la fois de 4 et de 6 sont tous les multiples de 12.

Réunion. — Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E . On appelle *réunion* (ou *union*) de A et de B et on désigne par $A \cup B$ l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à l'un au moins des deux sous-ensembles A et B . Par suite,

$$x \in A \cup B \quad \Longleftrightarrow \quad (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

On a :

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \subset B &\Rightarrow A \cup B = B \end{aligned}$$

En particulier :

$$A \cup \emptyset = A; \quad A \cup A = A$$

EXEMPLE.

$$\{a, b, c\} \cup \{a, d\} = \{a, b, c, d\}$$

Pour trois sous-ensembles A, B, C on vérifiera :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Complémentaire. — Soit $A \subset E$.

Par définition, le *complémentaire de A dans E* (ou *complémentaire de A* s'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur E) est le sous-ensemble noté $\complement_E A$, ou $\complement A$, ou $E - A$ (parfois même $\bar{A}$ ou A^c) formé par les éléments de E qui n'appartiennent pas à A . Il est donc défini par :

$$x \in \complement A \quad \Longleftrightarrow \quad (x \in E \quad \text{et} \quad x \notin A)$$

ou encore par les deux égalités simultanées :

$$A \cup \complement A = E \quad \text{et} \quad A \cap \complement A = \emptyset$$

On a :

$$\complement(\complement A) = A.$$

EXEMPLES. — $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z} - \{0\}$ est le complémentaire de $\{0\}$ dans $\mathbf{Z}$ c'est-à-dire l'ensemble des entiers rationnels non nuls.

$\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ est l'ensemble des nombres *irrationnels*.

$\mathbf{Q} - \mathbf{Z}$ est l'ensemble des nombres rationnels non entiers.

Pour deux parties A, B de E on montre facilement les formules de « dualité » :

$$\begin{aligned} \complement(A \cup B) &= (\complement A) \cap (\complement B) \\ \complement(A \cap B) &= (\complement A) \cup (\complement B) \end{aligned}$$

4. — Produits d'ensembles.

Le *produit* $P = E \times F$ de deux ensembles (non vides) est l'ensemble dont les éléments sont tous les *couples* (x, y) formés d'un premier objet $x \in E$ et d'un second $y \in F$.

EXEMPLE.

$$\begin{aligned} E &= \{a, b, c\} \\ F &= \{u, v\} \\ E \times F &= \{(a, u), (a, v), (b, u), (b, v), (c, u), (c, v)\} \end{aligned}$$

Pour $F = E$ on écrira $E \times E = E^2$.

Ainsi $\mathbf{R}^2$ est l'ensemble des couples de nombres réels (x, y) . En « inter-

prétant » x et y comme les coordonnées d'un point M d'un plan, on peut interpréter $\mathbf{R}^2$ comme l'ensemble des points d'un plan (fig. 1).

Plus généralement si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont n ensembles donnés le produit $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est l'ensemble des n -uples $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec $x_i \in E_i$ ($1 \leq i \leq n$).

On fera attention à ne pas confondre les notations $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ordre des x_i est essentiel dans la parenthèse et indifférent dans l'accolade.

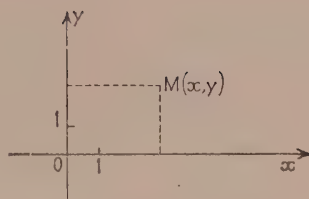


FIG. 1.

5. — Applications et fonctions.

Soient E et F deux ensembles.

Par définition une *application* f définie sur E et à valeurs dans F fait correspondre à tout élément x de E un élément et un seul y de F . On note $y = f(x)$, y est dit l'*image* de x par f . On écrit :

$$x \mapsto f(x) \\ f : E \rightarrow F \quad \text{ou} \quad E \xrightarrow{f} F$$

On appelle *fonction* f de E dans F une application d'une partie A de E dans F . La partie A est dite le *domaine* de f ou ensemble de définition de f :

$$A = \text{dom } f$$

L'ensemble des valeurs de la fonction f est une partie de F que l'on note $f(A)$.

Il faut distinguer avec soin :

f : fonction désignée par ce symbole,

$f(x)$: élément de F .

Cependant, et principalement dans le cas des fonctions numériques (c'est-à-dire, par exemple, des fonctions $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$), la fonction f est souvent définie par la règle opératoire qui fait correspondre à l'élément « variable » x (qui « parcourt » l'ensemble de définition) son image $f(x)$ par f , et bien souvent, par abus de langage, on parle de la fonction $f(x)$ au lieu de dire la fonction f . C'est ainsi que la fonction « élévation au carré » :

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

définie par l'égalité

$$f(x) = x^2$$

est appelée par abus de langage « la fonction $f(x) = x^2$ » ou même « la fonction x^2 ».

EXEMPLE 1. — L'application

$$f : E \rightarrow E$$

définie par

$$f(x) = x$$

est dite l'*application identique* de E . Elle est notée id_E ou 1_E .

EXEMPLE 2. — Une fonction

$$f : E \rightarrow F$$

définie par

$$f(x) = b$$

est dite *constante*. Elle prend l'unique valeur b .

EXEMPLE 3. — Si E et F sont des ensembles finis on peut définir une fonction de E dans F en indiquant la « table » des valeurs de cette fonction. Ainsi :

$$E = \{a, b, c, d\} \quad F = \{u, v, w\}$$

$$E \xrightarrow{f} F$$

définie par :

x	a	b	c	d
$f(x)$	v	u	u	v

soit :

$$f(a) = v, \quad f(b) = u, \quad f(c) = u, \quad f(d) = v$$

EXEMPLE 4. — La fonction de « Dirichlet » est la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 && \text{pour } x \in \mathbf{Q} \\ f(x) &= 0 && \text{pour } x \notin \mathbf{Q} \end{aligned}$$

EXEMPLE 5. — Soit un produit $E \times F$. L'application

$$Pr_1 : (E \times F) \rightarrow E$$

définie par

$$Pr_1(x, y) = x$$

est dite *première projection*.

D'une manière générale, pour tout entier i compris entre 1 et n , l'application :

$$Pr_i : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow E_i$$

définie par

$$Pr_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

est dite la *i -ème projection*.

EXEMPLE 6 (*fonctions de plusieurs variables*). — Une fonction de la forme

$$f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow F$$

peut être considérée comme fonction de la variable $(x_1, \dots, x_n)$ (élément de $E_1 \times \dots \times E_n$) ou comme fonctions des variables $x_1, \dots, x_n$ (éléments des ensembles $E_1, \dots, E_n$).

A la fonction (de deux variables)

$$f : E \times F \rightarrow G$$

et à l'élément a de E on peut associer la fonction (d'une variable) :

$$g : F \rightarrow G$$

définie par

$$g(y) = f(a, y)$$

On la note encore

$$g = f(a, \cdot)$$

De façon analogue, à la fonction (de 4 variables)

$$f : E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4 \rightarrow G$$

et aux deux éléments $a_1 \in E_1$ et $a_3 \in E_3$ sera associée la fonction (de 2 variables)

$$g = f(a_1, \cdot, a_3, \cdot) : E_2 \times E_4 \rightarrow G$$

définie par

$$g(x_2, x_4) = f(a_1, x_2, a_3, x_4)$$

La fonction g est obtenue en « fixant » la première et la troisième variable.

Surjection. — Soit $f : E \rightarrow F$ et $f(E)$ l'ensemble des images par f de tous les éléments de E . On a donc :

$$f(E) \subset F$$

On dit que f est *surjective* (est une surjection) si

$$f(E) = F$$

Dans ce cas, pour tout $y \in F$, il existe au moins un $x (x \in E)$ tel que $y = f(x)$.
Ce que l'on écrit :

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E : y = f(x)$$

En utilisant les abréviations $\exists x$ pour signifier : « il existe au moins un » x et $\forall y$ pour signifier : « pour tout » y .

Si f est surjective on dit que f est fonction de E sur F .

Dans tous les cas f est une surjection de E sur $F' = f(E)$.

EXEMPLES. — La fonction de l'exemple 3 n'est pas surjective car

$$f(E) = \{u, v\} \neq \{u, v, w\}.$$

Les applications Pr_i de l'exemple 5 sont surjectives.

Injection. — Une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite *injective* (ou une injection) si

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

EXEMPLES. — id_E est injective.

La fonction de l'exemple 3 n'est pas injective puisque :

$$f(a) = f(d)$$

Bijection. — Une application $f : E \rightarrow F$ est dite *bijection* (ou une bijection) si f est à la fois surjective et injective. Pour tout $y \in F$ il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$ (car f est surjective) et cet élément x est *unique* (car f est injective). En faisant correspondre x à y on définit une application f^{-1} de F sur E .

f^{-1} se nomme la fonction ou application *reciproque* de f , la fonction id_E est bijective et identique à sa fonction réciproque.

Permutation. — On nomme *permutation* une bijection d'un ensemble sur lui-même. id_E est donc une permutation de E .

Composition de fonctions. — Soient trois ensembles E, F, G et deux fonctions f, g :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

La fonction qui fait correspondre à l'élément x de E l'élément $g(f(x))$ de G , lorsque celui-ci est défini, est dite la *composée* de g et de f . Elle se note $g \circ f$.

EXEMPLE 1. — $E = F = G = \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 & g(x) &= x + 1 \\ (g \circ f)(x) &= x^2 + 1 \\ (f \circ g)(x) &= (x + 1)^2 \end{aligned}$$

On notera donc que les deux expressions $g \circ f$ et $f \circ g$ peuvent avoir toutes deux un sens et être différentes.

On remarque sur cet exemple que la composition de deux applications est une application.

EXEMPLE 2. — Si $f : E \rightarrow F$ est une bijection

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\rightarrow E \\ f^{-1} \circ f &= id_E & f \circ f^{-1} &= id_F \end{aligned}$$

La composition de fonctions est *associative* c'est-à-dire que l'on a :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

En effet, ces deux expressions désignent la même fonction :

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

et

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

6. — Relations.

Une *relation* $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une propriété que peuvent posséder ou non les couples (x, y) d'éléments de E . On écrit :

$x \mathcal{R} y$ si le couple (x, y) possède la propriété.

L'ensemble des couples (x, y) pour lesquels on a $x \mathcal{R} y$ est une partie G de $E \times E$ que l'on nomme le *graphe* de la relation.

La connaissance du graphe G détermine la relation $\mathcal{R}$

$$(x, y) \in G \quad \Longleftrightarrow \quad x \mathcal{R} y$$

EXEMPLE 1. — Ensemble : $\mathbf{R}$.

Relation : $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Graphe G : le cercle C de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 si on interprète (x, y) comme les coordonnées d'un point d'un plan dans un système d'axes orthonormés (fig. 2).

Relation : $x^2 + y^2 - 1 < 0$.

Graphe G : les points « intérieurs » à C .

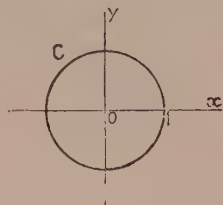


FIG. 2.

EXEMPLE 2. — Ensemble (D) : les droites d'un plan.

Relation d'orthogonalité : $D_1 \perp D_2$ (D_1 perpendiculaire à D_2).

Relation de parallélisme : $D_1 \parallel D_2$ (D_1 parallèle à D_2 ou confondue avec D_2).

EXEMPLE 3. — Une fonction de E dans E définit une relation dont le graphe G dit graphe de la fonction est l'ensemble des couples (x, y) tels que $y = f(x)$.

Une telle relation, dite fonctionnelle, est caractérisée par la propriété

$$((x, y) \in G \quad \text{et} \quad (x, z) \in G) \quad \Rightarrow \quad y = z$$

Relation d'équivalence. — Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite une *relation d'équivalence* si elle possède les 3 propriétés (voir § 1) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \text{ (réflexivité)} &: x \mathcal{R} x & (\forall x \in E) \\ \varepsilon_2 \text{ (transitivité)} &: (x \mathcal{R} y \quad \text{et} \quad y \mathcal{R} z) & \Rightarrow x \mathcal{R} z \\ \varepsilon_3 \text{ (symétrie)} &: x \mathcal{R} y & \Longleftrightarrow y \mathcal{R} x \end{aligned}$$

Une relation d'équivalence est souvent notée $\equiv$ ou $\sim$.

EXEMPLES. — 1° L'égalité est une relation d'équivalence.

2° La relation d'équivalence triviale :

$$x \equiv y \quad (\forall x, y \in E)$$

3° Soit f une application de E dans F .

On peut définir sur E la relation d'équivalence :

$$x \equiv y \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = f(y).$$

4° La relation de parallélisme est une relation d'équivalence. La relation d'orthogonalité n'est pas une relation d'équivalence.

Classes d'équivalence. — Soit $\equiv$ une relation d'équivalence dans E .

Soit $x \in E$. Notons $C(x)$ le sous-ensemble formé par les éléments de E équivalents à x . On a donc :

$$y \in C(x) \quad \Longleftrightarrow \quad (y \in E \text{ et } y \equiv x)$$

$C(x)$ est dite la *classe d'équivalence* de x .

Deux classes d'équivalence $C(x)$ et $C(y)$ sont disjointes si $x \not\equiv y$ et identiques si $x \equiv y$.

En effet :

si $x \not\equiv y$, on aura

$$z \equiv x \quad \implies \quad z \not\equiv y$$

donc

$$C(x) \cap C(y) = \emptyset$$

si $x \equiv y$, on aura

$$z \equiv x \quad \Longleftrightarrow \quad z \equiv y$$

donc

$$C(x) = C(y).$$

Une classe d'équivalence est complètement définie si on se donne un de ses éléments (qui sera dit un *représentant* de cette classe). L'ensemble des classes d'équivalences est une famille $\mathcal{F}$ de parties non vides de E (donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$), qui possèdent donc les propriétés suivantes :

α) deux parties distinctes sont disjointes,

β) tout élément de E appartient à une partie de la famille (donc à une seule en vertu de α).

On nomme *partition* de E toute famille de parties non vides de E qui possède les propriétés α) et β). Les parties sont les classes de la partition.

Une partition de E est donc un partage de E .

Définir une partition de E revient à définir sur E une relation d'équivalence :

$$x \equiv y \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ et } y \text{ appartiennent à la même classe.}$$

EXEMPLE. — Ensemble $\mathbf{Z}$

$$\text{Classes : } \begin{cases} C_0 \text{ ensemble des nombres de la forme } 3k \ (k \in \mathbf{Z}) \\ C_1 \text{ ensemble des nombres de la forme } 3k + 1 \\ C_2 \text{ ensemble des nombres de la forme } 3k + 2 \end{cases}$$

la famille : C_0, C_1, C_2 constitue une partition de $\mathbf{Z}$.

Deux éléments x, y de $\mathbf{Z}$ appartiennent à la même classe, si et seulement si $x - y$ est un multiple de 3, ce que l'on écrit :

$$x \equiv y \text{ (modulo 3)}$$

La relation de congruence ($\equiv$) est la relation d'équivalence définie par la partition.

Ensembles quotients. — $\mathcal{R}$ étant une relation d'équivalence sur l'ensemble E , l'ensemble des classes d'équivalence est noté $E/\mathcal{R}$ et appelé l'*ensemble quotient* de E par $\mathcal{R}$. On a l'application évidente (on dit encore canonique).

$$f : E \rightarrow E/\mathcal{R}$$

définie par

$$f(x) = C(x)$$

f est surjective. On voit alors que la relation d'équivalence définie par :

$$x \equiv y \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = f(y)$$

est précisément la relation $\mathcal{R}$.

EXEMPLE. — Soit sur $\mathbf{R}$ la relation d'équivalence :

$$x \equiv y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbf{Z}$$

On définit une bijection de l'ensemble quotient sur l'ensemble des points d'un cercle orienté en faisant correspondre à la classe $C(x)$ le point d'angle au centre $2\pi x$.

Relation d'ordre. — Une *relation d'ordre* sur E est une relation, en général notée $\leq$, qui a les 3 propriétés suivantes (voir § 2) :

$$\begin{array}{lll} O_1 \text{ (réflexivité)} & : & x \leq x \quad (\forall x \in E) \\ O_2 \text{ (transitivité)} & : & (x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z \\ O_3 \text{ (antisymétrie)} & : & (x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies x = y \end{array}$$

On note : $x < y$ l'ordre « strict » : $x \leq y$ et $x \neq y$.

L'ordre est dit *total* si pour deux éléments quelconques de E on a toujours

$$\begin{array}{ll} \text{soit} & x \leq y \\ \text{soit} & y \leq x \end{array}$$

EXEMPLES. — 1° $\mathbf{R}$ est totalement ordonné par la relation d'ordre habituelle.

2° L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E est ordonné par l'inclusion.

Cette relation n'est pas totale si E a plus d'un élément. Par exemple si $E = \{a, b, c\}$ on a

$$\{a, b\} \not\subset \{a, c\} \quad \text{et} \quad \{a, c\} \not\subset \{a, b\}$$

3° L'ensemble des applications d'un ensemble E dans $\mathbf{R}$ est ordonné par la relation :

$$f \leq g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leq g(x) \quad (\forall x \in E)$$

Cet ordre n'est total que si E n'a pas plus d'un élément.

7. — Loi de composition.

Deux lois de composition sur $\mathbf{N}$ sont familières :

L'addition et la multiplication qui à tout couple d'entiers (x, y) font correspondre respectivement

$$\begin{aligned} \text{la somme :} & \quad s = x + y \\ \text{et le produit :} & \quad p = xy \end{aligned}$$

D'une façon générale une loi de composition sur un ensemble E fait correspondre à tout couple (x, y) d'éléments de E un élément $z = f(x, y)$ de E .

Ainsi une loi de composition est une fonction de $E \times E$ dans E . On note :

$$z = f(x, y) = x \mathbf{T} y$$

en utilisant un symbole d'opération tel que $\mathbf{T}$.

EXEMPLES. — 1° La soustraction définie par :

$$f(x, y) = x - y$$

est une loi de composition sur $\mathbf{Z}$ et sur $\mathbf{R}$ mais non pas sur $\mathbf{N}$ (car $2 - 3 \notin \mathbf{N}$).

2° La division

$$f(x, y) = \frac{x}{y}$$

définit une loi de composition sur $\mathbf{R}' = \mathbf{R} - \{0\}$ mais non pas sur $\mathbf{R}$ (car $\frac{2}{0}$ n'est pas défini) ni sur $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z} - \{0\}$ (car $\frac{2}{3} \notin \mathbf{Z}'$).

3° $f(A, B) = A \cap B$ et $g(A, B) = A \cup B$ définissent deux lois de composition sur l'ensemble des parties de E .

4° On peut définir (arbitrairement) une loi de composition à l'aide d'une « table de Pythagore ». Ainsi pour $E = \{a, b\}$, la table :

$x \backslash y$	a	b
a	b	a
b	b	a

FIG. 3.

qu'il faut lire

	y ↓
$x \rightarrow$	$x \mathbf{T} y$

FIG. 4.

donne :

$$\begin{aligned} a \mathbf{T} a &= b, & a \mathbf{T} b &= a \\ b \mathbf{T} a &= b, & b \mathbf{T} b &= a \end{aligned}$$

5° Soit F l'ensemble des applications de E dans $\mathbf{R}$. De façon naturelle on peut définir sur F les trois lois de composition qui sont l'addition, la soustraction, et la multiplication des fonctions. Les fonctions $f + g, f - g, fg$ sont définies par

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\ (fg)(x) &= f(x)g(x) \end{aligned}$$

La division $\frac{f}{g}$ ne serait définie que pour les fonctions g qui ne s'annulent pas sur E : la division n'est pas une loi de composition sur F .

On utilise de nombreux signes d'opérations ($\circ$, $\times$, $\wedge$, etc.) mais dans bien des cas (s'il n'y a pas de risques de confusion) on écrit simplement xy (notation *multiplicative*) ou $x + y$ (notation *additive*).

Associativité. — Une loi de composition notée $\mathbf{T}$ sur E est dite *associative* si :

$$x \mathbf{T} (y \mathbf{T} z) = (x \mathbf{T} y) \mathbf{T} z \quad \forall x, y, z \in E$$

On voit alors que dans une expression telle que

$$(x_1 \mathbf{T} x_2) \mathbf{T} (x_3 \mathbf{T} x_4)$$

il est inutile de préciser les places des diverses parenthèses, c'est-à-dire que le résultat obtenu est aussi bien égal à :

$$x_1 \mathbf{T} (x_2 \mathbf{T} (x_3 \mathbf{T} x_4))$$

ou à

$$((x_1 \mathbf{T} x_2) \mathbf{T} x_3) \mathbf{T} x_4$$

C'est pourquoi, dans le cas où l'opération est associative, on supprime les parenthèses et on note

$$x_1 \mathbf{T} x_2 \mathbf{T} x_3 \mathbf{T} x_4$$

sans aucune ambiguïté possible.

Par convention :

Une loi notée multiplicativement ou additivement sera toujours supposée associative.

EXEMPLES. — 1° L'addition et la multiplication sur $\mathbf{R}$ sont associatives mais la soustraction n'est pas associative :

$$x - (y - z) \neq (x - y) - z$$

2° Les opérations $\cap$ et $\cup$ sont associatives.

3° La loi donnée ci-dessus par une table de Pythagore n'est pas associative :

$$\begin{aligned} (a \mathbf{T} a) \mathbf{T} b &= b \mathbf{T} b = a \\ a \mathbf{T} (a \mathbf{T} b) &= a \mathbf{T} a = b \end{aligned}$$

Puissances et multiples. — Soit une loi associative définie sur E et notée *multiplicativement*, on définit par récurrence sur l'entier naturel n les *puissances* d'un élément x :

$$\begin{aligned} x^1 &= x \\ x^{n+1} &= x^n x \end{aligned}$$

On montre facilement :

$$(\alpha) \quad x^n x^m = x^{n+m}$$

$$(\beta) \quad (x^n)^m = x^{nm}$$

Pour une loi notée *additivement* on définit de même les *multiples* de x

$$\begin{aligned} 1 \cdot x &= x \\ (n+1)x &= nx + x \end{aligned}$$

les égalités (α) et (β) s'écrivent alors :

$$(\alpha') \quad nx + mx = (n+m)x$$

$$(\beta') \quad m(nx) = (mn)x$$

Élément neutre. — Soit $\mathbf{T}$ une loi de composition sur E . On dit que $e \in E$ est *élément neutre* si

$$x \mathbf{T} e = e \mathbf{T} x = x \quad \forall x \in E$$

L'élément neutre, lorsqu'il existe, est unique.

Soit en effet e et e_1 deux éléments neutres :

$$e_1 \mathbf{T} e = e_1 \quad (\text{car } e \text{ est neutre})$$

$$e_1 \mathbf{T} e = e \quad (\text{car } e_1 \text{ est neutre})$$

donc

$$e_1 = e$$

EXEMPLES. — 1° L'addition sur $\mathbf{N}$ admet 0 comme élément neutre :

$$x + 0 = 0 + x = 0$$

Pour la multiplication 1 est élément neutre

$$x1 = 1x = x$$

2° $\emptyset$ est élément neutre pour $\cup$ sur $\mathcal{P}(E)$.

E est élément neutre pour $\cap$ sur $\mathcal{P}(E)$.

3° F étant l'ensemble des applications de E dans lui-même, la composition des fonctions définit une loi de composition (notée $\circ$) sur F . Pour cette loi id_E est élément neutre :

$$f \circ id_E = id_E \circ f = f.$$

4° La soustraction sur $\mathbf{Z}$ n'a pas d'élément neutre.

Éléments symétriques. — Soit $\mathbf{T}$ une loi de composition sur E ayant un élément neutre e . On nomme *symétrique* de x un élément x' tel que :

$$x' \mathbf{T} x = x \mathbf{T} x' = e$$

Pour une loi associative, un élément symétrique, lorsqu'il existe, est unique.

Si en effet x'' est un second symétrique de x :

$$\begin{aligned} x' \mathbf{T} x \mathbf{T} x'' &= x' \mathbf{T} (x \mathbf{T} x'') = x' \mathbf{T} e = x' \\ &= (x' \mathbf{T} x) \mathbf{T} x'' = e \mathbf{T} x'' = x'' \end{aligned}$$

Il est alors immédiat que :

$$\begin{aligned} e' &= e \\ (x')' &= x \end{aligned}$$

Enfin

$$(x \mathbf{T} y)' = y' \mathbf{T} x'$$

car :

$$(x \mathbf{T} y) \mathbf{T} (y' \mathbf{T} x') = x \mathbf{T} (y \mathbf{T} y') \mathbf{T} x' = x \mathbf{T} e \mathbf{T} x' = x \mathbf{T} x' = e$$

Puissances et multiples négatifs ($n \in \mathbf{Z}$) (Lois associatives à élément neutre).

NOTATION MULTIPLICATIVE. — Le symétrique de x est dit l'*inverse* de x et noté x^{-1} . L'élément neutre est noté 1. On pose :

$$\begin{aligned} x^{-n} &= (x^{-1})^n \\ x^0 &= 1 \end{aligned}$$

On vérifie facilement :

$$\begin{aligned} x^\mu x^\nu &= x^{\mu+\nu} & (\forall \mu, \nu \in \mathbf{Z}) \\ (x^\mu)^\nu &= x^{\mu\nu} \end{aligned}$$

NOTATION ADDITIVE. — Le symétrique de x est dit l'*opposé* de x et noté $-x$. L'élément neutre est noté 0. On pose :

$$\begin{aligned} (-n)x &= n(-x) \\ 0x &= 0 \end{aligned}$$

On vérifie

$$\begin{aligned} \mu x + \nu x &= (\mu + \nu)x \\ \mu(\nu x) &= (\mu\nu)x & (\forall \mu, \nu \in \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

Commutativité. — Une loi $\mathbf{T}$ sur E est dite *commutative* si

$$x \mathbf{T} y = y \mathbf{T} x \quad \forall x, y \in E$$

EXEMPLE. — L'addition et la multiplication sur $\mathbf{R}$ sont commutatives, la soustraction n'est pas commutative.

Si une loi est *associative* et *commutative* on a (en notation multiplicative) :

$$(xy)^n = x^n y^n \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

(en notation additive) :

$$n(x + y) = nx + ny$$

Par convention :

Une loi notée additivement sera toujours supposée commutative.

Distributivité. — Soient deux lois de composition $\mathbf{T}$ et $\mathbf{I}$ sur E . On dit que $\mathbf{T}$ est *distributive* par rapport à $\mathbf{I}$ si :

$$\begin{aligned} x \mathbf{T} (y \mathbf{I} z) &= (x \mathbf{T} y) \mathbf{I} (x \mathbf{T} z) \\ (y \mathbf{I} z) \mathbf{T} x &= (y \mathbf{T} x) \mathbf{I} (z \mathbf{T} x) \end{aligned} \quad \forall x, y, z \in E$$

EXEMPLES. — 1° La multiplication sur $\mathbf{R}$ est distributive par rapport à l'addition :

$$\begin{aligned} x(y + z) &= xy + xz \\ (y + z)x &= yx + zx \end{aligned}$$

mais l'addition n'est pas distributive par rapport à la multiplication.

2° Chaque loi $\cap$ et $\cup$ est distributive par rapport à l'autre

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

8. — Groupes.

Un groupe est un ensemble sur lequel est définie une loi de composition :

- 1) associative,
- 2) à élément neutre,
- 3) telle que tout élément possède un symétrique.

Le groupe est dit commutatif si la loi de composition est commutative.

EXEMPLES. — 1° $\mathbf{Z}$ muni de la loi d'addition est un groupe commutatif, mais $\mathbf{Z}$ n'est pas un groupe pour la multiplication (-1 et $+1$ sont les seuls éléments ayant des inverses dans $\mathbf{Z}$).

2° $\mathbf{R}$ n'est pas un groupe pour la multiplication (car 0 n'a pas d'inverse).

$\mathbf{R}' = \mathbf{R} - \{0\}$ est un groupe pour la multiplication.

3° $E = \{e, a\}$ avec la loi de composition : $ee = aa = e$, $ea = ae = a$ est un groupe commutatif (e élément neutre, $a^{-1} = a$).

4° L'ensemble S des permutations d'un ensemble E forme un groupe pour la loi de composition $\circ$ (l'élément neutre est id_E).

THÉORÈMES. — Soit un groupe G (notation multiplicative). On a :

$$\begin{array}{llll} (1) & ax = b & \iff & x = a^{-1}b \\ (2) & ya = b & \iff & y = ba^{-1} \\ (3) & au = av & \iff & u = v \\ (4) & ua = va & \iff & u = v \end{array} \quad a, b, x, y, u, v \in G$$

Montrons (1)

$$\begin{aligned} b &= ax & \implies & a^{-1}b = a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x = ex = x \\ \text{et} & & & \\ x &= a^{-1}b & \implies & ax = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b \end{aligned}$$

Même démonstration pour (2). Il en résulte (3) et (4) :

$$\begin{aligned} au = av & \iff u = a^{-1}av = ev = v \\ ua = va & \iff u = vaa^{-1} = ve = v \end{aligned}$$

En général $a^{-1}b \neq ba^{-1}$. Cependant pour un groupe commutatif $a^{-1}b = ba^{-1}$ que l'on note alors $\frac{b}{a}$.

Pour un groupe commutatif noté additivement les résultats précédents s'écrivent :

$$a + x = x + a = b \iff x = b + (-a)$$

On note

$$b + (-a) = b - a.$$

Sous-groupe. — Soit H une partie non vide de G (groupe noté multiplicativement). Si $x, y \in H$ on a $xy \in H$ et $x^{-1} \in H$ il en résulte que

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e \in H.$$

H est alors un groupe (car l'associativité sur G entraîne l'associativité sur H).

On dit que H est un *sous-groupe* de G .

EXEMPLES. — 1° L'ensemble e réduit à l'élément neutre de G est un sous-groupe de G ($e^{-1} = e, ee = e$).

2° $\mathbf{Z}$ est un sous-groupe du groupe additif $\mathbf{R}$.

3° Soit $x \in G$ un élément de G , l'ensemble H des puissances x^μ ($\mu \in \mathbf{Z}$) est un sous-groupe de G .

On dit que H est le *sous-groupe engendré* par x

$$x^\mu \cdot x^\nu = x^{\mu+\nu} \in H; \quad (x^\mu)^{-1} = x^{-\mu} \in H.$$

4° $n\mathbf{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbf{Z}$.

Si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes de G il résulte de la définition que $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de G .

On a déjà noté que :

$$4\mathbf{Z} \cap 6\mathbf{Z} = 12\mathbf{Z}.$$

9. — Anneaux.

Par définition, un anneau A est un ensemble sur lequel sont définies deux opérations notées additivement ($x + y$) et multiplicativement (xy) telles que

- 1) A est un groupe commutatif pour l'addition,
- 2) la multiplication est associative,
- 3) la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\begin{aligned} z(x + y) &= zx + zy \\ (x + y)z &= xz + yz \end{aligned}$$

L'anneau est dit commutatif si la multiplication est commutative.

L'anneau est dit unitaire si la multiplication possède un élément neutre (noté 1) et dit l'unité de l'anneau.

EXEMPLES. — 1° L'addition et la multiplication sur $\mathbf{Z}$ font de $\mathbf{Z}$ un anneau commutatif à élément unité.

2° Soit F l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbf{R}$, les opérations $f + g$ et fg définies sur F font de F un anneau commutatif ayant pour unité la fonction constante $f(x) = 1$.

Soit P une partie de E , définissons la fonction :

$$\begin{aligned} f_P(x) &= 1 && \text{pour } x \in P \\ f_P(x) &= 0 && \text{pour } x \notin P \end{aligned}$$

f_P est dite la fonction caractéristique de P (ou souvent l'indicatrice de P , notée alors 1_P). Si $P \neq \emptyset$ et $P \neq E$, on a :

$$f_P \cdot f_Q = 0 \quad \text{où} \quad Q = \complement_E P$$

bien que

$$f_P \neq 0; \quad f_Q \neq 0$$

Ce dernier exemple montre que dans un anneau A il peut y avoir des éléments différents de 0 dont le produit est égal à 0. De tels éléments sont dits des *diviseurs de 0*.

Un anneau A est dit *intègre* s'il est commutatif, unitaire et n'a pas de diviseur de 0, c'est-à-dire si :

$$xy = 0 \quad \Rightarrow \quad (x = 0 \text{ ou } y = 0)$$

L'anneau $\mathbf{Z}$ est intègre mais l'anneau des fonctions de E dans $\mathbf{R}$ n'est pas intègre.

THÉORÈMES. — Dans un anneau quelconque A on a :

- (1) $0x = x0 = 0$
- (2) $x(-y) = -(xy)$
- (3) $z(x - y) = zx - zy$

Dans un anneau A intègre :

- (4) $(ax = ay \text{ et } a \neq 0) \Rightarrow x = y$

Montrons (1) :

$$xy = x(0 + y) = x0 + xy$$

d'où $x0 = xy - xy = 0$ on montre de même $0x = 0$

Montrons (2) :

$$xy + x(-y) = x(y + (-y)) = x0 = 0$$

d'où $x(-y) = -(xy)$

Montrons (3) :

$$z(x - y) = z(x + (-y)) = zx + z(-y)$$

d'où $z(x - y) = zx - zy$

Montrons (4) :

$$ax = ay \implies a(x - y) = 0 \text{ et } a \neq 0 \implies x - y = 0$$

Sous-anneau. — Une partie B de A qui est un anneau est dit un *sous-anneau* de A . Il faut pour cela que B soit un sous-groupe additif de A et que :

$$x \in B \text{ et } y \in B \implies xy \in B$$

ainsi $n\mathbf{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbf{Z}$.

10. — Corps.

Par définition, un corps K est un anneau tel que $K - \{0\}$ est un groupe pour la multiplication.

Dans toute la suite un corps sera supposé commutatif c'est-à-dire tel que la multiplication soit commutative.

EXEMPLES. — 1) L'anneau $\mathbf{R}$ est un corps.

2) Un corps comprend au moins deux éléments : l'élément neutre du groupe additif 0 et l'élément neutre du groupe multiplicatif e (ou 1). L'ensemble $\{0, e\}$ muni des lois :

addition

	0	e
0	0	e
e	e	0

FIG. 5.

multiplication

	0	e
0	0	0
e	0	e

FIG. 6.

est un corps à deux éléments.

On remarque que dans ce corps

$$e + e = 2e = 0$$

Un corps est toujours intègre :

$$(xy = 0 \text{ et } x \neq 0) \implies y = 0$$

En effet comme $x \neq 0$, x^{-1} existe d'où

$$y = x^{-1}.0 = 0$$

Dans un corps l'équation (du premier degré en x) :

$$ax + b = 0 \quad a \neq 0$$

a toujours une solution et une seule :

$$ax + b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ax = (-b) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{(-b)}{a}$$

Considérons le système d'équations à deux inconnues x, y

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = p \end{cases}$$

où a, b, c, d, m, p sont des éléments donnés d'un corps K .

On en déduit

$$d(ax + by) - b(cx + dy) = (ad - bc)x = dm - bp$$

et

$$a(cx + dy) - c(ax + by) = (ad - bc)y = ap - cm$$

d'où si le nombre $\Delta = ad - bc$, dit *déterminant* du système, est non nul :

$$x = (dm - bp)/\Delta \quad \text{et} \quad y = (ap - cm)/\Delta$$

On vérifie que l'on obtient bien ainsi une solution du système.

On montre que le système est impossible ou indéterminé lorsque $\Delta = 0$.

11. — *Loi de composition compatible avec une équivalence.*

Sur un ensemble E une loi de composition $\mathbf{T}$ sera dite *compatible avec une relation d'équivalence* ($\equiv$) si :

$$(x_1 \equiv x_2 \quad \text{et} \quad y_1 \equiv y_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 \mathbf{T} y_1 \equiv x_2 \mathbf{T} y_2$$

On voit alors que la classe d'équivalence $C(x_1 \mathbf{T} y_1)$ ne dépend que des classes $C(x_1)$ et $C(y_1)$ et non pas des représentants x_1 et y_1 . On pourra donc définir une opération (encore notée $\mathbf{T}$) sur l'ensemble quotient en posant :

$$C(x) \mathbf{T} C(y) = C(x \mathbf{T} y)$$

Corps des fractions. — Soit A un anneau intègre. Notons F l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in A$ et $y \in A, y \neq 0$.

On a donc

$$F = A \times (A - \{0\})$$

On peut considérer sur F les opérations :

$$\begin{aligned} (x, y) + (x', y') &= (xy' + x'y, yy') \\ (x, y) \cdot (x', y') &= (xx', yy') \end{aligned}$$

La relation d'équivalence $\equiv$ définie par

$$(x, y) \equiv (x'', y'') \iff xy'' \equiv yx''$$

est alors compatible avec ces deux opérations.

Si $(x, y) \in F$, on note $\frac{x}{y}$ la classe de (x, y) et K l'ensemble quotient.

K se trouve donc muni de deux opérations $+$ et $\cdot$ telles que :

$$\frac{x}{y} + \frac{x'}{y'} = \frac{xy' + x'y}{yy'}$$

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{x'}{y'} = \frac{xx'}{yy'}$$

On voit immédiatement que K est un corps.

L'application

$$\varphi : A \rightarrow K$$

définie par

$$\varphi(x) = \frac{x}{1}$$

est une injection telle que

$$\begin{aligned}\varphi(x + y) &= \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(xy) &= \varphi(x)\varphi(y)\end{aligned}$$

On pourra donc identifier sans ambiguïté l'élément x de A à l'élément $\frac{x}{1}$ de K (par suite $\frac{x}{1}$ sera noté x). Le sous-ensemble A de K sera en fait un sous-anneau du corps K . Le corps K sera dit le *corps des fractions* de A .

A partir de $A = \mathbf{Z}$, on obtient ainsi le corps des nombres rationnels

$$K = \mathbf{Q}$$

Isomorphismes. — Soient E et E' deux ensembles munis respectivement de deux lois de composition $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$. On appelle *isomorphisme* de E sur E' une bijection $\varphi : E \rightarrow E'$ telle que

$$\varphi(x \mathbf{T} y) = \varphi(x) \mathbf{T}' \varphi(y) \quad (\forall x, y \in E)$$

La loi de composition $\mathbf{T}'$ sur E' sera alors l'image exacte de la loi $\mathbf{T}$. En particulier pour que E' soit un groupe il faut et il suffit que E soit un groupe.

Signalons que si $E = E'$ et si la loi $\mathbf{T}'$ est la même que la loi $\mathbf{T}$, l'isomorphisme est dit un *automorphisme*.

Cette notion s'étend sans difficulté au cas où E et E' sont munis de plusieurs opérations internes. C'est ainsi qu'un isomorphisme d'un anneau A sur un anneau A' est une bijection $\varphi : A \rightarrow A'$ telle que

$$\left. \begin{aligned}\varphi(x + y) &= \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(xy) &= \varphi(x)\varphi(y)\end{aligned} \right\} (\forall x, y \in A)$$

12. — *Vecteurs.*

Par définition, un *vecteur lié* de l'espace (ou d'un plan, ou d'une droite) est un couple de points (A, B) de l'espace (ou d'un plan, ou d'une droite) (c'est pourquoi un vecteur lié est parfois nommé un *bi-point*...).

Le point A est dit l'*origine* du vecteur lié, le point B l'*extrémité*.

La droite AB (déterminée pour $B \neq A$) est dite le *support* du vecteur lié, la longueur du segment AB est dite la *longueur* du vecteur lié.

Les vecteurs (A, A) de longueur nulle sont dits *nuls* (leur support est indéterminé).

Équipollence. — Deux vecteurs liés (A, B) et (C, D) sont dits *équipollents* s'ils remplissent l'une des deux conditions suivantes :

1° ils sont tous deux nuls;

2° aucun des deux n'est nul, leurs supports sont parallèles (c'est-à-dire sans point commun ou confondus), ils ont même sens (c'est-à-dire que le sens de A vers B est le même que le sens de C vers D) et ils ont même longueur.

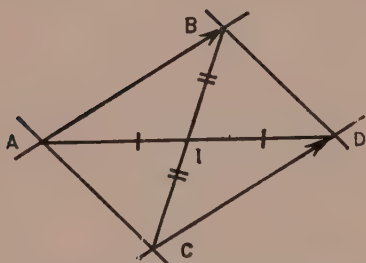


FIG. 7.

On peut résumer la condition 2° en disant que la figure $A B D C$ est un parallélogramme (fig. 7).

On vérifie immédiatement que la relation d'équipollence est une relation d'équivalence (Rappels, § 6).

Vecteurs libres. — On nomme *vecteur libre*, ou plus simplement *vecteur* (de l'espace, d'un plan ou d'une droite), une classe de la relation d'équipollence.

On note $\overrightarrow{AB}$ la classe du vecteur lié (A, B) .

L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie donc que (A, B) et (C, D) sont équipollents.

Tous les vecteurs liés nuls appartiennent à une même classe que l'on note $\vec{0}$ (ou simplement 0 si aucune confusion n'est à craindre).

On désigne souvent un vecteur libre par une seule lettre, soit $\vec{U}$.

A étant un point donné, il existe alors un point B et un seul tel que :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{U}$$

Addition. — Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs. Étant donné un point A , déterminons les points B et C par les égalités :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{U} \quad \overrightarrow{BC} = \vec{V}$$

Le vecteur $\vec{W} = \overrightarrow{AC}$ qui ne dépend que de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et non du point A , est dit la *somme* de ces deux vecteurs.

On le note $\vec{U} + \vec{V}$.

De la définition, résulte la *relation de Chasles* (fig. 8).

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

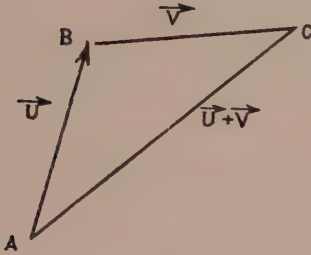


FIG. 8.

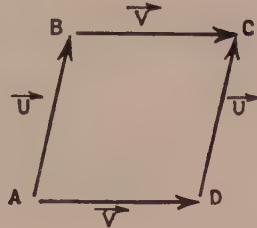


FIG. 9.

On vérifie aisément que l'addition est associative et commutative (fig. 9), que le vecteur nul $\vec{0}$ est l'élément neutre de l'addition, que tout vecteur $\vec{U} = \vec{AB}$ possède un vecteur opposé $-\vec{U} = \vec{BA}$ c'est dire que

L'addition fait de l'ensemble des vecteurs de l'espace (d'un plan ou d'une droite) un groupe commutatif.

La relation de Chasles permet d'écrire, quels que soient les points O , A et B :

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

Multiplication par un scalaire réel. — Définissons le *produit d'un vecteur lié* (A, B) par le nombre réel λ comme le vecteur lié $(A, B') = \lambda(A, B)$ qui a même support que AB , la longueur $AB' = |\lambda| AB$, et tel que B et B' sont du même côté de A ou de côtés opposés, suivant que l'on a $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$.

Il en résulte que, si (C, D) est équipollent à (A, B) alors $(C, D') = \lambda(C, D)$ est équipollent à $(A, B') = \lambda(AB)$ (fig. 10).

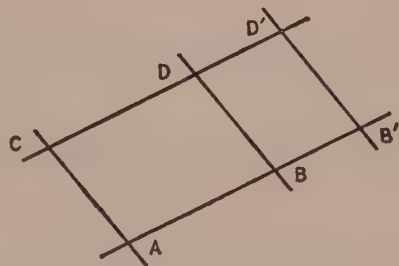


FIG. 10.

On peut définir le produit du vecteur $\vec{U} = \vec{AB}$ par le scalaire réel λ comme la classe de $\lambda(A, B)$.

On a par exemple

$$1. \vec{AB} = \vec{AB} \quad , \quad (-1) \vec{AB} = \vec{BA} \quad , \quad 0. \vec{AB} = \vec{0}$$

Il résulte des lois d'addition et de multiplication des réels que l'on a :

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)\vec{U} &= \lambda\vec{U} + \mu\vec{U} \\ \lambda(\mu\vec{U}) &= (\lambda\mu)\vec{U}\end{aligned}$$

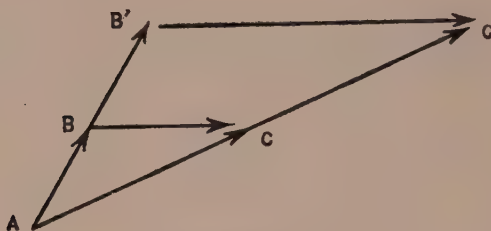


FIG. 11.

Il résulte du *théorème de Thalès* (fig. 11) que

$$\overrightarrow{AB'} = \lambda \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC'} = \lambda \overrightarrow{AC} \quad \text{impliquent} \quad \overrightarrow{B'C'} = \lambda \overrightarrow{BC}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) &= \lambda \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} \\ &= \lambda \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

et la relation

$$\lambda(\vec{U} + \vec{V}) = \lambda\vec{U} + \lambda\vec{V}$$

13. — La droite réelle.

Soit une droite D . Nous allons étudier les vecteurs libres de cette droite. Si $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ est un vecteur non nul, tout vecteur $\vec{U} = \overrightarrow{MP}$ s'écrit d'une façon unique

$$\vec{U} = \lambda \vec{i} \quad (\lambda \in \mathbf{R})$$

Pour cette raison, un vecteur $\vec{i} \neq \vec{0}$ est dit une *base* de l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des vecteurs de D .

Le nombre λ est la *composante* (ou *coordonnée*) de $\vec{U}$ dans la base $\vec{i}$. On écrit :

$$\lambda = \overline{U} = \overline{MP}$$

Soit

$$\vec{U} = \overline{U}\vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{V} = \overline{V}\vec{i}$$

On a

$$\vec{W} = \vec{U} + \vec{V} = \overline{U}\vec{i} + \overline{V}\vec{i} = (\overline{U} + \overline{V})\vec{i}$$

d'où la relation :

$$\overline{W} = \overline{U} + \overline{V}$$

La composante de la somme de deux vecteurs est la somme de leurs composantes.

On a :

$$\lambda \vec{U} = \lambda(\overline{U} \vec{i}) = (\lambda \overline{U}) \vec{i}$$

qui montre que $\lambda \vec{U}$ a pour composante $\lambda \overline{U}$.

Changement de base. — Soit $\vec{I} \neq \vec{0}$ un second vecteur de base. On a :

$$\vec{I} = a \vec{i} \quad a \neq 0$$

Soient X et x les mesures d'un vecteur $\vec{U}$ dans les bases $\vec{I}$ et $\vec{i}$.

On a :

$$\vec{U} = X \vec{I} = X(a \vec{i}) = (Xa) \vec{i} = x \vec{i}$$

d'où :

$$X = \frac{1}{a} x$$

Repère. — Un repère $\mathcal{R}$ de la droite D est la donnée d'un point O de D et d'un vecteur de base $\vec{i} \neq \vec{0}$. Une droite munie d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i})$ est dite un *axe d'origine O* .

Soit M un point de D . On a :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \overline{OM} = x \quad (\text{abscisse de } M)$$

Étant donné deux points A et B de D d'abscisses a et b , on a l'égalité :

$$\overline{AB} = b - a$$

En effet :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = b \vec{i} - a \vec{i} = (b - a) \vec{i}$$

Géométrie analytique. — L'application f de D dans $\mathbf{R}$ définie par $f(M) = \overline{OM}$ est une bijection.

Tout problème géométrique sur la droite se traduit donc fidèlement par des calculs sur des nombres réels.

EXEMPLE 1 : BARYCENTRES. — Soient k points donnés $A_1, A_2, \dots, A_k$ d'une droite D et k nombres réels $m_1, m_2, \dots, m_k$ de somme non nulle :

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_k \neq 0$$

Montrons qu'il existe un point G , et un seul, de D vérifiant la condition :

$$m_1 \overrightarrow{GA_1} + m_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + m_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$$

Soient en effet $a_1, a_2, \dots, a_k, x$ les abscisses de $A_1, A_2, \dots, A_k, G$. On doit avoir $m_1(a_1 - x) + m_2(a_2 - x) + \dots + m_k(a_k - x) = 0$, soit :

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_k a_k - (m_1 + m_2 + \dots + m_k) x = 0$$

d'où :

$$x = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_k a_k}{m_1 + m_2 + \dots + m_k}$$

Le point G est dit le *barycentre des points A_i affectés des coefficients (ou « masses ») m_i* .

Pour $k = 2$ et $m_1 = m_2 \neq 0$ on obtient le milieu de $A_1 A_2$, car la condition $m_1 \overrightarrow{GA_1} + m_1 \overrightarrow{GA_2} = 0$ est équivalente à : $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} = 0$. L'abscisse du milieu de $A_1 A_2$ est donc :

$$x = \frac{m_1 a_1 + m_1 a_2}{m_1 + m_1} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Changement de repère. — Nous avons examiné l'effet d'un changement de base. Limitons-nous à l'étude d'un *changement d'origine*.

Soient x et x' les abscisses de M dans les repères $(O, \vec{i})$ et $(O', \vec{i})$. Il vient :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

en posant $\overrightarrow{OO'} = x_0$ (abscisse de la nouvelle origine), on a

$$x = x_0 + x' \quad \text{et} \quad x' = x - x_0$$

14. — Le plan réel.

Deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ d'un plan sont dits *linéairement indépendants* si la *combinaison linéaire* $\lambda \vec{U} + \mu \vec{V}$ ne peut être nulle que dans le cas $\lambda = \mu = 0$.

Dans le cas contraire $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont dits *linéairement dépendants*. Soit, par exemple :

$$\lambda \vec{U} + \mu \vec{V} = \vec{O} \quad \text{et} \quad \mu \neq 0$$

il vient

$$\vec{V} = \left(-\frac{\lambda}{\mu} \right) \vec{U}$$

C'est pourquoi deux vecteurs $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{AC}$ linéairement dépendants sont encore dits *colinéaires* (les points A , B et C appartiennent à une même droite).

Il en résulte que :

Deux vecteurs non nuls $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ tels que O , A et B ne soient pas alignés, sont linéairement indépendants.

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ un vecteur du plan. Désignons par P et Q les intersections des droites OA et OB avec les parallèles à OB et OA menées par M (fig. 12).

On a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

Or :

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} \quad , \quad \overrightarrow{OQ} = y\vec{j}$$

D'où :

$$(1) \quad \vec{u} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

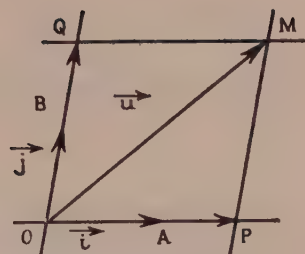


FIG. 12.

Tout vecteur du plan est donc une combinaison linéaire des vecteurs indépendants $(\vec{i}, \vec{j})$.

Pour cette raison on nomme base de l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des vecteurs du plan un couple de vecteurs linéairement indépendants.

L'égalité :

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$$

s'écrit :

$$(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} = \vec{0}$$

et, puisque $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont linéairement indépendants :

$$x - x' = 0 \quad \text{et} \quad y - y' = 0$$

c'est-à-dire

$$x' = x \quad \text{et} \quad y' = y$$

Les nombres (x, y) définis d'une façon unique par l'égalité (1) sont dits les composantes (ou coordonnées) de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.

Opérations sur les vecteurs. — Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les composantes des deux vecteurs $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ (dans la même base $(\vec{i}, \vec{j})$)

$$\vec{U}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{U}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$

d'où :

$$\vec{U}_1 + \vec{U}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$$

Les composantes de la somme s'obtiennent donc en ajoutant les composantes correspondantes de chaque vecteur.

$$\lambda\vec{U}_1 = \lambda(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = (\lambda x_1)\vec{i} + (\lambda y_1)\vec{j}$$

Pour multiplier un vecteur par un nombre λ on multiplie donc ses composantes par λ .

Déterminant de deux vecteurs. — Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les composantes de deux vecteurs $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ dans une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.

L'égalité

$$\lambda \vec{U}_1 + \mu \vec{U}_2 = \vec{0}$$

se traduit par les deux conditions :

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \mu x_2 &= 0 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 &= 0 \end{aligned}$$

On sait que ce système d'équations en λ et μ possède l'unique solution $\lambda = \mu = 0$ si et seulement si le déterminant du système $\Delta = x_1 y_2 - x_2 y_1$ est non nul (Rappels, § 10).

Nous dirons que Δ est le *déterminant des vecteurs* $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ dans la base $\mathcal{B}$, et nous noterons :

$$\Delta = \det_{\mathcal{B}}(\vec{U}_1, \vec{U}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

La condition $\det_{\mathcal{B}}(\vec{U}_1, \vec{U}_2) \neq 0$ est donc une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ soient linéairement indépendants.

Une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ soient colinéaires est par conséquent :

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{U}_1, \vec{U}_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

Changement de base. — Considérons deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{I}$ et $\vec{J}$:

$$\begin{cases} \vec{I} = a\vec{i} + b\vec{j} \\ \vec{J} = c\vec{i} + d\vec{j} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \Delta = \det_{\mathcal{B}}(\vec{I}, \vec{J}) = ad - bc \neq 0$$

Si (x, y) et (X, Y) sont les composantes d'un même vecteur $\vec{U}$ dans les bases $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{I}, \vec{J})$ on a :

$$\begin{aligned} \vec{U} &= X\vec{I} + Y\vec{J} = X(a\vec{i} + b\vec{j}) + Y(c\vec{i} + d\vec{j}) \\ &= (aX + cY)\vec{i} + (bX + dY)\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{cases} x = aX + cY \\ y = bX + dY \end{cases}$$

Ces égalités expriment les « anciennes » composantes (x, y) à l'aide des « nouvelles » composantes (X, Y) . Inversement, la condition $\Delta \neq 0$ permet de résoudre ces équations en X, Y (Rappels, § 10) :

$$\begin{cases} X = \frac{d}{\Delta} x - \frac{c}{\Delta} y \\ Y = -\frac{b}{\Delta} x + \frac{a}{\Delta} y \end{cases}$$

Repère. — Un repère $\mathcal{R}$ d'un plan P est la donnée d'un point O (dit origine) et d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Étant donné un point M du plan, les composantes (x, y) du vecteur $\overrightarrow{OM}$ définies par l'égalité

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

sont dites les *coordonnées* du point M dans le repère $\mathcal{R}$ (on dit parfois que x est l'*abscisse* de M et y l'*ordonnée* de M).

Géométrie analytique. — L'application f de l'ensemble des points du plan P dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(M) = (x, y)$$

est une bijection.

Un repère $\mathcal{R}$ étant choisi, tout problème de géométrie plane se traduit fidèlement par des calculs sur des couples de nombres réels.

EXEMPLE : ÉQUATION D'UNE DROITE. — Une droite D du plan P peut être définie par la donnée d'un point M_0 de D , de coordonnées (x_0, y_0) , et d'un vecteur non nul $\vec{U}$ de D dit *vecteur directeur* de D . Les composantes (α, β) de $\vec{U}$ ne sont pas toutes deux nulles.

Une condition nécessaire et suffisante pour que M , de coordonnées (x, y) appartienne à D est que $\overrightarrow{M_0M}$ et $\vec{U}$ soient colinéaires.

Les composantes de $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$ sont $(x - x_0, y - y_0)$ d'où la condition :

$$\det(\overrightarrow{M_0M}, \vec{U}) = (x - x_0)\beta - (y - y_0)\alpha = 0$$

égalité de la forme :

$$(2) \quad Ax + By + C = 0 \quad (A = \beta, \quad B = -\alpha, \quad C = \alpha y_0 - \beta x_0)$$

Réciproquement, l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) qui vérifient une équation de la forme :

$$Ax + By + C = 0$$

où A et B ne sont pas simultanément nuls est l'ensemble des points d'une droite.

En effet, supposons par exemple $B \neq 0$, et soit x_0 un nombre donné. L'équation en y : $Ax_0 + By + C = 0$ possède une solution unique y_0 et la condition (2) s'écrit :

$$0 = Ax + By + C = Ax_0 + By_0 + C.$$

Soit :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

ce qui signifie que M_0 étant le point de coordonnées (x_0, y_0) le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ est colinéaire au vecteur de composantes $(-B, A)$.

Lorsque $B \neq 0$ l'équation $Ax + By + C = 0$ peut s'écrire

$$y = \left(-\frac{A}{B}\right)x + \left(-\frac{C}{B}\right) = mx + p$$

Le nombre $m = -\frac{A}{B}$ est dit le *coefficient de direction* de la droite, le nombre $p = -\frac{C}{B}$ est l'ordonnée du point où la droite coupe l'axe oy .

Ainsi le graphe de la fonction $x \mapsto mx + p$ dite *fonction affine*, ou fonction du *premier degré* est une droite.

Changement de repère. — Nous avons étudié l'effet d'un changement de base. Limitons-nous à l'étude d'un changement d'origine.

Soient (x, y) et (x', y') les coordonnées d'un même point M dans les repères $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{R}' = (O', \vec{i}, \vec{j})$.

On a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

Si (x_0, y_0) sont les coordonnées de O' dans le repère $\mathcal{R}$ on a donc :

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

15. — Normes, distances et angles.

Norme. — Tous les vecteurs liés d'une même classe $\vec{U}$ ont une même longueur dite *norme* de $\vec{U}$ et notée $\|\vec{U}\|$.

On a :

$$\begin{aligned} \|\vec{U}\| &\geq 0 \\ \|\vec{U}\| = 0 &\implies \vec{U} = \vec{0} \\ \|\lambda\vec{U}\| &= |\lambda| \|\vec{U}\| \end{aligned}$$

Un vecteur de norme 1 est dit *unitaire*.

Si $\vec{U} \neq \vec{0}$, le vecteur $\frac{1}{\|\vec{U}\|} \vec{U}$ est unitaire.

Soit

$$\vec{U} = \overrightarrow{AB} \quad , \quad \vec{V} = \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \vec{U} + \vec{V} = \overrightarrow{AC}$$

Les inégalités triangulaires :

$$|AB - AC| \leq AC \leq AB + BC$$

se traduisent par les inégalités :

$$|\|\vec{U}\| - \|\vec{V}\|| \leq \|\vec{U} + \vec{V}\| \leq \|\vec{U}\| + \|\vec{V}\|$$

Angles. — Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls d'un plan orienté P . Étant donné un point O du plan définissons les vecteurs unitaires :

$$\vec{OA} = \frac{1}{\|\vec{U}\|} \vec{U} \quad \text{et} \quad \vec{OB} = \frac{1}{\|\vec{V}\|} \vec{V}$$

L'angle $(\vec{U}, \vec{V})$ des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est l'angle de la rotation de centre O qui amène A en B . Il est défini à un multiple entier de 2π près lorsque l'unité d'angle est le radian (fig. 13).

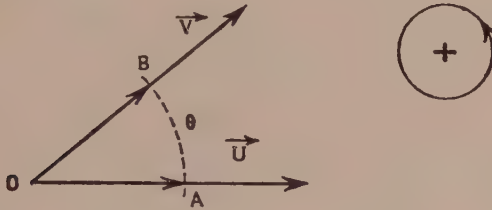


FIG. 13.

On a :

$$\begin{aligned} (\vec{V}, \vec{U}) &= -(\vec{U}, \vec{V}) + 2k\pi \quad k \in \mathbf{Z} \\ (\vec{U}, \vec{V}) + (\vec{V}, \vec{W}) &= (\vec{U}, \vec{W}) + 2k\pi \end{aligned}$$

Repère orthonormé. — Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit *orthonormé de sens direct* lorsque l'on a

$$\begin{cases} \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \\ (\vec{i}, \vec{j}) = +\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

Soit dans un tel repère, un vecteur $\vec{U} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et P le point tel que $\vec{OP} = x\vec{i}$. Le triangle OPM (fig. 14) est rectangle en P et le théorème de Pythagore s'écrit :

$$\begin{aligned} \|\vec{U}\|^2 &= \|\vec{OM}\|^2 = \|\vec{OP}\|^2 + \|\vec{PM}\|^2 \\ &= \|x\vec{i}\|^2 + \|y\vec{j}\|^2 = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Ainsi la norme $r = \|\vec{U}\| = \|\vec{OM}\|$ est donnée par l'égalité

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

Supposons le point M distinct de O . On a $r = \|\vec{OM}\| > 0$.

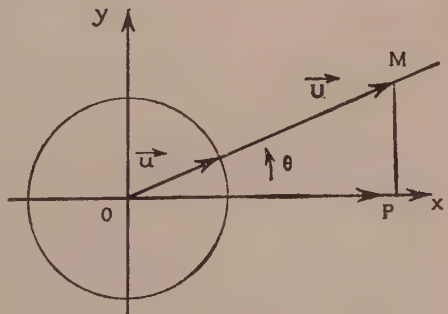


FIG. 14.

Le vecteur $u = \frac{1}{r} \overrightarrow{OM}$ est alors unitaire et défini par l'angle θ

$$\theta = (\vec{i}, \vec{u}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$$

Par définition, les composantes de $\vec{u}$ sont $\cos \theta$ et $\sin \theta$. On a donc

$$\|\vec{u}\|^2 = 1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

et

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}$$

d'où, pour les coordonnées (x, y) de M , les relations

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

et, inversement,

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Lorsque $\theta \neq \pi/2 + k\pi$ on a $\cos \theta \neq 0$ et

$$y = x \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = x \operatorname{tg} \theta$$

Ainsi le coefficient de direction de la droite OM est, en repère ortho-normé, la tangente de l'angle $\theta = (\vec{i}, \vec{u}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. Le nombre $m = \operatorname{tg} \theta = \frac{PM}{OP}$ est dit alors la *pente* de la droite.

Changement de coordonnées. — Soit $(O, \vec{I}, \vec{J})$ un deuxième repère ortho-normé direct. Il se déduit de $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par une rotation de centre O et d'angle α

$$\alpha = (\vec{i}, \vec{I}) = (\vec{j}, \vec{J}) + 2k\pi$$

On a

$$\begin{cases} \vec{I} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha \\ \vec{J} = -\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha \end{cases}$$

d'où les *formules de changement de coordonnées*

$$\begin{cases} x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha \\ y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha \end{cases}$$

en désignant par (x, y) et (X, Y) les coordonnées d'un même point M dans l'« ancien » et le « nouveau repère ».

Posons

$$(\vec{I}, \vec{OM}) = \varphi \quad , \quad \|\vec{OM}\| = r$$

On a

$$\theta = (\vec{i}, \vec{OM}) = (\vec{i}, \vec{I}) + (\vec{I}, \vec{OM}) = \alpha + \varphi$$

d'où, en portant dans les formules ci-dessus,

$$\begin{cases} r \cos \theta = r \cos \alpha \cos \varphi - r \sin \alpha \sin \varphi \\ r \sin \theta = r \sin \alpha \cos \varphi + r \cos \alpha \sin \varphi \end{cases}$$

Après division par r , on obtient les *formules d'addition* :

$$\begin{cases} \cos (\alpha + \varphi) = \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi \\ \sin (\alpha + \varphi) = \sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi \end{cases}$$

Distance de deux points. — Soient $(x_1 y_1)$ et $(x_2 y_2)$ les coordonnées de deux points M_1 et M_2 dans un repère orthonormé. Les composantes de $\vec{M_1 M_2}$ sont $x_2 - x_1, y_2 - y_1$; d'où la *distance* des deux points :

$$M_1 M_2 = \|\vec{M_1 M_2}\| = ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{1/2}$$

Angle de deux vecteurs. — Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les composantes de deux vecteurs $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$ dans un repère orthonormé direct. L'angle θ des vecteurs $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$ est :

$$\begin{aligned} \theta = (\vec{U_1}, \vec{U_2}) &= (\vec{U_1}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{U_2}) \\ &= (\vec{i}, \vec{U_2}) - (\vec{i}, \vec{U_1}) = \theta_2 - \theta_1 + 2k\pi \end{aligned}$$

en posant :

$$\theta_1 = (\vec{i}, \vec{U_1}) \quad \text{et} \quad \theta_2 = (\vec{i}, \vec{U_2})$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos (\theta_2 + (-\theta_1)) = \cos \theta_2 \cos (-\theta_1) - \sin \theta_2 \sin (-\theta_1) \\ &= \cos \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \sin \theta_1 = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{r_1 r_2} \end{aligned}$$

en posant :

$$r_1 = \|\vec{U_1}\| \quad \text{et} \quad r_2 = \|\vec{U_2}\|$$

De même

$$\sin \theta = \sin (\theta_2 - \theta_1) = \sin \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{r_1 r_2}$$

Définitions. — 1° Le nombre $r_1 r_2 \cos \theta = \|\vec{u_1}\| \|\vec{u_2}\| \cos (\vec{u_1}, \vec{u_2})$ est dit le *produit scalaire des vecteurs* $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$. On le note $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}$.

On a, par conséquent, dans un repère orthonormé :

$$\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

2° Le nombre $r_1 r_2 \sin \theta = \|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\| \sin(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est le déterminant des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ dans tout repère orthonormé direct. Nous le noterons donc sans indiquer de base :

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Propriétés du produit scalaire.

$$a) \vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$$

$$b) \vec{U} \cdot \vec{U} = \vec{U}^2 = \|\vec{U}\|^2$$

$$c) \vec{U} \cdot (\lambda \vec{V}_1 + \mu \vec{V}_2) = \lambda \vec{U} \cdot \vec{V}_1 + \mu \vec{U} \cdot \vec{V}_2 \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$$

$$d) (\vec{U} \cdot \vec{V} = 0, \quad \vec{U} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{V} \neq \vec{0}) \text{ implique } (\vec{U}, \vec{V}) = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Les propriétés (a) et (b) sont immédiates; vérifions (c). Si (x, y) , (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont les composantes de $\vec{U}$, $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{U}(\lambda \vec{V}_1 + \mu \vec{V}_2) &= x(\lambda x_1 + \mu x_2) + y(\lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= \lambda(xx_1 + yy_1) + \mu(xx_2 + yy_2) = \lambda \vec{U} \cdot \vec{V}_1 + \mu \vec{U} \cdot \vec{V}_2 \end{aligned}$$

Vérifions (d) : Si :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \cos(\vec{U}, \vec{V}) = 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{U}\| \neq 0 \quad \|\vec{V}\| \neq 0$$

alors

$$\cos(\vec{U}, \vec{V}) = 0 \quad \text{d'où : } (\vec{U}, \vec{V}) = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Propriétés du déterminant.

$$a) \det(\vec{V}, \vec{U}) = -\det(\vec{U}, \vec{V})$$

$$b) \det(\vec{U}, \vec{U}) = 0$$

$$c) \det(\vec{U}, \lambda \vec{V}_1 + \mu \vec{V}_2) = \lambda \det(\vec{U}, \vec{V}_1) + \mu \det(\vec{U}, \vec{V}_2)$$

$$d) \det(\vec{U}, \vec{V}) = 0 \text{ implique : } \vec{U} \text{ et } \vec{V} \text{ colinéaires.}$$

En effet, les propriétés (a), (b) sont immédiates; la propriété (c) se démontre comme dans le cas du produit scalaire, enfin la propriété (d) a été démontrée au paragraphe 14.

Aire orientée. — L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ est :

$$\text{Aire}(ABCD) = AB \cdot AD \cdot |\sin(\vec{AB}, \vec{AD})| = |\det(\vec{AB}, \vec{AD})|$$

le nombre $\det(\vec{AB}, \vec{AD})$ est dit l'*aire algébrique* (ou *orientée*) du parallélogramme « construit » sur les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.

EXERCICES

1° On désigne par $n(F)$ le nombre d'éléments d'un sous-ensemble F d'un ensemble E . Montrer que, si les sous-ensembles A et B de E contiennent chacun un nombre fini d'éléments, on a la relation :

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B).$$

Calculer les quatre termes de l'égalité précédente lorsque E est l'ensemble des nombres entiers, A l'ensemble des nombres pairs de 2 à 20, B l'ensemble des multiples de 3, de 3 à 21.

$$R. \quad n(A) = 10, \quad n(B) = 7, \quad n(A \cup B) = 14, \quad n(A \cap B) = 3.$$

2° Sur 250 familles, on en compte 105 qui ont une auto, 100 qui ont un réfrigérateur, 59 qui ont le téléphone, 31 qui ont auto et réfrigérateur, 22 qui ont auto et téléphone, 7 qui ont réfrigérateur et téléphone, 4 qui ont réfrigérateur, auto et téléphone. Combien y a-t-il de familles ne possédant qu'un des éléments considérés ? N'en possédant aucun ?

$$R. \quad 56, 66, 34, 42.$$

3° Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E . Établir l'implication réciproque

$$A \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad C \supset C \cap B.$$

4° On pose $\alpha = \sqrt[3]{2}$ et $\beta = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. On considère les applications f et g qui à un élément $(a, b, c) \in \mathbf{Q}^3$ font correspondre les éléments $x = a + b\alpha + c\alpha^2$ et $y = a + b\beta + c\beta^2$ appartenant à $\mathbf{R}$. Montrer que les ensembles $f(\mathbf{Q}^3)$ et $g(\mathbf{Q}^3)$ sont égaux.

5° On considère les applications :

$$f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}^2 \text{ telle que } f(p) = (p, 1)$$

$$g : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{R} \text{ telle que } g(p, q) = p + q\sqrt{2}$$

$$h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z} \text{ telle que } x \leq h(x) < x + 1$$

et les applications composées :

$$g \circ f, f \circ h, h \circ g, g \circ f \circ h, f \circ h \circ g, h \circ g \circ f.$$

Lesquelles de ces applications sont surjectives ? Injectives ?

$$R. \quad \text{Surjectives } h, h \circ g, h \circ g \circ f; \text{ Injectives } f, g, g \circ f, h \circ g \circ f$$

6° Soit D_s le sous-ensemble de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dont les éléments (x, y) vérifient l'inégalité $|x|^s + |y|^s \leq 1$. Montrer que si $0 < t < s$, on a $D_t \subset D_s$.

Que se passe-t-il si $t < 0 < s$ ou $t < s < 0$?

$$R. \quad t < 0 < s \quad \Rightarrow \quad D_t \subset D_s, \quad t < s < 0 \Rightarrow D_s \subset D_t$$

7° On considère l'application f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$: $f(x, y) = x - y$ et l'application g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$: $g(x) = (x, -x)$. On peut ici former les deux applications composées $f \circ g$ et $g \circ f$; en donner l'expression directe. Étudier lesquelles de ces quatre applications sont injectives, surjectives, bijectives.

$$R. \quad f \circ g \text{ est bijective.}$$

*8° On considère l'application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$f(x) = a |x + 1| + b |x - 1| + (b - a + 1)x - a - b$$

où $|x + 1|$ et $|x - 1|$ sont des valeurs absolues. Étudier, suivant les valeurs des paramètres a et b , quand cette application est bijective, et exprimer son application inverse éventuelle sous une forme analogue (on pourra s'aider de la représentation graphique).

R. Si $a < \frac{1}{2}$ et $b > -\frac{1}{2}$, on aura

$$f^{-1}(x) = \alpha |x + 1| + \beta |x - 1| + (\beta - \alpha + 1)x - \alpha - \beta$$

où l'on a posé

$$\alpha = \frac{a}{2a - 1} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-b}{2b + 1}$$

*9° Étant donné une application $f : E \rightarrow E'$ et un sous-ensemble A' de E' on note $f^{-1}(A')$ le sous-ensemble de E ainsi défini :

$$x \in f^{-1}(A') \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \in A'$$

A et B étant deux sous-ensembles de E , A' et B' étant deux sous-ensembles de E' , indiquer parmi les quatre égalités suivantes celles qui sont toujours vérifiées.

$$\alpha) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$\beta) f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

$$\gamma) f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$$

$$\delta) f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$$

R. $\alpha)$, $\gamma)$ et $\delta)$ sont toujours vérifiées. $\beta)$ ne l'est pas.

10° Soient E et F deux ensembles ordonnés.

a) Montrer que l'on définit une relation d'ordre sur $E \times F$ en posant

$$(x, y) \leq (x', y') \quad \Longleftrightarrow \quad (x \leq x' \text{ et } y \leq y').$$

A quelle condition cette relation d'ordre peut-elle être totale?

R. Il faut et il suffit que l'un des deux ensembles E ou F n'est qu'un élément et que l'autre soit totalement ordonné.

b) Montrer que l'on définit une relation d'ordre sur $E \times F$ (ordre lexicographique) en posant :

$$(x, y) \leq (x', y') \quad \Longleftrightarrow \quad x < x' \text{ ou } x = x' \text{ et } y \leq y'$$

A quelle condition cette relation peut-elle être totale?

R. Il faut et il suffit que E et F soient tous deux totalement ordonnés.

*11° Une relation $\mathcal{R}$ sur E est dite *relation de préordre* si elle satisfait à

$$\begin{aligned} PO_1 : x \mathcal{R} x \\ PO_2 : (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \implies x \mathcal{R} z \end{aligned}$$

a) Montrer que s'il en est ainsi la relation

$$x \equiv y \quad \Longleftrightarrow \quad (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x)$$

est une relation d'équivalence notée $\mathcal{R}'$.

Montrer que sur l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}'$ la relation

$$C(x) \leq C(y) \iff x \mathcal{R} y$$

ne dépend pas des représentants x et y des classes $C(x)$ et $C(y)$ et qu'elle définit une relation d'ordre dans $E/\mathcal{R}'$.

b) Montrer que dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées, la relation d'ordre naturel sur les abscisses induit une relation de préordre sur les points du plan. Définir alors la relation $\mathcal{R}'$.

12° Si G est un groupe multiplicatif, l'application $\varphi : G \rightarrow G$ telle que $\varphi(x) = ax$ est bijective (a élément fixe de G).

13° Soient G et G' deux groupes notés multiplicativement. Sur $G \times G'$ la loi de composition définie par :

$$(a, a') \mathbf{T} (b, b') = (ab, a'b')$$

définit sur $G \times G'$ une structure de groupe.

14° La loi de composition $\mathbf{T}$ définie sur R par

$$x \mathbf{T} y = x + y - xy$$

est-elle associative? Évaluer :

$$x \mathbf{T} x \mathbf{T} x \dots \mathbf{T} x$$

expression contenant n termes.

R. Oui; $x \mathbf{T} x \dots \mathbf{T} x = 1 - (1 - x)^n$.

15° Si dans un groupe G noté multiplicativement tout élément x est tel que $x^2 = e$ (élément neutre), le groupe est commutatif.

16° Sur le corps des réels, on considère la loi notée

$$a \mathbf{T} b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \quad \text{si} \quad a^2 + b^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad 0 \mathbf{T} 0 = 0$$

Montrer que cette loi commutative admet un élément neutre, que tout élément admet un symétrique. Cette loi est-elle une loi de groupe?

R. Non.

17° Muni de l'addition et de la multiplication habituelles, l'ensemble des nombres de la forme $a + b\sqrt{5}$ est un anneau si a et b appartiennent à $\mathbf{Z}$.

*18° Dans les mêmes conditions qu'à l'exercice précédent, l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{2b+1}$ est un anneau.

*19° Un ensemble E est muni de deux lois de composition $\mathbf{T}$ (d'élément neutre e) et $\mathbf{I}$ (d'élément neutre f). On suppose en outre que

$$(x \mathbf{T} y) \mathbf{T} (u \mathbf{T} v) = (x \mathbf{I} u) \mathbf{T} (y \mathbf{I} v) \quad \forall x, y, u, v \in E$$

Montrer, en faisant $x = v = e$ et $y = u = f$, que $e = f$. En déduire ensuite que

$$x \mathbf{I} v = x \mathbf{T} v$$

Enfin établir que la loi $\mathbf{T}$ (ou $\mathbf{I}$) est associative (on fera $y = e$) et commutative (on fera $x = v = e$).

***20°** Comment choisir les nombres α, β, γ pour que la loi de composition définie sur R par

$$x \mathbf{T} y = \alpha(x + y) + \beta xy + \gamma$$

soit une loi de groupe?

$$R. \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0.$$

***21°** Soit un groupe G noté multiplicativement et tel que l'application $\varphi : G \rightarrow G$ définie par $\varphi(x) = x^{-1}$ soit un automorphisme, montrer que le groupe G est abélien.

***22°** Montrer que l'opération

$$u \mathbf{T} v = \frac{u + v}{1 + uv}$$

définit un groupe commutatif sur l'ensemble des nombres de l'intervalle $] -1, +1[$.

***23°** On appelle $\mathbf{R}'$ l'ensemble $\mathbf{R}$ augmenté du nombre « infini ». On considère les applications $f : \mathbf{R}' \rightarrow \mathbf{R}'$ telles que

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad ad - bc = 1$$

Montrer que la composition d'applications donne à l'ensemble des fonctions f une structure de groupe.

***24°** L'ensemble E , pourvu de l'opération $\mathbf{T}$ est un groupe abélien. L'élément neutre est désigné par e , le symétrique de l'élément a est désigné par a'

On définit sur E une nouvelle opération $\mathbf{I}$ par la relation :

$$a \mathbf{I} b = a \mathbf{T} b \mathbf{T} g$$

où g est un élément déterminé de E ; a, b deux éléments quelconques de E .

Montrer que E pourvu de l'opération $\mathbf{I}$ est un groupe. Préciser le neutre f et le symétrique a_1 de l'élément a .

Ce groupe est-il abélien?

$$R. \quad f = g', \quad a_1 = a' \mathbf{T} g' \mathbf{T} g'$$

****25°** Soit un groupe G noté multiplicativement contenant un nombre fini n d'éléments.

Montrer que si a est un élément du groupe, il existe un entier m tel que $a^{m+1} = 1$. Si m est inférieur à n , l'ensemble $1, a, a^2, \dots, a^m$ forme un sous-groupe de G . Énoncer la réciproque.

Application : les éléments de G sont les nombres 1, 9, 21, 29, 41, 49, 61, 69, 81, 89; le produit de deux nombres étant le produit (au sens ordinaire) dont on supprime le chiffre des centaines (ex. : $61 \times 29 = 69$). Quels sont les sous-groupes de G différents de $\{1\}$ et de G ?

$$R. \quad (1, 49) \text{ et } (1, 21, 41, 61, 81).$$

****26°** Soit F l'ensemble des permutations f d'un ensemble E groupe abélien additif telles que

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \quad \forall x, y \in E$$

Montrer que F muni des deux opérations : addition ordinaire et composition des fonctions, est un anneau intègre.

****27°** A quelles conditions les opérations

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y') \\ (x, y) \cdot (x', y') &= (xx' + ay'y', xy' + x'y + byy')\end{aligned}$$

où $x, y, x', y' \in \mathbf{R}$ et a et b sont des éléments fixes de $\mathbf{R}$, définissent-elles sur $\mathbf{R}^2$ une structure de corps ?

$$R. \quad b^2 + 4a < 0.$$

28° Soient un groupe multiplicatif G et un ensemble E . Montrer que l'ensemble G^E des applications de E dans G forme un groupe si on définit fg comme étant la fonction

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad (f, g \in G^E).$$

***29°** Soit un sous-ensemble H d'un groupe G noté multiplicativement. On considère sur G la relation $\equiv$ définie par :

$$x \equiv y \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists h \in H \quad \text{avec} \quad x = yh) \quad \Longleftrightarrow \quad y^{-1}x \in H.$$

1° Montrer que pour que ce soit une équivalence, il faut et il suffit que H soit un sous-groupe de G .

2° H étant un sous-groupe de G , montrer que pour que la relation d'équivalence $\equiv$ soit compatible avec la multiplication dans G , il faut et il suffit que H ait la propriété suivante :

$$h \in H \quad \text{et} \quad x \in G \quad \implies \quad x^{-1}hx \in H$$

(on dit alors que H est un *sous-groupe invariant* ou distingué de G).

Montrer que dans ce cas l'ensemble quotient noté G/H est un groupe.

3° Caractériser le groupe G/H dans le cas où G est le groupe additif $\mathbf{Z}$ et H le sous-groupe $m\mathbf{Z}$ formé par les nombres de la forme mx ($x \in \mathbf{Z}$).

Montrer que $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ a m éléments.

4° $\mathbf{Z}$ étant sous-groupe additif de $\mathbf{R}$, montrer que l'on définit un isomorphisme du groupe $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ sur le groupe (évident) des rotations planes autour d'un point en faisant correspondre à l'élément $C(x)$ de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ (avec $x \in \mathbf{R}$) la rotation d'angle $2\pi x$.

****30°** (Suite de **29°**). Soient A un anneau commutatif et I un sous-groupe additif de A . On a vu que la relation d'équivalence sur A :

$$x \equiv y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \in I$$

est compatible avec l'addition.

1° Montrer que pour qu'elle soit compatible avec la multiplication il faut et il suffit que I ait la propriété suivante :

$$x \in I \quad \text{et} \quad y \in A \quad \implies \quad xy \in I$$

(on dit alors que I est un *idéal* de A).

Montrer que lorsqu'il en est ainsi A/I est un anneau.

2° m étant un élément de l'anneau $\mathbf{Z}$, l'ensemble $m\mathbf{Z}$ est un idéal de $\mathbf{Z}$.

Montrer que pour que l'anneau $\mathbf{Z}_m = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ soit intègre, il faut et il suffit que m soit un nombre premier p (ou l'opposé d'un nombre premier). Dans ce cas $\mathbf{Z}_p$ est un corps à p éléments.

****31°** Soient un corps commutatif L et un sous-anneau intègre A de L contenant l'unité de L .

K étant le corps des fractions de A , montrer qu'il existe une application et une seule

$$f : K \rightarrow L$$

telle que

$$\begin{aligned} f(x) &= x & (\forall x \in A) \\ f(x+y) &= f(x) + f(y) & (\forall x, y \in K) \\ f(xy) &= f(x)f(y) \end{aligned}$$

Montrer que cette application définit un isomorphisme de K sur un sous-corps K' de L et que tout sous-corps de L contenant A contient K' .

En « identifiant » K à K' par l'application f , on voit donc que « tout corps contenant un anneau intègre contient son corps des fractions ».

32° On donne un triangle A, B, C et trois nombres λ, μ, ν tous différents de 1. On désigne par M, N, P les points tels que

$$\vec{MB} = \lambda \vec{MC}, \quad \vec{NC} = \mu \vec{NA}, \quad \vec{PA} = \nu \vec{PB}.$$

Quelle condition doivent vérifier les nombres λ, μ, ν pour que

- a) les points M, N et P soient alignés?
b) les droites AM, BN et CP soient concourantes ou parallèles?

R. a) $\lambda\mu\nu = 1$ b) $\lambda\mu\nu = -1$

33° On considère un triangle ABC et les deux repères $\mathcal{R} = (A, \vec{AB}, \vec{AC})$ $\mathcal{R}' = (B, \vec{BA}, \vec{BC})$. a) Exprimer les coordonnées (x, y) d'un point M dans le repère $\mathcal{R}$ à l'aide des coordonnées (x', y') de ce même point M dans le repère $\mathcal{R}'$. b) Quel est l'ensemble des points qui ont mêmes coordonnées dans les deux repères?

R. a) $x = 1 - x' - y' \quad y = y'$ b) La droite CD (D milieu de AB).

34° Former l'équation des hauteurs et des médianes du triangle $A(0,2), B(-2,1), C(3,1)$. Vérifier que les hauteurs concourent ainsi que les médianes.

R. Orthocentre $(0,7)$, centre de gravité $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

35° Vérifier que la droite représentée par l'équation :

$$(\lambda + 1)^2 x + \lambda(\lambda - 1)y - 4\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

passé par un point fixe quand λ varie.

R. $x = 1, \quad y = 3.$

36° La droite d'équation $3x + 4y - 12 = 0$ coupe les axes Ox en A et Oy en B . Coordonnées des centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle AOB .

R. $(1,1) \quad (6,6) \quad (-2,2) \quad (3,-3).$

37° On appelle A le point d'intersection des deux droites d'équations :

$$y = 2x + 1 \quad \text{et} \quad y = -2x + 3$$

P et Q sont les symétriques de l'origine des coordonnées par rapport à ces droites. Calculer les coordonnées des points A, P, Q et l'aire du triangle APQ .

R. Aire $APQ = 2,04.$

***38°** Déterminer une droite coupant les quatre droites :

$$\begin{array}{ll} D_1 & 3x - 2y + 6 = 0 \\ D_2 & x + 2y - 2 = 0 \\ D_3 & x - 2 = 0 \\ D_4 & x + 3y - 13 = 0 \end{array}$$

respectivement en $A_1A_2A_3A_4$ tels que les trois segments :

$$\overline{A_1A_2}, \quad \overline{A_2A_3}, \quad \overline{A_3A_4} \text{ soient égaux.}$$

R. $x - 2y + 2 = 0.$

***39°** On considère le triangle $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$. Calculer les coordonnées de l'orthocentre H , du centre I du cercle circonscrit et du centre de gravité G du triangle ABC . Vérifier la relation :

$$\overrightarrow{HG} = 2 \overrightarrow{GI}.$$

R. Coordonnées de $H\left(0, -\frac{ab}{c}\right)$, $I\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right)$, $G\left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}\right)$.

40° Soit ABC un triangle donné. Quel est l'ensemble Δ des points M du plan du triangle qui vérifient la condition

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 - 2\overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2$$

R. Δ est la perpendiculaire en C à la médiane du triangle issue de C .

41° Soient A et B deux points distincts d'un plan P quel est l'ensemble Γ des points M de P pour lesquels on a l'égalité :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$$

R. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$, et Γ est un cercle passant par A et B .

CHAPITRE PREMIER

DÉNOMBREMENTS

1. — Ensembles finis.

Soit $I_n = \{ 1, 2, \dots, n \}$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n .

I_n est un ensemble fini de n éléments.

Compter les éléments d'un ensemble fini non vide E c'est réaliser une bijection de E sur un ensemble I_n , l'entier n est le nombre d'éléments de E appelé aussi *cardinal* de E . On écrit :

$$\text{Card } E = n$$

Pour l'ensemble vide on a

$$\text{Card } \emptyset = 0$$

On dit que l'ensemble F est *équipotent* à l'ensemble E s'il existe une bijection de F sur E . Comme il existe alors une bijection de E sur F et que la composition de deux bijections est une bijection, l'équipotence a les propriétés d'une relation d'équivalence. On a

$$(\text{Card } E = n) \quad \Longleftrightarrow \quad (E \text{ et } I_n \text{ équipotents}).$$

Pour deux ensembles finis E, F non vides :

$$(\text{Card } E = \text{Card } F) \quad \Longleftrightarrow \quad (E \text{ et } F \text{ équipotents}).$$

L'inclusion $F \subset E$ implique $\text{Card } F \leq \text{Card } E$, l'égalité n'ayant lieu que dans le cas $F = E$.

Les deux propriétés élémentaires suivantes sont liées à la définition de l'addition et de la multiplication des entiers naturels.

$$1^\circ \quad \text{Card } (E \cup F) \leq \text{Card } E + \text{Card } F$$

l'égalité n'ayant lieu que si E et F sont disjoints ($E \cap F = \emptyset$)

$$2^\circ \quad \text{Card } (E \times F) = \text{Card } E \cdot \text{Card } F$$

(c'est-à-dire le nombre de couples (x, y) , $x \in E$, $y \in F$, est le produit du nombre d'éléments de E par le nombre d'éléments de F). En particulier :

$$\text{Card}(E^2) = (\text{Card } E)^2 \quad ; \quad \text{Card}(E^k) = (\text{Card } E)^k$$

Une bijection φ de E sur I_n définit un *numérotage* des éléments de E , $x \in E$ ayant le numéro $\varphi(x)$. On peut alors *ordonner* les éléments de E en une *suite* :

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

Chaque élément de E étant désigné par son numéro placé en *indice*.

THÉORÈME 1. — Soit $\text{Card } F = k$ et $\text{Card } E = n$. Le nombre d'applications de F dans E est n^k .

Numérotons les éléments de F : $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Une application f de F dans E est déterminée par la suite des images : $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)$. Cette suite étant un élément quelconque de E^k , il y a autant d'applications que d'éléments de E^k soit :

$$\text{Card}(E^k) = (\text{Card } E)^k = n^k$$

THÉORÈME 2. — Soit $\text{Card } F = k$ et $\text{Card } E = n$. Le nombre d'applications injectives de F dans E est :

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$$

Pour que l'application f soit injective il faut que les images $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)$ soient toutes distinctes.

Le nombre d'applications injectives est donc le nombre d'éléments $(y_1, y_2, \dots, y_k)$ de E^k dont tous les éléments y_i sont distincts.

Un tel élément de E^k se nomme aussi un *arrangement* de k éléments de E .

On peut choisir :

$$f(x_1) \text{ de } C_1 = n \text{ façons différentes}$$

puis

$$f(x_2) \text{ de } C_2 = n-1 \text{ façons différentes}$$

$$f(x_3) \text{ de } C_3 = n-2 \text{ façons différentes}$$

enfin

$$f(x_k) \text{ de } C_k = n-(k-1) \text{ façons différentes}$$

d'où

$$A_n^k = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \dots C_k$$

(il faut $1 \leq k \leq n$).

Si l'on prend $k = n$:

$$A_n^n = n(n-1) \dots 2 \cdot 1$$

c'est-à-dire le produit de tous les entiers de 1 à n que l'on note :

$$n ! \quad (\text{factorielle } n)$$

On peut écrire (pour $k < n$)

$$A_n^k = \frac{n !}{(n - k) !}$$

Comme pour $k = n$ ceci donnerait :

$$A_n^n = n ! = \frac{n !}{0 !}$$

on est conduit à définir $0 ! = 1$.

THÉORÈME 3. — Soit $\text{Card } E = n$. Le nombre de permutations de E est $n !$

En effet toute injection de E dans E est manifestement surjective donc est une bijection, c'est-à-dire une permutation de E , d'où le nombre de ces permutations $A_n^n = n !$

THÉORÈME 4. — Le nombre de parties de E ($\text{Card } E = n$) ayant k éléments est :

$$C_n^k = \frac{n !}{k ! (n - k) !} \quad \text{que l'on note aussi} \quad \binom{n}{k}$$

Il y a $k !$ façons d'ordonner une partie de E ayant k éléments ($1 \leq k \leq n$) pour obtenir un élément de E^k donc :

$$A_n^k = k ! C_n^k$$

d'où

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k !} = \frac{n !}{k ! (n - k) !} = C_n^{n-k}$$

Pour $k = 0$ cette expression donne

$$C_n^0 = \frac{n !}{0 ! n !} = 1$$

Or il existe bien une seule partie de E de cardinal nul : l'ensemble vide.

C_n^k se nomme encore le nombre de *combinaisons* de k objets choisis parmi n (on ne tient pas compte de l'ordre des choix).

Application. — Formule du binôme de Newton.

Soient $x, a_1, a_2, \dots, a_n$ des éléments d'un anneau commutatif (un corps par exemple). Considérons le produit :

$$P = (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)$$

Le développement de ce produit donne :

$$P = x^n + x^{n-1} \cdot S_1 + x^{n-2} \cdot S_2 + \dots + x S_{n-1} + S_n$$

où

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_i a_i \\ S_2 &= \sum_{i < j} a_i a_j \quad (i < j) \text{ pour ne pas retrouver deux fois} \\ &\quad \text{le même terme.} \\ &\vdots \\ S_{n-1} &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1}} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{n-1}} \\ S_n &= a_1 a_2 \dots a_n \end{aligned}$$

S_k somme de tous les produits de k éléments distincts de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ contient C_n^k termes.

Si on prend : $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ on obtient donc

$$P = (x + a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \dots + a^n = \sum_k C_n^k x^{n-k} a^k$$

On vérifie la relation de récurrence :

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$$

qui permet de construire par additions successives la table des C_n^k (triangle de Pascal) :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

$$\begin{array}{c} C_{n-1}^{k-1} + C_n^k \\ \downarrow \\ C_{n+1}^k \end{array}$$

FIG. 1.

THÉOREME 5. — Soit Card $E = n$. Le nombre de parties de E est 2^n .

Soit A une partie de E . Définissons la fonction f_A de E dans $\{0, 1\}$ par :

$$\begin{aligned} f_A(x) &= 1 && \text{pour } x \in A \\ f_A(x) &= 0 && \text{pour } x \notin A \end{aligned}$$

f_A est la fonction caractéristique de A (Rappels, § 9).

Toute fonction f de E dans $\{0, 1\}$ caractérise en effet une partie de E : l'ensemble des x pour lesquels $f(x) = 1$.

Le nombre de parties de E est celui des applications de E dans $\{0, 1\}$ soit 2^n (d'après le théorème 1).

Application à des calculs de probabilités. — On est amené ⁽¹⁾ à représenter des *événements aléatoires* (c'est-à-dire dont la réalisation dépend du hasard) par des parties d'un ensemble Ω . Nous supposons ici que Ω est un ensemble fini et que les *événements élémentaires*, représentés par les parties de Ω réduites à un seul élément, sont *également probables*. Dans ces conditions la *probabilité* de $A \subset \Omega$ est par définition :

$$p = \text{Prob}(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$$

On a :

$$\text{Prob}(\Omega) = 1 \quad \text{Prob}(\emptyset) = 0 \quad 0 \leq p \leq 1$$

Si A et B sont deux parties disjointes de Ω :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B$$

$$\text{Prob}(A \cup B) = \frac{\text{Card } A + \text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \text{Prob}(A) + \text{Prob}(B)$$

En particulier, si A' est le complément de A dans Ω :

$$\text{Prob } A + \text{Prob } A' = \text{Prob } \Omega = 1$$

Soit :

$$\text{Prob}(A') = 1 - \text{Prob}(A)$$

EXEMPLE. — On tire 13 cartes « au hasard » d'un jeu de 52 cartes, quelle est la probabilité qu'aucun as ne figure dans ces 13 cartes ?

Événements élémentaires : tous les choix possibles de 13 cartes. Leur nombre est :

$$\text{Card } \Omega = C_{52}^{13}$$

Événement A : 13 cartes sans as :

$$\text{Card } A = C_{48}^{13}$$

(nombre de choix de 13 cartes dans un jeu de $52 - 4 = 48$ cartes puisqu'on a ôté les 4 as) donc :

$$p = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{C_{48}^{13}}{C_{52}^{13}} = \frac{36 \times 37 \times 38 \times 39}{49 \times 50 \times 51 \times 52} = \frac{6\,327}{20\,825} = 0,303 \dots$$

⁽¹⁾ P. JAFFARD. — *Initiation aux méthodes de la statistique et du calcul des probabilités*, Masson éd.

La probabilité d'avoir *au moins* un as est donc :

$$q = 1 - p = 0,697 \dots$$

2. — Ensembles dénombrables.

L'ensemble $\mathbf{N}' = \{ 1, 2, 3, \dots, n, \dots \}$ de tous les entiers non nuls n'est pas un ensemble fini.

Soit A une partie (non vide) de $\mathbf{N}'$. L'ensemble A contient un plus petit élément et on peut ranger les éléments de A à partir de celui-ci en une suite croissante S_A :

$$a, b, c \dots$$

Si A est *majoré*, c'est-à-dire s'il existe un entier m tel que

$$\forall x \in A \quad x \leq m$$

alors A est une partie de $I_m = \{ 1, 2, \dots, m \}$ donc A est un ensemble fini.

Si A n'est pas majoré, A contient des nombres supérieurs à tout entier m , la suite S_A est infinie.

Faisons correspondre à tout élément de A le rang qu'il occupe dans la suite S_A :

$$\varphi(a) = 1, \quad \varphi(b) = 2, \quad \varphi(c) = 3, \text{ etc.}$$

on définit ainsi une bijection φ de A sur $\mathbf{N}'$.

En conclusion : toute partie A de $\mathbf{N}'$ est finie ou *équipotente* à $\mathbf{N}'$.

On dit qu'un ensemble E est *dénombrable* si E est équipotent à une partie de $\mathbf{N}'$. D'après ce que l'on vient de voir, un ensemble dénombrable est ou bien fini ou bien équipotent à $\mathbf{N}'$.

Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

On peut toujours numéroter (ou « dénombrer ») les éléments d'un ensemble dénombrable E à l'aide des entiers de $\mathbf{N}'$:

$$E = \{ x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \}$$

REMARQUE. — L'ensemble $\mathbf{N} = \{ 0, 1, 2, \dots, n, \dots \}$ qui contient un élément de plus que $\mathbf{N}'$ est cependant équipotent à $\mathbf{N}'$ (car la fonction $\varphi(x) = x + 1$ définit une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}'$).

THÉORÈME 6. — 1° *L'union de deux ensembles dénombrables est dénombrable.*

2° *Le produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable.*

Soient

$$\begin{aligned} E &= \{ x_1, x_2, x_3, \dots \} \\ F &= \{ y_1, y_2, y_3, \dots \} \end{aligned}$$

1° Pour numérotter les éléments de $E \cup F$ on peut ranger alternativement les éléments de E et de F :

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$$

on supprime alors dans cette suite les éléments y égaux à des éléments x de E , s'il y en a, et on renumérote, dans l'ordre, la suite obtenue.

2° Pour numérotter $E \times F$ on range les éléments de $E \times F$ dans l'ordre suivant :

$$(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_2) \dots$$

obtenu en utilisant la relation d'ordre total défini par

$$(x_i, y_j) < (x_k, y_l) \text{ lorsque } i + j < k + l \text{ et, pour } i + j = k + l, \\ (x_i, y_j) < (x_k, y_l) \text{ lorsque } i < k.$$

Application. — 1° $\mathbf{Z} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\} \cup \{-1, -2, -3, \dots\}$ donc $\mathbf{Z}$ est dénombrable.

2° $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ est dénombrable donc l'ensemble des nombres rationnels $\mathbf{Q}$ (que l'on peut considérer comme une partie de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ en choisissant un représentant dans chaque classe, Rappels, § 11) est dénombrable.

On ne doit pas croire que tout ensemble infini est dénombrable; en effet on a le

THÉORÈME 7. — *L'ensemble des parties de $\mathbf{N}' = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ n'est pas dénombrable.*

C'est-à-dire : quelle que soit la suite $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ de parties de $\mathbf{N}'$ cette suite ne peut contenir toutes les parties de $\mathbf{N}'$.

Définissons en effet la partie A^* de $\mathbf{N}'$ par :

$$n \in A^* \text{ si et seulement si } n \notin A_n$$

La partie A^* de $\mathbf{N}'$ est différente de tous les A_n . Une égalité $A^* = A_m$ est en effet impossible dans chacun des deux cas $m \in A^*$ et $m \notin A^*$.

Application. — *L'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels n'est pas dénombrable.*

Définissons une injection de l'ensemble des parties A de $\mathbf{N}'$ dans $\mathbf{R}$ en faisant correspondre à chaque partie A le nombre x_A

$$x_A = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

Les chiffres décimaux a_i étant définis par :

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in A \\ 0 & \text{si } i \notin A \end{cases}$$

L'ensemble des parties A n'est pas dénombrable. Il en est donc de même de l'ensemble X des nombres x_A et comme $X \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ ne peut être dénombrable.

EXERCICES

1° L'ensemble E contient 3 éléments et l'ensemble F contient 4 éléments. Combien y a-t-il d'applications de E sur F ? Combien sont injectives ?

Combien y a-t-il d'applications de F sur E ? Combien sont surjectives ?

R. $64 - 24 - 81 - 36$

2° On développe $(17 + 31)^{43}$ par la formule du binôme. Quel est le plus grand des 44 termes ainsi obtenus ?

R. $C_{43}^{28} \cdot 17^{15} \cdot 31^{28}$

*3° Montrer par récurrence que, pour $n > 1$, on a

$$\frac{2^{2n-1}}{n} < C_{2n}^n < 2^{2n-1}$$

*4° On dispose d'un nombre indéfini de poids de 1 g, 2 g et 4 g. Combien y a-t-il de façons de peser un corps de N g ?

R. En définissant N' et N'' entiers par les inégalités $N - 3 \leq 2N' - 2 \leq 4N'' \leq 2N' \leq N$, on trouve $(N'' + 1)(N' - N'' + 1)$.

5° On dispose de trois autos de 4 places pour transporter 12 personnes. De combien de façons pourra-t-on répartir ces 12 personnes dans les trois autos ?

R. $34\ 650$.

6° On appelle S_n^p la somme des produits p à p des inverses des nombres entiers de 1 à n ($n \geq p \geq 1$). Combien y a-t-il de termes dans S_n^p . Quel est le plus grand de ces termes ?

On pose $S_n^0 = 1$. Établir la relation

$$S_n^p = S_{n-1}^p + \frac{1}{n} S_{n-1}^{p-1} \quad (p \leq n-1)$$

Calculer :

$$S_n^{n-1} \text{ et } S_n^{n-2}$$

R. $2S_n^{n-1} = \frac{n+1}{(n-1)!}, \quad 4S_n^{n-2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{(n-2)!}$

7° Combien y a-t-il de nombres distincts ayant un nombre de chiffres inférieur ou égal à 6 formé avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5 avec répétition possible. Quelle est la somme de ces nombres ?

R. $46\ 656, \quad 12\ 959\ 987\ 040$.

8° E étant un ensemble à trois éléments a, b, c , on considère l'ensemble $\mathcal{P}$ des parties de E . On définit sur $\mathcal{P}$ deux opérations (A et $B \in \mathcal{P}$) :

addition

$$A + B = A \cup B - A \cap B$$

multiplication

$$AB = A \cap B$$

Former la table d'addition et la table de multiplication. Vérifier qu'on donne ainsi à $\mathcal{T}$ une structure d'anneau (anneau booléen).

*9° Soit
$$n = \sum_{i=0}^{p-1} a_i 2^i \quad \text{et} \quad s = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \quad \text{avec} \quad a_i = 0 \text{ ou } 1.$$

Montrer que $n! = k2^{n-s}$, k étant un entier impair.

CHAPITRE II

NOMBRES RÉELS

On peut définir les nombres réels à partir des nombres entiers. Nous ne le ferons pas ici et nous nous contenterons de décrire les propriétés essentielles des nombres réels. Rappelons que les nombres réels permettent de repérer les points et les vecteurs d'une droite (Rappels, § 13).

1. — Propriétés algébriques.

On peut résumer les propriétés algébriques de l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels en disant que $\mathbf{R}$ muni des deux opérations d'addition et de multiplication est un corps (Rappels, § 10), c'est-à-dire :

a) L'addition, qui à tout couple de réels fait correspondre leur somme :

$$(x, y) \mapsto x + y,$$

fait de $\mathbf{R}$ un groupe commutatif; c'est dire que l'on a les propriétés :

- | | | |
|-----|-----------------------------|---------------------|
| (1) | $(x + y) + z = x + (y + z)$ | (associativité). |
| (2) | $x + 0 = 0 + x = x$ | (0 élément neutre). |
| (3) | $x + (-x) = (-x) + x = 0$ | ((-x) opposé de x). |
| (4) | $x + y = y + x$ | (commutativité). |

b) La multiplication, qui à tout couple de réels fait correspondre leur produit :

$$(x, y) \mapsto x \times y = xy,$$

fait de $\mathbf{R}' = \mathbf{R} - \{0\}$ un groupe commutatif. On a les propriétés :

- | | | |
|-----|-------------------------------|-------------------------------------|
| (1) | $(xy)z = x(yz)$ | (associativité). |
| (2) | $x \times 1 = 1 \times x = x$ | (1 élément neutre). |
| (3) | $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ | (x^{-1} inverse de $x \neq 0$). |
| (4) | $xy = yx$ | (commutativité). |

c) La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$x(y + z) = xy + xz$$

Il en résulte (Rappels, § 10) l'égalité :

$$0x = x0 = 0$$

Un produit ne peut être nul que si l'un au moins des deux facteurs est nul, un corps est un anneau intègre.

Rappelons que l'équation en x :

$$x + a = b$$

possède l'unique solution : $x = b + (-a)$ que l'on note $x = b - a$ (soustraction de a).

Et que l'équation :

$$ax = b \quad (a \neq 0)$$

possède l'unique solution : $x = ba^{-1}$ que l'on note $x = \frac{b}{a}$ (division par a).

L'équation $0x = b$ est *impossible* pour $b \neq 0$ (puisque $0x = 0$) et *indéterminée* pour $b = 0$, c'est-à-dire que tout nombre x est solution d'une telle équation. On prendra garde à ce qu'un calcul ne contienne jamais une division par 0.

2. — Propriétés d'ordre.

L'ensemble $\mathbf{R}$ est totalement ordonné par la relation d'ordre ($\leq$). Cet ordre est lié aux opérations d'addition et de multiplication par les propriétés suivantes :

a) L'ordre est invariant par translation :

$$x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad (x + t \leq y + t)$$

b) L'ordre est conservé par une homothétie positive :

$$(x \leq y \quad \text{et} \quad 0 \leq t) \quad \Rightarrow \quad xt \leq yt$$

mais l'ordre est inversé par une homothétie négative :

$$(x \leq y \quad \text{et} \quad t \leq 0) \quad \Rightarrow \quad xt \geq yt$$

c) L'ensemble $\mathbf{R}'_+$ des nombres x strictement positifs ($x > 0$) est un groupe multiplicatif (sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbf{R}'$).

Valeurs absolues. — La *valeur absolue* $|x|$ du nombre x est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{lorsque} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{lorsque} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} |x| \geq 0 \\ |x| = 0 \end{cases} \quad \text{implique} \quad x = 0$$

Pour tout couple (x, y) , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} |xy| = |x| |y| \\ \text{d'où} \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \\ \text{et} \quad ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \end{array} \right.$$

3. — Distances. Propriétés topologiques.

La distance $d(x, y)$ de deux nombres réels x, y est définie par :

$$d(x, y) = |y - x|$$

Les propriétés d'une valeur absolue entraînent immédiatement les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} d(x, y) \geq 0 \\ d(x, y) = 0 \quad \text{implique} \quad x = y \\ d(y, x) = d(x, y) \end{array} \right.$$

et les *inégalités triangulaires* :

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Intervalles et voisinages. — Soit $a \leq b$. L'*intervalle fermé* $I = (a, b)$ est l'ensemble des nombres x qui vérifient la double inégalité : $a \leq x \leq b$.

L'*intervalle ouvert* : $]a, b[$ est défini par l'équivalence

$$(x \in]a, b[) \quad \Longleftrightarrow \quad (a < x < b)$$

l'intervalle $(a, b[$ fermé en a , ouvert en b , est défini par :

$$(x \in (a, b[) \quad \Longleftrightarrow \quad (a \leq x < b)$$

l'intervalle $(a, +\infty[$ est défini par :

$$(x \in (a, +\infty[) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \geq a)$$

l'intervalle $] -\infty, a[$ est défini par :

$$(x \in] -\infty, a[) \quad \Longleftrightarrow \quad (x < a)$$

Soient ε un nombre réel strictement positif ($\varepsilon > 0$) et x_0 un nombre réel. L'ensemble des nombres x qui vérifient la condition :

$$d(x, x_0) < \varepsilon$$

est l'intervalle centré en x_0 :

$$I_\varepsilon =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

On appelle *voisinage* de x_0 toute partie X de $\mathbf{R}$ qui contient un intervalle I_ε centré en x_0 .

Ensembles bornés. — Un ensemble X de nombres réels est dit *majoré* s'il existe un nombre M dit *majorant* de X tel que :

$$(x \in X) \quad \Rightarrow \quad (x \leq M)$$

De même X est dit *minoré* s'il existe un nombre m dit *minorant* de X , tel que :

$$(x \in X) \quad \Rightarrow \quad (x \geq m)$$

L'ensemble X est dit *borné* s'il est à la fois majoré et minoré, c'est-à-dire s'il existe un nombre M tel que

$$\forall x \in X : |x| \leq M$$

Un ensemble fini X possède évidemment un plus grand et un plus petit élément qui sont respectivement le plus petit majorant de X et le plus grand minorant de X , alors que l'ensemble ouvert $I =]a, b)$ n'a ni plus grand ni plus petit élément. Cependant, b est le plus petit majorant de I , et a , en est le plus grand minorant.

Plus généralement on démontre le :

THÉORÈME 1. — *L'ensemble des majorants d'un ensemble majoré non vide X de nombres réels possède un plus petit élément β .*

Ainsi pour tout nombre $\varepsilon > 0$ donné, $\beta - \varepsilon$ n'est pas un majorant de X . Il existe donc $x \in X$ tel que :

$$\beta - \varepsilon < x \leq \beta$$

Le plus petit élément β de l'ensemble des majorants de l'ensemble X est dit la *borne supérieure* de X . Il est noté :

$$\beta = \text{Sup } X$$

De même : l'ensemble des minorants d'un ensemble minoré non vide possède un plus grand élément α dit la *borne inférieure* de X . Il est noté :

$$\alpha = \text{Inf } X$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre $\alpha + \varepsilon$ n'est pas un minorant. Il existe donc $x \in X$ tel que :

$$\alpha \leq x < \alpha + \varepsilon$$

Il est évident que $\text{Sup } X$ et $\text{Inf } X$ sont uniques alors qu'il existe de nombreux majorants et de nombreux minorants.

Approximations décimales. — Soient deux nombres réels $x \geq 0$ et $a > 0$. Il existe alors un entier naturel unique $n \in \mathbf{N}$ qui vérifie la double condition :

$$na \leq x < (n + 1)a$$

Prenons en particulier $a = \frac{1}{10^k}$ ($k \in \mathbf{N}$) et soit :

$$\frac{n}{10^k} \leq x < \frac{n+1}{10^k}$$

Le nombre $\alpha_k = \frac{n}{10^k}$ est dit l'*approximation par défaut* du nombre x à $\frac{1}{10^k}$ près. L'*approximation décimale par excès* de x à $\frac{1}{10^k}$ près est le nombre $\beta_k = \frac{n+1}{10^k}$ lorsque $x \neq \alpha_k$ et le nombre $\beta_k = \alpha_k$ lorsque $x = \alpha_k$. On a :

$$d(x, \alpha_k) < \frac{1}{10^k} \quad \text{et} \quad d(x, \beta_k) < \frac{1}{10^k}$$

Ainsi il existe des nombres rationnels (ici des nombres décimaux) qui sont aussi voisins que l'on veut d'un nombre réel donné.

4. — Suites de nombres réels. Limites.

Une suite infinie S de nombres réels a_n dits *termes* de la suite :

$$S = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots)$$

peut être définie comme la suite des valeurs de la fonction $f: \mathbf{N}' \rightarrow \mathbf{R}$ telle que :

$$a_n = f(n)$$

on désigne une telle suite par $(a_n)_{n \geq 1}$, ou plus simplement par (a_n) .

On dit que le nombre l est *limite* de la suite S (ou encore que S *converge* vers l) si, à tout nombre $\varepsilon > 0$, on peut associer un entier N_ε tel que :

$$(n > N_\varepsilon) \quad \implies \quad (d(a_n, l) < \varepsilon)$$

Si une telle limite l existe, elle est unique.

Soit, en effet $m \neq l$. On a $d(l, m) = \delta > 0$, et l'inégalité : $\delta = d(l, m) \leq d(a_n, l) + d(a_n, m)$ interdit d'avoir simultanément :

$$d(a_n, l) < \frac{\delta}{2} \quad \text{et} \quad d(a_n, m) < \frac{\delta}{2}$$

donc m ne peut être une limite.

On désigne la limite par la notation :

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

Note. — Dans la définition donnée pour la limite l de la suite S on peut indifféremment écrire des inégalités « larges » ou « strictes » car

$$\begin{array}{lll} n > N_\varepsilon & \iff & n \geq N_\varepsilon + 1 \\ d(a_n, l) < \varepsilon & \implies & d(a_n, l) \leq \varepsilon \\ \text{et} \quad d(a_n, l) \leq \varepsilon & \implies & d(a_n, l) < \varepsilon' \end{array}$$

avec $\varepsilon' > \varepsilon > 0$.

EXEMPLE 1. — Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k \dots$ la suite des approximations décimales par défaut du nombre x

l'inégalité :

$$d(\alpha_k, x) < \frac{1}{10^k}$$

entraîne :

$$x = \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k$$

on a de même :

$$x = \lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k$$

où $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_k \dots$ est la suite des approximations par excès de x .

Suites croissantes bornées. — La suite (a_n) est dite *croissante* lorsque ses termes vérifient la condition :

$$a_{n+1} \geq a_n$$

La suite est dite *majorée* si l'ensemble de ses termes est majoré. On a le :

THÉORÈME 2. — Toute suite (a_n) qui est à la fois croissante et majorée a une limite.

Soit en effet β la borne supérieure de l'ensemble des termes de la suite (β existe en vertu du théorème 1).

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc au moins un terme a_N de la suite tel que :

$$\beta - \varepsilon < a_N \leq \beta$$

La suite étant croissante, on a l'implication :

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad \beta - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \beta$$

d'où

$$n > N \quad \Rightarrow \quad d(a_n, \beta) < \varepsilon$$

et par conséquent :

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

On a un énoncé analogue pour les suites *décroissantes* ($a_{n+1} \leq a_n$) et *minorées*. Notons que si une suite croissante n'est pas majorée, on écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

EXEMPLE 2. — Considérons la suite (u_n) .

$$u_1 = 1 + \frac{1}{1!} = 2, \quad u_2 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2,5, \dots$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

et la suite (v_n) :

$$v_1 = u_1 + 1 = 3, \quad v_2 = u_2 + \frac{1}{2 \cdot 2!} = 2,75, \dots$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

La suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) décroissante. En effet :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{-1}{n \cdot n! (n+1)^2} < 0$$

La suite d'inégalités :

$$u_1 < u_2 < \dots < u_n < v_n < \dots < v_2 < v_1$$

montre que la suite (u_n) est majorée par tout terme de la suite (v_n) . Elle a donc une limite que nous noterons e .

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

Ce nombre e est également la limite de la suite (v_n) . Les inégalités :

$$d(v_n, e) \leq d(u_n, v_n) + d(u_n, e) \leq \frac{1}{n \cdot n!} + d(u_n, e)$$

montrent en effet que la distance $d(v_n, e)$ peut être rendue aussi voisine de 0 que l'on veut.

Pour $n = 2$ on obtient :

$$u_2 = 2,5 < e < v_2 = 2,75$$

Pour chercher une approximation de e à $\frac{1}{10^5}$ près ; il suffit de choisir n tel que :

$$n \cdot n! > 10^5$$

On trouve $n = 7$ et les inégalités :

$$2,71828 < e < 2,71829$$

EXERCICES

1° Soit $x = 0,012345679 \ 0123456790 \dots$, un nombre écrit sous forme décimale, la suite (infinie) des chiffres décimaux se reproduisant périodiquement.

Montrer que x vérifie une équation de la forme $10^k x = x + n$ où k et n sont deux entiers convenables. En déduire $x \in \mathbb{Q}$ et exprimer x sous la forme la plus simple

$$R. \ x = \frac{1}{81}$$

2° Soit E l'ensemble des nombres réels positifs dont la partie décimale ne comporte pas de chiffres 0 ou 9.

Soit F l'ensemble des nombres de E qui sont supérieurs au nombre $\pi = 3,141592\dots$ et soit $f = \inf. F$. Montrer que $f \in F \cap \mathbb{Q}$.

$$R. f = 3,1416 + 10^{-4} \cdot \frac{1}{9}$$

3° Soit $I_1 = [0, 1]$ un intervalle de l'axe des x . On partage I_1 en quatre intervalles égaux et l'on désigne par I_2 le second de ces quatre intervalles (on a donc $I_2 = [1/4, 1/2]$). On recommence sur l'intervalle I_2 le découpage qui vient d'être fait sur I_1 , on obtient ainsi un intervalle I_3 et l'on continue indéfiniment. On obtient alors une suite infinie d'intervalles $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n, \dots$

Montrer qu'il existe un nombre réel x et un seul qui appartient à tous les intervalles I_n

$$R. x = \frac{1}{3}$$

4° Soit $t \in [0, 1]$. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par le premier terme $u_1 = 0$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(t - u_n^2)$$

Calculer u_2, u_3, u_4 et montrer que u_n est un polynôme en t de degré 2^{n-2} pour $n \geq 2$ (on n'explicitera pas ce polynôme).

Montrer que l'on peut écrire

$$\sqrt{t} - u_{n+1} = (\sqrt{t} - u_n) \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + u_n)\right)$$

en déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

$$R. \sqrt{t}$$

*5° a et b étant des nombres positifs, on pose :

$$x_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad x_2 = \frac{ax_1}{\sqrt{a^2 + x_1^2}}, \quad \dots, \quad x_{n+1} = \frac{ax_n}{\sqrt{a^2 + x_n^2}}, \quad \dots$$

Évaluer x_n en fonction de a, b et n . On se donne ε positif, montrer que :

$$n \geq \frac{a^2}{\varepsilon^2} \quad \Rightarrow \quad x_n < \varepsilon.$$

6° Le nombre u_1 étant compris entre -1 et 0 , on pose :

$$u_2 = u_1 + u_1^2, \quad u_3 = u_2 + u_2^2, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2, \quad \dots$$

Montrer, par récurrence, que quel que soit n :

$$-\frac{1}{n} < u_n < 0.$$

CHAPITRE III

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE (ÉTUDE LOCALE)

1. — *Limite et continuité.*

Soit f une fonction à valeurs réelles et définie dans un voisinage du nombre réel x_0 sauf — peut-être — en x_0 .

On dit que le nombre l est *limite de f en x_0* si $f(x)$ est aussi voisin que l'on veut de l dès que x est suffisamment voisin de x_0 , mais distinct de x_0 , c'est-à-dire d'une façon explicite :

Si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que :

$$(d(x, x_0) = |x - x_0| < \eta \quad \text{et} \quad x \neq x_0)$$

implique

$$d(f(x), l) = |f(x) - l| < \varepsilon$$

Lorsqu'une telle limite existe, elle est unique.

En effet, pour $m \neq l$, on a $d(l, m) = \delta > 0$.

Or

$$\delta = d(l, m) \leq d(l, f(x)) + d(f(x), m)$$

On ne peut donc avoir simultanément

$$d(l, f(x)) < \frac{\delta}{2} \quad \text{et} \quad d(f(x), m) < \frac{\delta}{2}$$

Ainsi m ne peut être limite de f en x_0 .

On note alors

$$l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) \quad \text{ou, plus simplement,} \quad l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

On dit aussi que $f(x)$ *tend vers l lorsque x tend vers x_0* (ce que symbolise la notation $x \rightarrow x_0$).

Note. — Comme on l'a vu au chapitre II, § 4, on peut remplacer dans la définition d'une limite les inégalités strictes par des inégalités « larges » soit

$$|x - x_0| \leq \eta \quad \Longleftrightarrow \quad |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

mais il n'est pas possible d'« élargir » les inégalités strictes $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$.

EXEMPLE 1. — Soit $f(x) = \frac{3x^2}{|x|}$ pour $x \neq 0$.

On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$$

En effet, pour $x \neq 0$, on a $d(f(x), 0) = |f(x)| = 3|x|$. Donc

$$\left(|x| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad x \neq 0 \right) \implies d(f(x), 0) < \varepsilon$$

Limite à gauche, à droite. — Le nombre λ est dit *limite à droite de f en x_0* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que :

$$(d(x, x_0) < \eta \quad \text{et} \quad x > x_0) \implies d(f(x), \lambda) < \varepsilon$$

De même le nombre μ est *limite à gauche de f en x_0* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$(d(x, x_0) < \eta \quad \text{et} \quad x < x_0) \implies d(f(x), \mu) < \varepsilon$$

on note ces limites :

$$\lambda = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lambda = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$$

et

$$\mu = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) \quad \text{ou} \quad \mu = \lim_{x \uparrow x_0} f(x)$$

On écrit aussi parfois $\lambda = f(x_0 + 0)$, $\mu = f(x_0 - 0)$.

Pour que l soit limite de f en x_0 il faut et il suffit que les limites à droite et à gauche de f en x_0 existent et soient égales :

$$l = \lambda = \mu$$

EXEMPLE 2. — Soit $f(x) = \frac{|x| + x^2}{x}$ pour $x \neq 0$.

Pour $x > 0$ on a $f(x) = \frac{x + x^2}{x} = 1 + x$ d'où

$$d(f(x), 1) = x$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$$

Pour $x < 0$ on a $f(x) = \frac{-x + x^2}{x} = -1 + x$ d'où

$$d(f(x), -1) = |x|$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -1$$

on notera que f n'a pas de limite en 0 (fig. 1).

Continuité. — Soit f une fonction définie dans un voisinage de x_0 (f est donc définie en x_0).

La fonction f est dite *continue en x_0* si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

c'est-à-dire si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(d(x, x_0) < \eta) \implies (d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)$$

EXEMPLE 3. — La fonction constante $x \mapsto f(x) = a$ est continue pour toute valeur x_0 puisque $d(f(x), f(x_0)) = 0$.

La fonction identique $x \mapsto f(x) = x$ est continue pour toute valeur x_0 puisque $d(f(x), f(x_0)) = d(x, x_0)$.

La fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{pour } x \neq 0, \text{ et} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

a une limite $l = 0$ en $x = 0$, mais la fonction f n'est pas continue en 0 puisque

$$f(0) = 1 \neq l.$$

Continuité à droite, à gauche. — On définit la *continuité à droite de f en x_0* par la condition

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

on définit de même la *continuité à gauche*.

Une fonction f continue en x_0 à droite et à gauche est donc continue en x_0 .

2. — Limites infinies ; limites à l'infini.

Soit f une fonction définie dans un voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0 .

On dit que $f(x)$ *tend vers « plus l'infini »* lorsque x tend vers x_0 si pour tout nombre A il existe $\eta > 0$ tel que

$$(d(x, x_0) < \eta \text{ et } x \neq x_0) \implies (f(x) > A)$$

ce que l'on note

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = +\infty$$

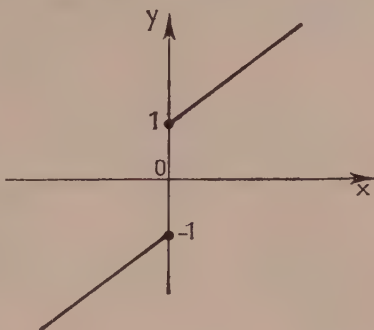


FIG. 1.

On définit comme précédemment la relation

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$$

La relation $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$ s'écrit de manière évidente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

EXEMPLE 4. — Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

En effet, on a

$$\frac{1}{x} > A > 0 \quad \text{pour} \quad x < \frac{1}{A}$$

On a de même

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Limites à l'infini. — Soit f une fonction définie pour les grandes valeurs de x , c'est-à-dire sur un intervalle $]a, +\infty[$.

On dit que le nombre l est *limite de f lorsque x tend vers $(+\infty)$* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre A tel que

$$x > A \quad \Longleftrightarrow \quad d(f(x), l) < \varepsilon$$

On exprime ceci par la relation

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

On définit de manière analogue la relation

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

EXEMPLE 5. — Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

En effet on a

$$0 < \frac{1}{x} < \varepsilon \quad \text{pour} \quad x > \frac{1}{\varepsilon}$$

On a de même

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

La notation $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se comprend alors d'elle-même et signifie que, pour tout nombre A , il existe un nombre B tel que

$$(x > B) \implies (f(x) > A)$$

EXEMPLE 6. — On a manifestement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Il en résulte, plus généralement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad (\text{pour } n \text{ entier } \geq 1)$$

En effet, pour $x > 1$ on a les inégalités

$$x^n > x^{n-1} > \dots > x$$

Pour n entier pair, on a $(-x)^n = x^n$ d'où

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$$

Pour n entier impair, on a $(-x)^n = -x^n$ d'où

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$$

3. — Théorèmes généraux.

La condition

$$(1) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l$$

est équivalente à la condition :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} (f(x) - l) = 0$$

qui peut encore s'écrire, en posant

$$x - x_0 = h \quad \text{et} \quad f(x) - l = f(x_0 + h) - l = \varepsilon(h)$$

sous la forme

$$(2) \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \varepsilon(h) = 0$$

Désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions définies au voisinage de 0, mais non nécessairement en 0, et qui ont une limite nulle en 0. La condition (1) peut donc s'écrire :

$$f(x) = f(x_0 + h) = l + \varepsilon(h) \quad (\text{avec } \varepsilon \in \mathcal{E})$$

On a les propriétés (a) et (b) suivantes :

a) La somme de deux fonctions de $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{E}$.

En effet, si $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h)$ appartiennent à $\mathcal{E}$, alors pour tout nombre $\alpha > 0$, il existe η_1 et η_2 tels que

$$(|h| < \eta_1 \text{ et } h \neq 0) \implies |\varepsilon_1(h)| < \frac{\alpha}{2}$$

$$(|h| < \eta_2 \text{ et } h \neq 0) \implies |\varepsilon_2(h)| < \frac{\alpha}{2}$$

d'où

$$(|h| < \inf(\eta_1, \eta_2))$$

et

$$h \neq 0) \implies |\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h)| \leq |\varepsilon_1(h)| + |\varepsilon_2(h)| < \alpha$$

b) Le produit d'une fonction de $\mathcal{E}$ par une fonction bornée appartient à $\mathcal{E}$.

Une fonction φ définie dans un voisinage de 0, sauf peut-être en 0, est dite *bornée au voisinage* de 0 s'il existe un nombre $\eta > 0$ et un nombre $M > 0$ tels que :

$$(|h| < \eta \text{ et } h \neq 0) \implies |\varphi(h)| < M$$

Soit alors $\varepsilon_1(h) \in \mathcal{E}$, pour tout nombre $\alpha > 0$ il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$(|h| < \eta_1 \text{ et } h \neq 0) \implies |\varepsilon_1(h)| < \frac{\alpha}{M}$$

d'où

$$(|h| < \inf(\eta, \eta_1) \text{ et } h \neq 0) \implies |\varphi(h) \varepsilon_1(h)| < M \cdot \frac{\alpha}{M} = \alpha$$

Nous désignerons souvent par la notation ε une fonction quelconque de $\mathcal{E}$ c'est-à-dire une fonction *infinitement petite* en même temps que la variable. Les propriétés a) et b) s'écrivent alors symboliquement :

$$\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon$$

$$\varphi \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

où φ est une fonction bornée au voisinage de 0. En particulier on a

$$k\varepsilon = \varepsilon \quad (k \in \mathbf{R})$$

et

$$\varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

car $\varphi = k$ et $\varphi = \varepsilon$ sont des fonctions bornées. L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc un anneau.

THÉORÈME 1. — Les relations $l_1 = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f_1(x)$ et $l_2 = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f_2(x)$ entraînent les relations :

$$1^\circ \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} (f_1(x) + f_2(x)) = l_1 + l_2$$

$$2^\circ \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = l_1 \cdot l_2$$

et, lorsque $l_2 \neq 0$

$$3^o \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

En effet, on a, en posant $x - x_0 = h$

$$f_1(x) = l_1 + \varepsilon(h) \quad \text{et} \quad f_2(x) = l_2 + \varepsilon(h)$$

D'où

$$f_1(x) + f_2(x) = l_1 + l_2 + \varepsilon(h) + \varepsilon(h) = l_1 + l_2 + \varepsilon(h)$$

et

$$\begin{aligned} f_1(x)f_2(x) &= (l_1 + \varepsilon(h))(l_2 + \varepsilon(h)) = l_1l_2 + l_1\varepsilon(h) + l_2\varepsilon(h) + \varepsilon(h)\varepsilon(h) \\ &= l_1l_2 + \varepsilon(h) \end{aligned}$$

enfin

$$\begin{aligned} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} &= \frac{l_1 + \varepsilon(h)}{l_2 + \varepsilon(h)} = \frac{l_1}{l_2} + \frac{\varepsilon(h)\frac{1}{l_2} - \varepsilon(h)\frac{l_1}{l_2^2}}{1 + \varepsilon(h)\frac{1}{l_2}} \\ &= \frac{l_1}{l_2} + \varepsilon(h) \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon(h)} = \frac{l_1}{l_2} + \varepsilon(h) \end{aligned}$$

car la fonction $\varphi(h) = \frac{1}{1 + \varepsilon(h)}$ est une fonction bornée.

REMARQUES. — 1^o Le théorème 1 est encore vrai si on prend des limites à droite (ou à gauche).

2^o On aurait un théorème analogue lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

3^o On aurait un résultat analogue à la somme concernant la différence $f_1 - f_2$ (qui tend vers $l_1 - l_2$) mais ceci est une conséquence immédiate du théorème 1 puisque $f_1 - f_2 = f_1 + (-1)f_2$.

Le théorème 1 a pour conséquences immédiates les résultats suivants :

COROLLAIRE 1. — Si les fonctions f et g sont continues à droite pour $x = x_0$, il en est de même des fonctions $f + g$ et fg et encore de même de la fonction f/g si $g(x_0) \neq 0$.

On pourrait évidemment remplacer dans ce corollaire le mot « à droite » par le mot « à gauche » et par suite :

COROLLAIRE 2. — Si les fonctions f et g sont continues pour $x = x_0$, il en est de même des fonctions $f + g$ et fg , et encore de même de la fonction f/g si $g(x_0) \neq 0$.

REMARQUE. — En raisonnant par récurrence sur le nombre n des fonctions que l'on considère, on voit immédiatement que les résultats énoncés dans le théorème 1 et ses corollaires s'étendent à la somme $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ et au produit $f_1f_2 \dots f_n$ de n fonctions. C'est ainsi que la somme et le produit d'un nombre fini de fonctions continues en x_0 sont encore des fonctions continues en x_0 .

4. — *Applications.*

a) Fonctions puissances. — La fonction puissance $p_n(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}}$ produit de n fonctions égales à la fonction identique est donc une fonction continue pour toute valeur de x .

La fonction $p_{-n}(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, définie pour $x \neq 0$, est continue pour toute valeur non nulle de x . On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

et

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty, \quad \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

b) Fonctions polynômes. — Une fonction polynôme

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad x \mapsto P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

somme de fonctions continues pour toute valeur de x est continue pour tout x

Pour $a_n \neq 0$ on peut écrire

$$P(x) = a_n x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} \right]$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{a_n x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{a_n x^n} = 1$$

Il en résulte (pour $n \geq 1$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } a_n > 0 \\ -\infty & \text{pour } a_n < 0 \end{cases}$$

ce que l'on peut énoncer brièvement :

Un polynôme se comporte à l'infini comme son terme de degré le plus élevé.

On a encore, lorsque n est pair,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } a_n > 0 \\ -\infty & \text{pour } a_n < 0 \end{cases}$$

mais lorsque n est impair

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \begin{cases} -\infty & \text{pour } a_n > 0 \\ +\infty & \text{pour } a_n < 0 \end{cases}$$

On aura l'allure approximative du graphe de la fonction $y = P(x)$ lorsque $|x|$ sera suffisamment grand en distinguant le signe de a_n et la parité de n , ce qui donne quatre cas de figure (fig. 2).

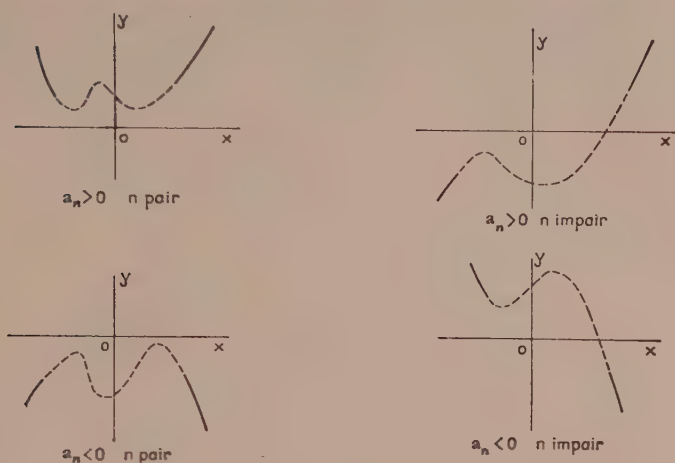


FIG. 2.

c) **Fonctions rationnelles.** — Soient P et Q deux polynômes. La fonction

$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dite *fonction rationnelle* est définie et continue pour toute valeur de x qui n'annule pas le dénominateur $Q(x)$, c'est-à-dire qui n'est pas *racine* du polynôme Q .

Si a est racine de Q nous montrerons (chap. XV, § 4) qu'il existe un entier q non nul, dit *ordre de multiplicité* de la racine a , tel que

$$Q(x) = (x - a)^q T(x) \quad \text{avec} \quad T(a) \neq 0$$

Nous distinguerons plusieurs cas.

1° *Le nombre a n'est pas racine de P .* — On a $P(a) \neq 0$ et le nombre a est dit *pôle d'ordre q* :

$$f(x) = \frac{1}{(x - a)^q} \cdot \frac{P(x)}{T(x)}$$

Posons

$$A = \frac{P(a)}{T(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{T(x)}$$

on a donc $A \neq 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{A}{(x - a)^q}} = 1$$

La fonction $f(x)$ se comporte comme $\frac{A}{(x - a)^q}$ lorsque x tend vers a (à droite ou à gauche).

Nous voyons donc qu'il y a quatre cas possibles suivant le signe de A et la parité de q . Le graphe de $f(x)$ a une *asymptote* parallèle à Oy avec quatre cas de figure (fig. 3).

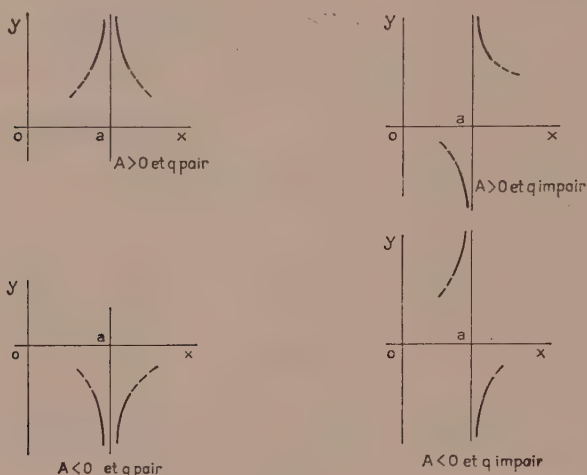


FIG. 3.

2° Le nombre a est une racine de P . — En désignant par p l'ordre de multiplicité de la racine a de P , on peut écrire $P = (x - a)^p R(x)$ où $R(x)$ est un polynôme tel que $R(a) \neq 0$.

Par suite $f(x) = \frac{(x - a)^p R(x)}{(x - a)^q T(x)}$. Deux cas sont alors possibles :

a) $q > p$. La fonction f est égale à la fonction $\frac{R(x)}{(x - a)^{q-p} T(x)}$. Alors on est ramené au cas 1° : a est un pôle d'ordre $q - p$ de f .

b) $q \leq p$. Pour toute valeur de x distincte de a , la fonction f est égale à la fonction $g(x) = (x - a)^{p-q} \frac{R(x)}{T(x)}$. La fonction g est encore définie pour $x = a$, alors que la fonction f ne l'est pas (pour $x = a$ elle prend la forme $\frac{0}{0}$). On a cependant :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$$

Il résulte de cette étude qu'une fonction rationnelle a une limite finie pour toute valeur de x autre qu'un pôle et que, lorsque a est un pôle, on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$$

Étudions maintenant le comportement de la fonction f lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$:

$$\text{Soit } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^n + \dots + a_n}{b_0 x^m + \dots + b_m} \text{ avec } a_0 \neq 0 \text{ et } b_0 \neq 0.$$

On peut écrire : $f(x) = \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} f_1(x)$ avec :

$$f_1(x) = \frac{1 + \frac{a_1}{a_0} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_n}{a_0} \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_1}{b_0} \frac{1}{x} + \dots + \frac{b_m}{b_0} \frac{1}{x^m}}.$$

Mais $f_1(x)$ tendant vers 1 lorsque $|x|$ tend vers l'infini, on voit que $f(x)$ se comportera comme la fraction $\frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$.

Trois cas sont alors possibles :

a) $n > m$. C'est-à-dire : le degré du numérateur est strictement supérieur au degré du dénominateur.

$f(x)$ se comporte comme le monôme $\frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$ (dont le comportement pour $|x|$ infini a été indiqué ci-dessus).

b) $n = m$. C'est-à-dire : le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur.

$f(x)$ tend vers la quantité $\frac{a_0}{b_0}$. Son graphe est asymptote à la parallèle à l'axe des x d'ordonnée $\frac{a_0}{b_0}$.

c) $n < m$. C'est-à-dire : le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur.

$f(x)$ tend alors vers 0 lorsque $|x|$ tend vers l'infini.

Le graphe de $f(x)$ est alors asymptote à l'axe des x avec quatre cas de figure selon le signe de $\frac{a_0}{b_0}$ et la parité de l'entier $m - n$ (fig. 4).

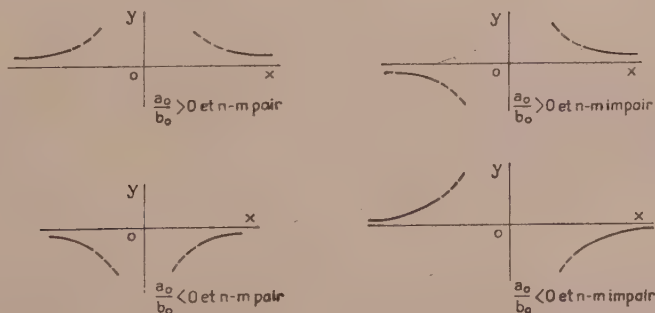


FIG. 4.

EXERCICES

1° Soit E la fonction « partie entière » définie, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par

$$E(x) = n \quad \text{lorsque} \quad n \leq x < n + 1 \quad (n \in \mathbf{Z})$$

a) Calculer les limites :

$$\lambda = \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} E(x), \quad \mu = \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} E(x), \quad l = \lim_{x \rightarrow x_0} E(x) \quad \text{pour } x_0 \notin \mathbf{Z}$$

b) Pour quelles valeurs de x la fonction $E(x)$ est-elle continue ?

R. a) $\lambda = n$, $\mu = n - 1$, $l = E(x_0)$; b) $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$

*2° On suppose que les deux fonctions f et g sont telles que

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \quad \text{implique} \quad |f(x) - 3| < \varepsilon$$

et que

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{10} \quad \text{implique} \quad |g(x) - 8| < \varepsilon$$

Déterminer un nombre η tel que $|x - 2| < \eta$ implique $|f(x)g(x) - 24| < \frac{1}{100}$.

R. En posant $f - 3 = \alpha$, $g - 8 = \beta$, on a $fg - 24 = 3\beta + 8\alpha + \alpha\beta$ il suffit d'avoir $3|\beta| < \frac{1}{300}$, $8|\alpha| < \frac{1}{300}$, $|\alpha\beta| < \frac{1}{300}$, on trouve alors $\eta = \frac{1}{12\,000}$.

3° Soit $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x(x - 1)(x - 2)}$. Calculer les limites

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} xf(x), \quad B = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)f(x), \quad C = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)f(x)$$

et vérifier l'égalité

$$y = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x - 2}$$

R. $A = 1/2$ $B = -3$ $C = 7/2$

4° Soit $y = f(x) = \frac{x + 1 + |x - 2|}{|3 - x| + 2x}$ ($x \in \mathbf{R}$)

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ? Pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle continue?

b) Déterminer $\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

R. a) $x \neq -3$, b) $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = 0$

*5° Montrer que si une fonction f est continue en x_0 il en est de même de la fonction $\varphi = |f|$ définie par $\varphi(x) = |f(x)|$.

6° La fonction $y = \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+1)}$ est-elle continue en $x = 0$?

R. Non, car la fonction n'est pas définie dans un voisinage de $x = 0$.

7° Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ f(x) = 1 - x & \text{si } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

a) Pour quelles valeurs de x , la fonction f est-elle continue?

b) Montrer que f est une bijection de $[0, 1]$ sur lui-même. Que peut-on dire de $f \circ f$?

R. a) $x = \frac{1}{2}$, b) $f \circ f(x) = x$

CHAPITRE IV

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS (ÉTUDE GLOBALE)

1. — Continuité sur un intervalle.

Une fonction est dite *continue sur (ou dans) l'intervalle ouvert* $]a, b[$ (si elle est continue en tout point de $]a, b[$). Elle est dite *continue sur (ou dans) l'intervalle fermé* $[a, b]$ si elle est continue dans l'intervalle ouvert $]a, b[$ et (dans le cas où $a < b$) si elle est continue à droite pour la valeur a et à gauche pour la valeur b .

On notera que cette dernière définition peut s'interpréter en disant que le

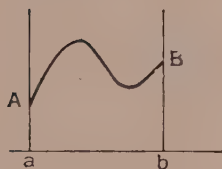


FIG. 1.

graphe de f joint de façon continue le point A de coordonnées a et $f(a)$ au point B de coordonnées b et $f(b)$ comme dans le cas de la figure 1.

Désignons par $C(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I . Il résulte du théorème 1 du chapitre précédent que si f et g appartiennent à $C(I)$ on a $f + g \in C(I)$ et, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda f \in C(I)$.

Si f et g appartiennent à $C(I)$ on a $f \cdot g \in C(I)$.

L'ensemble $C(I)$ muni des deux opérations d'addition et de multiplication est donc un sous-anneau de l'anneau des applications de I dans $\mathbf{R}$.

Continuité sur un intervalle fermé. — Nous admettrons sans démonstration le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME 1. — Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé (a, b) . Il existe deux nombres M et m ayant les propriétés suivantes :

1° Si un nombre λ vérifie les inégalités $m \leq \lambda \leq M$, la fonction f prend au moins une fois la valeur λ dans l'intervalle fermé (a, b) .

2° Si $\lambda > M$ ou si $\lambda < m$, la fonction f ne prend jamais la valeur λ dans l'intervalle fermé (a, b) .

Ce théorème énonce une propriété géométrique intuitivement évidente, c'est qu'un arc de courbe continu et fini est compris entre deux parallèles à Ox d'ordonnées M et m , toute parallèle à Ox comprise entre ces deux droites

coupant au moins une fois l'arc de courbe et toute parallèles extérieure à ces deux droites ne la coupant pas.

On voit tout de suite la nécessité des hypothèses faites :

$$1^{\circ} \text{ La fonction } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

n'est pas continue pour $x = 0$. Sur l'intervalle $] -1, +1[$ elle prend les valeurs -1

et $+1$, mais ne prend jamais la valeur intermédiaire $\frac{1}{2}$.

$$2^{\circ} \text{ La fonction } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ n'est pas continue pour } x = 0.$$

Sur l'intervalle $(-1, +1)$ elle prend des valeurs aussi grandes que l'on veut.

3^o La fonction $f(x) = x^2$ prise sur l'intervalle $]0, 2[$ qui n'est pas fermé, mais ouvert, n'y atteint pas ses bornes inférieure et supérieure qui sont égales à 0 et 4.

E étant un ensemble de nombres tel que la fonction f soit définie pour tout $x \in E$, on appelle *maximum de f sur E* tout nombre M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in E$ et tel que $f(x)$ prenne au moins une fois la valeur M lorsque x parcourt E . Un tel nombre n'existe pas nécessairement, mais s'il existe il est unique. On définit de manière analogue le *minimum de f sur E* .

En désignant par $f(E)$ l'ensemble des nombres de la forme $f(x)$ lorsque x parcourt E , on voit que si M est le maximum de f sur E , le nombre M est la borne supérieure $\text{Sup}(f(E))$ de l'ensemble $f(E)$. Mais si l'ensemble $f(E)$ admet une borne supérieure M' , ce nombre n'est pas nécessairement un maximum de f sur E comme le montre l'exemple précédent de la fonction $f(x) = x^2$, E étant l'intervalle ouvert $]0, 2[$: l'ensemble $f(E)$ est l'intervalle ouvert $]0, 4[$ qui admet 4 pour borne supérieure, mais f ne prend pas la valeur 4 sur E . On aurait des résultats analogues pour le minimum.

Le théorème 1 admet le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Toute fonction continue sur un intervalle fermé admet un maximum et un minimum sur cet intervalle.*

Remarquons enfin que si la fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, on pourra appliquer le théorème 1 à un intervalle fermé (a', b') , a' et b' étant choisis arbitrairement sur l'ouvert $]a, b[$. En général, on choisira a' voisin de a et b' voisin de b .

Continuité uniforme. — Considérons une fonction $f(x)$ définie et continue dans l'intervalle fermé (a, b) . Si nous nous reportons à la définition de la conti-

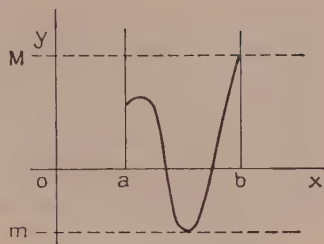


FIG. 2.

nuité en choisissant une valeur x_0 de l'intervalle et $\varepsilon > 0$, on peut déterminer un certain nombre $\eta > 0$ tel que l'inégalité $|x - x_0| < \eta$ entraîne $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ce nombre η dépend non seulement du choix de ε mais aussi de celui de x_0 et variera en général si nous choisissons d'autres valeurs de x_0 dans l'intervalle. Il est parfois intéressant de remplacer η par un nombre $\eta_1 > 0$ plus petit que η mais qui convienne pour toute valeur x_0 de l'intervalle. Le théorème suivant montre que ceci est possible.

THÉORÈME 2. — Soit une fonction $f(x)$ continue dans un intervalle fermé (a, b) et $\varepsilon > 0$. Il existe un nombre $\eta > 0$ tel que si deux valeurs x_0 et x'_0 de l'intervalle vérifient l'inégalité $|x_0 - x'_0| < \eta$, il en résulte toujours

$$|f(x_0) - f(x'_0)| < \varepsilon$$

c'est-à-dire encore

$$d(x_0, x'_0) < \eta \quad \Rightarrow \quad d(f(x_0), f(x'_0)) < \varepsilon$$

On exprime encore le théorème 2 en disant que toute fonction continue sur un intervalle fermé (a, b) est *uniformément continue* sur cet intervalle.

Nous admettrons ce résultat.

2. — Inversion d'une fonction.

Fonctions croissantes, décroissantes, monotones. — Une fonction f définie sur une partie E de $\mathbf{R}$ est dite *croissante sur E* (ou *jamais décroissante*) si l'application

$$x \mapsto f(x)$$

respecte l'ordre des nombres réels, c'est-à-dire si

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad (x_1 \leq x_2) \quad \Rightarrow \quad (f(x_1) \leq f(x_2))$$

La fonction f est dite *strictement croissante sur E* lorsque

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad (x_1 < x_2) \quad \Rightarrow \quad (f(x_1) < f(x_2))$$

De même une fonction f est dite *décroissante sur E* (ou *jamais croissante*) si l'application $x \mapsto f(x)$ inverse l'ordre, c'est-à-dire si

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad (x_1 \leq x_2) \quad \Rightarrow \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$$

Toute fonction strictement croissante est une fonction jamais décroissante. Mais une fonction jamais décroissante peut avoir des intervalles où elle reste constante, ce qui n'est pas le cas d'une fonction strictement croissante (fig. 3).

Une fonction jamais décroissante ou jamais croissante sur E est dite *monotone* sur E . Une fonction strictement croissante ou strictement décroissante sur E est dite *strictement monotone* sur E . On montre aisément qu'une fonction f

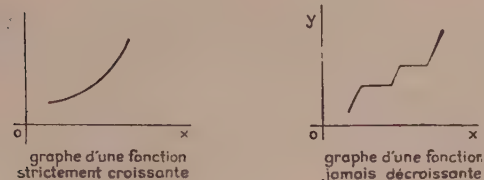


FIG. 3.

continue sur $]a, b[$ (et non strictement monotone n'est pas injective. Elle n'admet donc pas de fonction réciproque.

Si par exemple f passe par un maximum en $c \in]a, b[$, on voit qu'à une valeur y peu inférieure à $f(c)$ correspondent pour x deux valeurs possibles x_1 et x_2 (fig. 4).

Si f est monotone sans être strictement monotone et si f reste constante sur un intervalle (c, d) tel que $c < d$, toutes les valeurs comprises entre c et d correspondent à $y = f(c)$ (fig. 5).

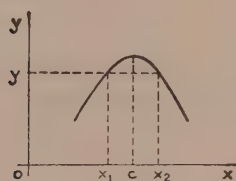


FIG. 4.

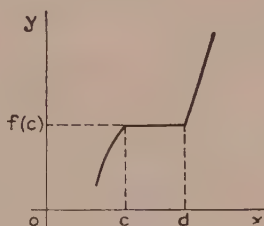


FIG. 5.

On a, par contre, le

THÉORÈME 3. — Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle fermé (a, b) . Elle a une fonction réciproque qui est définie, continue et strictement monotone sur l'intervalle fermé $(f(a), f(b))$.

Pour fixer les idées supposons f strictement croissante sur (a, b) (avec $a < b$).

Soit $y \in (f(a), f(b))$. D'après le théorème 1 du chapitre précédent il existe $x \in (a, b)$ tel que

$$y = f(x)$$

Ce qui signifie que f est une application surjective de (a, b) sur $(f(a), f(b))$; mais f est aussi une application injective car l'inégalité $x_1 \neq x_2$, par exemple $x_1 < x_2$, entraîne $f(x_1) < f(x_2)$ d'où $f(x_1) \neq f(x_2)$.

La fonction f est donc une bijection de (a, b) sur $(f(a), f(b))$ et il existe une fonction inverse ou réciproque $\varphi = f^{-1}$.

Cette fonction est une application strictement croissante de $(f(a), f(b))$

sur (a, b) . Si $y_1 < y_2$, on ne peut avoir $x_1 = \varphi(y_1) \geq x_2 = \varphi(y_2)$ puisque cette inégalité impliquerait $y_1 = f(x_1) \geq y_2 = f(x_2)$. On a donc $\varphi(y_1) < \varphi(y_2)$.

Reste à montrer la continuité de φ .

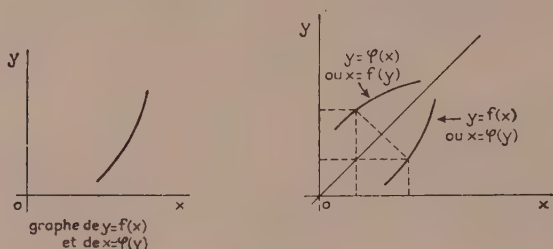


FIG. 6.

On peut la considérer comme intuitivement évidente à partir du fait que les graphes de $f(x)$ et de $\varphi(x)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (fig. 6).

Démontrons-le rigoureusement :

Soient $x_0 \in]a, b[$, $y_0 = f(x_0)$ et $\varepsilon > 0$ un nombre suffisamment petit pour que $a < x_0 - \varepsilon$ et $x_0 + \varepsilon < b$. On a des égalités de la forme :

$$\begin{aligned} f(x_0 - \varepsilon) &= y_0 - \eta_1 \\ f(x_0 + \varepsilon) &= y_0 + \eta_2 \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \eta_1, \eta_2 > 0.$$

Désignons par η le plus petit des nombres η_1 et η_2 et posons $x = \varphi(y)$ de sorte que $y = f(x)$.

L'inégalité $|y - y_0| < \eta$ entraîne

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x) < f(x_0 + \varepsilon)$$

et par suite :

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon,$$

c'est-à-dire encore $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$, ce qui montre la continuité de φ pour y_0 .

Pour achever la démonstration du théorème il suffit de montrer que φ est continue à droite pour $f(a)$ et continue à gauche pour $f(b)$. Nous laissons au lecteur le soin de le faire.

Application : Inversion des fonctions puissances. — Considérons la fonction $y = f(x) = x^n$ où n est un entier naturel quelconque. Nous savons qu'elle est définie et continue pour toutes les valeurs de x . Mais pour en faire l'inversion il faut savoir si cette fonction est monotone. Nous distinguerons deux cas :

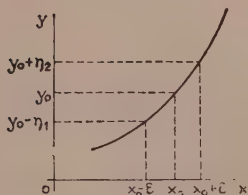


FIG. 7.

1° n est un entier impair (que nous supposons différent de 1). Remarquons d'abord que :

$$f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x).$$

L'égalité $f(-x) = -f(x)$ s'exprime en disant que la fonction f est *impaire*. Le graphe d'une telle fonction admet l'origine comme centre de symétrie. Il nous suffira donc d'étudier son sens de variation lorsque x est positif, c'est-à-dire de comparer les signes de :

$$x_1^n - x_0^n \quad \text{et de} \quad x_1 - x_0$$

en supposant x_1 et x_0 positifs. Or, d'après une égalité classique

$$x_1^n - x_0^n = (x_1 - x_0)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \dots + x_1x_0^{n-2} + x_0^{n-1}).$$

Le deuxième facteur, étant une somme de quantités toutes positives, est positif.

$x_1^n - x_0^n$ et $x_1 - x_0$ étant de même signe,

la fonction $y = x^n$ est croissante de

0 à $+\infty$ quand x croît de 0 à $+\infty$. Il en résulte que la fonction $y = x^n$ croît de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$.

Nous pouvons donc faire l'inversion de cette fonction. La fonction réciproque $\varphi(x)$ notée $\sqrt[n]{x}$ (n étant un entier impair) est définie, continue et croissante pour toutes les valeurs de x de $-\infty$ à $+\infty$.

Les graphes des deux fonctions $f(x) = x^n$ et $\varphi(x) = \sqrt[n]{x}$ se tracent immédiatement (fig. 8).

2° n est un entier pair non nul. — On a alors :

$$f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x).$$

L'égalité $f(-x) = f(x)$ s'exprime en disant que la fonction f est *paire*. Son graphe admet alors Oy comme axe de symétrie. Il nous suffira de le tracer pour $x \geq 0$. Le même calcul que ci-dessus montre que pour $x \geq 0$ la fonction f est croissante.

Le tableau de variation de y se présentera alors sous la forme suivante :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

La fonction y n'est pas monotone dans tout l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. Pour en faire l'inversion on devra se limiter soit à l'intervalle $]-\infty, 0[$, soit à l'intervalle $]0, +\infty[$. Par convention on représente par $y = \sqrt[n]{x}$ ou $y = x^{\frac{1}{n}}$ la

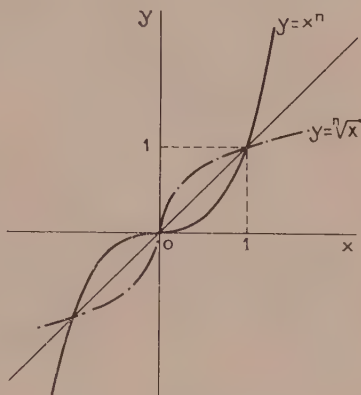


FIG. 8.

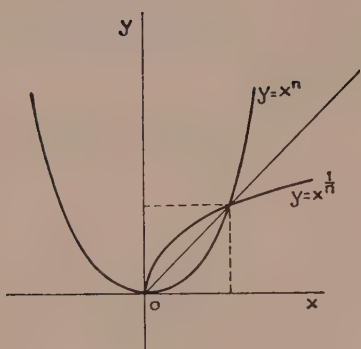


FIG. 9.

fonction inverse correspondant à y variant de 0 à $+\infty$, cette fonction inverse n'étant définie que pour les valeurs positives ou nulles de x . Nous donnons dans la figure 9 les graphes des deux fonctions :

$$y = x^n \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

et :

$$y = x^{\frac{1}{n}} \quad x \in (0, +\infty[.$$

3. — Composition de fonctions.

Soit f une fonction définie sur une partie E de $\mathbf{R}$. Rappelons que l'on désigne par $f(E)$ l'ensemble $(f(x))_{x \in E}$ des valeurs prises par la fonction $f(x)$ lorsque x parcourt E .

Si g est une fonction définie sur $f(E)$ on peut définir la fonction composée $g \circ f$:

$$E \xrightarrow{f} f(E) \xrightarrow{g} \mathbf{R}$$

par l'égalité

$$y = g \circ f(x) = g(f(x))$$

on dit aussi que y est fonction de x par l'intermédiaire de $u = f(x)$.

EXEMPLE 1. — Soit

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{pour} \quad x \neq +1 \quad \text{et} \quad x \neq -1$$

$$g(x) = \sqrt{x} \quad \text{pour} \quad x \geq 0$$

on a

$$f(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x \in]-1, +1[$$

on peut donc définir la fonction composée

$$g \circ f(x) = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pour} \quad x \in]-1, +1[$$

Notons que pour $x > 0$ et $x \neq 1$ on a $\sqrt{x} \neq 1$ on peut donc définir la fonction composée :

$$f \circ g(x) = \frac{1}{1-(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{1-x} \quad \text{pour} \quad x > 0 \quad \text{et} \quad x \neq 1$$

REMARQUE. — Si les fonctions f et g sont monotones (respectivement strictement monotones) il en est de même de la fonction $g \circ f$. Si par exemple les fonctions f et g sont toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes la

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

fonction $g \circ f$ est croissante. Si l'une des fonctions est croissante et l'autre décroissante la fonction $g \circ f$ est décroissante.

THÉORÈME 2. — Si la fonction $u = f(x)$ est continue pour $x = x_0$ et si la fonction $\varphi(u)$ est continue pour $u_0 = f(x_0)$, alors la fonction composée $F(x) = \varphi(f(x))$ est continue pour $x = x_0$.

Soit en effet $\varepsilon > 0$. On peut trouver $\zeta > 0$ tel que :

$$|u - u_0| < \zeta \text{ entraîne } |\varphi(u) - \varphi(u_0)| < \varepsilon$$

et on peut trouver $\eta > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \eta \text{ entraîne } |u - u_0| < \zeta$$

Par suite :

$$|x - x_0| < \eta \text{ entraîne } |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$$

ce qui démontre le théorème.

Application aux fonctions puissances. — Soient

$$f(x) = x^p \quad \text{pour} \quad x \geq 0$$

et

$$g(x) = x^{1/q} \quad \text{pour} \quad x \geq 0$$

où p et q sont deux entiers positifs non nuls.

Les fonctions f et g étant des applications bijectives continues, croissantes, de l'ensemble $\mathbf{R}_+$ des nombres positifs sur lui-même il en est de même pour la fonction composée

$$g \circ f(x) = (x^p)^{1/q}$$

Lorsque $x, y \in \mathbf{R}_+$, l'égalité $y = (x^p)^{1/q}$ est équivalente à l'égalité $y^q = x^p$, d'où, en élevant chaque membre à la puissance k (k entier ≥ 1); $y^{kq} = x^{kp}$ et par conséquent :

$$y = (x^{kp})^{1/kq}$$

Ainsi le nombre $(x^p)^{1/q}$ ne dépend que du rapport p/q ce qui justifie l'écriture en *puissance fractionnaire* :

$$(x^p)^{1/q} = x^{p/q}$$

Puissances rationnelles. — Lorsque α est un nombre rationnel strictement positif, soit $\alpha = \frac{p}{q} > 0$, la fonction puissance :

$$y = x^\alpha = x^{p/q}$$

définie, pour $x \geq 0$, comme composition de deux fonctions continues strictement croissantes est donc une fonction continue strictement croissante.

Lorsque α' est un nombre rationnel négatif, soit $\alpha' = -\frac{p}{q} < 0$ on pose

$$x^{-p/q} = \frac{1}{x^{p/q}} \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

La fonction $y = x^{a'} = \frac{1}{x^{p/q}}$, définie pour $x > 0$ est donc une fonction continue et strictement décroissante.

On convient de poser $x^0 = 1$ (pour $x > 0$).

Fonctions exprimables algébriquement. — Les combinaisons de toutes les opérations algébriques que nous connaissons maintenant : addition, multiplication, division, élévation à une puissance rationnelle, permettent, avec la notion de fonction composée, de définir des fonctions *exprimables algébriquement*.

D'après ce qui précède, les seules difficultés au point de vue de la définition de ces fonctions et de leur continuité ne peuvent provenir que :

- 1° de l'annulation possible de quantités placées au dénominateur;
- 2° du signe négatif de quantités élevées à un exposant non entier ou plus précisément de racines d'ordre pair de nombres négatifs.

Par exemple la fonction $y = \frac{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{2}{3}}}{x - 2}$ est définie et continue pour toute valeur de x sauf :

$x = 2$ qui annule le dénominateur;

$x < 0$ qui rend négative la quantité sous l'exposant $3/2$.

Notons que pour $x = 0$, la fonction n'est continue qu'à droite.

EXERCICES

1° On considère la fonction définie par :

$$f(x) = (x + p)(x + q)$$

p et q désignant des constantes. A quelles conditions doivent satisfaire ces constantes pour que, x variant de 0 à 1, la fonction soit croissante ? décroissante ?

$$R. \quad p + q \geq 0, \quad p + q \leq -2.$$

2° Variations et graphe de la fonction :

$$y = x + |x - 1| + |2x + 1|.$$

*3° Montrer que la fonction :

$$y = \frac{2x^2 - 4x}{|x + 1| + |x - 3| - 2}$$

est définie pour toutes les valeurs de x . Variations et graphe. Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie pour ce graphe.

**4° On considère la fonction $y = x^3$, $x \in (-4, +3)$. Montrer que, si x_0 et x_1 sont deux valeurs de cet intervalle :

$$|y(x_1) - y(x_0)| \leq 48 |x_1 - x_0|.$$

En déduire que la fonction considérée est uniformément continue dans l'intervalle considéré.

$$R. \quad |x_1 - x_0| < \frac{\varepsilon}{48} \quad \Rightarrow \quad |y(x_1) - y(x_0)| < \varepsilon$$

5° Montrer que la fonction définie par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ($x \neq -1$) est croissante. En déduire les variations et le graphe de la fonction :

$$F(x) = \sqrt{f(x^2)}.$$

***6°** Montrer que la fonction $f(x) = x - \frac{1}{x}$ est croissante. En déduire les variations et le graphe de la fonction :

$$F(x) = f[f(x)].$$

***7°** Intervalles de définition des fonctions :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad F(x) = f[g(x)], \quad \Phi(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 1}}.$$

Comparer les fonctions F et Φ .

$$R. \quad) - \infty, +\infty(, \quad |x| > 1, \quad |x| > 1, \quad |x| > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

***8°** Graphe de $y = \sqrt{|1 - x^2|}$.

****9°** Graphe de la relation :

$$y = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2 - x^2}.$$

R. Trois demi-droites.

CHAPITRE V

DÉRIVÉES

1. — Définitions.

Considérons une fonction $y = f(x)$ définie dans un intervalle ouvert $]a, b[$ et soit x_0 une valeur de cet intervalle pour laquelle la fonction f soit continue. Si nous nous intéressons à la variation de f lorsque x prend des valeurs proches de x_0 , nous sommes conduits à comparer les signes des deux quantités $f(x_0 + h) - f(x_0)$ et h , ce dernier nombre h étant suffisamment petit pour que $x_0 + h$ appartienne à $]a, b[$.

Nous poserons $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Donc h sera l'accroissement de la variable et k l'accroissement correspondant de la fonction. Comme la fonction $f(x)$ peut n'être monotone que dans un petit intervalle contenant x_0 , il faudra donc prendre h petit si on veut s'assurer du sens de variation de $f(x)$ en x_0 . Or, la continuité de $f(x)$ pour x_0 nous assure que si h est petit, k l'est également ou, plus précisément, que k tend vers 0 avec h .

Pour comparer les signes de k et de h il est commode d'étudier soit le signe du produit hk , soit le signe du rapport $\frac{k}{h}$. Mais lorsque h tend vers 0, le produit hk tend également vers 0, tandis que l'on constate que dans les cas usuels le rapport $\frac{k}{h}$ tend vers une limite en général différente de 0. Le signe de cette

limite nous renseignera sur le signe de $\frac{k}{h}$ et par suite sur la variation de la fonction f autour de x_0 . Si cette limite existe et a pour valeur m , nous dirons que la fonction f admet une dérivée égale à m pour la valeur x_0 de la variable.

En résumé,

Dire que m est la dérivée de la fonction $f(x)$ (ou encore de y par rapport à x) pour la valeur x_0 de la variable, revient à dire que la fonction $f(x)$ est définie dans un voisinage de x_0 et que le rapport $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ tend vers m lorsque h tend vers 0.

C'est dire que m est la dérivée de f en x_0 si et seulement si on peut écrire

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m + \varepsilon(h)$$

soit encore

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = mh + h\varepsilon(h)$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 en même temps que h (soit $\varepsilon \in \delta$, avec les notations du chapitre III).

Ceci entraîne évidemment que la fonction f est continue pour x_0 .

EXEMPLE 1. — Soit $f(x) = x^2$. On a

$$k = (x_0 + h)^2 - x_0^2 = 2x_0 h + h^2 = 2x_0 h + h\varepsilon(h)$$

d'où la dérivée $m = 2x_0$.

Dérivée à droite, à gauche. — De même qu'à côté de la notion de limite d'une fonction $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 il faut introduire la notion de limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 à droite, il est parfois nécessaire d'introduire à côté de la notion de dérivée celle de dérivée à droite :

Nous dirons que m est la *dérivée à droite* de la fonction $f(x)$ pour la valeur x_0 de la variable si cette fonction est définie dans un intervalle de la forme $(x_0, b[$ avec $b > x_0$ et si le rapport $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ tend vers m lorsque h tend vers 0 en restant positif. Lorsqu'il en est ainsi la fonction f est évidemment continue à droite pour x_0 . On définirait de même la notion de *dérivée à gauche*.

Dire que la fonction $f(x)$ admet une dérivée pour la valeur x_0 revient donc à dire qu'elle admet une dérivée à gauche, une dérivée à droite pour x_0 et que ces deux dérivées ont toutes deux la même valeur.

2. — Signification géométrique.

La notion de dérivée est susceptible d'une interprétation géométrique qui est d'ailleurs à l'origine de sa découverte. Considérons d'abord le cas d'une fonction affine $y = f(x) = ax + b$ dont le graphe est une droite D , de pente a dans un repère orthonormé. On a

$$k = f(x_0 + h) - f(x_0) = ah = ah + h \cdot 0$$

D'où la dérivée

$$m = a = \frac{k}{h}$$

Ainsi la dérivée a est égale à la pente de la droite D .

Soit, plus généralement, C le graphe d'une fonction f et M et P les points de C de

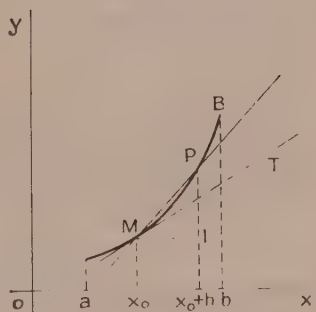


FIG. 1.

coordonnées $(x_0, f(x_0))$, $(x_0 + h, f(x_0) + k)$. La pente de la droite MP est donc égale à $\frac{k}{h}$ (fig. 1).

Dire que le rapport $\frac{k}{h}$ tend vers la limite m lorsque h tend vers 0 revient donc à dire que la droite MP tend vers la droite MT de pente m lorsque P se rapproche de M en restant sur le graphe. Par définition, cela signifie que le graphe admet au point M la *tangente* MT .

L'équation de cette tangente est donc

$$y = m(x - x_0) + f(x_0)$$

Dire que la fonction $f(x)$ admet une dérivée pour la valeur x_0 revient donc à dire que son graphe admet au point M d'abscisse x_0 une tangente qui n'est pas parallèle à l'axe des y .

De la même façon, dire que $f(x)$ admet une dérivée à droite pour x_0 revient à dire que la droite MP tend vers une position limite MT non parallèle à l'axe des y lorsque P se rapproche du point M en restant sur la partie du graphe formée par les points dont l'abscisse est supérieure à celle de M . Cette position limite est dite la *demi-tangente à droite* au graphe au point M . On définirait de même la notion de *demi-tangente à gauche*.

Cette interprétation montre l'importance de la notion de dérivée dans l'étude des courbes. Cette notion joue un rôle important dans bien d'autres domaines, en particulier en Mécanique et en Physique :

EXEMPLE 2. — **Vitesse d'un mobile.** — Supposons qu'un mobile parcourt un axe que la variable t désigne le temps et que la fonction $f(t)$ soit l'abscisse du mobile à l'instant t . L'accroissement $\Delta f = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ représente le chemin parcouru par le mobile durant l'intervalle de temps $(t_0, t_0 + \Delta t)$ et le quotient $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ est la vitesse moyenne du mobile pendant cet intervalle de temps. La dérivée de f par rapport à t pour la valeur t_0 , limite de cette vitesse moyenne lorsque Δt tend vers 0, est la *vitesse instantanée* du mobile à l'instant t_0 (si le mobile est une auto, cette dérivée est le nombre indiqué au compteur des vitesses à l'instant t_0).

EXEMPLE 3. — **Notion de débit.** — Supposons qu'un fluide s'écoule dans un tuyau et soit S une section de ce tuyau. Désignons par $f(t)$ la masse de fluide ayant traversé le tuyau à l'instant t . Alors $\Delta f = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ est la masse de fluide qui s'est écoulé à travers la section S durant l'intervalle de temps $(t_0, t_0 + \Delta t)$ et le quotient $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ est le débit moyen du fluide pendant cet intervalle de temps. La dérivée de f par rapport à t pour la valeur t_0 est le *débit instantané* du fluide à travers S à l'époque t_0 . De manière analogue, si on considère un fil électrique au lieu d'un tuyau et si $f(t)$ est la quantité d'électricité

ayant passé par une section S du fil à l'époque t , la dérivée de f par rapport à t est l'intensité du courant électrique.

3. — Étude de quelques cas spéciaux.

Nous allons étudier quelques cas où la fonction f n'admet pas de dérivée pour la valeur x_0 de la variable :

1° Si le quotient $\frac{k}{h}$ tend vers $+\infty$ lorsque h tend vers 0, cela signifie que la droite MP tend, lorsque P tend vers M , vers une position limite qui est la parallèle à Oy menée par M . Il en est de même si $\frac{k}{h}$ tend vers $-\infty$, mais la figure n'est pas la même dans les deux cas :

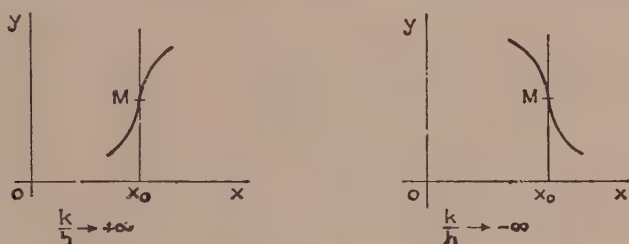


FIG. 2.

Le premier cas est celui de la fonction $y = \sqrt[3]{x}$ pour $x_0 = 0$. En effet, on a alors $\frac{k}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}$ qui tend vers $+\infty$ lorsque h tend vers 0. On a le deuxième cas pour $y = -\sqrt[3]{x}$.

2° Il est possible que la fonction $f(x)$ admette une dérivée à droite et une dérivée à gauche pour $x = x_0$, mais que ces dérivées ne soient pas égales. Le graphe de f possède alors deux demi-tangentes distinctes MT_1 et MT_2 :

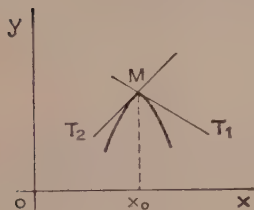


FIG. 3.

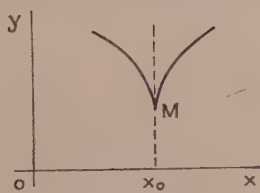


FIG. 4.

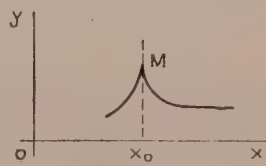


FIG. 5.

On dit dans ce cas que M est un *point anguleux* du graphe.

C'est le cas de la fonction $f(x) = |x|$ pour $x_0 = 0$.

3° Il est possible que $\frac{k}{h}$ tende vers $+\infty$ si h tend vers 0 par valeurs supé-

rieures et vers $-\infty$ si h tend vers 0 par valeurs inférieures, comme c'est le cas pour la fonction $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{|x|}$ si $x_0 = 0$. Dans ce cas le point M est un *point de rebroussement* du graphe (fig. 4).

On a également un point de rebroussement si $\frac{k}{h}$ tend vers $-\infty$ lorsque h tend vers 0 par valeurs supérieures et vers $+\infty$ lorsque h tend vers 0 par valeurs inférieures (cas de $-\sqrt[6]{x^2}$ pour $x_0 = 0$) (fig. 5).

4° Enfin, il est possible que $\frac{k}{h}$ ne tende vers aucune limite, finie ou non, lorsque h tend vers 0 par valeurs positives ou par valeurs négatives. Le graphe ne possède alors au point M ni tangente, ni demi-tangente. C'est le cas, pour $x_0 = 0$, de la fonction $f(x)$ ainsi définie :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour $x_0 = 0$ on a en effet $\frac{k}{h} = \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h} = \sin \frac{1}{h}$ qui ne tend vers aucune limite si h tend vers 0, soit par valeurs positives, soit par valeurs négatives. Cependant, la fonction $f(x)$ est continue pour $x = 0$ (et nous verrons même plus loin qu'elle est continue pour toute valeur de x).

4. — Fonction dérivée.

Supposons que pour toute valeur x d'un intervalle I , la fonction f admette une dérivée. En associant à x la dérivée de f pour cette valeur de la variable on définit une nouvelle fonction dite *dérivée de f par rapport à x* que l'on note f' ou f'_x s'il y a une ambiguïté possible sur la variable. La dérivée m de f en x_0 est donc la valeur de f' en x_0 soit $m = f'(x_0)$.

Si cette fonction f' admet à son tour une dérivée par rapport à x , on note celle-ci f'' et ainsi de suite... Les dérivées successives de y par rapport à x se représenteront par les notations :

$$y', y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \dots, y^{(n)}, \dots$$

ce qui nous permet, sous réserve de l'existence de ces dérivées, d'attacher à une fonction une infinité de fonctions dérivées. La fonction $y^{(n)}$ est dite la *dérivée d'ordre n* ou *dérivée n -ième* de la fonction y .

EXEMPLE 4. — Le calcul fait ci-dessus (paragraphe 2) montre que la fonction dérivée de la fonction affine $f(x) = ax + b$ est la fonction constante $f'(x) = a$. On a $f^{(n)}(x) = 0$ pour $n \geq 2$. En particulier, la fonction dérivée de la fonction identique $f(x) = x$ est la fonction constante $f'(x) = 1$ et la dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

5. — *Calcul des dérivées.*

Il serait très long de faire dans chaque cas le calcul de la dérivée d'une fonction en partant de sa définition. Nous allons établir un certain nombre de résultats permettant de calculer simplement les dérivées de toutes les fonctions exprimables algébriquement (chap. IV).

THÉORÈME 1. — *Si les fonctions f et g admettent toutes deux une dérivée pour la valeur a de la variable x , il en est de même*

- 1° de leur somme $f + g$ qui a pour dérivée $f'(a) + g'(a)$;
 - 2° de leur produit fg qui a pour dérivée $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
 - 3° et de leur quotient f/g à condition que $g(a) \neq 0$. La dérivée de f/g est alors
- $$\frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

En effet on peut écrire des égalités de la forme :

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= h(f'(a) + \varepsilon(h)) \\ g(a+h) - g(a) &= h(g'(a) + \varepsilon(h)). \end{aligned}$$

Ceci posé, on a :

1° Pour la somme $f + g = s$:

$$s(a+h) - s(a) = h(f'(a) + g'(a)) + h\varepsilon(h)$$

2° Pour le produit $fg = p$:

$$\begin{aligned} p(a+h) - p(a) &= f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) \\ &= [f(a) + h(f'(a) + \varepsilon(h))][g(a) + h(g'(a) + \varepsilon(h))] - f(a)g(a) \\ &= h[f'(a)g(a) + f(a)g'(a) + hf'(a)g'(a) + f(a)\varepsilon(h) + g(a)\varepsilon(h) \\ &\quad + hf'(a)\varepsilon(h) + hg'(a)\varepsilon(h) + h\varepsilon(h)\varepsilon(h)] \\ &= h[f'(a)g(a) + f(a)g'(a)] + h\varepsilon(h) \end{aligned}$$

3° Pour le quotient $\frac{f}{g}$:

Il suffit de montrer le résultat lorsque $f(x) = 1$, car lorsqu'on aura démontré l'égalité $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$, le résultat sur le produit montrera que :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Supposons donc $f(x) = 1$ et soit $q(x) = \frac{1}{g(x)}$. En supposant h suffisam-

ment petit pour que $g(a + h)$ ne soit pas nul, ce qui est toujours possible puisque g est continu pour $x = a$ et que $g(a) \neq 0$, on a :

$$q(a + h) - q(a) = \frac{1}{g(a) + hg'(a) + h\varepsilon(h)} - \frac{1}{g(a)} = -\frac{h(g'(a) + \varepsilon(h))}{g^2(a) + \varepsilon(h)}$$

d'où

$$q(a + h) - q(a) = -h \frac{g'(a)}{g^2(a)} + h\varepsilon(h)$$

REMARQUE. — On aurait un théorème analogue au théorème 1 en remplaçant partout le mot « dérivée » par le mot « dérivée à droite » (ou encore par le mot « dérivée à gauche »).

Applications. — 1° On verrait facilement (par récurrence sur n) que si :

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

on a l'égalité :

$$f'(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x).$$

2° De la même manière si :

$$f(x) = f_1(x)f_2(x) \dots f_n(x)$$

on a :

$$f'(x) = f'_1(x)f_2(x) \dots f_n(x) + f_1(x)f'_2(x) \dots f_n(x) + f_1(x)f_2(x) \dots f'_n(x).$$

3° En particulier si n est un entier positif tel que $f(x) = (g(x))^n$, on a :

$$f'(x) = n(g(x))^{n-1} g'(x).$$

Donc, si n est un entier > 0 , la dérivée de x^n est nx^{n-1} . Il en est encore ainsi si $n = 0$ puisqu'alors $f = x^0$ est par définition la constante 1.

4° Si $f(x)$ est le polynôme $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, on a l'égalité :

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}$$

(puisque les a_i sont des constantes). Donc

La dérivée d'un polynôme de degré n est un polynôme de degré $n - 1$.

Un polynôme possède des dérivées de tous les ordres. S'il est de degré n toutes ses dérivées d'ordre strictement supérieur à n s'annulent.

5° Soit la fraction rationnelle $f(x) = \frac{x^3 + 1}{2x + 1}$. Elle admet une dérivée pour toute valeur de x qui n'est pas un pôle, c'est-à-dire pour $x \neq -\frac{1}{2}$. On a :

$$f'(x) = \frac{3x^2(2x + 1) - (x^3 + 1)(2)}{(2x + 1)^2} = \frac{4x^3 + 3x^2 - 2}{(2x + 1)^2}$$

$f'(x)$ est encore une fraction rationnelle qui n'admet pas d'autres pôles que ceux de $f(x)$.

En dehors des pôles une fraction rationnelle admet des dérivées de tous les ordres.

6° Si $f(x) = x^n$ où $n = -m$ est un entier négatif :

$$f(x) = \frac{1}{x^m} \quad \text{et} \quad f'(x) = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{m}{x^{m+1}} = nx^{n-1}.$$

Par suite, que n soit un entier positif, négatif ou nul, la dérivée de x^n est toujours nx^{n-1} .

6. — Dérivée d'une fonction réciproque.

THÉORÈME 2. — Soit $y(x)$ une fonction continue strictement monotone dans l'intervalle ouvert (a, b) . Si elle admet une dérivée par rapport à x non nulle pour la valeur x_0 de x , la fonction réciproque $x(y)$ admet une dérivée pour la valeur $y_0 = y(x_0)$ et cette dérivée est $\frac{1}{y'(x_0)}$.

y'_x étant la limite du rapport de l'accroissement de y à celui de x et x'_y la limite du rapport de l'accroissement de x à celui de y , les deux rapports étant inverses l'un de l'autre, leurs limites sont également inverses. D'où la relation :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

les valeurs des dérivées de deux fonctions réciproques pour le même couple de valeurs des variables sont donc deux nombres inverses.

Au point de vue géométrique ce résultat est évident, car nous avons vu que l'on pouvait considérer les deux graphes comme symétriques par rapport à la première bissectrice. Les tangentes à ces courbes en deux points correspondants sont aussi symétriques et on constate aisément que leurs pentes sont deux nombres inverses.

REMARQUE. — Si $y'(x_0) = 0$ le graphe de $y(x)$ a au point d'abscisse x_0 une tangente de pente nulle. Le graphe de $x(y)$ a donc au point d'abscisse y_0 une tangente de pente infinie (cas 1 du n° 3), ce qui explique que $x(y)$ n'ait pas de dérivée pour $y = y_0$.

Application. — Calculons la dérivée de $y(x) = x^n$ lorsque n est un entier non nul (positif ou négatif) et $x > 0$.

$y(x)$ est la fonction réciproque de $x(y) = y^n$.

On a donc $x'_y = ny^{n-1}$ et par suite :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

La dérivée de $y(x) = x^n$ est donc $\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$ lorsque n est un entier.

7. — Dérivée d'une fonction composée.

THÉORÈME 3. — Soit y une fonction de x par l'intermédiaire de la variable u . Si pour $x = x_0$ la fonction u admet une dérivée $u'_x(x_0)$ par rapport à x et si pour $u_0 = u(x_0)$ la fonction y admet une dérivée $y'_u(u_0)$ par rapport à u , la fonction y admet pour $x = x_0$ une dérivée par rapport à x égale à $y'_u(u_0) \cdot u'_x(x_0)$.

Posons $u(x_0 + h) = u_0 + k$.

On a $k = h(u'_x(x_0) + \varepsilon(h))$ et par suite :

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) - y(x_0) &= y(u_0 + k) - y(u_0) \\ &= k(y'_u(u_0) + \varepsilon(k)) = h(u'_x(x_0) + \varepsilon(h))(y'_u(u_0) + \varepsilon(k)) \\ &= h y'_u(u_0) u'_x(x_0) + h \varepsilon(h) \end{aligned}$$

EXEMPLE 5. — $y = (ax^2 + bx + c)^n = (u(x))^n$ avec $u(x) = ax^2 + bx + c$.
On a

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u \cdot u'_x = n(u(x))^{n-1} \cdot (2ax + b) \\ &= n(ax^2 + bx + c)^{n-1} \cdot (2ax + b) \end{aligned}$$

Les règles que nous venons d'établir permettent de calculer la dérivée de n'importe quelle fonction exprimable algébriquement.

Soit par exemple :

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Posons $v = \sqrt{x^2 + 1}$. On a $y = \frac{x}{v}$, d'où $y' = \frac{v - xv'}{v^2}$.

Or, $v = \sqrt{u}$ avec $u = x^2 + 1$. D'où :

$$v' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

et par suite :

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

On voit que la dérivée d'une fonction exprimable algébriquement est encore une fonction exprimable algébriquement et ne comportant pas de nouveaux radicaux. Rappelons que la dérivée d'un polynôme est encore un polynôme et que celle d'une fraction rationnelle est une fraction rationnelle.

8. — Différentielles.

Soit $y = f(x)$ une fonction dérivable :

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x) + h\varepsilon(h)$$

La différentielle de $y = f(x)$ est par définition l'expression

$$dy = df(x) = f'(x)h$$

Lorsque f est la fonction identique $y = x$ on a $f'(x) = 1$ d'où $dx = h$.

Ainsi on peut considérer h comme la différentielle de x et l'on est conduit à écrire la différentielle de $y = f(x)$ sous la forme $dy = f'(x)dx$. D'où l'écriture d'une dérivée comme un quotient de différentielles

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Géométriquement, la différentielle peut s'interpréter de la façon suivante : soit MT la tangente au graphe de $f(x)$ au point M d'abscisse x . La parallèle à l'axe des y d'abscisse $x + dx$ coupe MT en un point N . Si A est le point d'ordonnée $f(x)$ sur cette parallèle, le fait que MT ait pour pente $f'(x)$ entraîne que $dy = \overline{AN}$. L'accroissement $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$ de la fonction f quand on donne à x l'accroissement dx est représenté par $\overline{AN'}$, N' étant le point où la droite AN coupe le graphe de f . On voit que si MT était le graphe de f , cet accroissement Δy serait égal à dy , c'est-à-dire que dy est l'accroissement de la fonction linéaire dont le graphe est la tangente en M au graphe de f . En fait, lorsque dx est petit et $f'(x) \neq 0$ les quantités Δy et dy sont comparables, comme le montre l'égalité

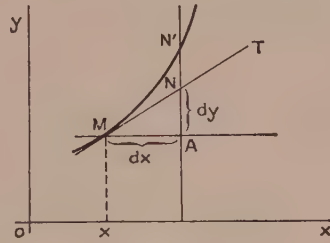


FIG. 6.

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) = dx[f'(x) + \varepsilon(dx)] = dy \left[1 + \frac{\varepsilon(dx)}{f'(x)} \right] = dy(1 + \varepsilon).$$

Ceci explique que dans beaucoup d'ouvrages techniques, on désigne par dx une quantité très petite, dy étant pratiquement confondu avec l'accroissement correspondant de la fonction.

Le résultat suivant montre l'invariance de la notion de différentielle.

THÉORÈME 4. — Soit une fonction $y = f(u)$ où u est une fonction de x . La différentielle de y considérée comme une fonction de x est $f'(u) du$, si on désigne par du la différentielle de la fonction $u(x)$.

L'égalité $y'_x = y'_u u'_x$ montre en effet que $dy = y'_u u'_x dx = y'_u du$.

Ce résultat montre l'avantage qu'il y a dans les calculs à se servir de différentielles plutôt que de dérivées. En effet, dans un calcul de dérivées il faut toujours préciser quelle est la variable choisie, ce qui est inutile dans un calcul de différentielles. Si on considère simultanément deux fonctions y_1 et y_2 de la variable x et si on a obtenu des expressions des différentielles dy_1 et dy_2 , le

quotient $\frac{dy_2}{dy_1}$ de ces expressions est toujours égal à la dérivée de y_2 par rapport à y_1 .

Si u et v sont des fonctions d'une variable, les règles de calcul sur les dérivées permettent d'écrire les égalités :

$$\begin{aligned}d(u + v) &= du + dv \\d(u - v) &= du - dv \\d(uv) &= v du + u dv \\d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v du - u dv}{v^2}.\end{aligned}$$

Note. — Par analogie avec l'écriture $y'_x = \frac{dy}{dx}$ on écrit parfois $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ pour noter la dérivée n -ième de y , mais nous ne définissons pas ici une différentielle n -ième.

EXERCICES

1° Dérivée de $y = \frac{(x-1)^p}{(x+1)^q}$.

R. $y' = \frac{(x-1)^{p-1}}{(x+1)^{q+1}} [(p-q)x + (p+q)].$

2° A, B, C désignant des constantes quelconques, la fonction :

$$y = Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{4}{3}} + Cx^{\frac{12}{5}}$$

et ses dérivées y', y'', y''' vérifient la relation :

$$30x^3y''' - 37x^2y'' + 55xy' - 48y = 0.$$

***3°** Les dérivées de la fonction :

$$y = (x + \sqrt{1+x^2})^m, \quad m \in \mathbb{Q}$$

vérifient la relation :

$$(1+x^2)y'' + xy' - m^2y = 0.$$

***4°** Graphe de la fonction $y = x|x|$. Montrer que cette fonction admet une dérivée continue et une fonction inverse $\bar{x} = \varphi(y)$ dont on donnera l'expression :

R. $y' = 2|x|$, $x = \sqrt{y}$ pour $y \geq 0$ et $x = -\sqrt{-y}$ pour $y < 0$.

****5°** y désignant une fonction de x admettant des dérivées des trois premiers ordres, on pose :

$$u = \frac{1}{\sqrt{y'}} \quad v = \frac{y}{\sqrt{y'}}.$$

Vérifier la relation $vu'' = uv''$.

****6°** On désigne par $E(x)$ le plus grand entier inférieur ou égal à x , c'est-à-dire que l'on a $\forall x \in \mathbf{R} : E(x) \leq x < 1 + E(x)$. On considère la fonction :

$$y = \frac{x - E(x)}{x + E(x) + 1}.$$

Montrer que y est toujours définie et continue à droite. Si $x \notin \mathbf{Z}$, cette fonction admet une dérivée dont on donnera le signe.

R. y' est du signe de x .

CHAPITRE VI

LE THÉORÈME DE ROLLE ET SES APPLICATIONS

1. — Le théorème de Rolle.

Soit $f(x)$ une fonction définie pour une valeur x_0 de la variable. On dira que la fonction *passé par un maximum* pour x_0 s'il existe un voisinage de x_0 tel que $f(x_0)$ soit la borne supérieure des valeurs de $f(x)$ sur ce voisinage, c'est-à-dire si l'on peut trouver deux nombres a et b tels que $a < x_0 < b$ et tels que $x \in]a, b[$ entraîne $f(x) \leq f(x_0)$. On dit encore que $f(x_0)$ est un *maximum relatif* de la fonction f . On définirait de façon analogue la notion de fonction *passant par un minimum* pour x_0 .

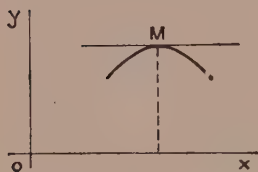


FIG. 1.

La fonction $f(x)$ sera dite *passer par un extremum* pour x_0 si $f(x_0)$ est, soit un maximum, soit un minimum de la fonction f .

Supposons maintenant que f passe par un extremum pour x_0 et que la fonction f admette une dérivée pour x_0 . Montrons que ceci entraîne $f'(x_0) = 0$.

Pour fixer les idées supposons que $f(x_0)$ soit un maximum de f . La quantité $f(x_0 + h) - f(x_0)$ est donc négative ou nulle si h est assez petit. Par suite :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

si h est un nombre ≥ 0 assez petit et en faisant tendre h vers 0 à droite, on voit que $f'(x_0) \leq 0$. De la même manière on voit en faisant tendre h vers 0 à gauche que l'on a également $f'(x_0) \geq 0$. Ces deux inégalités ne sont compatibles que si $f'(x_0) = 0$. On peut donc énoncer le :

THÉORÈME 1. — *Si la fonction f passe par un extremum pour la valeur x_0 de la variable et si elle admet une dérivée pour x_0 on a nécessairement $f'(x_0) = 0$.*

Soit maintenant une fonction f continue sur l'intervalle fermé (a, b) admettant une dérivée en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ et telle que :

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Deux cas sont alors possibles : ou f est constamment nulle sur (a, b) . Auquel cas nous avons vu dans le précédent chapitre que l'on a $f' = 0$ sur $]a, b[$. Ou f n'est pas constamment nulle sur $]a, b[$. Il existe alors $x_1 \in]a, b[$ tel que $f(x_1) \neq 0$. Supposons par exemple $f(x_1) > 0$. Le théorème 1 du chapitre IV montre l'existence de $c \in (a, b)$ tel que $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in (a, b)$. L'inégalité $f(c) \geq f(x_1) > 0$ montre que c est distinct des nombres a et b . Par suite c appartient à l'intervalle ouvert $]a, b[$ et par hypothèse $f'(c)$ existe. Comme $f(c)$ est un extremum de la fonction, on a donc $f'(c) = 0$ et on peut énoncer le :

THÉORÈME 2 (THÉORÈME DE ROLLE). — *Si une fonction f est continue sur l'intervalle fermé (a, b) , admet une dérivée en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ et vérifie les égalités $f(a) = f(b) = 0$, il existe une valeur c de l'intervalle ouvert $]a, b[$ telle que $f'(c) = 0$.*

Ce théorème a une interprétation géométrique très simple : le graphe de f est un arc de courbe AB dont les extrémités A et B sont sur l'axe Ox et cet arc admet une tangente en tout point distinct de ses extrémités. Le théorème de Rolle affirme qu'il y a un point C de l'arc tel que la tangente en C soit parallèle à Ox , ce qui est intuitivement assez évident. Si, par exemple, la courbe commence à monter après le point A , il faut bien qu'à partir d'un certain point elle redescende et en ce point sa tangente est parallèle à Ox .

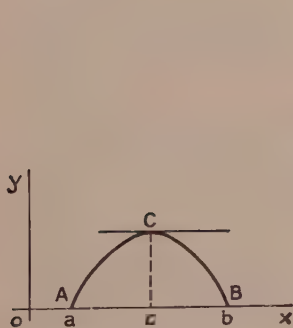


FIG. 2.

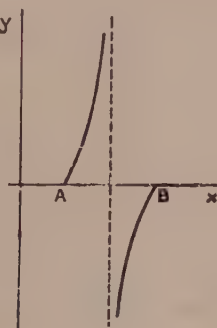


FIG. 3.

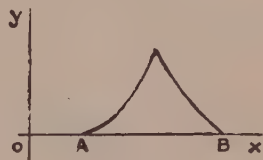


FIG. 4.

On énonce souvent le théorème de Rolle sous la forme sommaire : « Entre deux zéros d'une fonction il existe un zéro de la dérivée ». Mais il ne faut pas oublier les hypothèses nécessaires et appliquer à tort le théorème à une fonction discontinue (fig. 3) ou à une fonction qui n'aurait pas de dérivée en un point de l'intervalle ouvert (fig. 4).

2. — Formule des accroissements finis.

THÉORÈME 3. — Soit f une fonction continue dans l'intervalle fermé $]a, b[$ et admettant une dérivée en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$. Il existe alors un nombre c appartenant à l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Soient A et B les points du graphe de f d'abscisses respectifs a et b , et soit $y = mx + p$ l'équation de la droite AB .

La fonction $\varphi(x) = f(x) - mx - p$ est telle que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Comme elle admet une dérivée $\varphi'(x) = f'(x) - m$ en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$, le théorème de Rolle montre l'existence de c appartenant à $]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Donc $f'(c) = m$ et comme $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ on a bien l'égalité :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

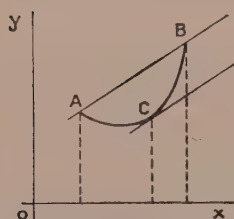


FIG. 5.

Cette égalité s'écrit encore :

$$(1) \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

L'interprétation géométrique de ce théorème est à peu près la même que celle du théorème de Rolle. Cela signifie qu'en un point C , l'arc de courbe AB , graphe de f , a sa tangente parallèle à la droite AB .

En posant $a = x$ et $b = x + h$, on voit que c est de la forme $x + \theta h$ avec $0 < \theta < 1$. La formule (1) peut alors s'écrire :

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h) \quad (\text{avec } 0 < \theta < 1)$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule des accroissements finis*.

3. — Variation des fonctions.

Soit f une fonction continue dans un intervalle. Rappelons que la fonction f est dite non décroissante dans cet intervalle si le rapport $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ est toujours positif ou nul.

Elle est dite non croissante dans cet intervalle si ce même rapport est toujours négatif ou nul. Dire que f est non décroissante revient à dire que la fonction f varie dans le même sens que la variable x . Dire qu'elle est non croissante revient à dire qu'elle varie en sens contraire de la variable.

Supposons que f admette une dérivée en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$. Si $x \in]a, b[$ la formule $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ montre que $f'(x)$

est toujours positive ou nulle si f est non décroissante dans $]a, b[$ (et que $f'(x)$ est toujours négative ou nulle si f est non croissante dans $]a, b[$).

La formule des accroissements finis permet de montrer la réciproque de ces résultats.

Si l'on a $f'(x) \geq 0$ sur un intervalle $]a, b[$ la fonction f est non décroissante sur cet intervalle.

En effet si x_1 et x_2 appartiennent à $]a, b[$ on a

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1$$

Ce rapport est donc positif et la fonction f est non décroissante.

On voit de même que

Si l'on a $f'(x) \leq 0$ sur un intervalle $]a, b[$ la fonction f est non croissante sur $]a, b[$.

Enfin si l'on a $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$ on a $f(x_1) - f(x_2) = 0$ c'est-à-dire que

Si une fonction a une dérivée toujours nulle elle est constante.

On voit encore que si $f'(x) > 0$ sur $]a, b[$ la fonction f est strictement croissante sur $]a, b[$ (et que si $f'(x) < 0$ sur $]a, b[$ la fonction f est strictement décroissante sur $]a, b[$). Mais la fonction peut être strictement croissante sur $]a, b[$ sans que sa dérivée soit toujours strictement positive sur $]a, b[$.

Ces résultats permettent d'étudier la variation d'une fonction $f(x)$. On détermine d'abord l'ensemble des valeurs où elle est définie. Puis on cherche les valeurs qui rendent la fonction discontinue. On calcule la dérivée de $f(x)$ et on détermine les valeurs de x qui rendent la dérivée discontinue ou nulle. On obtient ainsi un certain nombre d'intervalles où l'on est assuré que $f(x)$ est continue et que f' garde un signe constant. Dans un tel intervalle f est donc monotone.

Il restera à examiner les valeurs particulières de x , c'est-à-dire les extrémités des intervalles ainsi déterminés. Soit a une de ces valeurs particulières.

Si f est discontinue pour a , on étudiera cette discontinuité, en particulier fréquemment $f(x)$ deviendra infini lorsque x tendra vers a , ce qui entraînera pour le graphe de f l'existence d'une asymptote parallèle à l'axe des y (et d'abscisse a).

Si f' est discontinu pour a mais non f , on étudiera si le graphe possède au point correspondant une tangente parallèle à Oy , un point anguleux ou s'il n'y a pas de demi-tangentes.

Si $f'(a) = 0$, on examinera si f' change de signe en s'annulant, auquel cas f passera par un extremum, ou si f' s'annule sans changer de signe, auquel cas le graphe possèdera un point d'inflexion à tangente parallèle à Ox , c'est-à-dire un point où il traversera sa tangente.

EXEMPLE 1. — Soit à étudier la variation de la fonction $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

Elle n'est définie que si le dénominateur ne s'annule pas et si la quantité

sous le radical est positive ou nulle. Elle n'est donc définie que pour $x \leq 0$ et pour $x > 1$. Elle est continue en tous les points de son ensemble de définition (sauf pour $x = 0$ où elle est seulement continue à gauche) :

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} \cdot \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}}$$

La dérivée y' a donc le signe de $x - \frac{3}{2}$ et on peut écrire le *tableau de variation* :

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y'		-		- 0 +	
y		$\searrow 0$		$\searrow \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$

Ce tableau se complète en étudiant $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, vers $-\infty$ ou vers 1 par valeurs supérieures.

L'égalité $y^2 = \frac{x^3}{x-1}$ montre que si $|x|$ tend vers l'infini, y^2 se comporte comme x^2 et par suite que $y = \sqrt{y^2}$ tend vers $+\infty$.

Si x tend vers 1 par valeurs supérieures, $\frac{x^3}{x-1}$ tend vers $+\infty$ et y tend vers $+\infty$. On complète donc le tableau :

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y'		-		- 0 +	
y	$+\infty \searrow$	0		$+\infty \searrow$	$\nearrow +\infty$

A partir des renseignements contenus dans ce tableau il est aisé de trouver l'allure du graphe (fig. 6). On peut chercher à la préciser en cherchant si ce graphe admet une demi-tangente à gauche pour $x = 0$, ce qui revient à chercher si $\frac{y}{x}$ tend vers une limite lorsque x tend vers 0. Or $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{x}{x-1}$ tend vers 0 si x tend vers 0 à gauche. Donc le graphe arrive en 0 tangentiellement à l'axe des x .

EXEMPLE 2. — Étudions maintenant

la fonction $y = \sqrt{\left| \frac{x^3}{x-1} \right|}$ qui est définie pour toute valeur de x distincte de 1. Elle est égale à la fonction que l'on vient d'étudier en dehors de l'intervalle $]0, 1[$. Il nous reste à l'étudier lorsque x appartient à $]0, 1[$. On a alors :

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

$$y' = \left(\frac{3}{2} - x \right) \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}$$

Donc si $0 < x < 1$ on a $y'(x) > 0$.

Par suite y croît (de 0 à $+\infty$) lorsque x croît de 0 à 1.

On voit que la fonction y est continue pour $x = 0$. Elle admet une discontinuité pour $x = 1$. On a le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
y'		$-$	$+$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$
					$\searrow$	$\nearrow$
						$\frac{3\sqrt{3}}{2}$
						$+\infty$

Voyons si son graphe (fig. 7) admet une demi-tangente pour $x = 0$.

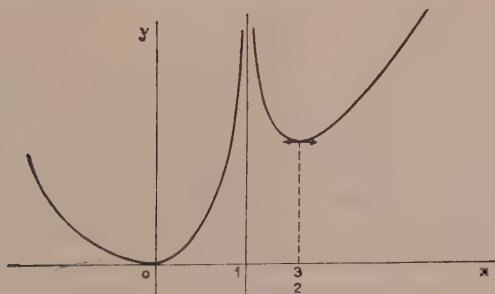


FIG. 7.

Lorsque x est > 0 , le rapport $\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ tend vers 0 en même temps que x . On voit donc que pour $x = 0$ la fonction y admet une dérivée à gauche

et une dérivée à droite toutes deux nulles. Il en résulte qu'elle admet une dérivée (égale à 0) pour $x = 0$, ce qui ne pouvait pas se déduire des règles opératoires sur les dérivées.

4. — Discussion d'une équation.

Nous avons vu que pour étudier la variation d'une fonction $f(x)$, on était amené à résoudre l'équation :

$$f'(x) = 0.$$

De même d'ailleurs pour trouver les valeurs de discontinuité d'une fonction on est amené à résoudre l'équation obtenue en annulant un dénominateur ou une quantité placée sous un radical.

Or, il est exceptionnel que l'on sache résoudre une équation au sens élémentaire du mot « résoudre », c'est-à-dire exprimer les racines d'une équation à l'aide des symboles connus de l'algèbre.

Nous verrons cependant que l'on peut toujours calculer avec n'importe quelle précision fixée à l'avance les racines d'une équation. Mais ce n'est pas nécessaire si on a en vue de tracer un graphique donnant seulement l'allure des variations d'une fonction. Il nous suffit de savoir *isoler* les racines d'une équation, c'est-à-dire déterminer des intervalles tels que l'on puisse affirmer que l'équation dans un tel intervalle n'a pas de racine et que dans tel autre intervalle elle a une racine et une seule. C'est ce que l'on appelle *discuter une équation*.

Remarquons d'ailleurs qu'entre la résolution approchée d'une équation et la discussion d'une équation, il n'y a qu'une différence théorique assez faible : il suffirait de multiplier le nombre des intervalles servant à la discussion d'une équation pour obtenir une résolution de plus en plus précise. Quoi qu'il en soit, la discussion d'une équation doit précéder nécessairement la résolution approchée.

Soit donc une équation :

$$g(x) = 0$$

et cherchons à isoler les racines de cette équation. Le principe de la méthode est extrêmement simple. Étudions la variation de la fonction $y = g(x)$: nous déterminons ainsi des intervalles (a, b) dans lesquels nous sommes assurés que la fonction $g(x)$ est continue et monotone. Calculons $g(a)$ et $g(b)$. S'ils sont de même signe, $g(x)$ ne peut s'annuler dans l'intervalle (a, b) . Si $g(a)$ et $g(b)$ sont de signe contraire, l'équation $g(x) = 0$ aura une racine et une seule dans l'intervalle (a, b) . En répétant le même raisonnement dans tous les intervalles déterminés pour étudier la variation de la fonction $y = g(x)$, on saura combien l'équation $g(x) = 0$ a de racines et on aura isolé ces racines.

Où la difficulté apparaît, c'est que pour étudier la variation de $y = g(x)$ on est conduit à étudier l'équation $g'(x) = 0$, c'est-à-dire que l'on se retrouve devant le même problème, quelquefois plus simple, quelquefois plus compliqué. Sans entrer dans des détails, indiquons cependant qu'une équation $g(x) = 0$ est

presque toujours susceptible de s'écrire sous une forme équivalente $G(x) = 0$ telle que la dérivée $G'(x)$ soit plus facile à étudier que la dérivée $g'(x)$. C'est ainsi que si l'on a à étudier l'équation :

$$x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-3) + x(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

il est préférable d'écrire cette équation sous la forme équivalente :

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} = 0.$$

On vérifiera, en effet, que sous cette deuxième forme, le sens de variation de la fonction est évident.

EXEMPLE 3. — Discuter l'équation :

$$x^4 + 4x^3 - 19x - 15 = 0.$$

Étudions donc les variations de la fonction toujours définie et continue :

$$y = x^4 + 4x^3 - 19x - 15.$$

La dérivée est :

$$y' = 4x^3 + 12x^2 - 19.$$

Mais comme nous ne savons pas résoudre l'équation du 3^e degré, nous calculons la dérivée seconde :

$$y'' = 12x^2 + 24x = 12x(x+2).$$

Nous en déduisons un premier tableau de variations :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y''		$+$	0	$-$
y'	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$
			-19	$\nearrow$
				$+\infty$

et par suite la dérivée y' ne change qu'une fois de signe pour une certaine valeur x_0 de x . Nous savons, en outre, que x_0 est positif. D'où le deuxième tableau de variations :

x	$-\infty$	0	x_0	$+\infty$
y'		$-$	$-$	0
				$+$
y	$+\infty$	$\searrow$	-15	$\searrow$
			y_0	$\nearrow$
				$+\infty$

Pour savoir si la fonction y s'annule, il suffit de connaître le signe de $y_0 = y(x_0)$. Or, d'après le tableau ci-dessus, nous avons :

$$y_0 < y(0) = -15$$

et par suite la fonction y s'annule deux fois, une fois dans l'intervalle $] - \infty, 0[$, une fois dans l'intervalle $]0, + \infty[$.

On peut même préciser, en essayant des valeurs entières de x :

$$y(-1) = 1, \quad y(2) = -5, \quad y(3) = 117$$

on voit que les deux racines de l'équation proposée sont dans les intervalles :

$$]-1, 0[\quad \text{et} \quad]2, 3[.$$

Nous verrons comment calculer plus précisément ces racines au chapitre XXVI.

5. — Primitive d'une fonction.

Étant donné une fonction $f(x)$ on appelle *primitive* ou *intégrale* de $f(x)$ sur un intervalle I toute fonction $F(x)$ telle que $f(x) = \frac{dF}{dx}$ pour tout x appartenant à I . Si $F(x)$ est une telle primitive et si C est une constante, la relation :

$$\frac{d}{dx}(F + C) = \frac{dF}{dx}$$

montre que $F(x) + C$ est encore une primitive de $f(x)$.

Réciproquement, si $G(x)$ est une primitive de $f(x)$, la relation :

$$\frac{d}{dx}(F - G) = \frac{dF}{dx} - \frac{dG}{dx} = 0$$

montre que la fonction $F - G$ est constante, donc que $G(x)$ est de la forme $F(x) + C'$, C' étant une certaine constante. Donc :

Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur un intervalle I , les primitives de $f(x)$ sur cet intervalle sont les fonctions de la forme $F(x) + C$ où C désigne une constante arbitraire.

Rechercher une primitive de $f(x)$ s'appelle encore *intégrer* la fonction f .

On note $\int f(x) dx$ et on lit « somme de $f(x) dx$ » une primitive quelconque de $f(x)$ c'est-à-dire *une fonction dont la différentielle est $f(x) dx$* . Ce symbole n'est donc défini qu'à une constante additive près. On l'appelle une *intégrale indéfinie*. C'est ainsi que l'on peut écrire, m étant un nombre entier distinct de -1 :

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

(C désignant une constante arbitraire).

Dans le cas où $m = -1$, la relation précédente n'a plus de sens. En fait nous ne connaissons pour l'instant aucune fonction dont la dérivée par rapport à x soit égale à $\frac{1}{x}$.

Parmi toutes les primitives $F + C$ d'une fonction f sur un intervalle I il en existe une et une seule qui s'annule pour une valeur donnée $x = a$ de cet intervalle.

En effet la condition $F(a) + C = 0$ détermine la constante $C = -F(a)$.

D'où la primitive $F(x) - F(a)$. On la note $\int_a^x f(t) dt$ (somme de a à x de $f(t) dt$).

Dans ce symbole t peut être remplacé par n'importe quelle lettre désignant une variable variant entre a et x , sauf les lettres x et a qu'il vaut mieux éviter d'employer puisqu'elles interviennent déjà en haut et en bas du signe $\int$, ce qui n'empêche pas que bien souvent, par abus d'écriture, on note $\int_a^x f(x) dx$.

On a donc

$$\forall x \in I \quad \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

et, pour $x = b \in I$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

d'où l'on déduit, en particulier :

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

Le symbole $\int_a^b f(t) dt$ est appelé une *intégrale définie*.

6. — Définition géométrique de la primitive.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle fermé (a, b) . Nous nous proposons dans ce numéro d'établir l'existence de la fonction $\int_a^x f(t) dt$, pour x appartenant à (a, b) , par des considérations géométriques ⁽¹⁾.

Supposons d'abord $a < b$ et supposons $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in (a, b)$.

(1) Une démonstration rigoureuse est donnée au chapitre XVII.

Le graphe C de la fonction f entre a et b est un arc de courbe continu AB situé tout entier au-dessus de l'axe des x .

Soit $x \in (a, b)$. Désignons par A , M et B les points de C d'abscisses respectifs a , x et b , par A' , M' et B' les points de l'axe Ox ayant ces mêmes abscisses. Nous désignerons par $S(x)$ l'aire (hachurée dans la figure 8) du quadrilatère curviligne $A'A MM'$ compris entre l'axe des x , la courbe C et les deux droites $A'A$ et $M'M$. Si le graphe de C est tracé avec une bonne précision sur du papier millimétré, on peut obtenir une approximation suffisante de $S(x)$ en comptant le nombre de carrés millimétrés contenus dans cette aire.

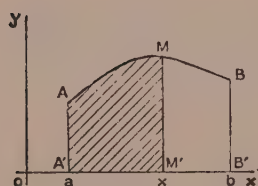


FIG. 8.

$S(x)$ est une fonction de x qui s'annule pour $x = a$. Montrons que $S(x)$ admet une dérivée par rapport à x égale à $f(x)$:

Donnons à x un accroissement h et désignons par P et P' les points d'abscisses $x + h$ sur C et sur l'axe Ox .

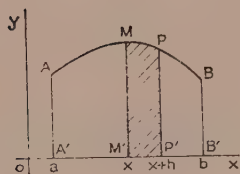


FIG. 9.

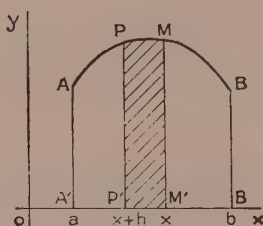


FIG. 10.

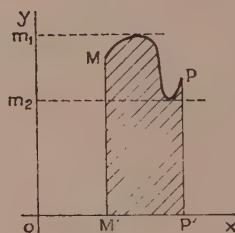


FIG. 11.

Suivant que h est > 0 (fig. 9) ou que $h < 0$ (fig. 10), l'accroissement :

$$k = S(x + h) - S(x)$$

de la fonction $S(x)$ est égal à l'aire (hachurée dans les figures 9 et 10) $\mathcal{A}$ du quadrilatère curviligne $M'M PP'$ ou à l'opposé de cette aire.

Mais on voit sur la figure 11 que si l'on désigne par m_1 et m_2 le maximum et le minimum de $f(x)$ sur $(x, x + h)$ (l'existence de ce maximum et de ce minimum est assurée par le théorème 1 du chapitre IV) on a les inégalités :

$$|h| m_2 \leq \mathcal{A} \leq |h| m_1$$

et, par suite, que h soit > 0 ou soit < 0 , on a les inégalités :

$$m_2 \leq \frac{k}{h} \leq m_1.$$

Si h tend vers 0, la continuité de f pour la valeur x entraîne que m_1 et m_2 tendent tous deux vers $f(x)$. Il en est donc de même de $\frac{k}{h}$, ce qui montre que $S(x)$ admet une dérivée égale à $f(x)$ pour la valeur x de la variable. On a donc :

$$\int_a^x f(t) dt = S(x).$$

Supposons toujours $a < b$, mais ne supposons plus que la fonction f reste nécessairement positive ou nulle sur (a, b) . Comme f admet un minimum m sur (a, b) , on voit que l'on peut trouver une constante c telle que $f(x) + c$ reste positif ou nul sur (a, b) (il suffit pour cela de prendre $c \geq -m$).

D'après ce qui précède, la fonction $g(x) = f(x) + c$ admet une primitive

$$G(x) = \int_a^x (f(t) + c) dt$$

sur (a, b) . Par suite $f(x)$ admet aussi sur (a, b) la primitive $G(x) - cx$ et on a l'égalité :

$$\int_a^x f(t) dt = G(x) - c(x - a) = \int_a^x g(t) dt - c(x - a).$$

Donnons une interprétation géométrique de cette primitive $\int_a^x f(t) dt$. En traçant la droite Δ parallèle à l'axe des x et d'ordonnée $-c$ et en notant A'' et M'' les points d'abscisses a et x sur cette droite, on voit que $G(x)$ est l'aire $A''A MM''$ comprise entre C , la droite Δ et les deux droites $A''A$ et $M''M$. Comme $c(x - a)$ est l'aire du rectangle $A''A' M' M''$, on voit que $S(x)$ est égal à la différence :

$$S_1(x) - S_2(x)$$

où $S_1(x)$ est l'aire comprise entre la courbe C et l'axe des x au-dessus de Ox (les portions d'aires correspondantes sont hachurées horizontalement).

$S_2(x)$ est l'aire comprise entre la courbe C et l'axe des x au-dessous de Ox (les portions d'aires sont hachurées verticalement).

On peut dire que $S(x)$ est l'aire comprise entre la courbe C et l'axe des x à condition de compter négativement les portions de cette aire situées au-dessous de Ox .

Dans la figure 13, nous avons mis le signe $+$ sur les aires à affecter du signe $+$

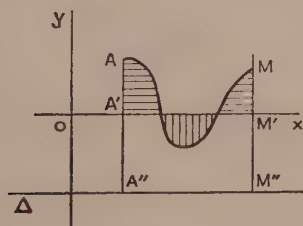


FIG. 12.

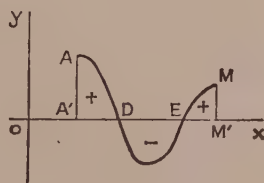


FIG. 13.

et le signe $-$ sur les aires à affecter du signe $-$ pour le calcul de $\int_a^x f(t) dt$.

Enfin, si $b < a$ et si $x < a$, la formule :

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

montre immédiatement l'interprétation géométrique de l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ (il faut compter négativement les aires comprises entre C et Ox et situées au-dessus de Ox et positivement les aires comprises entre C et Ox et situées au-dessous de Ox).

Notons que si la fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et si $x_0 \in]a, b[$ la fonction $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ est définie sur l'intervalle $]a, b[$ car f est continue sur l'intervalle fermé (x_0, x) .

EXERCICES

1° Variations et graphe de la fonction :

$$y = \sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

2° Quelle est la valeur de θ dans la formule des accroissements finis :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$$

appliquée à la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$R. \quad \theta = \frac{1}{2}.$$

3° Déterminer la valeur maximum et la valeur minimum de l'expression :

$$y = 1 - \sqrt{3 + 2x^2 - x^4}.$$

R. 1 et -1 .

4° Discuter l'équation :

$$10x^6 - 7x^5 + 45x^3 - 6 = 0.$$

R. 2 racines.

*5° Variations et graphes des fonctions :

$$y = \frac{(x+1)(x+2)^2}{(x+3)^3(x+4)^4} \quad \text{et} \quad y = \frac{\sqrt[4]{x^4-1}}{8x+1}.$$

*6° On applique la formule des accroissements finis :

$$f(x) - f(0) = xf'(\theta x)$$

à la fonction $f(x) = x^3 + 3x^2$. Former l'équation du second degré donnant la valeur de θ et vérifier qu'au moins une solution de cette équation est comprise entre 0 et 1.

CHAPITRE VII

LOGARITHMES, EXPONENTIELLES, PUISSANCES

1. — Logarithme.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Elle y possède donc des primitives (chap. VI).

On nomme *logarithme népérien* (ou naturel) la primitive qui s'annule en $x = 1$ et on la désigne par Log (ou aussi par $\ln$). On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x > 0 : \quad \frac{d}{dx}(\text{Log } x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \\ \text{Log } 1 = 0 \end{array} \right.$$

La fonction logarithme étant dérivable est continue (pour $x > 0$); sa dérivée $\frac{1}{x}$ étant strictement positive, elle est strictement croissante :

$$0 < a < b \quad \Rightarrow \quad \text{Log } a < \text{Log } b$$

En particulier :

$$1 < x \quad \Rightarrow \quad \text{Log } 1 = 0 < \text{Log } x$$

$$0 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Log } x < 0$$

Soit $u(x)$ une fonction positive de x admettant une dérivée $u'(x)$ par rapport à x . D'après la règle de dérivation des fonctions composées la dérivée de $\text{Log } u$ par rapport à x sera $\frac{u'}{u}$ (cette quantité est appelée la *dérivée logarithmique* de la fonction u).

En particulier, si a est une constante > 0 :

$$\frac{d}{dx} \text{Log } ax = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}.$$

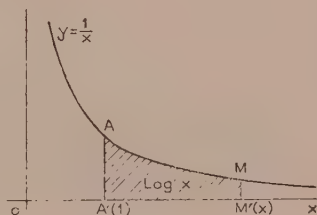


FIG. 1.

Donc $\text{Log } ax$ et $\text{Log } x$ ont des dérivées égales, ce qui montre que leur différence est une constante C . En faisant $x = 1$ dans l'égalité

$$\text{Log } ax = C + \text{Log } x,$$

on voit que $C = \text{Log } a$ et par suite que $\text{Log } ax = \text{Log } a + \text{Log } x$. Si a et b sont positifs on a donc la formule fondamentale :

$$\text{Log } (ab) = \text{Log } a + \text{Log } b$$

Pour $a = \frac{1}{b}$ on obtient

$$\text{Log } \frac{1}{b} \cdot b = \text{Log } 1 = \text{Log } \frac{1}{b} + \text{Log } b$$

Soit

$$\text{Log } \frac{1}{b} = -\text{Log } b$$

on en déduit

$$\text{Log } \frac{a}{b} = \text{Log } \frac{1}{b} + \text{Log } a = \text{Log } a - \text{Log } b.$$

D'où :

$$\text{Log } \frac{a}{b} = \text{Log } a - \text{Log } b$$

Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des nombres positifs on a

$$\text{Log } (a_1 a_2 \dots a_n) = \text{Log } a_1 + \text{Log } a_2 + \dots + \text{Log } a_n$$

ce qui donne pour $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a > 0$

$$\text{Log } a^n = n \text{Log } a$$

$$n \in \mathbf{N}$$

Variation de la fonction logarithme. — La fonction $x \mapsto \text{Log } x$ est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Étudions cette fonction aux deux bornes $(+\infty)$ et 0 de son domaine d'existence.

Faisons tendre x vers $+\infty$. A partir d'une certaine valeur on aura $x > 2^n$, n étant un entier aussi grand que l'on voudra. Puisque la fonction logarithmique est croissante, on aura $\text{Log } x > n \text{Log } 2$. L'inégalité $\text{Log } 2 > 0$ entraîne que $n \text{Log } 2$ est aussi grand qu'on le voudra et que par suite $\text{Log } x$ tend vers $+\infty$ avec x . Si maintenant x tend vers 0 en restant positif, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et

$\text{Log } x = -\text{Log } \frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$.

On a donc le tableau de variation :

x	0	1	$+\infty$
$\text{Log } x$	$-\infty$	0	$+\infty$

La forme du graphe en résulte immédiatement. La courbe représentative sera asymptote à Oy . Comme $y' = \frac{1}{x}$, on voit que la tangente à la courbe tend à devenir parallèle à Ox lorsque x croît indéfiniment.

Pour $x = 1$ on a $y = 0$ et $y' = 1$, la tangente est alors parallèle à la première bissectrice des axes.

On voit donc que la fonction logarithme définit une bijection de l'ensemble des nombres strictement positifs $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ sur l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$.

Pour tout $a \in \mathbf{R}$ il existe donc un nombre $b > 0$ et un seul tel que $a = \text{Log } b$.

On dit que b est l'exponentielle de a et l'on écrit $b = \exp a$. On a donc

$$a = \text{Log } b \quad \Leftrightarrow \quad b = \exp a$$

En particulier il existe un nombre e tel que

$$1 = \text{Log } e \quad \text{soit} \quad e = \exp 1$$

Nous montrerons plus tard que ce nombre e est le nombre déjà défini et calculé au chapitre II soit $e = 2,71828$ à 10^{-5} près par défaut.

2. — Exponentielle.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x = \text{Log } y$ implique $y = \exp x$. La fonction exponentielle $x \mapsto \exp x$ est donc la fonction réciproque de la fonction logarithme. Elle est par conséquent continue et strictement croissante. Le tableau de variation de la fonction exponentielle s'obtient en échangeant les deux lignes du tableau de variation de la fonction logarithme

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp x$	0	1	$+\infty$

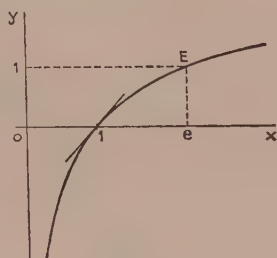


FIG. 2.

On notera que l'on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$$

Le graphe de la fonction exponentielle se déduit du graphe de la fonction logarithme par symétrie relativement à la première bissectrice des axes.

Dérivée. — Soit $y = \exp x$ d'où $x = \text{Log } y$. La fonction logarithme étant dérivable avec une dérivée jamais nulle il en résulte que la fonction exponentielle est dérivable pour toute valeur de la variable. On a

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y$$

car $y = \exp x \neq 0$. Ainsi

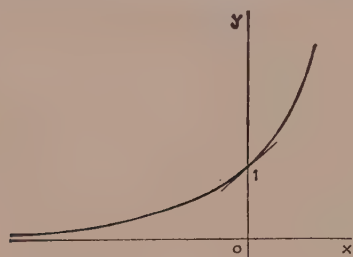


FIG. 3.

$$\frac{d}{dx} \exp x = \exp x$$

Il en résulte que plus l'exponentielle est grande plus elle croît rapidement : la croissance exponentielle est en quelque sorte « explosive ».

Isomorphismes. — L'application $x \mapsto \text{Log } x$ de $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ sur $\mathbf{R}$ est une bijection qui transforme la multiplication en addition

$$\text{Log } ab = \text{Log } a + \text{Log } b$$

On peut exprimer cela en disant que cette application est un isomorphisme du groupe multiplicatif $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ sur le groupe additif $\mathbf{R}$ (Rappels, § 11).

L'application réciproque $x \mapsto \exp x$ est donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ qui transforme l'addition en multiplication ; c'est un isomorphisme du groupe additif $\mathbf{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^+ - \{0\}$

$$\exp(a + b) = \exp a \exp b$$

Plus précisément, si $\alpha = \exp a$ ou $a = \text{Log } \alpha$ et $\beta = \exp b$ ou $b = \text{Log } \beta$, alors

$$a + b = \text{Log } \alpha + \text{Log } \beta = \text{Log } \alpha\beta$$

c'est-à-dire

$$\exp(a + b) = \alpha \cdot \beta = \exp a \exp b$$

A l'élément neutre 0 de $\mathbf{R}$ correspond l'élément neutre 1 de $\mathbf{R}^+ - \{0\}$:

$$\exp 0 = 1$$

A l'opposé ($-a$) d'un élément a de $\mathbf{R}$ correspond l'inverse de $\exp a$

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp a}$$

3. — Puissance.

Soit $a > 0$. Lorsque $\frac{p}{q}$ est un nombre rationnel positif ($p, q \in \mathbf{N}, q \neq 0$) on a

$$b = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad \Longleftrightarrow \quad b^q = a^p$$

d'où

$$\text{Log } b^q = q \text{ Log } b = p \text{ Log } a$$

soit

$$\text{Log } b = \text{Log } a^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \text{ Log } a$$

et

$$\text{Log } a^{-\frac{p}{q}} = \text{Log } \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = -\text{Log } a^{\frac{p}{q}} = -\frac{p}{q} \text{ Log } a$$

Ainsi, pour tout nombre rationnel x on a

$$\text{Log } a^x = x \text{ Log } a$$

Soit encore

$$(1) \quad a^x = \exp(x \text{ Log } a)$$

Lorsque x est un nombre réel quelconque — et non plus nécessairement un nombre rationnel — le deuxième membre de l'égalité (1) garde un sens et nous déciderons de le noter, encore dans ce cas, a^x .

L'égalité (1) est alors vraie pour tout $x \in \mathbf{R}$. On obtient en particulier, pour $a = e$,

$$e^x = \exp x$$

On emploiera donc indifféremment les notations e^x et $\exp x$. L'égalité (1) peut ainsi s'écrire

$$a^x = e^{x \text{ Log } a}$$

REMARQUE. — Soit x un nombre irrationnel. Pour toute suite x_n de nombres rationnels convergeant vers x , on a, en raison de la continuité de la fonction exponentielle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n \text{Log } a} = e^{x \text{Log } a}$$

soit

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$$

Cette égalité pourrait donc servir à définir a^x , lorsque x est irrationnel.

4. — Exponentielles et logarithmes de base a .

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. La fonction $x \mapsto a^x = e^{x \text{Log } a}$ est dite la *fonction exponentielle de base a* .

La fonction exponentielle $x \mapsto \exp(x) = e^x$ est donc la fonction exponentielle de base e .

L'égalité $a^x = e^{x \text{Log } a}$ ramène immédiatement l'étude de l'exponentielle de base a à celle d'une exponentielle de base e .

L'égalité $x = a^y = e^{y \text{Log } a}$ est équivalente à $y \text{Log } a = \text{Log } x$ d'où

$$y = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a}$$

Le nombre $\frac{\text{Log } x}{\text{Log } a}$ est dit le *logarithme de base a* de x . On le note $\log_a x$.

On a donc $\log_a a = 1$.

La fonction logarithme de base a , $x \mapsto \log_a x$, est donc la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base a . La fonction $x \mapsto \text{Log } x$ est de base e .

La fonction $\log_a$ est proportionnelle à Log . Réciproquement soit k un nombre réel non nul et $a = e^{1/k}$ on a donc $a > 0$, $a \neq 1$ et

$$k \text{Log } x = \frac{1}{\text{Log } a} \text{Log } x = \log_a x$$

Les logarithmes les plus utilisés pour les calculs numériques sont les logarithmes décimaux, c'est-à-dire de base 10, pour lesquels il existe des tables. On a

$$\log_{10} x = \log x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } 10} = M \cdot \text{Log } x$$

avec

$$M = \frac{1}{\text{Log } 10} = \log_{10} e = 0,4329 \dots$$

On utilise les logarithmes de base 2 en « *théorie de l'information* »

$$y = \log_2 x \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2^y$$

Dérivées. — Soit $y = a^x = e^{x \text{Log } a} = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x \text{Log } a$ on a

$$y'_x = (e^u)'_u \cdot u'_x = y \text{Log } a$$

C'est donc seulement dans le cas $a = e$ que l'on a $y' = y$.

On a

$$(\log_a x)'_x = \left(\frac{\text{Log } x}{\text{Log } a} \right)' = \frac{1}{\text{Log } a} \cdot \frac{1}{x}$$

On notera que les fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto \log_a x$ sont croissantes pour $a > 1$, décroissantes pour $a < 1$.

Règles de calcul. — La fonction $\log_a$ étant proportionnelle à Log définit, comme celle-ci, un isomorphisme du groupe multiplicatif $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ sur le groupe additif $\mathbf{R}$. On a donc

$$\forall X, Y > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \log_a XY = \log_a X + \log_a Y \\ \log_a 1 = 0 \\ \log_a \frac{1}{X} = -\log_a X \end{array} \right.$$

La fonction exponentielle de base a définit un isomorphisme inverse du précédent. On a donc

$$\forall x, y \in \mathbf{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{x+y} = a^x \cdot a^y \\ a^0 = 1 \\ a^{-x} = \frac{1}{a^x} \end{array} \right.$$

(on obtient ces égalités à partir des précédentes en posant $x = \log_a X$ et $y = \log_a Y$).

Notons aussi l'égalité

$$\forall y \in \mathbf{R} : (X > 0) \quad \log_a X^y = y \log_a X$$

qui se traduit inversement par

$$\forall x, y \in \mathbf{R} : (a^x)^y = a^{xy}$$

5. — Fonctions puissances.

Soit m un nombre réel donné. La fonction $x \mapsto x^m = e^{m \text{Log } x}$ définie pour $x > 0$, est dite la *fonction puissance d'exposant m* .

1^{er} cas : $m > 0$. — On a le tableau de variation suivant

x	0	1	$+\infty$
$m \text{Log } x$	$-\infty$	0	$+\infty$
x^m	0	1	$+\infty$

On notera que l'on a

$$m > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^m = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^m = +\infty$$

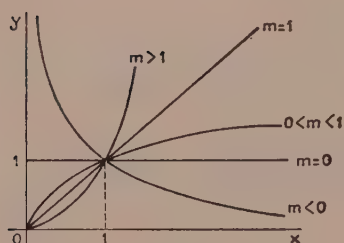


FIG. 4.

2^e Cas : $m < 0$.

x	0	1	$+\infty$
$m \log x$	$+\infty$	0	$-\infty$
x^m	$+\infty$	1	0

3^e Cas : $m = 0$. — On a $x^0 = 1$ pour tout $x > 0$.

Les allures des diverses courbes représentatives sont indiquées sur la figure 4.

Règles de calcul. — Pour un exposant m non nul la fonction $x \mapsto x^m$ est une bijection de $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ sur lui-même et l'on a

$$\begin{aligned} (xy)^m &= e^{m \log xy} = e^{m \log x + m \log y} = e^{m \log x} \cdot e^{m \log y} \\ &= x^m \cdot y^m \quad \text{pour} \quad x > 0 \quad \text{et} \quad y > 0 \end{aligned}$$

On remarque donc que l'application $x \mapsto x^m$ est un automorphisme (Rappels, § 11) du groupe multiplicatif $\mathbf{R}^+ - \{0\}$. Rassemblons les propriétés obtenues :

$$\begin{aligned} \forall x, y > 0 \quad & (xy)^m = x^m y^m \\ & x^{m+p} = x^m x^p \\ & x^0 = 1 \\ & x^{-m} = \frac{1}{x^m} \\ & (x^m)^p = x^{mp} \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a, pour $m \neq 0$, $(x^m)^{1/m} = x^1 = x$. Ainsi la fonction $x \mapsto x^{1/m}$ ($x > 0$) est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto x^m$.

Dérivées. — Soit $y = x^m = e^{m \log x} = e^{u(x)}$ avec $u(x) = m \log x$ on a

$$y'_x = (e^u)'_u \cdot u'_x = y \frac{m}{x} = m x^m x^{-1} = m x^{m-1}$$

$$\frac{d}{dx} x^m = m x^{m-1}$$

c'est-à-dire la même règle de dérivation que pour un exposant entier.

EXERCICES

1° Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $y = x^2 \text{Log } x$.

$$R. \quad y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{2(n-3)!}{x^{n-2}} \quad \text{pour } n \geq 3.$$

2° Variations et graphes des fonctions :

$$y = \text{Log} (\text{Log } x) \quad \text{et} \quad y = \text{Log} \frac{x-1}{x-2}.$$

3° A et B désignant des constantes, la fonction $y = A \sin \text{Log } x + B \cos \text{Log } x$ vérifie la relation :

$$x^2 y'' + xy' + y = 0.$$

4° Dérivées des fonctions :

$$y = \text{Log} \left| \text{tg} \frac{x}{2} \right| \quad \text{et} \quad z = \text{Log} \left| \text{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

$$R. \quad y' = \frac{1}{\sin x} \quad \text{et} \quad z' = \frac{1}{\cos x}.$$

5° Pour quelles valeurs de x la fonction $y = \log [\log (\log x)]$ est-elle définie ? nulle ? égale à 1 ?

$$R. \quad x > 10, \quad x = 10^{10}, \quad x = 10^{(10^{10})}.$$

6° Dans quelle base de logarithmes a-t-on ?

$$\text{Log}_x 2 = 2 ?$$

$$R. \quad x = \sqrt{2}.$$

*7° Discuter l'équation $(x+1) \text{Log} (x+2) - 2 = 0$.

$R.$ 2 solutions.

*8° Résoudre le système :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 1 \quad \text{Log } x + \text{Log } y = 3.$$

$$R. \quad \frac{e^3}{2} \left[1 - 2e^{-\frac{3}{2}} \pm \sqrt{1 - 4e^{-\frac{3}{2}}} \right]$$

*9° Pour tout x positif :

$$\text{Log } x \leq x - 1 \quad \text{et} \quad \text{Log } x \leq \frac{x}{e}.$$

***10°** Déterminer une constante P_0 , un polynôme P_1 du premier degré et un polynôme P_2 du second degré satisfaisant aux conditions :

$$\int_0^1 P_0^2 dx = \int_0^1 P_1^2 dx = \int_0^1 P_2^2 dx = 1$$

$$\int_0^1 P_0 P_1 dx = \int_0^1 P_1 P_2 dx = \int_0^1 P_2 P_0 dx = 0.$$

R. $P_0 = \pm 1, \quad P_1 = \pm \sqrt{3}(2x - 1), \quad P_2 = \pm \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1).$

***11°** Variations et graphes des fonctions :

$$y = (x + 1) \operatorname{Log} |x| \quad \text{et} \quad y = (x - 1)^2 \operatorname{Log} x.$$

****12°** Montrer que si $0 < a < b$:

$$\frac{b-a}{b} < \int_a^b \frac{dx}{x} < \frac{b-a}{a}.$$

En écrivant :

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \sum_{p=0}^{p=n-1} \int_{1+p}^{1+(p+1)} \frac{x-1}{n} \frac{dt}{t} \quad (n \text{ entier positif})$$

établir que si x est supérieur à 1, on a les inégalités :

$$(x-1) \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{1}{n+(p+1)(x-1)} < \operatorname{Log} x < (x-1) \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{1}{n+p(x-1)}.$$

Application : vérifier les inégalités :

$$\operatorname{Log} 2 - \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} < \operatorname{Log} 2.$$

***13°** La dérivée d'ordre $(n+1)$ de la fonction $y = x^n e^{1/x}$ (n entier ≥ 0) est

$$y^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1}} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

CHAPITRE VIII

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES CIRCULAIRES ET HYPERBOLIQUES

1. — Définition des fonctions trigonométriques.

Rappelons la définition des fonctions trigonométriques usuelles (Rappels, § 15).

Soit $(0, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de sens direct et x un nombre réel donné.

Considérons le vecteur unitaire $\vec{OM}$ qui fait avec le vecteur $\vec{i} = \vec{OA}$ un angle de mesure x radians (fig. 1) soit

$$x = (\vec{OA}, \vec{OM})$$

Le nombre x est également la mesure, en radians, d'un arc d'origine A et d'extrémité M . On a, par définition,

$$\vec{OM} = \cos x \vec{i} + \sin x \vec{j}$$

soit

$$\overline{OQ} = \cos x \quad \text{et} \quad \overline{OP} = \sin x$$

en désignant par Q et P les projections de M sur les axes.

Il résulte de ces définitions que l'on a $\forall k \in \mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned} \sin(x + 2k\pi) &= \sin x \\ \cos(x + 2k\pi) &= \cos x \end{aligned}$$

On a toujours :

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \cos x \leq 1.$$

La tangente de x est définie par

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

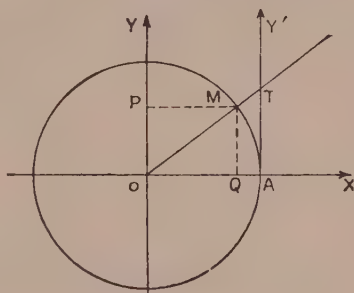


FIG. 1.

Si AY' désigne l'axe parallèle à OY mené par A (et par suite tangent au cercle C en A) et si T est le point où OM coupe AY' , on voit que $\operatorname{tg} x = AT$.

Si x est de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (k étant un entier), c'est-à-dire si M est situé sur OY , le point T n'est pas défini et $\operatorname{tg} x$ non plus (puisque $\cos x$ est alors égal à 0).

2. — La fonction sinus.

La fonction $y = \sin x$ est définie pour toutes les valeurs de x . Remarquons que, sauf pour quelques valeurs remarquables telles que $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, nous n'avons pas de moyen de calculer immédiatement cette fonction. À l'aide d'une figure à échelle suffisamment grande nous pourrions mesurer approximativement la grandeur de $\sin x$. Il est plus commode de se servir des tables de lignes trigonométriques. Nous verrons plus loin comment elles ont été établies (chap. IX, § 2).

La relation $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ peut s'exprimer en disant que la fonction $\sin x$ est *périodique de période 2π* . On dit qu'une fonction $f(x)$ est *périodique* s'il existe un nombre T non nul tel que $f(x + T) = f(x)$ pour tout x . Le nombre T est appelé une *période* de la fonction f (voir aussi chap. XI, § 1).

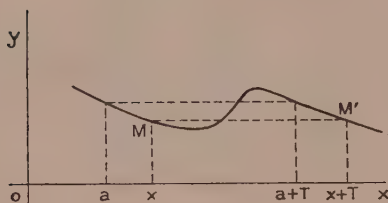


FIG. 2.

On remarque immédiatement que si T est une période de f il en est de même de tout nombre nT où n est un entier non nul (positif ou négatif). Si f admet la période T , il suffit d'étudier son comportement dans un intervalle d'une période, c'est-à-dire dans un intervalle de la forme $(a, a + T[$ pour la connaître partout.

Supposons tracé le graphe Γ de f dans l'intervalle $(a, a + T[$. Soit $x \in (a, a + T[$ et soit M le point de Γ d'abscisse x . On voit que le point M' du graphe de f ayant pour abscisse $x + T$ est le point déduit de M par une translation de vecteur parallèle à Ox de mesure T ; par suite le graphe de f dans l'intervalle $(a + T, a + 2T[$ s'obtient en translatant Γ par cette translation.

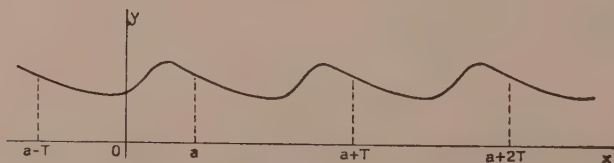


FIG. 3.

Le graphe complet de f est finalement composé des figures obtenues en translatant Γ parallèlement à Ox par des vecteurs de mesure nT ($n \in \mathbf{Z}$).

Il suffit donc d'étudier la fonction $\sin x$ dans un intervalle de longueur 2π .

La relation $\sin(-x) = -\sin x$ montre que cette fonction est impaire et que, par suite, l'origine est centre de symétrie de son graphe. Il suffira donc de tracer le graphe de $\sin x$ dans l'intervalle $(0, \pi)$ pour l'obtenir sans peine dans l'intervalle d'une période $(-\pi, +\pi)$ et l'obtenir partout.

La relation $\sin(\pi - x) = \sin x$ montre que la parallèle à l'axe des y d'abscisse est $\frac{\pi}{2}$ axe de symétrie du graphe et on est ramené

à tracer le graphe de $\sin x$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Il est bien évident, sur la figure 1, que lorsque x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$ la fonction $\sin x$ croît de 0 à 1.

La figure 4 montre que

La fonction $y = \sin x$ est continue pour toutes les valeurs de x .

En effet, si M' est le point du cercle C défini par l'arc $x + h$ et si P' est sa projection sur OY , on a la relation :

$$\overline{PP'} = \sin(x + h) - \sin x.$$

Mais d'autre part : $|\overline{PP'}| \leq MM' \leq \widehat{MM'} = |h|$ où $\widehat{MM'}$ désigne la longueur de l'arc MM' , d'où $|\sin(x + h) - \sin x| \leq |h|$

THÉORÈME 1. — *La fonction $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0.*

Comme $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, il suffit de montrer ce résultat quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Considérons alors la figure 1 et remarquons que l'on a les inégalités évidentes (en supposant $0 < x < \frac{\pi}{2}$).

Aire triangle $OQM \leq$ Aire secteur circulaire $OAM \leq$ Aire triangle OAT
inégalités qui s'écrivent encore :

$$\frac{1}{2} \sin x \cos x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

ou :

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

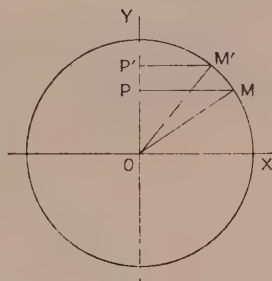


FIG. 4.

La fonction $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ est continue pour toute valeur de x puisqu'il en est ainsi de $\sin x$. Si x tend vers 0, $\cos x$ tend donc vers $\cos 0 = 1$. De même $\frac{1}{\cos x}$ tend vers $\frac{1}{\cos 0} = 1$. Par suite $\frac{x}{\sin x}$, compris entre deux quantités qui tendent toutes deux vers 1, tend aussi vers 1.

Note. — L'aire du secteur OAM n'est égal à $\frac{1}{2}x$ que dans le seul cas où x est la mesure de l'angle en radians. C'est donc seulement dans ce cas que le théorème 1 est valable et c'est ce qui explique le choix du radian comme unité de mesure.

COROLLAIRE. — La fonction $\sin x$ admet une dérivée égale à $\cos x$ pour toute valeur de x .

On a, en effet,

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

or

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$$

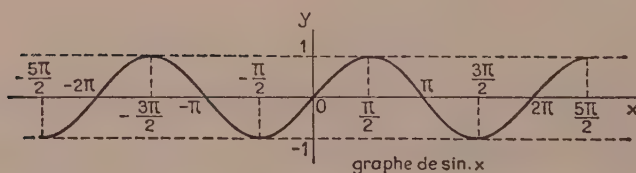


FIG. 5.

On peut tracer maintenant la *sinusoïde*, graphe de la fonction $y = \sin x$.

On voit en particulier qu'aux points d'abscisses $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (k entier) la tangente à la sinusoïde est parallèle à l'axe des x et qu'au point O la tangente est la première bissectrice des axes.

3. — *La fonction cosinus et la fonction tangente.*

La relation :

$$\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$$

permet d'étudier sans peine la fonction cosinus. Cette dernière fonction est définie et continue pour toute valeur de x , elle est périodique de période 2π . On a d'autre part :

$$\frac{d}{dx} \cos x = \frac{d}{dx} \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = -\sin x.$$

La dérivée de $\cos x$ est égale à $-\sin x$.

$\cos x$ est une fonction paire. Son graphe a Oy comme axe de symétrie. La relation $\cos(\pi - x) = -\cos x$ montre que le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ sur Ox est centre de symétrie du graphe.

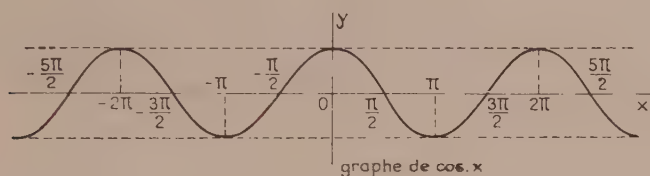


FIG. 6.

La relation $\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$ montre que le graphe de $\cos x$ se déduit du graphe de $\sin x$ par une translation parallèle à l'axe des x et de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

La fonction $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est définie et continue pour toute valeur de x qui n'annule pas le dénominateur, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de x qui ne sont pas de la forme $(2k + 1) \frac{\pi}{2}$ (k entier). La relation $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ montre qu'elle est périodique de période π . La relation $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ montre qu'elle est impaire et que son graphe est donc symétrique par rapport au point O . Il suffit donc d'étudier sa variation pour $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$. Si x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ croît et $\cos x$ décroît, ces deux quantités restant positives, $\operatorname{tg} x$ croît donc constamment. On a $\operatorname{tg} 0 = 0$ et si x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures, $\operatorname{tg} x$ tend vers $+\infty$.

Si x tend vers 0, $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x}$ tend vers 1, ce qui montre que le graphe de $\operatorname{tg} x$ est tangent à l'origine à la première bissectrice des axes (fig. 7).

On voit que dans les intervalles où elle est continue la fonction $\operatorname{tg} x$ reste constamment croissante. C'est ce que confirme l'expression de sa dérivée qui est toujours positive. En effet :

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

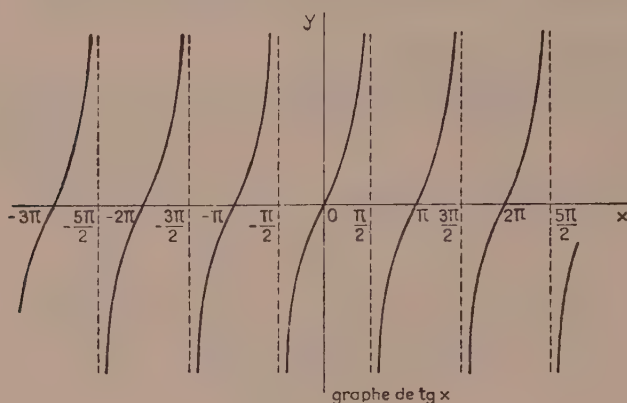


FIG. 7.

4. — Remarques sur les dérivées des fonctions trigonométriques.

Encadrons les formules fondamentales :

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

On peut encore écrire :

$$\frac{d}{dx} \sin x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

et l'on voit facilement sous cette forme que, quel que soit l'entier positif n , $\sin x$ admet une dérivée n -ième donnée par la formule :

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin x = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right)$$

De la même façon :

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right)$$

On remarque enfin qu'une fonction y de la forme :

$$(1) \quad y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$$

où A , B et ω sont des constantes, est telle que :

$$(2) \quad y'' + \omega^2 y = 0$$

Nous montrerons plus tard que la relation (2) caractérise les fonctions de la forme (1). Ces fonctions jouent un rôle extrêmement important dans toutes les parties de la Physique et de la Mécanique qui concernent les mouvements périodiques (courants alternatifs, acoustique, ...). Nous verrons dans le tome II que l'on peut décrire à l'aide de telles fonctions toutes les fonctions périodiques (théorie des séries de Fourier).

5. — *Fonction Arc sinus.*

Une fonction périodique n'est pas injective et ne peut être inversée.

Cependant la fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right]$. Elle définit une application bijective de cet intervalle sur l'intervalle $(-1, +1)$. L'application réciproque est notée Arc sin (lire grand arc sinus).

L'égalité $y = \text{Arc sin } x$ signifie donc que y est l'arc de sinus égal à x , et qui est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

La fonction $x \mapsto \text{Arc sin } x$ est définie pour $x \in (-1, +1)$. Son tableau de variations est le suivant :

x	-1	0	$+1$
y	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$

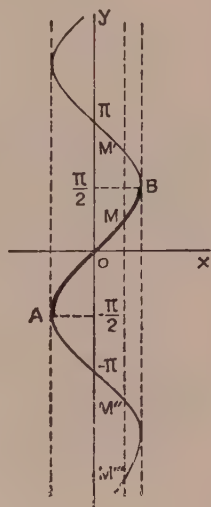


FIG. 8.

La fonction Arc sin x est donc monotone, croissante, continue dans l'intervalle $(-1, +1)$ et impaire.

Sa dérivée se calcule au moyen de la dérivée de la fonction inverse $x = \sin y$. Nous avons :

$$x'_y = \cos y, \quad \text{d'où} \quad y'_x = \frac{1}{\cos y}.$$

Exprimons $\cos y$ en fonction de x en remarquant que :

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$$

et que $\cos y$ est nécessairement positif puisque $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq +\frac{\pi}{2}$. D'où :

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}$$

et enfin pour $|x| < 1$:

$$\frac{d}{dx} \text{Arc sin } x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

On utilise parfois la notation $y = \text{arc sin } x$ comme une relation entre x et y équivalente à $x = \sin y$. On prendra garde à ne pas employer arc sin pour désigner Arc sin. La figure 8 montre le graphe de la relation $y = \text{arc sin } x$ et en trait renforcé le graphe de la fonction $y = \text{Arc sin } x$.

6. — Fonction Arc cosinus.

Les considérations du numéro précédent s'appliquent lorsque l'on veut inverser la fonction cosinus.

La fonction cosinus définit une application bijective de l'intervalle $(0, \pi)$ sur l'intervalle $(-1, +1)$. On note Arc cosinus l'application réciproque. L'égalité $y = \text{Arc cos } x$ signifie donc $x = \cos y$ et $0 \leq y \leq \pi$.

Le tableau de variation est facile à établir :

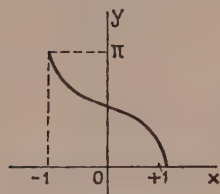


FIG. 9.

x	-1	0	$+1$
y	π	$\frac{\pi}{2}$	0

La fonction Arc cos x est strictement décroissante et continue dans l'intervalle $(-1, +1)$ et son graphe, représenté figure 9, est encore un arc de sinusoïde.

Le calcul de la dérivée se fait immédiatement. De $x = \cos y$ on déduit :

$$x'_y = -\sin y = -\sqrt{1 - x^2}$$

car $\sin y$ est positif, puisque $0 \leq y \leq \pi$. D'où pour $|x| < 1$:

$$\frac{d}{dx} \text{Arc cos } x = - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

REMARQUE. — Nous constatons que les deux fonctions $\text{Arc sin } x$ et $\text{Arc cos } x$ ont des dérivées opposées. Ceci revient à dire que la fonction $\text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x$ a une dérivée toujours nulle, ou encore qu'elle est constante. Cette constante étant :

$$\text{Arc sin } 0 + \text{Arc cos } 0 = \frac{\pi}{2},$$

on a donc la relation :

$$\text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x = \frac{\pi}{2}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier directement cette relation.

Cette relation entre $\text{Arc sin } x$ et $\text{Arc cos } x$ montre que l'une de ces fonctions est pratiquement sans intérêt. En fait dans un calcul il est préférable de n'introduire qu'une seule de ces fonctions.

7. — Fonction Arc tangente.

L'inversion de la fonction tangente se fait de la même façon. La fonction tangente définit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\mathbf{R}$. L'application réciproque est notée Arc tg .

L'égalité $y = \text{Arc tg } x$ signifie donc

$$x = \text{tg } y \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$$

La fonction $y = \text{Arc tg } x$ est alors définie pour toute valeur de x , strictement croissante, continue et impaire.

Son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$

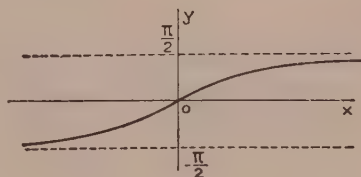


FIG. 10.

et son graphe a un centre de symétrie et deux asymptotes. Il s'obtient en prenant le symétrique par rapport à la première bissectrice des axes de la partie de la courbe tracée figure 7 correspondant à $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Calculons la dérivée de $y = \text{Arc tg } x$.

De $x = \text{tg } y$ nous déduisons :

$$x'_y = 1 + \text{tg}^2 y = 1 + x^2.$$

D'où pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\frac{d}{dx} \text{Arc tg } x = \frac{1}{1 + x^2}$$

8. — *Fonctions hyperboliques.*

Pour la commodité des calculs on introduit souvent les fonctions suivantes :

$$\text{cosinus hyperbolique} \quad \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{sinus hyperbolique} \quad \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{tangente hyperbolique} \quad \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}.$$

Ces fonctions jouissent de propriétés voisines de celles des fonctions trigonométriques. Nous expliquerons ultérieurement la raison profonde de ces analogies (chap. XVI).

Contentons-nous actuellement d'énoncer les résultats suivants, faciles à vérifier :

$$\text{ch}(-x) = \text{ch } x \quad \text{sh}(-x) = -\text{sh } x \quad \text{th}(-x) = -\text{th } x$$

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$$

$$\text{ch}(a+b) = \text{ch } a \text{ ch } b + \text{sh } a \text{ sh } b$$

$$\text{sh}(a+b) = \text{sh } a \text{ ch } b + \text{sh } b \text{ ch } a$$

$$\text{th}(a+b) = \frac{\text{th } a + \text{th } b}{1 + \text{th } a \text{ th } b}$$

formules analogues, à des signes près, à celles de trigonométrie.

On voit immédiatement que ces fonctions hyperboliques admettent des dérivées données par les formules :

$$(\text{ch } x)' = \text{sh } x \quad (\text{sh } x)' = \text{ch } x$$

et :

$$(\text{th } x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x.$$

Enfin, remarquons que la fonction :

$$y = A \text{ ch } \omega x + B \text{ sh } \omega x$$

où A , B et ω sont des constantes, peut également s'écrire :

$$y = \frac{A+B}{2} e^{\omega x} + \frac{A-B}{2} e^{-\omega x}$$

et vérifie la relation :

$$y'' - \omega^2 y = 0$$

que l'on pourra rapprocher utilement de la relation analogue établie au § 4 pour les fonctions trigonométriques.

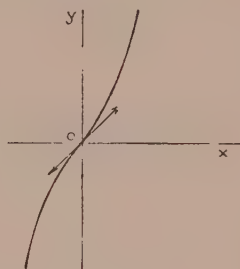
9. — Variations de $\text{sh } x$, $\text{ch } x$ et $\text{th } x$.

Soit d'abord :

$$y = \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

fonction impaire qui est la différence de deux fonctions, l'une e^x toujours croissante et l'autre e^{-x} toujours décroissante. Donc y est croissante (d'ailleurs $y' = \text{ch } x > 0$) et nous aurons le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$+\infty$



et le graphe (fig. 11) présente un centre de symétrie à l'origine.

FIG. 11.

Étudions maintenant $z = \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, fonction paire, toujours positive. Nous aurons $z' = \text{sh } x$ du signe de x .

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
z'	$-\infty$	0	$+\infty$
z	$+\infty$	1	$+\infty$

et le graphe (fig. 12) symétrique par rapport à Oz . Cette courbe est appelée *chaînette* et elle se rencontre lorsqu'on étudie la figure d'équilibre d'un fil pesant suspendu entre deux points. La forme de la chaînette ressemble à celle d'une parabole, mais nous verrons que la croissance de $\text{ch } x$ est beaucoup plus rapide que celle de x^2 .

Enfin, soit la fonction impaire :

$$t = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, \quad \text{de dérivée } t' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 0.$$

Donc $\operatorname{th} x$ est croissant tendant vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$. D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
t'	0	+	0
t	-1	↗ 0 ↘	1

Le graphe (fig. 13) possède un centre de symétrie à l'origine et deux asymptotes parallèles à Ox .

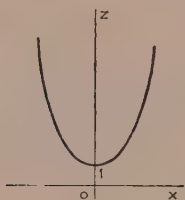


FIG. 12.

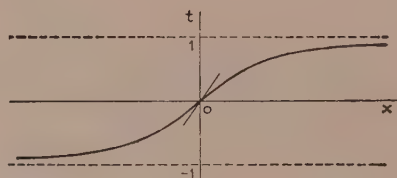


FIG. 13.

10. — Fonctions hyperboliques inverses.

Nous pouvons définir les fonctions inverses des fonctions hyperboliques comme nous l'avons fait pour les fonctions trigonométriques.

De la relation $x = \operatorname{sh} y$, on déduit $y = \operatorname{Arg} \operatorname{sh} x$ (Arg se lit argument). Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x et est une fonction monotone croissante. On peut expliciter plus précisément cette fonction car la relation :

$$x = \operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

peut s'écrire :

$$e^{2y} - 2x e^y - 1 = 0$$

qui est une équation du deuxième degré par rapport à l'inconnue e^y mais dont une seule racine est acceptable car e^y doit être positif et que le produit des racines étant égal à -1 , une seule d'entre elles est positive. On aura donc :

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

d'où :

$$y = \text{Arg sh } x = \text{Log} (x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

On peut calculer la dérivée de y soit comme fonction inverse, soit à partir de l'expression ci-dessus; on trouve :

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

La fonction ch définit une application bijective de l'intervalle $(0, +\infty)$ sur l'intervalle $(1, +\infty)$, on désigne par Arg ch l'application réciproque. L'égalité $z = \text{Arg ch } x$, qui n'a de sens que pour $x \geq 1$, signifie donc

$$x = \text{ch } z \quad \text{et} \quad z \geq 0$$

Ici encore on pourra écrire :

$$x = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

ou :

$$e^{2z} - 2x e^z + 1 = 0$$

équation de second degré en e^z qui n'a de racines que si $x^2 - 1 \geq 0$. Comme il faut en outre que les racines en e^z soient positives, nous devons ajouter la condition $x \geq 0$ qui, jointe à $x^2 - 1 \geq 0$, conduit à :

$$x \geq 1.$$

Dans ces conditions l'équation précédente a deux racines :

$$e^z = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad e^{z_1} = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

mais :

$$e^z \cdot e^{z_1} = 1$$

donc z et z_1 sont deux nombres opposés. On doit avoir $z \geq 0$ donc $e^z \geq 1$ et

$$z = \text{Arg ch } x = \text{Log} (x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

La dérivée a pour valeur :

$$z' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{pour } x > 1$$

Enfin, de $x = \text{th } t$, on tire $t = \text{Arg th } x$, qui, d'après la figure 13, n'est définie que pour x compris entre -1 et $+1$. De :

$$x = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$$

on tire :

$$e^{2t} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

ou :

$$t = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x}$$

formule qui exige bien que x soit compris entre -1 et $+1$. On trouve comme valeur de la dérivée :

$$t' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Remarquons que, comme les fonctions trigonométriques réciproques, les fonctions hyperboliques réciproques ont des dérivées exprimables algébriquement.

EXERCICES

1° Dérivée de $y = \cos (2\pi \cos x)$. Quelles sont les valeurs de x qui annulent y' ?

$$R. \quad k\pi, \quad \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

2° Démontrer que

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

3° La fonction $y = \sin (n \operatorname{Arc} \sin x)$ vérifie, quel que soit n constant, la relation :

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

4° Résoudre l'équation $\operatorname{Arc} \sin 1 = \operatorname{Arc} \sin \frac{5}{13} + \operatorname{Arc} \sin x$.

$$R. \quad x = \frac{12}{13}.$$

5° Variations et graphes des fonctions :

$$y = \frac{\operatorname{Arc} \sin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y = \frac{\cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)}{\sin^2 x}, \quad y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x.$$

*6° On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{pour} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Montrer que cette fonction admet une dérivée discontinue pour $x = 0$.

$$R. \quad f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \text{pour} \quad x \neq 0.$$

*7° Variations et graphes des fonctions :

$$y = 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right), \quad y = \operatorname{Arc} \cos \sqrt{1-x}.$$

Vérifier que chacun de ces graphes admet un centre de symétrie.

*8° Donner la forme la plus simple possible à la dérivée de :

$$y = -3 \cos^5 x + 10 \cos^3 x - 15 \cos x.$$

$$R. y' = 15 \sin^5 x.$$

*9° Établir par récurrence que, n désignant un entier positif, $\cos nx$ et $\frac{\sin nx}{\sin x}$ sont des polynômes par rapport à la variable $t = \cos x$.

*10° Pour quelles valeurs de x a-t-on :

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} (x\sqrt{2}-1) + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (x\sqrt{2}+1) = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} ?$$

$$R. -1 < x < +1.$$

*11° Résoudre l'équation :

$$\operatorname{Arc} \sin x + \operatorname{Arc} \sin 2x = \operatorname{Arc} \cos x + \operatorname{Arc} \cos 2x.$$

$$R. \quad x = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

**12° A chaque valeur de $x \in]-1, +1[$, la relation :

$$y = \cos \left(\frac{2}{3} \operatorname{arc} \cos x \right)$$

fait correspondre trois valeurs de y . Séparer les trois fonctions ainsi définies, étudier leurs variations et les représenter graphiquement.

**13° Résoudre l'équation :

$$\operatorname{Arc} \sin x + \frac{\pi}{5} = 2 \operatorname{Arc} \sin \sqrt{a}$$

et discuter selon les valeurs de a :

$$R. \quad 0 \leq a \leq \frac{3}{4} \quad x = a - \frac{1}{2} + \sqrt{3a(1-a)}.$$

**14° Variations et graphe de la fonction :

$$y = \operatorname{Arc} \sin \frac{2x}{1+x^2} - 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x.$$

**15° a et b désignant des constantes, la fonction $y(x) = a \cos x + b \sin x$ vérifie les conditions :

$$y'' + y = 0 (\forall x), \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b.$$

Montrer que si une autre fonction $z(x)$ vérifie ces conditions, on aura les égalités :

$$yz'' - y''z = 0, \quad yz' - y'z = 0, \quad y = z(\forall x).$$

16° Variations et graphes des fonctions :

$$e^{(e^x)}, \quad e^{\sin x}, \quad \text{Arg ch } \sqrt{x^2 + 1}.$$

17° Quel est le reste de la division de $(\text{ch } a + x \text{ sh } a)^4$ par $x^2 - 1$, a étant un nombre réel quelconque ? Généraliser.

R. $\text{ch } 4a + x \text{ sh } 4a.$

18° La fonction $y = \text{sh } x \sin x$ et sa dérivée quatrième y^{IV} vérifient la relation :

$$y^{IV} + 4y = 0.$$

19° Résoudre l'équation :

$$\text{ch } x + \text{sh } x = \frac{1}{\text{sh } x} - \frac{1}{\text{ch } x}.$$

R. $x = \frac{1}{4} \text{Log } 5.$

***20°** Montrer que la dérivée d'ordre n de la fonction $y = e^x \sin x$ peut s'écrire :

$$y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin \left(x + n \frac{\pi}{4} \right)$$

Peut-on donner un sens à cette formule pour n entier négatif ?

R. Si $n = -p$, où p est un entier positif, la dérivée $p^{\text{ième}}$ de $y^{(-p)}$ est y . En particulier :

$$y^{(-1)} = \int_{\frac{\pi}{2}}^x e^t \sin t dt.$$

***21°** Résoudre et discuter le système :

$$\text{ch } x + \text{ch } y = 2a \quad \text{sh } x + \text{sh } y = 2b.$$

Dans cet exercice et le suivant, le résultat de la discussion sera porté sur une figure où sera indiqué le nombre de solutions suivant la région à laquelle appartient le point de coordonnées (a, b) .

R. Les régions à considérer sont limitées par une branche d'hyperbole.

***22°** Résoudre et discuter l'équation :

$$a \text{ ch } x + b \text{ sh } x = 1.$$

R. On sera amené à tracer une hyperbole et ses asymptotes.

***23°** Variations et graphes des fonctions :

$$y = \text{Log} (\sin e^x) \quad \text{et} \quad y = \text{Log} (1 + \sqrt[3]{8 + e^{3x}}).$$

Montrer que les deux graphes sont asymptotes à la droite d'équation $y = x$.

***24°** On pose $\text{th } x = \sin \theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$. Exprimer x , $\text{ch } x$, $\text{sh } x$ en fonction de θ .

R. $x = \text{Log} \text{tg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \quad \text{ch } x = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \text{sh } x = \text{tg } \theta$

****25°** Résoudre et discuter le système :

$$\operatorname{ch} x + \cos y = \frac{\operatorname{sh} x}{a} = \frac{\sin y}{b}.$$

R. En posant :

$$\frac{\operatorname{sh} x}{a} = t, \quad \text{on trouve} \quad t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \frac{2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 - b^2) + 1}}.$$

CHAPITRE IX

LA FORMULE DE TAYLOR ET SES CONSÉQUENCES

1. — Formule de Taylor.

THÉORÈME 1. — Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé (a, b) admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n continues sur l'intervalle fermé (a, b) et une dérivée d'ordre $n + 1$ sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Il existe alors une valeur c de l'intervalle ouvert $]a, b[$ telle que :

$$(1) \quad \boxed{f(b) - f(a) = (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b - a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(c)}$$

Soit A le nombre défini par l'égalité :

$$(2) \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b - a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (b - a)^{n+1}A$$

et soit la fonction $F(x)$ telle que :

$$F(x) = f(b) - f(x) - (b - x)f'(x) - \dots - \frac{(b - x)^n}{n!}f^{(n)}(x) - (b - x)^{n+1}A.$$

D'après les hypothèses du théorème cette fonction F est continue sur l'intervalle fermé (a, b) et a une dérivée sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ qui est :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -f'(x) + f'(x) - (b - x)f''(x) + (b - x)f''(x) - \dots + \frac{(b - x)^{n-1}}{(n - 1)!}f^{(n)}(x) \\ &\quad - \frac{(b - x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) + (n + 1)(b - x)^n A \\ &= (n + 1)(b - x)^n A - \frac{(b - x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x). \end{aligned}$$

Comme $F(a) = F(b) = 0$, le théorème de Rolle montre qu'il existe un nombre c appartenant à $]a, b[$ tel que $F'(c) = 0$, c'est-à-dire tel que :

$$0 = (n+1)(b-c)^n A - \frac{(b-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c)$$

ou encore :

$$A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

En portant cette valeur de A dans l'égalité (2) on trouve bien l'égalité (1) que l'on se proposait de démontrer.

La formule (1) est dite *formule de Taylor*. En posant $b = a + h$ elle s'écrit encore sous la forme :

$$(3) \quad f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

avec $0 < \theta < 1$.

En particulier, pour $a = 0$, en posant $h = x$, on a :

$$(4) \quad f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

avec $0 < \theta < 1$.

Cette égalité est également connue sous le nom de *formule de MacLaurin*.

REMARQUES. — 1° La formule des accroissements finis n'est qu'un cas particulier de la formule de Taylor, celui de $n = 0$.

2° Dans le cas où $f(x)$ est un polynôme de degré n , le *terme complémentaire* de la formule de Taylor faisant intervenir la dérivée d'ordre $n+1$ de f , est nul et le polynôme $f(x)$ se met sous la forme :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

2. — Application au calcul des valeurs d'une fonction.

La formule de Taylor permet d'exprimer la fonction $f(x)$ comme somme d'un polynôme de degré n et d'un terme complémentaire

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))$$

(θ étant un nombre compris entre 0 et 1, d'ailleurs variable avec x). Lorsque n est assez grand et $|x-a|$ faible, ce terme est bien souvent très petit, ce qui permet d'obtenir une très bonne approximation de $f(x)$ en la remplaçant par un polynôme. Ceci est un résultat très remarquable et très utile puisque les polynômes sont les fonctions les plus simples que nous ayons à notre disposition et d'ailleurs les seules dont nous sachions calculer les valeurs exactement.

Supposons, par exemple, que nous voulions calculer $\sin 31^\circ$. La dérivée de

$\sin x$ étant $\cos x$ et celle de $\cos x$ étant $-\sin x$, à condition d'exprimer l'angle x en radians, on peut donc poser :

$$a = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad h = 1^\circ = \frac{\pi}{180}.$$

La formule de Taylor permet alors d'écrire :

$$\sin 31^\circ = \sin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{180} \right)^2 \sin \frac{\pi}{6} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{180} \right)^3 \cos c.$$

Comme $|\cos c| \leq 1$, le terme complémentaire $-\frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{180} \right)^3 \cos c$ a une valeur absolue inférieure à $\frac{\pi^3}{6 \times 180^3}$, soit approximativement $\frac{1}{10^6}$. A condition de connaître π et $\sqrt{3}$ avec une précision suffisante, on voit que l'on pourra calculer $\sin 31^\circ$ avec une précision du millionième en ne tenant pas compte de ce terme complémentaire dit encore *reste*.

En fait, en poussant suffisamment loin la formule de Taylor, et en utilisant une valeur suffisamment précise de π , on pourrait de cette manière calculer avec la précision désirée n'importe quelle valeur de $\sin x$. C'est là le principe de la méthode utilisée pour dresser la table des valeurs de la fonction $\sin x$.

Considérons la fonction $y = e^x$. On a $y^{(p)} = e^x$ et par suite $y^{(p)}(0) = 1$. La formule de MacLaurin donne

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

avec $0 < \theta < 1$. D'où, pour $x = 1$,

$$e = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

donc

$$0 < e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) < \frac{e}{(n+1)!}$$

d'où

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

Cette limite a été examinée au chapitre II, § 4, et l'on y a montré :

$$2,71828 < e < 2,71829.$$

3. — Comportement d'une fonction près d'un point où la dérivée s'annule.

Supposons que la fonction $f(x)$ admette dans un voisinage de x_0 des dérivées continues jusqu'à l'ordre $p+1$, que l'on ait les égalités :

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(p)}(x_0) = 0$$

et l'inégalité $f^{(p+1)}(x_0) \neq 0$.

La formule de Taylor permet alors d'écrire si $|h|$ est suffisamment petit :

$$(5) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x_0 + \theta h) \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < h.$$

Puisque $f^{(p+1)}(x)$ est continu dans un voisinage de x_0 et que $f^{(p+1)}(x_0)$ n'est pas nul, nous pouvons supposer $|h|$ suffisamment petit pour que $f^{(p+1)}(x_0 + \theta h)$ soit non nul et du signe de $f^{(p+1)}(x_0)$. Supposons qu'il en soit ainsi. La formule (5) montre alors que le signe de $f(x_0 + h) - f(x_0)$ dépend à la fois de la parité de p et du signe de $f^{(p+1)}(x_0)$. On peut donc tracer l'allure du graphe de $f(x)$ près du point d'abscisse x_0 . Il faut distinguer quatre cas.

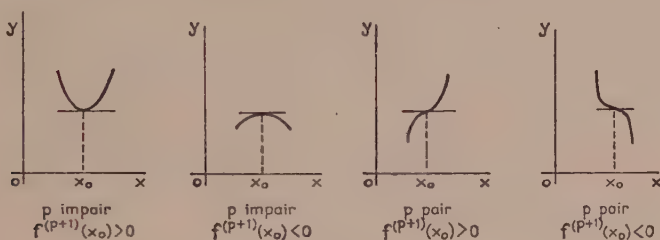


FIG. 1.

On voit que si p est impair la fonction f passe par un extremum pour x_0 (un maximum si $f^{(p+1)}(x_0) < 0$ et un minimum si $f^{(p+1)}(x_0) > 0$). Si p est pair la fonction f ne passe pas par un extremum pour x_0 , mais si $p > 0$, c'est-à-dire si $f'(x_0) = 0$, le graphe f présente pour $x = x_0$ un point d'inflexion (c'est-à-dire un point où la courbe traverse sa tangente) à tangente horizontale.

Si $f'(x_0) = 0$ le cas le plus courant est bien entendu celui où $f''(x_0) \neq 0$, c'est-à-dire le cas où la fonction passe par un extremum, mais il faut bien voir que ce n'est pas là une nécessité.

4. — Développements limités.

Considérons la fonction $y = e^x$, la formule de MacLaurin permet d'écrire :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1)$$

ou encore :

$$(6) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x).$$

On dit que (6) représente un développement limité d'ordre n de e^x . Plus généralement, si $f(x)$ est une fonction telle que l'on puisse écrire une égalité de la forme :

$$(7) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

$\varepsilon(x)$ étant, comme toujours, une fonction de x tendant vers 0 avec x , et cette égalité étant valable toutes les fois que $|x|$ est suffisamment petit, on dit que la formule (7) donne un *développement limité (par rapport à x) d'ordre n de la fonction $f(x)$* .

Dans un tel développement on ne se préoccupe pas de la forme exacte de la fonction $\varepsilon(x)$, mais simplement du fait que $\varepsilon(x)$ tende vers 0 avec x (nous continuerons à adopter pour $\varepsilon(x)$ les conventions indiquées au n° 3 du chapitre III). L'intérêt d'un tel développement est que l'on peut dans les calculs remplacer $f(x)$ par le polynôme $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ en commettant une erreur absolue très petite par rapport à la quantité x^n si $|x|$ est suffisamment petit.

Montrons d'abord que

Une fonction $f(x)$ ne peut admettre deux développements limités distincts de même ordre n .

Soient :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x) \\ &= b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + x^n\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Il nous faut montrer les égalités :

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_n = b_n.$$

Supposons qu'elles ne soient pas toutes réalisées et soit p le plus petit indice i tel que $a_i \neq b_i$. Les égalités précédentes permettent d'écrire :

$$0 = (a_p - b_p)x^p + \dots + (a_n - b_n)x^n + x^n\varepsilon(x)$$

ou encore :

$$0 = (a_p - b_p) + (a_{p+1} - b_{p+1})x + \dots + (a_n - b_n)x^{n-p} + x^{n-p}\varepsilon(x).$$

On voit que le deuxième membre de l'égalité précédente tend vers $a_p - b_p$ si x tend vers 0. Comme ce deuxième membre est toujours nul, on a donc $a_p = b_p$, ce qui contredit les hypothèses faites sur p . On voit donc que l'on tombe sur une absurdité si on ne suppose pas réalisées toutes les égalités $a_i = b_i$ ($0 \leq i \leq n$), ce qui démontre le théorème (on remarquera que ceci entraîne l'égalité des deux fonctions $\varepsilon(x)$ introduites dans les deux développements de $f(x)$, égalité qui ne présente d'ailleurs pas d'intérêt).

5. — *Obtention de développements limités par la formule de MacLaurin.*

L'exemple donné plus haut de la fonction e^x montre que la formule de MacLaurin permet dans certains cas d'obtenir le développement limité d'une fonction.

Supposons que l'on puisse appliquer à une fonction $f(x)$ la formule de MacLaurin jusqu'à l'ordre n :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \quad (0 < \theta < 1).$$

Pour obtenir de cette façon un développement limité d'ordre n de $f(x)$ il faut et il suffit que la fonction $\frac{x f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}$ tende vers 0 avec x .

Comme x tend vers 0 avec x , il suffit pour cela (mais il n'est pas nécessaire !) que $f^{(n+1)}(x)$ reste borné dans un voisinage de 0, c'est-à-dire qu'il existe un nombre A et un nombre $\alpha > 0$ tels que $|x| < \alpha$ entraîne $|f^{(n+1)}(x)| < A$. Ceci sera en particulier réalisé si $f^{(n+1)}(x)$ est une fonction continue pour $x = 0$. On voit donc que :

Si dans un voisinage de $x = 0$, la fonction $f(x)$ a des dérivées continues jusqu'à l'ordre $n + 1$, elle a un développement limité d'ordre n que l'on peut obtenir par la formule de MacLaurin.

On a vu comment on obtient de cette façon un développement limité de e^x :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

Si on prend maintenant $f(x) = \sin x$, on sait que :

$$f^{(n)}(x) = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$$

et par suite :

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p + 1. \end{cases}$$

On peut donc écrire :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x).$$

De même :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x).$$

On remarquera ici encore l'analogie des fonctions trigonométriques et des fonctions hyperboliques. Ces dernières ont toutefois des développements plus réguliers que ceux des fonctions trigonométriques car leurs coefficients sont tous de même signe au lieu d'être alternativement positifs et négatifs.

Il ne peut être question de chercher un développement limité de $\operatorname{Log} x$ puisque cette fonction n'est pas définie pour $x = 0$. On peut toutefois chercher un développement limité de $\operatorname{Log} (a + x)$ lorsque $a > 0$. Comme :

$$\operatorname{Log} (a + x) = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} \left(1 + \frac{x}{a} \right),$$

on est ramené à chercher un développement limité de $\text{Log} \left(1 + \frac{x}{a}\right)$, ce qui revient à chercher un développement limité de $\text{Log} (1 + x)$.

Si $f(x) = \text{Log} (1 + x)$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

d'où :

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

et le développement :

$$\text{Log} (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x).$$

De même la fonction x^m (m étant un nombre réel quelconque) n'est pas développable par la formule de MacLaurin puisqu'elle n'est en général pas définie pour $x < 0$. On peut toutefois chercher un développement limité de $(a+x)^m$ si $a > 0$ ou, ce qui revient au même, en vertu de l'égalité :

$$(a+x)^m = a^m \left(1 + \frac{x}{a}\right)^m,$$

un développement limité de $(1+x)^m$.

Si donc $f(x) = (1+x)^m$, on a :

$$f^{(p)}(x) = m(m-1) \dots (m-p+1) (1+x)^{m-p}$$

et par suite :

$$f^{(p)}(0) = m(m-1) \dots (m-p+1).$$

On peut donc écrire :

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-p+1)}{p!} x^p + \dots \\ \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x).$$

On remarque que si m est un entier positif, tous les coefficients sont nuls à partir de $p = (m+1)$ et on retrouve la formule du binôme (chap. I, § 1).

Dans le cas où $m = -1$, on a la formule importante :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

et, en changeant x en $-x$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Tous les développements limités que nous venons d'indiquer sont importants et doivent pouvoir être retrouvés instantanément.

6. — Opérations sur les développements limités.

Lorsque $f(x)$ est une fonction plus compliquée que celle que nous venons d'envisager, le calcul des dérivées successives de f devient souvent pénible lorsque l'ordre s'élève et la méthode de la formule de MacLaurin risque de conduire à des calculs inextricables si on veut avoir le développement limité de f jusqu'à un ordre suffisamment grand. Aussi, souvent n'emploie-t-on pas cette méthode et déduit-on le développement limité de f de ceux des fonctions plus simples qui permettent de définir f . Nous allons montrer que l'on peut faire sur les développements limités les opérations usuelles faites sur les polynômes.

Faisons auparavant la remarque préliminaire suivante :

Si on a le développement limité d'ordre n de la fonction f :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

et si $m < n$, on a immédiatement le développement limité d'ordre m de f :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m + x^m \varepsilon(x)$$

car en effet ce dernier $\varepsilon(x)$ égal à :

$$a_{m+1} x + \dots + a_n x^{n-m} + x^{n-m} \varepsilon(x)$$

tend vers 0 avec x .

7. — Relation entre les développements limités de f et de f' .

Supposons que $f(x)$ admette un développement de MacLaurin qui permette d'obtenir le développement limité de f jusqu'à l'ordre n :

$$f(x) = f(0) + x \frac{f'(0)}{1!} + \dots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

et que $f'(x)$ admette aussi un développement limité de MacLaurin jusqu'à l'ordre $n-1$:

$$f'(x) = f'(0) + x \frac{f''(0)}{1!} + \dots + x^{n-1} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} + x^{n-1} \varepsilon(x)$$

et on voit alors que

La partie polynomiale du développement de MacLaurin de f' s'obtient en dérivant par rapport à x la partie polynomiale du développement de MacLaurin de f .

Par suite si f et f' ont des développements de MacLaurin

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

on peut écrire :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon(x).$$

De même si :

$$f'(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon(x)$$

on peut écrire :

$$f(x) = f(0) + b_0 x + \frac{b_1 x^2}{2} + \dots + \frac{b_{n-1} x^n}{n} + x^n \varepsilon(x).$$

C'est ainsi que le développement limité de $\frac{1}{1+x}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

permet d'écrire à nouveau le développement limité de $\text{Log}(1+x)$ (dont la dérivée est $\frac{1}{1+x}$) :

$$\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1} \varepsilon(x).$$

De même, pour chercher le développement de $f(x) = \text{Arc tg } x$, on remarque que :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

fonction dont le développement se déduit de celui de $\frac{1}{1+x}$ en remplaçant x par x^2 :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n} \varepsilon(x)$$

d'où :

$$\text{Arc tg } x = 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1} \varepsilon(x).$$

De la même façon soit $f(x) = \text{Arc sin } x$.

On a :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

dont le développement s'obtient à partir de celui de $(1+x)^m$ en posant $m = -\frac{1}{2}$ et en remplaçant x par $-x^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} & \frac{m(m-1) \dots (m-p+1)}{p!} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-\frac{2p-1}{2}\right)}{p!} = (-1)^p \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{2^p \cdot p!} \end{aligned}$$

qui peut encore s'écrire :

$$(-1)^p \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p-1) 2p}{2^p p! 2 \cdot 4 \dots 2p} = (-1)^p \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2}.$$

On a donc :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2p-1)}{2^p \cdot p!} x^{2p} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n} + x^{2n} \varepsilon(x).$$

D'où :

$$\text{Arc sin } x = x + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2p-1)}{2^p \cdot p! (2p+1)} x^{2p+1} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n! (2n+1)} x^{2n+1} + x^{2n+1} \varepsilon(x).$$

8. — *Développements limités d'une somme et d'un produit.*

Soient les développements limités :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m + x^m \varepsilon(x)$$

et soit par exemple $n \leq m$.

On peut écrire :

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + x^n \varepsilon(x)$$

d'où le développement limité de $f(x) + g(x)$. On remarquera que ce développement est d'ordre n . Il ne sert donc à rien d'avoir un développement de g d'ordre supérieur à n . Le terme en x^p dans le développement de $f(x) + g(x)$ est la somme des deux termes correspondants dans les développements de f et de g .

Soit maintenant à chercher un développement du produit $f(x)g(x)$. En posant :

$$P = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad \text{et} \quad Q = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m,$$

les égalités :

$$f(x) = P + x^n \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad g(x) = Q + x^m \varepsilon(x)$$

entraînent :

$$f(x)g(x) = PQ + x^n [P x^{m-n} \varepsilon(x) + Q \varepsilon(x) + x^m \varepsilon(x) \varepsilon(x)].$$

Le produit PQ est un polynôme de degré $n + m$ que l'on peut écrire :

$$PQ = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n+m} x^{n+m}.$$

On a donc :

$$(9) \quad f(x)g(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + \eta(x) x^n$$

avec :

$$\eta(x) = [c_{n+1} x + \dots + c_{n+m} x^m + P x^{m-n} \varepsilon(x) + Q \varepsilon(x) + x^m \varepsilon(x) \varepsilon(x)].$$

Par suite $\eta(x)$, tendant vers 0 avec x , est de la forme $\varepsilon(x)$ et l'égalité (9) donne un développement limité de $f(x)g(x)$. On a les relations :

$$c_0 = a_0 b_0, \quad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \dots, \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0.$$

Ici encore, pour avoir un développement de $f(x)g(x)$ jusqu'à l'ordre n , il suffit de se servir des développements de $f(x)$ et de $g(x)$ d'ordre égal à n .

Dans la pratique on fait le produit de deux développements limités comme le produit de deux polynômes, mais en négligeant les puissances de x d'ordre strictement supérieur à n .

EXEMPLE 1. — Soit à donner le développement limité jusqu'à l'ordre 3 :

$$y = \operatorname{Ch} x \sin x.$$

Il suffit donc de développer $\sin x$ et $\operatorname{ch} x$ jusqu'à l'ordre 3 :

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x \sin x &= \left(1 + \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)\right) \\ &= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x). \end{aligned}$$

REMARQUE. — Dans le cas où les p premiers termes du développement de $g(x)$ sont nuls, un développement limité d'ordre n de $g(x)$ permet d'obtenir un développement limité d'ordre $n + p$ de $f(x)g(x)$.

On peut, en effet, écrire $g(x) = x^p g_1(x)$. Le calcul précédent permet de développer $f(x)g_1(x)$ jusqu'à l'ordre n , soit :

$$f(x)g_1(x) = d_0 + d_1 x + \dots + d_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

et on a alors le développement limité d'ordre $n + p$ de $f(x)g(x)$:

$$f(x)g(x) = d_0 x^p + d_1 x^{p+1} + \dots + d_n x^{n+p} + x^{n+p} \varepsilon(x).$$

9. — **Développement limité d'un quotient.**

Connaissant les développements limités de f et de g et sachant que $g(0) \neq 0$, il faut chercher un développement limité de $\frac{f}{g}$. Ici encore il est en général inutile de supposer que l'un des deux développements (de f ou de g) ait un ordre strictement supérieur à celui de l'autre. Soient donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \\ g(x) &= b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad b_0 = g(0) \neq 0. \end{aligned}$$

On cherche à écrire un développement limité de $\frac{f}{g}$ sous la forme :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Si $\frac{f(x)}{g(x)}$ est exprimable sous cette forme, l'égalité $f = \frac{f}{g} \cdot g$ entraîne d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 c_0 \\ a_1 &= b_0 c_1 + b_1 c_0 \\ &\dots \dots \dots \\ a_n &= b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \dots + b_n c_0. \end{aligned}$$

Comme $b_0 \neq 0$, les égalités précédentes déterminent de proche en proche les nombres :

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0}, \quad c_1 = \frac{a_1 - b_1 c_0}{b_0}, \quad \dots, \quad c_n = \frac{a_n - b_1 c_{n-1} - \dots - b_n c_0}{b_0}.$$

Ceci montre que, si $\frac{f(x)}{g(x)}$ admet un développement limité, ce ne peut être que :

$$(10) \quad c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Pour que cette expression soit un développement limité de $\frac{f(x)}{g(x)}$, il faut et il suffit que la fonction $\eta(x)$ définie par l'égalité :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + x^n \eta(x)$$

tende vers 0 avec x .

Mais les égalités précédentes montrent que l'on a :

$$f(x) = (c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n) g(x) + x^n \varepsilon(x)$$

et par suite :

$$\eta(x) = \frac{\varepsilon(x)}{g(x)}.$$

Comme $\frac{1}{g(x)}$ tend vers $\frac{1}{b_0}$ lorsque x tend vers 0, il en résulte bien que $\eta(x)$ est de la forme $\varepsilon(x)$ et que, par suite, l'égalité (10) définit bien un développement limité de $\frac{f(x)}{g(x)}$.

EXEMPLE 2. — Trouver le développement limité jusqu'à l'ordre 5 de $\operatorname{tg} x$.
On a :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon(x)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon(x)} = c_0 + c_1 x + \dots + c_5 x^5 + x^5 \varepsilon(x).$$

D'où l'égalité :

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon(x) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + x^5 \varepsilon(x)) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon(x)\right)$$

qui s'écrit :

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon(x) = c_0 + c_1 x + \left(-\frac{c_0}{2} + c_2\right) x^2 + \left(-\frac{c_1}{2} + c_3\right) x^3 + \left(\frac{c_0}{24} - \frac{c_2}{2} + c_4\right) x^4 + \left(\frac{c_1}{24} - \frac{c_3}{2} + c_5\right) x^5 + x^5 \varepsilon(x)$$

d'où les égalités :

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_1 &= 1 \\ -\frac{c_2}{2} + c_0 &= 0 \quad \text{ou} \quad c_2 = 0 \\ -\frac{c_1}{2} + c_3 &= -\frac{1}{6} \quad \text{ou} \quad c_3 = \frac{c_1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \\ \frac{c_0}{24} - \frac{c_2}{2} + c_4 &= 0 \quad \text{ou} \quad c_4 = 0 \\ \frac{c_1}{24} - \frac{c_3}{2} + c_5 &= \frac{1}{120} \quad \text{ou} \quad c_5 = -\frac{c_1}{24} + \frac{c_3}{2} + \frac{2}{120} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

et finalement :

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + x^5 \varepsilon(x).$$

REMARQUES. — 1^o On verra plus tard que l'on obtient encore le polynôme $c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$ en divisant suivant les puissances croissantes le polynôme $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ par le polynôme $b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$ et en négligeant les puissances de x d'ordre strictement supérieur à n .

2° Ici encore si les p premiers termes du développement de $f(x)$ sont nuls, la connaissance du développement d'ordre $n + p$ de $f(x)$ et du développement d'ordre n de $g(x)$ permet de trouver le développement d'ordre $n + p$ de $\frac{f(x)}{g(x)}$.

3° Dans le cas $g(0) = 0$, soit

$$\begin{aligned} g(x) &= b_k x^k + \dots + b_{n+k} x^{n+k} + x^{n+k} \varepsilon(x) \\ &= x^k (b_k + \dots + b_{n+k} x^n + x^n \varepsilon(x)) \quad \text{avec} \quad b_k \neq 0 \end{aligned}$$

on peut écrire

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x^k} (c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + x^n \varepsilon(x))$$

c'est-à-dire, lorsque $n > k$, on a le *développement limité généralisé*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c_0}{x^k} + \frac{c_1}{x^{k-1}} + \dots + \frac{c_{k-1}}{x} + c_k + c_{k+1} x + \dots + c_n x^{n-k} + x^{n-k} \varepsilon(x)$$

on obtient, par exemple,

$$\cotg x = \frac{1}{\tg x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + x^3 \varepsilon(x).$$

10. — *Fonction de fonction.*

Soient $u(x)$ une fonction de x tendant vers 0 avec x dont on se donne le développement limité :

$$(11) \quad u(x) = b_1 x + \dots + b_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

et $f(u)$ une fonction de u dont on se donne le développement limité :

$$(12) \quad f(u) = a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n + u^n \varepsilon(u).$$

Cherchons le développement limité de la fonction $y(x) = f(u(x))$. En remplaçant u dans le développement (12) par son expression tirée de (11), on obtient :

$$(13) \quad y(x) = a_0 + a_1(b_1 x + \dots + b_n x^n + x^n \varepsilon(x)) + a_2(b_1 x + \dots + b_n x^n + x^n \varepsilon(x))^2 + \dots + a_n(b_1 x + \dots + b_n x^n + x^n \varepsilon(x))^n + (b_1 x + \dots + b_n x^n)^n \varepsilon(u(x))$$

ou encore :

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 b_1 x + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) x^2 + (a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3) x^3 + \dots \\ &\quad + (a_1 b_n + \dots + a_n b_1^n) x^n + x^n \varepsilon(x). \end{aligned}$$

D'où le développement limité de $y(x)$. On remarquera que

la partie polynomiale du développement de $y(x)$ s'obtient en substituant à u dans la partie polynomiale du développement de $f(u)$ la partie polynomiale du développement de $u(x)$ et en négligeant les puissances de x d'ordre strictement supérieur à n .

Ici encore il est en général inutile que l'un des deux développements de f ou u ait un ordre strictement supérieur à celui du développement désiré.

EXEMPLE 3. — Soit à développer jusqu'à l'ordre 4 la fonction

$$y(x) = \text{Log} (\cos x).$$

On peut prendre ici :

$$u(x) = 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x)$$

et :

$$f(u) = \text{Log} (1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + u^4 \varepsilon(u).$$

D'où :

$$\begin{aligned} y(x) &= -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x)\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x)\right)^4 \\ &\quad + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x)\right)^4 \varepsilon(x) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

ou encore :

$$y = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12} x^4 + x^4 \varepsilon(x).$$

REMARQUE. — Lorsque x est infiniment grand en posant

$$X = \frac{1}{x} \quad \text{on a} \quad f(x) = f\left(\frac{1}{X}\right) = \varphi(X)$$

si la fonction φ possède un développement limité généralisé (Remarque n° 3 du paragraphe 9)

$$\varphi(X) = \frac{c_0}{X^k} + \frac{c_1}{X^{k-1}} + \dots + \frac{c_{k-1}}{X} + c_k + c_{k+1} X + \dots + c_{k+n} X^n + X^n \varepsilon(X)$$

on obtiendra, en revenant à la variable x , le développement :

$$f(x) = c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c_{k-1} x + c_k + \frac{c_{k+1}}{x} + \dots + \frac{c_{k+n}}{x^n} + \frac{1}{x^n} \varepsilon(x).$$

Il n'est pas toujours possible de donner un tel développement. Par exemple il résultera du prochain chapitre que la fonction e^x ne peut jamais se mettre sous cette forme, aussi grand que soit choisi l'entier k .

EXERCICES

1° Montrer que si x est positif :

$$\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{16}.$$

2° Développement de MacLaurin de la fonction $y = \text{Log}(x^2 - 3x + 2)$:

$$R. \quad y = \text{Log } 2 - \frac{3}{2}x - \dots - \frac{x^p}{p} \left(1 + \frac{1}{2^p}\right) - \dots - \frac{x^n}{n} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \\ - \frac{x^{n+1}}{n+1} \left[\frac{1}{(1-\theta x)^{n+1}} + \frac{1}{(2-\theta x)^{n+1}} \right] \quad \text{où } 0 < \theta < 1.$$

3° Développement limité au 5^e ordre de $y = \text{Log tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ au voisinage de $x = 0$.

$$R. \quad y = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} + x^6 \varepsilon.$$

4° Valeurs de a, b, c, d telles que :

$$y = e^x - a \cos x - b \cos 2x - c \sin x - d \sin 2x$$

soit un infiniment petit ordre le plus élevé possible quand x tend vers 0.

$$R. \quad a = \frac{5}{3}, \quad b = -\frac{2}{3}, \quad c = \frac{5}{3}, \quad d = -\frac{1}{3}.$$

5° Développement limité d'ordre 3 de $y = \frac{x \text{ Log } x}{x^2 - 1}$ au voisinage de $x = 1$.

$$R. \quad y = \frac{1}{2} - \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{12} + t^3 \varepsilon(t) \quad \text{où } t = x - 1.$$

6° Développement limité d'ordre 3, au voisinage de $x = 0$, de :

$$y = \frac{e^x + \sin x - 1}{\text{Log}(1+x)}.$$

$$R. \quad y = 2 + \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{12} + x^3 \varepsilon.$$

7° Développement d'ordre 3, au voisinage de $x = 0$, de :

$$y = \sqrt{1 + 4x + \frac{x^2}{1-x}}.$$

$$R. \quad y = 1 + 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x^3 + x^3 \varepsilon.$$

***8°** Premier terme non nul du développement limité au voisinage de $x = 0$ de la fonction :

$$y = e^{\frac{2x}{x+1}} + e^{\frac{2x}{x-1}} - 2.$$

R.

$$\frac{4}{3} x^4.$$

***9°** Développement d'ordre 2, au voisinage de $x = 0$, de :

$$y = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - \frac{1}{e}.$$

R.

$$y = \frac{1}{e} \left(\frac{x}{2} - \frac{5x^2}{24} + x^3 \varepsilon \right).$$

***10°** Montrer par récurrence que, pour $n > 1$, on a :

$$\frac{2^{2n-1}}{n} < C_{2n}^n < 2^{2n-1}.$$

***11°** Si n entier vérifie $n > \frac{1}{\varepsilon^3} + 1$, ε étant positif, il en résulte $n < (1 + \varepsilon)^n$. En déduire que $\sqrt[n]{n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

CHAPITRE X

FORMES INDÉTERMINÉES

1. — Définition.

Nous étudierons dans ce chapitre un certain nombre de cas-types où, lorsqu'une variable x tend vers une certaine valeur x_0 (éventuellement égale à $+\infty$ ou à $-\infty$), une certaine fonction $F(x)$ n'a pas de limite apparente à première vue. *Lever l'indétermination* (ou chercher la *vraie valeur* de $F(x_0)$), c'est trouver cette limite si elle existe. On remarquera que la fonction F peut être déjà définie pour x_0 , mais ce qui importe alors n'est pas la valeur donnée initialement à $F(x_0)$ mais la limite de $F(x)$. Si cette limite L existe, la fonction égale à $F(x)$ pour $x \neq x_0$ et égale à L pour $x = x_0$ est continue pour $x = x_0$.

Nous avons déjà rencontré de tels problèmes lorsque nous avons étudié le comportement d'une fraction rationnelle près d'un pôle ou à l'infini, et lorsque nous avons étudié la limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers 0.

De même, lorsqu'on cherche à calculer une dérivée, on cherche la limite de :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

lorsque h tend vers 0, ce qui revient à étudier une forme indéterminée par rapport à la variable h . Calculer une dérivée est donc lever une indétermination. Par suite il n'est pas étonnant que la connaissance de la théorie des dérivées et de ses conséquences permette, comme nous allons le voir, de lever des indéterminations.

On remarquera que, par le changement de variables $x' = x - x_0$ si x_0 n'est pas infini, ou $x' = \frac{1}{x}$ si x_0 est infini, on peut toujours se ramener au cas où $x_0 = 0$.

2. — Forme $\frac{0}{0}$.

C'est la forme indéterminée la plus courante à laquelle peuvent se ramener la plupart des autres.

$F(x)$ se présente alors sous la forme d'un quotient $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, les fonctions f et g tendant toutes deux vers 0 lorsque x tend vers x_0 . Comme nous l'avons dit plus haut, il est alors commode de se ramener au cas où $x_0 = 0$, c'est-à-dire au cas où les fonctions f et g sont infiniment petites en même temps que x (cette dernière variable est parfois appelée *infiniment petit principal*).

Pour faciliter l'exposition nous allons nous placer dans ce cas.

Supposons d'abord que le rapport $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ tende vers 1 lorsque x tend vers 0.

Ceci entraîne que f et g sont liées par une relation de la forme

$$f(x) = g(x) (1 + \varepsilon(x))$$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction qui tend vers 0 en même temps que x (les notations sont celles du chap. III, § 3).

Lorsque nous pourrons écrire une telle relation nous dirons que f et g sont des *infiniment petits équivalents* et nous écrirons

$$f \sim g$$

Le lecteur vérifiera que cette relation est une relation d'équivalence.

On dit que f est un *infiniment petit d'ordre n par rapport à x* si l'on a

$$f(x) \sim ax^n$$

avec

$$n > 0 \quad \text{et} \quad a \neq 0.$$

Lorsqu'il en est ainsi on dit encore que ax^n est la *partie principale* de l'infiniment petit f . Il est facile d'obtenir cette partie principale lorsque f a un développement limité par rapport à x .

Si :

$$f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_m x^m + x^m \varepsilon(x)$$

est un tel développement, a_p étant distinct de 0, la partie principale de f est $a_p x^p$.

Ceci posé, lorsque $F = \frac{f(x)}{g(x)}$ présente la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, on peut, pour étudier le comportement de F , remplacer f et g par des infiniment petits équivalents f_1 et g_1 .

En effet, on peut écrire alors :

$$f = f_1(1 + \varepsilon(x)) \quad \text{et} \quad g = g_1(1 + \varepsilon(x)).$$

Par suite $F = \frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} (1 + \varepsilon(x))$ se comporte comme $\frac{f_1}{g_1}$ et aura donc éventuellement la même limite.

En particulier, si f et g sont des infiniment petits d'ordres n et m par rap-

port à x , dont les parties principales sont ax^n et bx^m , la fonction F se comportera comme le quotient $\frac{ax^n}{bx^m}$, c'est-à-dire que :

1° Pour $n > m$, $F(x)$ tend vers 0 avec x .

2° Pour $n < m$, $F(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers 0.

3° Pour $n = m$, $F(x)$ tend vers $\frac{a}{b}$ lorsque x tend vers 0.

Il est donc indiqué, pour lever l'indétermination de f , de chercher, si cela est possible, des développements limités par rapport à x de f et de g .

EXEMPLE 1. — Soit à chercher la limite lorsque x tend vers 0 de la fonction :

$$y = \frac{\operatorname{sh} x - \sin x}{\operatorname{tg} x - x}.$$

On est en présence de la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

On a :

$$\operatorname{sh} x - \sin x = \left(x + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \right) = \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x).$$

De même en utilisant le développement limité de $\operatorname{tg} x$

$$\operatorname{tg} x - x = \left(x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) \right) - x = \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$$

Par suite y a la même limite que le quotient $\frac{x^3}{\frac{x^3}{3}} = 1$. Donc y tend vers 1

lorsque x tend vers 0.

REMARQUE. — Lorsqu'on a des développements limités de $f(x)$ et de $g(x)$, soient :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_q x^q + x^q \varepsilon(x)$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m+1} x^{m+1} + \dots + b_r x^r + x^r \varepsilon(x)$$

avec :

$$a_n \neq 0 \quad \text{et} \quad b_m \neq 0,$$

on peut écrire le développement limité :

$$c_0 + c_1 x + \dots + c_s x^s + x^s \varepsilon(x)$$

du quotient :

$$\frac{\frac{f}{x^n}}{\frac{g}{x^m}} = \frac{a_n + a_{n+1} x + \dots + a_q x^{q-n} + x^{q-n} \varepsilon(x)}{b_m + b_{m+1} x + \dots + b_r x^{r-m} + x^{r-m} \varepsilon(x)}$$

et par suite on a le développement suivant de $F(x)$:

$$F(x) = c_0 x^{n-m} + c_1 x^{n-m+1} + \dots + c_s x^{n-m+s} + x^{n-m+s} \varepsilon(x).$$

Pour $n \geq m$ c'est un développement limité de F et pour $n < m$ c'est un développement généralisé par rapport à l'infiniment grand $X = \frac{1}{x}$ de la forme envisagée dans la remarque faite à la fin du chapitre IX.

3. — *Forme* $\frac{\infty}{\infty}$.

C'est le cas où F se présente sous la forme $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, les fonctions f et g augmentant indéfiniment en valeurs absolues lorsque x tend vers x_0 . En

écrivant $F = \frac{\frac{1}{\frac{g(x)}{f(x)}}}{\frac{1}{f(x)}}$, on voit que cette forme se ramène immédiatement à la

forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Nous allons toutefois faire quelques remarques particulières concernant ce cas.

Il est commode, en prenant au besoin comme nouvelle variable $x' = \frac{1}{x - x_0}$, de supposer que la limite soit à étudier lorsque x tend vers l'infini. On dit alors que x est l'*infiniment grand principal*.

Lorsque f et g sont liés par une relation de la forme

$$f(x) = g(x) \left(1 + \varepsilon \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

$\varepsilon \left(\frac{1}{x} \right)$ tendant vers 0 avec $\frac{1}{x}$, on dit que les fonctions f et g sont deux *infiniment grands équivalents* et l'on écrit :

$$f \sim g$$

Cette relation est une relation d'équivalence et elle entraîne que le rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ tende vers 1.

On dit que f est un *infiniment grand d'ordre n* lorsque l'on a :

$$f(x) \sim ax^n$$

avec

$$a \neq 0, \quad n > 0.$$

On dit alors que ax^n est la *partie principale* de l'infiniment grand f . Ceci posé, si

$F(x) = \frac{f}{g}$ a la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ lorsque x tend vers l'infini, on voit comme

précédemment que, pour étudier le comportement de F , on peut remplacer f et g par des infiniment grands équivalents. En particulier si f et g sont des infiniment grands d'ordre n et m par rapport à x dont les parties principales sont respectivement ax^n et bx^m , on voit que F se comporte comme le quotient $\frac{ax^n}{bx^m}$ et par suite :

1° Pour $n > m$, F tend vers l'infini avec x .

2° Pour $n < m$, F tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

3° Pour $n = m$, F tend vers $\frac{a}{b}$ lorsque x tend vers l'infini.

EXEMPLE 2. — Soit à chercher la limite de $y = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ lorsque x tend vers $+\infty$. On a :

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)$$

Donc y a la même limite que le quotient $\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$ qui tend vers 1

lorsque x tend vers $+\infty$, c'est-à-dire lorsque $\frac{1}{x}$ tend vers 0. On remarque que :

$$x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad x + \sqrt{x^2 - 1}$$

ont tous deux pour parties principales $2x$.

REMARQUE. — A partir de développement de f et de g ayant la forme envisagée à la fin du dernier chapitre, il est possible de trouver un développement analogue pour F .

4. — Croissances comparées des fonctions puissances, exponentielle et logarithme.

Nous allons dans ce numéro traiter deux cas de formes indéterminées $\frac{\infty}{\infty}$ importantes en analyse et qui ne sont pas susceptibles d'être traitées par les méthodes indiquées jusqu'à présent.

Nous nous proposons d'abord d'étudier le comportement de $y = \frac{e^x}{x^m}$ lorsque x tend vers $+\infty$, m étant un nombre strictement positif (le résultat étant évident si m est nul ou négatif).

On remarque d'abord que lorsque x est positif la fonction $e^x - x$ est toujours croissante puisque sa dérivée $e^x - 1$ est toujours positive ou nulle pour $x > 0$. Comme $e^x - x$ est égal à 1 pour $x = 0$, l'inégalité $x > 0$ entraîne $e^x > x$ et par suite le rapport $\frac{e^x}{\sqrt{x}}$ tend vers l'infini lorsque x tend vers $+\infty$.

En posant $z = \frac{x}{2m}$, l'égalité :

$$\frac{e^x}{x^m} = \frac{1}{(2m)^m} \left(\frac{e^z}{\sqrt{z}} \right)^{2m}$$

montre alors que $\frac{e^x}{x^m}$ tend vers $+\infty$ en même temps que z , c'est-à-dire en même temps que x et par suite :

Lorsque m est strictement positif, le rapport $\frac{e^x}{x^m}$ tend vers $+\infty$ en même temps que x .

On remarquera que ceci ne signifie pas que e^x est toujours supérieur à x^m .

Proposons-nous maintenant d'étudier le rapport $\frac{\text{Log } x}{x^m}$ lorsque x tend vers $+\infty$, m étant strictement positif.

En posant $\text{Log } x = t$, on a :

$$\frac{\text{Log } x}{x^m} = \frac{t}{e^{mt}} = \frac{1}{m} \frac{mt}{e^{mt}},$$

rapport qui, d'après ce qui précède, tend vers 0 lorsque mt tend vers $+\infty$, c'est-à-dire encore lorsque x tend vers $+\infty$. D'où :

Le nombre m étant strictement positif, le rapport $\frac{\text{Log } x}{x^m}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Ces deux importants résultats permettent de traiter beaucoup d'autres formes indéterminées. Soit par exemple à trouver la limite de $y = \frac{e^x}{\frac{1}{x}}$ lorsque x tend vers $-\infty$. La fonction y prend alors la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. En posant :

$$x = -x',$$

l'égalité $y = \frac{-x'}{e^{x'}}$ montre que y tend vers 0 lorsque x' tend vers $+\infty$. La limite cherchée est donc 0.

5. — **Forme** $0 \times \infty$.

C'est le cas d'une fonction $F(x) = f(x) g(x)$ telle que, lorsque x tend vers x_0 , la fonction f tende vers 0 et la fonction g augmente indéfiniment. En écrivant $F = \frac{f}{\frac{1}{g}}$, on voit que l'on peut alors se ramener à la forme $\frac{0}{0}$.

En posant $t = \frac{1}{x}$ on a, pour $m > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^m \operatorname{Log} x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\operatorname{Log} t}{t^m} = 0$$

le nombre m étant strictement positif le produit $x^m \operatorname{Log} x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

Ici encore on peut, pour étudier le comportement de F , remplacer f par un infiniment petit équivalent et g par un infiniment grand équivalent. En particulier, si $x_0 = 0$, si f est un infiniment petit dont la partie principale par rapport à x est ax^n et si g est un infiniment grand dont la partie principale par rapport à $\frac{1}{x}$ est $\frac{b}{x^m}$, on voit que F se comportera comme la fonction $ab x^{n-m}$.

EXEMPLE 3. — Soit à étudier le comportement de $y = \frac{x^2 - 1}{x} e^{\frac{1}{x}}$ lorsque x tend vers 0.

Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, $\frac{x^2 - 1}{x}$ tend vers $-\infty$ et $e^{\frac{1}{x}}$ vers $+\infty$, donc y tend vers $-\infty$ et il n'y a pas de forme indéterminée. Lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives, on voit que $\frac{x^2 - 1}{x}$ tend vers $+\infty$ et que $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers 0; on est donc en présence d'une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination on peut poser $x = -\frac{1}{x'}$. On a alors :

$$y = \frac{1 - \frac{1}{x'^2}}{\frac{1}{x'}} e^{-x'} = \frac{x'}{e^{x'}} \left(1 - \frac{1}{x'^2}\right).$$

Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, x' tend vers $+\infty$, le quotient $\frac{x'}{e^{x'}}$ tend vers 0 et $\left(1 - \frac{1}{x'^2}\right)$ tend vers 1, donc y tend vers 0.

6. — **Forme** $\infty - \infty$.

C'est le cas où la fonction $F(x)$ se présente sous la forme $f(x) - g(x)$, les fonctions f et g tendant toutes deux vers $+\infty$ (ou toutes deux vers $-\infty$) lorsque x tend vers x_0 .

Dans ce cas on ne peut pas remplacer f et g par des infiniment grands équivalents :

Soient en effet $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = x^2$. Lorsque x tend vers l'infini, $f(x)$ et $g(x)$ sont équivalents à x^2 et cependant $f(x) - g(x) = x$ ne se comporte pas comme $x^2 - x^2 = 0$.

Pour traiter la forme indéterminée $\infty - \infty$, on peut essayer de mettre F sous la forme d'un produit en écrivant par exemple $F = f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)$.

On peut aussi se ramener au cas où x_0 est infini, c'est-à-dire au cas où x tend vers l'infini et chercher à développer f et g sous la forme :

$$\begin{aligned} f &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = P(x) + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \\ g &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = Q(x) + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Alors $f(x) - g(x)$ se comportera comme le polynôme $P(x) - Q(x)$, comportement que nous avons appris à étudier au chapitre III.

EXEMPLE. — Soit à étudier le comportement de :

$$y = \sqrt[6]{x^6 + x^2 + 1} - \sqrt[4]{x^4 + 1}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{x^6 + x^2 + 1} &= x \left(1 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6}\right)^{\frac{1}{6}} = x \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6}\right) + \frac{1}{x^4} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= x + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{x^3} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

De même :

$$\sqrt[4]{x^4 + 1} = x \left(1 + \frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}} = x \left(1 + \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{x^4} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{x^3} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc :

$$y = \left(x + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{x^3} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \left(x + \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{x^3} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{1}{12x^3} + \frac{1}{x^3} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc y tend vers 0 lorsque x augmente indéfiniment. On voit même que y est un infiniment petit dont la partie principale par rapport à $\frac{1}{x}$ est $-\frac{1}{12x^3}$. En poussant plus loin les développements limités précédents on aurait pu obtenir un développement limité de y par rapport à $\frac{1}{x}$ d'ordre arbitrairement élevé.

7. — **Formes indéterminées** ∞^0 , 0^0 , 1^∞ .

Soit $y = (u(x))^{v(x)}$.

La relation $y = e^{v(x) \text{ Log } u(x)}$ montre que y prend une forme indéterminée s'il en est ainsi pour $v(x) \text{ Log } u(x)$, c'est-à-dire si $v(x) \text{ Log } u(x)$ se présente sous la forme $0 \times \infty$. Ceci est possible de trois façons différentes :

$v(x)$ tend vers 0 et $\text{Log } u(x)$ vers $+\infty$, c'est-à-dire $u(x)$ tend vers $+\infty$. C'est la forme ∞^0 .

$v(x)$ tend vers 0 et $\text{Log } u(x)$ tend vers $-\infty$, c'est-à-dire $u(x)$ tend vers 0. C'est la forme 0^0 .

$v(x)$ augmente indéfiniment et $\text{Log } u(x)$ tend vers 0, c'est-à-dire $u(x)$ tend vers 1. C'est la forme indéterminée 1^∞ .

La levée de l'indétermination de y se ramène à celle de $v(x) \text{ Log } u(x)$, c'est-à-dire encore à celle de $\text{Log } y$.

EXEMPLES 5. — 1° Limite de $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

C'est la forme 1^∞ .

On a $\text{Log } y = x \text{ Log } \left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Comme $\text{Log } \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est un infiniment petit équivalent à $\frac{1}{x}$ (voir chap. IX, § 5), $\text{Log } y$ a pour limite $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, et y a pour limite e .

On a donc le résultat suivant :

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ tend vers e lorsque x tend vers $+\infty$.

2° Limite de $y = x^{\frac{1}{x}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

C'est la forme indéterminée ∞^0 .

Comme $\text{Log } y = \frac{1}{x} \text{ Log } x$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, on voit que y tend vers 1.

3° Limite de $y = x^x$ lorsque x tend vers 0.

C'est la forme indéterminée 0^0 .

On a $\text{Log } y = x \text{ Log } x = -\frac{\text{Log } \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$. Lorsque x tend vers 0 (par valeurs

supérieures pour que y soit défini), $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et $\text{Log } y$ tend vers 0, donc y tend vers 1.

EXERCICES

1° Limites pour x tendant vers 0 de :

$$\frac{e^{\operatorname{tg} x} - \cos x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}, \quad \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}, \quad \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

R. $1, \quad \frac{2}{3}, \quad \sqrt{ab}.$

2° Limite lorsque x tend vers 0 à droite de :

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$$

R. $\frac{1}{2}.$

3° Limite lorsque x tend vers $\frac{\pi}{4}$ de $(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

R. $\frac{1}{e}.$

4° Limites lorsque x tend vers l'infini de :

$$\left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{x^2} \quad \text{et de} \quad \left(1 - b + ba^{\frac{1}{x}}\right)^x, \quad (a \text{ positif}).$$

R. $e^{-\frac{1}{6}}, a^b.$

5° m étant non nul, montrer que la partie principale de

$$(x + \sqrt{1+x^2})^m - 2^m x^m \quad \text{est} \quad m 2^{m-2} x^{m-2}$$

quand x tend vers $+\infty$.

6° Variations et graphes des fonctions :

$$\begin{array}{lll} x \operatorname{Log} \operatorname{ch} x & (2x - x^2)e^x & e^{\operatorname{tg} x} \cos x \\ (x-1) \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x & x - 2 \operatorname{tg} x + \frac{2}{\cos x} & 4x\sqrt{2x+1} \\ \frac{e^{-x}}{x-1} & x + \operatorname{Log}(x^2 - 2x) & \sqrt[3]{x+6} e^{\frac{1}{x}}. \end{array}$$

7° Discuter selon les valeurs de m le nombre de racines de l'équation :

$$x^x - m = 0.$$

R. Valeurs remarquables de m : 1 et $e^{-\frac{1}{e}}$.

*8° Limite lorsque x tend vers 0 à droite de :

$$\frac{(1+x)^{\frac{\text{Log } x}{x}} - x}{x^2 \text{Log } x}.$$

R. $-\frac{1}{2}.$

*9° Variations et graphes des fonctions :

$$\begin{array}{lll} x^{\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)} & \sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1} & x \text{ Arc tg } \frac{1}{x} \\ 2 \text{ Log } (x^2 + 1) - \frac{1}{x} & \sqrt{\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{x(x-2)(x-4)}} & x e^{\frac{x}{x^2-1}} \end{array}$$

10° Pour quelles valeurs de m l'équation $x^m = m^x$ admet-elle une solution autre que m ?

R. $m > 1.$

**12° Variations et graphes des fonctions :

$$\begin{array}{lll} \frac{\text{Log } (1-x^2)}{x} & \sqrt{x} \cdot \text{Arc sin } \frac{2\sqrt{x}}{1+x} & \left(\frac{e^x + 1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \\ \text{Log } \left(e^{\frac{1}{x}} - 3e^{\frac{1}{x}} + 2\right) & \frac{1}{\text{Log } (x+1)} - \frac{1}{x}. & \end{array}$$

**13° On pose $f(x) = x - m \text{ Log } \left(1 + \frac{x}{m+1}\right)$ et l'on suppose m supérieur à 1.

Montrer que l'équation :

$$f(x) = 0$$

admet une solution x_0 comprise entre -2 et -1 . Établir que lorsque m tend vers $+\infty$, x_0 tend vers -2 .

**14° Trouver la limite, lorsque x tend vers 0, du nombre θ défini par la formule de MacLaurin.

R. Si $f^{(n+2)}(0) \neq 0$:

$$\theta \rightarrow \frac{1}{n+2};$$

si $f^{(n+1+k)}(0) = 0$ pour $1 \leq k < p$ et $f^{(n+1+p)}(0) \neq 0$:

$$\theta \rightarrow \sqrt[p]{\frac{p! (n+1)!}{(n+1+p)!}}.$$

CHAPITRE XI

COURBES $y = f(x)$

1. — Principes généraux.

Dans ce chapitre nous allons apprendre à construire la courbe graphe d'une fonction $y = f(x)$.

Il est évident que ce problème se rattache étroitement au problème de la variation de la fonction $f(x)$, mais le point de vue auquel nous nous plaçons ici est un peu différent. En particulier, alors que dans l'étude de la variation d'une fonction le graphe ne sert que d'illustration au tableau de variation et peut être construit en prenant des échelles différentes sur les axes, ici le tracé de la courbe est le but essentiel et on devra s'attacher à préciser les propriétés remarquables de cette courbe.

Le point de départ sera donc l'étude de la variation de la fonction $f(x)$, d'où il résultera un tracé grossier de la courbe C (l'unité de longueur étant la même sur les deux axes de coordonnées). Il reste à préciser ce tracé et nous allons indiquer les principes généraux qui permettent d'arriver à ce but.

Il faut d'abord chercher si l'on peut *réduire l'intervalle* dans lequel il faut tracer C (le tracé dans les autres intervalles se déduisant d'une façon simple du tracé dans l'intervalle que l'on aura retenu).

1° **Périodicité.** — Pour cela on commencera par regarder si la fonction f admet une période T (telle que l'on ait, par définition, $f(x + T) = f(x)$ pour toute valeur de x). S'il en est ainsi, il suffit, comme on l'a déjà vu, de tracer la courbe dans un intervalle de longueur T . Pour obtenir toute la courbe on fera subir à l'arc ainsi tracé toutes les translations possibles parallèles à Ox et de longueurs kT (k parcourant l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers).

On a évidemment intérêt à chercher la plus petite période possible. C'est ainsi que la fonction $\operatorname{tg} x$ admet la période 2π , mais qu'elle admet aussi la période plus petite π .

En fait, on démontre que s'il existe un intervalle de longueur non nulle où la fonction f est continue et n'est pas constante, il existe une plus petite période T_0 (strictement positive) de la fonction f telle que toute autre période T de f soit de la forme $T = nT_0$ le nombre n étant entier (positif, négatif ou nul). Ceci montre en particulier que si T_1 et T_2 sont deux périodes de f , le rapport $\frac{T_1}{T_2}$ est

nécessairement rationnel et par suite il existera un nombre réel T et deux entiers m_1 et m_2 tels que l'on ait simultanément :

$$T_1 = m_1 T \quad \text{et} \quad T_2 = m_2 T,$$

$\frac{m_1}{m_2}$ étant une fraction irréductible.

Le nombre T sera une période de f car il sera multiple de T_0 .

On remarque que si T' est un nombre tel que pour tout x :

$$f(x + T') = -f(x)$$

on a $f(x + 2T') = -f(x + T') = f(x)$ et que $2T'$ est une période de f . Par suite, lorsque T est une période de f , il est naturel de regarder si l'expression $f\left(x + \frac{T}{2}\right)$ n'est pas identique à $-f(x)$. S'il en est ainsi il suffit de tracer la

courbe dans un intervalle de longueur $\frac{T}{2}$, c'est-à-dire de la forme $(a, a + \frac{T}{2})$.

En faisant subir à l'arc ainsi tracé une translation parallèle à Ox de longueur $\frac{T}{2}$ suivie d'une symétrie par rapport à Ox , on obtient l'arc correspondant à l'intervalle $(a + \frac{T}{2}, a + T)$, d'où finalement l'arc correspondant à l'intervalle d'une période $(a, a + T)$.

2° Symétries. — Il faut ensuite examiner si la fonction f est paire, c'est-à-dire si on a pour tout x l'égalité :

$$f(-x) = f(x).$$

En ce cas l'axe Oy est axe de symétrie de la courbe et il suffit de la tracer dans un des intervalles $(0, +\infty)$ (ou $-\infty, 0$) pour l'obtenir sans peine tout entière.

Plus généralement, s'il existe un nombre α tel que :

$$f(\alpha - x) = f(x)$$

pour toute valeur de x ou, ce qui revient au même, tel que :

$$f\left(\frac{\alpha}{2} - x'\right) = f\left(\frac{\alpha}{2} + x'\right)$$

pour tout x' , la courbe est symétrique par rapport à la parallèle à l'axe des y d'abscisse $\frac{\alpha}{2}$.

De la même façon, si la fonction f est impaire, c'est-à-dire si on a pour toute valeur de x :

$$f(-x) = -f(x)$$

la courbe est symétrique par rapport à l'origine O des coordonnées. Plus généralement, s'il existe un nombre α tel que pour tout x :

$$f(\alpha - x) = -f(x)$$

ou, ce qui revient au même, tel que pour toute valeur de x'

$$f\left(\frac{\alpha}{2} - x'\right) = -f\left(\frac{\alpha}{2} + x'\right)$$

la courbe est symétrique par rapport au point d'abscisse $\frac{\alpha}{2}$ et d'ordonnée 0.

EXEMPLE 1. — Soit à tracer la courbe d'équation :

$$y = (\sin x + \cos x) (\operatorname{tg} x)^{\cos 2x}.$$

On a les deux relations immédiates :

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(x + 2\pi) = f(x) \\ (2) \quad & f(x + \pi) = -f(x). \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right\} \left\{ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right\}^{\cos(\pi - 2x)} \\ &= (\cos x + \sin x) \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)^{-\cos 2x} = f(x). \end{aligned}$$

D'où :

$$(3) \quad f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x).$$

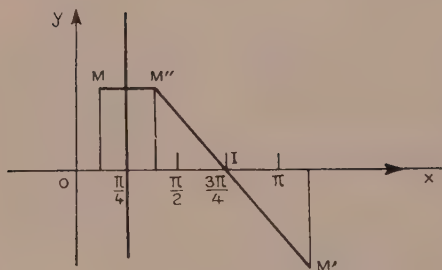


FIG. 1.

La relation (1) montre que f est périodique de période 2π . La relation (2) montre que l'on passe du point M d'abscisse x au point M' d'abscisse $x + \pi$ en faisant une translation de longueur π suivie d'une symétrie par rapport à l'axe Ox . Enfin, la relation (3) montre que le graphe de f est symétrique par rapport à la droite

$x = \frac{\pi}{4}$. On voit que le point M''

symétrique de M par rapport à cette droite est symétrique du point M' par rapport au point I d'abscisse $\frac{3\pi}{4}$ et d'ordonnée 0, ce qui concorde d'ailleurs avec l'égalité :

$$f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -f(x).$$

Il suffit de tracer la courbe dans l'intervalle $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ pour en déduire facilement le tracé complet.

2. — Problèmes liés à la tangente.

La tangente au point A d'abscisse a sur la courbe $y = f(x)$ a pour pente $f'(a)$. Elle a donc pour équation :

$$y = f(a) + (x - a)f'(a).$$

La *normale* au point A est par définition la perpendiculaire en A à la tangente, elle a pour équation :

$$y = f(a) - \frac{x - a}{f'(a)}.$$

Dans le cas particulier où $f'(a) = +\infty$ ou $-\infty$ (fig. 2) c'est-à-dire où :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty \quad (\text{ou } -\infty)$$

la tangente est la droite parallèle à Oy passant par A d'équation $x = a$, la normale aura pour équation $y = f(a)$. On peut, à partir de là, étudier les problèmes concernant les tangentes à la courbes C .

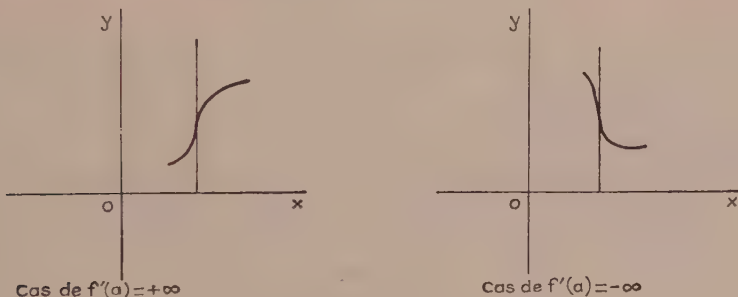


FIG. 2.

M étant le point d'abscisse x sur C , désignons par H le point d'abscisse x sur la tangente D en A à la courbe C . Nous dirons que la courbe C a sa *concavité tournée vers les y positifs* au point A si le point M se trouve au-dessus de D (c'est-à-dire est tel que $\overline{HM} > 0$, $\overline{HM}$ étant défini par rapport à l'axe Oy) dès que M est suffisamment voisin de A , c'est-à-dire dès que $|x - a|$ est suffisamment petit (cas de la figure 3). Dans le cas contraire, nous dirons que la courbe C , au point A , a sa *concavité tournée vers les y négatifs* (cas de la figure 4).

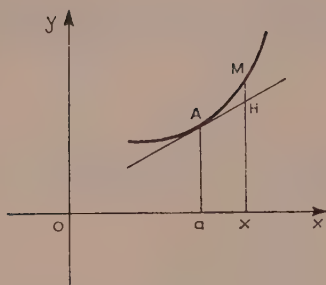


FIG. 3.

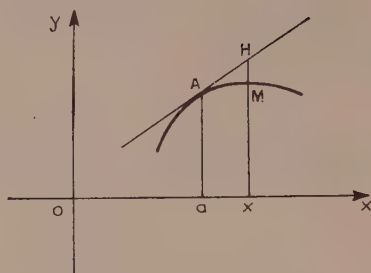


FIG. 4.

La formule de Taylor si elle s'applique (comme c'est habituellement le cas) permet d'écrire :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(a+\theta h) \quad (0 < \theta < 1).$$

En posant $x = a + h$ dans l'équation de la tangente, on voit que :

$$\overline{HM} = f(a+h) - (f(a) + hf'(a))$$

ou :

$$\overline{HM} = \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(a+\theta h).$$

Donc, si $f''(a) \neq 0$, on voit que $\overline{HM}$ a le signe de $f''(a)$ lorsque h est suffisamment petit, et par suite :

La courbe a en A sa concavité tournée vers les y positifs si $f''(a) > 0$ et sa concavité tournée vers les y négatifs si $f''(a) < 0$.

On voit d'ailleurs intuitivement que dans le cas de la figure 3 la tangente en M à la courbe a sa pente qui augmente lorsque l'abscisse de M augmente (donc $f'' > 0$) et que, dans le cas de la figure 4, la tangente en M a sa pente qui diminue lorsque l'abscisse de M augmente (donc $f'' < 0$).

Si $f''(a) = 0$, il faut pousser le développement de Taylor plus loin, ce qui permet d'écrire :

$$(4) \quad \overline{HM} = \frac{h^3}{6}f'''(a) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(a+\theta h).$$

Si $f'''(a) \neq 0$, on voit que $\overline{HM}$ change de signe lorsque h s'annule. En A la courbe C traverse alors sa tangente. On dit que A est un *point d'inflexion* de C . On a les apparences indiquées dans les figures 5 et 6.

La formule (4) montre que dans le voisinage d'un point d'inflexion la quantité $\overline{HM}$ est particulièrement petite, c'est-à-dire que pour x voisin de a , la variation de $f(x)$ est presque linéaire. La courbe est alors presque confondue avec sa tangente en A . Ceci a de nombreuses applications pratiques. C'est en

particulier pourquoi, dans l'utilisation d'amplificateurs, on réalise des conditions de fonctionnement voisines du point d'inflexion de la courbe caractéristique de l'appareil.

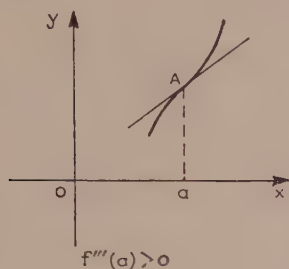


FIG. 5.

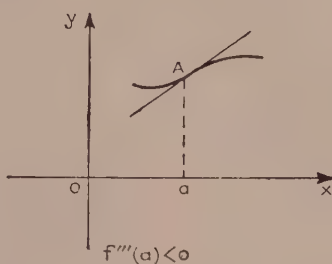


FIG. 6.

L'étude de la concavité d'une courbe et la recherche de ses points d'inflexion conduisent à des calculs en général assez pénibles, mais cette étude doit être faite si on veut tracer la courbe avec suffisamment de précision comme le montre l'exemple suivant :

EXEMPLE 2. — Proposons-nous de tracer l'arc de courbe défini par :

$$y = x^4 - 5x^3 + 8x^2$$

lorsque x varie de 0 à 1.

Nous avons :

$$y' = 4x^3 - 15x^2 + 16x = x(4x^2 - 15x + 16)$$

et y' est positif lorsque x est positif. Le tableau des variations sera donc :

x	0	1
y'	0	+
y	0	4

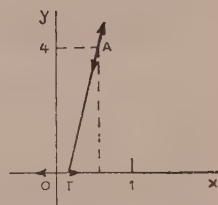


FIG. 7.

Marquons sur la figure 7 les éléments ainsi déterminés. La tangente au point $A (1,4)$ a pour équation :

$$Y - 4 = 5(X - 1) \quad \text{ou} \quad Y = 5X - 1$$

et coupe Ox au point T d'abscisse $\frac{1}{5}$. On serait conduit en utilisant ces résultats

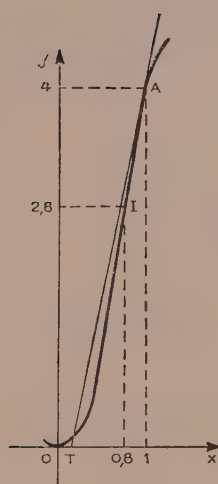


FIG. 8.

à tracer l'arc le plus simple tangent en O à Ox , en A à AT et à concavité tournée vers les y positifs.

Or, le calcul de y'' donne :

$$y'' = 12x^2 - 30x + 16$$

qui s'annule en changeant de signe lorsque

$$x = \frac{15 - \sqrt{33}}{12}$$

ce qui permet de déterminer les coordonnées du point d'inflexion 1.

En faisant le calcul à la règle à calcul, on trouve que ces coordonnées sont :

$$x = 0,8 \quad y = 2,8 \quad y' = 5,3.$$

Nous aurons donc le tracé de la courbe (fig. 8) avec une concavité en A tournée vers les y négatifs, ce qui est assez différent du tracé le plus simple envisagé plus haut.

REMARQUE. — Dans tout ce paragraphe nous nous sommes placés en un point ordinaire de la courbe. Rappelons l'existence possible de points singuliers étudiés au § 3 du chapitre V.

3. — Étude des branches infinies.

Une courbe C est dite avoir une *branche infinie* si un point M peut parcourir cette branche de courbe de telle sorte que la distance OM augmente indéfiniment. Cette propriété ne dépend évidemment pas du point O choisi pour origine. Pour qu'elle ait lieu il faut et il suffit que l'une au moins des deux coordonnées x et y du point M augmente indéfiniment. Par suite, si la courbe C est représentée sous la forme $y = f(x)$, on ne peut se trouver en présence d'une branche infinie que dans deux cas :

Cas 1. — Lorsque x tend par valeurs supérieures vers un nombre x_0 fini et que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad = -\infty$$

ou lorsque x tend par valeurs inférieures vers un nombre x_0 fini tel que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad = -\infty$$

En désignant alors par D la parallèle à l'axe des y d'abscisse x_0 , on voit que la distance du point M situé sur C à la droite D tend vers 0 lorsque M s'éloigne indéfiniment en restant sur la branche de C considérée. Lorsque cette dernière

circonstance se produit, on dit que la droite D est *asymptote* à la branche de courbe considérée. On remarque que si x tend vers x_0 par valeurs inférieures, le point M reste dans le demi-plan $x < x_0$ et que si x tend vers x_0 par valeurs supérieures, le point M reste dans le demi-plan $x > x_0$. Cette remarque permet de situer la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Cas 2. — Lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Supposons, pour fixer les idées, que nous étudions le cas où x tend vers $+\infty$. Proposons-nous de chercher si la branche infinie correspondante possède une asymptote. Cette dernière, si elle existe, ne peut être parallèle à Oy , car elle aurait alors une équation de la forme $x = x_0$ et x devrait tendre vers la valeur finie x_0 , ce qui n'est pas le cas. Cette asymptote, si elle existe, a donc une équation de la forme $y = mx + p$. Cherchons donc à quelles conditions la droite D d'équation $y = mx + p$ est asymptote à la branche de courbe C considérée.

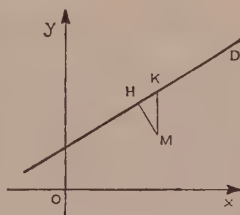


FIG. 9.

Désignons par H la projection orthogonale de M sur D et par K la projection de M sur D parallèlement à l'axe Oy . Pour que D soit asymptote, il faut et il suffit que la distance MH tende vers 0, ou, ce qui revient au même, que la distance MK tende vers 0. Or, si $\overline{MK}$ désigne la mesure algébrique de $\overrightarrow{MK}$ rapportée à l'axe Oy , on a :

$$\overline{MK} = mx + p - f(x)$$

lorsque M a pour abscisse x .

Il faut et il suffit donc que la quantité $mx + p - f(x)$ tende vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Pour cela il faut et il suffit que l'on ait les deux égalités :

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

et :

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = p.$$

Dans le cas où une telle asymptote existe on remarque d'autre part que si la quantité $\overline{MK} = f(x) - mx - p$ tend vers 0 en restant positive, la branche de courbe est située au-dessus de l'asymptote D (fig. 10) (c'est-à-dire dans le demi-plan $y - mx - p > 0$) et si $\overline{MK}$ tend vers 0 en restant négatif la branche de courbe est située au-dessous de l'asymptote D (fig. 11). Dans le cas où $\overline{MK}$ tend vers 0 sans garder un signe constant, la courbe oscille indéfiniment autour de son asymptote (fig. 12). C'est le cas de la courbe $y = \frac{\sin x}{x}$ par exemple.

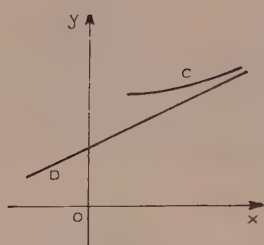


FIG. 10.

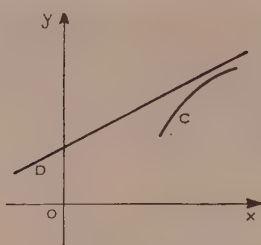


FIG. 11.

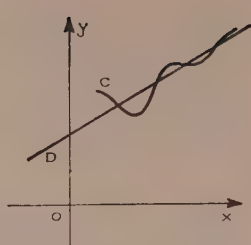


FIG. 12.

Reprenons d'une manière générale l'étude des conditions (5) et (6). Lorsque la quantité $\frac{f(x)}{x}$ tend vers une limite m ou tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ on dit que la direction de pente m (ou la direction Oy si cette limite est $+\infty$ ou $-\infty$) est la *direction asymptotique* de la branche de courbe considérée. Ce cas est celui où la droite OM tend vers une position limite Δ lorsque M s'éloigne indéfiniment sur la branche de courbe. La droite Δ a évidemment pour direction la direction asymptotique.

Cette direction ne dépend pas de l'origine O choisie, car si O' est le point de coordonnées x_0 et y_0 , la pente $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ de la droite $O'M$ a même limite que la pente $\frac{y}{x}$ de OM .

L'exemple de la courbe d'équation $y = x \sin x$ montre qu'une branche infinie n'admet pas nécessairement une direction asymptotique.

Lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$$

(ce qui est le cas pour la parabole $y = x^2$) ou lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \pm \infty$$

(ce qui est le cas pour la parabole $y = \sqrt{x}$), on dit que la courbe admet une *branche parabolique* (dans la direction u si u est sa direction asymptotique).

Enfin, l'exemple de la sinusoïde $y = \sin x$ montre qu'une branche infinie peut avoir une direction asymptotique (ici celle de l'axe Ox) sans avoir d'asymptote et sans que la branche correspondante soit parabolique.

EXEMPLE 3. — A titre d'exemple, proposons-nous d'étudier les branches infinies de la courbe :

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

dont nous avons déjà donné l'allure au § 3 du chapitre VI.

Il y a trois branches infinies. La première correspond à x tendant vers 1 par valeurs supérieures, la seconde à x tendant vers $+\infty$ et la troisième à x tendant vers $-\infty$.

Si x tend vers 1 par valeurs supérieures, y tend vers $+\infty$ d'où l'asymptote d'équation $x = 1$, la branche de courbe correspondante étant naturellement située à droite de l'asymptote.

Pour x tendant vers $\pm\infty$ il est avantageux d'écrire y sous la forme :

$$y = |x| \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$$

et de remarquer que :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$y = |x| \left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Si x tend vers $+\infty$ on a donc :

$$y = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

ce qui montre que la branche infinie correspondante a pour asymptote la droite $y = x + \frac{1}{2}$ et qu'elle est au-dessus de cette asymptote $\left(\frac{3}{8x}\right.$ étant strictement positif lorsque x tend vers $+\infty$).

Si x tend vers $-\infty$, on a de même :

$$y = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} - \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

ce qui montre que la branche infinie correspondante a pour asymptote la droite :

$$y = -x - \frac{1}{2}$$

et qu'elle est encore au-dessus de cette asymptote $\left(-\frac{3}{8x}\right.$ étant strictement positif lorsque x tend vers $-\infty$).

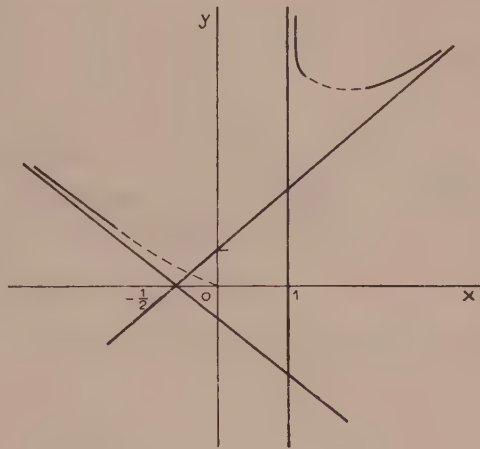


FIG. 13.

EXERCICES

1° Construire les courbes définies par les équations :

$$y = \text{Log} (1 + e^x) + 2 \text{Log} (1 + e^{-x})$$

$$y = xe^{-\frac{1}{x}}$$

$$y = x + \sqrt[3]{x - \frac{1}{x+1}}$$

$$y = x - \text{Log} (x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

*2° Construire les courbes définies par les équations :

$$y = x^2[2 \text{Log} x - 1]$$

$$x = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 3x + 2}}$$

$$y = (1 + \text{tg } x)^{\sin x}.$$

**3° Construire les courbes définies par les équations :

$$y = \sqrt{x^2 - 1} - \text{Log } x^2$$

$$y = \frac{x^2}{e^x - 1 - x}$$

$$y = \text{Arc sin } \frac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}.$$

*4° Lieu des points à tangente parallèle à Ox des courbes d'équation $y = (x-1)e^{\lambda x}$ lorsque λ varie. Construire ce lieu.

R. $y = (x-1)e^{\frac{x}{1-x}}$

*5° Tracer la courbe définie par :

$$\text{Log } x \cdot \text{Log } y + 3 = 0$$

et étudier sa concavité.

*6° Construire la courbe C définie par $y = e^{-x} \sin x$. On comparera d'abord l'arc C_0 correspondant à $0 \leq x < \pi$ et l'arc C_n correspondant à $n\pi \leq x < (n+1)\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Montrer que la courbe est tout entière comprise entre les courbes L et L' définies par $y = \pm e^{-x}$. Vérifier que les points d'inflexion de C sont aussi les points de contact avec L ou L' .

*7° Tracer la courbe d'équation :

$$y = x \sin x$$

(voir l'exercice 6). Montrer que les points à tangente parallèle à Ox et que les points d'inflexion appartiennent à deux courbes algébriques que l'on construira.

R. $y = \pm \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \quad y = \pm \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}.$

***8°** Lieu du milieu de AB , A et B étant les points d'intersection avec Ox et Oy d'une tangente variable à la courbe définie par $y = e^x$. Construire ce lieu :

$R.$ $y = -xe^{2x+1}.$

****9°** Construire la courbe d'équation $y = a^{(a^x)}$ où a est strictement positif. Formes différentes de la courbe selon la valeur de a . Lieu du point d'inflexion lorsque a varie dans l'intervalle $]0,1[$.

$R.$ Le lieu est la demi-droite définie par

$$x < \frac{1}{e}, y = \frac{1}{e}.$$

***10°** Montrer que la courbe d'équation :

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

possède, si $a \neq 0$, un centre de symétrie I . Vérifier que l'on peut définir un système de coordonnées par des vecteurs $\vec{IA}$ et $\vec{IB}$ convenablement choisis de façon que l'équation de la courbe soit :

$$Y = X^3.$$

LIVRE II

ÉLÉMENTS DE CALCUL INTÉGRAL

CHAPITRE XII

NOMBRES COMPLEXES

De nombreux problèmes d'analyse, la recherche de certaines primitives par exemple, sont simplifiés par l'emploi de fonctions à valeurs complexes. C'est pourquoi on trouvera au début de ce deuxième livre des compléments d'algèbre.

1. — *Le corps $\mathbf{C}$.*

Nous désignerons par $\mathbf{C}$ l'ensemble $\mathbf{R}^2$ des couples de nombres réels ⁽¹⁾ (x, y) , muni des deux opérations suivantes :

1° *Addition*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

2° *Multiplication*

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

On a, par exemple :

$$\begin{aligned}(1, 3) + (2, -1) &= (1 + 2, 3 - 1) = (3, 2) \quad \text{et} \\ (1, 3)(2, -1) &= (1 \times 2 - 3 \times (-1), 1 \times (-1) + 3 \times 2) \\ &= (5, 5).\end{aligned}$$

THÉORÈME 1. — $\mathbf{C}$ est un corps et l'application $a \mapsto (a, 0)$ qui, à tout nombre réel a fait correspondre l'élément $(a, 0)$ de $\mathbf{C}$ définit un isomorphisme de $\mathbf{R}$ sur un sous-corps de $\mathbf{C}$.

(1) Rappelons que l'égalité $(x, y) = (x', y')$ implique $x = x'$ et $y = y'$.

Vérifions que $\mathbf{C}$ est un corps. L'addition fait de $\mathbf{C}$ un groupe commutatif : l'associativité et la commutativité sont évidentes, l'élément $(0, 0)$ est élément neutre :

$$(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$$

L'élément (a, b) a pour opposé $(-a, -b)$:

$$(a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0)$$

La multiplication est commutative puisque l'élément $(ac - bd, ad + bc)$ ne change pas si l'on y échange a avec c et b avec d , vérifions l'associativité

$$\begin{aligned} ((a, b)(c, d))(e, f) &= (ac - bd, ad + bc)(e, f) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \end{aligned}$$

On obtient le même résultat en calculant

$$(a, b)((c, d)(e, f)) = (a, b)(ce - df, cf + de)$$

Le couple $(1, 0)$ est élément neutre de la multiplication puisque

$$(a, b)(1, 0) = (a \times 1 - b \times 0, a \times 0 + b \times 1) = (a, b)$$

Enfin, si $(a, b) \neq (0, 0)$, c'est-à-dire si l'on n'a pas $a = b = 0$, l'élément (a, b) a pour inverse l'élément

$$(x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

On a en effet :

$$ax - by = 1 \quad \text{et} \quad ay + bx = 0$$

Vérifions que la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\begin{aligned} (a, b)[(c, d) + (e, f)] &= (a, b)(c + e, d + f) \\ &= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\ &= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f) \end{aligned}$$

Montrons que le sous-ensemble K de $\mathbf{C}$ formé par les éléments de la forme $(a, 0)$ est un corps (et par suite un sous-corps de $\mathbf{C}$). On a

$$(1) \quad \begin{aligned} (a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0) \\ (0, 0) &\in K \end{aligned}$$

et l'opposé $(-a, 0)$ de $(a, 0)$ appartient à K . Puis

$$(2) \quad \begin{aligned} (a, 0)(b, 0) &= (ab, 0) \\ (1, 0) &\in K \\ (a, 0)^{-1} &= (a^{-1}, 0) \in K \quad (\text{pour } a \neq 0) \end{aligned}$$

Les égalités (1) et (2) montrent que l'application bijective

$$\varphi : \mathbf{R} \rightarrow K$$

définie par

$$\varphi(a) = (a, 0)$$

est un isomorphisme. Ces égalités s'écrivent en effet :

$$(1) \quad \varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a + b)$$

$$(2) \quad \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$$

Ceci achève de démontrer le théorème.

On identifie K et $\mathbf{R}$ au moyen de l'application φ . On écrit donc :

$$(a, 0) = a$$

et en particulier

$$(0, 0) = 0$$

$$(1, 0) = 1$$

Les éléments du corps $\mathbf{C}$ sont dits les *nombre complexes*. On désigne le nombre $(0, 1)$ par la lettre i (parfois par la lettre j) :

$$(0, 1) = i$$

ce nombre est de carré égal à -1 puisque l'on a

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0) = -1.$$

Tout nombre complexe $z = (a, b)$ peut s'écrire d'une façon unique sous la forme

$$z = a + ib \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

En effet

$$a + ib = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$$

Les nombres a et b sont appelés la *partie réelle* et la *partie imaginaire* de z . On écrit :

$$a = \Re(z) \quad , \quad b = \Im(z)$$

Un nombre réel est donc un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle. Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est dit parfois *imaginaire pur*.

L'inverse du nombre $z = a + ib \neq 0$ a été obtenu dans la démonstration du théorème 1 :

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Les résultats précédents permettent de calculer avec les nombres complexes mis sous la forme $a + ib$ en appliquant les mêmes règles d'opérations que dans $\mathbf{R}$ et en tenant compte de l'égalité $i^2 = -1$.

EXEMPLES.

$$(1 + 3i) + (2 - i) = 3 + 2i$$

$$(1 + 3i)(2 - i) = 2 - i + 6i - 3i^2 \\ = 2 + 5i + 3 = 5 + 5i$$

$$\frac{1 + 3i}{2 - i} = (1 + 3i) \frac{1}{2 - i} = (1 + 3i) \left(\frac{2}{5} + i \frac{1}{5} \right) \\ = \frac{2}{5} + \frac{i}{5} + \frac{6i}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{7i}{5}$$

Conjugaison. — Les deux nombres i et $-i$ dont le carré est (-1) jouent des rôles analogues dans $\mathbf{C}$. Le nombre $\bar{z} = a - ib$ est dit le *conjugué* de $z = a + ib$.

On a

$$\bar{\bar{z}} = z \quad \bar{z}\bar{z} = a^2 + b^2 \\ \Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que z soit réel est donc $z = \bar{z}$.

THÉORÈME 2. — L'application $\psi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $\psi(z) = \bar{z}$ est un automorphisme du corps $\mathbf{C}$.

En effet ψ est évidemment une application bijective.

Soient

$$z_1 = a + ib \quad \text{et} \quad z_2 = c + id$$

On a bien :

$$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - i(b + d) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

et

$$\overline{z_1 z_2} = (ac - bd) - i(ad + bc) = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

on en déduit aisément

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

REMARQUE. — Il est commode, pour calculer un quotient de multiplier les deux termes du quotient par le conjugué du diviseur. On a en effet

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

2. — Représentations géométriques.

Soit $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé du plan. A tout nombre complexe $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbf{R}$) faisons correspondre le vecteur libre $\vec{U}$ de coordonnées (x, y) .

Le vecteur $\vec{U}$ est dit l'*image vectorielle* de z .

Le point M défini par $\overrightarrow{OM} = \vec{U}$ est dit l'*image ponctuelle* de z (fig. 1). Ses coordonnées sont la partie réelle et la partie imaginaire de z .

Inversement tout vecteur $\vec{U}$ (tout point M) est l'image vectorielle (ponctuelle) d'un nombre complexe z dit *affiche* de ce vecteur (de ce point).

L'application f définie par

$$z = x + iy \mapsto f(z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

est donc une bijection de $\mathbf{C}$ sur l'ensemble des vecteurs du plan.

A la somme de deux nombres complexes correspond la somme des vecteurs images.

Soit en effet (fig. 2)

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad f(z_1) = \vec{U}_1 = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 \quad f(z_2) = \vec{U}_2 = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$$

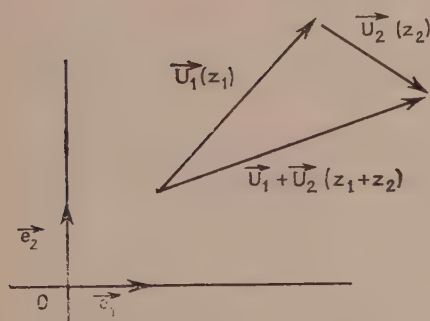


FIG. 2.

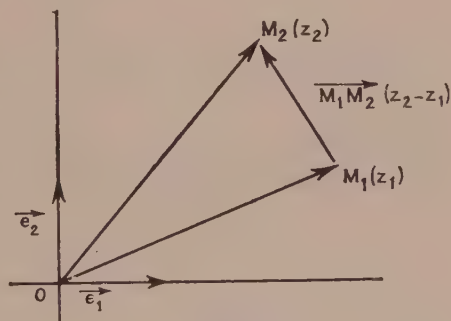


FIG. 3.

On a

$$f(z_1 + z_2) = (x_1 + x_2)\vec{e}_1 + (y_1 + y_2)\vec{e}_2 = f(z_1) + f(z_2)$$

Si M_1 et M_2 sont les points d'affixes z_1 et z_2 le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$ a comme affixe $z_2 - z_1$ (fig. 3).

Module et argument. — Soit M le point d'affixe $z = x + iy$ (fig. 4). On appelle *module* de z , et l'on note $|z|$, la norme (ou longueur) du vecteur $\overrightarrow{OM}$:

$$|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = r \geq 0$$

On appelle *argument* de z , et l'on note $\arg z$, l'angle θ de $\overrightarrow{OM}$ avec $\vec{e}_1$:

$$\arg z = (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

L'argument n'est pas déterminé pour $z = 0$ ($\overrightarrow{OM} = \vec{0}$).

EXEMPLES 2. — Le nombre i est de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

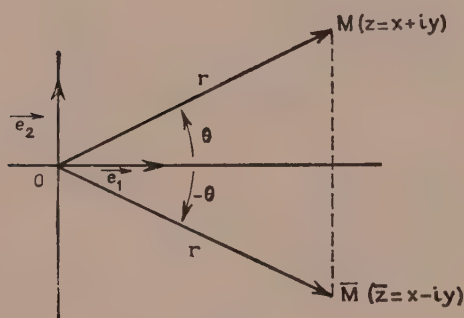


FIG. 4.

Un nombre réel est d'argument $0 + 2k\pi$ s'il est positif. Il est d'argument $\pi + 2k\pi$ s'il est négatif.

Deux nombres complexes conjugués z et $\bar{z}$ ont même module et des arguments opposés (à $2k\pi$ près). On notera que les images ponctuelles M et $\bar{M}$ de ces nombres sont symétriques par rapport au premier axe de coordonnées (fig. 4).

Soient r et θ le module et l'argument de $z = x + iy$. On a :

$$(3) \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad r \geq 0$$

Inversement ces égalités (3) permettent de définir r et θ (lorsque $z \neq 0$) à l'aide de x et y .

On a en effet $x^2 + y^2 = r^2$ d'où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (car $r \geq 0$), l'angle θ est alors défini (à $2k\pi$ près) par son cosinus et son sinus ($z \neq 0 \implies r \neq 0$) :

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \sin \theta = \frac{y}{r}$$

Il en résulte que le nombre $z \neq 0$ s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme dite *trigonométrique* :

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0)$$

Soient alors z_1, z_2 deux nombres de modules $r_1, r_2 > 0$ et d'arguments θ_1, θ_2 . On a

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

comme $r_1 r_2 > 0$ cette égalité montre que $r_1 r_2$ est le module de $z_1 z_2$ et $\theta_1 + \theta_2$ l'argument de $z_1 z_2$:

Le module du produit est le produit des modules, l'argument du produit, la somme des arguments.

Soit :

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \\ \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi \end{cases}$$

Puissances. — Pour $z_1 = z_2 = z$ les égalités ci-dessus s'écrivent

$$|z^2| = |z|^2 \quad \text{et} \quad \arg(z^2) = 2 \arg z + 2k\pi$$

Par récurrence sur l'entier naturel n on obtient

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{et} \quad \arg(z^n) = n \arg z + 2k\pi$$

Inverse. — Pour

$$z \neq 0 \quad \text{on a} \quad \left| \frac{1}{z} \right| |z| = |1| = 1 \quad \text{et} \quad \arg \frac{1}{z} + \arg z = 0 + 2k\pi$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \\ \arg \frac{1}{z} = - \arg z + 2k\pi \end{cases}$$

Il en résulte, pour $z_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ \text{et} \\ \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 + \arg \frac{1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi \end{cases}$$

Notons encore que l'égalité

$$z\bar{z} = |z|^2$$

permet d'écrire

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (z \neq 0)$$

Inégalité triangulaire. — Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur d'affixe z_1 , $\overrightarrow{BC}$ un vecteur d'affixe z_2 , le vecteur $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ est d'affixe $z_1 + z_2$.

L'inégalité triangulaire

$$\|\overrightarrow{AC}\| \leq \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\|$$

s'écrit donc

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

3. — Translations et similitudes.

Soit α un nombre complexe donné. Désignons par $\mathcal{G}$ la transformation qui, à tout point M d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' :

$$z' = z + \alpha$$

Si $\vec{A}$ est le vecteur d'affixe α , on a

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{A}$$

La transformation $\mathcal{G}$ est donc la translation de vecteur $\vec{A}$.

Soit $\beta = \cos \theta + i \sin \theta$ un nombre complexe donné de module 1. Désignons par $\mathcal{R}$ la transformation qui, à tout point M d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' avec

$$z' = \beta z$$

on a

$$|z'| = |\beta| \cdot |z| = |z|$$

c'est-à-dire

$$\|\overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{OM}\|$$

et

$$\begin{aligned} \arg z' &= \arg \beta + \arg z + 2k\pi \\ &= \theta + \arg z + 2k\pi \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = \arg z' - \arg z = \theta + 2k\pi$$

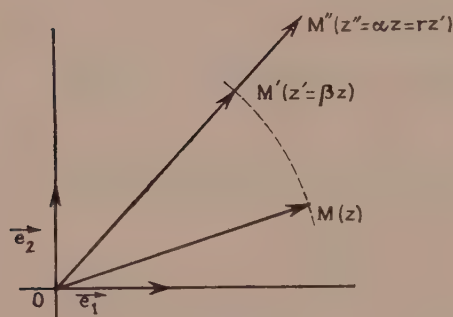


FIG. 5.

La transformation $\mathcal{R}$ est donc la rotation de centre O et d'angle θ (fig. 5).

La multiplication par $\beta = i$ donne en particulier la rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de O .

Désignons par $\mathcal{F}$ la transformation qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M'' d'affixe z'' :

$$\begin{aligned} z'' &= r (\cos \theta + i \sin \theta) z \\ &= r \beta z = r z' \end{aligned}$$

où r est un nombre positif donné.

La transformation $\mathcal{K}$ définie par

$z'' = r z'$ se traduit par $\overrightarrow{OM''} = r \overrightarrow{OM'}$. C'est l'homothétie de centre O et de rapport $r > 0$. On a donc

$$\mathcal{F} = \mathcal{K} \circ \mathcal{R}$$

et $\mathcal{F}$ est la similitude de centre O , d'angle θ et de rapport r .

4. — Formule de Moivre.

Soit $z = \cos \theta + i \sin \theta$ un nombre complexe de module 1 et d'argument θ , on peut écrire immédiatement z^n ($n \in \mathbf{N}$) sous la forme $z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$,

mais on peut aussi calculer z^n en développant $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ par la formule du binôme.

On obtient l'égalité dite *Formule de Moivre* :

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k \cos^{n-k} \theta (i \sin \theta)^k$$

d'où en égalant les parties réelles et imaginaires

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \cos^n \theta - C_n^2 \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + C_n^4 \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta + \dots \\ &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} (-1)^k \cos^{n-2k} \theta \sin^{2k} \theta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sin n\theta &= C_n^1 \cos^{n-1} \theta \sin \theta - C_n^3 \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + C_n^5 \cos^{n-5} \theta \sin^5 \theta + \dots \\ &= \sum_{0 < 2k+1 \leq n} C_n^{2k+1} (-1)^k \cos^{n-(2k+1)} \theta \sin^{2k+1} \theta \end{aligned}$$

En divisant membre à membre (et après simplification par $\cos^n \theta$), on obtient :

$$\operatorname{tg} n\theta = \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} = \frac{\sum_{0 < 2k+1 \leq n} C_n^{2k+1} (-1)^k \operatorname{tg}^{2k+1} \theta}{\sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} (-1)^k \operatorname{tg}^{2k} \theta}$$

Prenons par exemple $n = 5$. On obtient

$$\begin{aligned} \cos 5\theta &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta \\ \sin 5\theta &= 5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta \end{aligned}$$

et

$$\operatorname{tg} 5\theta = \frac{5 \operatorname{tg} \theta - 10 \operatorname{tg}^3 \theta + \operatorname{tg}^5 \theta}{1 - 10 \operatorname{tg}^2 \theta + 5 \operatorname{tg}^4 \theta}$$

Certains calculs de trigonométrie se trouvent donc considérablement simplifiés dans leur pratique par l'introduction des nombres complexes. Donnons-en un exemple :

Soit à calculer la somme :

$$S = \cos a + \cos (a + h) + \cos (a + 2h) + \dots + \cos (a + (n-1)h).$$

Introduisons pour cela la somme correspondante :

$$S' = \sin a + \sin (a + h) + \sin (a + 2h) + \dots + \sin (a + (n-1)h)$$

et calculons le nombre complexe $S + iS'$. On a :

$$S + iS' = (\cos a + i \sin a) + [\cos(a + h) + i \sin(a + h)] + \dots \\ \dots + [\cos(a + (n - 1)h) + i \sin(a + (n - 1)h)]$$

égalité qui conduit à poser :

$$z_0 = \cos a + i \sin a \quad \text{et} \quad z = \cos h + i \sin h.$$

Il vient

$$S + iS' = z_0 + z_0 z + z_0 z^2 + \dots + z_0 z^{n-1} \\ = z_0(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1})$$

mais la formule donnant la somme des termes d'une progression géométrique (formule qui reste évidemment valable lorsque les termes de cette somme sont des nombres complexes) s'écrit si $z \neq 1$ (le cas $z = 1$ donne immédiatement : $S = n \cos a$ et $S' = n \sin a$) :

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

d'où l'égalité :

$$S + iS' = z_0 \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

On peut écrire :

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{\cos nh + i \sin nh - 1}{\cos h + i \sin h - 1} = \frac{-2 \sin^2 \frac{nh}{2} + 2i \sin \frac{nh}{2} \cos \frac{nh}{2}}{-2 \sin^2 \frac{h}{2} + 2i \sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2}} \\ = \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \cdot \frac{-\sin \frac{nh}{2} + i \cos \frac{nh}{2}}{-\sin \frac{h}{2} + i \cos \frac{h}{2}}.$$

Mais, en multipliant le numérateur et le dénominateur par $-i$:

$$\frac{i \cos \frac{nh}{2} - \sin \frac{nh}{2}}{i \cos \frac{h}{2} - \sin \frac{h}{2}} = \frac{-i^2 \cos \frac{nh}{2} + i \sin \frac{nh}{2}}{-i^2 \cos \frac{h}{2} + i \sin \frac{h}{2}} = \frac{\cos \frac{nh}{2} + i \sin \frac{nh}{2}}{\cos \frac{h}{2} + i \sin \frac{h}{2}}$$

qui est égal à :

$$\cos(n-1)\frac{h}{2} + i \sin(n-1)\frac{h}{2}$$

D'où :

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \left[\cos(n-1)\frac{h}{2} + i \sin(n-1)\frac{h}{2} \right]$$

et :

$$\begin{aligned} z_0 \frac{z^n - 1}{z - 1} &= \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} (\cos a + i \sin a) \left[\cos (n-1) \frac{h}{2} + i \sin (n-1) \frac{h}{2} \right] \\ &= \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \left[\cos \left(a + (n-1) \frac{h}{2} \right) + i \sin \left(a + (n-1) \frac{h}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Comme :

$$S = \Re \left(z_0 \frac{z^n - 1}{z - 1} \right)$$

on a :

$$S = \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \cos \left(a + (n-1) \frac{h}{2} \right).$$

On aurait de même :

$$S' = \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \sin \left(a + (n-1) \frac{h}{2} \right).$$

EXERCICES

1° Écrire $z = \cos \theta + \cos \varphi + i (\sin \theta + \sin \varphi)$ sous forme trigonométrique.

R. Si $\cos \frac{\theta - \varphi}{2} \geq 0$, $z = 2 \cos \frac{\theta - \varphi}{2} \left(\cos \frac{\theta + \varphi}{2} + i \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \right)$

et si $\cos \frac{\theta - \varphi}{2} < 0$, $z = -2 \cos \frac{\theta - \varphi}{2} \left(\cos \frac{\theta + \varphi + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\theta + \varphi + 2\pi}{2} \right).$

2° Valeur de $z' = \frac{z^2 + z + 1}{z^4 - 1}$ lorsque $z = 2 + 3i$.

R. $z' = -\frac{1}{240} (13 + 17i).$

3° On appelle M l'image du nombre complexe z et P l'image du nombre complexe donné p . Montrer que si z vérifie la relation :

$$(z - p)(\bar{z} - \bar{p}) = p\bar{p},$$

le point M décrit le cercle de centre P passant par l'origine des coordonnées.

***4°** On pose $a = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. Montrer que si trois nombres complexes z , z' et z'' vérifient la relation :

$$z + az' + \bar{a}z'' = 0$$

leurs images M, M', M'' forment un triangle équilatéral.

***5°** Un nombre complexe z varie, son module restant compris entre 1 et 6 :

$$1 \leq |z| \leq 6.$$

Déterminer les valeurs de z correspondant au maximum et au minimum du module de la quantité $z^2 + 3z$.

R. $z = 6 \quad \text{et} \quad z = -3.$

****6°** On désigne par M et M' les images des nombres complexes z et z' liés par la relation :

$$z' = 2 + i\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Calculer les parties réelles et imaginaires de z' en fonction des coordonnées x et y du point M . En déduire le lieu du point M de façon que M' décrive l'axe réel (z' réel). Suivre le déplacement de M' quand M décrit son lieu.

R. Lorsque M décrit le cercle défini par $x^2 + y^2 = 1$, M' décrit deux fois un segment de droite.

Lorsque M décrit la demi-droite définie par $x = 0, y > 0$, M' décrit deux fois une demi-droite.

Lorsque M décrit la demi-droite définie par $x = 0, y < 0$, M' décrit deux fois une autre demi-droite.

7° Calculer $(1 + i)^n + (1 - i)^n$, n entier :

$$2^{\frac{n+2}{2}} \cos \frac{n\pi}{4},$$

8° Calculer :

$$S = 1 + r \cos h + r^2 \cos 2h + \dots + r^n \cos nh$$

et :

$$S' = r \sin h + r^2 \sin 2h + \dots + r^n \sin nh.$$

R. $S + iS'$

$$= \frac{1 - r \cos h - r^{n+1} \cos (n+1)h + r^{n+2} \cos nh + i(r \sin h - r^{n+1} \sin (n+1)h + r^{n+2} \sin nh)}{1 - 2r \cos h + r^2}.$$

CHAPITRE XIII

POLYNOMES

Dans tout ce chapitre on désignera par K l'un des trois corps usuels $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. — Fonctions polynômes.

L'ensemble E des applications d'un corps K en lui-même est un anneau pour les deux lois de composition $f + g$ et fg définies par

$$\begin{aligned}\forall x \in K \quad (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (fg)(x) &= f(x) \cdot g(x)\end{aligned}$$

on a déjà remarqué (Rappels, § 9, exemple 2) que l'anneau E n'est pas un anneau intègre.

Parmi les éléments de E figurent les fonctions puissances entières $x \mapsto x^n$ et les *fonctions polynômes*, ou plus simplement *polynômes*, combinaisons linéaires d'un nombre fini de fonctions puissances. Un tel polynôme P est de la forme

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

où les *coefficients* a_i sont des éléments donnés de K et où le polynôme a été ordonné suivant les puissances décroissantes de x .

La somme et le produit de fonctions polynômes sont des fonctions polynômes :

L'ensemble des polynômes est un sous-anneau de E que l'on désigne par $K[x]$.

THÉORÈME 1. — *La fonction polynôme $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ ne peut être la fonction nulle que si tous ses coefficients sont nuls, soit $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$.*

Nous ferons la démonstration par récurrence sur l'entier n . Le théorème est évident pour $n = 0$. Supposons-le démontré jusqu'à un entier $n = p - 1 \geq 0$ et soit

$$\forall x \in K \quad P(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p = 0$$

on devra donc avoir également

$$\forall x \in K \quad P(x + 1) = 0$$

or en développant $P(x + 1)$ par la formule du binôme on a

$$\begin{aligned} P(x + 1) &= a_0(x + 1)^p + a_1(x + 1)^{p-1} + \dots + a_p \\ &= a_0x^p + (a_1 + pa_0)x^{p-1} + \dots + a_p \end{aligned}$$

les termes non écrits ayant des exposants inférieurs à $p - 1$ on a donc

$$\forall x \in K \quad 0 = P(x + 1) - P(x) = pa_0 x^{p-1} + \dots$$

et les hypothèses de récurrence entraînent

$$pa_0 = 0 \quad \text{d'où} \quad a_0 = 0 \quad (\text{car } p \geq 1)$$

Mais alors

$$\forall x \in K \quad 0 = P(x) = a_1 x^{p-1} + \dots + a_p$$

et ces mêmes hypothèses entraînent

$$a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$$

le théorème est donc vrai pour $n = p$.

Il résulte du théorème (1) que

Deux fonctions polynômes P et Q de $K[x]$ ne peuvent être égales que si elles ont mêmes coefficients.

En effet $P - Q$ doit être alors la fonction nulle.

Il n'y a donc qu'une seule façon d'écrire une fonction polynôme comme combinaison linéaire de fonctions puissances ou encore :

Les coefficients d'un polynôme sont définis sans ambiguïté par ce polynôme.

Degré. — On nomme *degré d'un polynôme non nul* le plus grand entier k tel que le coefficient de x^k soit non nul.

Les polynômes de degré 0 sont donc des constantes non nulles.

Il résulte immédiatement de cette définition que, en désignant par d^0P le degré de P , on a

$$d^0(P + Q) \leq \sup(d^0P, d^0Q)$$

REMARQUE. — On ne définit pas le degré du polynôme nul et par conséquent l'inégalité ci-dessus n'a de sens que pour P , Q et $P + Q \neq 0$.

On considère cependant que le polynôme nul appartient à l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à n pour tout entier naturel n .

Degré d'un produit. — Soient

$$P = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{avec} \quad d^0P = n \quad \text{c'est-à-dire} \quad a_0 \neq 0$$

et :

$$Q = b_0 x^m = b_1 x^{m-1} + \dots + b_m \quad \text{avec} \quad d^0 Q = m \quad \text{c'est-à-dire} \quad b_0 \neq 0$$

Le terme du plus haut degré du produit PQ est $a_0 b_0 x^{n+m}$, or $a_0 \neq 0$ et $b_0 \neq 0$ impliquent $a_0 b_0 \neq 0$ (un corps est toujours intègre). Il en résulte $d^0(PQ) = n + m$ c'est-à-dire :

$$d^0(PQ) = d^0 P + d^0 Q \quad (P \neq 0, Q \neq 0)$$

Par conséquent ($P \neq 0, Q \neq 0$) implique $PQ \neq 0$:

L'anneau $K[x]$ des polynômes à coefficients dans K est un anneau intègre.

2. — *Algorithme de division. Racines d'un polynôme.*

L'anneau $K[x]$ n'est pas un corps. Si A et B sont deux polynômes (avec $B \neq 0$) il n'y a pas en général de polynôme C tel que $A = BC$. Si un tel polynôme C existe on dit que A est *divisible* par B ou que B *divise* A . Si B divise A on a l'égalité $d^0 A = d^0 B + d^0 C$ ce qui entraîne $d^0 B \leq d^0 A$.

Ces propriétés montrent l'existence d'une certaine analogie entre l'anneau $K[x]$ et l'anneau des entiers $\mathbf{Z}$. Nous allons développer cette analogie en montrant que l'on peut faire pour les polynômes comme pour les nombres entiers une théorie de la division avec quotient et reste.

THÉORÈME 2. — *Soient deux polynômes A et B tels que $B \neq 0$. On peut trouver deux polynômes Q et R tels que R soit nul ou ait un degré strictement inférieur à celui de B et tels que $A = BQ + R$.*

Les polynômes Q et R sont complètement déterminés par les conditions précédentes.

Les polynômes Q et R ainsi définis sont appelés respectivement le *quotient* et le *reste* de la division de A par B . Les déterminer s'appelle *faire la division suivant les puissances décroissantes* du polynôme A par le polynôme B . Les polynômes A et B sont parfois appelés *dividende* et *diviseur*. Passons à la démonstration du théorème :

Si A est nul ou si son degré est strictement inférieur à celui de B , la condition imposée à R entraîne $Q = 0$ (sinon le polynôme $BQ + R$ serait non nul et aurait un degré au moins égal à celui de B), et par suite $R = A$. Dans ce cas la division est donc possible et d'une seule manière. Supposons maintenant que A ait un degré n supérieur ou égal au degré m de B . Soit :

$$A = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad \text{et} \quad B = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m,$$

a_0 et b_0 étant non nuls.

En comparant les termes de plus haut degré de A et de $BQ + R$ on voit que l'égalité $A = BQ + R$ et la condition $d^0 R < d^0 B$ ne sont possibles que si Q a pour degré $n - m$ et $\frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$ comme terme de plus haut degré. En posant

alors $A_1 = A - \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} B$ et $Q_1 = Q - \frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$, on voit que l'on est ramené à chercher deux polynômes Q_1 et R tels que :

$$A_1 = BQ_1 + R \quad \text{avec} \quad d^0 R < d^0 B.$$

On est donc ramené au même problème mais cette fois le degré du nouveau dividende A_1 est strictement inférieur à celui de A . Si le degré de A_1 est strictement inférieur à celui de B , on a $Q_1 = 0$ et $A_1 = R$. Sinon on opère sur A_1 comme on a opéré sur A , d'où un nouveau polynôme A_2 et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on tombe sur un polynôme A_p dont le degré est strictement inférieur à celui de B . On aura alors $R = A_p$ et l'opération sera terminée. On voit donc qu'il est toujours possible de déterminer les polynômes Q et R et ce qui précède montre que ce n'est possible que d'une seule manière. D'où le théorème.

Illustrons ceci par un exemple. Soit :

$$\begin{aligned} A &= 4x^5 - x^4 + 8x^3 - x^2 + 2x + 2 \\ B &= x^2 + 2. \end{aligned}$$

On a successivement :

$$\begin{aligned} A_1 &= A - 4x^3 B = -x^4 - x^2 + 2x + 2 \\ A_2 &= A_1 + x^2 B = x^2 + 2x + 2 \\ A_3 &= A_2 - B = 2x = R. \end{aligned}$$

D'où :

$$A = 4x^3 B + A_1 = (4x^3 - x^2) B + A_2 = (4x^3 - x^2 + 1) B + A_3 = (4x^3 - x^2 + 1) B + 2x.$$

Par suite $Q = 4x^3 - x^2 + 1$ et $R = 2x$.

En pratique on pose la division comme une division de nombres entiers suivant le schéma suivant :

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 4x^5 - x^4 + 8x^3 - x^2 + 2x + 2 \\ - 4x^5 \qquad \qquad - 8x^3 \\ \hline - x^4 \qquad \qquad - x^2 + 2x + 2 \\ + x^4 \qquad \qquad + 2x^2 \\ \hline \qquad \qquad \qquad x^2 + 2x + 2 \\ \qquad \qquad \qquad - x^2 \qquad - 2 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 2x \end{array} & \begin{array}{l} x^2 + 2 \\ \hline 4x^3 - x^2 + 1 \end{array} \end{array}$$

Divisibilité par $x - a$. — Cherchons à quelle condition un polynôme $A(x)$ est divisible par $x - a$. En faisant la division suivant les puissances décroissantes de $A(x)$ par $x - a$, on peut écrire :

$$(1) \quad A(x) = (x - a) Q(x) + R(x)$$

avec $R = 0$ ou $d^0 R < d^0(x - a)$. Comme $d^0(x - a) = 1$, on voit que $R(x)$ est une constante k . Déterminons cette constante en donnant à x la valeur a dans l'égalité (1) : $A(a) = k$.

L'égalité (1) s'écrivant alors $A(x) = (x - a) Q(x) + A(a)$, on voit que pour que $A(x)$ soit divisible par $(x - a)$, il faut et il suffit que $A(a) = 0$.

Si $A(a) = 0$ on dit que a est une *racine* (ou un *zéro*) du polynôme $A(x)$.

EXEMPLE 1. — n étant un entier positif quelconque, on vérifie immédiatement l'égalité classique :

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-1})$$

et, si n est impair :

$$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \dots + a^{n-1}).$$

Supposons maintenant que le polynôme A ait n racines distinctes $a_1, \dots, a_n$. On peut écrire :

$$A(x) = (x - a_1) A_1(x).$$

Mais si $i \neq 1$, les égalités $A(a_i) = 0$ et $(a_i - a_1) \neq 0$ entraînent :

$$A_1(a_2) = A_1(a_3) = \dots = A_1(a_n) = 0.$$

On peut donc écrire :

$$A_1(x) = (x - a_2) A_2(x)$$

et de la même façon :

$$A_2(a_3) = A_2(a_4) = \dots = A_2(a_n) = 0.$$

En poursuivant ce raisonnement on tombe finalement sur une égalité de la forme :

$$A(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) B(x)$$

qui montre que le polynôme A est divisible par le produit $(x - a_1) \dots (x - a_n)$. Nous pouvons donc énoncer le :

THÉORÈME 3. — Si le polynôme A a n racines distinctes $a_1, \dots, a_n$, il est divisible par le produit $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$.

COROLLAIRE 1. — Un polynôme non nul de degré n ne peut avoir plus de n racines distinctes.

En effet, si le polynôme non nul A possède $n + 1$ racines distinctes $a_1, \dots, a_{n+1}$ il est divisible par le polynôme $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{n+1})$ qui est le degré $n + 1$. Donc le degré de A est au moins égal à $n + 1$.

COROLLAIRE 2. — Deux polynômes dont les degrés sont au plus égaux à n et prenant les mêmes valeurs pour $n + 1$ valeurs distinctes de la variable sont égaux.

Soient A et B ces polynômes et $a_1, \dots, a_{n+1}$ les valeurs distinctes de la variable telles que :

$$A(a_i) = B(a_i) \quad (1 \leq i \leq n+1).$$

Le polynôme $A - B$ a son degré inférieur ou égal à n et admet les $n+1$ racines distinctes $a_1, \dots, a_{n+1}$, ce qui entraîne $A - B = 0$ ou $A = B$. D'où le corollaire.

COROLLAIRE 3. — Deux polynômes prenant les mêmes valeurs pour une infinité de valeurs distinctes de la variable sont égaux.

Soient A et B ces polynômes et soit n le degré de $A - B$. Comme $A - B$ a une infinité de racines distinctes, il a plus de n racines distinctes. Le corollaire 1 entraîne alors l'égalité $A - B = 0$ ou $A = B$.

3. — Plus grand commun diviseur.

A et B étant deux polynômes, cherchons quels sont les *diviseurs communs* à A et B , c'est-à-dire les polynômes qui divisent à la fois A et B . Supposons par exemple que le degré de B soit inférieur ou égal à celui de A et faisons la division suivant les puissances décroissantes de A par B , soit :

$$A = BQ + R_1.$$

L'égalité précédente montre immédiatement que pour qu'un polynôme divise à la fois A et B , il faut et il suffit qu'il divise à la fois B et R_1 (car il est bien évident que si un polynôme divise deux polynômes S et T , il divise la somme $S + T$ et la différence $S - T$). Les diviseurs communs à A et B sont donc les diviseurs communs à B et R_1 . Si $R_1 = 0$, tout polynôme divise R_1 et par suite les diviseurs communs à B et R_1 sont les diviseurs de B . Si $R_1 \neq 0$, on est ramené à chercher les diviseurs communs à B et R_1 , ce qui est plus simple que de chercher les diviseurs communs à A et B car le degré de R_1 , étant strictement inférieur à celui de B , est strictement inférieur à celui de A . En désignant par R_2 le reste de la division de B par R_1 , par R_3 celui de R_1 par R_2 et ainsi de suite, nous sommes amenés à définir une suite de polynômes $R_1, R_2, R_3, \dots$, dont les degrés sont strictement décroissants et tels que les diviseurs communs à A et B soient encore les diviseurs communs à R_{p-1} et R_p (pour tout p). On poursuit donc la suite des divisions jusqu'à ce que l'on atteigne un nombre n tel que $R_n = 0$. En posant $B = R_0$, on voit que *pour qu'un polynôme divise A et B , il faut et il suffit qu'il divise le polynôme R_{n-1}* . Ce polynôme R_{n-1} est appelé le *plus grand commun diviseur* de A et B .

On a toujours $R_{n-1} \neq 0$. Dans le cas où le polynôme R_{n-1} est une constante, on voit que seules les constantes divisent à la fois A et B . On dit alors que les polynômes A et B sont *premiers entre eux*.

Les égalités :

$$R_0 = B = 0.A + 1.B$$

$$R_1 = 1.A - Q.B$$

sont de la forme :

$$R_0 = A_0A + B_0B$$

$$R_1 = A_1A + B_1B.$$

Supposons que l'on ait des égalités de la forme :

$$R_p = A_pA + B_pB$$

$$R_{p+1} = A_{p+1}A + B_{p+1}B$$

où A_p, A_{p+1}, B_p et B_{p+1} sont des polynômes. L'égalité :

$$R_p = Q_{p+1}R_{p+1} + R_{p+2}$$

montre que R_{p+2} est encore de la forme $A_{p+2}A + B_{p+2}B$. De proche en proche on peut donc écrire :

$$R_{n-1} = A_{n-1}A + B_{n-1}B$$

et par suite :

THÉORÈME 4. — *D étant le plus grand commun diviseur de A et de B, il existe deux polynômes S et T tels que $D = SA + TB$.*

Nous avons d'autre part montré comment la suite des divisions de R_p par R_{p+1} permet de trouver ces polynômes S et T.

Si, en particulier, les polynômes A et B sont premiers entre eux, D est une constante non nulle et en divisant les polynômes S et T par la constante D, on voit que l'on a une égalité de la forme $1 = S_1A + T_1B$. Réciproquement, si on peut écrire une égalité de cette forme, S_1 et T_1 étant deux polynômes, on voit que tout diviseur commun à A et B divise 1, donc est une constante et par suite :

COROLLAIRE (THÉORÈME DE BEZOUT). — *Pour que les polynômes A et B soient premiers entre eux, il faut et il suffit qu'il existe deux polynômes S_1 et T_1 tels que $1 = S_1A + T_1B$.*

L'égalité $1 = S_1A + T_1B$ est connue sous le nom d'identité de Bezout.

COROLLAIRE (THÉORÈME DE GAUSS). — *Si les polynômes A et B sont premiers entre eux et si A divise le produit BC, alors A divise C.*

En effet, les hypothèses faites entraînent l'existence de polynômes S, T, Q tels que

$$\begin{cases} AS + BT = 1 \\ CB = AQ \end{cases}$$

d'où

$$C = CAS + CBT = CAS + AQT$$

c'est-à-dire

$$A(CS + QT) = C$$

égalité qui exprime que A divise C.

4. — Polynôme dérivé. Racines multiples.

Lorsque K est le corps des nombres réels le polynôme

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

a pour dérivée le polynôme

$$P'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}$$

(P' étant nul pour $n = 0$).

Lorsque $K = \mathbf{Q}$ ou $K = \mathbf{C}$ on nomme encore *polynôme dérivé* du polynôme P le polynôme P' défini par l'égalité précédente.

On montre alors que les égalités suivantes, qui ont lieu pour $K = \mathbf{R}$, sont encore vraies lorsque $K = \mathbf{Q}$ ou $K = \mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} (P + Q)' &= P' + Q' \\ (PQ)' &= P'Q + PQ' \end{aligned}$$

et, par récurrence sur l'entier n,

$$(P^n)' = nP^{n-1}P'$$

Cette notion de polynôme dérivé va nous permettre d'étudier les racines multiples d'un polynôme.

Racine multiple. — Le nombre $\alpha \in K$ est dit *racine d'ordre* $m > 0$ du polynôme $P(x)$ si $(x - \alpha)^m$ divise $P(x)$ et si $(x - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas $P(x)$.

Pour $m = 1$ la racine est dite *simple*. Pour $m > 1$ la racine est dite *multiple*.

On est conduit à considérer qu'un nombre non racine de P est « *racine d'ordre 0* ».

THÉORÈME 5. — *Une racine simple d'un polynôme P n'est pas racine du polynôme dérivé P' . Une racine multiple d'ordre $m > 1$ d'un polynôme P est racine d'ordre $m - 1$ du polynôme P' .*

Soit α une racine d'ordre $m > 0$ du polynôme P . On peut écrire

$$P(x) = (x - \alpha)^m \cdot Q(x)$$

où $Q(x)$ est un polynôme tel que $Q(\alpha) \neq 0$ puisque $x - \alpha$ ne divise pas $Q(x)$.

En dérivant on obtient

$$P'(x) = m(x - \alpha)^{m-1} \cdot Q(x) + (x - \alpha)^m \cdot Q'(x)$$

pour $m = 1$ on a

$$P'(\alpha) = Q(\alpha) \neq 0$$

pour $m > 1$ on a

$$P'(x) = (x - \alpha)^{m-1} \cdot R(x)$$

avec

$$R(x) = mQ(x) + (x - \alpha)Q'(x)$$

d'où

$$R(\alpha) = mQ(\alpha) \neq 0$$

On a immédiatement les deux corollaires :

COROLLAIRE 1. — *Pour que α soit racine d'ordre $m > 0$ du polynôme P , il faut et il suffit que α soit racine de P et soit racine d'ordre $m - 1$ de P' .*

Et, si l'on désigne par $P^{(k)}$ le polynôme dérivé $k^{\text{ième}}$ de P c'est-à-dire le polynôme défini par la relation de récurrence

$$P^{(k)} = (P^{(k-1)})'$$

on a le

COROLLAIRE 2. — *Pour que α soit une racine d'ordre $m > 0$ de P , il faut et il suffit que α soit une racine des polynômes $P, P', \dots, P^{(m-1)}$ et ne soit pas racine du polynôme $P^{(m)}$.*

Ce qui précède montre que la recherche des racines multiples du polynôme $P(x)$ peut se ramener à la recherche des racines du plus grand commun diviseur des polynômes P et P' . On peut donc avoir des renseignements sur la multiplicité des racines d'un polynôme sans avoir à déterminer ces racines.

Application. — Cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $P(x) = x^3 + px + q$ admette une racine double (éventuellement triple).

Il faut et il suffit pour cela que P et que $P' = 3x^2 + p$ aient une racine commune, c'est-à-dire que leur plus grand commun diviseur ne soit pas une constante. Le reste de la division de P par P' étant $R = \frac{2}{3}px + q$, ce plus grand commun diviseur est celui de P' et de R . Pour qu'il ne soit pas une constante il faut et il suffit que R divise P' c'est-à-dire encore que la racine $x_0 = -\frac{3q}{2p}$ de R soit une racine de P' , c'est-à-dire encore que $\left(-\frac{3q}{2p}\right)^2 + \frac{p}{3} = 0$, ce qui s'écrit :

$$4p^3 + 27q^2 = 0.$$

Telle est la condition cherchée, la racine multiple a alors pour valeur

$$x_0 = -\frac{3q}{2p}.$$

5. — *Division des polynômes suivant les puissances croissantes.*

Soient deux polynômes :

$$A = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{et} \quad B = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m.$$

Supposons que nous cherchions s'il existe un polynôme :

$$C = c_0x^p + c_1x^{p-1} + \dots + c_p$$

tel que $A = BC$. En cherchant à déterminer de proche en proche les coefficients c_0 , puis c_1 , puis c_2 , ..., nous sommes conduits à faire la division suivant les puissances décroissantes de A par B (pour que le polynôme C existe, il faut et il suffit alors que le reste de cette division soit nul). Si au contraire nous cherchons à déterminer d'abord les termes de plus bas degré du polynôme C , c'est-à-dire le coefficient c_p , puis c_{p-1} , puis c_{p-2} , ..., nous serions conduits à un processus opératoire analogue, mais qui nous amènerait à ordonner les polynômes A et B suivant les puissances croissantes de x .

Prenons, par exemple, $A = 2 + x^3$ et $B = 1 + x + x^2$. Nous aurons l'opération :

$ \begin{array}{r} 2 \qquad \qquad \qquad + \ x^3 \\ - 2 - 2x - 2x^2 \\ \hline - 2x - 2x^2 + \ x^3 \\ + 2x + 2x^2 + 2x^3 \\ \hline \qquad \qquad \qquad + 3x^3 \\ - 3x^3 - 3x^4 - 3x^5 \\ \hline \qquad \qquad \qquad - 3x^4 - 3x^5 \\ \qquad \qquad \qquad + 3x^4 + 3x^5 + 3x^6 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + 3x^6 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \dots \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1 + x + x^2 \\ 2 - 2x + 3x^3 - 3x^4 \dots \end{array} $
---	---

On voit qu'ici rien ne nous oblige à arrêter l'opération à un reste plutôt qu'à un autre.

Nous pouvons écrire successivement :

$$\begin{aligned} 2 + x^3 &= (2 - 2x)(1 + x + x^2) + 3x^3 \\ 2 + x^3 &= (2 - 2x + 3x^3)(1 + x + x^2) - (3x^4 + 3x^5) \\ 2 + x^3 &= (2 - 2x + 3x^3 - 3x^4)(1 + x + x^2) + 3x^6 \\ &\dots \end{aligned}$$

Le degré du quotient croît au fur et à mesure que l'on poursuit l'opération, le degré du reste également. On remarquera que le terme du plus bas degré du reste est de degré supérieur au quotient. Si bien que l'égalité qui sert à définir la division suivant les puissances croissantes sera :

$$A = B.S + x^{s+1}T$$

le quotient étant le polynôme S de degré inférieur ou égal à s arbitrairement choisi et le reste étant le polynôme $x^{s+1}T$ dans lequel on a mis en facteur la puissance $(s + 1)^{\text{ème}}$ de x . On montre encore que les polynômes S et T sont complètement définis à partir de A , B et du nombre s . Trouver S et T s'appelle faire la *division suivant les puissances croissantes* de A par B .

L'opération ainsi définie ne suppose d'ailleurs nullement que le degré de A soit supérieur à celui de B . C'est ainsi que nous pouvons, par exemple, diviser 1 par $1 + 2x - x^2$ en nous arrêtant au quotient de degré 3 :

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 1 \\ -1 - 2x + x^2 \\ \hline -2x + x^2 \\ + 2x + 4x^2 - 2x^3 \\ \hline 5x^2 - 2x^3 \\ - 5x^2 - 10x^3 + 5x^4 \\ \hline -12x^3 + 5x^4 \\ + 12x^3 + 24x^4 - 12x^5 \\ \hline 29x^4 + 12x^5 \end{array} & \begin{array}{r} 1 + 2x - x^2 \\ \hline 1 - 2x + 5x^2 - 12x^3 \end{array} \end{array}$$

et écrire l'égalité :

$$1 = (1 + 2x - x^2)(1 - 2x + 5x^2 - 12x^3) + x^4(29 - 12x).$$

Cette opération suppose cependant que le terme de plus bas degré non nul dans le développement de B ait un degré au plus égal au terme de plus bas degré non nul dans le développement de A . C'est ainsi qu'il n'est pas possible de faire la division suivant les puissances croissantes de 1 par $x^2 + x^3$.

Comparaison des deux divisions. — Remarquons d'abord que si la division suivant les puissances décroissantes se fait exactement (le reste étant nul), il en sera de même de la division suivant les puissances croissantes et réciproquement.

Dans le cas où la division ne se fait pas exactement, quelle raison nous conduira à employer l'une plutôt que l'autre de ces deux méthodes ?

Lorsque x prend des valeurs numériques très petites l'égalité

$$\frac{A}{B} = S + x^{s+1} \frac{T}{B}$$

montre que S est le développement limité à l'ordre s de la fraction $\frac{A}{B}$ au voisinage de $x = 0$.

On verrait plus généralement que si A et B sont les développements limités à l'ordre s des fonctions f et g le polynôme S est le développement limité jusqu'à l'ordre S de la fraction $\frac{f}{g}$ (voir chap. IX, § 9).

Si maintenant nous considérons les grandes valeurs de x , il y aura intérêt à se servir de la division suivant les puissances décroissantes, mais en poursuivant l'opération et en introduisant les puissances négatives de x (rappelons que $x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, ...) selon le schéma suivant. Divisons par exemple $x^3 + 2$ par $x^2 + x + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 x^3 \qquad \qquad \qquad + 2 \\
 - x^3 - x^2 - x \\
 \hline
 \qquad - x^2 - x + 2 \\
 \qquad + x^2 + x + 1 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 3 \\
 \qquad - 3 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \\
 \hline
 \qquad \qquad - \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} \\
 \qquad \qquad + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3} \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad \frac{3}{x^3}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 x^2 + x + 1 \\
 \hline
 x - 1 + \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}
 \end{array}
 \end{array}$$

ce qui nous conduit à l'égalité :

$$x^3 + 2 = (x^2 + x + 1) \left(x - 1 + \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right) + \frac{3}{x^3}$$

dans laquelle le reste $\frac{3}{x^3}$ prend des valeurs d'autant plus petites que x est plus grand en valeur absolue.

Nous définissons ainsi une *division généralisée suivant les puissances décroissantes* qui permet d'obtenir les développements limités généralisés envisagés à la fin du chapitre IX.

6. — *Procédé de sommation.*

Soit à calculer la somme des carrés des nombres entiers de 1 à n :

$$S = 1 + 4 + 9 + \dots + n^2.$$

Cherchons à déterminer un polynôme $P(x)$ tel que :

$$P(x+1) - P(x) = x^2.$$

On voit immédiatement que l'on ne peut pas prendre pour $P(x)$ un polynôme du premier ou du second degré, les termes de plus haut degré se détruisant dans la différence $P(x+1) - P(x)$. Posons donc *a priori* $P(x)$ du troisième degré, soit :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

d'où :

$$\begin{aligned} P(x+1) &= a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d \\ &= ax^3 + x^2(3a+b) + x(3a+2b+c) + a+b+c+d \end{aligned}$$

et, en égalant $P(x+1) - P(x)$ à x^2 , on trouve :

$$3a = 1 \quad 3a + 2b = 0 \quad a + b + c = 0$$

ou :

$$a = \frac{1}{3} \quad b = -\frac{1}{2} \quad c = \frac{1}{6}$$

et par suite :

$$P(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} + d$$

d étant arbitraire, nous le prendrons égal à 0.

Ceci étant, additionnons les égalités :

$$\begin{array}{rcl} 1^2 & = & P(2) - P(1) \\ 2^2 & = & P(3) - P(2) \\ & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ (n-1)^2 & = & P(n) - P(n-1) \\ n^2 & = & P(n+1) - P(n) \\ \hline S & = & P(n+1) - P(1) \end{array}$$

car dans la sommation les termes tels $P(2), P(3), \dots, P(n-1), P(n)$ se trouvent alternativement avec le signe + et avec le signe -. D'où :

$$\begin{aligned} S &= \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{(n+1)[2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1]}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Plus généralement si on a à calculer une quantité :

$$S = A(1) + A(2) + \dots + A(n)$$

où $A(x)$ désigne un polynôme de degré q , on cherchera à déterminer un polynôme $P(x)$ de degré $q + 1$ satisfaisant à l'égalité :

$$P(x + 1) - P(x) = A(x)$$

et, en considérant les valeurs successives :

$$x = 1, 2, \dots, n - 1, n$$

on trouvera sans difficulté :

$$S = P(n + 1) - P(1).$$

On peut en particulier appliquer ce procédé pour trouver la somme d'une progression arithmétique.

EXERCICES

1° Déterminer les nombres a et b de façon que :

$$x^4 + 3x^2 + ax + b \text{ soit divisible par } x^2 - 2ax + 2.$$

$$R. \quad a = 0, \quad b = 2 \quad \text{et} \quad a = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad b = 3.$$

2° Reste de la division de $x^m + x + b$ par $x^2 - a^2$ (m entier supérieur à 1, a et b constantes quelconques).

$$R. \quad x + b + a^m \quad \text{ou} \quad (1 + a^{m-1})x + b$$

selon la parité de m .

***3°** Vérifier la relation :

$$(x^2 - 2x \cos a + 1) \cdot \sum_{q=1}^{q=n} x^{n-q} \sin qa = x^{n+1} \sin a - x \sin (n+1)a + \sin na.$$

***4°** Déterminer a, b, c de façon que l'expression :

$$\frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x - 1} + \frac{x^3 + bx^2 + cx + a}{x - 2} + \frac{x^3 + cx^2 + ax + b}{x - 3}$$

soit un polynôme :

$$R. \quad a = 4,2 \quad b = -0,9 \quad c = -4,3.$$

***5°** Un polynôme A divisé par le polynôme $B(x) = x^2 - 3x + 2$ donne comme reste $R = 2x - 1$ si la division est opérée suivant les puissances décroissantes et $S = ax^4 + bx^5$ si la division est opérée suivant les puissances croissantes. Déterminer les valeurs de a et b .

$$R. \quad a = 1,812 \ 5 \quad b = -0,812 \ 5.$$

****6°** Calculer la somme des cubes des n premiers entiers impairs :

$$1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3.$$

R. $2n^4 - n^2.$

****7°** Déterminer les nombres a, b, p, q tels que :

$$x^3 + 15x^2 + 3x + 5 = p(x-a)^3 + q(x-b)^3$$

et résoudre l'équation :

$$x^3 + 15x^2 + 3x + 5 = 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

R. $x = \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}}.$

***8°** Déterminer un polynôme P du 6^e degré tel que $(z-1)^3$ divise $1 + P(z)$ et z^4 divise $2 + P(z)$.

R. $P(z) = 10z^6 - 24z^5 + 15z^4 - 2.$

***9°** Déterminer p et q de façon que $z^2 + z + 1$ divise $z^{2m} + pz^m + q$ (m entier positif).

R. Si m est multiple de 3, $1 + p + q = 0$. Si m non multiple de 3, $p = q = 1$.

***10°** Condition pour que l'équation $z^4 - 2z^3 + \lambda z - 1 = 0$ ait une racine multiple.

R. $\lambda = 2 \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{-38 \pm 40i\sqrt{2}}{27}.$

****11°** Soit $P(x) = x_4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Quelle condition doivent vérifier a, b, c, d pour qu'il existe un polynôme Q et une constante r tels que :

$$P = Q^2 + r.$$

Application : résoudre l'équation $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$.

R. $a^3 - 4ab + 8c = 0, \quad 1, -2, \quad \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}).$

****12°** On appelle p_n le nombre de régions déterminées par n points sur une droite, q_n le nombre de régions déterminées par n droites dans un plan, r_n le nombre de régions déterminées par n plans dans l'espace.

Montrer que :

$$p_{n+1} - p_n = 1, \quad q_{n+1} - q_n = p_n, \quad r_{n+1} - r_n = q_n.$$

Valeurs de p_n, q_n, r_n ?

R. $p_n = n + 1, \quad q_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2), \quad r_n = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6).$

****13°** Si m et n désignent deux entiers positifs et $P(x)$ un polynôme quelconque, montrer que le polynôme $P^m + (1-P)^n - 1$ est divisible par le polynôme $P - P^2$.

CHAPITRE XIV

ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES

1. — *Racines d'un nombre complexe.*

n étant un entier strictement positif et z un certain nombre complexe, on se propose de trouver tous les nombres complexes u tels que $u^n = z$.

Si $z = 0$ l'équation $u^n = 0$ implique $u = 0$.

Si $z \neq 0$ écrivons $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$.

Posons $u = \rho (\cos \omega + i \sin \omega)$.

L'égalité $u^n = z$ s'écrit encore, d'après la formule de Moivre :

$$\rho^n (\cos n\omega + i \sin n\omega) = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

qui revient à écrire :

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\omega = \theta + 2k\pi \end{cases} \quad (\text{avec } k \in \mathbf{Z})$$

Comme $r > 0$ et comme ρ doit être ≥ 0 , il y a un et un seul nombre ρ qui répond à la question, c'est $\rho = \sqrt[n]{r}$.

Il y a une infinité de valeurs de ω répondant à la question, ce sont tous les nombres de la forme :

$$\omega = \frac{\theta}{n} + 2k \frac{\pi}{n}$$

où k parcourt l'ensemble $\mathbf{Z}$ de tous les entiers positifs, négatifs ou nuls. Soient :

$$\omega_1 = \frac{\theta}{n}, \quad \omega_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \omega_3 = \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n} \dots, \quad \omega_n = \frac{\theta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

On voit que les nombres complexes :

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[n]{r} (\cos \omega_1 + i \sin \omega_1), & u_2 &= \sqrt[n]{r} (\cos \omega_2 + i \sin \omega_2) \dots \\ &\dots u_n &= \sqrt[n]{r} (\cos \omega_n + i \sin \omega_n) \end{aligned}$$

répondent à la question et sont tous distincts si $r \neq 0$.

Par contre, k étant un entier quelconque, on peut associer au nombre :

$$\omega = \frac{\theta}{n} + 2k \frac{\pi}{n}$$

un entier i compris entre 1 et n tel que $\omega - \omega_i$ soit un multiple entier de 2π et par suite tel que $\sqrt[n]{r} (\cos \omega + i \sin \omega) = u_i$.

Les nombres $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont donc les seuls nombres complexes dont la puissance n -ième soit égale à z .

Ces nombres ont tous même module $\sqrt[n]{r}$; leurs images sont donc sur un même cercle de centre O . Leurs arguments ayant les valeurs :

$$\omega_1, \omega_1 + \frac{2\pi}{n}, \dots, \omega_1 + \frac{2(n-1)\pi}{n},$$

on voit que ces images sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés. Donc :

z étant un nombre complexe non nul et n un entier strictement positif, il y a exactement n nombres complexes dont la puissance n -ième est égale à z . Leurs images sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés centré à l'origine des coordonnées.

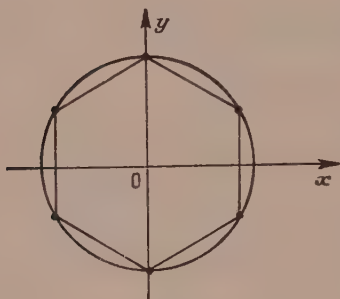


FIG. 1.

Ces nombres $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont encore appelés les racines n -ièmes du nombre complexe z . On désigne l'un quelconque de ces

nombres par $\sqrt[n]{z}$ ou $z^{\frac{1}{n}}$. Le symbole $\sqrt[n]{z}$ a donc en général n déterminations différentes. Dans le cas où z est un nombre réel positif, il ne faut pas confondre ce symbole multi-déterminé $\sqrt[n]{z}$ avec le symbole $\sqrt[n]{z}$ qui désigne le seul nombre réel positif dont la

puissance n -ième est égale à z (c'est la seule racine dont l'argument est nul) : les occasions de méprises sont d'ailleurs rares.

A titre d'exemple nous avons représenté sur la figure 1 les images des racines sixièmes de -1 . Ces racines sont les nombres de module 1 ayant pour arguments respectifs les nombres $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ et $\frac{11\pi}{6}$.

Racines carrées. — Si, en particulier, z est un nombre réel positif (donc d'argument nul), il aura deux racines carrées, l'une d'argument nul, l'autre d'argument π . Si z est un nombre réel négatif (donc d'argument π), il aura également deux racines carrées opposées, mais imaginaires pures (d'arguments $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$).

Notons que le calcul d'une racine carrée peut se faire sans utiliser la forme trigonométrique des nombres complexes. En écrivant :

$$u^2 = p + iq \quad (p \text{ et } q \in \mathbf{R}, \text{ mais } q \neq 0)$$

et en posant $u = x + iy$ (x et $y \in \mathbf{R}$), l'égalité précédente équivaut au système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = p \\ 2xy = q \end{cases}$$

d'où :

$$y = \frac{q}{2x} \quad \text{et} \quad x^2 - \frac{q^2}{4x^2} = p, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 4x^4 - 4px^2 - q^2 = 0.$$

Cette équation bicarrée n'admet qu'une solution positive en x^2 :

$$x^2 = \frac{p + \sqrt{p^2 + q^2}}{2}.$$

D'où deux valeurs opposées :

$$x_1 = \alpha \quad \text{et} \quad x_2 = -\alpha \quad \left(\alpha = \sqrt{\frac{p + \sqrt{p^2 + q^2}}{2}} \right)$$

et par suite :

$$y_1 = \frac{q}{2\alpha} \quad \text{et} \quad y_2 = -\frac{q}{2\alpha}.$$

Les deux valeurs de u sont :

$$u_1 = \alpha + \frac{p}{2\alpha} i \quad \text{et} \quad u_2 = -\alpha - \frac{q}{2\alpha} i.$$

2. — Équations algébriques.

Une équation algébrique de degré n à coefficients complexes est une équation de la forme :

$$(1) \quad a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

où n est un entier positif et les a_i sont des nombres complexes, a_0 n'étant pas nul.

Résoudre cette équation, c'est trouver tous les nombres complexes z qui satisfont à l'égalité précédente. Ces nombres sont encore dits les *racines* de l'équation (1). Dans le numéro précédent nous avons, aux notations près, résolu l'équation binôme :

$$z^n - a = 0.$$

Équation de degré 2. — Une équation du deuxième degré peut se résoudre comme dans le domaine réel, à la différence près que l'on peut toujours extraire la racine carrée d'un nombre complexe. Soit l'équation :

$$(2) \quad az^2 + bz + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

On peut l'écrire successivement :

$$\begin{aligned} a\left(z^2 + \frac{b}{a}z\right) + c &= 0 \\ a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} &= 0 \\ \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

et, en désignant par $\sqrt{b^2 - 4ac}$ l'une des deux racines carrées du nombre complexe $b^2 - 4ac$, on peut écrire :

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

On voit donc que l'équation (2) admet toujours au moins une racine et on admet en général deux (notées z_1 et z_2). Pour qu'elle n'en admette qu'une il faut et il suffit que $b^2 - 4ac = 0$. On dit alors, comme dans le cas réel, qu'elle admet une racine double. On compte celle-ci deux fois et on pose dans ce cas :

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Comme dans le domaine réel, on a toujours les égalités :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

On a le résultat très important suivant :

THÉORÈME 1 (THÉORÈME DE D'ALEMBERT). — *Toute équation algébrique de degré n à coefficients complexes, n étant un entier quelconque ≥ 1 :*

$$a_0 z^n + \dots + a_n = 0 \quad (\text{avec } a_0 \neq 0)$$

admet toujours au moins une racine complexe.

Nous admettrons ce théorème sans démonstration.

Soit $P(z) = a_0 z^n + \dots + a_n$ un polynôme de degré $n > 0$, donc tel que $a_0 \neq 0$. D'après le théorème de d'Alembert ce polynôme admet une racine α_1 . Il est donc divisible par $z - \alpha_1$ et on peut écrire :

$$P(z) = (z - \alpha_1) P_1(z)$$

où $P_1(z)$ est un polynôme de degré $n - 1$. Si $n - 1 > 0$ le même théorème de d'Alembert montre que $P_1(z)$ admet une racine α_2 . On peut donc écrire :

$$P_1(z) = (z - \alpha_2) P_2(z)$$

où $P_2(z)$ est un polynôme de degré $n - 2$ et ainsi de suite. On voit que l'on peut finalement écrire :

$$P(z) = (z - \alpha_1) (z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n) P_n(z)$$

où $P_n(z)$ est un polynôme de degré 0, c'est-à-dire une constante. Comme cette constante est le coefficient a_0 de z^n dans $P(z)$ on peut donc écrire :

$$P(z) = a_0(z - \alpha_1) (z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$$

et on peut énoncer le :

THÉORÈME 2. — *Tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1 peut se décomposer en un produit de facteurs du premier degré* ⁽¹⁾.

Dans la décomposition précédente les nombres α_i ne sont pas nécessairement tous distincts. En groupant ensemble les facteurs $(z - \alpha_i)$ qui sont les mêmes, on peut écrire une égalité de la forme :

$$(5) \quad P(z) = a_0(z - \beta_1)^{n_1}(z - \beta_2)^{n_2} \dots (z - \beta_p)^{n_p}$$

où les β_i sont des nombres deux à deux distincts tels que l'on ait les relations :

$$1 \leq n_i \quad (1 \leq i \leq p)$$

et :

$$n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$$

Le nombre n_i est l'ordre de multiplicité de la racine β_i . En comptant chaque racine autant de fois que l'indique sa multiplicité on peut dire que

tout polynôme de degré n admet exactement n racines.

Notons encore que, à l'ordre près des facteurs, le polynôme $P(z)$ ne se décompose que d'une seule manière sous la forme (5).

3. — Polynômes à coefficients réels.

THÉORÈME 3. — *Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels. S'il admet une racine non réelle α , il admet la racine conjuguée $\bar{\alpha}$ avec la même multiplicité.*

Soit α une racine imaginaire d'ordre m du polynôme $P(z)$ à coefficients réels. On peut écrire :

$$P(z) = (z - \alpha)^m Q(z)$$

⁽¹⁾ Il existe des méthodes numériques permettant lorsqu'on connaît les valeurs numériques de $a_0, a_1, \dots, a_n$ de calculer les valeurs numériques de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ avec la précision que l'on veut.

où $Q(z)$ est un polynôme (à coefficients complexes) tel que $Q(\alpha) \neq 0$. Désignons par $\bar{Q}(z)$ le polynôme dont les coefficients sont les nombres complexes conjugués des coefficients de $Q(z)$. On peut écrire :

$$\bar{P}(\bar{z}) = (\bar{z} - \bar{\alpha})^m \bar{Q}(z)$$

qui peut encore s'écrire, en changeant $\bar{z}$ en z :

$$\bar{P}(z) = (z - \bar{\alpha})^m \bar{Q}(z)$$

mais comme $P(z)$ est à coefficients réels; on a $\bar{P}(z) = P(z)$ et par suite :

$$P(z) = (z - \bar{\alpha})^m \bar{Q}(z).$$

Comme $\bar{Q}(\bar{\alpha}) = \overline{Q(\alpha)} \neq 0$, l'égalité précédente montre bien que $\bar{\alpha}$ est une racine d'ordre m de $P(z)$.

COROLLAIRE 1. — *Si le polynôme à coefficients réels $P(z)$ admet la racine non réelle α avec la multiplicité m , il est divisible par le polynôme (à coefficients réels) $(z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha})^m$.*

Comme α est non réel, on a $\alpha \neq \bar{\alpha}$ et $P(z)$, admettant chacun des deux nombres α et $\bar{\alpha}$ comme racines d'ordre m , est divisible par :

$$(z - \alpha)^m (z - \bar{\alpha})^m,$$

c'est-à-dire :

$$(z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha})^m.$$

COROLLAIRE 2. — *Un polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.*

Soit $P(z)$ un polynôme réel de degré n impair. Désignons par $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ toutes les racines distinctes de P ayant des parties imaginaires strictement positives et désignons par n_i la multiplicité de la racine β_i . Le théorème 4 montre que l'ensemble des racines non réelles de P est :

$$\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_p\}.$$

$\bar{\beta}_i$ étant multiple d'ordre n_i .

En outre P admet :

$$m = n - 2(n_1 + n_2 + \dots + n_p)$$

autres racines (distinctes ou confondues) qui sont nécessairement réelles. Comme n est impair, on a sûrement $m \geq 1$, d'où le corollaire.

4. — Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.

Soient $P(z) = a_0 z^n + \dots + a_n$ un polynôme de degré n , c'est-à-dire tel que $a_0 \neq 0$ et soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ l'ensemble de ses racines, chacune étant comptée

autant de fois que le veut sa multiplicité. Désignons par S_p ($1 \leq p \leq n$) la somme des divers produits p à p de ces n racines, c'est-à-dire posons :

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \\ S_2 &= \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots + \alpha_1 \alpha_n + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4 + \dots + \alpha_2 \alpha_n + \alpha_3 \alpha_4 + \dots + \alpha_{n-1} \alpha_n \\ S_3 &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n \\ &\vdots \\ S_n &= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n. \end{aligned}$$

L'égalité :

$$P(z) = a_0(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_n)$$

peut encore s'écrire :

$$P(z) = a_0(z^n - S_1 z^{n-1} + S_2 z^{n-2} - S_3 z^{n-3} + \dots + (-1)^n S_n)$$

et en égalant les deux expressions de $P(z)$ ainsi obtenues, on obtient les relations suivantes entre les coefficients et les racines du polynôme P :

$$S_1 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad S_2 = \frac{a_2}{a_0}, \quad \dots, \quad S_p = (-1)^p \frac{a_p}{a_0}, \quad \dots, \quad S_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

Dans le cas où $n = 2$, on retrouve les relations bien connues entre les coefficients et les racines d'un polynôme du second degré.

5. — *Fonctions rationnelles symétriques des racines d'un polynôme.*

Une fonction rationnelle $f(x_1, \dots, x_n)$ des variables $x_1, \dots, x_n$, c'est-à-dire un quotient de deux polynômes en $x_1, \dots, x_n$ sera dite *symétrique* si elle ne change pas lorsque l'on échange deux variables quelconques x_i et x_j .

Par exemple :

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$$

et

$$\frac{x_1^2}{x_2 x_3} + \frac{x_2^2}{x_3 x_1} + \frac{x_3^2}{x_1 x_2}$$

sont des fonctions rationnelles symétriques des trois variables x_1, x_2 et x_3 .

On peut montrer que si $f(x_1, \dots, x_n)$ est une telle fonction symétrique, elle s'exprime rationnellement en fonction des nouvelles variables :

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1 + \dots + x_n \\ S_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n \\ &\vdots \\ S_n &= x_1 x_2 \dots x_n. \end{aligned}$$

Il résulte donc du numéro précédent que si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les racines du polynôme $P(z) = a_0 z^n + \dots + a_n$, chacune étant comptée autant de fois que

le veut sa multiplicité, l'expression $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ peut s'exprimer rationnellement à partir des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ et sans que l'on ait à calculer les racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Sans établir le résultat général, montrons comment on procède sur des exemples :

EXEMPLE 1. — En désignant par a, b, c et d les racines du polynôme $3z^4 + 4z^3 - 1$, on demande de calculer l'expression :

$$\begin{aligned} \Sigma a^2 bc &= a^2 bc + a^2 cd + a^2 db + b^2 cd + b^2 da + b^2 ac \\ &\quad + c^2 da + c^2 ab + c^2 bd + d^2 ab + d^2 bc + d^2 ca. \end{aligned}$$

En remarquant que $a^2 bc$ est un terme du produit $S_1 S_3$ on est amené à développer ce dernier produit. Soit donc :

$$S_1 S_3 = \Sigma a \Sigma abc.$$

En effectuant ce produit, nous trouvons les termes tels que $a^2 bc$ chacun une fois, mais nous trouvons aussi le terme $abcd$ quatre fois, nous aurons donc :

$$S_1 S_3 = \Sigma a^2 bc + 4abcd$$

ou :

$$\Sigma a^2 bc = S_1 S_3 - 4S_4$$

or ici :

$$S_1 = -\frac{4}{3}, \quad S_3 = 0, \quad S_4 = -\frac{1}{3},$$

donc :

$$\Sigma a^2 bc = \frac{4}{3}.$$

EXEMPLE 2. — Cherchons à quelle condition les deux polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^2 + bx + c & (a \neq 0) \\ Q(x) &= a'x^2 + b'x + c' & (a' \neq 0) \end{aligned}$$

admettent une racine commune.

En désignant par α et β les racines de P , ceci revient à écrire :

$$Q(\alpha) Q(\beta) = 0$$

ou encore :

$$(a'\alpha^2 + b'\alpha + c')(a'\beta^2 + b'\beta + c') = 0$$

qui peut s'écrire :

$$a'^2 \alpha^2 \beta^2 + a'b'(\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2) + a'c'(\alpha^2 + \beta^2) + b'^2 \alpha \beta + c'b'(\alpha + \beta) + c'^2 = 0.$$

Mais :

$$\alpha^2 \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -\frac{bc}{a^2}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

et la condition précédente s'écrit, après avoir tout multiplié par a^2 :

$$a'^2 c^2 - a' b' bc + a' c' (b^2 - 2ac) + b'^2 ac - c' b' ab + c'^2 a^2 = 0$$

ou encore :

$$(ac' - a'c)^2 + (ab' - a'b)(b'c - c'b) = 0.$$

EXERCICES

1° Calculer, sans utiliser la forme trigonométrique, les racines quatrièmes de $24i - 7$.

R. $\pm (2 + i)$ et $\pm (1 - 2i)$.

2° Résoudre l'équation $z^2 - 2(2 + i)z + 7 + 4i = 0$.

R. $2 + 3i$ et $2 - i$.

3° Résoudre, avec la précision du 0,001, l'équation :

$$z^2 - z(4,466 + 2,211i) + 46,313 + 10,444i = 0.$$

R. $1,812 + 7,642i$ et $2,654 - 5,431i$.

***4°** Résoudre l'équation $z^6 - 2z^3 \cos \theta + 1 = 0$.

R. $\cos \frac{\theta + 2k\pi}{3} \pm i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{3}$. ($k = 0, 1, 2$)

***5°** Déterminer le polynôme P du 7^e degré sachant que :

$$P(1) = P\left(\frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{1}{3}\right) = P\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \quad P'(1) = 1 \quad P'\left(\frac{1}{2}\right) = P'\left(\frac{1}{3}\right) = P'\left(\frac{1}{4}\right) = 0.$$

R. $P(z) = 16z^7 + \dots$

****6°** Lieu de l'image du nombre complexe z quand $\left[\frac{z-1}{z+1}\right]^2$ est réel.

R. Une droite et un cercle.

****7°** Montrer que le polynôme $P(z) = z^4 + z + 1$ n'a pas de racine réelle. Former l'équation $\varphi(x) = 0$ vérifiée par $x = \Re(z)$ quand z vérifie $P(z) = 0$. Nombre de racines réelles de l'équation $\varphi(x) = 0$? Calculer ces racines et en déduire les racines du polynôme $P(z)$ à 0,01 près.

R. $0,73 \pm 0,94i$ et $-0,73 \pm 0,44i$.

*8° Utiliser la relation $|z|^2 = z\bar{z}$ pour vérifier la relation :

$$|z| + |z'| = \left| \frac{z+z'}{2} - u \right| + \left| \frac{z+z'}{2} + u \right|$$

où z et z' désignent deux nombres complexes et u une des racines carrées du produit zz' .

*9° Résoudre l'équation $z^4 + (1-i)z^3 + 2iz^2 + (1+i)z - 1 = 0$ en prenant comme inconnue auxiliaire $u = z + \frac{i}{z}$.

$$R. \quad \pm \frac{i-1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \frac{i-1}{2} (1 \pm \sqrt{3}).$$

*10° Déterminer λ de façon que l'équation $z^4 + z^3 - 2z^2 + \lambda z - 3 = 0$ ait deux racines opposées. Résoudre alors l'équation :

$$R. \quad \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = -3.$$

*11° Calculer $\operatorname{tg} 5\theta$ en fonction de $\operatorname{tg} \theta$ et en déduire l'égalité :

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5} \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{5} \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{5} = 5.$$

*12° Résoudre le système :

$$\begin{cases} x = 3y - 4y^3 \\ y = 3x - 4x^3. \end{cases}$$

R. 9 couples de solutions toutes réelles.

*13° Soit :

$$P(z) = 3z^4 - z^3 + z^2(2+3i) + z(1+2i) + 1+i.$$

Montrer que les polynômes $P(z)$ et $\bar{P}(z)$ ont deux racines communes. Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

$$R. \quad \frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3}, i, 1-i.$$

**14° On suppose a réel et positif. Montrer que les trois racines de l'équation :

$$z^3 + az^2 + 4z + a = 0$$

ont leurs parties réelles négatives.

**15° Déterminer a, b, c et m de façon que $P(z) = P(mz+1)$, $P(z)$ étant le polynôme $az^3 + bz^2 + cz$.

$$R. \quad m = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad P(z) = az(z-1)(z-m-1).$$

**16° On appelle a, b, c les racines de l'équation $z^3 + z^2 + q = 0$. Calculer :

$$s = \frac{a^3 + b^3}{c^2} + \frac{b^2 + c^2}{a^2} + \frac{c^2 + a^2}{b^2}.$$

$$R. \quad s = -\frac{2}{q} - 3.$$

CHAPITRE XV

FRACTIONS RATIONNELLES ET FONCTIONS RATIONNELLES

1. — Fractions rationnelles.

Les *fractions rationnelles* sont construites à partir des polynômes comme les nombres rationnels à partir des nombres entiers. De façon plus précise :

A partir de l'anneau intègre $K[x]$ des polynômes à coefficients dans le corps K [comme dans le chapitre XIII nous nous limiterons à $K = \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$] on définit le corps des fractions de $K[x]$ (voir Rappels, § 11). Les éléments de ce corps de fractions sont appelés les *fractions rationnelles (en x) à coefficients dans K* . Se donner une telle fraction rationnelle revient donc à se donner un couple de polynômes écrit sous la forme $\frac{P}{Q}$ (avec $Q \neq 0$).

Rappelons que l'égalité de deux fractions rationnelles $\frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$ est définie par

$$\frac{P}{Q} = \frac{R}{S} \quad \Longleftrightarrow \quad PS = RQ$$

et que l'addition et la multiplication sont définies par les égalités :

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} + \frac{R}{S} &= \frac{PS + QR}{QS} \\ \frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S} &= \frac{PR}{QS} \end{aligned}$$

Les fractions rationnelles forment un corps que l'on note souvent $K(x)$.

L'identification du polynôme P à la fraction rationnelle $\frac{P}{1}$ permet de considérer l'anneau de polynômes $K[x]$ comme un sous-anneau du corps des fractions rationnelles $K(x)$.

Racines et pôles. — Soit une fraction rationnelle $f = \frac{P}{Q}$. Supposons qu'un nombre a soit racine d'ordre $p \geq 0$ de P et d'ordre $q \geq 0$ de Q . La différence $p - q$ ne dépend que de f :

Soit en effet $f = \frac{R}{S}$, le nombre a étant racine d'ordre $r \geq 0$ de R et d'ordre $s \geq 0$ de S .

On a les égalités

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-a)^p P_1(x) & Q(x) &= (x-a)^q Q_1(x) \\ R(x) &= (x-a)^r R_1(x) & S(x) &= (x-a)^s S_1(x) \end{aligned}$$

où les polynômes P_1, Q_1, R_1, S_1 sont tels que

$$P_1(a) \neq 0 \quad Q_1(a) \neq 0 \quad R_1(a) \neq 0 \quad S_1(a) \neq 0$$

L'égalité $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$ permet d'écrire $PS = QR$, c'est-à-dire :

$$(x-a)^{p+s} P_1(x) S_1(x) = (x-a)^{q+r} Q_1(x) R_1(x)$$

La relation $P_1(a) S_1(a) \neq 0$ montre que a est racine d'ordre $p+s$ du membre de gauche, de même a est racine d'ordre $q+r$ du membre de droite, d'où $p+s = q+r$ et l'égalité annoncée

$$p - q = r - s$$

Nous distinguerons les trois cas suivants :

1° Lorsque $p - q > 0$ on peut écrire

$$f(x) = \frac{(x-a)^p P_1(x)}{(x-a)^q Q_1(x)} = \frac{(x-a)^{p-q} P_1(x)}{Q_1(x)} \quad \text{avec} \quad P_1(a) \neq 0 \quad \text{et} \quad Q_1(a) \neq 0$$

Le nombre a est dit *racine d'ordre* $p - q$ de f .

2° Lorsque $p - q < 0$ on peut écrire de même

$$f(x) = \frac{P_1(x)}{(x-a)^{q-p} Q_1(x)} \quad \text{avec} \quad P_1(a) \neq 0 \quad \text{et} \quad Q_1(a) \neq 0$$

Le nombre a est dit *pôle de* f d'ordre $q - p$.

3° Lorsque $p - q = 0$, ce qui est le cas en particulier lorsque $p = q = 0$, c'est-à-dire lorsque a n'est pas racine des polynômes P et Q , on peut écrire

$$f = \frac{P_1}{Q_1} \quad \text{avec} \quad P_1(a) \neq 0 \quad Q_1(a) \neq 0$$

Le nombre a n'est ni pôle ni racine de f (on dit parfois que a est une racine ou un pôle d'ordre 0).

EXEMPLE 1. — Soient $K = \mathbf{R}$ et $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - 2}$. Le dénominateur Q s'annule pour $x = 1$.

$$Q(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 2) \quad (\text{et } q = 1)$$

Le nombre 1 est racine de P

$$P(x) = (x - 1)(x + 2) \quad (\text{et } p = 1)$$

ce nombre $x = 1$ n'est donc ni racine, ni pôle de f (car $p - q = 0$). On a :

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2}$$

Le dénominateur $x^2 + 2x + 2$ n'a pas de racine réelle. Ainsi la fraction f n'a pas de pôle dans le domaine réel.

Dans le domaine complexe ($K = \mathbf{C}$) la fraction f a deux pôles *simples* (c'est-à-dire d'ordre 1) : $x = -1 + i$ et $x = -1 - i$ qui annulent le dénominateur sans annuler le numérateur.

Partie principale. — Soit a un pôle d'ordre n ($n \geq 1$) de la fraction rationnelle f , on peut donc écrire

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x - a)^n Q(x)} \quad \text{avec} \quad P(a) \neq 0 \quad \text{et} \quad Q(a) \neq 0$$

Le nombre $A_n = \frac{P(a)}{Q(a)}$ est donc défini et non nul.

Mais le polynôme $P - A_n Q$ s'annule alors pour $x = a$. Il est donc divisible par $x - a$. Nommons R le quotient

$$P - A_n Q = (x - a) R$$

D'où

$$f(x) = \frac{A_n}{(x - a)^n} + \frac{R}{(x - a)^{n-1} Q} = \frac{A_n}{(x - a)^n} + g(x)$$

Le nombre a n'est pas nécessairement un pôle de g car R peut être divisible par $(x - a)^{n-1}$.

Cependant, si a est un pôle de g , ce pôle est d'ordre au plus égal à $(n - 1)$ et l'on peut recommencer pour ce pôle de g le calcul initialement fait à partir de f .

En répétant ce procédé on aboutit finalement à une égalité de la forme

$$(1) \quad f(x) = \frac{P}{(x - a)^n Q} = \frac{A_n}{(x - a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x - a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_1}{x - a} + \frac{S(x)}{Q(x)} = F_a + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

où la fraction rationnelle $\frac{S}{Q} = f - F_a$ n'a plus de pôle en a .

La fraction rationnelle F_a est dite la *partie principale* de f relative au pôle a .

Les termes $\frac{A_k}{(x - a)^k}$ sont dits les *éléments simples* de pôle a .

Une égalité de la forme :

$$f(x) = \frac{B_p}{(x-a)^p} + \dots + \frac{B_1}{x-a} + f_1(x) \quad (\text{avec } B_p \neq 0)$$

où la fraction rationnelle f_1 n'a plus de pôle en a , implique $p = n$ car a est pôle d'ordre p du membre de droite; après multiplication par $(x-a)^n Q(x)$:

$$P(x) = B_n Q(x) + (x-a) B_{n-1} Q(x) + \dots + f_1(x-a)^n Q(x)$$

d'où

$$P(a) = B_n Q(a) \quad \text{et} \quad B_n = A_n$$

on obtient successivement de la même façon :

$$B_{n-1} = A_{n-1}, \dots, B_1 = A_1$$

Ainsi

La partie principale F_a est définie d'une façon unique par la condition d'être de la forme :

$$\frac{B_p}{(x-a)^p} + \frac{B_{p-1}}{(x-a)^{p-1}} + \dots + \frac{B_1}{x-a}$$

les B_k étant des constantes telles que $f - F_a$ ne possède plus de pôle en a .

Calcul de la partie principale. — La méthode utilisée ci-dessus pour obtenir la partie principale F_a fournit immédiatement le coefficient A_n mais nécessite des calculs plus longs pour obtenir les autres coefficients A_i .

Indiquons un procédé systématique de détermination de ces coefficients.

En posant $t = x - a$ l'égalité (1) s'écrit

$$\frac{P(t+a)}{t^n Q(t+a)} = \frac{A_n}{t^n} + \dots + \frac{A_1}{t} + \frac{S(t+a)}{Q(t+a)}$$

Soit

$$P(t+a) = (A_n + A_{n-1}t + \dots + A_1 t^{n-1}) Q(t+a) + t^n S(t+a)$$

On reconnaît dans cette égalité la division de $P(t+a)$ par $Q(t+a)$ suivant les puissances croissantes de t arrêtée à l'ordre $n-1$. Une telle division fournit donc les coefficients A_i .

EXEMPLE 2. — Soit à chercher la partie principale de la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{x^8}{(x-1)^3 (x^2-2x+2)^2}$$

relative au pôle $a = 1$, d'ordre $n = 3$.

Posons $x - 1 = t$. On a alors :

$$\begin{aligned} x^8 &= (1+t)^8 = 1 + 8t + 28t^2 + \dots \\ (x^2 - 2x + 2)^2 &= (1+t^2)^2 = 1 + 2t^2 + \dots \end{aligned}$$

et, en faisant la division suivant les puissances croissantes :

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 1 + 8t + 28t^2 + \dots \\ - 1 \qquad - 2t^2 + \dots \\ \hline 8t + 26t^2 + \dots \\ - 8t \qquad + \dots \\ \hline 26t^2 + \dots \end{array} & \begin{array}{l} 1 + 2t^2 + \dots \\ \hline 1 + 8t + 26t^2 + \dots \end{array} \end{array}$$

les termes non écrits étant inutiles pour la seule détermination de la partie principale (c'est-à-dire tant que l'on ne se préoccupe pas de la forme du polynôme S).

La partie principale de $f(x)$ relative au pôle 1 est donc :

$$F_1(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{26}{(x-1)}.$$

2. — Décomposition en éléments simples.

Dans ce qui suit nous supposons que le corps K est le corps $\mathbf{C}$. Pour retenir l'attention sur ce point nous désignerons par $f(z)$ une fraction rationnelle.

Ceci posé, soient $a_1, \dots, a_q$ les pôles distincts de $f(z)$ et soit $F_i(z)$ la partie principale de $f(z)$ relativement au pôle a_i ($1 \leq i \leq q$). Il résulte de ce qui précède que la fraction rationnelle $u = f - F_1 - \dots - F_q$ n'a plus de pôle. Son dénominateur n'ayant pas de racine est une constante et par suite u est un polynôme qui est dit la *partie entière* de la fraction rationnelle f .

Chaque F_i est la somme des éléments simples de $f(z)$ relatifs au pôle a_i . La relation :

$$f(z) = F_1(z) + \dots + F_q(z) + u(z)$$

et le théorème précédent montrent donc que

la fraction rationnelle $f(z)$ se décompose d'une manière et d'une seule en une somme d'éléments simples et d'un polynôme.

Le polynôme u n'est d'ailleurs pas autre chose que le quotient suivant les puissances décroissantes du numérateur P par le dénominateur Q . En effet la relation :

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = F_1(z) + \dots + F_q(z) + u(z)$$

s'écrit :

$$(2) \quad P(z) = [F_1(z) + \dots + F_q(z)] Q(z) + u(z) Q(z)$$

mais si $\frac{k}{(z-a)^p}$ est un élément simple de $f(z)$, on voit que $\frac{k}{(z-a)^p} Q(z)$ est un polynôme dont le degré, égal au degré de Q moins p , est strictement inférieur au degré de Q . Par suite $[F_1(z) + \dots + F_q(z)] Q(z)$ est un polynôme dont le degré est strictement inférieur à celui de Q et la relation (2) montre alors que $u(z)$ est bien le quotient annoncé.

Lorsqu'on veut décomposer complètement la fraction :

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

il est préférable de commencer par faire la division suivant les puissances décroissantes de P par Q , soit :

$$P(z) = u(z) Q(z) + V(z) \quad \text{avec} \quad d^0 V(z) < d^0 Q(z).$$

On a alors :

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = u(z) + \frac{V(z)}{Q(z)}$$

et on est ramené à décomposer la fraction rationnelle $g(z) = \frac{V(z)}{Q(z)}$ qui est alors égale à la somme de ses éléments simples.

De toute façon on ne peut effectuer cette décomposition que si on sait décomposer $Q(z)$ en produit de facteurs du premier degré.

On peut alors écrire *a priori* la décomposition de $g(z)$ en considérant comme des inconnues les numérateurs A_{ij} des éléments simples, soit :

$$(3) \quad \frac{V(z)}{Q(z)} = \sum_{i,j} \frac{A_{ij}}{(z - a_i)^j}.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par $Q(z)$ on peut écrire :

$$(4) \quad V(z) = \sum_{i,j} \frac{A_{ij}}{(z - a_i)^j} Q(z)$$

on détermine alors les coefficients A_{ij} en écrivant que le polynôme écrit dans le membre de droite de l'égalité précédente est effectivement égal au polynôme $V(z)$. Cette méthode est dite *méthode des coefficients indéterminés*.

EXEMPLE 3. — Soit à décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{z(z - 1)^2}.$$

Calculons d'abord sa partie entière. Comme $z(z - 1)^2 = z^3 - 2z^2 + z$, on peut écrire la division :

$$z^4 + 1 = (z^3 - 2z^2 + z)(z + 2) + 3z^2 - 2z + 1.$$

La partie entière de $f(z)$ est donc $z + 2$ et on peut écrire :

$$f(z) = z + 2 + \frac{3z^2 - 2z + 1}{z(z - 1)^2}$$

avec :

$$\frac{3z^2 - 2z + 1}{z(z - 1)^2} = \frac{A}{(z - 1)^2} + \frac{B}{z - 1} + \frac{C}{z}.$$

Tout revient à déterminer A , B et C .

L'égalité précédente s'écrit encore :

$$3z^2 - 2z + 1 = Az + B(z - 1)z + C(z - 1)^2$$

ou :

$$3z^2 - 2z + 1 = (C + B)z^2 + (A - B - 2C)z + C.$$

Les deux polynômes que nous venons d'écrire sont égaux si et seulement si :

$$\begin{cases} C + B = 3 \\ A - B - 2C = -2 \\ C = 1 \end{cases}$$

que nous devons considérer comme trois équations en A , B et C .

En portant la valeur $C = 1$ dans la première équation on a $B = 2$ et en portant ces valeurs de B et de C dans la deuxième équation on en tire $A = 2$. D'où la décomposition cherchée :

$$f(z) = z + 2 + \frac{2}{(z - 1)^2} + \frac{2}{z - 1} + \frac{1}{z}.$$

Certaines remarques peuvent aider dans la recherche des coefficients A_{ij} . C'est ainsi que si $f(z)$ est à coefficients réels, on a $f(z) = \overline{f(z)}$ et à tout élément simple $\frac{D}{(z - a)^p}$ correspond un élément simple $\frac{\overline{D}}{(z - \bar{a})^p}$.

Si $f(z)$ est une fonction paire (c'est-à-dire si $f(-z) = f(z)$), à l'élément simple $\frac{E}{(z - a)^p}$ correspond un élément simple $\frac{(-1)^p E}{(z + a)^p}$. De même, si $f(z)$ est une fonction impaire, c'est-à-dire si $f(-z) = -f(z)$, à l'élément simple $\frac{F}{(z - a)^p}$ correspond un élément simple $\frac{(-1)^{p+1} F}{(z + a)^p}$.

EXEMPLE 4. — Soit à décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$f(z) = \frac{2z}{(z^2 + 1)^2}.$$

Le degré du numérateur étant strictement inférieur à celui du dénominateur la partie entière de $f(z)$ est nulle et on peut écrire :

$$\frac{2z}{(z^2 + 1)^2} = \frac{A}{(z + i)^2} + \frac{B}{z + i} + \frac{C}{(z - i)^2} + \frac{D}{z - i}.$$

On va d'abord utiliser le fait que $f(z)$ est à coefficients réels ou $\bar{f}(z) = f(z)$, donc :

$$\frac{2z}{(z^2 + 1)^2} = \frac{\bar{A}}{(z - i)^2} + \frac{B}{z - i} + \frac{\bar{C}}{(z + i)^2} + \frac{\bar{D}}{z + i}.$$

L'unicité de la décomposition de $f(z)$ permet alors d'écrire les égalités annoncées :

$$A = \bar{C} \quad \text{et} \quad B = \bar{D}.$$

Utilisons maintenant le fait que $f(z)$ est une fonction impaire. On a :

$$f(z) = -f(-z)$$

soit :

$$\frac{2z}{(z^2 + 1)^2} = \frac{-A}{(z - i)^2} + \frac{B}{z - i} + \frac{-C}{(z + i)^2} + \frac{D}{z + i}.$$

L'unicité de la décomposition de $f(z)$ entraîne les égalités annoncées

$$C = -A \quad \text{et} \quad B = D.$$

Soient :

$$A = a + bi \quad \text{et} \quad B = a' + b'i.$$

On a donc :

$$C = -a - bi \quad \text{et} \quad D = a' + b'i.$$

Les égalités :

$$A = \bar{C} \quad \text{et} \quad B = \bar{D}$$

s'écrivent :

$$a + bi = -a + bi \quad \text{et} \quad a' + b'i = a' - b'i.$$

On a donc :

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b' = 0.$$

Par suite $A = bi$ est imaginaire pur et $B = a'$ est réel.

On peut alors écrire :

$$\frac{2z}{(z^2 + 1)^2} = ib \left[\frac{1}{(z + i)^2} - \frac{1}{(z - i)^2} \right] + a' \left[\frac{1}{z + i} + \frac{1}{z - i} \right]$$

ou :

$$\frac{2z}{(z^2 + 1)^2} = \frac{4bz}{(z^2 + 1)^2} + \frac{2a'z}{z^2 + 1}.$$

On voit alors immédiatement que $a' = 0$ et $b = \frac{1}{2}$. D'où la décomposition cherchée :

$$\frac{2z}{(z^2 + 1)^2} = \frac{i}{2(z + i)^2} - \frac{i}{2(z - i)^2}.$$

REMARQUE. — Si l'égalité (4) est trop longue à écrire, on peut se servir de l'égalité (3) pour déterminer les A_{ij} en écrivant qu'elle est vérifiée quand on remplace z par des valeurs arbitrairement choisies mais suffisamment simples pour l'exécution des calculs.

EXEMPLE 5. — Soit à décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$f(z) = \frac{z^8}{(z-1)^3(z^2-2z+2)^2}$$

Le dénominateur est un polynôme de degré 7, le numérateur un polynôme de degré 8, donc la partie entière est un polynôme du premier degré $Az + B$.

D'autre part le dénominateur admet 1 pour racine triple et les deux nombres

$$1 \pm i$$

comme racines doubles.

La décomposition en éléments simples est donc de la forme

$$f(z) = Az + B + \frac{C}{(z-1)^3} + \frac{D}{(z-1)^2} + \frac{E}{z-1} + \frac{F}{(z-1-i)^2} + \frac{G}{z-1-i} + \frac{F'}{(z-1+i)^2} + \frac{G'}{z-1+i}$$

Nous savons d'autre part que les coefficients inconnus A , B , C , D et E sont réels, F et F' sont imaginaires conjugués ainsi que G et G' .

En développant :

$$(z-1)^3(z^2-2z+2)^2 = (z^3-3z^2+\dots)(z^4-4z^3+\dots) = z^7-7z^6+\dots$$

les termes non écrits étant inutiles, il est aisé de trouver le quotient de la division de z^8 par $z^7-7z^6+\dots$:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} z^8 \\ -z^8 + 7z^7 + \dots \\ \hline 7z^7 + \dots \\ -7z^7 + \dots \\ \hline 0 + \dots \end{array} & \begin{array}{r} z^7 - 7z^6 + \dots \\ \hline z + 7 \end{array} \end{array}$$

ce quotient est $z + 7$. Donc $A = 1$ et $B = 7$.

Dans l'exemple 2, nous avons calculé C , D et E . Nous avons trouvé

$$C = 1, \quad D = 8 \quad \text{et} \quad E = 26$$

Pour calculer F , appliquons la méthode indiquée dans la définition d'une partie principale, ce qui revient à rendre entier en « chassant » les dénominateurs et à faire

$$z = 1 + i$$

Nous obtenons :

$$z^8 = F(z-1)^3 (z-1+i)^2 + \dots$$

les termes non écrits ne nous intéressant pas, car ils vont s'annuler pour :

$$z = 1 + i.$$

On obtient alors :

$$F = \frac{(1+i)^8}{i^3(2i)^2}$$

Simplifions cette expression de F en remarquant que

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

donc que

$$(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8 \left(\cos \frac{8\pi}{4} + i \sin \frac{8\pi}{4} \right) = 16$$

et

$$F = \frac{16}{4i^5} = -4i$$

donc

$$F' = \bar{F} = 4i$$

Pour calculer G et G' donnons à z les valeurs particulières $z = 0$ et $z = 2$, ce qui donne, réductions faites :

$$\frac{G}{1+i} + \frac{G'}{1-i} = -16$$

et

$$\frac{G}{1-i} + \frac{G'}{1+i} = 16$$

d'où

$$G = -16i \quad \text{et} \quad G' = 16i.$$

D'où la décomposition cherchée :

$$\begin{aligned} \frac{z^8}{(z-1)^3 (z^2-2z+2)^2} &= z + 7 + \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{8}{(z-1)^2} + \frac{26}{z-1} \\ &\quad - \frac{4i}{(z-1-i)^2} + \frac{4i}{(z-1+i)^2} - \frac{16i}{z-1-i} + \frac{16i}{z-1+i} \end{aligned}$$

REMARQUE. — La fraction rationnelle $f(z)$ étant à coefficients réels, on peut souhaiter une décomposition ne faisant intervenir que des coefficients réels. Ceci s'obtient aisément en additionnant deux à deux les éléments simples dont les coefficients sont imaginaires conjugués. C'est ainsi que les égalités :

$$-\frac{4i}{(z-1-i)^2} + \frac{4i}{(z-1+i)^2} = \frac{16(z-1)}{(z^2-2z+2)^2}$$

et

$$-\frac{16i}{z-1-i} + \frac{16i}{z-1+i} = \frac{32}{z^2-2z+2}$$

permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{z^8}{(z-1)^3(z^2-2z+2)^2} &= z+7 + \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{8}{(z-1)^2} + \frac{26}{z-1} \\ &\quad + \frac{16(z-1)}{(z^2-2z+2)^2} + \frac{32}{z^2-2z+2} \end{aligned}$$

3. — Fonctions rationnelles.

A tout couple (P, Q) de polynômes de $K[x]$ (avec $Q \neq 0$) on peut associer la fonction f définie, pour tout élément de K qui n'annule pas Q , par

$$f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

La fonction f est dite une *fonction rationnelle* de numérateur P et de dénominateur Q .

Il ne faut pas confondre les deux notions de fonction rationnelle et de fraction rationnelle.

Soit en effet la fonction rationnelle f_1 associée au couple (P_1, Q_1)

$$f_1 : x \mapsto \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

La fonction f_1 est définie pour les valeurs de x qui n'annulent pas Q_1 .

Il s'ensuit que l'égalité des fractions rationnelles $\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}$ n'entraîne pas l'égalité des fonctions rationnelles associées f et f_1 car ces deux fonctions n'ont pas nécessairement le même ensemble de définition.

Cependant pour toute valeur de x qui n'annule ni Q ni Q_1 on a $f(x) = f_1(x)$ car l'égalité $PQ_1 = QP_1$ entraîne alors $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$.

EXEMPLE 6. — La fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{x^3}{x}$ n'est pas définie pour $x = 0$ et ne s'identifie pas à la fonction $x \mapsto x^2$. On a cependant l'égalité des fractions rationnelles :

$$\frac{x^3}{x} = \frac{x^2}{1} = x^2$$

EXERCICES

1° Décomposer en éléments simples :

$$\frac{z^4 - 1}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

R. $z + 6 + \frac{1}{z-1} - \frac{17}{z-2} + \frac{41}{z-3}.$

*2° Décomposer en éléments simples :

$$\frac{z^6}{(z^2+1)^2(z+1)^2}.$$

R. $1 + \frac{1}{4(z+1)^2} - \frac{1}{z+1} - \frac{i}{8(z-i)^2} + \frac{i-4}{8(z-i)} + \frac{i}{8(z+i)^2} - \frac{i+4}{8(z+i)}.$

*3° Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients réels ayant toutes ses racines réelles. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{P'}{P}$. En déduire que l'équation $PP'' - P'^2 = 0$ n'a pas de racines réelles.

*4° Décomposer en éléments simples :

$$\frac{z^{10} + 1}{z^2(z^2 - 1)^3}.$$

R. $-\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4(z-1)^3} + \frac{3}{8(z-1)^2} + \frac{25}{8(z-1)} - \frac{1}{4(z+1)^3} + \frac{3}{8(z+1)^2} - \frac{25}{8(z+1)} + z^2 + 3.$

**5° On désigne par P un polynôme du 3^e degré, par P' sa dérivée, par a, b, c les racines de P , par u et v les racines de P' . Montrer que :

$$\frac{1}{a-u} + \frac{1}{b-u} + \frac{1}{c-u} = 0.$$

En déduire que les images U et V des nombres u et v sont à l'intérieur du triangle ABC formés par les images des nombres a, b, c .

**6° Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$. Utiliser la décomposition en éléments simples de la fraction $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z+1)^2}$ pour calculer la quantité :

$$s = f(a) + f(b) + f(c).$$

R. $s = -\frac{5}{17}.$

CHAPITRE XVI

FONCTIONS A VALEURS COMPLEXES

1. — Fonctions complexes d'une variable complexe.

On définit sans difficulté la notion de *fonction complexe d'une variable complexe*. Soit E une partie de $\mathbf{C}$. Une fonction f , à valeurs complexes, définie sur E , fait correspondre à tout nombre z appartenant à E un nombre complexe $f(z)$, ce que l'on note

$$f : E \rightarrow \mathbf{C} \quad \text{et} \quad z \mapsto f(z)$$

La distance de deux nombres complexes u, v étant le nombre positif

$$d(u, v) = d(v, u) = |u - v|$$

la fonction f définie dans un voisinage de z_0 est dite *continue en z_0* si à tout nombre positif ε , on peut associer un nombre positif η tel que

$$d(z, z_0) < \eta \quad \text{entraîne} \quad d(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$$

on dit aussi que $f(z)$ *tend vers $f(z_0)$* lorsque z *tend vers z_0* , ou

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

On a des résultats sur les limites et les fonctions continues qui sont analogues à ceux déjà obtenus dans le cas d'une fonction réelle d'une variable réelle et qui se démontrent de la même façon. C'est ainsi que si $f(z)$ et $g(z)$ sont deux fonctions continues pour la valeur z_0 de la variable, il en est de même de leur somme $f(z) + g(z)$, de leur produit $f(z)g(z)$ et, dans le cas où $g(z_0) \neq 0$, du quotient $\frac{f(z)}{g(z)}$.

On voit immédiatement que toute fonction constante est continue et que la fonction $f(z) = z$ est continue.

On en déduit que tout polynôme, c'est-à-dire toute fonction de la forme :

$$z \mapsto a_0 z^n + \dots + a_n$$

est continue, et par suite qu'une fonction rationnelle :

$$z \mapsto \frac{a_0 z^n + \dots + a_n}{b_0 z^m + \dots + b_m}$$

est continue pour toute valeur z_0 qui n'annule pas le dénominateur.

Par contre l'introduction de la notion de dérivée nécessite des précautions toutes particulières et se trouve la source d'une théorie nouvelle que nous n'aborderons pas ici.

2. — Fonctions complexes d'une variable réelle.

Soit E une partie de $\mathbf{R}$. Une fonction f , à valeurs complexes, définie sur E fait correspondre à tout nombre x appartenant à E un nombre complexe $f(x)$, ce que l'on note

$$f : E \rightarrow \mathbf{C} \quad \text{et} \quad x \mapsto f(x)$$

En posant :

$$f_1(x) = \Re(f(x)) \quad \text{et} \quad f_2(x) = \Im(f(x)),$$

on voit que la donnée de la fonction complexe $f(x)$ équivaut à la donnée simultanée des deux fonctions réelles $f_1(x)$ et $f_2(x)$ de la variable réelle x .

La théorie des fonctions réelles se généralise immédiatement à ce cas.

On définit sans peine les notions de limite, limite à droite et limite à gauche de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 . On a le résultat suivant :

Pour que la fonction f tende vers la limite $a + bi$ lorsque x tend vers x_0 il faut et il suffit que lorsque x tend vers x_0 :

1° $f_1(x)$ tende vers a .

2° $f_2(x)$ tende vers b .

En effet, en posant $\alpha = a + ib$, on a l'égalité :

$$|f(x) - \alpha|^2 = |f_1(x) - a|^2 + |f_2(x) - b|^2$$

qui montre que pour que $f(x) - \alpha$ tende vers 0, il faut et il suffit que les deux quantités $f_1(x) - a$ et $f_2(x) - b$ tendent toutes deux vers 0.

On aurait un résultat analogue pour les limites à droite et les limites à gauche.

Dire que la fonction $f(x)$ est continue pour la valeur x_0 de la variable revient à dire que les fonctions f_1 et f_2 sont continues pour cette valeur.

La dérivée $f'(x_0)$ de $f(x)$ pour $x = x_0$ est, par définition, la limite, si elle existe, de la quantité $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

Pour que cette dérivée existe, il faut et il suffit que chacune des deux fonctions f_1 et f_2 admette une dérivée pour $x = x_0$. On a alors :

$$f'(x_0) = f'_1(x_0) + if'_2(x_0)$$

Plus généralement :

$$f^{(n)}(x_0) = f_1^{(n)}(x_0) + if_2^{(n)}(x_0).$$

Pour que la fonction $f(x)$ soit constante dans un intervalle (a, b) , il faut et il suffit qu'il en soit ainsi des deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, donc que l'on ait dans (a, b) les deux égalités $f_1'(x) = f_2'(x) = 0$, ou encore $f'(x) = 0$.

Pour que la fonction complexe $f(x)$ de la variable réelle x reste constante dans l'intervalle (a, b) , il faut et il suffit que sa dérivée $f'(x)$ soit nulle dans cet intervalle.

On a les mêmes règles que dans le cas des fonctions réelles pour calculer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une fonction de fonction (ce dernier cas étant celui où f apparaît comme une fonction de la variable réelle y elle-même fonction de la variable réelle x).

En particulier tout polynôme $a_0 x^n + \dots + a_n$ (les a_i étant des nombres complexes) est une fonction continue dont la dérivée est $na_0 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}$. On calculerait sans difficulté la dérivée d'une fraction rationnelle. La notion de différentielle se définit sans peine.

Une primitive de $f(x)$ est une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$. Pour que $F(x)$ soit une primitive de $f(x)$, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme $F_1(x) + iF_2(x)$ où F_1 et F_2 sont des primitives respectives de f_1 et de f_2 . Une telle primitive est définie à une constante (complexe) additive près.

Si $f(x)$ est continue sur (a, b) , on définit sans peine l'intégrale définie :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + i \int_a^b f_2(x) dx$$

et on remarque que $\int_a^x f(t) dt$ est une primitive de $f(x)$.

3. — Fonction e^{ax} .

Considérons en particulier la fonction :

$$f(x) = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$$

où a et b sont des constantes réelles et x une variable réelle. Un calcul simple donne :

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^{ax} (\cos bx + i \sin bx) + be^{ax} (-\sin bx + i \cos bx) \\ &= (a + ib) e^{ax} (\cos bx + i \sin bx). \end{aligned}$$

Nous constatons donc que la fonction $f(x)$ vérifie les conditions :

$$(1) \quad f'(x) = (a + ib)f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Si une deuxième fonction $g(x)$ vérifiait les mêmes conditions c'est-à-dire si :

$$g'(x) = (a + ib)g(x) \quad \text{et} \quad g(0) = 1$$

on en déduirait :

$$f'g - g'f = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{g}{f}\right)' = 0$$

donc $\frac{g}{f}$ serait une constante; en donnant à la variable la valeur 0, on constate que cette constante est égale à 1, donc $g = f$. La fonction $e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$ est la seule à satisfaire aux conditions (1) de même que la fonction e^{ax} est la seule à satisfaire aux conditions :

$$f'(x) = a e^{ax} \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Pour cette raison, que nous relierons ultérieurement à une théorie plus générale, nous conviendrons de désigner par e^{ax} (ou par $\exp ax$) la fonction :

$$x \mapsto e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$$

en ayant posé $\alpha = a + ib$.

La fonction ainsi définie vérifie la relation :

$$\frac{d}{dx} (e^{ax}) = \alpha e^{ax}$$

et par suite on en déduit, que α soit réel ou complexe, mais non nul :

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{\alpha} e^{ax} + C^{\text{te}}.$$

4. — *Exponentielle complexe.*

De ce qui précède, il résultera en particulier, en donnant à x la valeur 1 :

$$e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Ceci étant, si z désigne un nombre complexe et si l'on pose :

$$z = a + ib \quad \text{avec} \quad a = \Re(z), \quad b = \Im(z),$$

nous pourrions définir l'*exponentielle du nombre complexe z* par :

$$e^z = e^a (\cos b + i \sin b).$$

ou

$$e^z = e^{\Re(z)} [\cos \Im(z) + i \sin \Im(z)]$$

c'est-à-dire que e^z est le nombre complexe de module $e^{\Re(z)}$ et d'argument $\Im(z)$.

On vérifie immédiatement que si b est nul, on retrouve l'exponentielle réelle. D'autre part, si z' est le nombre complexe $a' + ib'$, on aura :

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^{z'} &= e^a (\cos b + i \sin b) \cdot e^{a'} (\cos b' + i \sin b') \\ &= e^{a+a'} [\cos (b + b') + i \sin (b + b')] \\ &= e^{z+z'}. \end{aligned}$$

La fonction exponentielle complexe possède la propriété fondamentale de l'exponentielle réelle concernant l'exponentielle d'une somme.

De l'égalité

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'},$$

on conclut sans peine que si n est un entier positif, négatif ou nul, on a :

$$(e^z)^n = e^{nz}.$$

Il résulte de ce qui précède que le nombre complexe z de module ρ et d'argument θ peut s'écrire :

$$z = \rho e^{i\theta}$$

ce qui est une forme souvent plus maniable que la forme $\rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ d'abord à cause de sa concision et ensuite parce qu'elle met en évidence la formule de multiplication des nombres complexes qui peut s'écrire :

$$\rho e^{i\theta} \cdot \rho' e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}.$$

On a en particulier les relations :

$$e^{i\pi} = -1 \quad \text{et} \quad e^{2i\pi} = 1.$$

Plus généralement, z étant un nombre complexe quelconque :

$$e^{z+2i\pi} = e^z e^{2i\pi} = e^z.$$

Donc e^z est une fonction périodique de z dont la période est $2i\pi$. L'exponentielle apparaît ainsi comme une fonction périodique, mais dont la période est imaginaire pure.

5. — Fonctions trigonométriques et fonctions hyperboliques.

Il est naturel et ce point de vue sera justifié plus tard, d'étendre à une variable complexe les notions de cosinus hyperbolique et de sinus hyperbolique en posant par définition :

$$(3) \quad \boxed{\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}}$$

On a encore les relations :

$$\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z.$$

Remarquons d'autre part que si x est un nombre réel on a les égalités :

$$\begin{aligned} e^{ix} + e^{-ix} &= \cos x + i \sin x + \cos(-x) + i \sin(-x) = 2 \cos x \\ e^{ix} - e^{-ix} &= \cos x + i \sin x - \cos(-x) - i \sin(-x) = 2i \sin x. \end{aligned}$$

Donc il est encore naturel, et ce point de vue sera également justifié dans le 2^e tome de ce cours, d'étendre à une variable complexe les notions de cosinus et de sinus en posant (par définition lorsque z est complexe) :

$$(4) \quad \boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}$$

Ces dernières égalités sont connues sous le nom de *formules d'Euler*. On en déduit les relations :

$$\cos(-z) = \cos z \quad \text{et} \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

En comparant les égalités (3) et (4) on peut écrire :

$$\boxed{\cos z = \operatorname{ch} iz \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{1}{i} \operatorname{sh} iz}$$

L'introduction d'une variable complexe met donc en lumière le lien étroit qui lie les fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques et permet ainsi de comprendre la similitude de leurs comportements.

En additionnant les deux formules d'Euler on a la relation fondamentale :

(5)

$$\boxed{\cos z + i \sin z = e^{iz}}$$

On aurait de même :

(5')

$$\cos z - i \sin z = e^{-iz}$$

et, en multipliant membre à membre les égalités (5) et (5') :

$$\boxed{\cos^2 z + \sin^2 z = 1}$$

Les formules d'Euler permettent d'étendre aux quantités complexes les formules classiques d'additions et de soustraction des arcs. C'est ainsi que pour calculer $\cos(z + z')$ on peut écrire :

$$\cos(z + z') = \frac{e^{i(z+z')} + e^{-i(z+z')}}{2} = \frac{1}{2} [e^{iz} e^{iz'} + e^{-iz} e^{-iz'}]$$

ce qui est égal, d'après (5), à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [(\cos z + i \sin z)(\cos z' + i \sin z') + (\cos z - i \sin z)(\cos z' - i \sin z')] \\ = \frac{1}{2} [\cos z \cos z' + i \cos z \sin z' + i \sin z \cos z' - \sin z \sin z' \\ + \cos z \cos z' - i \cos z \sin z' - i \sin z \cos z' - \sin z \sin z'] \\ = \cos z \cos z' - \sin z \sin z' \end{aligned}$$

On a donc toujours

$$\cos(z + z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z'$$

on vérifierait de même

$$\begin{aligned} \cos(z - z') &= \cos z \cos z' + \sin z \sin z' \\ \sin(z + z') &= \sin z \cos z' + \cos z \sin z' \\ \sin(z - z') &= \sin z \cos z' - \cos z \sin z'. \end{aligned}$$

Les relations $\operatorname{ch} z = \cos iz$ et $\operatorname{sh} z = \frac{1}{i} \sin iz$ permettent alors d'en déduire les formules habituelles d'addition des fonctions hyperboliques. C'est ainsi que :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(z + z') &= \cos i(z + z') = \cos iz \cos iz' - \sin iz \sin iz' \\ &= \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z' - i^2 \operatorname{sh} z \operatorname{sh} z' = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z' + \operatorname{sh} z \operatorname{sh} z'. \end{aligned}$$

Les formules d'Euler rendent aussi les plus grands services dans les calculs trigonométriques usuels. Elles permettent par exemple d'exprimer les fonctions de la forme $\cos^q \theta \sin^p \theta$ (où p et q sont des entiers ≥ 0) à partir des fonctions $\cos m\theta$ et $\sin m\theta$.

Soit par exemple à calculer $\cos^4 \theta \sin^2 \theta$:

On a :

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 = \frac{1}{2^4} [e^{4i\theta} + 4e^{3i\theta} e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta} e^{-2i\theta} + 4e^{i\theta} e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta}] \\ &= \frac{1}{2^4} [e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}]. \end{aligned}$$

De même :

$$\sin^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 = -\frac{1}{2^2} [e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}].$$

D'où :

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta \sin^2 \theta &= -\frac{1}{2^6} [e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}] [e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}] \\ &= -\frac{1}{2^6} [e^{6i\theta} + 2e^{4i\theta} - e^{2i\theta} - 4 - e^{-2i\theta} + 2e^{-4i\theta} + e^{-6i\theta}] \\ &= -\frac{1}{2^5} [\cos 6\theta + 2 \cos 4\theta - \cos 2\theta - 2]. \end{aligned}$$

On pourrait se servir également des formules d'Euler pour calculer la somme :

$$S = \cos a + \cos (a + h) + \dots + \cos (a + (n - 1)h)$$

déjà calculée au chapitre XII, § 4.

On voit que les formules d'Euler rendent à peu près les mêmes services en trigonométrie que la formule de Moivre. Cette dernière peut d'ailleurs se déduire à son tour des formules d'Euler, car si θ est un nombre réel on a :

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

et par suite :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^m = e^{mi\theta} = \cos m\theta + i \sin m\theta. \quad (m \in \mathbf{Z})$$

6. — Fonction logarithmique.

Étant donné le nombre complexe z de module ρ et d'argument θ , l'égalité

$$z = \rho e^{i\theta}$$

conduit à définir le *logarithme* de z par l'égalité

$$(1) \quad \text{Log } z = \text{Log } \rho + i\theta$$

On remarquera que, l'argument θ n'étant défini qu'à $2k\pi$ près, il y a une infinité de déterminations possibles de $\text{Log } z$ et que l'égalité précédente conduit à écrire plus généralement :

$$\text{Log } z = \text{Log } \rho + i\theta + 2ik\pi \quad (\text{avec } k \in \mathbf{Z})$$

Lorsque z est un nombre réel strictement positif, la détermination habituelle de $\text{Log } z$ correspond à la détermination $\theta = 0$ de l'argument. Nous allons supposer dans ce qui suit que l'on puisse, dans chaque cas rencontré, définir une détermination de θ et que l'on puisse donc écrire sans ambiguïté l'égalité (1).

Cette égalité (1) s'écrit encore

$$z = e^{\text{Log } z}$$

d'où l'on déduit sans peine les propriétés habituelles des logarithmes, en particulier :

$$\text{Log } (zz') = \text{Log } z + \text{Log } z'$$

Supposons maintenant que z soit une fonction (complexe) de la variable réelle x et montrons que l'on a encore

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \text{Log } z = \frac{1}{z} \frac{dz}{dx}$$

L'égalité (1) permet d'écrire

$$\frac{d}{dx} \text{Log } z = \frac{d}{dx} \text{Log } \rho + i \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + i \frac{d\theta}{dx}$$

Or on a :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}(\rho e^{i\theta}) = \frac{d\rho}{dx} e^{i\theta} + \rho \frac{de^{i\theta}}{dx} = \frac{d\rho}{dx} e^{i\theta} + i\rho e^{i\theta} \frac{d\theta}{dx}$$

d'où, en tenant compte de $z = \rho e^{i\theta}$:

$$\frac{1}{z} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + i \frac{d\theta}{dx}$$

ce qui montre bien l'égalité (2).

En particulier, pour $z = x - \alpha$ (avec $\alpha \in \mathbf{C}$), on aura

$$\frac{d}{dx} \text{Log}(x - \alpha) = \frac{1}{x - \alpha}$$

égalité que l'on peut écrire encore

$$\int \frac{dx}{x - \alpha} = \text{Log}(x - \alpha) + C^{\text{te}}$$

Le lecteur comparera cette égalité avec la formule, valable seulement pour a réel :

$$\int \frac{dx}{x - a} = \text{Log} |x - a| + C^{\text{te}}$$

EXERCICES

1° Calculer $(1 + i)^n + (1 - i)^n$, n entier :

$$R. \quad 2^{\frac{n+2}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}.$$

2° Calculer :

$$S = 1 + r \cos h + r^2 \cos 2h + \dots + r^n \cos nh$$

et :

$$S' = -r \sin h + r^2 \sin 2h + \dots + r^n \sin nh.$$

$$R. \quad \begin{aligned} S &= 1 - r \cos h - r^{n+1} \cos (n+1)h + r^{n+2} \cos nh / 1 - 2r \cos h + r^2 \\ S' &= r \sin h - r^{n+1} \sin (n+1)h + r^{n+2} \sin nh / 1 - 2r \cos h + r^2 \end{aligned}$$

3° Résoudre l'équation $\sin z = i$.

$$R. \quad z = 2k\pi + i \text{Log}(1 + \sqrt{2}) \quad \text{et} \quad z = (2k+1)\pi - i \text{Log}(1 + \sqrt{2}).$$

4° Valeur numérique à 0,001 près de e^{1-2i} .

$$R. \quad e^{1-2i} = -1,131 - i2,472.$$

5° Vérifier l'égalité

$$(1 + i\sqrt{3})^{245} = 2^{244}(1 - i\sqrt{3}).$$

*6° Soient m et m' les images des nombres complexes z et z' liés par la relation $z' = \operatorname{th} z$. Montrer que lorsque le point m décrit la droite définie par $\operatorname{J}(z) = \frac{\pi}{4}$, le module de z' reste constant et m' décrit un demi-cercle.

*7° Résoudre l'équation $\cos z = \operatorname{ch} z$.

R.
$$z = (1 \pm i)k\pi.$$

*8° On pose $a = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. Calculer a^2 et a^3 . Vérifier l'égalité :

$$(1+x)^n + (1+ax)^n + (1+\bar{a}x)^n = 3(1 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^{3k} a^{3k} + \dots + C_n^{3p} x^{3p})$$

où p et n désignent des nombres entiers positifs tels que $3p \leq n \leq 3p + 2$. En déduire la valeur numérique, avec une incertitude relative inférieure à 0,01, du nombre :

$$s = 1 + C_{100}^3 + C_{100}^6 + \dots + C_{100}^{99}.$$

R.
$$s = 423.10^{27}.$$

**9° Le nombre complexe z varie, son argument restant constant et différent de $k\pi$. Montrer que lorsque $|z|$ croît indéfiniment, $\operatorname{tg} z$ tend vers une limite que l'on déterminera.

R.
$$\operatorname{tg} z \rightarrow \pm i \quad \text{selon que} \quad \operatorname{J}(z) \gtrless 0.$$

**10° Montrer que l'équation $\operatorname{tg} z = z$ n'admet que des solutions réelles (on montrera que si l'on pose $z = x + iy$, on doit avoir $\frac{\sin 2x}{x} = \frac{\operatorname{sh} 2y}{y}$, ce qui entraîne soit $x = 0$, soit $y = 0$).

CHAPITRE XVII

INTÉGRALES DÉFINIES

1. — Définition de l'intégrale définie.

La fonction $f(x)$ étant continue sur l'intervalle fermé (a, b) , nous avons introduit au chapitre VI l'intégrale définie :

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

qui se lit « Somme de a à b de $f(x) dx$ ».

Rappelons que si $a < b$, l'intégrale I désigne l'aire algébrique comprise entre l'axe des x , le graphe de la fonction $f(x)$ et les deux parallèles à l'axe des y d'abscisses a et b , les aires des portions de surface situées au-dessus de l'axe des x étant comptées positivement et les aires des portions de surfaces situées au-dessous de l'axe des x étant comptées négativement (fig. 1).

Si $a > b$, nous avons été conduits à poser :

$$I = - \int_b^a f(x) dx.$$

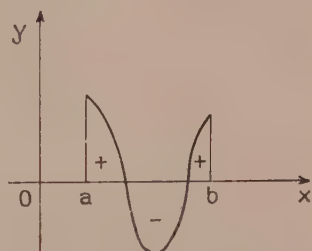


FIG. 1.

Les explications que nous avons alors données avaient le défaut de s'appuyer sur l'intuition géométrique. Nous avons admis que l'on pouvait parler d'aire d'une portion de plan limitée par des arcs de courbe.

Nous allons dans ce paragraphe donner une définition rigoureuse du symbole $\int_a^b f(x) dx$, puis nous montrerons que la dérivée par rapport à x de la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est égale à $f(x)$.

Propriétés de l'aire. — Nous allons retenir de la notion intuitive d'aire les trois propriétés suivantes qui vont guider notre démonstration :

A) Si deux surfaces S et S' n'ont pas de morceau de surface commune (mais elles peuvent avoir une courbe commune comme sur la figure 2 *b* ou ne pas avoir de points communs comme sur la figure 2 *a*), l'aire de la surface Σ

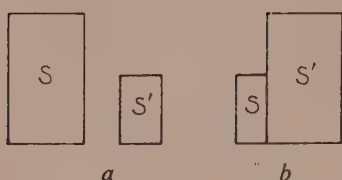


FIG. 2.

obtenue par la réunion de tous les points appartenant à S ou à S' est la somme des aires des surfaces S et S' .

B) Si, par contre, tous les points d'une surface S appartiennent à une surface S' , l'aire de S est inférieure ou égale à la surface S' .

C) Enfin, l'aire d'un rectangle est égale au produit des longueurs de deux de ses côtés adjacents, ces longueurs étant naturellement mesurées avec la même unité.

Les sommes $s(E)$ et $S(E)$. — Considérons une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle fermé (a, b) et proposons-nous de définir l'aire algébrique I comprise entre l'axe des x , le graphe de $f(x)$ et les deux parallèles à Oy d'abscisses a et b . Pour fixer les idées nous supposons $a \leq b$ (Le cas $a > b$ se traite de la même manière en changeant le sens des inégalités que nous allons écrire).

Considérons pour cela un partage de l'intervalle (a, b) en n parties en introduisant une suite E de $n + 1$ nombres $x_0, x_1, \dots, x_n$ tels que :

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b.$$

Pour tout i compris de 1 à n désignons par m_i et M_i le minimum et le maximum de la fonction f sur l'intervalle fermé (x_{i-1}, x_i) (ces nombres existent en vertu du corollaire du théorème I du chap. V), et posons :

$$\begin{aligned} s(E) &= (x_1 - x_0) m_1 + (x_2 - x_1) m_2 + \dots + (x_n - x_{n-1}) m_n \\ S(E) &= (x_1 - x_0) M_1 + (x_2 - x_1) M_2 + \dots + (x_n - x_{n-1}) M_n. \end{aligned}$$

Le nombre $(x_i - x_{i-1})m_i$ est alors l'aire algébrique du rectangle (hachuré sur la figure 3 *a* ayant pour base le segment (x_{i-1}, x_i) et pour hauteur m_i (aire algébrique qui est positive si $m_i \geq 0$ et négative si $m_i \leq 0$).

Le nombre $s(E)$ étant la somme des aires algébriques de ces rectangles, on voit sur la figure 3 *a* que le nombre I que l'on veut définir doit être supérieur ou égal à $s(E)$.

On voit de même sur la figure 3 *b* qu'il doit être inférieur ou égal à $S(E)$. On a évidemment : $s(E) \leq S(E)$.

Il faut donc que I soit tel que :

$$s(E) \leq I \leq S(E).$$

Soient deux partages E et F de l'intervalle (a, b) :

$$\begin{aligned} E : & \quad a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b \\ F : & \quad a = x'_0 \leq x'_1 \leq \dots \leq x'_p = b. \end{aligned}$$

Montrons que l'on a $s(E) \leq S(F)$ et pour cela considérons le partage G :

$$a = x''_0 \leq x''_1 \leq \dots \leq x''_q = b$$

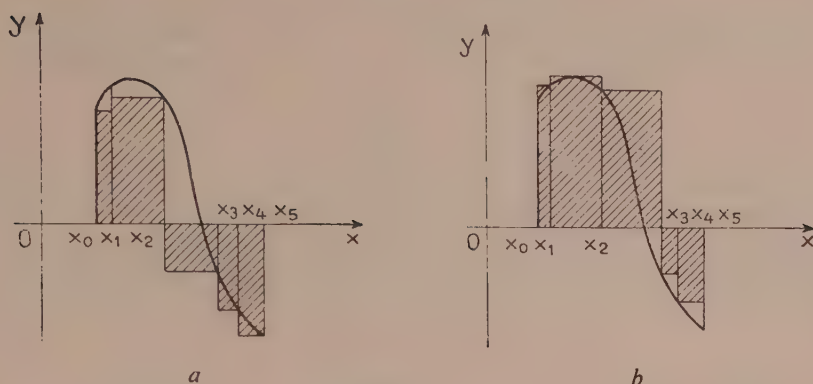


FIG. 3.

obtenu en classant par ordre de grandeur croissante les valeurs des abscisses des deux partages E et F .

En désignant par m_i et m_j les minima de f sur les intervalles :

$$(x_{i-1}, x_i) \quad \text{et} \quad (x''_{j-1}, x''_j),$$

on a :

$$s(E) = \sum (x_i - x_{i-1}) m_i$$

mais nous avons d'autre part des égalités de la forme :

$$x_{i-1} = x''_{k-1} \quad \text{et} \quad x_i = x''_{k+h} \quad (\text{avec } h \geq 0)$$

d'où :

$$\begin{aligned} (x_i - x_{i-1}) m_i &= (x''_k - x''_{k-1}) m_i + \dots + (x''_{k+h} - x''_{k+h-1}) m_i \\ &\leq (x''_k - x''_{k-1}) m''_k + \dots + (x''_{k+h} - x''_{k+h-1}) m''_{k+h} \end{aligned}$$

car :

$$m_i \leq m''_{k+t} \quad (0 \leq t \leq h).$$

Il en résulte :

$$s(E) \leq s(G).$$

On montrerait de même :

$$S(G) \leq S(F)$$

et on voit bien que

Toute somme $s(E)$ est inférieure ou égale à toute somme $S(F)$.

L'ensemble des sommes de la forme $s(E)$ (correspondant à tous les partages possibles) est donc majoré par n'importe quelle somme de la forme $S(F)$. Donc cet ensemble est borné supérieurement par un nombre α qui est inférieur ou égal à tout nombre de la forme $S(F)$. A son tour, l'ensemble des nombres de la forme $S(F)$, minoré par α , admet une borne inférieure β telle que $\alpha \leq \beta$. Le nombre I que nous nous proposons de définir devant être supérieur ou égal

à toute somme $s(E)$ et inférieur ou égal à toute somme $S(F)$ doit être compris entre α et β . Montrons qu'en fait $\alpha = \beta$, ce qui nous imposera de prendre

$$I = \alpha = \beta.$$

Il suffit évidemment de montrer pour cela qu'à tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut associer un partage E tel que la différence $S(E) - s(E)$ soit inférieure ou égale à ε (on a en effet $\beta - \alpha \leq S(E) - s(E)$). D'après le théorème 2 du chapitre V, la fonction f , étant continue sur (a, b) , est uniformément continue sur (a, b) . On peut donc associer au nombre $\varepsilon > 0$ un nombre $\eta > 0$ tel que l'on ait

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{|b - a|}$$

dès que x et x' sont des nombres de (a, b) tels que $|x - x'| \leq \eta$.

Soit n un entier au moins égal à $\frac{b-a}{\eta}$ c'est-à-dire $\frac{b-a}{n} \leq \eta$ et considérons la suite $E = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ telle que $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$. Désignons par m_i et M_i le minimum et le maximum de f sur l'intervalle (x_{i-1}, x_i) . On voit que $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{|b-a|}$ et par suite que :

$$\begin{aligned} S(E) - s(E) &= (x_1 - x_0)(M_1 - m_1) + (x_2 - x_1)(M_2 - m_2) + \dots + (x_n - x_{n-1})(M_n - m_n) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(b-a)} [(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})] \\ &= \frac{\varepsilon}{(b-a)} (x_n - x_0) = \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui achève de démontrer l'égalité $\alpha = \beta$.

Lorsque $b \leq a$, le même raisonnement s'applique à ceci près cette fois que l'on a $S(E) \leq s(E)$ et que I peut être défini à la fois comme borne supérieure des nombres $S(E)$ et comme borne inférieure des nombres $s(E)$. D'une façon plus précise, nous avons démontré le :

THÉORÈME 1. — *La fonction $f(x)$ étant continue sur l'intervalle fermé (a, b) il existe un nombre I tel que les sommes $s(E)$ et $S(E)$ tendent vers I lorsque le plus grand des nombres $|x_i - x_{i-1}|$ ($1 \leq i \leq n$) tend vers 0.*

Nous poserons donc par définition :

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

REMARQUE 1. — D'une manière générale, pour tout i compris entre 1 et n , choisissons un nombre ξ_i de l'intervalle (x_{i-1}, x_i) .

Les inégalités évidentes (si $a \leq b$) :

$$s(E) \leq (x_1 - x_0)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(\xi_n) \leq S(E)$$

montrent encore que

La somme :

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

tend vers $\int_a^b f(x) dx$ lorsque le plus grand des nombres $|x_i - x_{i-1}|$ tend vers 0.

On peut énoncer un résultat plus général : soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ un ensemble de n nombres et soit μ le plus grand des nombres $|\lambda_i|$ ($1 \leq i \leq n$). Si nous posons :

$$\sigma = (x_1 - x_0) \lambda_1 + (x_2 - x_1) \lambda_2 + \dots + (x_n - x_{n-1}) \lambda_n,$$

nous pourrions écrire :

$$|\sigma| \leq \mu |x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1}| = \mu |b - a|.$$

Si donc μ tend vers 0, σ tendra également vers 0. Donc

La somme :

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) (f(\xi_i) + \lambda_i)$$

tend vers $\int_a^b f(x) dx$ lorsque le plus grand des nombres $|\lambda_i|$ et le plus grand des nombres $|x_i - x_{i-1}|$ tendent tous deux vers 0.

C'est sous cette forme que s'introduit le plus généralement le calcul intégral dans les applications.

REMARQUE 2. — Les résultats obtenus résumés dans le théorème 1 et dans la remarque précédente ne font plus appel à la notion d'aire. Cette notion d'aire a guidé la démonstration, mais le résultat pourra s'appliquer pour définir d'autres grandeurs géométriques (longueurs d'arcs, ...) ou mécaniques (travail, ...) ou physiques (flux lumineux, ...).

EXEMPLE 1. — *Calcul direct d'une intégrale définie.* — La définition précédente permet de calculer effectivement certaines intégrales définies. Soit par exemple à calculer :

$$I = \int_0^1 x^2 dx.$$

Subdivisons l'intervalle $(0, 1)$ en n parties égales :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \dots, \quad x_i = \frac{i}{n}, \dots, \quad x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, \quad x_n = 1$$

et prenons :

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \frac{1}{n}, \dots, \quad \xi_i = \frac{i-1}{n}, \dots, \quad \xi_n = \frac{n-1}{n}.$$

Donc :

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \frac{1}{n^3} [1 + 2^2 + \dots + (n-1)^2]$$

on sait que

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

donc :

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2}$$

et lorsque n tend vers l'infini, la limite est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, donc $I = \frac{1}{3}$.

2. — Propriétés générales de l'intégrale définie.

De la définition que nous venons de donner de l'intégrale définie résultent un certain nombre de propriétés.

1° Inversion des bornes. — On a l'égalité :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

car les sommes servant à définir les deux intégrales définies sont les mêmes à un changement de signe près.

2° Formule de Chasles. — On a l'égalité

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

En effet, si $a \leq b \leq c$, il suffit de prendre b comme un des points de subdivision de l'intervalle (a, c) dans les sommes servant à définir $\int_a^b f(x) dx$.

Comme la relation de Chasles peut encore s'écrire :

$$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^a = 0$$

et que, sous cette forme a , b et c jouent le même rôle, le résultat démontré dans le cas $a \leq b \leq c$ est donc vrai quelles que soient les positions relatives des nombres a , b et c .

3° Linéarité. — On a

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) + g(x)) dx$$

et :

$$\int_a^b mf(x) dx = m \int_a^b f(x) dx$$

m étant une constante, formules dont la démonstration est immédiate en utilisant les sommes servant à définir ces diverses intégrales.

4° Intégration d'une inégalité. — Si la fonction f est continue et positive ou nulle sur l'intervalle fermé (a, b) , c'est-à-dire si $f(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à (a, b) , la considération des sommes servant à définir $\int_a^b f(x) dx$ montre immédiatement que si $a \leq b$, on a :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Ceci entraîne d'ailleurs que, si f_1 et f_2 sont deux fonctions continues sur (a, b) , si $a \leq b$ et si :

$$f_1(x) \leq f_2(x) \quad (\forall x \in (a, b))$$

on a :

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$$

5° Valeur absolue. — Soit $f(x)$ une fonction continue sur l'intervalle fermé (a, b) , avec $a \leq b$. La double inégalité

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

entraîne

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

d'où l'inégalité :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

3. — Valeur moyenne d'une fonction.

Rappelons que si on considère p nombres $a_1, a_2, \dots, a_p$, on appelle *moyenne* (ou encore *moyenne arithmétique*) de ces nombres la quantité :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_p}{p}.$$

En généralisant cette notion, on définit la valeur moyenne d'une fonction $f(x)$ dans un intervalle (a, b) de la façon suivante. Divisons l'intervalle (a, b) en n parties égales, d'où les valeurs :

$$a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \dots, a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, b.$$

Considérons la quantité :

$$S_n = \frac{f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right)}{n}.$$

Cette quantité S_n dépend de l'entier n . On appelle *valeur moyenne* de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) la limite de cette quantité lorsque n croît indéfiniment.

Or, en écrivant :

$$S_n = \frac{1}{b-a} \left[\frac{b-a}{n} f(a) + \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \dots + \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right) \right]$$

nous reconnaissons entre crochets une somme qui sert à définir l'intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$. Donc la limite de S_n sera :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

qui est donc la valeur moyenne de la fonction. On remarquera que cette valeur moyenne est nécessairement comprise entre le maximum et le minimum de la fonction dans l'intervalle (a, b) , mais est en général différente de la moyenne arithmétique entre ce maximum et ce minimum.

Par exemple, la valeur moyenne de x^2 entre 0 et 1 est :

$$\mu = \frac{1}{1} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \quad (\text{voir Ex. 1}).$$

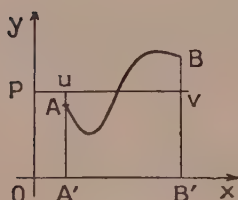


FIG. 4.

On peut interpréter géométriquement cette valeur moyenne en considérant l'aire limitée par le contour $AA'B'B'$ (fig. 4) : l'ordonnée OP du quatrième côté du rectangle $UA'B'V$ d'aire égale à l'aire $AA'B'B'$ représente la valeur moyenne de la fonction dans l'intervalle (a, b) .

Cette notion de valeur moyenne intervient souvent en Statistiques et en Calcul des Probabilités. Indiquons aussi que l'*intensité efficace* d'un courant d'intensité variable est la racine carrée de la valeur moyenne du carré de l'intensité.

La valeur moyenne $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ vérifiant les inégalités $m \leq \mu \leq M$, et la fonction f étant continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, il existe au moins une valeur ξ de cet intervalle telle que l'on ait $f(\xi) = \mu$ [Théorème 1, chap. IV]. On obtient la *formule de la moyenne* :

$$\boxed{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi)} \quad \xi \in [a, b]$$

4. — Dérivée d'une intégrale définie par rapport à sa borne supérieure.

f étant une fonction continue dans l'intervalle fermé (a, b) pour toute valeur x de (a, b) se trouve défini le nombre :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Ce qui définit ainsi une fonction F de x . Montrons que l'on a :

$$\frac{dF}{dx} = f(x).$$

La relation de Chasles permet d'écrire :

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi)$$

avec $\xi \in [x, x+h]$

d'où :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

puisque ξ tend vers x , lorsque h tend vers 0, et que la fonction f est continue.

Ce qui démontre l'égalité :

$$\boxed{\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)}$$

Nous avons donc complètement justifié les résultats du chapitre VII. En particulier si $F(x)$ est une primitive quelconque de $f(x)$, on a toujours :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

En fait, c'est en partant de cette égalité et non pas en utilisant la définition donnée au paragraphe 1 que nous calculerons le plus souvent les intégrales définies ⁽¹⁾.

Nous noterons souvent $[F(x)]_a^b$ l'expression $F(b) - F(a)$.

5. — *Changement de variable dans une intégrale définie.*

THÉORÈME 2. — Soit $\varphi(t)$ une fonction de t continue et admettant une dérivée continue dans l'intervalle (α, β) , telle que l'on ait $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. Soit d'autre part une fonction $f(x)$ continue pour toute valeur x de la forme $\varphi(t)$ avec $t \in (\alpha, \beta)$. On a alors :

(1)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Les hypothèses faites entraînent que la fonction $f(\varphi(t))$ est continue sur l'intervalle (α, β) . Si, d'autre part, x est un nombre compris entre a et b , donc entre $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$, la continuité de φ entraîne l'existence de $t \in (\alpha, \beta)$ tel que $x = \varphi(t)$ et entraîne donc la continuité de f pour la valeur x . Donc la fonction f est continue sur (a, b) et les deux intégrales :

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

et :

$$J = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

ont un sens.

Posons $x = \varphi(t)$ et considérons les deux fonctions :

$$I(x) = \int_a^x f(y) dy$$

et :

$$J(t) = \int_\alpha^t f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

⁽¹⁾ Dans les méthodes de calcul numérique, c'est au contraire en partant de la définition donnée plus haut de l'intégrale définie que l'on calcule ces intégrales et même que l'on établit la table des valeurs de certaines primitives.

On a les égalités :

$$\frac{dJ}{dt} = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

et :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dx} \frac{dx}{dt} = f(x) \frac{dx}{dt} = f(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

L'égalité $\frac{dJ}{dt} = \frac{dI}{dt}$ entraîne que $I(\varphi(t)) - J(t)$ est une constante. Comme $I(\varphi(x)) = \int_a^b f(x) dx = 0$ et de même $J(x) = 0$, cette constante est nulle et on a $I(\varphi(t)) = J(t)$ pour toute valeur de t . Donc :

$$I(\varphi(\beta)) = J(\beta) \quad \text{ou encore} \quad I = J,$$

ce qui démontre le théorème.

EXEMPLE 2. — Soit à calculer $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Posons $x = \sin t$. On obtient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \left[\frac{1}{2} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

REMARQUES. — 1° Lorsque la fonction φ est monotone dans l'intervalle (α, β) , il suffit pour pouvoir appliquer le théorème de vérifier la continuité de φ dans (α, β) et de f dans (a, b) puisqu'alors $\varphi(t)$ reste compris entre $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.

2° Ce théorème montre à nouveau l'avantage de la notation différentielle, car les deux différentielles $f(x) dx$ et $f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ sont égales et seules changent en fait dans l'égalité (1) les bornes de l'intervalle sur lequel on intègre.

3° Avant d'écrire l'égalité (1), il importe de bien examiner si toutes les hypothèses du théorème sont satisfaites. On remarquera en particulier que lorsque t varie de α à β , la fonction $x = \varphi(t)$ peut prendre des valeurs non comprises dans l'intervalle (a, b) , et que, par suite, f peut être discontinue pour une telle valeur, tout en étant continue sur (a, b) (auquel cas le théorème ne s'applique pas).

EXEMPLE 3. — Soit à calculer l'intégrale :

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{4-x}.$$

On a :

$$I = [-\text{Log}(4-x)]_{-1}^{+1} = \text{Log} \frac{5}{3}.$$

Le changement de variable $x = 4 - t^2$ fait sans précaution conduirait à écrire :

$$I = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{3}} \frac{-2t}{t^2} dt = -2 \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t}$$

or cette dernière intégrale n'a pas de sens puisque la fonction sous le signe $\int$ n'est pas continue dans l'intervalle d'intégration. Ici lorsque t varie de $\alpha = -\sqrt{5}$ à $\beta = \sqrt{3}$, $x = 4 - t^2$ prend la valeur 4 qui rend discontinue la fonction $f(x)$.

6. — Intégration par parties.

Soient u et v deux fonctions de x continues et ayant chacune une dérivée continue sur l'intervalle fermé (a, b) . L'égalité :

$$(uv)' = u'v + v'u,$$

permet d'écrire :

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u'v dx + \int_a^b v'u dx$$

ou encore :

$$\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx$$

C'est la formule de l'intégration par parties.

EXEMPLE 4. — Soit à calculer $I = \int_1^2 x \operatorname{Log} x dx$.

Posons $u = \operatorname{Log} x$ et $v' = x$ d'où :

$$u' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v = \frac{x^2}{2}$$

et par suite

$$I = \left[\operatorname{Log} x \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2} dx = 2 \operatorname{Log} 2 - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^2 = 2 \operatorname{Log} 2 - \frac{3}{4}.$$

EXEMPLE 5. — *Formule de Taylor.* — Dans la formule précédente posons :

$$u = (b - x)^n \quad u' = -n(b - x)^{n-1}$$

et :

$$v' = f^{(n+1)}(x) \quad v = f^{(n)}(x)$$

$f(x)$ désignant une fonction ayant une dérivée d'ordre $(n + 1)$ continue sur (a, b) . Nous obtenons :

$$\int_a^b (b - x)^n f^{(n+1)}(x) dx = [(b - x)^n f^{(n)}(x)]_a^b + n \int_a^b (b - x)^{n-1} f^{(n)}(x) dx$$

et comme :

$$[(b-x)^n f^{(n)}(x)]_a^b = -(b-a)^n f^{(n)}(a)$$

nous pourrions écrire :

$$\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x) dx = -(b-a)^n f^{(n)}(a) + n \int_a^b (b-x)^{n-1} f^{(n)}(x) dx.$$

Mais de la même façon :

$$\int_a^b (b-x)^{n-1} f^{(n)}(x) dx = -(b-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) + (n-1) \int_a^b (b-x)^{n-2} f^{(n-1)}(x) dx$$

.....

$$\int_a^b (b-x)^2 f^{(3)}(x) dx = -(b-a)^2 f''(a) + 2 \int_a^b (b-x) f''(x) dx$$

$$\int_a^b (b-x) f''(x) dx = -(b-a) f'(a) + \int_a^b f'(x) dx$$

et :

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

En groupant ces résultats on trouve donc :

$$\begin{aligned} \int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x) dx &= -(b-a)^n f^{(n)}(a) - n(b-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) \\ &\quad - n(n-1)(b-a)^{n-2} f^{(n-2)}(a) - \dots \\ &\quad - [n(n-1)(n-2) \dots 4.3.2](b-a) f'(a) - n! [f(b) - f(a)] \end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire, en divisant par $n!$:

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x) dx. \end{aligned}$$

Si nous nous reportons au § 1 du chapitre IX, nous constatons que nous avons déjà obtenu une formule presque identique. C'est la formule de Taylor, mais avec une expression différente du terme complémentaire, l'expression :

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

étant remplacée par :

$$\frac{1}{n!} \int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x) dx.$$

EXEMPLE 6. — *Intégrales de Wallis.* — Indiquons une méthode commode pour calculer les intégrales de la forme :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad (n \text{ étant un entier positif})$$

Ces intégrales se rencontrent fréquemment.

Nous apprendrons dans le prochain chapitre à calculer l'intégrale indéfinie :

$$\int \sin^n x \, dx$$

mais, en particulier lorsque n est pair, le calcul en est assez long, et en partie inutile car, comme on s'en convaincra aisément par un exemple, beaucoup de termes de la primitive obtenue se trouvent nuls pour $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$.

Or, en écrivant :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x \, dx$$

on peut intégrer par parties, en posant :

$$\begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x & u' = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}$$

d'où :

$$I_n = \left[-\cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x (n-1) \, dx$$

et comme $\cos x \sin^{n-1} x$ s'annule pour les deux bornes de l'intégration, nous aurons :

$$\begin{aligned} I_n &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= (n-1) (I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

ce qui conduit à la formule de récurrence :

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

qui permet de calculer les intégrales de deux en deux.

En remarquant que :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$$

nous aurons pour les intégrales d'indice pair :

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad I_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad I_6 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

et, d'une façon générale :

$$I_{2p} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-3)(2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2p-2)2p} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Pour les intégrales d'indice impair, nous aurons :

$$I_3 = \frac{2}{3} \quad I_5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \quad I_7 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7}$$

et d'une façon générale :

$$I_{2p+1} = \frac{2 \cdot 4 \dots (2p-2) \cdot 2p}{3 \cdot 5 \dots (2p-1)(2p+1)}.$$

7. — Inégalité de Schwarz.

Montrons d'abord que

Si une fonction $f(x)$ positive ou nulle sur l'intervalle (a, b) est continue sur (a, b) et telle que :

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx = 0$$

cette fonction $f(x)$ est alors constamment nulle sur (a, b) .

En effet, la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ admettant pour dérivée $f(x)$ n'est jamais décroissante sur (a, b) . L'égalité (2) qui s'écrit $F(b) = F(a)$ entraîne donc qu'elle est constante sur (a, b) et que, par suite, $f(x) = \frac{dF}{dx}$ est nulle sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Comme f est continue sur l'intervalle fermé (a, b) , f est bien nulle en tout point de (a, b) .

REMARQUE. — On peut donner de cette propriété une démonstration ne faisant pas intervenir la notion de primitive et qui sera susceptible de s'étendre aux intégrales doubles et triples.

Supposons que la fonction f ne soit pas constamment nulle sur (a, b) et supposons $a < b$. Il existe alors un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f(c) > 0$. La continuité de f pour c entraîne l'existence d'un nombre $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\varepsilon \leq \inf (c - a, b - c)$$

et :

$$f(x) \geq \frac{f(c)}{2} \text{ pour tout } x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon).$$

En considérant la suite $E = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ définie par :

$$x_0 = a, \quad x_1 = c - \varepsilon, \quad x_2 = c + \varepsilon, \quad x_3 = b$$

on voit que :

$$s(E) \geq 2\varepsilon \frac{f(c)}{2} = \varepsilon f(c) > 0$$

et l'inégalité $s(E) \leq \int_a^b f(x) dx$ entraîne bien $\int_a^b f(x) dx > 0$.

Ceci posé, soient f et g deux fonctions continues sur (a, b) . Montrons l'inégalité de Schwarz :

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx}$$

Il suffit évidemment de la démontrer dans le cas où $a \leq b$ (le cas $b \leq a$ s'en déduisant aussitôt). Supposons donc $a \leq b$ et f non constamment nulle sur (a, b) .

Si λ désigne une constante, nous avons l'inégalité :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 dx \geq 0$$

qui s'écrit encore :

$$(3) \quad \lambda^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2\lambda \int_a^b f(x) g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \geq 0.$$

Le premier membre de l'inégalité est un trinôme du second degré par rapport à λ qui est positif ou nul pour toute valeur de λ . Par suite son discriminant est négatif ou nul, ce qui permet d'écrire :

$$\left[\int_a^b f(x) g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

D'où l'inégalité de Schwarz en comparant les racines carrées des deux membres.

On peut se demander dans quel cas cette inégalité se transforme en égalité. Il y a d'abord le cas où $f = 0$. Écartons ce cas et supposons par exemple $f \neq 0$. Pour que l'inégalité de Schwarz se transforme en égalité, il faut et il suffit que le trinôme figurant au premier membre de l'inégalité (3) ait un discriminant nul, c'est-à-dire qu'il existe une valeur λ_0 de λ qui annule ce trinôme, c'est-à-dire encore telle que :

$$\int_a^b (\lambda_0 f(x) + g(x))^2 dx = 0.$$

D'après ce que nous avons vu au début de ce paragraphe, ceci n'est possible que si la fonction $\lambda_0 f(x) + g(x)$ est constamment nulle sur (a, b) , c'est-à-dire si $g(x) = -\lambda_0 f(x)$, c'est-à-dire encore si le rapport $\frac{g(x)}{f(x)}$ est constant.

Pour que l'inégalité de Schwarz se transforme en égalité, il faut et il suffit que les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ soient dans un rapport constant sur (a, b) .

8. — Formule de la moyenne.

THÉORÈME 2. — Soit $f(x)$ une fonction continue sur l'intervalle fermé (a, b) et soient deux nombres m et M tels que pour toute valeur x de cet intervalle on ait les inégalités :

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Soit d'autre part une fonction $\varphi(x)$ continue sur (a, b) et gardant un signe constant sur cet intervalle.

Il existe alors un nombre μ compris entre m et M tel que :

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \mu \int_a^b \varphi(x) dx$$

On a, en effet, pour toute valeur x de (a, b) :

$$\begin{array}{ll} m \varphi(x) \leq f(x) \varphi(x) \leq M \varphi(x) & \text{si } \varphi \text{ est positive sur } (a, b) \\ m \varphi(x) \geq f(x) \varphi(x) \geq M \varphi(x) & \text{si } \varphi \text{ est négative sur } (a, b). \end{array}$$

Intégrons de a à b , l'inégalité ayant lieu. On a :

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx \quad \text{si} \quad \begin{cases} \varphi \geq 0 & \text{et} & a \leq b \\ \varphi \leq 0 & \text{et} & b \leq a \end{cases}$$

ou :

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \geq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \geq M \int_a^b \varphi(x) dx \quad \text{si} \quad \begin{cases} \varphi \leq 0 & \text{et} & a \leq b \\ \varphi \geq 0 & \text{et} & b \leq a \end{cases}$$

et, dans tous les cas :

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx} \leq M$$

d'où le résultat en prenant :

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx}.$$

Lorsque l'on prend $\varphi = 1$ on retrouve la valeur moyenne déjà définie au paragraphe 3.

9. — Cas d'une fonction à valeurs complexes.

Ce que nous avons dit dans ce chapitre (sauf les résultats fondés sur des inégalités, qui comprennent notamment la formule de la moyenne et l'inégalité de Schwarz) peut s'étendre au cas où la fonction $f(x)$ de la variable réelle x prend des valeurs complexes $f(x) = \Re f(x) + i \Im f(x)$.

Si $f(x)$ est continue sur l'intervalle fermé (a, b) , on peut définir :

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

comme limite, quand le plus grand des nombres $|x_i - x_{i-1}|$ tend vers 0, d'expressions de la forme :

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i).$$

On aura :

$$I = \int_a^b \Re f(x) dx + i \int_a^b \Im f(x) dx$$

et :

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

EXERCICES

1° Calculer $J(n, p) = \int_0^1 x^n(1-x)^p dx$, n et p étant des entiers positifs :

R.
$$J(n, p) = \frac{n! p!}{(n+p+1)!}.$$

2° De l'inégalité $2 \operatorname{ch} t > e^t$, déduire l'inégalité :

$$\int_0^x \frac{t}{\operatorname{ch} t} dt < 2 \quad \forall x > 0.$$

3° Calculer $f(\lambda) = \int_0^\pi \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2}}$

R.
$$f(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|} \quad \text{si } |\lambda| > 1 \quad \text{et} \quad f(\lambda) = 2 \quad \text{si } |\lambda| \leq 1.$$

4° Étant donné un polygone régulier de n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1, calculer la moyenne arithmétique des $(n-3)$ diagonales issues d'un sommet. Limite de cette moyenne arithmétique quand n croît indéfiniment.

R.
$$\frac{4}{\pi}.$$

*5° La valeur moyenne d'une grandeur dépend de la variable choisie pour évaluer cette grandeur. *Exemple* : Quelle est la grandeur moyenne de l'aire du triangle MAB , A de coordonnées $(1, 0)$, B de coordonnées $(-1, 0)$ et M étant sur l'axe Oy lorsque la variable choisie est a) $\overline{OM} = y$ variant de 0 à 1, b) l'angle $\widehat{ABM} = \theta$ variant de 0 à $\frac{\pi}{4}$, c) l'ordonnée $\overline{OI} = t$ du centre du cercle inscrit au triangle ABM , t variant de 0 à $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

R. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2 \operatorname{Log} 2}{\pi}$ c) $(\sqrt{2} + 1) \operatorname{Log} \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$

*6° Limite lorsque n croît indéfiniment de $\frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots (2n-1) \cdot 2n}$.

R. $\frac{4}{e}$.

*7° On pose $P_n = \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n$. Montrer que P_n est un polynôme de degré n et que si Q désigne un polynôme de degré strictement inférieur à n , l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) Q(x) dx$$

est nulle.

*8° On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} d\theta$, n désignant un entier positif. Calculer $I_n - I_{n-2}$ et en déduire la valeur de I_n .

R. Si n impair, $I_n = \frac{\pi}{2}$

si n pair $I_n = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{n-1} \right)$.

**9° On considère les intégrales de Wallis. Montrer que :

$$I_{2p-1} > I_{2p} > I_{2p+1}.$$

En déduire que lorsque p tend vers l'infini :

$$\frac{1}{2p+1} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)} \right)^2 \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

10° En désignant par n un entier positif, établir la formule

$$\int_0^{\pi} \cos^n \theta \cos n\theta d\theta = \frac{\pi}{2^n}.$$

CHAPITRE XVIII

PRIMITIVES SIMPLES

1. — *Primitives usuelles.*

Dans ce chapitre et dans le suivant, nous nous proposons de montrer comment on peut dans un certain nombre de cas trouver une primitive (ou *intégrale indéfinie*) $\int f(x) dx$ d'une fonction f .

A chaque formule de dérivation correspond une formule d'intégration. Nous allons, dans ce paragraphe, indiquer quelques formules obtenues de cette façon à partir des fonctions les plus usuelles. Nous obtiendrons ainsi une liste des primitives usuelles. Elles sont importantes car toutes les méthodes que nous obtiendrons par la suite tendent à ramener la recherche d'une primitive à celle de certaines de ces primitives usuelles. Il importe donc de les connaître parfaitement.

Nous avons d'abord :

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C. \quad (m \neq -1)$$

Cette formule est valable pour m différent de -1 et à condition que x^m ait un sens. C désigne comme dans tout ce chapitre une constante arbitraire. Le plus souvent, nous n'écrirons d'ailleurs pas cette constante, étant bien entendu qu'une primitive n'est définie qu'à une constante arbitraire (additive) près.

Dans le cas particulier où $m = -1$, nous avons la formule :

$$\int \frac{dx}{x} = \text{Log } x$$

valable pour x positif. Dans le cas où x est négatif, on remarque que $\text{Log}(-x)$ a également pour dérivée $\frac{1}{x}$ et, par suite, on aura dans ce cas :

$$\int \frac{dx}{x} = \text{Log}(-x).$$

On résume les deux formules précédentes dans la formule unique :

$$\int \frac{dx}{x} = \text{Log } |x|$$

qui est valable pour toutes les valeurs de x différentes de 0.

Nous avons ensuite sans difficulté et à une constante près :

$$\begin{array}{ll} \int \cos x \, dx = \sin x & \int \text{ch } x \, dx = \text{sh } x \\ \int \sin x \, dx = -\cos x & \int \text{sh } x \, dx = \text{ch } x \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x & \int \frac{dx}{\text{ch}^2 x} = \text{th } x \\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{cotg } x & \int \frac{dx}{\text{sh}^2 x} = -\frac{1}{\text{th } x} \\ \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \text{Arc tg } x & \int e^x \, dx = e^x \end{array}$$

on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc sin } x \quad \text{ou} \quad -\text{Arc cos } x + C.$$

On aura aussi :

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \text{Arg th } x$$

cette formule n'étant valable que pour $-1 < x < 1$ (chap. VIII). Mais nous avons vu que :

$$\text{Arg th } x = \frac{1}{2} \text{Log } \frac{1+x}{1-x}$$

et il est aisé de vérifier que pour $x > 1$ ou $x < -1$, la fonction $\frac{1}{2} \text{Log } \frac{x+1}{x-1}$ admet aussi pour dérivée $\frac{1}{1-x^2}$. On pourra donc écrire :

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \text{Log } \left| \frac{x+1}{x-1} \right|.$$

De même, au lieu d'écrire :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{Arg ch } x$$

formule qui n'est valable que pour $x > 1$, il est préférable d'écrire

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \text{Log} |x + \sqrt{x^2 - 1}|$$

formule valable aussi bien pour $x > 1$ que pour $x < -1$.

La formule :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \text{Arg sh } x = \text{Log} (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

est valable pour toutes les valeurs de x .

Signalons encore les formules suivantes que l'on vérifie immédiatement par dérivation :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \text{Log} \left| \text{tg } \frac{x}{2} \right| & \text{et} & \int \frac{dx}{\text{sh } x} = \text{Log} \left| \text{th } \frac{x}{2} \right| \\ \int \frac{dx}{\cos x} &= \text{Log} \left| \text{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| & & \int \frac{dx}{\text{ch } x} = 2 \text{ Arc tg } e^x \end{aligned}$$

On notera que chaque fois que la primitive contient le logarithme d'une fonction $u(x)$, on écrira $\text{Log} |u(x)|$ de façon à obtenir une formule valable aussi bien pour $u(x)$ positif que pour $u(x)$ négatif.

On remarquera que si a et b sont des constantes, on a l'égalité :

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx.$$

Cette formule est d'une pratique courante et permet par exemple de calculer immédiatement la primitive de n'importe quel polynôme.

EXEMPLE 1.

$$\int (x^4 - 2x^3 + x - 1) dx = \int x^4 dx - 2 \int x^3 dx + \int x dx - \int dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} - x.$$

2. — *Changement de variable.*

Pour calculer une primitive, on est conduit la plupart du temps à effectuer un changement de variable, ce qui se fait de la façon suivante :

Soit une fonction $\varphi(t)$ de la variable t continue et admettant une dérivée continue $\varphi'(t)$ et soit une primitive $F(x) = \int f(x) dx$ de la fonction $f(x)$. Posons $x = \varphi(t)$.

$F(x)$ étant la fonction dont la différentielle dF est égale à $f(x) dx$, on peut écrire :

$$dF = f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

et par suite F est encore la primitive prise par rapport à la variable t de la fonction $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$. D'où la formule du changement de variable :

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Cette méthode conduit à exprimer l'intégrale $\int f(x) dx$ comme fonction de t . Si on veut pouvoir l'exprimer commodément comme fonction de x , il faut que $\varphi(t)$ possède une fonction inverse, c'est-à-dire soit monotone (du moins dans l'intervalle que l'on aura à considérer).

EXEMPLE 2. — Soit à calculer $\int (x^2 + 1)^5 x dx$.

La fonction à intégrer étant un polynôme, on pourrait développer ce polynôme et l'intégrer comme il a été dit à la fin du paragraphe précédent. Il est toutefois beaucoup plus rapide de remarquer que cette intégrale peut s'écrire :

$$\int (x^2 + 1)^5 x dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^5 d(x^2 + 1)$$

et qu'il est tout indiqué de poser $t = x^2 + 1$.

Cette intégrale, qui s'écrit alors $\frac{1}{2} \int t^5 dt$ est égale à $\frac{t^6}{12}$. D'où l'égalité :

$$\int (x^2 + 1)^5 x dx = \frac{(x^2 + 1)^6}{12}.$$

EXEMPLE 3. — Si a est une constante, on a :

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{d(x+a)}{x+a} = \text{Log } |x+a|.$$

EXEMPLE 4. — Soit à calculer $\int \sqrt{1-x^2} dx$.

Posons $x = \cos t$ avec $0 \leq t \leq \pi$. On a alors :

$$dx = -\sin t dt$$

et :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= - \int \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int (\cos 2t - 1) dt \\ &= \frac{1}{2} \int \cos 2t dt - \frac{1}{2} \int dt = \frac{1}{4} \int \cos 2t d(2t) - \frac{t}{2} = \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{2} [\sin t \cos t - t] = \frac{1}{2} [x\sqrt{1-x^2} - \text{Arc cos } x]. \end{aligned}$$

3. — *Intégration par parties.*

u et v étant deux fonctions de x admettant des dérivées continues, l'égalité :

$$(uv)' = u'v + v'u$$

permet d'écrire en intégrant terme à terme :

$$uv = \int u'v \, dx + \int v'u \, dx$$

formule que l'on écrit sous l'une des deux formes équivalentes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx \\ \text{ou} \\ \int u \, dv = uv - \int v \, du \end{array}}$$

Cette formule conduit donc à remplacer le calcul de l'intégrale $\int uv' \, dx$ par celui de l'intégrale $\int u'v \, dx$. Il y a des cas où ceci peut être avantageux, par exemple lorsque u est une fonction transcendante telle que $\text{Log } x$ ou $\text{Arc tg } x$ dont la dérivée est une fonction rationnelle.

EXEMPLE 5. — Soit à calculer $\int x \text{Log } x \, dx$.

On est conduit à poser :

$$u = \text{Log } x \quad \text{et} \quad v' = x$$

d'où :

$$u' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v = \frac{x^2}{2}$$

et :

$$\int x \text{Log } x \, dx = \frac{x^2}{2} \text{Log } x - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \text{Log } x - \frac{x^2}{4}.$$

EXEMPLE 6. — Soit à calculer $\int x^2 \sin x \, dx$.

Une intégration par parties ne fera pas disparaître la fonction transcendante mais permettra d'abaisser le degré du polynôme. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x \, dx &= \int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x + \int \cos x \, d(x^2) \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx. \end{aligned}$$

De même :

$$\int x \cos x \, dx = \int x \, d(\sin x) = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x.$$

D'où finalement :

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x.$$

4. — *Intégration des polynômes en $\sin x$ et $\cos x$ et des polynômes en $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.*

Un polynôme en $\sin x$ et $\cos x$ est une somme de termes de la forme $A \sin^p x \cos^q x$, A étant une constante, p et q des entiers positifs ou nuls. L'intégration d'un tel polynôme se ramène donc à des calculs d'intégrales de la forme :

$$\int \sin^p x \cos^q x \, dx.$$

Le calcul d'une telle intégrale est particulièrement simple si l'un des deux nombres p ou q est impair. Supposons par exemple q impair, c'est-à-dire de la forme $q = 2n + 1$ où n est un entier positif ou nul. L'intégrale précédente s'écrit :

$$\int \sin^p x \cos^q x \, dx = \int \sin^p x \cos^{2n} x \cos x \, dx = \int \sin^p x (1 - \sin^2 x)^n d(\sin x).$$

Il est donc indiqué de faire le changement de variable $\sin x = t$. L'intégrale s'écrit alors :

$$\int t^p (1 - t^2)^n \, dt$$

et on est ramené à chercher la primitive d'un polynôme.

EXEMPLE 7. — Soit à calculer $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$. On a :

$$\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \, d(\sin x) = \int t^4 (1 - t^2) \, dt$$

(en posant $t = \sin x$).

D'où :

$$\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \int t^4 (1 - t^2) \, dt = \int (t^4 - t^6) \, dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7}.$$

Dans le cas général, qui comprend en particulier celui où p et q sont pairs, on peut à l'aide des formules d'Euler (chap. XVI) exprimer $\sin^p x \cos^q x$

comme une somme de cosinus et de sinus d'arc multiples de x , ce qui conduit à des intégrales telles que :

$$\int \cos mx \, dx = \frac{1}{m} \sin mx.$$

$$\int \sin mx \, dx = -\frac{1}{m} \cos mx.$$

EXEMPLE 8. — Soit à calculer :

$$\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx.$$

A l'aide des formules d'Euler, nous avons vu (XVI, § 5) que l'on peut écrire :

$$(1) \quad \cos^4 x \sin^2 x = -\frac{1}{2^6} [e^{6ix} + 2e^{4ix} - e^{2ix} - 4 - e^{-2ix} + 2e^{-4ix} + e^{-6ix}]$$

d'où :

$$(2) \quad \cos^4 x \sin^2 x = -\frac{1}{2^5} [\cos 6x + 2 \cos 4x - \cos 2x - 2].$$

La formule (2) permet d'en écrire :

$$\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2^5} \left[\frac{\sin 6x}{6} + \frac{2 \sin 4x}{4} - \frac{\sin 2x}{2} - 2x \right].$$

REMARQUE. — L'emploi des formules d'Euler conduit à représenter $\sin^p x \cos^q x$ comme une somme d'exponentielles (complexes). On peut intégrer directement cette somme, ce qui conduit à des intégrales de la forme :

$$\int e^{\alpha x} \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \quad (\alpha \text{ étant complexe})$$

on regroupera ensuite les intégrales obtenues de manière à obtenir une primitive réelle somme de cosinus et de sinus d'arc multiples de x .

EXEMPLE 9. — L'égalité (1) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \int \cos^4 x \sin^2 x \, dx \\ &= -\frac{1}{2^6} \left[\int e^{6ix} \, dx + 2 \int e^{4ix} \, dx - \int e^{2ix} \, dx - 4x - \int e^{-2ix} \, dx + 2 \int e^{-4ix} \, dx \right. \\ & \quad \left. + \int e^{-6ix} \, dx \right] \\ &= -\frac{1}{2^6} \left[\frac{e^{6ix}}{6i} + \frac{2e^{4ix}}{4i} - \frac{e^{2ix}}{2i} - 4x + \frac{e^{-2ix}}{2i} - \frac{2e^{-4ix}}{4i} - \frac{e^{-6ix}}{6i} \right] \\ &= -\frac{1}{2^5} \left[\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} - 2x \right]. \end{aligned}$$

Les mêmes considérations peuvent s'appliquer aux intégrales de la forme :

$$\int \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^q x dx$$

(p et q étant des entiers positifs ou nuls) que l'on pourra calculer en remplaçant $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ par leurs valeurs en fonction de e^x , mais que l'on calculera plus avantageusement en prenant $\operatorname{ch} x$ comme nouvelle variable si p est impair ou $\operatorname{sh} x$ comme nouvelle variable si q est impair.

5. — Intégration des polynômes en x et e^{xx} .

α étant un nombre complexe quelconque, l'intégration d'un tel polynôme se ramène à des calculs d'intégrales de la forme :

$$\int x^n e^{\beta x} dx$$

où n est un entier positif ou nul.

Plus généralement, pour calculer une intégrale de la forme :

$$\int P(x) e^{\beta x} dx$$

où $P(x)$ est un polynôme en x , on fait une suite d'intégrations par parties de façon à abaisser chaque fois d'une unité le degré du polynôme jusqu'à ce que l'on arrive à une intégrale de la forme :

$$\int a e^{\beta x} dx = a \frac{e^{\beta x}}{\beta}$$

(c'est en fait ce procédé qui a été utilisé dans l'exemple 6).

C'est ainsi que l'on peut successivement écrire, en notant n le degré de $P(x)$:

$$\begin{aligned} \int e^{\beta x} P(x) dx &= \frac{1}{\beta} \int P(x) d(e^{\beta x}) = \frac{e^{\beta x} P(x)}{\beta} - \int \frac{e^{\beta x} P'(x)}{\beta} dx \\ \int \frac{e^{\beta x} P'(x)}{\beta} dx &= \frac{e^{\beta x} P'(x)}{\beta^2} - \int \frac{e^{\beta x} P''(x)}{\beta^2} dx \\ &\dots \dots \dots \\ \int \frac{e^{\beta x} P^{(n-1)}(x)}{\beta^{n-1}} dx &= \frac{e^{\beta x} P^{(n-1)}(x)}{\beta^n} - \int \frac{e^{\beta x} P^{(n)}(x)}{\beta^n} dx \end{aligned}$$

et puisque $P^{(n)}(x)$ est une constante :

$$\int \frac{e^{\beta x} P^{(n)}(x)}{\beta^n} dx = \frac{e^{\beta x} P^{(n)}(x)}{\beta^{n+1}}$$

d'où, en additionnant membre à membre les égalités précédentes préalablement multipliées par $+1$ ou -1 suivant la parité de leur rang :

$$\int e^{\beta x} P(x) dx = e^{\beta x} \left[\frac{P(x)}{\beta} - \frac{P'(x)}{\beta^2} + \frac{P''(x)}{\beta^3} - \dots + \frac{(-1)^n P^{(n)}(x)}{\beta^{n+1}} \right].$$

On voit en particulier que $\int e^{\beta x} P(x) dx$ est de la forme $e^{\beta x} Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme de même degré que $P(x)$.

EXEMPLE 10.

$$\int e^{2x} (x^2 + 1) dx = e^{2x} \left[\frac{x^2 + 1}{2} - \frac{2x}{4} + \frac{2}{8} \right] = e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \right).$$

Pour calculer une intégrale de la forme :

$$\int e^{\alpha x} (P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x) dx$$

$P(x)$ et $Q(x)$ étant deux polynômes en x , on peut encore procéder par intégration par parties, mais il est plus commode d'utiliser les formules d'Euler, ce qui conduit à calculer l'intégrale :

$$\int \left[e^{(\alpha + \beta i)x} \frac{P(x) - iQ(x)}{2} + e^{(\alpha - \beta i)x} \frac{P(x) + iQ(x)}{2} \right] dx.$$

Or, nous venons de voir que :

$$\int e^{(\alpha + \beta i)x} \frac{P(x) - iQ(x)}{2} dx = e^{(\alpha + \beta i)x} R(x)$$

$R(x)$ étant un polynôme à coefficients complexes de degré égal à celui de $P - iQ$.

Nous aurons par suite :

$$\int e^{(\alpha - \beta i)x} \frac{P(x) + iQ(x)}{2} dx = e^{(\alpha - \beta i)x} R_1(x)$$

$R_1(x)$ étant le polynôme imaginaire conjugué de $R(x)$. En remplaçant :

$$e^{(\alpha \pm \beta i)x} \quad \text{par} \quad e^{\alpha x} (\cos \beta x \pm i \sin \beta x)$$

nous trouverons finalement :

$$\int e^{\alpha x} (P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x) dx = e^{\alpha x} (S(x) \cos \beta x + T(x) \sin \beta x)$$

$S(x)$ et $T(x)$ désignant des polynômes dont le plus haut degré est celui du terme de plus haut degré dans $P(x)$ ou dans $Q(x)$.

Le calcul précédent est évidemment assez long. Il y a souvent intérêt à calculer la primitive de la façon suivante : on écrit sa forme *a priori*, les coef-

ficients des polynômes étant indéterminés. On dérive cette primitive et, en identifiant cette dérivée à la fonction donnée, on détermine ces coefficients.

EXEMPLE 11. — Soit à calculer :

$$\int e^{2x} [x \cos 3x + (x^2 - 1) \sin 3x] dx.$$

D'après ce qui précède, la primitive sera de la forme :

$$e^{2x} [(ax^2 + bx + c) \cos 3x + (a'x^2 + b'x + c') \sin 3x]$$

a, b, c', a', b', c étant des constantes inconnues. Or, la dérivée de la fonction précédente est :

$$e^{2x} [\{ (2a + 3a') x^2 + (2b + 2a + 3b') x + 2c + b + 3c' \} \cos 3x \\ + \{ (2a' - 3a) x^2 + (2b' + 2a' - 3b) x + 2c' + b' - 3c \} \sin 3x]$$

En identifiant cette dérivée avec la quantité sous le signe somme, on trouve :

$$\begin{array}{rcl} 2a + 3a' & = & 0 \\ 2b + 2a + 3b' & = & 1 \\ 2c + b + 3c' & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2a' - 3a & = & 1 \\ 2b' + 2a' - 3b & = & 0 \\ 2c' + b' - 3c & = & -1. \end{array}$$

Les deux équations de la première ligne donnent :

$$a = -\frac{3}{13} \quad a' = \frac{2}{13}.$$

Les deux équations de la deuxième ligne donnent alors :

$$b = \frac{50}{169} \quad b' = \frac{49}{169}.$$

Enfin on trouve

$$c = \frac{554}{2197} \quad c' = -\frac{586}{2197}$$

d'où :

$$\begin{aligned} & \int e^{2x} [x \cos 3x + (x^2 - 1) \sin 3x] dx \\ &= \frac{e^{2x}}{2197} [(-507x^2 + 650x + 554) \cos 3x + (338x^2 + 637x - 586) \sin 3x]. \end{aligned}$$

A titre d'exercice nous conseillons au lecteur de calculer la même intégrale à partir des formules d'Euler.

Dans le cas particulier où l'intégrale est de la forme :

$$\int P(x) \sin \beta x \, dx$$

$P(x)$ étant un polynôme en x , il vaut cependant mieux appliquer directement le processus de l'intégration par parties et écrire :

$$\int P(x) \sin \beta x \, dx = -\frac{P(x)}{\beta} \cos \beta x + \frac{P'(x)}{\beta^2} \sin \beta x + \frac{P''(x)}{\beta^3} \cos \beta x - \dots$$

De même :

$$\int P(x) \cos \beta x \, dx = \frac{P(x)}{\beta} \sin \beta x + \frac{P'(x)}{\beta^2} \cos \beta x - \frac{P''(x)}{\beta^3} \sin \beta x - \dots$$

EXERCICES

1° Calculer les primitives :

$$\int x \operatorname{Log}^2 x \, dx, \quad \int \cos x \operatorname{Log} \operatorname{tg} x \, dx, \quad \int x \operatorname{Arg} \operatorname{ch} x^2 \, dx, \quad \int \frac{\operatorname{Log}(1+x^2)}{x^2} \, dx.$$

$$R. \frac{x^2}{4} (2 \operatorname{Log}^2 x - 2 \operatorname{Log} x + 1), \quad \sin x \operatorname{Log} \operatorname{tg} x - \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$\frac{1}{2} (x^2 \operatorname{Arg} \operatorname{ch} x^2 - \sqrt{x^4 - 1}), \quad 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{Log}(1+x^2)}{x}.$$

2° Calculer les primitives :

$$\int e^x \sin^3 x \, dx, \quad \int e^{3x} \operatorname{sh}^3 x \, dx, \quad \int x^2 e^x \cos x \, dx, \quad \int (x^2 - x + 1) \cos^2 x \, dx.$$

$$R. \frac{e^x}{40} (15 \sin x - 15 \cos x + 3 \cos 3x - \sin 3x)$$

$$\frac{1}{96} (2e^{6x} - 9e^{4x} + 18e^{2x} - 12x)$$

$$\frac{e^x}{2} ((x^2 - 1) \cos x + (x - 1)^2 \sin x)$$

$$\frac{1}{12} (2x^3 - 3x^2 + 6x) + \frac{1}{8} (2x - 1) \cos 2x + \frac{1}{8} (2x^2 - 2x + 1) \sin 2x.$$

*3° A quelles conditions doivent satisfaire les coefficients du polynôme :

$$P(x) = a_0 x^{p+1} + a_1 x^p + a_2 x^{p-1} + \dots + a_p x + a_{p+1}$$

pour qu'une primitive de $\frac{P(x)}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ soit $\frac{1}{e^x} Q(x)$ où Q désigne un polynôme :

$$R. \quad a_p + \frac{a_{p-1}}{1} + \dots + \frac{a_{p-q}}{q!} + \dots + \frac{a_1}{(p-1)!} + \frac{a_0}{p!} = 0.$$

CHAPITRE XIX

PRIMITIVES DES FRACTIONS RATIONNELLES

1. — *Primitive d'une fraction rationnelle.*

Soit à calculer l'intégrale :

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

$P(x)$ et $Q(x)$ étant des polynômes en x . Effectuons la décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (ce qui suppose que l'on ait calculé les racines de l'équation $Q(x) = 0$).

Le problème revient à calculer les primitives des divers éléments simples c'est-à-dire :

1° des termes polynomiaux tels que ax^n dont une primitive est :

$$a \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

2° des éléments de la forme :

$$\frac{A}{(x - \alpha)^p} \quad \text{avec } p > 1$$

dont une primitive est :

$$-\frac{A}{(p-1)(x - \alpha)^{p-1}}.$$

Dans le cas où A et a sont des nombres complexes, ce calcul est encore valable. Mais, si P et Q sont à coefficients réels, on groupera dans le résultat les termes imaginaires conjugués de façon à faire disparaître les coefficients complexes,

3° des éléments de la forme :

$$\frac{B}{x - \beta}$$

dont une primitive est :

$$B \operatorname{Log} (x - \beta) = B (\operatorname{Log} |x - \beta| + i \operatorname{Arg} (x - \beta)).$$

Toutefois lorsque β est un nombre complexe et lorsque les polynômes P et Q sont à coefficients réels, on préfère souvent ne pas employer le logarithme d'un nombre complexe à cause de ses multiples déterminations (chap. XVI). On préfère alors grouper les deux éléments imaginaires conjugués :

$$\frac{C + Di}{x - p - qi} + \frac{C - Di}{x - p + qi} = \frac{2C(x - p) - 2Dq}{(x - p)^2 + q^2}$$

et on est conduit à calculer les deux intégrales :

$$\int \frac{2C(x - p)}{(x - p)^2 + q^2} dx \quad \text{et} \quad \int \frac{-2Dq}{(x - p)^2 + q^2} dx.$$

La première, par le changement de variable $t = (x - p)^2$ s'écrit :

$$\int \frac{Cdt}{t + q^2} = C \operatorname{Log} (t + q^2)$$

ou :

$$\int \frac{2C(x - p)}{(x - p)^2 + q^2} dx = C \operatorname{Log} [(x - p)^2 + q^2].$$

La deuxième intégrale à calculer s'écrit, en faisant le changement de variable :

$$u = \frac{x - p}{q}$$

$$\int \frac{-2D du}{u^2 + 1} = -2D \operatorname{Arc} \operatorname{tg} u = -2D \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x - p}{q}.$$

d'où, finalement :

$$\int \frac{2C(x - p) - 2Dq}{(x - p)^2 + q^2} dx = C \operatorname{Log} [(x - p)^2 + q^2] - 2D \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x - p}{q}.$$

En groupant ces résultats on voit que la primitive d'une fraction rationnelle contiendra une fraction rationnelle, une somme de logarithmes et une somme d'arcs tangentes.

REMARQUE. — Vérifions que l'emploi des logarithmes des nombres complexes aurait conduit au même résultat dans le calcul de la primitive de :

$$\frac{C + Di}{x - p - qi} + \frac{C - Di}{x - p + qi}.$$

Cette primitive s'écrit :

$$(C + Di) \operatorname{Log} (x - p - qi) + (C - Di) \operatorname{Log} (x - p + qi).$$

Nous savons qu'en donnant aux logarithmes des déterminations convenables cette fonction est réelle. Calculons donc sa partie réelle. Cette dernière est égale à :

$$2C \operatorname{Log} |x - p - qi| - 2D \operatorname{Arg} (x - p - qi) \\ = C \operatorname{Log} [(x - p)^2 + q^2] + 2D \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{q}{x - p}$$

qui est bien le résultat trouvé précédemment car $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{u} = -\operatorname{Arc} \operatorname{tg} u + \frac{\pi}{2}$.

EXEMPLE 1. — Soit à calculer l'intégrale

$$F(x) = \int \frac{x^8}{(x-1)^3(x^2-2x+2)^2} dx$$

Au chapitre XIV, exemple 5, nous avons donné la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle à intégrer :

$$\frac{x^8}{(x-1)^3(x^2-2x+2)^2} = x + 7 + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{26}{x-1} \\ - \frac{4i}{(x-1-i)^2} + \frac{4i}{(x-1+i)^2} \\ - \frac{16i}{x-1-i} + \frac{16i}{x-1+i}$$

d'où en rassemblant les deux derniers termes

$$- \frac{16i}{x-1-i} + \frac{16i}{x-1+i} = \frac{32}{(x-1)^2 + 1}$$

on a, en intégrant terme à terme :

$$F(x) = \int x dx + 7 \int dx + \int \frac{dx}{(x-1)^3} + 8 \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 26 \int \frac{dx}{x-1} \\ - 4i \int \frac{dx}{(x-1-i)^2} + 4i \int \frac{dx}{(x-1+i)^2} + 32 \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 1} \\ = \frac{x^2}{2} + 7x - \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{8}{x-1} + 26 \operatorname{Log} |x-1| \\ + \frac{4i}{x-1-i} - \frac{4i}{x-1+i} + 32 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (x-1)$$

d'où, en additionnant les deux termes imaginaires conjugués :

$$\frac{4i}{x-1-i} - \frac{4i}{x-1+i} = \frac{-8}{x^2 - 2x + 2}$$

Nous avons finalement :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 7x - \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{8}{(x-1)} + 26 \operatorname{Log} |x-1| \\ - \frac{8}{x^2 - 2x + 2} + 32 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (x-1) + C^te$$

On voit sur cet exemple que la partie la plus longue du calcul est la décomposition en éléments simples. Il y a donc intérêt sinon à supprimer cette décomposition, tout au moins à en éviter une partie si cela est possible. Nous allons indiquer quelques cas où des méthodes particulières diminuent une part importante de la décomposition en éléments simples.

2. — Étude d'un cas particulier.

Considérons le cas où le dénominateur de la fraction à intégrer est de la forme :

$$(ax^2 + bx + c)^n$$

les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$ n'étant pas réelles.

Par une division suivant les puissances décroissantes on peut se ramener au cas où le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. Soit donc à intégrer :

$$\int \frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$$

le degré du polynôme $P(x)$ étant inférieur à $2n$.

Écrivons le trinôme sous forme canonique :

$$ax^2 + bx + c = a[(x-p)^2 + q^2] \quad (\text{avec } q \neq 0)$$

et posons, comme nous l'avons fait précédemment :

$$u = \frac{x-p}{q}$$

l'intégrale prend la forme :

$$\int \frac{P_1(u)}{(u^2 + 1)^n} du$$

$P_1(u)$ étant un polynôme de degré inférieur à $2n$.

Nous sommes donc conduits à intégrer des termes de la forme :

$$\int \frac{u^m}{(u^2 + 1)^n} du$$

et nous distinguerons deux cas.

1° m impair : $m = 2p + 1$.

En posant $u^2 + 1 = v$ d'où $2u \, du = dv$ l'intégrale s'écrit :

$$\int \frac{(v-1)^p}{2v^n} dv$$

et il suffit de développer le numérateur pour pouvoir intégrer terme à terme.

2° m pair : $m = 2p$ avec $p < n$.

En posant $u = \operatorname{tg} \varphi$, l'intégrale s'écrit :

$$\int \frac{\operatorname{tg}^{2p} \varphi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^n} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) d\varphi = \int \sin^{2p} \varphi \cos^{2n-2p-2} \varphi d\varphi$$

et comme $2n - 2p - 2$ est positif ou nul, nous sommes ramenés à une intégrale d'un type déjà étudié (chap. XVIII, § 4).

EXEMPLE 2. — Soit à calculer :

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Comme $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$, posons $x + 1 = \operatorname{tg} \varphi$ d'où

$$dx = (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) d\varphi$$

l'intégrale s'écrit :

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \int \cos^2 \varphi d\varphi = \int \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}.$$

Or :

$$\varphi = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (x + 1) \quad \text{et} \quad \sin 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{2(x + 1)}{x^2 + 2x + 2}$$

d'où :

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (x + 1) + \frac{x + 1}{2(x^2 + 2x + 2)}.$$

3. — Fractions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$.

Une fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$ est une fonction de la forme :

$$\frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$$

le numérateur et le dénominateur étant obtenus en remplaçant u par $\sin x$ et v par $\cos x$ dans les fonctions $P(u, v)$ et $Q(u, v)$ qui sont, par hypothèse, deux polynômes, par rapport aux variables u et v .

L'intégrale :

$$\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)} dx$$

se ramène à une intégrale rationnelle en prenant comme nouvelle variable

$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. On a en effet :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

et, d'autre part :

$$dt = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) \frac{dx}{2} = (1+t^2) \frac{dx}{2}$$

d'où :

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

EXEMPLE 3. — Soit à calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$.

En posant $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ on a :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 + \cos x} &= \int \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{3+t^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

On remarque que cette dernière fonction est discontinue pour toute valeur de x de la forme $(2k+1)\pi$ alors que la fonction à intégrer est continue pour toute valeur de x . Ceci provient de ce que nous avons pris la détermination Arc quel que soit l'intervalle auquel appartient x . On pourrait obtenir une primitive continue de la façon suivante : si l'on prend la détermination Arc lorsque x est compris entre $-\pi$ et $+\pi$, il faut prendre la détermination $k\pi + \operatorname{Arc}$ lorsque x est compris entre $(2k-1)\pi$ et $(2k+1)\pi$. Ceci est important pour le calcul des intégrales définies. On a visiblement :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} > 0$$

et cependant :

$$\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right]_0^{2\pi} = 0.$$

En prenant la primitive continue définie plus haut, on trouve en fait :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\pi + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} 0 \right) \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Pour calculer l'intégrale $\frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)} dx$, on peut, dans certains cas faire un changement autre que celui défini plus haut et qui conduit à intégrer une fraction rationnelle plus simple.

1^{er} cas. — C'est celui où la fonction $\frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$ se présente comme une fraction rationnelle en $\operatorname{tg} x$, c'est-à-dire comme une fonction de la forme $R(\operatorname{tg} x)$ où $R(u)$ est une fraction rationnelle en u .

En prenant comme nouvelle variable $\operatorname{tg} x = t$, on peut écrire :

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = dt \quad \text{ou} \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2}$$

et on a :

$$\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)} dx = \int R(\operatorname{tg} x) dx = \int R(t) \frac{dt}{1 + t^2}.$$

On est donc bien ramené à intégrer une fraction rationnelle en t . C'est en particulier ce qui se produit si $P(\sin x, \cos x)$ et $Q(\sin x, \cos x)$ ne contiennent que des termes de même parité par rapport à l'ensemble des deux quantités $\sin x$ et $\cos x$. Par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x \cos x + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos^3 x} &= \frac{\sin^2 x \cos x + (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^3 x} \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 x + (\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg}^2 x + 1)}{\operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x + 1) + 1}. \end{aligned}$$

2^e cas. — C'est celui où la fonction $\frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$ peut se mettre sous la forme $\cos x R(\sin x)$, où $R(\sin x)$ est une fraction rationnelle en $\sin x$. Dans ce cas, on aura en effet :

$$\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)} dx = \int R(\sin x) \cos x dx = \int R(t) dt$$

en prenant comme nouvelle variable $t = \sin x$. On est donc bien amené à intégrer une fraction rationnelle en t .

On sera toujours dans ce cas si $\frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$ se présente sous la forme $\cos x \frac{P_1(\sin x, \cos x)}{Q_1(\sin x, \cos x)}$ où P_1 et Q_1 sont des polynômes en $\sin x$ et $\cos x$ tels que $\cos x$ n'intervienne que par ses puissances paires (on remplacera en effet $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$).

3^e cas. — C'est celui où la fonction $\frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$ peut se mettre sous la forme $\sin x R(\cos x)$ où $R(\cos x)$ est une fraction rationnelle en $\cos x$. On pose cette fois $t = \cos x$.

EXEMPLE 4. — Soit à calculer :

$$\int \frac{1 + \sin x + \cos x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

En décomposant cette intégrale, on obtient successivement :

1^o $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$ que l'on calcule en posant $\operatorname{tg} x = t$:

$$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{dt}{1 + 2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} t\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} [\sqrt{2} \operatorname{tg} x].$$

2^o $\int \frac{\sin x \, dx}{1 + \sin^2 x}$ que l'on calcule en posant $\cos x = u$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \, dx}{1 + \sin^2 x} &= \int \frac{-du}{2 - u^2} = \int \left[\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - u} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2} + u} \right] du = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{Log} \left| \frac{\sqrt{2} - u}{\sqrt{2} + u} \right| \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{Log} \left(\frac{\sqrt{2} - \cos x}{\sqrt{2} + \cos x} \right). \end{aligned}$$

3^o $\int \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin^2 x}$ que l'on calcule en posant $\sin x = v$:

$$\int \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{dv}{1 + v^2} = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} v = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (\sin x).$$

On aura donc :

$$\int \frac{1 + \sin x + \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} [\sqrt{2} \operatorname{tg} x] + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{Log} \left(\frac{\sqrt{2} - \cos x}{\sqrt{2} + \cos x} \right) + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (\sin x).$$

4. — Fractions rationnelles en e^x .

Pour calculer une intégrale de la forme $\int R(e^x) dx$ où $R(e^x)$ est une fraction rationnelle en e^x , on prend comme nouvelle variable $e^x = t$. D'où $dt = e^x dx$ et $dx = \frac{dt}{t}$. On a alors :

$$\int R(e^x) dx = \int R(t) \frac{dt}{t}$$

et on est ramené à intégrer une fraction rationnelle en t .

On peut de cette manière intégrer toutes les fractions rationnelles en $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$ à partir des formules :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

REMARQUE. — Les considérations du numéro précédent se transposent sans peine au cas où l'on veut intégrer une fraction rationnelle en $\text{sh } x$ et $\text{ch } x$. En particulier, on pourra toujours se ramener à l'intégration d'une fraction rationnelle en prenant comme nouvelle variable $t = \text{th } \frac{x}{2}$ et en appliquant les relations immédiates :

$$\text{ch } x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad \text{et} \quad \text{sh } x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

EXERCICES

1° Calculer les primitives :

$$\int \frac{dx}{2 + \text{ch } x}, \quad \int \frac{x^4 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x + k^2 \sin^2 x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

$$R. \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Log} \frac{e^x + 2 - \sqrt{3}}{e^x + 2 + \sqrt{3}}, \quad \frac{x^2}{2} + 6x + \text{Log} \left| \frac{(x-1)(x-3)^{41}}{(x-2)^{17}} \right|$$

$$\frac{1}{k} \text{Arc tg } (k \text{ tg } x), \quad \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \text{Log} \left| \text{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

*2° Calculer les primitives :

$$\int \frac{1 - \cos \frac{x}{3}}{\sin \frac{x}{2}} dx, \quad \int \frac{dx}{x^6 - 1}, \quad \int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}},$$

$$R. \quad 3 \text{Log} \left| \frac{1 + 2 \cos \frac{x}{6}}{1 - 2 \cos \frac{x}{6}} \right|, \quad \frac{1}{12} \text{Log} \frac{(x-1)^2 (x^2 - x + 1)}{(x-1)^2 (x^2 + x + 1)} \frac{1}{2\sqrt{3}} + \text{Arc tg} \frac{x\sqrt{3}}{x^2 - 1}$$

$$\text{Arg sh } x + \text{Arc sin } x + \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2}}{x},$$

*3° Établir les résultats, en calculant d'abord les intégrales indéfinies :

$$\int_{a-b}^{a+b} \frac{dx}{\text{ch } x + \text{ch } a} = \frac{1}{\text{sh } a} \text{Log} \frac{\text{ch} \left(a + \frac{b}{2} \right)}{\text{ch} \left(a - \frac{b}{2} \right)},$$

$$\int_1^7 \frac{x(x^2 + 2) \text{Log } x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{49 \text{Log } 7 - 40}{5\sqrt{2}}, \quad \int_0^1 e^x \frac{x^4 + 4x - 1}{(x^2 + 1)^2} dx = 1.$$

****4°** Vérifier que $\int \frac{15x^6 - 95x^4 + 32x^3 + 27x^2 - 16x + 5}{x^2(x^2 - 4x + 5)^4} dx$ est une fraction rationnelle.

****5°** Montrer que, si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, $\int_{-\theta}^{+\theta} \frac{x dx}{\cos x} = 0$ et en déduire $\int_0^{2\theta} \frac{x dx}{\cos(x - \theta)}$ sans calculer la primitive $\int \frac{x dx}{\cos(x - \theta)}$.

R. $2\theta \operatorname{Log} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right).$

CHAPITRE XX

GÉNÉRALISATION DE LA NOTION D'INTÉGRALE DÉFINIE

1. — *Intégrales ayant une borne d'intégration infinie.*

Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle de la forme $(a, +\infty[$. La fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est alors définie pour toute valeur de x supérieure ou égale à a .

Si la fonction $F(x)$ tend vers une limite finie L lorsque x tend vers $+\infty$, on note cette limite :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

(symbole qui se lit : somme de a à plus l'infini de $f(x) dx$) et on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est *convergente*.

Si $F(x)$ ne tend pas vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)$ est *divergente* et le symbole $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ne représente alors plus rien.

Lorsqu'on connaît une primitive $G(x)$ de la fonction $f(x)$, on a :

$$F(x) = G(x) - G(a)$$

et pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge, il faut et il suffit que $G(x)$ tende vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. On a alors :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) - G(a)$$

EXEMPLE 1. — α étant un nombre réel quelconque et a un nombre strictement positif, cherchons quelle condition doit remplir le nombre α pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ soit convergente.

Si α est différent de 1, on peut prendre :

$$G(x) = \int \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}.$$

Mais pour que $G(x)$ tende vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, il faut et il suffit que l'on ait $\alpha - 1 > 0$, c'est-à-dire $\alpha > 1$.

On a dans ce cas :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$$

et, par suite :

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = -\frac{1}{(1-\alpha)a^{\alpha-1}} = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}.$$

Si α est égal à 1, on peut prendre :

$$G(x) = \int \frac{dx}{x} = \text{Log } x$$

et on voit que $G(x)$ ne tend pas vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.
En résumé :

Le nombre a étant strictement positif, pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ soit convergente, il faut et il suffit que l'on ait $\alpha > 1$.

2. — Critères de convergence.

Lorsque l'on veut seulement savoir si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est convergente ou non, sans se préoccuper de sa valeur exacte dans le cas où elle est convergente, il est souvent inutile de calculer pour cela une primitive de $f(x)$ (Rappelons d'ailleurs que dans bien des cas une telle primitive ne peut pas s'exprimer à l'aide des fonctions que nous connaissons). Nous allons indiquer dans ce paragraphe quelques méthodes qui permettent de conclure à la convergence ou à la divergence de l'intégrale examinée sans avoir à connaître de primitive de $f(x)$.

Remarquons d'abord que si b appartient à l'intervalle $(a, +\infty[$, l'égalité :

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^x f(t) dt$$

montre que

Les deux intégrales $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_b^{+\infty} f(x) dx$ sont convergentes ou divergentes en même temps et l'on a :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

(ce qui généralise la formule de Chasles).

Par suite (et sans qu'il soit besoin de le répéter chaque fois) pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ soit convergente, il suffit que $f(x)$ vérifie l'un des critères de convergence que nous allons indiquer lorsque x est suffisamment grand, c'est-à-dire qu'il existe un nombre b tel que $f(x)$ vérifie les conditions du critère lorsque $x \geq b$ (il est inutile que $f(x)$ vérifie ces conditions lorsque x est compris entre a et b).

Remarquons également que si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions telles que les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ soient convergentes et si A et B sont des constantes, l'intégrale $\int_a^{+\infty} (Af(x) + Bg(x)) dx$ est également convergente et que l'on a :

$$\int_a^{+\infty} (Af(x) + Bg(x)) dx = A \int_a^{+\infty} f(x) dx + B \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

Supposons d'abord que l'on ait $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq a$. La quantité $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est alors une fonction non décroissante de x et par suite deux cas seulement sont possibles :

ou bien $F(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (circonstance que l'on note parfois $\int_a^{+\infty} f(x) dx = +\infty$);

ou bien $F(x)$ est majoré par un nombre fini K sur l'intervalle $(a, +\infty[$ et par suite $F(x)$ tend par valeurs inférieures vers un nombre fini $L \leq K$ lorsque x tend vers $+\infty$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est alors convergente et égale à L .

Cette remarque a la conséquence importante suivante :

THÉORÈME 1 (DE COMPARAISON). — *Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions continues dans l'intervalle $(a, +\infty[$ telles que pour tout $x \geq a$ on ait les inégalités :*

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ entraîne celle de l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

En effet, l'inégalité $f(x) \leq g(x)$ entraîne que l'on a pour tout $x \geq a$:

$$\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt.$$

L'inégalité $0 \leq g(x)$ entraîne :

$$\int_a^x g(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

On a donc toujours $\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$, ce qui entraîne, puisque $f(x) \geq 0$, la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ et l'inégalité :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

REMARQUES. — 1. D'après ce qui précède, il suffit évidemment qu'il existe un nombre $b \geq a$ tel que l'on ait :

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad (\forall x \geq b)$$

pour que la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ entraîne celle de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

2. Supposons maintenant que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$, continues dans $(a, +\infty)$, soient telles qu'il existe des nombres A et B strictement positifs tels que les inégalités :

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{et} \quad Ag(x) \leq f(x) \leq Bg(x)$$

soient vérifiées dès que x est supérieur ou égal à un certain nombre b . Les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ sont alors convergentes ou divergentes en même temps.

En effet, la convergence de $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ entraîne celle de $\int_a^{+\infty} Bg(x) dx$, donc celle de $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ et la convergence de $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ entraîne celle de $\int_a^{+\infty} Ag(x) dx$, donc celle de $\int_a^{+\infty} \frac{1}{A} Ag(x) dx = \int_a^{+\infty} g(x) dx$.

3. Cette circonstance se trouve réalisée en particulier lorsque les fonctions $f(x)$ et $g(x)$, positives pour x suffisamment grand, sont telles que le rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ tende vers une limite finie m non nulle lorsque x tend vers $+\infty$.

En considérant le cas où $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, on peut donc énoncer le :

THÉORÈME 2. — Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $(a, +\infty)$, positive lorsque x est suffisamment grand et telle que $f(x)$ soit un infiniment petit d'ordre α par rapport à l'infiniment petit principal $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ soit convergente, il faut et il suffit que l'on ait $\alpha > 1$.

EXEMPLE 2. — L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente. On a en effet $x^2 < e^{x^2}$ lorsque x est suffisamment grand (chap. X). La convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ entraîne donc celle de $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ qui entraîne à son tour celle de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

EXEMPLE 3. — L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ est divergente car, lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ est un infiniment petit d'ordre 1 par rapport à $\frac{1}{x}$.

3. — Cas d'une fonction de signe quelconque.

Le cas où la fonction $f(x)$ est toujours négative ou nulle pour x assez grand se ramène au cas d'une fonction toujours positive ou nulle grâce à la multiplication par -1 .

Si la fonction $f(x)$ ne garde pas un signe constant lorsque x est suffisamment grand, on commence par étudier la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ car on a le :

THÉORÈME 3. — $f(x)$ étant une fonction continue dans l'intervalle $(a, +\infty)$, la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ entraîne celle de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

Soient en effet les deux fonctions $f^+(x)$ et $f^-(x)$ ainsi définies :

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

et :

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Ces deux fonctions sont continues dans l'intervalle $(a, +\infty[$ et l'on a :
 $0 \leq f^+(x) \leq |f(x)| \quad \text{et} \quad 0 \leq f^-(x) \leq |f(x)| \quad (\forall x \geq a).$

La convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ entraîne donc celles des intégrales $\int_a^{+\infty} f^+(x) dx$ et $\int_a^{+\infty} f^-(x) dx$, et encore celle de $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ puisque $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

D'où le théorème.

Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ est convergente, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est dite *absolument convergente*. Toute intégrale absolument convergente est donc convergente. Mais il existe des intégrales qui sont convergentes sans être absolument convergentes. De telles intégrales sont dites *semi-convergentes*.

EXEMPLE 4. — Le nombre α étant strictement positif, montrons la convergence de l'intégrale :

$$\int_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx.$$

1^{er} cas. — Si $\alpha > 1$ l'intégrale est absolument convergente puisque

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}.$$

2^e cas. — Si $0 < \alpha \leq 1$, une intégration par parties donne

$$\int_{2\pi}^x \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \left[\frac{-\cos x}{x^\alpha} \right]_{2\pi}^x - \alpha \int_{2\pi}^x \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} dx$$

La dernière intégrale est absolument convergente puisque $\alpha + 1 > 1$ et comme

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\cos X}{X^\alpha} = 0,$$

l'intégrale du 1^{er} membre est convergente.

Montrons qu'elle ne converge pas absolument. On a en effet :

$$\int_{2\pi}^x \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \geq \int_{2\pi}^x \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx$$

or

$$\int_{2\pi}^x \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx = \int_{2\pi}^x \frac{1 - \cos 2x}{2x^\alpha} dx = \int_{2\pi}^x \frac{dx}{2x^\alpha} - \int_{2\pi}^x \frac{\cos 2x}{2x^\alpha} dx.$$

Au 2^e membre, nous avons la différence de deux intégrales dont la première diverge et la seconde converge comme on vient de le voir sur un exemple analogue, par suite l'intégrale du premier membre diverge.

REMARQUE. — La convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ n'entraîne pas nécessairement que la fonction $f(x)$ tende vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. La fonction $f(x)$ peut même ne pas être majorée sur $(a, +\infty)$ (comme le montre l'exemple de la fonction $f(x) = 3x \cos x^3 - \frac{\sin x^3}{x^2}$ qui admet pour primitive $\frac{\sin x^3}{x}$).

4. — *Intégrales ayant deux bornes infinies.*

On peut immédiatement transposer la théorie précédente pour définir des intégrales de la forme $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ lorsque $f(x)$ est une fonction continue sur l'intervalle $]-\infty, a)$. La théorie de la convergence de ces intégrales est pratiquement la même que précédemment.

La fonction f étant continue sur l'intervalle $]-\infty, +\infty)$, s'il existe un nombre a tel que les deux intégrales $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ et $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ soient convergentes, on dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est *convergente* et on pose :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

A partir de la généralisation de la formule de Chasles établie au § 2, on voit que cette définition ne dépend pas du nombre a choisi.

C'est ainsi que l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

est convergente.

REMARQUE. — Soit une fonction $f(x)$ telle que l'expression $\int_{-X}^X f(x) dx$ tende vers une limite finie L lorsque X tend vers $+\infty$. Il ne faudrait pas croire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est nécessairement convergente comme le montre le contre-exemple de $f(x) = x$:

On a $\int_{-X}^{+X} x dx = 0$ pour tout X , alors que les intégrales $\int_a^{+\infty} x dx$ et $\int_{-\infty}^a x dx$ sont divergentes.

On nomme parfois une telle limite L la *valeur principale* de l'intégrale soit

$$L = vp \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^X f(x) dx.$$

Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est convergente sa valeur sera égale à sa valeur principale.

5. — *Intégrale d'une fonction discontinue.*

x_0 et b étant deux nombres que nous supposerons tels que $x_0 < b$ (pour fixer les idées) et $f(x)$ étant une fonction continue dans l'intervalle $]x_0, b)$, mais pas nécessairement continue à droite pour x_0 , nous nous proposons dans ce paragraphe de donner dans certains cas un sens à l'expression $\int_{x_0}^b f(x) dx$.

La fonction $F(\varepsilon) = \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x) dx$ se trouve définie pour toute valeur de ε telle que $0 < \varepsilon \leq b - x_0$. Si la fonction $F(\varepsilon)$ tend vers une limite finie L lorsque ε tend vers 0 à droite, nous dirons que l'intégrale $\int_{x_0}^b f(x) dx$ est *convergente* et nous poserons :

$$L = \int_{x_0}^b f(x) dx.$$

Dans le cas où $F(\varepsilon)$ ne tend vers aucune limite, nous dirons que l'intégrale $\int_{x_0}^b f(x) dx$ est *divergente*.

C'est ainsi que l'on voit immédiatement que si la fonction $f(x)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers x_0 par valeurs supérieures, c'est-à-dire si $f(x_0 + 0)$ existe, l'intégrale $\int_{x_0}^b f(x) dx$ est convergente et a pour valeur $\int_{x_0}^b g(x) dx$, la fonction $g(x)$ étant égale à $f(x)$ sur l'intervalle $]x_0, b)$ et à $f(x_0 + 0)$ pour $x = x_0$. On voit en particulier que l'intégrale $\int_{x_0}^b f(x) dx$ ne dépend pas de la valeur $f(x_0)$ prise par la fonction f en x_0 (si $f(x_0)$ est défini).

On peut développer une théorie concernant la convergence des intégrales de fonction discontinue calquée sur la théorie exposée dans les paragraphes précédents. Cette ressemblance n'est d'ailleurs pas purement formelle car on peut se ramener à l'étude de la convergence d'une intégrale à borne infinie en faisant le changement de variable $X = \frac{1}{x - x_0}$.

Nous ne traiterons donc pas cette théorie en détail, mais nous en indiquons les points les plus importants.

Étudions d'abord la convergence de l'intégrale $\int_{x_0}^b \frac{1}{(x - x_0)^\alpha} dx$. Si α est distinct de 1, on a :

$$\int \frac{1}{(x - x_0)^\alpha} dx = \frac{1}{(1 - \alpha)(x - x_0)^{\alpha-1}}$$

et par suite :

$$\int_{x_0+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x - x_0)^\alpha} = \frac{1}{(1 - \alpha)(b - x_0)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1 - \alpha)\varepsilon^{\alpha-1}}.$$

Pour que l'intégrale soit convergente il faut et il suffit donc que $\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}$ tende vers une limite finie lorsque ε tend vers 0, c'est-à-dire il faut et il suffit que l'on ait $\alpha - 1 < 0$ d'où $\alpha < 1$.

Si $\alpha = 1$, on a :

$$\int \frac{dx}{x - x_0} = \text{Log} |x - x_0| \quad \text{et} \quad \int_{x_0-\varepsilon}^b \frac{dx}{x - x_0} = \text{Log} |b - x_0| - \text{Log} |\varepsilon|.$$

Cette expression ne tend pas vers une limite finie lorsque ε tend vers 0. Donc :

Pour que l'intégrale $\int_{x_0}^b \frac{dx}{(x - x_0)^\alpha}$ soit convergente, il faut et il suffit que l'on ait $\alpha < 1$.

Il est bien évident que si b' est un nombre tel que $x_0 < b' \leq b$, les deux intégrales $\int_{x_0}^{b'} f(x) dx$ et $\int_{x_0}^b f(x) dx$ sont convergentes ou divergentes en même temps. Pour étudier la convergence de l'intégrale $\int_{x_0}^b f(x) dx$, il suffit donc d'examiner la fonction $f(x)$ pour des valeurs de x aussi proches qu'on le voudra de x_0 .

Si la fonction $f(x)$ est positive ou nulle pour tout $x \in]x_0, b)$ on essaie d'étudier la convergence de l'intégrale $\int_{x_0}^b f(x) dx$ en comparant la fonction $f(x)$ à une autre fonction $g(x)$ également positive ou nulle sur l'intervalle $]x_0, b)$.

En particulier, si la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers une limite finie m non nulle lorsque x tend vers x_0 à droite, on voit que les deux intégrales $\int_{x_0}^b f(x) dx$ et $\int_{x_0}^b g(x) dx$ sont convergentes ou divergentes en même temps. C'est ainsi que l'on a le :

THÉORÈME 4. — Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $]x_0, b)$, positive lorsque x est suffisamment proche de x_0 et telle que $f(x)$ soit un infiniment grand d'ordre α par rapport à l'infiniment grand principal $\frac{1}{x - x_0}$ lorsque x tend vers x_0 à droite. Pour que l'intégrale $\int_{x_0}^b f(x) dx$ soit convergente, il faut et il suffit que l'on ait $\alpha < 1$.

Lorsque l'intégrale $\int_{x_0}^b |f(x)| dx$ est convergente on démontre que l'intégrale $\int_{x_0}^b f(x) dx$ est convergente et on dit encore qu'une telle intégrale est *absolument convergente*. En particulier,

Si la fonction $|f(x)|$ est majorée sur $]x_0, b)$, l'intégrale $\int_{x_0}^b f(x) dx$ est convergente.

Considérons maintenant une fonction $f(x)$ continue sur l'intervalle fermé (a, b) sauf pour une certaine valeur x_0 comprise dans l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Si les deux intégrales $\int_a^{x_0} f(x) dx$ et $\int_{x_0}^b f(x) dx$ sont convergentes, on dit encore que l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est *convergente* et on pose :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx$$

REMARQUE. — Il est possible que la somme

$$\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x) + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x) dx$$

ait une limite lorsque ε tend vers 0 sans que chacune des deux intégrales converge. On appelle alors cette limite la *valeur principale* de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$.

Par exemple $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x(x+2)}$ n'a pas de sens, mais

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x(x+2)} + \int_{\varepsilon}^2 \frac{dx}{x(x+2)} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Log} \frac{1}{2} \cdot \frac{2+\varepsilon}{2-\varepsilon} = -\text{Log} 2,$$

d'où :

$$vp \int_{-1}^2 \frac{dx}{x(x+2)} = -\text{Log} 2.$$

Plus généralement, soit une fonction $f(x)$ continue à *peu près partout* sur l'intervalle fermé (a, b) c'est-à-dire continue sauf en un nombre fini de points $x_1, x_2, \dots, x_n$ tels que :

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$$

Si $a = c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n = b$ sont des nombres tels que :

$$c_0 \leq x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < x_3 < \dots < c_{n-1} < x_n \leq c_n$$

et si chacune des intégrales :

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x) dx \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

est convergente, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est *convergente* et on pose :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_{n-1}}^b f(x) dx.$$

En particulier

Si la fonction $|f(x)|$ est majorée sur l'intervalle (a, b) l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est toujours convergente ⁽¹⁾.

Si la fonction $f(x)$ n'a entre a et b qu'un nombre fini de points de discontinuité, tous de *première espèce*, c'est-à-dire si $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent pour tout x appartenant à l'intervalle ouvert $]a, b[$ et si $f(a+0)$ et $f(b-0)$ existent (en supposant

$a \leq b$), l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ a une interprétation

géométrique très simple (c'est l'aire algébrique hachurée sur la figure 1) et la fonction

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ admet en tout point x de $]a, b[$ les

limites $f(x-0)$ et $f(x+0)$ pour dérivée à gauche et dérivée à droite. Si $a < b$, la fonction F admet en a la dérivée à droite $f(a+0)$ et en b la dérivée à gauche $f(b-0)$.

c étant un nombre quelconque compris entre a et b , on vérifie que l'on a encore la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

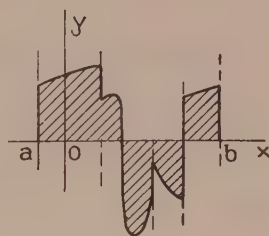


FIG. 1.

⁽¹⁾ Une fonction continue à peu près partout sur l'intervalle (a, b) et bornée en valeur absolue sur cet intervalle sera dite de type *CB* (voir tome II, p. 231).

Si les intégrales $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^b g(x) dx$ sont convergentes et si A et B sont des constantes, l'intégrale $\int_a^b (Af(x) + Bg(x)) dx$ est encore convergente et on a :

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x)) dx = A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx.$$

Si les deux intégrales $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^b g(x) dx$ sont convergentes et si on a :

$$f(x) \leq g(x)$$

pour toute valeur x de (a, b) sauf au plus pour un nombre fini de valeurs, on a l'inégalité :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

En effet les valeurs pour lesquelles on aurait $f(x) > g(x)$ sont nécessairement des points de discontinuité de l'une des fonctions f ou g et la valeur de f (ou de g) prise en ce point n'influe pas sur la valeur de l'intégrale correspondante.

Soient enfin un nombre a et une fonction $f(x)$ telle que, pour tout $x \geq a$, la fonction f n'admette qu'un nombre fini de points de discontinuité sur (a, x)

et telle que l'intégrale $\int_a^x f(t) dt$ soit convergente. Si $\int_a^x f(t) dt$ tend vers une

limite finie L lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

est *convergente* et on pose $\int_a^{+\infty} f(x) dx = L$.

La théorie faite dans les paragraphes 1, 2 et 3 s'étend sans peine à ces intégrales. En particulier lorsque la fonction $f(x)$ n'admet qu'un nombre fini de points de discontinuité sur tout intervalle de longueur fini, on peut parfois

définir l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

EXERCICES

1° Calculer :

$$\int_0^{+\infty} (1 - \operatorname{th} x) dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x^4} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+a^2-1}} \quad (a > 0).$$

$$R. \quad \operatorname{Log} 2, \quad \frac{1}{6}(\operatorname{Log} 16 - 1), \quad \frac{\operatorname{Log}(1+a)}{a}.$$

2° Calculer :

$$\int_0^1 \frac{\text{Log } x \cdot dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^1 \frac{x \, dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} \text{Log } x \, dx.$$

$$R^* \quad \text{Log } 2 = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{2}.$$

3° Tracer le graphe de $y = \int_x^{+\infty} (t^2 + at + b)e^{-t} dt$, a et b étant choisis de façon que ce graphe soit tangent à Ox au point d'abscisse 1.

*4° Établir l'égalité :

$$\int_0^{2\pi} E(n \sin t) \, dt = -\pi$$

où n désigne un entier strictement positif et $E(x)$ le plus grand entier ordinaire égal ou inférieur à x .

*5° Établir l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2)(x^2+4)}} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$$

en faisant dans la première intégrale le changement de variables défini par $x = t - \frac{1}{t}$.

*6° Montrer que n étant un entier positif :

$$\int_0^1 (\text{Log } x)^n \, dx = (-1)^n n !$$

*7° On pose $T_n = \cos n$ (Arc cos x) où n désigne un entier positif. Vérifier les égalités :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = 0, \quad \text{si } n \neq m$$

**8° Établir l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$$

où n désigne un entier positif (on établira d'abord la formule :

$$\int_0^t \frac{dx}{1+x^n} = \sum_{0 \leq k}^{n-1} \frac{\alpha_k}{n} [\text{Log } |x - \alpha_k| + i \text{Arg } (x - \alpha_k)]_0^t$$

formule dans laquelle :

$$\alpha_k = e^{\frac{i\pi}{n}(1+2k)}$$

**9° Montrer que si $0 < a < b$, il en résulte

$$\frac{\pi}{\sqrt{b}} < \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(b-x)(x-a)}} < \frac{\pi}{\sqrt{a}}$$

et en déduire que :

$$\lim_{b \rightarrow a} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(b-x)(x-a)}} = \frac{\pi}{\sqrt{a}}.$$

****10°** Établir la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Log} \sin t \, dt$. Vérifier les égalités

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Log} \cos t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Log} \frac{\sin 2t}{2} \, dt$$

et en déduire

$$I = -\frac{\pi}{2} \text{Log} 2$$

(on ne cherchera pas à calculer la primitive $\int \text{Log} \sin t \, dt$).

****11°** Montrer que $\int_1^{+\infty} \sin x^\alpha \, dx$ est convergente si $|\alpha| > 1$ et divergente si $|\alpha| \leq 1$.

****12°** Montrer, sans chercher à expliciter les primitives, que si $0 < a \leq b$ et si $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \, dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} \, dt$$

et en déduire :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \, dt \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 1} \int_y^{y^2} \frac{dt}{\text{Log} t}.$$

$$R. \quad \text{Log} \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \text{Log} 2.$$

****13°** On considère la fonction définie par les conditions : si $n < x < n+1$, $f(x) = \frac{1}{e^x \sqrt{x-n}}$, $\forall n$ entier positif ou nul. Montrer que l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, dx$$

est convergente.

R. On bornera $f(x)$ par la fonction $g(x) = \frac{e^{-n}}{\sqrt{x-n}}$.

CHAPITRE XXI

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

1. — Définitions.

On est conduit fréquemment à chercher une fonction inconnue $y(x)$ qui doit satisfaire à des conditions imposées à l'avance :

EXEMPLE 1. — Rechercher une primitive d'une fonction donnée $f(x)$ revient à chercher une fonction y satisfaisant à l'égalité :

$$y' = f(x).$$

EXEMPLE 2. — L'étude des mouvements vibratoires conduit à chercher une fonction y satisfaisant à l'égalité :

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

où ω est un nombre donné.

Les exemples 1 et 2 sont des cas particuliers d'équations différentielles.

Une *équation différentielle* est une équation de la forme :

$$1) \quad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

où $F(t, t_0, t_1, \dots, t_n)$ est une fonction donnée des $n + 2$ variables indépendantes $(t, t_0, \dots, t_n)$.

Une *solution* ou *intégrale* de l'équation (1) sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ est alors une fonction $y(x)$ définie sur I ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n telle que si l'on remplace t par x , t_0 par $y(x)$, t_1 par $y'(x)$, $\dots$, t_n par $y^{(n)}(x)$ dans l'expression $F(t, t_0, t_1, \dots, t_n)$, on obtienne une fonction de x nulle pour toute valeur de $x \in I$. Le graphe de la fonction $y(x)$ est alors appelé une *courbe intégrale* de l'équation différentielle.

L'ordre le plus élevé des dérivations de la fonction inconnue intervenant effectivement dans l'équation (1) est appelé l'*ordre* de l'équation différentielle (1). C'est ainsi que l'équation différentielle :

$$x^2 y' - y^3 + x = 0$$

est du premier ordre, et que l'équation différentielle :

$$y''y''' - x^2 - y^2 = 0$$

est du troisième ordre.

Intégrer ou *résoudre* l'équation différentielle (1) c'est trouver toutes ses solutions sur les intervalles les plus grands possible. C'est ainsi que, si l'on désigne par $F(x)$ une primitive de la fonction $f(x)$, l'équation différentielle du premier ordre de l'exemple 1

$$y' = f(x)$$

admet comme solution générale

$$y = F(x) + \lambda$$

λ désignant un paramètre arbitraire.

Nous avons déjà remarqué au chapitre VIII (§ 4) que les fonctions $y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$, où A et B sont deux paramètres arbitraires, sont des solutions de l'équation du second ordre de l'exemple 2 : $y'' + \omega^2 y = 0$.

Nous verrons, au chapitre suivant, que l'on obtient ainsi toutes les solutions de cette équation.

2. — Équations linéaires du premier ordre.

Ce sont les équations de la forme :

$$(2) \quad y' = a(x)y + b(x)$$

où $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions données de la variable x .

Dans le cas où la fonction $b(x)$ est nulle, l'équation (2) est dite *sans second membre* (ou encore *linéaire homogène*). De toute façon l'équation :

$$(2') \quad y' = a(x)y$$

est dite l'*équation sans second membre associée* à l'équation (2). Pour intégrer l'équation (2) on commence par intégrer l'équation sans deuxième membre associée.

En laissant de côté l'intégrale particulière $y = 0$, on voit que l'équation (2') s'écrit :

$$\frac{dy}{y} = a(x) dx.$$

Désignons par $A(x)$ une primitive de la fonction $a(x)$, l'équation précédente exprime que les fonctions $\text{Log } |y|$ et $A(x)$ ont une même différentielle, c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que :

$$\text{Log } |y| = A(x) + C$$

ou encore :

$$|y| = e^C e^{A(x)}$$

c'est-à-dire :

$$y = \pm e^C e^{A(x)}.$$

La constante $\pm e^C$ désignant n'importe quel nombre non nul, on voit que les intégrales de l'équation (2') sont les fonctions de la forme :

$$(2'') \quad y = K e^{A(x)}$$

K désignant une constante quelconque (le cas $K = 0$ correspond à l'intégrale particulière que nous avons laissée de côté tout à l'heure).

Ceci montre en particulier que si $h(x)$ est une solution non constamment nulle de l'équation sans deuxième membre (2'), les intégrales de l'équation (2') sont les fonctions de la forme :

$$y = L h(x)$$

où L désigne une constante arbitraire.

Supposons maintenant que nous connaissions une intégrale particulière $y_1(x)$ de l'équation avec second membre (2).

En retranchant membre à membre l'égalité :

$$y_1' = a(x) y_1 + b(x)$$

de l'égalité (2), on voit que l'équation (2) équivaut à l'équation :

$$y' - y_1' = a(x) (y - y_1)$$

c'est-à-dire que pour que y soit une intégrale de l'équation (2) il faut et il suffit que $y - y_1$ soit une intégrale de l'équation sans second membre associée (2'), donc que y soit de la forme :

$$y = y_1 + K e^{A(x)}.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation (2).

Ainsi donc

On obtient l'intégrale générale de l'équation avec deuxième membre en ajoutant à l'intégrale générale de l'équation sans deuxième membre associée une solution particulière de l'équation avec deuxième membre.

Pour intégrer l'équation (2) nous sommes donc amenés à chercher une solution particulière de cette équation. Ceci peut se faire au moyen de la méthode dite de la *variation de la constante* et qui consiste à faire un changement de fonction inconnue.

Dans l'expression (2'') de l'intégrale générale de l'équation sans deuxième membre, remplaçons la constante K par une fonction $z(x)$ (encore inconnue) de x et cherchons quelle condition doit remplir cette fonction $z(x)$ pour que la fonction $y = z(x) e^{A(x)}$ soit une solution de l'équation (2).

L'égalité précédente entraîne :

$$y' = z(x) e^{A(x)} A'(x) + z'(x) e^{A(x)} = z(x) e^{A(x)} a(x) + z'(x) e^{A(x)}$$

(puisque $A'(x) = a(x)$) et conduit à l'équation différentielle :

$$z(x) e^{A(x)} a(x) + z'(x) e^{A(x)} = a(x) z(x) e^{A(x)} + b(x)$$

qui s'écrit :

$$z'(x) e^{A(x)} = b(x).$$

Pour que la fonction $z(x) e^{A(x)}$ soit une solution particulière de l'équation (2) il faut et il suffit donc que $z(x)$ soit une primitive de la fonction $b(x) e^{-A(x)}$, d'où l'intégrale particulière cherchée.

EXEMPLE 3. — Soit à intégrer l'équation différentielle :

$$(3) \quad xy' = y + x.$$

Elle est linéaire, car elle s'écrit :

$$(3') \quad y' = \frac{y}{x} + 1.$$

L'équation sans second membre associée s'écrit :

$$y' = \frac{y}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

soit, en intégrant membre à membre :

$$\text{Log } |y| = \text{Log } |x| + C \quad \text{ou} \quad |y| = e^C |x|.$$

L'intégrale générale de l'équation sans deuxième membre est donc $y = Kx$. Cherchons une solution particulière de l'équation avec deuxième membre par la méthode de la variation de la constante et posons pour cela :

$$y = x z(x).$$

En portant cette valeur de y dans l'équation (3) on obtient :

$$z(x) + x z'(x) = z(x) + 1$$

soit encore :

$$x z'(x) = 1,$$

d'où :

$$z'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad z(x) = \text{Log } |x| \text{ (par exemple).}$$

La fonction $y_1 = x \text{Log } |x|$ est donc une solution particulière de l'équation (3). On en déduit l'intégrale cherchée :

$$y = x \text{Log } |x| + Kx.$$

EXEMPLE 4. — Étant donné un circuit électrique de résistance R et de self-induction L , si on applique aux bornes la force électromotrice constante E , l'intensité du courant électrique dans le circuit est une fonction $i(t)$ de l'époque t telle que :

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E.$$

Cette dernière égalité est une équation différentielle linéaire qui permet de prévoir la forme de la fonction $i(t)$.

L'équation sans deuxième membre s'écrit :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt$$

dont l'intégrale générale est :

$$i(t) = K e^{-\frac{R}{L}t}.$$

L'équation sans deuxième membre admet manifestement la solution particulière $i = \frac{E}{R}$. L'intégrale générale de l'équation différentielle est donc :

$$i(t) = \frac{E}{R} + K e^{-\frac{R}{L}t}.$$

En particulier si le circuit est fermé à l'époque $t = 0$, on aura $i(0) = 0$, donc $K = -\frac{E}{R}$ et :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

pour tout $t \geq 0$.

Cette expression n'est évidemment plus valable pour $t < 0$ (puisque alors $i(t) = 0$), mais on remarquera que pour $t < 0$ l'équation différentielle prend une autre forme puisque alors la force électromotrice E est nulle.

REMARQUE. — En appelant *quadrature* la recherche de la primitive d'une fonction donnée, ce qui précède montre que toute équation différentielle linéaire (du premier ordre) peut être intégrée au moyen de deux quadratures et que la connaissance d'une solution particulière de cette équation permet de l'intégrer au moyen d'une seule quadrature.

Nous savons d'autre part que si $z(x)$ est une solution non nulle de l'équation sans deuxième membre associée, la solution générale de cette dernière est $Kz(x)$. La connaissance d'une solution particulière non nulle de l'équation sans deuxième membre, associée permet donc d'intégrer l'équation avec second membre au moyen d'une seule quadrature.

Si on connaît deux intégrales distinctes $y_1(x)$ et $y_2(x)$ de l'équation avec second membre on voit donc que l'intégrale générale de l'équation sans

deuxième membre est $K(y_1(x) - y_2(x))$ et que l'intégrale générale de l'équation avec deuxième membre est

$$y_1(x) + K(y_1(x) - y_2(x)) = (1 + K)y_1(x) - Ky_2(x).$$

3. — Équations à variables séparées.

On appelle *équations à variables séparées* les équations différentielles du premier ordre qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$(4) \quad y' f(y) = g(x)$$

$f(y)$ étant une fonction de y et $g(x)$ une fonction de x .

C'est ainsi que l'équation linéaire homogène $y' = a(x)y$ est à variables séparées.

En utilisant la notation différentielle une telle équation peut s'écrire encore :

$$(4') \quad f(y) dy = g(x) dx.$$

En désignant par $F(y)$ une primitive prise par rapport à la variable y de la fonction $f(y)$ et par $G(x)$ une primitive prise par rapport à la variable x de la fonction $g(x)$, l'égalité (4') exprime que la différentielle de $F(y)$ est égale à la différentielle de $G(x)$, c'est-à-dire que les fonctions $F(y)$ et $G(x)$ diffèrent d'une constante. L'égalité (4') est donc équivalente à :

$$(4'') \quad F(y) = G(x) + C$$

C étant une constante arbitraire.

Passer de l'égalité (4') à l'égalité (4''), qui s'écrit encore :

$$\int f(y) dy = \int g(x) dx + C$$

s'appelle *intégrer membre à membre* l'égalité (4').

Il faut toutefois remarquer que, dans l'égalité (4''), la fonction y de x n'est pas définie explicitement mais « implicitement » comme racine d'une équation qui dépend du nombre x . Dans bien des cas, cette équation se résout sans peine et permet de déterminer explicitement y comme fonction de x . L'étude générale des fonctions implicites (chap. XXX) permet d'étudier la fonction y dans les autres cas.

EXEMPLE 5. — Soit à intégrer l'équation différentielle :

$$(5) \quad y' = 2x\sqrt{1 - y^2}.$$

Elle s'écrit :

$$(5') \quad \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 2x dx.$$

D'où en intégrant membre à membre :

$$\text{Arc sin } y = x^2 + C$$

ou :

$$y = \sin(x^2 + C).$$

On a ainsi la solution générale de l'équation (5). Toutefois nous avons négligé deux solutions exceptionnelles. En effet, on ne peut passer de (5) à (5') qu'en supposant y différent des constantes $+1$ et -1 . Or, en fait, $y = +1$ et $y = -1$ sont des solutions évidentes de l'équation (5).

4. — Équations de Bernoulli.

Ce sont les équations différentielles de la forme :

$$(6) \quad y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$$

α étant une constante quelconque.

Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ on se trouve en présence d'une équation linéaire. Nous pourrions donc supposer α distinct de 0 et de 1. En supposant $y \neq 0$ ($y = 0$ est en fait une solution si $\alpha > 0$) et en divisant par y^α l'équation (6) s'écrit :

$$y' y^{-\alpha} = a(x) y^{1-\alpha} + b(x)$$

soit, en prenant $z = y^{1-\alpha}$ comme nouvelle fonction inconnue :

$$\frac{z'}{1-\alpha} = a(x)z + b(x).$$

On est donc ramené à intégrer une équation linéaire.

EXEMPLE 6. — Soit à intégrer l'équation différentielle :

$$(7) \quad 2xy' + y + x^2y^3 = 0.$$

En écartant la solution $y = 0$, cette équation s'écrit :

$$y' = -\frac{y}{2x} - \frac{xy^3}{2}.$$

C'est une équation de Bernoulli pour laquelle $\alpha = 3$. On est donc conduit à poser $z = \frac{1}{y^2}$. L'équation précédente s'écrit alors :

$$(7') \quad -\frac{z'}{2} = -\frac{z}{2x} - \frac{x}{2} \quad \text{ou} \quad z' = \frac{z}{x} + x.$$

Cette dernière équation est linéaire. L'équation sans deuxième membre associée s'écrit :

$$z' = \frac{z}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}.$$

Son intégrale générale est $z = Kx$.

Cherchons une solution particulière de l'équation (7') par la méthode de la variation de la constante et remplaçons donc z par $xu(x)$ dans l'équation (7'). On trouve :

$$u(x) + xu'(x) = u(x) + x$$

où $u'(x) = 1$. On peut donc prendre $u(x) = x$ et on déduit la solution particulière $z = x^2$ de l'équation (7'). L'intégrale générale de (7') s'écrit donc :

$$z = x^2 + Kx$$

et l'intégrale générale de (7) s'écrit :

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 + Kx}}.$$

On retrouve la solution $y = 0$ en faisant tendre K vers l'infini.

5. — Équations de Ricatti.

Ce sont les équations différentielles de la forme :

$$(8) \quad y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x).$$

La dérivée y' est donc une fonction du second degré en y . Remarquons que lorsque la fonction $a(x)$ est identiquement nulle l'équation est linéaire et lorsque $c(x)$ est identiquement nulle, nous avons une équation de Bernoulli.

Dans le cas général, pour pouvoir résoudre l'équation de Ricatti, il est nécessaire d'en connaître une solution particulière $y_1(x)$. Posons alors :

$$y = y_1 + z$$

z désignant une fonction inconnue de x et remplaçons y par cette valeur dans l'équation (8). Nous obtenons :

$$y_1' + z' = a(y_1^2 + 2y_1z + z^2) + b(y_1 + z) + c.$$

Mais, par hypothèse :

$$y_1' = a y_1^2 + b y_1 + c$$

et l'équation précédente se réduit à :

$$z' = az^2 + (2ay_1 + b)z$$

donc à une équation de Bernoulli que nous savons intégrer.

EXEMPLE 7. — Soit à intégrer l'équation différentielle :

$$y'(1 - x^3) + 2xy^2 - x^2y - 1 = 0.$$

On vérifie immédiatement que $y = x$ est une solution de l'équation. Posons donc :

$$y = x + z \quad y' = 1 + z'.$$

L'équation s'écrit :

$$z'(1 - x^3) + 2xz^2 + 3x^2z = 0.$$

Divisons par z^2 :

$$\frac{z'}{z^2}(1 - x^3) + 2x + \frac{3x^2}{z} = 0.$$

et posons :

$$\frac{1}{z} = u \quad - \frac{z'}{z^2} = u'.$$

Nous obtenons l'équation linéaire :

$$u'(1 - x^3) = 3x^2u + 2x.$$

L'équation sans deuxième membre s'écrit :

$$\frac{u'}{u} = \frac{3x^2}{1 - x^3}$$

ou :

$$\text{Log } |u| = -\text{Log } |1 - x^3| + C$$

et :

$$u = \frac{K}{1 - x^3}.$$

En faisant varier la constante, nous obtenons :

$$K' = 2x \quad \text{et} \quad K = x^2 + C.$$

En « remontant » les calculs nous aurons donc successivement :

$$u = \frac{x^2 + C}{1 - x^3} \quad z = \frac{1 - x^3}{x^2 + C} \quad y = \frac{Cx + 1}{x^2 + C}.$$

On remarquera que l'on retrouve la solution particulière $y = x$ en faisant tendre C vers l'infini dans la solution générale.

6. — Conditions initiales.

Toutes les équations différentielles du premier ordre étudiées dans ce chapitre ont des solutions qui dépendent d'un paramètre arbitraire.

Pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle il faut donc imposer une autre condition à la fonction inconnue cherchée $y(x)$, comme par exemple celle de prendre une valeur donnée y_0 pour une valeur donnée x_0 de la variable, soit $y(x_0) = y_0$. Une telle condition est dite une *condition initiale*.

C'est ainsi que la solution particulière $i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ de l'équation différentielle $L \frac{di}{dt} + Ri = E$ a été obtenue à l'exemple 4 par la condition initiale $i(0) = 0$.

Plus généralement on peut montrer qu'une équation différentielle d'ordre n pour une fonction inconnue $y(x)$ possède des solutions qui dépendent de n paramètres arbitraires $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ soit

$$y(x) = f(x, \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)$$

On dit alors que f est une *intégrale générale* de l'équation différentielle.

Pour déterminer une solution particulière il faut imposer à la fonction cherchée $y(x)$ un nombre suffisant de conditions supplémentaires.

On nomme *conditions initiales* la donnée des valeurs de la fonction et de ses $n - 1$ premières dérivées pour une valeur donnée de la variable, soit

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Soit par exemple $y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ la solution de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$. Imposons les conditions initiales $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y'_0$. On obtient $y(0) = A$ et $y'(0) = \omega B$ d'où la solution particulière :

$$y = y_0 \cos \omega x + \frac{y'_0}{\omega} \sin \omega x$$

EXERCICES

1° Intégrer les équations différentielles :

$$y' = e^{x+y}, \quad x^2 y' \cos x - x^2 y \sin x + 1 = 0, \quad y' \operatorname{Log} x + \frac{y}{x} = 1,$$

$$x(x-1)y' - (x+1)y + 1 = 0, \quad (x^2+1)y - xy' = x^3, \quad 2x^2 y' + xy = x^2 + 1.$$

$$R. \quad y = -\operatorname{Log}(C - e^x), \quad y = \frac{1+Cx}{x \cos x}, \quad y = \frac{x+C}{\operatorname{Log} x}$$

$$y = \frac{1+C(x-1)^2}{2x}, \quad y = x \left(1 + C e^{\frac{x^3}{2}} \right), \quad y = \frac{x}{3} - \frac{1}{x} + \frac{C}{\sqrt{|x|}}.$$

*2° Intégrer les équations :

$$y^2(y' - 1) = (2 - y')^2, \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0, \quad (1-x^2)y' - xy = 1$$

$$y' = xy + \frac{2x^2 - x^4}{\sqrt{y}}, \quad 2xy' = y^2 - 2x^2 y + x^4 + 4x^2 - 1, \quad 2x(1-x)y' + (1-2x)y = (1-2x^2)e^x.$$

$$R. \quad y = x + C - \frac{1}{x+C}, \quad x^2 + y^2 + 2Cxy + C^2 - 1 = 0.$$

$$y = \frac{C + \operatorname{Arc} \sin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ou} \quad y = \frac{C - \operatorname{Log} |x + \sqrt{x^2 - 1}|}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$y = \left(x^3 + C e^{\frac{3x^3}{4}} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad y = x^2 + \frac{C-x}{C+x}, \quad y = e^x + \frac{C}{\sqrt{|x-x^2|}}.$$

3° Intégrer l'équation différentielle :

$$y' - \left(a - \frac{n}{x} \right) y = b + \frac{c}{x}.$$

CHAPITRE XXII

NOTIONS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER

1. — *Généralités sur les équations différentielles d'ordre supérieur à un.*

La théorie générale des équations différentielles conduit aux résultats suivants : si on désigne par n l'ordre de cette équation, la solution générale de cette équation contiendra n constantes arbitraires. En outre l'équation pourra admettre un certain nombre de solutions singulières dépendant de moins de n constantes. Ainsi on vérifie aisément que l'équation différentielle :

$$y''^2 + y'^2 = 1$$

admet la solution générale :

$$y = \cos(x - A) + B$$

(A et B étant des constantes arbitraires) et les solutions singulières :

$$y = x + C \quad y = -x + C$$

(C étant une constante arbitraire).

2. — *Cas d'abaissement de l'ordre.*

Pour intégrer une équation différentielle d'ordre n :

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

on cherchera, en faisant des changements sur la variable indépendante et sur la fonction inconnue, à se ramener à l'intégration d'une équation d'ordre $n - 1$. Par répétition du procédé on peut ainsi dans quelques cas se ramener à une équation différentielle du premier ordre et appliquer les méthodes étudiées au chapitre précédent. Cet abaissement de l'ordre d'une équation différentielle peut, en particulier, se faire dans les deux cas suivants.

1^{er} cas : la fonction y n'intervient pas explicitement. — Soit une équation différentielle :

$$f(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

dans laquelle la fonction inconnue y n'intervient que par ses dérivées. Si nous prenons comme fonction inconnue :

$$y' = z$$

nous sommes ramenés à une équation d'ordre inférieur à n :

$$f(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0$$

et si nous savons déterminer z , y se calculera par une dernière quadrature :

$$y = \int z \, dx.$$

EXEMPLE 1. — Soit à intégrer l'équation différentielle :

$$xy'' + y' - 1 = 0.$$

Posons $y' = z$ et résolvons :

$$xz' + z - 1 = 0$$

ou :

$$(xz)' = 1$$

$$xz = x + C$$

$$z = 1 + \frac{C}{x}$$

et par suite :

$$y = x + C \operatorname{Log} |x| + D.$$

EXEMPLE 2. — Soit à intégrer l'équation différentielle :

$$y''' = y''.$$

En posant $y'' = z$, cette équation s'écrit :

$$z' = z \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{z} = dx$$

et par suite :

$$z = Ce^x.$$

Par deux intégrations successives nous en tirons :

$$y' = Ce^x + D$$

$$y = Ce^x + Dx + E.$$

2^e cas : la variable x n'intervient pas explicitement. — Soit une équation différentielle :

$$f(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

où la variable x n'intervient pas explicitement. Il est alors commode de prendre y comme variable et, en posant :

$$y' = z$$

de considérer z comme une fonction inconnue de y .

Nous avons alors :

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy}$$

puis :

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left(z \frac{dz}{dy} \right) = z \frac{d}{dy} \left(z \frac{dz}{dy} \right) = z \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 + z^2 \frac{d^2 z}{dy^2},$$

etc.

En substituant ces valeurs dans l'équation initiale, on obtient une équation différentielle :

$$F\left(y, z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

d'ordre $n - 1$ par rapport à la fonction z .

Si on sait intégrer cette équation, nous obtiendrons z en fonction de y , soit :

$$z = \varphi(y)$$

et par suite :

$$dx = \frac{dy}{\varphi(y)}$$

qui, par intégration, nous donnera x en fonction de y .

EXEMPLE 3. — Soit à intégrer l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0$$

(nous verrons au § 5 une méthode beaucoup plus rapide pour intégrer cette équation).

En posant :

$$y' = z \quad y'' = z \frac{dz}{dy}$$

l'équation s'écrit :

$$z \, dz + y \, dy = 0$$

ou :

$$z^2 = A - y^2$$

et par suite :

$$dx = \pm \frac{dy}{\sqrt{A - y^2}}$$

ou :

$$x = \pm \text{Arc cos } \frac{y}{\sqrt{A}} + B$$

ce que l'on peut écrire :

$$y = \sqrt{A} \cos (x - B).$$

3. — Équations linéaires.

Une *équation différentielle linéaire* est une équation de la forme :

$$(1) \quad a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_0(x) y = b(x)$$

où $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\dots$, $a_n(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions données de x . Si $a_n(x)$ n'est pas la fonction constamment nulle, cette équation est d'*ordre* n . Dans le cas où $n = 1$, on retrouve l'équation différentielle du premier ordre étudiée au chapitre précédent.

La fonction $b(x)$ est appelée le *second membre* de l'équation (1). Si $b(x)$ est la fonction nulle l'équation (1) est dite *sans second membre*. L'équation :

$$(1') \quad a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_0(x) y = 0$$

est dite l'*équation sans second membre associée* à l'équation (1).

Soit $y_1(x)$ une solution particulière de l'équation (1). On voit que, pour que la fonction $y(x) = y_1(x) + z(x)$ soit une solution de l'équation (1), il faut et il suffit que $z(x)$ soit une solution de l'équation (1'). D'où le résultat suivant qui généralise le résultat indiqué au § 2 du chapitre précédent :

THÉORÈME 1. — *La solution générale d'une équation différentielle linéaire s'obtient en ajoutant à une solution particulière de cette équation la solution générale de l'équation sans second membre associée.*

On voit donc l'importance qu'il y a à intégrer l'équation (1') pour pouvoir intégrer l'équation (1).

Nous nous limiterons dans ce qui suit aux équations différentielles linéaires du second ordre, la théorie générale étant traitée dans le deuxième tome de cet ouvrage.

Dans le cas où $n = 1$, qui est celui de l'équation du premier ordre :

$$a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$$

la connaissance de la solution particulière non nulle y_1 conduit, en posant $y = y_1 z$, à l'équation :

$$z' = 0$$

dont la solution générale est $z = K = \text{Constante}$.

Nous retrouvons le fait que l'intégrale générale de l'équation proposée est

$$y = K y_1.$$

Soient alors l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$(2) \quad a(x) y'' + b(x) y' + c(x) y = d(x)$$

et l'équation sans second membre associée :

$$(2') \quad a(x) y'' + b(x) y' + c(x) y = 0.$$

la connaissance d'une solution particulière non nulle $y_1(x)$ de l'équation (2') permet de ramener l'intégration de l'équation (2') à celle d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, et permet donc de l'intégrer complètement. Plus précisément, en posant :

$$y = y_1 z$$

l'équation (2') devient :

$$a[z'' y_1 + 2z' y_1' + z y_1''] + b(z' y_1 + z y_1') + c z y_1 = 0$$

ou, compte tenu du fait que y_1 est solution de (2') :

$$a y_1 z'' + (2a y_1' + b y_1) z' = 0$$

qui est donc de la forme :

$$(3) \quad A(x) z'' + B(x) z' = 0.$$

On est alors ramené à intégrer l'équation différentielle à variables séparées

$$(3') \quad A(x) u' + B(x) u = 0$$

et à poser :

$$z = \int u \, dx.$$

Supposons maintenant que l'on connaisse une deuxième solution particulière $y_2(x)$ de l'équation (2'). On connaît alors la solution particulière

$$z_1(x) = \frac{y_2(x)}{y_1(x)}$$

de l'équation (3) et par suite la solution particulière $z_1'(x)$ de l'équation (3').

Il en résulte que si $z_1'(x)$ n'est pas la fonction nulle, c'est-à-dire si $\frac{y_2}{y_1}$ n'est pas

une constante, la solution générale de l'équation (3') est de la forme $u' = K_2 z_1'(x)$ et la solution générale de l'équation (3) sera alors :

$$z = K_2 z_1(x) + K_1 = K_2 \frac{y_2(x)}{y_1(x)} + K_1$$

et celle de l'équation (2') sera :

$$y = K_1 y_1(x) + K_2 y_2(x)$$

K_1 et K_2 étant deux constantes arbitraires. En résumé on a le

THÉORÈME 2. — $y_1(x)$ et $y_2(x)$ étant deux solutions particulières d'une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre telles que le rapport $\frac{y_2(x)}{y_1(x)}$ ne soit pas constant, l'intégrale générale de cette équation est

$$y = K_1 y_1(x) + K_2 y_2(x)$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes arbitraires.

REMARQUE. — Soit l'équation différentielle linéaire avec second membre (2) et supposons que $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ et $Y_3(x)$ en soient trois intégrales particulières telles que le rapport $\frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 - Y_3}$ ne soit pas constant. Il résulte du théorème précédent que l'intégrale générale de l'équation sans deuxième membre associée peut s'écrire :

$$y = K_1(Y_1 - Y_2) + K_2(Y_1 - Y_3)$$

et que l'intégrale générale de l'équation avec deuxième membre (2) s'écrit :

$$y = Y_1 + K_1(Y_1 - Y_2) + K_2(Y_1 - Y_3).$$

Cette intégrale peut donc s'obtenir sans faire de quadrature.

On voit de même que la connaissance de deux intégrales particulières distinctes de l'équation (2) permet de déterminer l'intégrale générale de cette équation au moyen d'une quadrature.

Méthode de variation des constantes. — Nous allons indiquer maintenant une méthode (dite de la *variation des constantes*) qui permet de trouver une intégrale particulière de l'équation (2) lorsque l'on connaît l'intégrale générale de l'équation (2') et par conséquent d'achever dans ce cas l'intégration de l'équation (2). L'intégrale générale de l'équation (2') peut en effet se mettre sous la forme :

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

$y_1(x)$ et $y_2(x)$ étant deux solutions particulières dont le rapport n'est pas constant, c'est-à-dire telles que :

$$y_1' y_2 - y_1 y_2' \neq 0.$$

Cherchons une intégrale particulière de l'équation avec deuxième membre de la forme :

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

où $C_1(x)$ et $C_2(x)$ seront deux fonctions de x . On devra avoir :

$$y' = C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_1 y_1' + C_2 y_2'.$$

Ayant introduit deux fonctions à déterminer $C_1(x)$ et $C_2(x)$, nous pouvons leur imposer la condition supplémentaire :

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0.$$

On aura alors :

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2$$

et :

$$y'' = C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C_1 y''_1 + C_2 y''_2$$

d'où, en portant dans l'équation (3) :

$$a[C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C_1 y''_1 + C_2 y''_2] + b[C_1 y'_1 + C_2 y'_2] + c[C_1 y_1 + C_2 y_2] = d.$$

C'est-à-dire, en tenant compte que y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation (2') :

$$a(C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2) = d$$

Il faut et il suffit donc que l'on ait :

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = \frac{d}{a}. \end{cases}$$

Comme $y'_1 y_2 - y_1 y'_2 \neq 0$, ce système d'équation en C'_1 et C'_2 est résoluble. On a en fait :

$$C'_1 = \frac{-\frac{d}{a} y_2}{y_1 y'_2 - y_1 y_2} \quad \text{et} \quad C'_2 = \frac{\frac{d}{a} y_1}{y_1 y'_2 - y_1 y_2}$$

d'où les fonctions $C_1(x)$ et $C_2(x)$ par des quadratures.

Cette méthode permet donc de trouver une solution particulière de l'équation (3) et d'écrire ensuite l'intégrale générale de cette équation grâce au théorème 1.

EXEMPLE 4. — Soit à intégrer l'équation différentielle :

$$(1 - x)y'' + xy' - y = 2 - 2x + x^2$$

en se servant du fait que $y_1 = x$ est une solution de l'équation sans deuxième membre associée.

L'équation sans second membre associée s'écrit :

$$(1 - x)y'' + xy' - y = 0.$$

Remplaçons dans cette équation y par $y_1 z = xz$. Elle devient :

$$(1 - x)(2z' + xz'') + x(z + xz') - xz = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(1 - x)xz'' + (x^2 - 2x + 2)z' = 0,$$

ou, en posant $z' = u$:

$$(1 - x)xu' + (x^2 - 2x + 2)u = 0,$$

cette dernière équation, qui est à variables séparées, s'écrit :

$$\frac{u'}{u} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-1)} = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x}$$

son intégrale générale est donc :

$$u = K e^x \frac{x-1}{x^2}$$

(K étant une constante arbitraire) d'où :

$$z = K \int \frac{x-1}{x^2} e^x dx = K \left[\int \frac{e^x}{x} dx - \int \frac{e^x}{x^2} dx \right]$$

une intégration par parties permet d'écrire :

$$\int \frac{e^x}{x^2} dx = \frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2} dx$$

d'où :

$$z = K \frac{e^x}{x} + K'$$

(K' étant une constante arbitraire) et la solution générale de l'équation sans second membre :

$$y = xz = K e^x + K' x.$$

Cherchons maintenant une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de la variation des constantes. Celle-ci conduit à poser :

$$y = A(x) x + B(x) e^x$$

$A(x)$ et $B(x)$ étant des fonctions que nous allons déterminer de telle sorte que y soit une solution de l'équation avec second membre. Comme nous l'avons dit, nous poserons de plus :

$$A'(x) x + B' e^x = 0$$

et nous sommes conduits à l'égalité :

$$A'(x) + B'(x) e^x = \frac{2 - 2x + x^2}{1 - x}.$$

D'où, en comparant ces deux dernières égalités :

$$A' = \frac{2 - 2x + x^2}{(x-1)^2} \quad \text{et} \quad B' = -\frac{x(2 - 2x + x^2)}{(x-1)^2} e^{-x}.$$

On a donc :

$$A' = 1 + \frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{et on peut prendre} \quad A = x - \frac{1}{x-1}.$$

De même :

$$B' = -e^{-x} \left[x + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} \right].$$

Mais on voit grâce à une intégration par parties que :

$$\int \frac{e^{-x}}{(x-1)^2} dx = \left[-\frac{e^{-x}}{x-1} \right] - \int \frac{e^{-x}}{x-1} dx$$

d'où :

$$B = \frac{e^{-x}}{x-1} - \int x e^{-x} dx = \frac{e^{-x}}{x-1} + e^{-x}(1+x) = \frac{x^2}{x-1} e^{-x}$$

on en déduit la solution particulière de l'équation avec second membre :

$$y = A(x)x + B(x)e^x = x^2 - \frac{x}{x-1} + \frac{x^2}{x-1} = x^2 + x.$$

D'où la solution générale de l'équation avec second membre :

$$y = K e^x + K' x + x^2 + x$$

ou encore :

$$y = x^2 + \lambda x + \mu e^x$$

λ et μ étant deux constantes arbitraires.

4. — Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

Ce sont les équations de la forme :

$$(4) \quad ay'' + by' + cy = d(x)$$

a , b et c étant des constantes et $d(x)$ étant une fonction de x .

L'équation sans second membre associée s'écrit :

$$(4') \quad ay'' + by' + cy = 0.$$

Dans le cas de l'équation linéaire du premier ordre à coefficients constants :

$$ay' + by = 0$$

la solution est $y = Ke^{rx}$ avec $ar + b = 0$ c'est-à-dire $r = -b/a$.

On voit facilement que pour qu'une fonction de la forme $y = e^{rx}$ soit solution de (4') il faut et il suffit que le nombre r soit racine (réelle ou complexe) de l'équation (4'') dite *équation caractéristique* de l'équation (4') :

$$(4'') \quad ar^2 + br + c = 0.$$

Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2 , l'équation (4') admet les deux solutions particulières $y_1 = e^{r_1 x}$ et $y_2 = e^{r_2 x}$ dont le rapport n'est pas constant.

La solution générale de l'équation (4') est donc :

$$y = K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}$$

K_1 et K_2 étant deux constantes arbitraires.

Supposons maintenant que l'équation (4'') admette une racine double que nous noterons r . On aura alors :

$$(5) \quad ar^2 + br + c = 0$$

et :

$$(5') \quad 2ar + b = 0.$$

Comme nous l'avons vu, l'équation (4') admet la solution $y_1 = e^{rx}$. Pour achever d'intégrer l'équation (4') posons donc $y = zy_1 = ze^{rx}$. On aura :

$$y' = z'e^{rx} + rz e^{rx} \quad \text{et} \quad y'' = z'' e^{rx} + 2rz' e^{rx} + r^2 z e^{rx}.$$

L'équation (4') s'écrira donc :

$$a[z'' e^{rx} + 2rz' e^{rx} + r^2 z e^{rx}] + b[z' e^{rx} + rz e^{rx}] + cz e^{rx} = 0$$

ce qui, compte tenu des égalités (5) et (5'), s'écrit :

$$az'' e^{rx} = 0 \quad \text{ou} \quad z'' = 0$$

z sera de la forme $\lambda x + \mu$ (λ et μ étant des constantes) et la solution générale de l'équation (4') s'écrira :

$$y = \lambda x e^{rx} + \mu e^{rx}.$$

On en déduit que

Dans le cas où l'équation caractéristique (4'') admet une racine double r , les deux fonctions e^{rx} et $x e^{rx}$ sont des solutions particulières de l'équation sans second membre.

REMARQUE. — Dans le cas où a , b et c sont trois nombres réels et où les deux racines r_1 et r_2 de l'équation (4'') sont distinctes, les nombres r_1 et r_2 sont réels ou imaginaires conjugués. S'ils sont imaginaires conjugués, ils sont de la forme $y_1 = \alpha + i\beta$ et $y_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$) et on peut mettre l'intégrale générale de l'équation (4') sous une forme réelle de la façon suivante :

On a :

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} \quad \text{et} \quad y_2 = e^{r_2 x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}.$$

On en déduit les deux intégrales particulières de (4') :

$$\Re(y_1) = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

et :

$$\Im(y_1) = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

L'intégrale générale de (4') s'écrit alors :

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

EXEMPLE 5. — Étant donné un nombre réel ω non nul, l'équation sans second membre :

$$y'' - \omega^2 y = 0$$

admet pour équation caractéristique :

$$r^2 - \omega^2 = 0$$

qui a pour racines ω et $-\omega$.

L'intégrale générale de cette équation est donc :

$$y = A e^{\omega x} + B e^{-\omega x}$$

(A et B étant des constantes arbitraires) qui peut encore se mettre sous la forme :

$$y = \lambda \operatorname{ch} \omega x + \mu \operatorname{sh} \omega x$$

(λ et μ étant des constantes arbitraires).

EXEMPLE 6. — L'équation sans second membre :

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

admet pour équation caractéristique :

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

qui a pour racines $i\omega$ et $-i\omega$.

L'intégrale générale de cette équation est donc :

$$y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$$

(A et B étant deux constantes arbitraires) et peut se mettre également sous la forme :

$$y = K \cos \omega(x - x_0)$$

(K et x_0 étant deux constantes arbitraires).

Comme nous venons d'indiquer des méthodes permettant d'intégrer dans tous les cas l'équation sans second membre à coefficients constants (4'), on pourra toujours intégrer l'équation (4) car on pourra toujours en trouver une solution particulière, par exemple au moyen de la méthode de la variation des constantes. Dans certains cas, on peut cependant trouver une solution particulière de l'équation (4) plus simplement que par la méthode de la variation des constantes.

Remarquons d'abord sur si $d(x)$ peut se mettre sous la forme

$$d(x) = d_1(x) + d_2(x)$$

on obtient une solution particulière de l'équation (4) en ajoutant une solution particulière de l'équation :

$$ay'' + by' + cy = d_1(x)$$

à une solution particulière de l'équation :

$$ay'' + by' + cy = d_2(x).$$

Supposons maintenant que $d(x)$ soit un polynôme du n -ième degré :

$$d(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

et supposons $c \neq 0$. Il existe alors un polynôme de degré n solution particulière de l'équation (4) que l'on peut déterminer par la méthode des coefficients indéterminés. Posons :

$$y = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Pour que y soit une solution de (4), il faut et il suffit que l'on ait les relations :

$$c \alpha_n = a_n$$

$$nb \alpha_n + c \alpha_{n-1} = a_{n-1}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a(p+2)(p+1)\alpha_{p+2} + b(p+1)\alpha_{p+1} + c\alpha_p = a_p$$

$$\dots \dots \dots$$

$$2a\alpha_2 + b\alpha_1 + c\alpha_0 = a_0.$$

Si c est différent de 0, les égalités précédentes permettent de déterminer successivement les coefficients $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$.

Si $c = 0$, on pourra employer une méthode analogue en cherchant comme solution particulière un polynôme de degré $n+1$ ou $n+2$ suivant que b n'est pas nul ou est nul.

Dans le cas où le second membre $d(x)$ est de la forme $e^{kx} P(x)$, k étant une constante réelle ou imaginaire et $P(x)$ un polynôme en x , on peut se ramener au cas précédent en prenant comme fonction inconnue la fonction $z(x)$ telle que $y = e^{kx} z$. Les méthodes précédentes permettent donc aussi de trouver une solution particulière dans le cas où $d(x)$ est de la forme $P(x) \cos \omega x$ (ou $P(x) \sin \omega x$), $P(x)$ étant un polynôme.

EXEMPLE 7. — Soit à intégrer l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

L'équation sans second membre associée a pour équation caractéristique :

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

qui admet la racine double $r = 1$.

La solution générale de l'équation sans second membre est donc :

$$y = e^x (A + Bx).$$

Pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre, la méthode indiquée conduit à poser $y = e^x z$. D'où :

$$e^x(z'' + 2z' + z) - 2e^x(z' + z) + e^x z = e^x$$

qui s'écrit encore :

$$z'' = 1$$

laquelle équation admet visiblement pour solution particulière le polynôme

$$z(x) = \frac{x^2}{2}.$$

On en déduit alors la solution particulière $y = e^x z = \frac{e^x x^2}{2}$ de l'équation sans second membre et la solution générale :

$$y = e^x \left(A + Bx + \frac{x^2}{2} \right)$$

de l'équation avec second membre.

EXERCICES

1° Intégrer les équations différentielles :

$$(1 + x^2)y'' + xy' = x \quad y'' + y' = 1 - x \quad y'^4 = y'^2 + y''^2.$$

$$R. \quad y = A \operatorname{Log} (x - \sqrt{x^2 + 1}) + B + x, \quad y = A e^{-x} + B + 2x - \frac{x^2}{2}$$

$$y = \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + A \right) \right| + B \quad \text{et} \quad y = \pm x + A \quad \text{et} \quad y = A.$$

2° Intégrer les équations différentielles :

$$2yy'' = 1 + y'^2 \quad y^3 y'' + 1 = 0 \quad yy'' + y'^2 - y' = 0.$$

$$R. \quad (x-A)^2 - 4B(y-B) = 0 \quad 4A^2(x-B)^2 - 2Ay^2 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad y^2 = \pm 2x + A,$$

$$x = y + A \operatorname{Log} |y - A| + B \quad \text{ou} \quad y = A.$$

3° Intégrer les équations :

$$\begin{aligned} xy'' - (x+2)y' + y &= 0 && \text{(solution particulière polynomiale)} \\ y'' + (\operatorname{tg} x - 2 \cotg x)y' + 2y \cotg^2 x &= 0 && \text{(changement de variable } t = \sin x) \\ (1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + y &= 0 && \left(\text{solution particulière } y_1 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) \\ x^2 y'' + x y' - (x^2 + x + 1)y &= 0 && \left(\text{solution particulière } y_1 = \frac{e^{-x}}{x} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R. \quad y &= A(x+2) + B(x-2)e^x, \quad y = A \sin x + B \sin^2 x, \quad y = (A+Bx)y_1 \\ y &= \frac{A(2x-1)e^x + Be^{-x}}{x}. \end{aligned}$$

4° Intégrer les équations :

$$(1+x)y'' + (4x+5)y' + (4x+6)y = e^{-2x}, \quad y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$$

en posant :

$$y = z e^{-2x}.$$

$$R. \quad y = e^{-2x}(A + B \operatorname{Log} |1+x| + x), \quad y = e^{-2x}(A + Bx - \operatorname{Log} |x|).$$

5° Intégrer les équations :

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= x - 5 \cos 2x, & y'' + 4y &= \sin 2x \\ y'' - 2y' + 5y &= e^x \cos^2 x, & y'' - 2y' + y &= xe^x + 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R. \quad y &= A e^{-x} + B e^{-2x} + \frac{2x-3}{4} + \frac{\cos 2x - 3 \sin 2x}{4} \\ y &= A \sin 2x + B \cos 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x \\ y &= e^x(A \cos 2x + B \sin 2x) + \frac{e^x}{8} (1 + x \sin 2x) \\ y &= e^x \left(A + Bx + \frac{x^2}{2} \right) + 5. \end{aligned}$$

6° a et b étant des constantes liées par la relation $(a-1)^2 - 4b = 0$, intégrer l'équation $x^2 y'' + axy' + by = 0$ par le changement de variable $t = \operatorname{Log} |x|$.

$$R. \quad y = |x|^{\frac{1-a}{2}} (A + B \operatorname{Log} |x|)$$

*7° Déterminer la fonction f telle que si l'on pose $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, z vérifie la relation :

$$z_{x^2}'' + z_{y^2}'' \left(z_x' + z_y' - 2 \frac{z}{x} \right) = 0$$

et que l'on ait en outre pour $x = 1$ et $y = 4$, $z = 7$.

$$R. \quad z = (7-4A)x + Ay \quad \text{et} \quad z = \frac{x^2 + xy + y^2}{3x}.$$

***8°** Intégrer l'équation $y'' + 2y' - (3 + \lambda)y = e^x$ où λ désigne une constante strictement positive. Soit $y_1(x)$ la solution vérifiant les conditions $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$. Trouver lorsque λ tend vers 0 la limite de la fonction $y_1(x)$ et vérifier que cette limite satisfait à l'équation $y'' + 2y' - 3y = e^x$.

R.
$$y = \frac{1}{16} [(4x + 11)e^x + 5e^{-3x}].$$

***9°** On appelle (L) la courbe intégrale de l'équation différentielle :

$$(5x + 1)y'' + (3x + 4)y' + (x + 1)y = 0$$

qui passe par le point $A(3, 4)$ et a en ce point une tangente de pente $-\frac{3}{4}$. Déterminer le cercle osculateur au point A à la courbe (L) .

R.
$$x^2 + y^2 = 25.$$

****10°** Soient deux fonctions $X(x)$ et $Y(y)$ des variables indépendantes x et y vérifiant la relation :

$$4(X + Y) + X'_x Y'_y - 2(x - y)(X'_x - Y'_y) = 0.$$

En déduire que $\frac{1}{X''_{xx}} + \frac{1}{Y''_{yy}} + \frac{1}{2} = 0$ et que X et Y sont des trinômes du second degré. On pose $X(x) = ax^2 + bx + c$, en déduire $Y(y)$.

R.
$$Y(y) = \frac{1}{a+1} \left(-ay^2 - by + \frac{b^2}{4} - ac - c \right).$$

****11°** On considère le polynôme P défini par $P(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$. Montrer que le polynôme $P(x)$ vérifie l'équation $(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0$. Intégrer complètement cette équation différentielle :

R.
$$y = AP(x) + B\sqrt{\frac{1}{1-x^2} - P^2(x)}.$$

****12°** Un point M décrit une courbe plane (C) et on appelle N le point où la normale en M coupe Ox . Déterminer la courbe (C) de façon que les grandeurs des vitesses de M et de N soient égales.

R.
$$x = A(t^3 - 3t) + B \quad y = 3A(t^2 - 1).$$

LIVRE III

ÉLÉMENTS DE CALCULS GÉOMÉTRIQUES

CHAPITRE XXIII

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

1. — Bases et repères.

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace sont dits *linéairement indépendants* si l'égalité $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \vec{0}$ ($\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$) entraîne $\lambda = \mu = \nu = 0$. Sinon les vecteurs sont dits *linéairement dépendants*.

En particulier si l'on a

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \vec{0}$$

et si nous supposons $\nu \neq 0$ il vient

$$(1) \quad \vec{w} = \left(-\frac{\lambda}{\nu}\right)\vec{u} + \left(-\frac{\mu}{\nu}\right)\vec{v}$$

Par suite, O étant un point de l'espace, et A, B, C les points définis par $\vec{OA} = \vec{u}$, $\vec{OB} = \vec{v}$ et $\vec{OC} = \vec{w}$, l'égalité (1) s'écrit

$$\vec{OC} = \left(-\frac{\lambda}{\nu}\right)\vec{OA} + \left(-\frac{\mu}{\nu}\right)\vec{OB}$$

et montre que les points O, A, B et C sont dans un même plan. C'est pourquoi trois vecteurs linéairement dépendants sont encore dits *coplanaires*.

Soient alors $\vec{i} = \vec{OA}$, $\vec{j} = \vec{OB}$ et $\vec{k} = \vec{OC}$ trois vecteurs tels que O, A, B et C ne soient pas dans un même plan et qui sont donc linéairement indépendants, et soit $\vec{u} = \vec{OM}$ un vecteur quelconque de l'espace. La parallèle à OC menée par M rencontre en P le plan OAB (fig. 1).

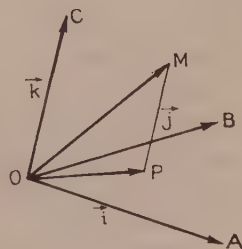


FIG. 1.

On a

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$$

on peut écrire

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PM} = z\vec{k} \quad (x, y, z \in \mathbf{R})$$

d'où l'égalité :

$$(2) \quad \vec{u} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

et par suite

Tout vecteur de l'espace est une combinaison linéaire de trois vecteurs linéairement indépendants.

La représentation du vecteur $\vec{u}$ donnée par (2) est unique. En effet, l'égalité

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

peut s'écrire

$$(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$$

ce qui entraîne, puisque $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont linéairement indépendants

$$x = x' \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = z'$$

On nomme *base* de l'ensemble $\mathcal{E}$ des vecteurs de l'espace un triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs linéairement indépendants. Un repère (ou *trièdre de référence*) $\mathcal{R}$ est la donnée d'un point O (dit *origine*) et d'une base.

Les nombres (x, y, z) définis d'une façon unique par l'égalité (2) sont dits les *composantes* (ou *coordonnées*) du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et les *coordonnées* du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, respectivement l'abscisse (x) , l'ordonnée (y) et la *cote* (z) du point M .

Un repère étant choisi, l'application f de l'ensemble E des points de l'espace dans l'ensemble $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ définie par

$$f(M) = (x, y, z)$$

où (x, y, z) sont les coordonnées de M est une bijection de E sur $\mathbf{R}^3$. Par suite

Tout problème de géométrie de l'espace peut se traduire en calculs sur des triplets de nombres réels.

On montre en particulier, comme on l'a fait pour les vecteurs d'une droite ou d'un plan, que les composantes de la somme de deux vecteurs s'obtiennent en ajoutant les composantes correspondantes de chacun d'eux, et que pour multiplier un vecteur par un nombre réel λ on multiplie par λ les composantes du vecteur.

En particulier si M_1 et M_2 sont deux points de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) les composantes du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$ seront donc

$$(x_2 - x_1 \quad , \quad y_2 - y_1 \quad , \quad z_2 - z_1).$$

Changement de repère. — Soient $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{R}'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ deux repères. Le repère $\mathcal{R}'$ étant défini à l'aide de $\mathcal{R}$ par la donnée des coordonnées (x_0, y_0, z_0) de O' et des composantes de $\vec{i}', \vec{j}'$ et $\vec{k}'$, soit

$$\begin{aligned}\vec{i}' &= a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \\ \vec{j}' &= b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k} \\ \vec{k}' &= c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}\end{aligned}$$

Désignons par (x, y, z) et (x', y', z') les coordonnées d'un même point M dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. On a

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{OO'} + \vec{O'M} \\ &= x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'\end{aligned}$$

D'où, en remplaçant $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ par leurs expressions en $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, et en égalant les coefficients de $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + a_1x' + b_1y' + c_1z' \\ y &= y_0 + a_2x' + b_2y' + c_2z' \\ z &= z_0 + a_3x' + b_3y' + c_3z'\end{aligned}$$

Ces égalités expriment les « anciennes » coordonnées en fonction des « nouvelles » mais on doit pouvoir inversement en déduire les expressions de x', y', z' , en fonction de x, y, z . Pour cela on a à résoudre un système de trois équations aux inconnues x', y', z' et ce système admet une solution unique.

2. — Longueurs et angles.

Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit *orthonormé* si les vecteurs de base sont unitaires et deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire si l'on a :

$$\begin{aligned}\vec{i}^2 &= \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0\end{aligned}$$

Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit de *sens direct* si pour un observateur placé du même côté du plan que le vecteur $\vec{OC} = \vec{k}$ le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est de sens direct. On constate alors que les repères $(O, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ et $(O, \vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ obtenus par permutations circulaires de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont également de sens direct.

Soit, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un vecteur

$$\vec{u} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

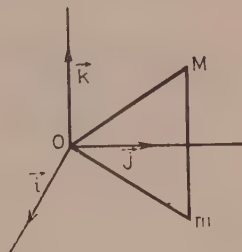


FIG. 2.

Nommons m la projection de M sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le triangle OmM étant rectangle en m , on a (fig. 2)

$$\|\vec{u}\|^2 = \overrightarrow{OM}^2 = \overrightarrow{Om}^2 + \overrightarrow{mM}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Si $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ est un second vecteur, on a

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v})^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2 &= 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\ &= (x + x')^2 + (y + y')^2 + (z + z')^2 - (x^2 + y^2 + z^2) - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \\ &= 2(xx' + yy' + zz') \end{aligned}$$

D'où l'expression du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

qui généralise à l'espace l'expression déjà obtenue dans le cas du plan.

Il est alors facile de montrer, comme on l'a fait dans le plan, que le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition. Nommons α l'angle, compris entre 0 et π , des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ supposés non nuls. On sait que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \alpha$$

d'où

$$\cos \alpha = \frac{xx' + yy' + zz'}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \cdot (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}}$$

3. — *Produit vectoriel.*

Cherchons à déterminer un vecteur

$$\vec{w} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

perpendiculaire aux deux vecteurs, supposés non colinéaires,

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant orthonormé, les conditions s'écrivent

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{w} &= 0 & \text{ou} & & Xx + Yy + Zz &= 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} &= 0 & \text{ou} & & Xx' + Yy' + Zz' &= 0 \end{aligned}$$

Ce système de deux équations aux trois inconnues X, Y, Z admet une infinité de solutions données par

$$X = \lambda(yz' - zy') \quad , \quad Y = \lambda(zx' - xz') \quad \text{et} \quad Z = \lambda(xy' - yx')$$

où λ est un nombre réel quelconque. Considérons en particulier le vecteur $\vec{w}$, obtenu pour $\lambda = 1$, de composantes

$$(3) \quad \quad \quad yz' - zy', \quad zx' - xz', \quad xy' - yx'$$

que l'on appelle le *produit vectoriel* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et que l'on note

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

On voit que ce vecteur $\vec{w}$ est défini quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Calculons la norme de ce vecteur. On a

$$\|\vec{w}\|^2 = (yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2$$

on vérifie facilement (identité dite de *Lagrange*) l'égalité

$$(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xx' + yy' + zz')^2$$

d'où

$$\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

en appelant α l'angle des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Par suite la norme de $\vec{w}$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs

$$\vec{OP} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{OQ} = \vec{v}$$

Nous constatons donc que la norme du vecteur $\vec{w}$ et sa direction (si $\|\vec{w}\| \neq 0$) ne dépendent pas de la base choisie.

Nous allons montrer que le sens du vecteur $\vec{w}$ dépend de l'orientation du repère. En effet si nous effectuons un déplacement continu du repère le vecteur $\vec{w}$ dont les composantes sont des fonctions continues des composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne peut changer brusquement de sens et par suite restera fixe.

Amenons alors le repère à occuper la position $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ de telle sorte que $\vec{i}_1$ et $\vec{u}$ soient colinéaires de même sens et de même pour $\vec{k}_1$ et $\vec{w}$. Soient (x_1, y_1, z_1) et (x'_1, y'_1, z'_1) les composantes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Nous aurons $x_1 > 0$, $y_1 = z_1 = 0$ et $-x_1 z'_1 = 0$, $x_1 y'_1 > 0$ d'où $y'_1 > 0$ et $z'_1 = 0$. Ainsi le vecteur $\vec{v}$ est dans le plan $(\vec{i}_1, \vec{j}_1)$ et fait un angle aigu avec le vecteur $\vec{j}_1$. Le trièdre $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est donc de même sens que $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ et par suite que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Le sens du produit vectoriel $\vec{w}$ est donc déterminé par la condition que les trièdres $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ aient même orientation.

Le produit vectoriel change donc de sens quand on change l'orientation du repère.

Pour cette raison les physiciens disent que le produit vectoriel est un *pseudo-vecteur* ou encore un vecteur *axial*.

Propriétés du produit vectoriel. — 1° On a

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

en effet l'échange de (xyz) et de $(x'y'z')$ dans les expressions (3) change le signe des composantes de $\vec{w}$.

2° L'égalité $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ est vérifiée si l'un des vecteurs est nul, ou si l'angle des deux vecteurs a un sinus nul, c'est-à-dire si les deux vecteurs sont colinéaires.

Réciproquement, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires on a $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

3° Pour tout nombre réel λ on a

$$(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

En effet si dans les expressions (3) on multiplie x , y et z par λ les composantes de $\vec{w}$ sont multipliées par λ .

4° Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition (*théorème de Varignon*).

C'est-à-dire

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{v}_1) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v}_1$$

Si en effet (x_1, y_1, z_1) sont les composantes de $\vec{v}_1$, la première composante de $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{v}_1)$ est

$$y(z' + z_1) - z(y' + y_1) = (yz' - zy') + (yz_1 - zy_1)$$

c'est donc bien la première composante de $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v}_1$ (il en est de même pour les deux autres composantes).

REMARQUE. — Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée, on a

$$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{i} &= \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \\ \vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

alors que

$$(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} = \vec{0} \wedge \vec{j} = \vec{0}$$

ce qui montre que le produit vectoriel n'est pas associatif (l'écriture $\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$ n'a donc pas de sens).

4. — *Produit mixte.*

On appelle *produit mixte* de trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ le nombre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ défini par l'égalité

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ont comme composantes (x, y, z) , (x', y', z') et (x'', y'', z'') (dans une base orthonormée) on a donc

$$\Delta = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

$$(4) \quad \Delta = xy'z'' - xz'y'' + yz'x'' - yx'z'' + zx'y'' - zy'x''$$

ce que l'on écrit aussi (expression appelée « déterminant »).

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

Le produit mixte est la somme algébrique de produits 3 à 3 de nombres pris dans ce tableau : on prend avec le signe + les termes correspondant à la diagonale $xy'z''$ et aux deux triangles qui ont un côté parallèle à cette diagonale et avec le signe - les termes correspondant à la diagonale $zy'x''$ et aux deux triangles qui ont un côté parallèle à cette dernière diagonale (règle de Sarrus).

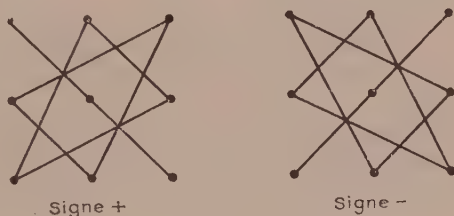


FIG. 3.

Nous étudierons dans le tome II la théorie générale de ces déterminants.

Propriétés du produit mixte. — 1° Il résulte de l'égalité (4) que le produit mixte ne change pas de valeur par permutation circulaire des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ mais qu'il change de signe par échange de deux vecteurs. On a donc

$$\begin{aligned} \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} &= (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) \\ &= -(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) \end{aligned}$$

2° On a

$$(\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\lambda \vec{u}) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \lambda (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

et

$$\begin{aligned} (\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}) &= (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \\ &= (\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

ce que l'on peut résumer en disant que le produit mixte est linéaire par rapport au premier vecteur (donc par rapport à chaque vecteur en vertu de 1°).

3° La condition $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$ implique, si $\vec{v} \wedge \vec{w} \neq \vec{0}$, que $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v} \wedge \vec{w}$ donc coplanaire avec $\vec{v}$ et $\vec{w}$. La condition est vérifiée si $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$,

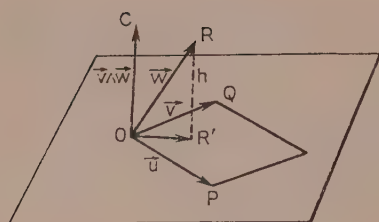


FIG. 4.

c'est-à-dire si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, et par conséquent $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ seront encore coplanaires. En résumé :

La condition $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour que les trois vecteurs soient linéairement dépendants.

4^o INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE. —

Soient $\vec{OP} = \vec{u}$, $\vec{OQ} = \vec{v}$ et $\vec{OR} = \vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires et R' la projection orthogonale de R sur le plan OPQ (fig. 4).

La norme $h = \|\vec{R'R}\|$ est la distance de R au plan OPQ , la norme $A = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{OP}$ et $\vec{OQ}$.

Le produit $V = A \cdot h$ est donc le volume du parallélépipède $\mathcal{T}$ construit sur les trois vecteurs $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$ et $\vec{OR}$.

Or, on a

$$\Delta = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\vec{OR'} + \vec{R'R}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{R'R} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

les vecteurs $\vec{R'R}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ étant colinéaires on a

$$|\Delta| = \|\vec{R'R}\| \cdot \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = V$$

Le produit mixte $\Delta = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est dit le *volume orienté* du parallélépipède $\mathcal{T}$.

On a $\Delta > 0$ ou $\Delta < 0$ suivant que les vecteurs $\vec{R'R}$ et $\vec{OC} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ sont de même sens ou non, c'est-à-dire selon que le trièdre $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de même sens ou non que le trièdre de référence.

5. — Applications.

1^o Équation d'un plan. — Soit P le plan passant par le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et orthogonal au vecteur $\vec{N}$ non nul de composantes (a, b, c) . Le repère étant orthonormé, pour que le point M de coordonnées (x, y, z) appartienne à P , il faut et il suffit que le vecteur $\vec{M_0M}$ soit orthogonal au vecteur $\vec{N}$, c'est-à-dire que l'on ait l'égalité :

$$\vec{N} \cdot \vec{M_0M} = 0$$

qui s'écrit encore :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Cette équation est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0,$$

les nombres a , b et c n'étant pas nuls simultanément.

Réciproquement une équation de la forme :

$$(5) \quad ux + vy + wz + h = 0,$$

où les nombres u , v et w ne sont pas simultanément nuls représente un plan.

On peut trouver trois nombres x_0 , y_0 et z_0 tels que :

$$h = -(ux_0 + vy_0 + wz_0).$$

L'équation (5) s'écrit alors :

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0.$$

On voit que c'est l'équation du plan orthogonal au vecteur de coordonnées u , v , w et passant par le point M_0 de coordonnées x_0 , y_0 et z_0 . Donc le plan défini par l'équation (5) est orthogonal au vecteur de composantes (u, v, w) .

Cette dernière remarque montre que, pour que les plans d'équations

$$ux + vy + wz = 0 \quad \text{et} \quad u'x + v'y + w'z = 0$$

aient même direction (c'est-à-dire soient parallèles ou confondus) il faut et il suffit que les vecteurs $\vec{N}(u, v, w)$ et $\vec{N}'(u', v', w')$ soient colinéaires, c'est-à-dire aient des composantes proportionnelles, ce que l'on peut écrire

$$\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \frac{w}{w'}$$

(en convenant que si un dénominateur est nul le numérateur correspondant est également nul).

Étant donné deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ non colinéaires de coordonnées respectives (p, q, r) et (p', q', r') et le point M_0 de coordonnées x_0 , y_0 et z_0 , cherchons l'équation du plan P passant par M_0 et parallèle aux supports des deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$.

Pour que le point M de coordonnées x , y et z appartienne au plan P , il faut et il suffit que les trois vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ soient coplanaires. Ceci peut s'exprimer en écrivant, soit que le produit mixte $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{V}, \vec{V}')$ est nul, soit que le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ est perpendiculaire au produit vectoriel $\vec{N} = \vec{V} \wedge \vec{V}'$. Dans les deux cas on aboutit évidemment au même résultat.

Le vecteur $\vec{N}$ a pour composantes $qr' - q'r$, $rp' - r'p$ et $pq' - p'q$. L'équation du plan P s'écrit donc :

$$(6) \quad (x - x_0)(qr' - q'r) + (y - y_0)(rp' - r'p) + (z - z_0)(pq' - p'q) = 0.$$

En particulier, le plan P passant par les trois points non alignés M_0 , M_1 et M_2 de coordonnées respectives (x_0, y_0, z_0) , (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) est encore le plan passant par M_0 et parallèle aux deux vecteurs $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $\overrightarrow{M_0M_2}$. Son équation est donc de la forme (6) avec :

$$\begin{array}{lll} p = x_1 - x_0 & q = y_1 - y_0 & r = z_1 - z_0 \\ p' = x_2 - x_0 & q' = y_2 - y_0 & r' = z_2 - z_0. \end{array}$$

2° Équations d'une droite. — Une droite de l'espace est l'intersection de deux plans. Pour que le point M de coordonnées x, y, z appartienne à une droite il faudra que ces coordonnées vérifient simultanément deux équations de la forme :

$$\begin{array}{l} ux + vy + wz + h = 0 \\ u'x + v'y + wz' + h' = 0 \end{array}$$

où u, v, w ne sont pas proportionnels à u', v', w' . En particulier la droite D passant par le point $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ et parallèle au support d'un vecteur $\vec{U}$ de composantes (α, β, γ) non toutes nulles a comme équations :

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

qui traduisent la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$ et $\vec{U}$. Les nombres (α, β, γ) sont dits des *paramètres directeurs* de la droite D .

Si on désigne par t la valeur commune des trois rapports ci-dessus (d'où $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$) on obtient les *équations paramétriques* de D :

$$\begin{array}{l} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{array}$$

Le point M de coordonnées (x, y, z) décrit la droite D lorsque le paramètre t parcourt l'ensemble des nombres réels.

3° Équation d'une sphère. — Considérons la sphère de centre $I (a, b, c)$ et de rayon R . Pour que le point $M (x, y, z)$ appartienne à cette sphère il faut et il suffit que l'on ait

$$\overrightarrow{IM}^2 = R^2$$

soit

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

équation qui s'écrit :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0.$$

Si, inversement, nous considérons la surface S d'équation :

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

avec $A \neq 0$. Nous pouvons écrire cette équation :

$$\left(x + \frac{C}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{C'}{A}\right)^2 + \left(z + \frac{C''}{A}\right)^2 = \frac{C^2 + C'^2 + C''^2}{A^2} - \frac{D}{A}$$

ce qui montre que S est une sphère dont le centre a pour coordonnées :

$$-\frac{C}{A}, \quad -\frac{C'}{A}, \quad -\frac{C''}{A}$$

et dont le rayon a pour carré :

$$R^2 = \frac{C^2 + C'^2 + C''^2 - AD}{A^2}$$

sous la condition

$$C^2 + C'^2 + C''^2 - AD \geq 0.$$

Les caractéristiques de l'équation d'une sphère sont donc les suivantes : l'équation est du second degré par rapport aux variables x , y et z , ne contient pas de terme en xy , yz ou zx et les coefficients de x^2 , y^2 et z^2 sont égaux.

4^o Équation d'un cône de révolution. — Soit $\vec{OA} = \vec{U}$ un vecteur non nul de composantes (α, β, γ) . Un point $M(x, y, z)$ appartient au cône de révolution de sommet O , d'axe OA et de demi-angle au sommet θ (avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) si l'on a

$$\begin{aligned} \vec{OM} \cdot \vec{U} &= \|\vec{OM}\| \cdot \|\vec{U}\| \cos(\theta + k\pi) \\ &= \pm \|\vec{OM}\| \cdot \|\vec{U}\| \cos \theta \end{aligned}$$

d'où la condition

$$(\vec{OM} \cdot \vec{U})^2 - \|\vec{OM}\|^2 \cdot \|\vec{U}\|^2 \cos^2 \theta = 0$$

qui s'écrit

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \cos^2 \theta = 0$$

5^o Équation d'un cylindre de révolution. — Soit $\vec{OA} = \vec{U} \neq \vec{0}$ de composantes (α, β, γ) . Un point $M(x, y, z)$ appartient au cylindre de révolution d'axe OA et de rayon r si la distance MH de M à OA est r . Or, en désignant par α l'angle des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{OM}$ ($0 \leq \alpha \leq \pi$) on a $MH = OM \sin \alpha$.

Comme on a

$$\|\vec{U} \wedge \vec{OM}\| = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{OM}\| \sin \alpha$$

on obtient la condition

$$\|\vec{U} \wedge \vec{OM}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 \cdot r^2$$

ce qui s'écrit

$$(\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2 - r^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0$$

Note. — Il est bien évident que si le sommet du cône est un point quelconque de coordonnées (a, b, c) ou si l'axe du cylindre passe par ce point, il suffit de faire un changement d'axe par translation en posant $X = x - a$, $Y = y - b$, $Z = z - c$ pour se ramener aux cas étudiés ci-dessus.

EXERCICES

1° Soit le tétraèdre $ABCD$: un premier système de coordonnées a pour origine A et pour base les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{i}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} = \vec{k}.$$

Un deuxième système de coordonnées a pour origine B et pour base les vecteurs :

$$\overrightarrow{BC} = \vec{i}', \quad \overrightarrow{BD} = \vec{j}' \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BA} = \vec{k}'$$

Établir les formules du changement de coordonnées.

$$R. \quad x = 1 - x' - y' - z', \quad y = x', \quad z = y'.$$

2° Soit un parallélépipède de centre O , A un de ses sommets, AB , AC et AD les trois arêtes issues de A . Un premier système de coordonnées a pour origine A et pour base :

$$\vec{i} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{j} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{k} = \overrightarrow{AD}.$$

Un deuxième système de coordonnées a pour origine O et pour base :

$$\vec{i}' = \overrightarrow{OB}, \quad \vec{j}' = \overrightarrow{OC}, \quad \vec{k}' = \overrightarrow{OD}.$$

Formules du changement de coordonnées?

$$R. \quad x' = 1 - y - z, \quad y' = 1 - z - x, \quad z' = 1 - x - y.$$

3° A et B étant deux points donnés et p une constante donnée, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = p$ est une sphère.

4° A, B, C, D étant quatre points quelconques, vérifier les relations :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{BC} &= 2 \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

5° Calculer l'angle d'une arête du cube avec une diagonale.

$$R. \quad 54^\circ 44'.$$

6° A, B et C étant des points fixes, trouver l'ensemble des points M tel que le produit mixte $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$ ait une valeur constante donnée.

R. Un plan.

***7°** Étant donné un cube $ABCD A' B' C' D'$ d'arête unité et tel que les trois arêtes $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AA'}$ forment un trièdre direct, établir les égalités :

$$\begin{aligned}\vec{AB} \wedge \vec{AD} &= \vec{AA'} & \vec{AC} \wedge \vec{AD} &= \vec{AA'} & \vec{AC} \wedge \vec{BD} &= 2 \vec{AA'} \\ \vec{AC} \wedge \vec{AD'} &= \vec{DB'} & \vec{AC} \wedge \vec{AC'} &= \vec{DB} & \vec{AC'} \wedge \vec{BD'} &= 2 \vec{DA'}.\end{aligned}$$

***8°** On appelle G le centre de gravité du triangle ABC (déterminé par la condition $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$) et M un point quelconque de l'espace. Montrer que :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 3 \overline{MG}^2 + \frac{1}{3} (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2).$$

***9°** Montrer que si cinq vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ vérifient les relations :

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{u} \quad \vec{A} + \vec{C} = \vec{v} \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = \gamma, \quad \vec{B} \cdot \vec{C} = \alpha, \quad \vec{C} \cdot \vec{A} = \beta$$

on a :

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{v} - \alpha - \beta - \gamma}.$$

****10°** Établir que les faces a , b , c et les angles A , B , C d'un trièdre vérifient la relation :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

****11°** Établir la formule :

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) = (\vec{U} \cdot \vec{W}) \vec{V} - (\vec{U} \cdot \vec{V}) \vec{W}.$$

En déduire que si les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont distincts, les vecteurs

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) \quad \text{et} \quad (\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W}$$

ne sont égaux que si le vecteur $\vec{V}$ est colinéaire au produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{W}$.

12° Soient les deux droites :

$$D_1 \text{ d'équations } \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{1}.$$

$$D_2 \text{ d'équations } x = 2z + 3, y = -z + 4.$$

Un point M_1 décrit D_1 , un point M_2 décrit D_2 . Déterminer la position de ces points correspondant à la distance $M_1 M_2$ minimum. Vérifier qu'alors la droite $M_1 M_2$ est perpendiculaire aux droites D_1 et D_2 .

R . Équations de la perpendiculaire commune à D_1 et D_2 :

$$\begin{cases} 2x + z + 12 = 0 \\ y - 7,6 = 0. \end{cases}$$

13° Coordonnées à $\frac{1}{10^4}$ près des points d'intersection de la sphère de centre $A(3, -1, 0)$ et de rayon 5 avec la droite joignant les points $B(0, 1, 2)$ et $C(2, 0, -1)$.

R . Un des points a pour coordonnées $-0,507\ 1; 1,253\ 6; 2,760\ 7$.

***14°** On donne la droite D d'équations $x = a$, $z = y \operatorname{tg} \theta$ et le cercle C d'équations :

$$x^2 + y^2 = a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta), \quad z = 0.$$

Soit M un point de D et S la sphère passant par M et C . Montrer que l'angle de D et de la sphère est égal à θ quel que soit le point M .

***15°** Équation de la surface engendrée par des droites rencontrant l'axe Oz , parallèles au plan xOy et s'appuyant sur l'hyperbole d'équations $x = a$, $y^2 - z^2 = b^2$.

R.
$$x^2 z^2 + b^2 x^2 - a^2 y^2 = 0.$$

***16°** On considère la courbe gauche définie par :

$$x = \cos t(1 + \cos t) \quad y = \sin t(1 + \cos t) \quad z = 1 + \cos t.$$

Construire ses projections sur les trois plans de coordonnées. Nature de la surface engendrée par la révolution de cette courbe autour de Oz .

R. Zone du cône d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ avec $0 \leq z \leq 2$.

***17°** On éclaire la surface d'équation $x^2 + y^2 - 2z = 0$ (paraboloïde de révolution) par des rayons lumineux ayant la direction du vecteur $\vec{V}(p, 0, -1)$. Ombre portée sur le plan xOy .

R. Parabole.

***18°** La surface d'équation $z^3 + zx + y = 0$ est engendrée par des droites parallèles au plan xOy . Un plan quelconque passant par une de ces droites recoupe la surface suivant une courbe : nature de cette courbe.

R. Parabole.

***19°** La surface définie paramétriquement par :

$$x = u \cos v + f'(v) \sin v, \quad y = u \sin v - f'(v) \cos v, \quad z = u + f(v)$$

vérifie la relation :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1$$

quelle que soit la fonction f supposée deux fois dérivable.

***20°** Équation du cône de sommet $O(0, 0, 0)$ et s'appuyant sur le cercle d'équations :

$$z = 2, \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0.$$

R.
$$4x^2 + 4y^2 - 3z^2 - 4xz - 8yz = 0.$$

****21°** Équation de la surface de révolution engendrée par la parabole définie par :

$$x = t + 1, \quad y = t, \quad z = t^2 + 1$$

tournant autour de Oz . Construire la méridienne de cette surface.

R.
$$(x^2 + y^2 - 2z + 1)^2 - 4(z - 1) = 0.$$

****22°** On considère le point $A(a, 0, 0)$ et l'hélicoïde d'équation $y = x \operatorname{tg} z$. Déterminer la courbe de contact du cône de sommet A circonscrit à l'hélicoïde. Projection de cette courbe sur le plan xOy .

R. Cette courbe est la cochléoïde (exercice 18, chap. XXVIII).

CHAPITRE XXIV

DÉRIVÉES PARTIELLES

1. — Fonctions de plusieurs variables.

Une fonction f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ est une application d'une partie E de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$; elle fait donc correspondre à tout couple de nombres réels (x, y) appartenant à E un nombre réel $z = f(x, y)$ (cf. Rappels, § 5).

On dit aussi que f est une fonction, à valeurs réelles, des *deux variables indépendantes* x et y et que l'ensemble E est l'*ensemble de définition* de la fonction.

On a une représentation géométrique de l'ensemble E en considérant (x, y) comme les coordonnées d'un point m d'un plan. L'ensemble R des points m dont les coordonnées vérifient $(x, y) \in E$ est encore dit l'ensemble de définition de la fonction. A tout point m de R correspond le nombre $z = f(x, y)$ que l'on écrit aussi $z = f(m)$.

Le *graphe* de la fonction f est l'ensemble des triplets de nombres réels (x, y, z) qui vérifient les deux conditions $(x, y) \in E$ et $z = f(x, y)$ (Rappels, § 6).

On a une représentation géométrique de ce graphe en considérant l'ensemble S des points M de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) vérifient ces deux conditions (fig. 1).

A tout point m de R correspond le nombre $z = f(x, y) = f(m)$. Le point M de coordonnées $(x, y, f(m))$ décrit l'ensemble S lorsque m décrit l'ensemble R .

Le plus souvent S est une surface.

L'allure de la surface S permet de mieux saisir les particularités de la fonction f et il y a parfois avantage à en faire un moulage analogue aux cartes géographiques en relief. Dans la pratique on remplace souvent cette carte en relief par une carte plane identifiée au plan xOy sur laquelle sont représentées les projections orthogonales sur xOy des sections de S par des plans parallèles à xOy suffisamment rapprochés (ces sections sont dites *courbes de niveau* de S) : c'est ainsi qu'est représenté (en réduction) le relief de la terre sur les cartes d'état-major, S représentant une portion de la surface de la terre et xOy un plan horizontal.

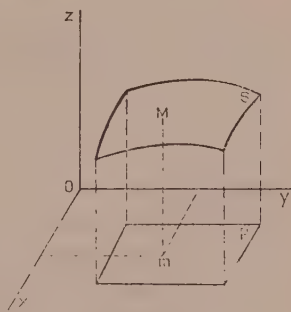


FIG. 1.

Supposons que l'on dispose d'un procédé de calcul d'un nombre réel z à partir de deux nombres réels x et y . Désignons par E l'ensemble de tous les couples (x, y) pour lesquels on peut calculer z . On définit alors une fonction ayant E comme ensemble de définition en faisant correspondre à tout couple (x, y) de E le nombre z .

EXEMPLE 1. — Soit $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. On peut calculer z pour tous les couples (x, y) autres que $(0, 0)$. Soit E l'ensemble de ces couples, on obtient la fonction $(x, y) \mapsto z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ définie sur l'ensemble E .

On dit souvent qu'il s'agit de la « fonction » $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Ainsi la « fonction » $z = \frac{y}{x}$ est la fonction définie pour tout $x \neq 0$ par la correspondance

$$(x, y) \mapsto z = \frac{y}{x}$$

La fonction $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ est définie toutes les fois que l'on a $x^2 + y^2 \leq 1$. Mais comme on a visiblement $x^2 + y^2 = Om^2$, on voit que l'ensemble de définition de z est l'ensemble des points m du plan tels que $Om \leq 1$, c'est-à-dire le *disque* du plan xOy limité par le cercle de centre O et de rayon 1 (Rappelons que dans un plan P contenant un point O , on appelle *disque* de centre O et de rayon $R \geq 0$ l'ensemble des points M de P dont la distance à O est inférieure ou égale à R).

Une fonction $f(x)$ de la seule variable x peut être considérée comme une fonction des deux variables x et y qui ne dépend pas de la variable y . Cette fonction (du point m de coordonnées x et y dans le plan xOy) reste constante toutes les fois que le point m se déplace sur une parallèle à Oy . Son graphe est donc la surface cylindrique formée par les droites parallèles à l'axe Oy et passant par les points du graphe de la fonction $z = f(x)$ de la seule variable x supposé tracé dans le plan xOz .

Cette notion de fonction de deux variables se généralise sans peine en la notion de *fonction de n variables* $f(x_1, \dots, x_n)$.

C'est ainsi que l'on peut définir les fonctions :

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1 + x_2}{x_3 + x_4}. \quad \text{Pour } x_3 + x_4 \neq 0$$

Mais pour $n > 2$ l'espace ordinaire n'a pas suffisamment de dimensions pour que l'on puisse donner une représentation géométrique de la notion de graphe.

Dans le cas d'une fonction de trois variables $u = f(x, y, z)$, on peut, dans une certaine mesure, donner une représentation physique de la fonction u en

convenant par exemple que u représente la température du point M de coordonnées x, y et z . Dans le cas d'une fonction de quatre variables $u = f(x, y, z, t)$ on pourrait encore convenir que u représente la température du point M de coordonnées x, y et z à l'époque t .

2. — Continuité.

Soit m_0 un point du plan xOy de coordonnées x_0 et y_0 . On appelle *voisinage* de m_0 toute région R du plan xOy contenant un disque de centre m_0 et de rayon non nul ou, ce qui revient au même, contenant un carré de centre m_0 dont le côté n'est pas nul. Dire qu'une région R du plan xOy est un voisinage de m_0 revient donc à dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $mm_0 < \alpha$ entraîne que m soit un point de R , ou encore qu'il existe un nombre $\eta > 0$ tel que les inégalités $|x - x_0| < \eta$ et $|y - y_0| < \eta$ entraînent que le point de coordonnées x et y soit un point de R .

Ceci posé, nous dirons que la fonction $f(m)$ est *continue au point m_0* (ou encore qu'elle est continue pour $x = x_0$ et $y = y_0$) si elle est définie dans un voisinage de m_0 et si $f(m)$ tend vers $f(m_0)$ lorsque la distance mm_0 tend vers 0. Ceci revient encore à dire qu'à tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut associer un nombre $\eta > 0$ tel que, si les inégalités $|x - x_0| < \eta$ et $|y - y_0| < \eta$ sont simultanément vérifiées, $f(x, y)$ est défini et $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

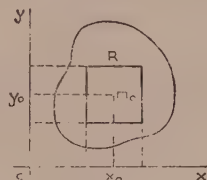


FIG. 2.

REMARQUE. — Supposons la fonction $f(x, y)$ continue en $m_0(x_0, y_0)$. Laissons y constant égal à y_0 . La fonction $f(x, y_0) = \varphi(x)$ est alors une fonction continue pour $x = x_0$. Il en est de même de la fonction $\psi(y) = f(x_0, y)$ de la seule variable y , ce que l'on exprime en disant qu'une fonction continue est *continue séparément par rapport à chaque variable*. Mais par contre une fonction continue séparément par rapport à chaque variable peut ne pas être continue comme le montre l'exemple suivant :

Soit $f(x, y)$ la fonction égale à $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ si x et y ne sont pas tous deux nuls.

Pour compléter la définition de la fonction, nous poserons $f(0, 0) = 0$.

La fonction f est continue séparément par rapport à x et par rapport à y au point O (puisque'elle est identiquement nulle sur les axes Ox et Oy), mais si m tend vers O en restant sur la droite $y = \lambda x$, on a $f(m) = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$ qui est une constante non nulle en dehors des axes. Donc f n'est pas continue au point O .

On dit que la fonction f est *continue dans une certaine région R* du plan xOy si elle est continue en tout point m de R .

On démontre comme dans le cas d'une seule variable que :

Si deux fonctions f et g sont continues en un point m_0 il en est de même de la

somme $f + g$ et du produit fg et que, à condition que $g(m_0)$ ne soit pas nul, il en est encore de même du quotient $\frac{f}{g}$.

On en conclut que tout polynôme par rapport aux variables x et y est une fonction continue et que, par suite, une fraction rationnelle $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, P et Q étant des polynômes, est une fonction continue en tout point m_0 tel que $Q(m_0)$ ne soit pas nul.

Soient $u(x, y)$ et $v(x, y)$ deux fonctions de x et y continues en $m_0(x_0, y_0)$ et soit $f(u, v)$ une fonction continue de u et v pour $u_0 = u(x_0, y_0)$ et $v_0 = v(x_0, y_0)$. La fonction $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ de x et y est encore continue en m_0 . Ceci comprend comme cas particuliers celui où f est fonction de la seule variable u , c'est-à-dire ne dépend pas de v , cas où $g(x, y)$ a la forme $f(u(x, y))$ et celui où les fonctions u et v ne dépendent que de la seule variable x , c'est-à-dire où g est de la forme $g(x) = f(u(x), v(x))$. On dit dans ce dernier cas que f est une *fonction composée* de x par l'intermédiaire des fonctions u et v . Dans le cas général, $f(u(x, y), v(x, y))$ apparaît donc comme une fonction composée de chacune des deux variables x et y par l'intermédiaire des fonctions u et v .

Tout ceci se généralise sans peine au cas d'une fonction d'un nombre quelconque n de variables. C'est ainsi que la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ des variables $x_1, \dots, x_n$ est dite *continue* pour le système de valeurs :

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$$

si pour tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut trouver un nombre $\eta > 0$ tel que les inégalités simultanées :

$$|x_1 - a_1| < \eta \quad \text{et} \quad |x_2 - a_2| < \eta \quad \text{et...} \quad \text{et} \quad |x_n - a_n| < \eta$$

entraînent que $f(x_1, \dots, x_n)$ soit défini et que :

$$|f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)| < \varepsilon.$$

3. — Dérivées partielles.

Soit $z = f(x, y)$ une fonction de x et de y . Si, y étant laissé constant égal à y_0 , la fonction $f(x, y_0)$ de x seul admet une dérivée par rapport à x pour $x = x_0$, on dit que cette dernière est la *dérivée partielle* de z (ou de f) par rapport à x (pour $x = x_0$ et $y = y_0$) et on note

$$f'_x(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

la valeur de cette dérivée (on ne donne pas de sens aux symboles ∂f et ∂x pris séparément).

On définit de façon analogue le nombre $f'_y(x_0, y_0)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, dérivée partielle de f par rapport à y (pour $x = x_0$ et $y = y_0$).

Lorsque x_0 et y_0 varient on définit ainsi deux nouvelles fonctions des variables x et y notées f'_x et f'_y ou encore $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

C'est ainsi que si $f(x, y) = x^2 y e^y$, on a :

$$f'_x = 2xy e^y \quad \text{et} \quad f'_y = x^2 e^y(1 + y).$$

Ces dérivées partielles ont une interprétation géométrique très simple. Soient S le graphe de la fonction f , M_0 le point de S de coordonnées x_0, y_0 et C la section de S par le plan P parallèle à xOz mené par M_0 . En désignant par $O'x'$ et $O'z'$ les axes parallèles à Ox et Oz menés par le point O' intersection de Oy et de P , on voit que C est le graphe de la fonction $f(x, y_0)$ rapportée aux axes $O'x$ et $O'z'$. Par suite $f'_x(x_0, y_0)$ est le coefficient angulaire de la tangente M_0T à la courbe C en M_0 . Le nombre $f'_y(x_0, y_0)$ s'interpréterait de façon analogue à partir de la section de S par le plan mené par M_0 parallèlement à yOz .

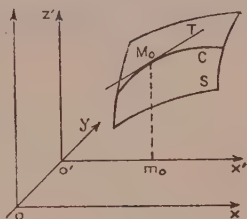


FIG. 3.

Si la fonction $f'_x(x, y)$ admet une dérivée partielle par rapport à x , on note celle-ci f''_{x^2} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Si elle admet une dérivée partielle par rapport à y , on note cette dernière f''_{xy} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. On définirait de même les fonctions f''_{yx} et f''_{y^2} qui sont les dérivées partielles de f'_y par rapport à x et à y .

C'est ainsi que dans l'exemple précédent : $z = x^2 y e^y$, on a :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy e^y) = 2x e^y(y + 1)$$

et :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 e^y(y + 1)) = 2x e^y(y + 1).$$

On remarque que l'on a ici l'égalité :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Il s'agit là d'un fait général comme l'indique le :

THÉORÈME 1. — *Si la fonction $f(x, y)$ est telle que les dérivées partielles f''_{xy} et f''_{yx} existent et sont continues dans un voisinage du point $m_0(x_0, y_0)$, elles prennent même valeur en ce point, c'est-à-dire que $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.*

Posons :

$$\Delta = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

et soit :

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0).$$

On a l'égalité :

$$\Delta = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0).$$

La fonction $\varphi(x)$ admettant par rapport à x la dérivée

$$\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0),$$

la formule des accroissements finis permet d'écrire :

$$\Delta = h\varphi'(x_0 + \theta_0 h) \quad (0 < \theta_0 < 1).$$

Ou encore :

$$\Delta = h[f'_x(x_0 + \theta_0 h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta_0 h, y_0)].$$

Appliquons de même la formule des accroissements finis à la fonction de y :

$$\psi(y) = f'_x(x_0 + \theta_0 h, y)$$

dont la dérivée est :

$$\psi'(y) = f''_{xy}(x_0 + \theta_0 h, y).$$

L'égalité $\Delta = h[\psi(y_0 + k) - \psi(y_0)]$ permet d'écrire :

$$\Delta = hk\psi'(y_0 + \theta_1 k) \quad \text{avec} \quad 0 < \theta_1 < 1$$

ou :

$$\Delta = hkf''_{xy}(x_0 + \theta_0 h, y_0 + \theta_1 k).$$

En permutant les rôles de x et de y , on pourrait de même écrire une égalité de la forme :

$$\Delta = hkf''_{yx}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_3 k) \quad \text{avec} \quad 0 < \theta_2 < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \theta_3 < 1.$$

D'où l'égalité :

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_0 h, y_0 + \theta_1 k) = f''_{yx}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_3 k).$$

Comme f''_{xy} et f''_{yx} sont supposées continues pour $x = x_0$ et $y = y_0$, l'égalité précédente dans laquelle on fait tendre simultanément h et k vers 0 permet d'écrire :

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

D'où le théorème.

Il n'y a donc usuellement que trois dérivées partielles secondes d'une fonction de deux variables :

$$f''_{x^2}, \quad f''_{xy} = f''_{yx} \quad \text{et} \quad f''_{y^2}.$$

De proche en proche on définit des dérivées partielles $n^{\text{ième}}$. Le théorème précédent permet, pour définir une telle dérivée partielle, de ne pas tenir compte de l'ordre des dérivations, mais seulement du nombre de fois où l'on doit dériver la fonction par rapport à x et du nombre de fois où on doit la dériver par rapport à y .

En effet, soit par exemple la dérivée $f^{(4)}_{xyyx}$. Les égalités :

$$f^{(4)}_{xyyx} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} (f^{(2)}_{xy})$$

et :

$$f^{(4)}_{xyyx} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (f^{(2)}_{xy})$$

permettent d'écrire : $f^{(4)}_{xyyx} = f^{(4)}_{xyxy}$.

De même, $f^{(4)}_{xyxy} = f^{(4)}_{xxyy}$ et par suite $f^{(4)}_{xyyx} = f^{(4)}_{xxyy}$ que l'on note $f^{(4)}_{x^2y^2}$. La fonction f admet donc $n + 1$ dérivées partielles d'ordre n notées :

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}}, \quad \frac{\partial^n f}{\partial y^n}.$$

Ces résultats se généralisent immédiatement à un nombre quelconque de variables.

C'est ainsi que la fonction de trois variables $u = f(x, y, z)$ a la dérivée partielle d'ordre 5 : $\frac{\partial^5 f}{\partial^2 x \partial y \partial^2 z}$ obtenue en dérivant u deux fois par rapport à x , une fois par rapport à y et deux fois par rapport à z sans qu'il soit besoin de préciser l'ordre dans lequel on fait ces diverses dérivations.

4. — Fonctions composées.

Soient $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$ deux fonctions de la variable t et $z = f(x, y)$ une fonction des deux variables x et y , ce qui permet de définir la fonction composée $z(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$. Supposons que les fonctions φ et ψ admettent des dérivées par rapport à t et que z admette par rapport à x et y les dérivées partielles continues z'_x et z'_y . Montrons que z admet une dérivée par rapport à t .

Donnons à t l'accroissement h . Il en résulte pour x , y et z les accroissements :

$$x(t+h) - x(t) = p \quad y(t+h) - y(t) = q \quad \text{et} \quad z(t+h) - z(t) = k$$

et l'on peut écrire :

$$k = z(x+p, y+q) - z(x, y) = [z(x+p, y+q) - z(x, y+q)] + [z(x, y+q) - z(x, y)]$$

Mais on a les égalités :

$$z(x+p, y+q) - z(x, y+q) = p[z'_x(x, y+q) + \varepsilon(p)]$$

$$z(x, y+q) - z(x, y) = q[z'_y(x, y) + \varepsilon(q)]$$

$$p = h[x'_t + \varepsilon(h)]$$

et :

$$q = h[y'_t + \varepsilon(h)]$$

et par suite

$$\frac{k}{h} = [z'_x(x, y+q)x'_t + z'_y(x, y)y'_t + \varepsilon(h)].$$

Comme z'_x est supposé continu, $z'_x(x, y+q)$ tend vers $z'_x(x, y)$ lorsque h tend vers 0. Donc $\frac{k}{h}$ tend vers $x'_t z'_x + y'_t z'_y$, ce qui montre l'existence d'une dérivée pour $z(t)$ égale à $z'_x x'_t + z'_y y'_t$. On obtient donc la formule de dérivation d'une fonction composée :

$$z'_t = z'_x x'_t + z'_y y'_t.$$

Ceci se généralise immédiatement à un nombre quelconque de variables. Si $z = f(x_1, \dots, x_n)$ et si chaque x_i est une fonction de t on a :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

EXEMPLE 2. — Soit à dériver la fonction composée : $y = u(x)^{v(x)}$. On a :

$$y'_x = y'_u u'_x + y'_v v'_x.$$

Mais :

$$y'_u = vu^{v-1} \quad \text{et} \quad y'_v = u^v \text{Log } u.$$

D'où :

$$y'_x = vu^{v-1} u'_x + u^v v'_x \text{Log } u.$$

Les considérations précédentes permettent encore de calculer la dérivée seconde z''_{t^2} de la fonction composée $z = f(x(t), y(t))$.

Nous venons de voir que :

$$z'_t = z'_x x'_t + z'_y y'_t.$$

Calculons la dérivée seconde de z par rapport à t . Remarquons pour cela que z'_x et z'_y sont des fonctions composées de t , donc :

$$(z'_x)'_t = z''_{x^2} x'_t + z''_{xy} y'_t$$

et :

$$(z'_y)'_t = z''_{yx} x'_t + z''_{y^2} y'_t.$$

Comme d'autre part $z''_{xy} = z''_{yx}$ nous aurons finalement :

$$z''_{t^2} = z''_{x^2} x'^2_t + 2z''_{xy} x'_t y'_t + z''_{y^2} y'^2_t + z'_x x''_{t^2} + z'_y y''_{t^2}.$$

Les dérivées suivantes se calculeraient de manière analogue.

5. — Formule des accroissements finis généralisés.

Soit à évaluer l'accroissement :

$$\Delta f = f(x_0 + \alpha, y_0 + \beta, z_0 + \gamma) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Introduisons pour cela :

$$\Phi(t) = f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t, z_0 + \gamma t)$$

qui est une fonction composée de t par l'intermédiaire des variables :

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t \quad \text{et} \quad z = z_0 + \gamma t.$$

L'égalité $\Delta f = \Phi(1) - \Phi(0)$ permet d'obtenir Δf en appliquant à Φ la formule des accroissements finis :

$$\Delta f = \Phi'(\theta) \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1.$$

La relation $\Phi(t) = f(x, y, z)$ permet d'écrire :

$$\Phi'(t) = f'_x x'_t + f'_y y'_t + f'_z z'_t$$

et comme $x'_t = \alpha$, $y'_t = \beta$ et $z'_t = \gamma$:

$$\Phi'(t) = \alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z.$$

D'où l'égalité :

$$f(x_0 + \alpha, y_0 + \beta, z_0 + \gamma) - f(x_0, y_0, z_0) = [\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z]_{\substack{x_0 + \alpha\theta \\ y_0 + \beta\theta \\ z_0 + \gamma\theta}} \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1$$

le deuxième membre de l'égalité désignant la valeur prise par la fonction :

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z \quad \text{pour} \quad x = x_0 + \alpha\theta, \quad y = y_0 + \beta\theta \quad \text{et} \quad z = z_0 + \gamma\theta.$$

En utilisant au lieu de la formule des accroissements finis la formule de Taylor :

$$\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(0) + \frac{1}{2!} \Phi''(0) + \dots + \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} \Phi^{(n+1)}(\theta)$$

on obtiendrait pour Δf une expression qui généraliserait la formule de Taylor à une variable et qui permettrait d'évaluer numériquement Δf avec plus de précision.

6. — *Extremum d'une fonction de deux variables.*

Une fonction :

$$z = f(x, y)$$

sera dite passer par un *maximum* pour le couple de valeurs (x_0, y_0) s'il existe un voisinage R du point $m_0(x_0, y_0)$ tel qu'en tout point m de R on ait l'inégalité :

$$f(m) \leq f(m_0).$$

Ceci revient à dire qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que les inégalités simultanées : $|x - x_0| < \alpha$ et $|y - y_0| < \alpha$ entraînent $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$. On définit de manière analogue la notion de *minimum*.

La fonction f sera dite passer par un *extremum* au point m_0 si elle passe par un maximum ou par un minimum au point m_0 . Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la quantité $\Delta = f(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - f(x_0, y_0)$ garde un signe constant lorsque α et β sont suffisamment petits en valeurs absolues.

En reprenant les notations du dernier numéro, c'est-à-dire en posant :

$$\Phi(t) = f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$$

On développera $\Delta = \Phi(1) - \Phi(0)$ par la formule de Taylor jusqu'à l'ordre 3 :

$$(1) \quad \Delta = \Phi'(0) + \frac{1}{2!} \Phi''(0) + \frac{1}{6} \Phi'''(0) \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1.$$

On a successivement les égalités :

$$\left. \begin{aligned} \Phi'(t) &= [\alpha f'_x + \beta f'_y]_{x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t} \\ \Phi''(t) &= [\alpha^2 f''_{x^2} + 2\alpha\beta f''_{xy} + \beta^2 f''_{y^2}]_{x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t} \\ \Phi'''(t) &= [\alpha^3 f'''_{x^3} + 3\alpha^2\beta f'''_{x^2y} + 3\alpha\beta^2 f'''_{xy^2} + \beta^3 f'''_{y^3}]_{x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t} \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\text{Posons } f'_x(x_0, y_0) = (f'_x)_0 \quad f'_y(x_0, y_0) = (f'_y)_0 \\ f''_{x^2}(x_0, y_0) = (f''_{x^2})_0 \quad f''_{xy}(x_0, y_0) = (f''_{xy})_0 \quad \text{et} \quad f''_{y^2}(x_0, y_0) = (f''_{y^2})_0$$

(1) Cette formule est obtenue en dérivant z'_t , obtenu au n° 4 et en tenant compte de ce que $x'_t = \alpha$ et $y'_t = \beta$ sont des constantes.

et posons d'autre part :

$$\alpha = \rho \cos \varphi \quad \text{et} \quad \beta = \rho \sin \varphi$$

avec $\rho = m_0 m > 0$ et $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{m_0 m})$ variant de 0 à 2π .

L'égalité (1) et les expressions de Φ' , Φ'' et Φ''' permettent alors d'écrire :

$$\Delta = \rho [\cos \varphi (f'_x)_0 + \sin \varphi (f'_y)_0] + \rho^2 [\cos^2 \varphi (f''_{xx})_0 + 2 \cos \varphi \sin \varphi (f''_{xy})_0 + \sin^2 \varphi (f''_{yy})_0] + \rho^2 \varepsilon(\rho).$$

Faisons tendre ρ vers 0, l'angle φ restant constant, c'est-à-dire faisons tendre m vers m_0 en restant sur une demi-droite fixe issue de m_0 . On voit que si la quantité $F(\varphi) = \cos \varphi (f'_x)_0 + \sin \varphi (f'_y)_0$ n'est pas nulle, Δ est équivalent à $\rho F(\varphi)$ qui est du signe de $F(\varphi)$. Comme $F(\varphi)$ prend une valeur opposée lorsque φ augmente de π , il en résulte que m_0 ne pourra être un extremum que si $F(\varphi)$ est nul pour toute valeur de φ , c'est-à-dire si $(f'_x)_0 = (f'_y)_0 = 0$. On a donc le :

THÉOREME 2. — *Pour que la fonction $f(x, y)$ passe par un extremum pour le couple de valeurs (x_0, y_0) , il est nécessaire que les dérivées partielles premières f'_x et f'_y s'annulent pour (x_0, y_0) .*

Supposons que l'on ait : $(f'_x)_0 = (f'_y)_0 = 0$. On peut alors écrire :

$$\Delta = \rho^2 [G(\varphi) + \varepsilon(\rho)]$$

avec :

$$G(\varphi) = (f''_{yy})_0 \sin^2 \varphi + 2(f''_{xy})_0 \sin \varphi \cos \varphi + (f''_{xx})_0 \cos^2 \varphi.$$

Lorsque m tend vers m_0 en restant sur une demi-droite issue de m_0 telle que $G(\varphi)$ ne soit pas nul, on voit que Δ est un infiniment petit du deuxième ordre par rapport à ρ et est du signe de $G(\varphi)$. Il ne pourra donc y avoir extremum que si $G(\varphi)$ garde un signe constant. Comme $G(\varphi)$ est du même signe qu'un polynôme du deuxième degré en $\tan \varphi$, on voit donc que si ce polynôme n'a pas de racine, c'est-à-dire si $(f''_{xy})_0^2 - (f''_{xx})_0 (f''_{yy})_0 < 0$, $G(\varphi)$ a toujours le signe de $(f''_{yy})_0$. La fonction f passera alors par un extremum; ce sera un maximum si $(f''_{yy})_0 < 0$ et un minimum si $(f''_{yy})_0 > 0$. Dans le cas où le polynôme du 2^e degré en $\tan \varphi$ admet deux racines distinctes $\tan \varphi_0$ et $\tan \varphi_1$, on voit que Δ a un signe distinct suivant que $\tan \varphi$ est compris ou non entre $\tan \varphi_0$ et $\tan \varphi_1$ (fig. 4). Il n'y a plus extremum. On dit alors qu'il y a un *col*.

Dans tous les autres cas il faut pousser l'étude plus loin et développer la formule de Taylor de $\Phi(t)$ jusqu'au 4^e ordre pour chercher s'il y a effectivement un extremum.

On remarquera que si pour une fonction $f(x)$ d'une variable l'annulation de la dérivée entraîne avec une quasi-certitude l'existence d'un extremum

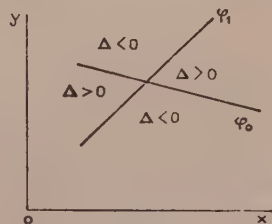


FIG. 4.

(l'exception ne pouvant se produire que si l'égalité $f''(x) = 0$ est réalisée), dans le cas d'une fonction de deux variables $f(x, y)$ l'annulation des dérivées premières n'entraîne pas avec quasi-certitude l'existence d'un extremum, l'apparition d'un col étant *a priori* aussi probable que celle d'un extremum (ces deux cas étant régis par le signe de $f''_{yx} - f''_{xy}$).

Au point de vue géométrique, considérons la surface S représentative de la fonction $z = f(x, y)$ et le point M_0 de coordonnées x_0, y_0 et $f(x_0, y_0)$. Nous montrerons plus loin que les diverses courbes situées sur S et passant par M_0 ont leurs tangentes en M_0 toutes situées dans un même plan dit *plan tangent* en M_0 à la surface S . En particulier ce plan tangent contient les deux tangentes aux sections de S par les plans d'équation $x = x_0$ et $y = y_0$. Les conditions $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ expriment que ces deux tangentes M_0T et M_0T' sont parallèles au plan xOy . Donc le plan tangent est parallèle au plan xOy . Mais deux cas sont possibles : ce plan tangent peut laisser la surface tout entière d'un même côté (tout au moins la portion de surface autour de M_0), c'est le cas d'une surface convexe telle que la sphère, et alors la fonction $f(x, y)$ passe par un extremum, ou bien ce plan M_0TT' , quoique tangent à la surface S , la coupe suivant une courbe passant par M_0 et la fonction $f(x, y)$ ne passe alors pas par un extremum.

On peut se rendre compte de l'existence de ce dernier cas en étudiant la fonction $z = xy$:

$$z'_x = y, \quad z'_y = x, \quad z''_{x^2} = 0, \quad z''_{xy} = 1, \quad z''_{y^2} = 0.$$

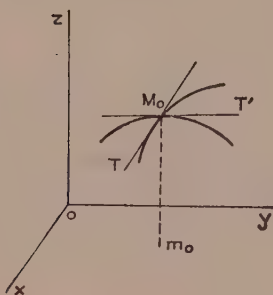


FIG. 5.

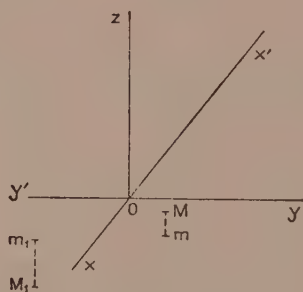


FIG. 6.

Pour $x = y = 0$, les dérivées premières sont nulles, mais $(z''_{xy})^2 - z''_{x^2} z''_{y^2} = 1$ est positif. Il n'y a pas d'extremum. Si nous essayons de représenter la surface S correspondante (fig. 6), nous constatons que si x et y ont même signe (m étant dans le 1^{er} ou le 3^e quadrant), M est au-dessus du plan xOy puisque z est positif. Si x et y sont de signes contraires, z est négatif. La surface S est coupée par le plan tangent xOy suivant les deux droites $x'x$ et $y'y$ et est séparée par ces deux droites en quatre régions alternativement au-dessus et au-dessous du

plan xOy (forme rappelant celle d'un col de montagne), ce qui correspond bien au fait que la fonction xy ne passe pas par un extremum au point $x = y = 0$.

7. — *Extremum d'une fonction de plusieurs variables.*

Ces considérations s'étendent sans peine aux fonctions de plus de deux variables. On montrerait encore qu'une condition nécessaire pour que l'on soit en présence d'un extremum est que toutes les dérivées partielles du premier ordre soient nulles pour le système de valeurs considéré. Pour s'assurer de l'existence effective d'un extremum il faut effectuer des calculs analogues à ceux indiqués ci-dessus. Toutefois, il est parfois commode, au lieu d'appliquer la formule de Taylor, d'utiliser des développements limités : si toutes les dérivées partielles du second ordre ne s'annulent pas, on sera conduit à étudier le signe d'une forme quadratique par rapport aux accroissements $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, des variables (c'est-à-dire d'un polynôme homogène du second degré par rapport à ces variables).

EXEMPLE 3. — Soit par exemple à déterminer les extrema de la fonction de trois variables :

$$u = (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 + 6(x^2 + y^2).$$

Nous commençons par annuler ses dérivées partielles du premier ordre, c'est-à-dire par résoudre le système :

$$u'_x = 4x(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + 12x = 0$$

$$u'_y = 4y(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + 12y = 0$$

$$u'_z = 4z(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0.$$

La dernière équation nous donne soit $z = 0$, d'où $4x(x^2 + y^2 + 2) = 0$ et $4y(x^2 + y^2 + 2) = 0$, donc $x = y = 0$, soit $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ d'où $x = 0, y = 0$ et par suite $z = \pm 1$.

Nous avons donc à étudier s'il y a effectivement extremum pour les trois systèmes de valeurs :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{et} \quad u = 1$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 1 \quad \text{et} \quad u = 0$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = -1 \quad \text{et} \quad u = 0$$

1° Étudions la fonction u en posant :

$$x = \alpha, \quad y = \beta \quad \text{et} \quad z = \gamma$$

α, β et γ étant infiniment petits. On trouve alors :

$$u - 1 = 4(\alpha^2 + \beta^2) - 2\gamma^2 + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \varepsilon(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

quantité dont le signe ne reste pas constant lorsque $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ est suffisamment petit. Le système de valeurs $x = y = z = 0$ ne correspond pas à un extremum.

2° Étudions la fonction u en posant :

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = 1 + \gamma$$

α, β, γ étant infiniment petits. On trouve alors :

$$u = 4\gamma^2 + 6(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \varepsilon(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

quantité toujours positive lorsque $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ est suffisamment petit, donc $f(x, y, z)$ a un minimum nul pour $x = y = 0$ et $z = 1$.

3° La fonction étant paire par rapport à x, y et z , on en conclut sans nouveau calcul que $u(x, y, z)$ a également un minimum nul pour $x = y = 0$ et $z = -1$.

EXERCICES

1° Les dérivées partielles de la fonction :

$$u = \text{Arc tg } \frac{x}{y} + \text{Arc tg } \frac{y}{z} + \text{Arc tg } \frac{z}{x}$$

vérifient la relation $u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = 0$.

2° Volume maximum d'un parallélépipède rectangle tel que la somme des aires des six faces ait une valeur donnée S .

$$R. \left(\frac{S}{6} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

*3° Les dérivées partielles de la fonction

$$z(x, y) = \left(1 + \frac{2x}{y} \right)^{x+y}$$

vérifient la relation :

$$x^2(zz''_{x^2} - z'^2_x) = y^2(zz''_{y^2} - z'^2_y).$$

*4° On considère la fonction $z(x, y) = xf(u)$ où $u = \frac{y}{x}$ et où f est une fonction admettant des dérivées des deux premiers ordres. Vérifier les relations :

$$xz'_x + yz'_y = z \quad \text{et} \quad z''_{xy} = z''_{x^2} z''_{y^2}.$$

*5° Maximum et minimum de l'expression :

$$u(x, y, z) = x \text{ Log } x + y \text{ Log } y + z \text{ Log } z,$$

les variables x, y, z étant liées par la relation $x + y + z = 1$.

R.

0 et $-\text{Log } 3$.

*6° Extrema de la fonction $z(x, y) = 2 \cos x - 2 \cos y - \cos (x - y)$.

R. — 3 et 5.

**7° Les quantités $p_1, p_2, \dots, p_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ étant strictement positives, étudier lorsque x_n varie seul, les variations de :

$$u = \text{Log} \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} - \frac{p_1 \text{Log } x_1 + p_2 \text{Log } x_2 + \dots + p_n \text{Log } x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}.$$

En déduire par récurrence que u est positif ou nul.

*8° Deux cercles de rayons R et R' sont tangents extérieurement en A . Déterminer le maximum de l'aire d'un triangle dont A est un sommet et dont les deux autres sommets sont respectivement sur chacun des deux cercles.

R. $\frac{3RR'\sqrt{3}}{4}.$

CHAPITRE XXV

DIFFÉRENTIELLES

1. — Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables.

Soit $f(x, y, z)$ une fonction des trois variables indépendantes x, y et z admettant des dérivées partielles du premier ordre f'_x, f'_y et f'_z . On appelle *différentielle totale* (ou simplement *différentielle*) de la fonction f en x, y, z la fonction des trois variables dx, dy, dz :

$$(dx, dy, dz) \mapsto df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$$

La différentielle de la fonction $f(x, y, z) = x$ est donc :

$$df = 1 dx + 0 dy + 0 dz = dx.$$

Ainsi on peut considérer dx, dy, dz comme les différentielles des fonctions x, y et z .

On remarquera qu'ici f'_x n'est pas égal à $\frac{df}{dx}$ ⁽¹⁾. C'est pour cela qu'une dérivée partielle a été notée $\frac{\partial f}{\partial x}$ et non pas $\frac{df}{dx}$.

Cette définition s'étend sans peine à un nombre quelconque de variables. Dans le cas d'une fonction d'une variable on retrouve la définition de la différentielle donnée au chapitre V :

$$df(x) = f'(x) dx$$

Dans le cas d'une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ on a une interprétation géométrique de la différentielle $dz = f'_x dx + f'_y dy$ qui rappelle celle de la différentielle d'une fonction d'une variable. Si $g(x, y)$ désigne la fonction dont le graphe est le plan tangent au point d'abscisse x et d'ordonnée y du graphe de $f(x, y)$, la quantité dz est l'accroissement de g quand on donne à x l'accroissement dx et à y l'accroissement dy .

(1) $\frac{df}{dx} = f'_x + \frac{f'_y dy + f'_z dz}{dx}$. Noter que $\frac{dy}{dx}$ est alors un quotient de différentielles mais non pas une dérivée puisque x et y sont supposés être des variables indépendantes.

La formule des accroissements finis permet d'écrire :

$$\Delta f = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) \\ = dx f'_x(x + \theta dx, y + \theta dy, z + \theta dz) + dy f'_y(\dots) + dz f'_z(\dots)$$

avec $0 < \theta < 1$.

Mais, si on suppose f'_x, f'_y et f'_z continues dans un voisinage de (x, y, z) , on a :

$$f'_x(x + \theta dx, y + \theta dy, z + \theta dz) = f'_x(x, y, z) + \varepsilon_1$$

$$f'_y(x + \theta dx, y + \theta dy, z + \theta dz) = f'_y(x, y, z) + \varepsilon_2$$

$$f'_z(x + \theta dx, y + \theta dy, z + \theta dz) = f'_z(x, y, z) + \varepsilon_3$$

les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 tendant toutes trois vers 0 lorsque dx, dy et dz tendent simultanément vers 0.

On a donc une égalité de la forme :

$$\Delta f = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz + \varepsilon_1 dx + \varepsilon_2 dy + \varepsilon_3 dz$$

En posant :

$$\delta = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

on a

$$|\varepsilon_1 dx + \varepsilon_2 dy + \varepsilon_3 dz| \leq \delta (|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3|)$$

d'où

$$\Delta f = df + \delta \cdot \varepsilon(\delta)$$

Ceci explique encore que dans la pratique on désigne souvent par dx, dy et dz des quantités très petites, df étant alors confondu avec l'accroissement correspondant de f . C'est d'ailleurs ce qu'indique le nom « différentielle totale ».

L'invariance de la notion de différentielle s'exprime dans le

THÉORÈME 1. — Soit $\Omega = f(u, v, w)$ une fonction des deux variables indépendantes x et y par l'intermédiaire des fonctions u, v et w . La différentielle totale de Ω considérée comme fonction de x et de y est égale à $f'_u du + f'_v dv + f'_w dw$, si on désigne par du, dv et dw les différentielles totales des fonctions u, v et w de x et de y .

On a en effet, par définition, $d\Omega = \Omega'_x dx + \Omega'_y dy$. Mais comme Ω est une fonction composée de x par l'intermédiaire de u, v et w :

$$\Omega'_x = f_u u'_x + f'_v v'_x + f'_w w'_x.$$

De même :

$$\Omega'_y = f_u u'_y + f'_v v'_y + f'_w w'_y$$

et par suite :

$$d\Omega = (f'_u u'_x + f'_v v'_x + f'_w w'_x) dx + (f'_u u'_y + f'_v v'_y + f'_w w'_y) dy \\ = f'_u (u'_x dx + u'_y dy) + f'_v (v'_x dx + v'_y dy) + f'_w (w'_x dx + w'_y dy) \\ = f'_u du + f'_v dv + f'_w dw.$$

REMARQUES. — 1^o Le théorème 1, qui se généralise sans peine à un nombre quelconque de variables et à un nombre quelconque de fonctions intermédiaires, montre l'avantage qu'il y a dans les calculs à utiliser systématiquement les différentielles. On remarquera, en effet, que dans le calcul d'une dérivée partielle telle que f'_x il faut toujours préciser quelles sont les variables indépendantes choisies, x , y et z par exemple.

L'expression de f'_x n'est, en effet, par la même suivant que l'on prend pour variables indépendantes x , y et z ou x , $Y = x + y$ et $Z = x + z$ par exemple. C'est ainsi que si $f(x, y, z) = x + y + z$, on peut écrire $f = Y + Z - x$ et par suite :

$f'_x = 1$ si les variables indépendantes sont x , y et z ;

$f'_x = -1$ si les variables indépendantes sont x , Y et Z .

C'est ainsi que si $f = uv$ on pourra toujours écrire $df = u dv + v du$ ou si $f = \frac{u}{v}$ on aura toujours $df = \frac{v du - u dv}{v^2}$ sans se préoccuper de savoir quelles sont les variables indépendantes choisies.

2^o Supposons qu'à la suite d'un calcul on tombe sur une égalité de la forme :

$$(1) \quad A dx + B dy + C dz = P dx + Q dy + R dz$$

A , B , C , P , Q et R dépendant des différentes variables introduites. Que peut-on en conclure ? Il faut ici distinguer soigneusement deux cas :

a) Si x , y et z sont des variables indépendantes, on peut donner à dx , dy et dz des valeurs indépendantes. On peut donc poser $dx = 1$, $dy = 0$ et $dz = 0$, ce qui montre que $A = P$. De même $B = Q$ et $C = R$. En particulier si on tombe sur une égalité de la forme : $df = A dx + B dy + C dz$, comme on a également :

$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz,$$

on a sûrement :

$$A = f'_x, \quad B = f'_y \quad \text{et} \quad C = f'_z$$

b) Si x , y et z ne sont pas indépendantes, on exprime dx , dy et dz en fonctions de variables indépendantes. Après seulement, l'égalité (1) permettra d'écrire des égalités analogues aux précédentes.

Si, par exemple, x et y sont indépendantes et, si z est une fonction $z(x, y)$ de x et de y , les égalités (1) permettent d'écrire :

$$A dx + B dy + C(z'_x dx + z'_y dy) = P dx + Q dy + R(z'_x dx + z'_y dy)$$

et par suite :

$$A + C z'_x = P + R z'_x$$

$$B + C z'_y = Q + R z'_y.$$

2. — *Changement de variables.*

Nous poserons le problème sous sa forme la plus générale dans le cas du changement de deux variables indépendantes x et y .

Soit z une fonction des deux variables x et y , cette fonction n'étant d'ailleurs en général pas connue, ou du moins pas explicitée, et soit :

$$E = E(x, y, z, z'_x, z'_y, z''_{x^2}, \dots)$$

une quantité dépendant de x , de y , de la fonction z et de certaines de ses dérivées partielles par rapport à x et à y . Supposons qu'on exprime x et y en fonction de deux nouvelles variables indépendantes u et v :

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(u, v)$$

les fonctions φ et ψ étant connues.

z devient alors une fonction des variables u et v et on se pose le problème d'exprimer E en fonction de u , v , de z et des dérivées partielles de z par rapport à u et v .

Les relations :

$$\begin{aligned} z'_u &= z'_x \varphi'_u + z'_y \psi'_u \\ z'_v &= z'_x \varphi'_v + z'_y \psi'_v \end{aligned}$$

permettent d'exprimer z'_x et z'_y comme fonction de u , v , z'_u et z'_v . Pour calculer une dérivée seconde telle que z''_{x^2} , on serait amené à remplacer z par $T = z'_x$ dans les égalités précédentes, d'où des expressions de z''_{x^2} et z''_{xy} en fonction de u , v , T'_u , T'_v , d'où finalement en fonction de u , v , z'_u , z'_v , z''_{u^2} , z''_{v^2} et z''_{uv} puisqu'on a déjà l'expression de T en fonction de u , v , z'_u et z'_v .

Nous allons voir sur un exemple l'avantage qu'il y a dans un tel calcul à employer systématiquement les différentielles au lieu des dérivées.

Application. Calcul d'un laplacien en coordonnées polaires. — f étant une fonction des variables indépendantes x et y , on appelle *laplacien* de f la quantité :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Cette quantité joue un grand rôle en physique, particulièrement en théorie de l'électricité.

On fait le changement de variables défini par les égalités :

$$(2) \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (\text{le signe de } r \text{ n'étant pas imposé})$$

et on se propose d'exprimer Δf en fonction de r , de θ , de f et des dérivées partielles de f par rapport à r et à θ . On a :

$$f'_x = f'_r r'_x + f'_\theta \theta'_x.$$

D'où, en dérivant par rapport à x l'égalité précédente :

$$f''_{x^2} = f''_{r^2}(r'_x)^2 + 2f''_{r\theta} r'_x \theta'_x + f''_{\theta^2}(\theta'_x)^2 + f'_r r''_{x^2} + f'_\theta \theta''_{x^2}$$

de même :

$$f''_{y^2} = f''_{r^2}(r'_y)^2 + 2f''_{r\theta} r'_y \theta'_y + f''_{\theta^2}(\theta'_y)^2 + f'_r r''_{y^2} + f'_\theta \theta''_{y^2}$$

et :

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta f = f''_{r^2}[(r'_x)^2 + (r'_y)^2] + 2f''_{r\theta}[r'_x \theta'_x + r'_y \theta'_y] + f''_{\theta^2}[(\theta'_x)^2 + (\theta'_y)^2] \\ \quad + f'_r[r''_{x^2} + r''_{y^2}] + f'_\theta(\theta''_{x^2} + \theta''_{y^2}). \end{cases}$$

Les égalités (2) permettent d'écrire :

$$\begin{cases} dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta. \end{cases}$$

qui s'écrivent encore :

$$(4) \quad \begin{cases} dr = \cos \theta dx + \sin \theta dy \\ r d\theta = -\sin \theta dx + \cos \theta dy. \end{cases}$$

On a donc les égalités :

$$(5) \quad \begin{cases} r'_x = \cos \theta & r'_y = \sin \theta \\ \theta'_x = -\frac{\sin \theta}{r} & \theta'_y = \frac{\cos \theta}{r}. \end{cases}$$

Si on avait voulu calculer ces dérivées directement, on aurait été amené à écrire $r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$, ce qui conduisait à des ambiguïtés, vu l'incertitude sur le signe de r . On voit ici l'avantage qu'il y a à utiliser les différentielles.

Pour calculer les dérivées secondes on opère de même en différentiant les égalités (5) :

$$\begin{aligned} r''_{x^2} dx + r''_{xy} dy &= -\sin \theta d\theta \\ r''_{xy} dx + r''_{y^2} dy &= \cos \theta d\theta \\ \theta''_{x^2} dx + \theta''_{xy} dy &= -\frac{\cos \theta}{r} d\theta + \frac{\sin \theta}{r^2} dr \\ \theta''_{xy} dx + \theta''_{y^2} dy &= -\frac{\sin \theta}{r} d\theta - \frac{\cos \theta}{r^2} dr \end{aligned}$$

d'où, en tirant dr et $d\theta$ des égalités (4) :

$$r''_{x^2} dx + r''_{xy} dy = -\frac{\sin \theta}{r} (-\sin \theta dx + \cos \theta dy)$$

$$r''_{xy} dx + r''_{y^2} dy = \frac{\cos \theta}{r} (-\sin \theta dx + \cos \theta dy)$$

$$\theta''_{x^2} dx + \theta''_{xy} dy = -\frac{\cos \theta}{r^2} (-\sin \theta dx + \cos \theta dy) + \frac{\sin \theta}{r^2} (\cos \theta dx + \sin \theta dy)$$

$$\theta''_{xy} dx + \theta''_{y^2} dy = -\frac{\sin \theta}{r^2} (-\sin \theta dx + \cos \theta dy) - \frac{\cos \theta}{r^2} (\cos \theta dx + \sin \theta dy).$$

D'où, en égalant les coefficients de dx et de dy :

$$r''_{x^2} = \frac{\sin^2 \theta}{r} \quad r''_{xy} = -\frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \quad r''_{y^2} = \frac{\cos^2 \theta}{r}$$

$$\theta''_{x^2} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \quad \theta''_{xy} = \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{r^2} \quad \theta''_{y^2} = -\frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2}$$

et, en tenant compte des égalités précédentes, l'égalité (3) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \Delta f &= f''_{r^2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2f''_{r\theta} \left(-\frac{\cos \theta \sin \theta}{r} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \right) \\ &\quad + f''_{\theta^2} \left(\frac{\sin^2 \theta}{r^2} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \right) + f'_r \left(\frac{\sin^2 \theta}{r} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \right) \\ &\quad + f'_\theta \left(\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \right) = f''_{r^2} + \frac{1}{r} f'_r + \frac{1}{r^2} f''_{\theta^2}. \end{aligned}$$

On a donc l'expression cherchée :

$$\Delta f = f''_{r^2} + \frac{1}{r} f'_r + \frac{1}{r^2} f''_{\theta^2}.$$

Indiquons que ce calcul peut offrir de nombreuses variantes. Par exemple, en posant $T = r'_x = \cos \theta$, on aura :

$$r''_{x^2} = T'_r r'_x + T'_\theta \theta'_x = (-\sin \theta) \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) = \frac{\sin^2 \theta}{r}.$$

Ou bien en posant :

$$U = f'_x = f'_r \cos \theta - f'_\theta \frac{\sin \theta}{r}.$$

on aura :

$$f''_{x^2} = U'_r \cos \theta - U'_\theta \frac{\sin \theta}{r}$$

soit :

$$\begin{aligned} f''_{x^2} &= \left[f''_{r^2} \cos \theta - f''_{\theta r} \frac{\sin \theta}{r} + f'_\theta \frac{\sin \theta}{r^2} \right] \cos \theta \\ &\quad - \left[f''_{r\theta} \cos \theta - f'_r \sin \theta - f''_{\theta^2} \frac{\sin \theta}{r} - f'_\theta \frac{\cos \theta}{r} \right] \frac{\sin \theta}{r}. \end{aligned}$$

Nous laissons au lecteur le soin d'achever le calcul par ces méthodes.

EXERCICES

1° On suppose $0 < x \leq y \leq z < x + y$. Montrer que la fonction :

$$u = \text{Arc cos } \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} + \text{Arc cos } \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} + \text{Arc cos } \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx}$$

est définie. Calculer sa différentielle totale. Quelle est la valeur de u ?

R. $u = \pi.$

2° Que deviennent les expressions (où z désigne une fonction de x et y) :

$$E = z'_x - z'_y, \quad F = z''_{x^2} - z''_{y^2}.$$

par le changement de variables :

$$X = x - y, \quad Y = x + y.$$

R. $E = 2z'_X, \quad F = 4z''_{YX}.$

*3° Que devient l'expression (où u désigne une fonction de x , y et z) :

$$E = u''_{x^2} - u''_{yz}$$

par le changement de variables :

$$x = X^2, \quad y = Y + Z, \quad z = Y - Z.$$

R. $E = \frac{1}{4X^2} u''_{X^2} - \frac{1}{4X^3} u'_{X^2} + \frac{1}{4} (u'_{Z^2} - u'_{Y^2}).$

*4° Que devient l'expression $E = u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z$ (où u désigne une fonction de x , y , z) en prenant les nouvelles variables r , θ et φ définies par les égalités $x = r \cos \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$.

R. $E = u'^2_r + \frac{1}{r^2} u'^2_\varphi + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} u'^2_\theta.$

CHAPITRE XXVI

CALCULS NUMÉRIQUES

1. — *Programme de calcul.*

Quelle que soit l'étude théorique faite, l'ingénieur aboutit toujours à un calcul numérique. Nous nous placerons d'abord dans le cas le plus simple où la grandeur à calculer x s'exprime en fonction de grandeurs connues $a, b, c, \dots$, par une formule :

$$x = f(a, b, c, \dots)$$

ne contenant que des symboles opératoires soit parfaitement connus (+, −, ×, :, $\sqrt{\quad}$), soit représentant des fonctions tabulées (sin, cos, log, ...).

Le calcul pourra se faire soit à la main, soit partie à la main et partie en utilisant des tables numériques, des machines à calculer de bureau ou des machines électroniques. Quel que soit l'ensemble des moyens de calculs utilisés, le premier travail consistera essentiellement à établir un programme détaillé de calcul. Dans ce programme on devra indiquer toutes les opérations dans l'ordre où elles doivent être effectuées ainsi que tous les emplacements où seront inscrits et ensuite puisés tous les nombres nécessaires au calcul (valeurs numériques des données ainsi que des résultats intermédiaires), la dernière ligne de ce programme doit donner la valeur de x .

Insistons sur ce point. Ce programme (appelé aussi quelquefois feuille de calcul ou diagramme de calcul) doit être établi avant tout début de calcul numérique effectif, car la rédaction de ce programme influe sur la rapidité du calcul et sur la précision du résultat obtenu. Il va de soi que ce programme dépendra dans une large mesure de la nature des moyens de calcul mis à la disposition du calculateur.

2. — *Incertitude absolue et relative sur la mesure d'une grandeur.*

Une grandeur dite connue n'est jamais parfaitement connue. Si a désigne la mesure de cette grandeur, que a soit le résultat d'une mesure ou d'un calcul, il est entaché d'une certaine erreur. On peut avoir quelquefois certains renseigne-

ments sur cette erreur (son sens, sa répartition en probabilité, . . .), mais nous nous placerons uniquement dans le cas où l'on connaît une borne supérieure ε_a de la valeur absolue de cette erreur, c'est-à-dire où l'on sait que la mesure réelle de la grandeur est comprise entre $a - \varepsilon_a$ et $a + \varepsilon_a$.

Le nombre positif ε_a s'appelle l'*incertitude absolue* sur le nombre a . En général ε_a est un nombre petit, mais ceci n'a de sens que par comparaison avec le nombre a . Un changement d'unité en effet a pour résultat de multiplier ε_a et a par le même facteur. Autrement dit, la précision avec laquelle la grandeur est mesurée n'est pas indiquée par ε_a , mais par le rapport :

$$\frac{\varepsilon_a}{|a|}$$

que l'on appelle l'*incertitude relative*. Dans les cas usuels cette incertitude relative est de l'ordre de 10^{-3} , mais dans certains cas de mesures très fines, l'incertitude relative peut être beaucoup plus petite et atteindre des valeurs de l'ordre de 10^{-9} ou 10^{-10} . Il est bien évident que des calculs effectués à partir de mesures aussi précises devront être menés avec un grand nombre de chiffres significatifs.

Si nous revenons à la formule :

$$x = f(a, b, c)$$

nous pourrions calculer une borne supérieure de l'erreur commise sur x . En effet, nous savons que si a, b, c varient de quantités petites da, db, dc , la variation de x sera sensiblement égale à :

$$dx = f'_a da + f'_b db + f'_c dc$$

donc :

$$|dx| \leq |f'_a da| + |f'_b db| + |f'_c dc|.$$

Or, nous savons que :

$$|da| < \varepsilon_a \quad |db| < \varepsilon_b \quad |dc| < \varepsilon_c.$$

L'erreur sur x sera donc certainement au plus égale à :

$$|f'_a| \varepsilon_a + |f'_b| \varepsilon_b + |f'_c| \varepsilon_c.$$

Pour ne pas allonger inutilement les calculs on se contente en général de valeurs A, B, C grossièrement approchées par excès de f'_a, f'_b, f'_c et de calculer l'incertitude absolue sur x par la formule :

$$(1) \quad \varepsilon_x = A \varepsilon_a + B \varepsilon_b + C \varepsilon_c.$$

Signalons d'abord des applications courantes de ce résultat :

si $x = a + b$ ou $x = a - b$:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a + \varepsilon_b$$

si $x = ab$ ou $x = \frac{a}{b}$:

$$\frac{\varepsilon_x}{|x|} = \frac{\varepsilon_a}{|a|} + \frac{\varepsilon_b}{|b|}$$

formules qui traduisent deux énoncés élémentaires :

L'incertitude absolue d'une somme ou d'une différence est la somme des incertitudes absolues des divers termes. L'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient est la somme des incertitudes relatives des divers facteurs.

D'autre part la formule (1) exprime que si diverses causes d'erreurs peuvent entacher la mesure d'une grandeur, l'incertitude totale est la somme des incertitudes dues aux diverses causes d'erreur (l'erreur sur a provoque l'incertitude $A\varepsilon_a$, etc.). Il est bien évident qu'il s'agit de l'évaluation la plus défavorable de l'incertitude puisqu'il faudrait pour réaliser un tel cas que toutes les causes d'erreur aient leurs intensités maximum et agissent dans le même sens sur la mesure x . C'est cependant cette évaluation que nous adopterons afin d'obtenir une certitude sur la grandeur de l'incertitude absolue.

3. — Incertitude due au processus de calcul.

La formule (1) donne l'incertitude absolue sur x en supposant que les diverses opérations contenues dans f soient faites exactement. Or, en dehors de l'addition et de la multiplication, tous les symboles opératoires conduisent en général à des nombres dont la valeur exacte exigerait une infinité de chiffres décimaux. Pour des raisons de nécessité pratique ces nombres sont *arrondis*, on supprime tous les chiffres à partir d'un certain rang et, si le premier chiffre supprimé est 5, 6, 7, 8 ou 9, on augmente le dernier chiffre gardé d'une unité. Si donc n est le nombre de chiffres décimaux gardés, l'arrondi crée une erreur dont le maximum en valeur absolue est $\frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$. Par exemple :

$$\frac{2}{3} = 0,666\ 66 \dots \text{ est arrondi à } 0,667$$

$$\frac{1}{3} = 0,333\ 33 \dots \text{ est arrondi à } 0,333.$$

Si la formule donnant x comporte assez peu de calculs, on pourra garder assez de chiffres décimaux dans les résultats intermédiaires pour que les erreurs d'arrondis n'apportent qu'une part très faible à l'erreur commise sur x . Dans ce cas la formule (1) donnera l'incertitude sur x .

Si les calculs sont compliqués et longs, les erreurs d'arrondis s'accumuleront successivement (puisque nous devons toujours nous placer dans le cas le plus défavorable) et finiront par avoir une place relativement importante dans l'erreur commise sur x . La formule (1) sera alors insuffisante et ne pourra servir qu'à prévoir l'ordre de grandeur de l'incertitude sur x . Dans le programme de calcul il faudra prévoir le calcul d'erreur : à chaque opération on déterminera l'incertitude sur le résultat comme somme des incertitudes dues aux opérandes et de l'incertitude ajoutée par l'arrondissement du résultat. Nous allons préciser cela sur un exemple de calcul à la main.

EXEMPLE 1. — Soit :

$$x = at^3 + bt^2 + ct + d$$

où :

$$a = 127 \quad \varepsilon_a = \frac{1}{2}$$

$$b = -295 \quad \varepsilon_b = \frac{1}{2}$$

$$c = 318 \quad \varepsilon_c = \frac{1}{2}$$

$$d = -208 \quad \varepsilon_d = \frac{1}{2}$$

$$t = 1,83 \quad \varepsilon_t = \frac{1}{200}$$

Calculons d'abord l'incertitude sur x par la formule fondamentale :

$$\varepsilon_x = t^3 \varepsilon_a + t^2 \varepsilon_b + t \varepsilon_c + \varepsilon_d + |3at^2 + 2bt + c| \varepsilon_t \neq 9 \quad (1)$$

(calcul fait à la règle).

Disposons maintenant notre calcul en écrivant :

$$x = [(at + b)t + c]t + d$$

ce qui ne demandera que trois multiplications dont les résultats seront arrondis à trois chiffres comme les données. On posera successivement :

$$p = at, \quad q = p + b, \quad r = qt, \quad s = r + c, \quad u = st, \quad x = u + d$$

(1) Le signe $\neq$ se lit « à peu près égal ».

et les calculs d'erreur seront faits à la règle :

$a =$	127	$\varepsilon_a = 0,5$
$t =$	1,83	$\varepsilon_t = 0,005$
	3 81	
	101 6	
	127	
$p =$	232,41	$\varepsilon_p = a \varepsilon_t + t \varepsilon_a = 1,55$
$p =$	232	$\varepsilon_p = 1,55 + 0,41 \neq 2$
$b = -$	295	
$q = -$	63	$\varepsilon_q = \varepsilon_p + \varepsilon_b = 2,5$
$t =$	1,83	$\varepsilon_t = 0,005$
	1 89	
	50 4	
	63	
$r = -$	115,29	$\varepsilon_r = t \varepsilon_q + q \varepsilon_t = 4,89$
$r = -$	115	$\varepsilon_r = 4,89 + 0,29 \neq 5$
$c =$	318	$\varepsilon_c = 0,5$
$s =$	203	$\varepsilon_s = \varepsilon_c + \varepsilon_r = 5,5$
$t =$	1,83	$\varepsilon_t = 0,005$
	6 09	
	162 4	
	203	
$u =$	371,49	$\varepsilon_u = s \varepsilon_t + t \varepsilon_s = 11$
$u =$	371	$\varepsilon_u = 11,5$
$d = -$	208	$\varepsilon_d = 0,5$
$x =$	163	$\varepsilon_x = 12.$

On voit qu'ici les arrondis ont apporté trois unités de plus à l'incertitude sur x . L'ordre de grandeur (12 au lieu de 9) de l'incertitude n'est pas modifié, mais on conçoit que, sur des calculs très longs, les erreurs d'arrondis finissent par devenir très importantes.

4. — Usage des tables.

Les calculs sont grandement facilités par l'existence de tables numériques donnant les valeurs de certaines fonctions d'usage courant : carré, cube, logarithme, exponentielle, sinus, etc. Le maniement de ces tables est simple. La seule question que nous ayons à élucider est celle de la précision obtenue. Nous prendrons l'exemple de la table de logarithmes à 5 décimales comme étant une des tables les plus répandues, mais les raisonnements indiqués et la nature des résultats sont valables pour toutes les tables.

Soit x un nombre que nous pouvons toujours supposer compris entre 1 000 et 10 000. Nous aurons à examiner trois cas : x est dans la table (donc entier), x est compris entre deux nombres de la table, x est entaché d'une incertitude ε_x .

1° Si x est dans la table, celle-ci ne nous donnera pas la valeur exacte de $\log x$, mais une valeur approchée (que nous désignerons par $\overline{\log x}$) avec une incertitude égale à $5 \cdot 10^{-6}$.

Exemple : $\overline{\log 6\,343} = 3,802\,29$.

2° Si x n'est pas dans la table, il sera compris entre deux nombres entiers successifs n et $n + 1$. On écrira :

$$x = n + \theta \quad 0 < \theta < 1.$$

Pour calculer une valeur approchée de $\log x$, considérons le graphe de cette fonction, la valeur exacte cherchée est $\log x = mM$. Traçons la corde AB joignant les points d'abscisses n et $n + 1$ du graphe considéré, une valeur approchée de $\log x$ sera :

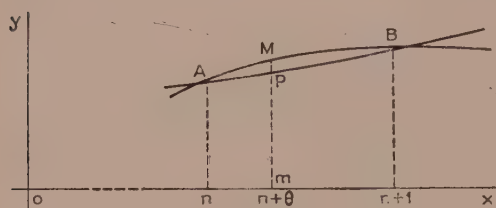


FIG. 1.

$$\overline{\log x} = mP$$

en faisant une erreur égale à PM . Or, on peut établir (voir exercice n° 1) que dans toute l'étendue de la table PM est inférieur à $6 \cdot 10^{-8}$, donc prati-

quement négligeable puisque les logarithmes de la table sont donnés avec une incertitude presque 100 fois plus grande.

Le procédé qui consiste à remplacer l'arc de courbe par sa corde s'appelle *interpolation linéaire*. Pratiquement les tables numériques de toute sorte sont établies de telle façon que l'interpolation linéaire, comme dans la table de logarithmes, n'ajoute qu'une erreur négligeable devant l'incertitude des nombres de la table.

L'ordonnée du point P est facile à calculer. On aura :

$$mP = \log n + \theta [\log (n + 1) - \log n].$$

La quantité $\log (n + 1) - \log n$ est la *différence tabulaire* Δ_n et on calculera donc :

$$mP = \log n + \theta \Delta_n.$$

Finalement, en utilisant les valeurs de la table, nous écrirons :

$$\overline{\log x} = \overline{\log n} + \theta \overline{\Delta_n}.$$

En écrivant cette expression sous la forme :

$$\overline{\log x} = (1 - \theta) \overline{\log n} + \theta \overline{\log (n + 1)}$$

on voit que l'incertitude sur $\log x$ est :

$$(1 - \theta) 5.10^{-6} + \theta 5.10^{-6} = 5.10^{-6}.$$

On voit donc que, par interpolation, on calculera $\log x$ avec la même incertitude que si x était un entier. Mais ce résultat suppose que l'on n'arrondisse pas $\log x$, sinon il faudra ajouter à l'incertitude une erreur d'arrondi de valeur maximum 5.10^{-6} . Nous serons donc conduits à écrire $\overline{\log x}$ avec plus de 5 décimales (incertitude 5.10^{-6}) ou avec 5 décimales (incertitude 10^{-5}).

EXEMPLE 2. — $\overline{\log 6\,343} = 3,802\,29 \quad \Delta = 0,000\,07$

$$\overline{\log 6\,343,8} = 3,802\,29 + \frac{8}{10} \cdot 0,000\,07$$

$$\overline{\log 6\,343,8} = 3,802\,346, \text{ incertitude } 5.10^{-6}$$

ou

$$\overline{\log 6\,343,8} = 3,802\,35 \text{ incertitude } 10^{-5}.$$

3° x est entaché d'une incertitude ε . Cette incertitude contribue à augmenter l'incertitude sur $\log x$ de la quantité :

$$\varepsilon \frac{d(\log x)}{dx}$$

Or $\frac{d(\log x)}{dx}$, qui est la pente de la tangente au graphe au point M d'abscisse x , peut pratiquement être confondu avec la pente de la corde AB (voir fig. 1) donc avec $\frac{\log(n+1) - \log n}{1}$, c'est-à-dire avec Δ_n . L'incertitude sur $\log x$ sera donc :

$$5.10^{-6} + \varepsilon \Delta_n.$$

EXEMPLE 3. — Sachant que l'incertitude sur $6\,343,8$ est 0,3 quelle est l'incertitude sur $\overline{\log 6\,343,8}$? Nous aurons $\overline{\log 6\,343,8} = 3,802\,346$, incertitude :

$$5.10^{-6} + \frac{3}{10} 0,000\,07 = 26.10^{-6}.$$

Dans ce cas il est manifestement inutile de garder la sixième décimale du logarithme, on écrira :

$$\overline{\log 6\,343,8} = 3,802\,35 \text{ avec une incertitude } (4 + 26).10^{-6} = 3.10^{-5}.$$

5. — Inversion de la table.

Connaissant le nombre $y = \log z$, il s'agit de déterminer le nombre $z = 10^y$ (appelé parfois l'*antilogarithme* de y). La table de logarithmes peut servir à cette détermination. Les raisonnements précédents vont subsister, la seule

différence provient de ce que les valeurs de y ne sont plus équidistantes. Pour simplifier l'énoncé nous supposerons $3 < y < 4$, donc :

$$1\,000 < 10^y < 10\,000.$$

1° y est dans la table. On lira donc un nombre entier n qui sera une valeur approchée de 10^y :

$$n = \overline{10^y}.$$

Pour calculer l'incertitude sur 10^y , nous utiliserons le fait que :

$$y - 5 \cdot 10^{-6} < \log n < y + 5 \cdot 10^{-6}$$

donc :

$$n \cdot 10^{-5 \cdot 10^{-6}} < 10^y < n \cdot 10^{5 \cdot 10^{-6}}.$$

Or :

$$10^{5 \cdot 10^{-6}} = e^{5 \cdot 10^{-6} \text{ Log } 10} \approx 1 + 12 \cdot 10^{-6}.$$

L'incertitude sur 10^y sera donc $n \cdot 12 \cdot 10^{-6}$. On pourra donc soit utiliser l'incertitude relative sur 10^y (égale à $12 \cdot 10^{-6}$), soit l'incertitude absolue (au plus égale, pour $n = 10^4$, à 0,12).

On pourra dire encore que l'incertitude sur 10^y est d'environ une unité du cinquième chiffre de 10^y à partir de la gauche.

EXEMPLE 4. — $y = 3,802\,29$.

$$\overline{10^y} = 6\,343 \quad \text{incertitude } 0,1.$$

2° y est compris entre deux nombres a et b de la table. On calculera 10^y par interpolation linéaire :

Soit :

$$n = \overline{10^a}, \quad n + 1 = \overline{10^b} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{y - a}{b - a}$$

nous écrivons :

$$\overline{10^y} = n + \theta$$

l'incertitude restant la même que dans le premier cas si θ est calculé avec assez de décimales. La quantité $b - a = \overline{\Delta_n}$ est la différence tabulaire.

EXEMPLE 5. — $y = 3,802\,35$.

$$a = 3,802\,29 \quad b - a = 0,000\,07 \quad n = 6\,343$$

$$\theta = \frac{6}{7} = 0,857$$

$$\overline{10^y} = 6\,343,857 \quad \text{incertitude } 0,1$$

pratiquement on écrira :

soit $\overline{10^y} = 6\,343,86$ incertitude 0,1

soit $\overline{10^y} = 6\,343,9$ incertitude 0,15.

3^o y est entaché d'une incertitude ε . On voit immédiatement que cela entraîne sur θ et par suite sur 10^y une incertitude supplémentaire $\frac{\varepsilon}{b-a}$.

EXEMPLE 6. — $y = 3,802\,35$ et $\varepsilon = 8.10^{-5}$.

On écrira :

$$\overline{10^y} = 6\,343,86, \text{ incertitude } 0,1 + \frac{8}{7} = 0,1 + 1,14 = 1,24.$$

A ce moment on écrira donc :

$$\overline{10^y} = 6\,344, \text{ incertitude } 1,24 + 0,14 \neq 1,4.$$

6. — *Calculs analogiques.*

On appelle ainsi des méthodes de calcul fondées essentiellement sur des mesures de grandeurs physiques (longueur, masse, intensité de courant, ...). La différence essentielle avec les méthodes précédentes est que ce sont des méthodes continues et non des méthodes discontinues (l'emploi d'un nombre limité de chiffres est la cause de cette discontinuité).

La plus courante des méthodes analogiques est l'emploi de la règle à calcul, qui est l'instrument indispensable pour des calculs usuels.

Les *méthodes graphiques* sont aussi des méthodes analogiques; en général le calcul revient à mesurer une grandeur déterminée par une construction géométrique. On emploie en particulier fréquemment des *abaques* dits à points alignés dans lesquelles la construction géométrique est le tracé d'une droite joignant deux points de deux courbes graduées (voir exercice n° 2).

Enfin, on construit des machines analogiques importantes utilisant surtout des phénomènes électriques : le calcul d'une fonction se fait en réalisant une expérience dans laquelle une grandeur se trouve obéir à la loi exprimée par cette fonction. Le résultat s'obtient en lisant sur un cadran la mesure de la grandeur. Nous citerons comme exemples de ces machines les simulateurs de vol d'avion.

Les machines analogiques donnent rarement une grande précision, en général l'incertitude relative est de $\frac{1}{100}$. Dans les domaines où les mêmes calculs se répètent fréquemment avec des données variables et où la précision demandée n'est pas trop grande, les méthodes analogiques sont recommandées par leur simplicité d'emploi et leur rapidité.

EXERCICES

****1°** On considère une fonction f telle que $f(0) = f(1) = 0$ et que $f''(x)$ existe pour $x \in (0, 1)$. Soit $\theta \in]0, 1[$, on pose :

$$f(\theta) = \frac{A}{2} \theta(\theta - 1)$$

et :

$$g(x) = f(x) - \frac{A}{2} x(x - 1).$$

Montrer que $g'(x)$ s'annule deux fois dans l'intervalle $]0, 1[$ et en déduire :

$$A = f''(\lambda) \quad 0 < \lambda < 1.$$

Appliquer ce résultat à :

$$f(x) = \log(n + x) - \log n - x[\log(n + 1) - \log n]$$

et en déduire $f(\theta) < \frac{\log e}{8n^2}$. Retrouver ainsi le résultat annoncé au n° 4 du chapitre XXVI.

2° Par deux points O et O' et par leur milieu I , on mène trois droites parallèles OX , $O'Y$ et IZ sur lesquelles on porte des échelles logarithmiques d'origine O , O' , I . Soit M et M' les points d'abscisses x et y sur OX et $O'Y$ (donc $\overline{OM} = \log x$, $\overline{O'M'} = \log y$).

La droite MM' coupe IZ en P . Calculer $\overline{IP}$ et vérifier que l'on obtient ainsi un abaque à points alignés pour calculer $\sqrt{xy}$.

3° x , y et z étant compris entre 1 et 10 et connus avec une incertitude absolue égale à $\frac{1}{100}$, montrer que l'incertitude absolue sur $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est $\frac{\sqrt{3}}{100}$.

***4°** Calculer avec précision $y = \frac{x}{\text{th } x} + \frac{x^2}{\text{sh}^2 x}$ pour $x = \pi = 3,141\,6$.

$$R. \quad y = 3,227 \text{ à } \frac{2}{10^3} \text{ près.}$$

***5°** Résoudre le système :

$$\begin{aligned} 4^x \cdot 5^y &= 5^{2x+1} \\ 12^x \cdot 8^y &= 5^{2y-1}. \end{aligned}$$

$$R. \quad x = -0,396 \quad y = 0,549 \quad \text{à } \frac{1}{2 \cdot 10^3} \text{ près.}$$

6° Tableau des valeurs de $\frac{1}{x^x}$ lorsque x varie de 1 à 2 par $\frac{1}{10}$.

***7°** Valeur numérique de θ dans la formule :

$$f(x) = f(0) + xf'(\theta x)$$

lorsque $f(x) = (4 + 3x)^{\frac{1}{5}}$, $x = 1$.

R. $\theta = 0,458$ à $\frac{1}{10^3}$ près.

8° Calculer successivement et à la main :

$$(1,01)^2, (1,01)^3, \dots, (1,01)^{50}$$

en arrondissant chaque fois le résultat au 2^e chiffre décimal. Comparer le résultat avec le calcul de $(1,01)^{50}$ à l'aide d'une table de logarithmes.

R. 1,50 et 1,64.

CHAPITRE XXVII

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS

1. — *Méthodes graphiques.*

Un des buts essentiels des mathématiques et un des calculs numériques rencontrés le plus fréquemment est la résolution d'une équation :

$$f(x) = 0$$

c'est-à-dire la recherche des valeurs de x qui annulent la fonction f . Or, en dehors de cas particuliers simples (comme les équations algébriques du premier et du second degré), on ne peut donner de formule de résolution de l'équation. On est donc conduit à indiquer des méthodes permettant de calculer approximativement ces racines. Comme nous le verrons on peut, en théorie, déterminer la valeur numérique des racines avec une approximation aussi grande que l'on voudra.

Commençons par indiquer quelques méthodes graphiques qui, bien employées, permettent de déterminer les racines avec une précision très souvent suffisante en pratique. En tous les cas, les valeurs ainsi obtenues peuvent servir de point de départ à des calculs plus précis.

On pourra commencer par tracer la courbe définie par $y = f(x)$ à grande échelle au voisinage des valeurs de x intéressantes. Il sera souvent plus avantageux d'écrire l'équation sous la forme :

$$g(x) = h(x)$$

et de déterminer les points d'intersection des courbes définies par :

$$y = g(x) \quad \text{et} \quad y = h(x).$$

On pourra souvent obtenir ainsi des courbes bien connues (droites, cercles, coniques, courbes définies par $y = x^m$, sinusoïde, ...) qu'on pourra tracer avec précision et à grande échelle sur du papier millimétré transparent. En superposant deux feuilles de papier, il sera aisé de déterminer les abscisses des points d'intersection de ces courbes.

Les équations de la forme :

$$x^m + px + q = 0$$

se résoudront ainsi en prenant les points d'intersection de la courbe définie par :

$$y = x^m$$

et de la droite d'équation :

$$y = -px - q.$$

Les équations de la forme :

$$x^m + px^2 + qx + r = 0$$

se résoudront par intersection de la courbe définie par $y = x^m$ et de la parabole d'équation :

$$y = -px^2 - qx - r.$$

L'équation :

$$x - k \sin x = 0$$

se résoudra par intersection de la sinusoïde représentée par :

$$y = \sin x$$

et de la droite d'équation $y = \frac{x}{k}$.

On peut aussi indiquer des méthodes de construction des racines. C'est ainsi qu'en mathématiques élémentaires on apprend à construire les racines d'une équation du second degré au moyen de la règle et du compas.

2. — Méthodes d'approximation.

Si l'on veut obtenir plus de précision sur la valeur des racines de l'équation $f(x) = 0$, il est nécessaire d'employer des méthodes d'approximation susceptibles par leur nature même de conduire à des valeurs de plus en plus approchées de ces racines.

Nous supposons que l'on a *séparé* les racines de l'équation, c'est-à-dire déterminé des intervalles (a, b) dans lesquels la fonction $f(x)$ est continue et s'annule une fois tandis que $f'(x)$ garde un signe constant.

Si l'intervalle (a, b) est grand, on commencera par le réduire en déterminant le signe de $f(x)$ pour des valeurs intermédiaires entre a et b . Si on excepte le cas singulier où $f''(x)$ s'annulerait en même temps que $f(x)$, nous pourrions supposer avoir obtenu un intervalle assez petit dans lequel $f''(x)$ gardera un signe constant, donc dans lequel $f'(x)$ sera monotone et aussi tel que $f(a)$ et $f(b)$ aient des valeurs finies.

Nous aurons donc quatre cas possibles $(a < b)$:

$f(a) > 0 > f(b)$	$f'(x) < 0$	$f''(x) > 0$
$f(a) > 0 > f(b)$	$f'(x) < 0$	$f''(x) < 0$
$f(a) < 0 < f(b)$	$f'(x) > 0$	$f''(x) > 0$
$f(a) < 0 < f(b)$	$f'(x) > 0$	$f''(x) < 0$

Pour simplifier ce qui suit nous nous supposons placés dans un cas précis en prenant comme exemple l'équation $x - \operatorname{tg} x = 0$ qui a une racine α comprise entre 3,3 (légèrement supérieur à π) et 4,6 (légèrement inférieur à $\frac{3\pi}{2}$).

On a ici :

$$\begin{array}{lll} f(x) = x - \operatorname{tg} x & f'(x) = -\operatorname{tg}^2 x & f''(x) = -2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \\ f(3,3) = 3,140\ 3 & f(4,6) = -4,260\ 2 \end{array}$$

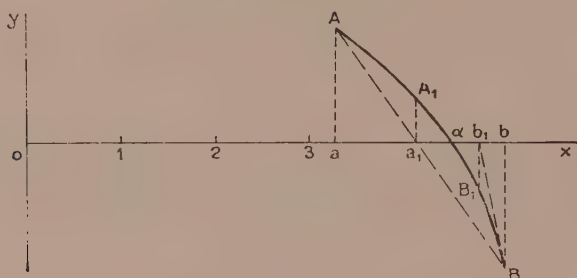


FIG. 1.

3. — Méthode d'interpolation de Lagrange.

Elle consiste à remplacer l'arc AB du graphe de $f(x)$ par la droite AB . Cette droite a pour équation :

$$y - f(b) = (x - b) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

et coupe l'axe Ox au point d'abscisse a_1 donnée par la formule

$$a_1 = b - f(b) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}.$$

Il est facile de vérifier, et cela est évident sur la figure, que $f(a_1)$ est positif et que α est compris entre a_1 et b . Nous allons donc pouvoir remplacer a par a_1 . En joignant A_1B on déterminera :

$$a_2 = b - f(b) \frac{b - a_1}{f(b) - f(a_1)}$$

et, en itérant le procédé, on construira une suite de valeurs :

$$a, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

telles que :

$$a_{n+1} = b - f(b) \frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)}.$$

Cette suite est croissante et il est presque évident sur la figure que nous obtenons ainsi des valeurs de plus en plus approchées de la valeur α cherchée (nous le démontrerons rigoureusement un peu plus loin).

Dans le cas de l'équation considérée, à chaque étape on aura à faire les calculs suivants :

$$\begin{aligned} a_n & \text{ (radians)} \\ a_n & \text{ (grades)} \\ \text{tg } (a_n - 200) \\ a_n - \text{tg } (a_n - 200) &= f(a_n) \\ a_{n+1} &= b - f(b) \frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)}. \end{aligned}$$

En faisant les calculs avec trois décimales on trouve :

$$\begin{array}{llll} a = 3,3 & a_1 = 3,901 & a_2 = 4,233 & a_3 = 4,394 \\ a_4 = 4,469 & a_5 = 4,492 & a_6 = 4,494 & a_7 = 4,493 \end{array}$$

Il se trouve que les arrondissements faits pour calculer a_6 nous ont fait dépasser le but, on constate que $f(a_6)$ est négatif. Pour calculer le nombre a_7 , nous avons en fait *extrapoler*. En constatant que $f(a_7)$ est positif, on peut en conclure

$$4,493 < \alpha < 4,494.$$

4. — Méthode de Newton.

Cette méthode consiste à remplacer l'arc AB par la tangente en l'une de ses extrémités A ou B . Le simple examen de la figure montre que dans le cas considéré il y a avantage à mener la tangente en B qui est plus inclinée. Cette droite a pour équation :

$$y - f(b) = f'(b)(x - b)$$

et coupe l'axe Ox en un point dont l'abscisse est :

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

En itérant le procédé on détermine une suite :

$$b, b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots$$

telles que :

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}.$$

On constate aisément sur la figure que la suite est décroissante et que nous obtenons ainsi des valeurs de plus en plus approchées de la valeur α cherchée (nous le démontrerons également un peu plus loin).

Dans le cas de l'équation considérée, à chaque étape on aura à faire les calculs suivants :

$$\begin{aligned} b_n & \text{ (radians)} \\ b_n & \text{ (grades)} \\ \operatorname{tg} (b_n - 200) \\ b_n - \operatorname{tg} (b_n - 200) &= f(b_n) \\ - \operatorname{tg}^2 (b_n - 200) &= f'(b_n) \\ b_{n+1} &= b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}. \end{aligned}$$

En faisant le calcul avec trois décimales, on trouve :

$$b = 4,6, \quad b_1 = 4,546, \quad b_2 = 4,506, \quad b_3 = 4,494, \quad b_4 = 4,493 \quad \text{et} \quad b_5 = b_4$$

à l'approximation des calculs près.

On voit que dans ce cas la méthode d'interpolation et la méthode de Newton donnent l'une des valeurs par défaut, l'autre des valeurs par excès de la racine. En employant conjointement les deux méthodes, on pourra donc encadrer la racine cherchée.

5. — Méthode générale d'itération.

La méthode d'itération généralise les méthodes précédentes. Elle consiste à écrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme :

$$x = \varphi(x)$$

et, partant d'une valeur a_1 , de calculer successivement :

$$\begin{aligned} a_2 &= \varphi(a_1) \\ a_3 &= \varphi(a_2) \\ &\vdots \\ a_n &= \varphi(a_{n-1}). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que, sous certaines hypothèses, les quantités $a_1, \dots, a_n, \dots$ donnent des valeurs de plus en plus approchées de la racine cherchée α lorsque n croît (nous dirons alors que le processus d'itération est *convergent*).

Les hypothèses faites sont les suivantes :

Dans l'intervalle (a, b) l'équation :

$$x = \varphi(x)$$

a une racine α ou :

$$\alpha = \varphi(\alpha)$$

et le maximum k du module de $|\varphi'(x)|$ est inférieur à 1, ou :

$$|\varphi'(x)| \leq k < 1.$$

Nous prendrons comme valeur de départ a_1 celui des deux nombres a et b qui est le plus rapproché de α (on s'en aperçoit *grosso modo* en calculant $\varphi(a) - a$ et $\varphi(b) - b$).

Dans ces conditions on peut écrire :

$$\alpha - a_2 = \varphi(\alpha) - \varphi(a_1) = (\alpha - a_1)\varphi'(c)$$

en appliquant la formule des accroissements finis, c étant compris entre α et a_1 , donc entre a et b . Il en résulte :

$$|\alpha - a_2| \leq k |\alpha - a_1|$$

donc a_2 est plus rapprochée de la racine α que a_1 et se trouve certainement dans l'intervalle (a, b) .

Mais le calcul est valable pour les valeurs $a_3, \dots, a_n, \dots$. On pourra donc écrire :

$$|\alpha - a_3| \leq k |\alpha - a_2|$$

ce qui prouve que a_3 est plus rapproché de α que a_2 et se trouve certainement dans l'intervalle (a, b) et ainsi de suite :

$$|\alpha - a_{n+1}| \leq k |\alpha - a_n|.$$

Il en résulte bien que a_{n+1} est plus approché que a_n de la racine α . Plus précisément, en multipliant toutes les inégalités obtenues, on obtient

$$|\alpha - a_{n+1}| \leq k^n |\alpha - a_1|.$$

Si on se donne ε positif et si on pose $N = \frac{\text{Log } \varepsilon - \text{Log } |\alpha - a_1|}{\text{Log } k}$, nous pourrions donc affirmer que pour $n > N$, le nombre a_{n+1} est une valeur approchée de α avec une erreur inférieure à ε .

L'interprétation graphique illustre bien ce calcul lorsqu'on suppose l'intervalle considéré suffisamment petit pour que la fonction φ soit monotone dans cet intervalle. Nous distinguerons deux cas suivant le signe de $\varphi'(x)$. Supposons d'abord $\varphi'(x) > 0$ (fig. 2), traçons les graphes de $y = x$ et $y = \varphi(x)$. Nous voulons déterminer l'abscisse du point M , intersection de ces deux graphes.

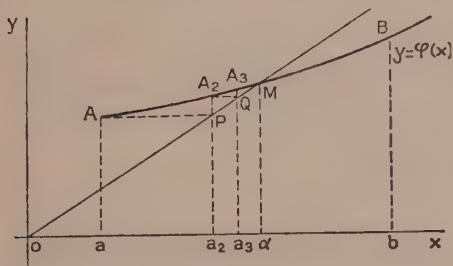


FIG. 2.

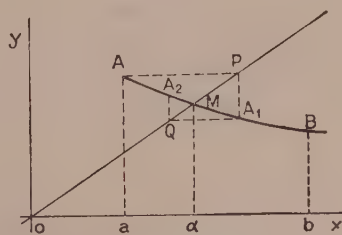


FIG. 3

Partant de la valeur $a = a_1$, pour avoir le point d'abscisse $a_2 = \varphi(a_1)$, il nous suffit de mener par A la parallèle à Ox jusqu'à son intersection P avec la droite d'équation $y = x$, l'abscisse de P sera a_2 et permet de déterminer le point A_2 de la courbe d'équation $y = \varphi(x)$. En menant par A_2 la parallèle à Ox on déterminera sur la droite d'équation $y = x$, le point Q d'abscisse $a_3 = \varphi(a_2)$, d'où le point $A_3, \dots$. On voit que l'on construit ainsi une sorte d'escalier qui monte du point A vers le point M (en partant du point B on aurait eu un escalier descendant du point B vers le point M).

Si maintenant nous supposons $\varphi'(x) < 0$ (fig. 3) les mêmes constructions effectuées sur le graphe de $\varphi(x)$ et sur la droite d'équation $y = x$, nous conduisent successivement aux points $A, P, A_1, Q, A_2, \dots$ c'est-à-dire que cette fois on construit une spirale qui entoure le point M en s'en rapprochant indéfiniment.

On voit que si $0 \leq \varphi'(x) \leq k < 1$ dans l'intervalle (a, b) , la suite $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ est monotone, soit non décroissante, soit non croissante. Si, par contre :

$$-1 < -k \leq \varphi'(x) \leq 0,$$

la suite donnera alternativement des valeurs approchées par excès et par défaut de la solution cherchée. Dans les deux cas on adopte comme règle pratique ⁽¹⁾ d'arrêter les calculs quand la différence $a_{n+1} - a_n$ est du même ordre de grandeur que l'incertitude sur le calcul de $\varphi(x)$. Il est évident qu'il est impossible d'obtenir a_n et par suite α avec une précision supérieure à celle du calcul de $\varphi(\alpha)$.

On notera cependant l'avantage qu'il y a à avoir $-1 < \varphi'(x) < 0$, car alors la racine cherchée α est toujours comprise entre a_n et a_{n+1} .

Remarquons une propriété de l'itération. Une faute de calcul qui n'est pas assez importante pour faire sortir de l'intervalle (a, b) modifiera peut-être les termes de la suite $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ mais ne modifie pas la convergence de cette suite vers le nombre α . Une faute de calcul n'aura donc pas en général de conséquences graves (il n'en est pas de même lorsqu'on utilise une formule de résolution, si elle existe, théoriquement parfaite).

Reste à voir comment on peut écrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme :

$$x = \varphi(x)$$

avec $|\varphi'(x)|$ suffisamment petit. Nous avons comme premier moyen la méthode d'interpolation qui consiste à écrire l'équation sous la forme :

$$x = b - f(b) \frac{b - x}{f(b) - f(x)}.$$

⁽¹⁾ En effet, théoriquement l'approximation est d'autant meilleure que n est grand; donc l'incertitude due au calcul devient plus grande que $|\alpha - a_n|$ à partir d'une certaine valeur de n .

Dans ce cas :

$$\varphi'(x) = \frac{f(b)}{[f(b) - f(x)]^2} [f(b) - f(x) + (x - b)f'(x)].$$

Or, on peut écrire, en notant u et v des valeurs convenables entre b et x :

$$f(b) = f(x) + (b - x)f'(x) + \frac{(b - x)^2}{2}f''(u)$$

$$f(b) = f(x) + (b - x)f'(v)$$

donc :

$$\varphi'(x) = \frac{f(b)f''(u)}{2f'^2(v)}.$$

Si donc b est pris dans un voisinage de α suffisamment petit pour que $f(b)$ soit lui-même petit et pour que f' ne s'y annule pas, $\varphi'(x)$ aura une valeur absolue inférieure à 1 : le processus d'itération sera convergent.

Un deuxième moyen est la méthode de Newton qui consiste à écrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme :

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Nous aurons ici :

$$\varphi' = \frac{ff''}{f'^2}.$$

La conclusion est donc la même qu'à l'alinéa précédent. Si on est dans un voisinage suffisamment petit de α , le processus est convergent.

D'une façon générale, en écrivant l'équation sous la forme :

$$x = x + f(x)g(x)$$

et si $g(x)$ ne s'annule pas, on aura une équation équivalente à :

$$f(x) = 0.$$

Il restera à choisir $g(x)$ de façon que la dérivée :

$$1 + fg' + f'g$$

soit petite en valeur absolue dans l'intervalle où l'on cherche une racine.

Notons encore que si l'équation mise sous forme $x = \varphi(x)$ est telle que :

$$|\varphi'(x)| > 1,$$

il suffira d'écrire cette équation sous la forme :

$$x = \Phi(x)$$

$\Phi(x)$ étant la fonction inverse de $\varphi(x)$, pour être assuré de :

$$|\Phi'(x)| = \left| \frac{1}{\varphi'(x)} \right| < 1$$

et donc d'un processus convergent.

Reprenons par exemple l'équation $\operatorname{tg} x - x = 0$ avec $3,3 < x < 4,6$ sous la forme $x = \operatorname{tg} x$.

Le procédé d'itération sera divergent ($1 + \operatorname{tg}^2 x > 1$), mais sous la forme :

$$x = \pi + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$$

le procédé sera convergent (la dérivée est $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{10}$).

En partant de la valeur 3,3 on trouve successivement :

$$a = 3,3 \quad x_1 = 4,412 \quad x_2 = 4,490 \quad x_3 = 4,493 \quad x_4 = 4,493.$$

Le procédé est rapidement convergent car $|\varphi'(x)|$ est petit.

6. — *Système de deux équations.*

Lorsqu'on aura à résoudre un système de deux équations :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

On pourra utiliser des méthodes graphiques en traçant les deux courbes déterminées par ces équations et en mesurant les coordonnées de leurs points d'intersection.

On pourra aussi essayer d'éliminer une des inconnues, c'est-à-dire transformer le système d'équations en un système équivalent de la forme :

$$\begin{cases} y = F(x) \\ G(x) = 0 \end{cases}$$

Une telle élimination est en général un problème difficile à résoudre mais, si elle est réalisée, on est ramené à la résolution d'une équation à une inconnue.

Enfin, dans certains cas la méthode d'itération peut s'appliquer. En écrivant le système sous la forme :

$$\begin{cases} x = \varphi(x, y) \\ y = \psi(x, y) \end{cases}$$

On calculera successivement, à partir d'un point initial x_0, y_0 :

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(x_0, y_0) \\ y_1 = \psi(x_0, y_0) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \varphi(x_1, y_1) \\ y_2 = \psi(x_1, y_1) \end{cases} \quad \cdots \quad \begin{cases} x_{n+1} = \varphi(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = \psi(x_n, y_n) \end{cases} \quad \cdots$$

Il sera fréquent que l'on puisse choisir les fonctions φ et ψ de façon que les deux suites convergent vers un système de solutions du système donné.

EXERCICES

1° Calculer à 0,001 près la racine comprise entre 3 et 4 de l'équation :

$$7x^4 - 27x^3 + 8x + 9 = 0.$$

2° Résoudre l'équation $x^5 = 10\,000^{\sin x}$.

3° Racine non nulle de l'équation $x = 2(1 - e^{-x})$.

4° Vérifier que l'équation $x^5 + x^2 - 1,8317 = 0$ a une seule racine réelle et calculer cette racine à $\frac{1}{10^4}$ près.

*5° Calculer $\sqrt{2}$ en appliquant la méthode de Newton à l'équation :

$$x^{2+m} - 2x^m = 0$$

en partant de la valeur $a_0 = 1$. Montrer que si l'on choisit $m = -\frac{1}{2}$, à chaque itération, on triple à peu près le nombre de décimales exactes déjà obtenues pour $\sqrt{2}$.

$$R. \quad \text{Si : } m = -\frac{1}{2}, \quad a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^3}{3a_n^2 + 2}.$$

*6° Calculer la racine de l'équation $x^5 + ax^3 - b = 0$ sachant que $a = 3,61$ et $b = 11,42$. Quelle est l'incertitude ε_x sur cette racine sachant que les incertitudes sur

les données sont $\varepsilon_a = \varepsilon_b = \frac{1}{100}$?

$$R. \quad \varepsilon_x = \frac{1}{1\,000}.$$

CHAPITRE XXVIII

VECTEURS VARIABLES

1. — *Fonctions vectorielles d'une variable.*

Si à chaque valeur d'une variable réelle t (tout au moins lorsque t appartient à un certain ensemble de valeurs) nous faisons correspondre un vecteur libre $\vec{E}$, nous définissons ainsi une *fonction vectorielle* de la variable t que l'on désigne par une notation telle que $\vec{E}(t)$. Si nous rapportons l'espace à trois axes de coordonnées (que nous pourrions supposer rectangulaires) les trois composantes de $\vec{E}(t)$ sont des fonctions de t notées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ par exemple. Se donner la fonction vectorielle $\vec{E}(t)$ revient à se donner simultanément les trois fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ (qui peuvent être choisies arbitrairement). Pour étudier une telle fonction vectorielle, il est souvent commode de fixer l'origine A du vecteur $\vec{E}(t)$. Son extrémité M dépend alors du nombre t et décrit dans l'espace une certaine courbe C lorsque t varie. Si on choisit pour A l'origine O des coordonnées, les nombres $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont les coordonnées du point M et la courbe C se trouve définie paramétriquement par les équations :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t). \end{cases}$$

Cette situation se rencontre fréquemment en Mécanique, la variable t désignant le temps et le point M se déplaçant dans l'espace au cours du temps : $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont alors les coordonnées du point M à l'époque t et C est la *trajectoire* du point M .

Réciproquement, l'étude d'une courbe définie paramétriquement se ramène toujours à l'étude d'une fonction vectorielle. Dans le cas où la courbe C est plane, nous pourrions toujours supposer que son plan est le plan xOy , et que, par suite, la fonction $z(t)$ est constamment nulle.

2. — *Dérivée d'un vecteur.*

On dit que le vecteur $\vec{E}(t)$ tend vers le vecteur $\vec{E}_0$ lorsque t tend vers t_0 si (et seulement si) la norme $\|\vec{E}(t) - \vec{E}_0\|$ tend vers 0 lorsque t tend vers t_0 . En dési-

gnant par x_0, y_0 et z_0 les composantes du vecteur $\vec{E}_0$ ceci revient à dire que les fonctions $x(t), y(t)$ et $z(t)$ tendent simultanément vers les nombres x_0, y_0 et z_0 lorsque t tend vers t_0 , comme le montre l'égalité :

$$\|\vec{E}(t) - \vec{E}_0\|^2 = (x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2.$$

Si $\vec{E}(t) = \overrightarrow{OM}$ et si $\vec{E}_0 = \overrightarrow{OM}_0$, cela signifie encore que le point M tend vers le point M_0 , c'est-à-dire que la distance MM_0 tend vers 0, lorsque t tend vers t_0 .

Cette définition s'étend immédiatement au cas où t tend vers t_0 à droite ou à gauche et au cas où t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Si les vecteurs $\vec{U}(t)$ et $\vec{V}(t)$ tendent vers des limites $\vec{U}_0$ et $\vec{V}_0$ lorsque t tend vers t_0 , les vecteurs $\vec{U}(t) + \vec{V}(t)$ et $\vec{U}(t) \wedge \vec{V}(t)$ tendent respectivement vers $\vec{U}_0 + \vec{V}_0$ et $\vec{U}_0 \wedge \vec{V}_0$ et le nombre $\vec{U}(t) \cdot \vec{V}(t)$ tend vers le nombre $\vec{U}_0 \cdot \vec{V}_0$. Si de plus le vecteur $\vec{W}(t)$ tend vers le vecteur $\vec{W}_0$ lorsque t tend vers t_0 , le produit mixte $(\vec{U}(t), \vec{V}(t), \vec{W}(t))$ tend vers le nombre $(\vec{U}_0, \vec{V}_0, \vec{W}_0)$. Enfin, si la fonction $f(t)$ tend vers f_0 lorsque t tend vers t_0 , le vecteur $f(t)\vec{V}(t)$ tend vers $f_0\vec{V}_0$.

Ces résultats peuvent se démontrer en faisant intervenir les coordonnées des vecteurs variables. Ils sont alors des conséquences immédiates des résultats sur les limites des fonctions (théorème 1 du chap. III).

La notion de *fonction vectorielle continue pour la valeur t_0* ou continue pour un ensemble de valeurs de la variable se définit sans peine.

La *dérivée* de la fonction $\vec{E}(t)$ pour la valeur t de la variable se définit comme étant la limite, si elle existe, du vecteur :

$$\vec{F}(h) = \frac{\vec{E}(t+h) - \vec{E}(t)}{h}$$

lorsque h tend vers 0 (L'existence d'une dérivée entraîne évidemment la continuité de la fonction vectorielle $\vec{E}(t)$ pour la valeur t).

Comme le vecteur $\vec{F}(h)$ a pour composantes :

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \quad \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{z(t+h) - z(t)}{h}$$

on voit que pour que cette dérivée existe, il faut et il suffit que chacune des trois fonctions $x(t), y(t)$ et $z(t)$ admette une dérivée pour la valeur t . Cette dérivée vectorielle, notée encore $\vec{E}'(t)$ ou $\frac{d\vec{E}}{dt}$, a pour composantes les nombres $x'(t), y'(t)$ et $z'(t)$.

Dans la situation mécanique décrite au § 1, $\vec{E}'(t)$ n'est pas autre chose que le *vecteur vitesse* du point M à l'instant t .

Si le point M est défini par l'égalité :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{E}(t)$$

ce que l'on note encore :

$$\vec{M} = \vec{E}(t)$$

et si $\overrightarrow{OP}$ est défini par l'égalité $\overrightarrow{OP} = \vec{E}(t+h)$, on voit que le vecteur $\vec{F}(h)$ s'identifie au vecteur $\frac{\overrightarrow{MP}}{h}$. Sa direction est donc celle de la droite MP . Il en résulte que lorsque h tend vers 0, c'est-à-dire lorsque le point P tend vers le point M en restant sur la courbe C , la droite MP a sa direction qui tend vers celle de $\vec{E}'(t)$. Par suite,

Si $\vec{E}'(t)$ n'est pas nul, la tangente en M à la courbe C a la direction du vecteur $\vec{E}'(t)$.

Les équations de la tangente en M sont donc

$$\frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y(t)}{y'(t)} = \frac{z - z(t)}{z'(t)}$$

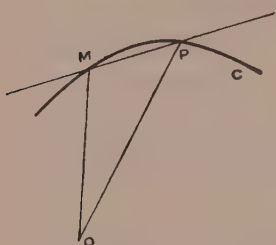


FIG. 1.

EXEMPLE 1. — Dans le cas d'une courbe plane C définie par l'équation $y = f(x)$, on peut prendre x comme paramètre et C se trouve définie par la fonction vectorielle $\vec{E}(x)$ de composantes x et $f(x)$ (la troisième étant nulle). $\vec{E}'(x)$ a pour composantes 1 et $f'(x)$. On retrouve le fait que la tangente à C au point M d'abscisse x a pour paramètres directeurs 1 et $f'(x)$. Sa pente est bien

$$\frac{f'(x)}{1} = f'(x).$$

EXEMPLE 2. — Le vecteur $\vec{U}(\theta)$ de composantes $\cos \theta$ et $\sin \theta$ a son extrémité M qui décrit le cercle (trigonométrique) C de centre O et de rayon 1. On a $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$. Le vecteur dérivée

$\vec{U}' = \frac{d\vec{U}}{d\theta}$ est le vecteur de composantes $-\sin \theta$ et $\cos \theta$, c'est-à-dire le vecteur de composantes $\cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)$ et $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)$.

$\vec{U}'$ se déduit donc de $\vec{U}$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de l'origine O . On retrouve le fait que la tangente au cercle C en M a la direction de $\vec{U}'$, c'est-à-dire est perpendiculaire à OM .

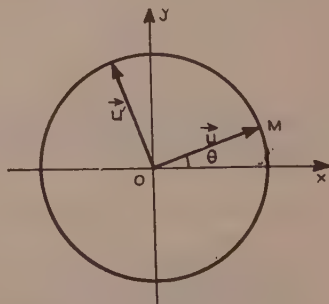


FIG. 2.

On définit sans peine (dans la mesure où elles existent) les dérivées vectorielles successives :

$$\vec{E}''(t) = \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}, \dots, \vec{E}^{(n)}(t) = \frac{d^n \vec{E}}{dt^n}.$$

Le vecteur $\vec{E}^{(n)}(t)$ a pour composantes $X^{(n)}(t)$, $Y^{(n)}(t)$ et $Z^{(n)}(t)$.

Dans la situation mécanique décrite au § 1, le vecteur $\vec{E}''(t)$ est le vecteur accélération du point M .

3. — Calcul des dérivées.

En faisant intervenir les coordonnées des différents vecteurs, on vérifie immédiatement que si $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont trois vecteurs fonctions de la même variable t on a :

$$\begin{aligned}(\vec{U} + \vec{V})' &= \vec{U}' + \vec{V}' \\(\vec{U} \cdot \vec{V})' &= \vec{U}' \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{V}' \\(\vec{U} \wedge \vec{V})' &= \vec{U}' \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{V}' \\(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})' &= (\vec{U}', \vec{V}, \vec{W}) + (\vec{U}, \vec{V}', \vec{W}) + (\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}').\end{aligned}$$

Montrons par exemple la deuxième égalité. Si $\vec{U}$ a pour composantes $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$ et si $\vec{V}$ a pour composantes $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_3(t)$ on a :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

dont la dérivée :

$$u'_1 v_1 + u'_2 v_2 + u'_3 v_3 + u_1 v'_1 + u_2 v'_2 + u_3 v'_3$$

est visiblement égale à la somme des deux produits scalaires $\vec{U}' \cdot \vec{V}$ et $\vec{U} \cdot \vec{V}'$. On pourrait encore montrer ces égalités directement en remarquant que l'on a des égalités de la forme :

$$\vec{U}(t+h) = \vec{U}(t) + h \vec{U}'(t) + h \vec{\varepsilon}(h)$$

où $\vec{\varepsilon}(h)$ est un vecteur qui tend vers 0 avec h (notation que nous emploierons systématiquement par la suite) et en reprenant les modes de raisonnements utilisés au § 5 du chapitre V.

De même, si $f(t)$ est une fonction (scalaire) de la variable t , on a :

$$(f\vec{E})' = f' \vec{E} + f \vec{E}'.$$

Enfin, si t est une fonction de la variable u on a :

$$\frac{d\vec{E}}{du} = \frac{d\vec{E}}{dt} \frac{dt}{du}.$$

Application : la tangente en coordonnées polaires dans le plan. — Soit M un point de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Désignons par $\overrightarrow{OA} = \vec{U}$ un vecteur unitaire de la droite OM . Posons

$$(\vec{i}, \vec{U}) = \theta \quad \overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{U}$$

les nombres θ, r sont dits les *coordonnées polaires* de M .

Le vecteur $-\vec{U}$ est l'autre choix possible pour un vecteur unitaire de OM . On a

$$(\vec{i}, -\vec{U}) = \theta + \pi + 2k\pi \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM} = (-r)(-\vec{U})$$

Un même point M a donc une double infinité de coordonnées polaires :

1° $\theta + 2k\pi$ et r ,

2° $\theta + \pi + 2k\pi$ et $-r$.

On peut définir une courbe C par la donnée de r en fonction de θ : $r = f(\theta)$

$$\overrightarrow{OM} = f(\theta) \cdot \vec{U}(\theta)$$

Tangente. — Si la fonction f est continue et s'annule pour $\theta = \theta_0$, on voit que lorsque θ tend vers θ_0 , le point M de C d'angle polaire θ tend vers le point O cependant que la droite OM tend vers la droite OT d'angle polaire θ_0 . Par suite cette droite OT est tangente en O à la courbe C .

L'annulation de f pour $\theta = \theta_0$ correspond donc à un « passage » de la courbe C par le point O , la tangente correspondant faisant l'angle θ_0 avec l'axe Ox .

Supposons maintenant $f(\theta) \neq 0$.

La tangente en M aura donc même direction

que le vecteur $\vec{M}' = \frac{d\vec{M}}{d\theta}$.

Mais on a :

$$\vec{M}' = r' \vec{U} + r \vec{U}'.$$

Nous avons vu à l'exemple 2 que $\vec{U}'$ est le vecteur qui se déduit de $\vec{U}$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$. Il en résulte que si OX est l'axe d'angle polaire θ et OY l'axe directement perpendiculaire à OX (d'angle polaire $\theta + \frac{\pi}{2}$), les composantes de M' par rapport à OX et OY sont r' et r .

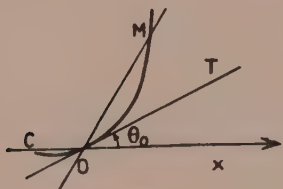


FIG. 3.

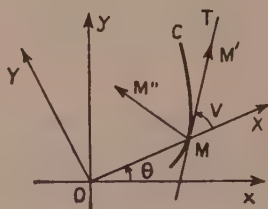


FIG. 4.

En particulier, la tangente MT fait avec l'axe OX un angle V tel que :

$$\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'},$$

(la tangente MT fait avec l'axe polaire Ox l'angle $\theta + V$).

EXEMPLE 3. — *Spirale de Bernoulli.* — Considérons la spirale de Bernoulli d'équation polaire

$$r = ae^{\theta}$$

où a est une constante positive donnée. On a $r'_\theta = r$ d'où $\operatorname{tg} V = 1$: la tangente MT à la spirale fait un angle constant $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ avec OM (fig. 5).

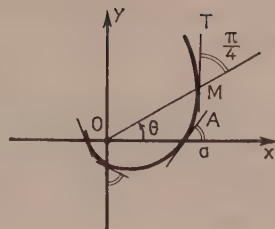


FIG. 5.

4. — Formule de Taylor.

Supposons que les trois composantes $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ de la fonction vectorielle $E(t)$ admettent des dérivées continues jusqu'à l'ordre $n + 1$. On peut alors écrire :

$$x(t + h) = x(t) + h x'(t) + \dots + \frac{h^n}{n!} x^{(n)}(t) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} x^{(n+1)}(t + \theta h)$$

$$y(t + h) = y(t) + h y'(t) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(t) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(t + \theta_1 h)$$

$$z(t + h) = z(t) + h z'(t) + \dots + \frac{h^n}{n!} z^{(n)}(t) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} z^{(n+1)}(t + \theta_2 h)$$

où θ , θ_1 et θ_2 sont trois nombres strictement compris entre 0 et 1. En désignant par $\vec{W}$ le vecteur de composantes $x^{(n+1)}(t + \theta h)$, $y^{(n+1)}(t + \theta_1 h)$ et $z^{(n+1)}(t + \theta_2 h)$, on voit que $\vec{W}$ tend vers $\vec{E}^{(n+1)}(t)$ lorsque h tend vers 0. Donc le vecteur :

$$\vec{\varepsilon}(h) = \frac{h}{n+1} \vec{W}$$

tend vers 0 avec h .

Les égalités précédentes permettent alors d'écrire la *formule de Taylor* pour une fonction vectorielle :

$$\vec{E}(t + h) = \vec{E}(t) + h \vec{E}'(t) + \dots + \frac{h^n}{n!} \{ \vec{E}^{(n)}(t) + \vec{\varepsilon}(h) \}$$

REMARQUE. — Les trois nombres θ , θ_1 et θ_2 étant en général distincts, le vecteur $\vec{W}$ n'est pas de la forme $\vec{E}^{(n+1)}(t + \theta' h)$ avec $0 < \theta' < 1$. On ne peut

donc pas étendre complètement la formule de Taylor habituelle aux fonctions vectorielles.

5. — *Allure d'une courbe plane au voisinage d'un point.*

La formule de Taylor permet d'étudier avec beaucoup de détails l'allure de la courbe C dans le voisinage d'un point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{E}(t)$. Étudions d'abord la position de la tangente en M au cas où $\vec{E}'(t) = \vec{0}$.

Supposons que la première dérivée qui ne s'annule pas en M soit la $p^{\text{ième}}$, c'est-à-dire supposons que l'on ait les égalités :

$$\vec{E}'(t) = \vec{0}, \dots, \overrightarrow{E^{(p-1)}}(t) = \vec{0}, \quad \overrightarrow{E^{(p)}}(t) \neq \vec{0}.$$

Si le point P correspond à la valeur $t + h$ de la variable, la formule de Taylor permet d'écrire :

$$\overrightarrow{MP} = \vec{E}(t + h) - \vec{E}(t) = \frac{h^p}{p!} \overrightarrow{E^{(p)}}(t) + \vec{\varepsilon}(h)$$

et le même raisonnement que celui fait au § 2 montre que la tangente en M à la courbe C existe et a la direction de $\overrightarrow{E^{(p)}}(t)$.

Supposons maintenant la courbe C plane et étudions la position du point P voisin de M sur C par rapport à la tangente T à la courbe C au point M .

Désignons par p le plus petit entier i supérieur ou égal à 1 tel que $\overrightarrow{E^{(i)}}(t) \neq 0$ et par q le plus petit entier j supérieur à p tel que $\overrightarrow{E^{(p)}}(t) \wedge \overrightarrow{E^{(j)}}(t) \neq 0$ (le cas habituel étant celui où $p = 1$ et $q = 2$). Désignons par X et Y les composantes du vecteur $\overrightarrow{MP}$ relativement à la base formée par les deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{E^{(p)}}(t)$ et $\overrightarrow{E^{(q)}}(t)$ (X et Y sont donc définis par l'égalité :

$$\overrightarrow{MP} = X \overrightarrow{E^{(p)}}(t) + Y \overrightarrow{E^{(q)}}(t).$$

Ceci revient encore à prendre comme axes de coordonnées MX et MY le support de $\overrightarrow{E^{(p)}}(t)$ (c'est-à-dire la tangente en M à C) et le support de $\overrightarrow{E^{(q)}}(t)$.

La formule de Taylor permet d'écrire :

$$\overrightarrow{MP} = \frac{h^p}{p!} \overrightarrow{E^{(p)}}(t) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \overrightarrow{E^{(p+1)}}(t) + \dots + \frac{h^q}{q!} [\overrightarrow{E^{(q)}}(t) + \vec{\varepsilon}(h)].$$

D'où l'égalité :

$$X = \frac{h^p}{p!} (1 + \varepsilon(h))$$

et, comme les vecteurs $\overrightarrow{E^{(p+1)}}(t), \dots, \overrightarrow{E^{(q-1)}}(t)$ sont colinéaires à $\overrightarrow{E^{(p)}}(t)$:

$$Y = \frac{h^q}{q!} (1 + \varepsilon(h)).$$

Aux diverses parités possibles de p et de q correspondent quatre cas de figure différents :

1^{er} cas : p est impair et q est pair. — Lorsque h change de signe, X change de signe et Y reste positif. D'où la configuration indiquée sur la figure 6. Au point M la courbe ne traverse pas sa tangente. On remarque que les points de la courbe voisins de M sont, par rapport à la tangente MX , du même côté que l'extrémité du vecteur $\vec{E}^{(q)}$ supposé d'origine M .

La courbe C traverse au point M toute droite Δ passant par M et distincte de la tangente MX .

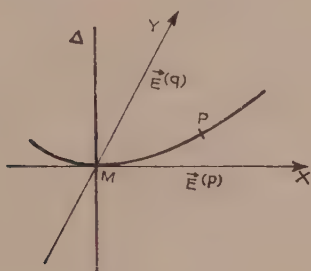


FIG. 6.

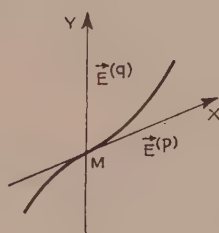


FIG. 7.

2^e cas : p et q sont impairs. — Lorsque h change de signe X et Y changent également de signe. On a la configuration indiquée sur la figure 7. M est un point d'inflexion de la courbe C . La courbe traverse en M toutes les droites passant par M , y compris sa tangente.

3^e cas : p est pair et q est impair. — Lorsque h change de signe, X reste positif et y change de signe. On a la configuration indiquée sur la figure 8. Le point M est alors un *point de rebroussement de première espèce* de la courbe C . La tangente est ici la seule droite passant par M que la courbe traverse. Si Δ est une droite passant par M et distincte de MX , la courbe reste donc d'un même côté de Δ , celui dans lequel se trouve l'extrémité du vecteur $\vec{E}^{(p)}$ supposé d'origine M .

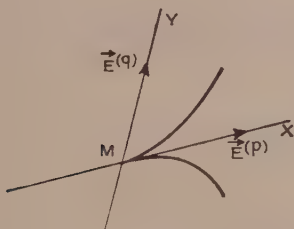


FIG. 8.

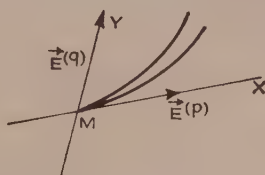


FIG. 9.

4^e cas : p et q sont pairs. — X et Y restent positifs lorsque h change de signe. On a la configuration indiquée sur la figure 9. Le point M est alors un point de rebroussement de deuxième espèce de la courbe C .

La courbe ne traverse en M aucune droite passant par M . Elle se trouve du même côté de OX que le vecteur $\vec{E}^{(q)}$ et du même côté de MY que le vecteur $\vec{E}^{(p)}$ (ces vecteurs étant supposés d'origine M).

Comme nous l'avons dit, le cas le plus général est celui où $\vec{E}'(t) \wedge \vec{E}''(t) \neq \vec{0}$, c'est-à-dire $p = 1$ et $q = 2$. On se trouve alors dans le premier cas.

Si l'égalité $\vec{E}'(t) \wedge \vec{E}''(t) = \vec{0}$ (c'est-à-dire $x'y'' - x''y' = 0$) a lieu, cela ne signifie en général pas que l'on ait $\vec{E}'(t) = \vec{0}$ (c'est-à-dire $x' = 0$ et $y' = 0$), ni que l'on ait $\vec{E}'(t) \wedge \vec{E}'''(t) = \vec{0}$. Par suite,

L'égalité $\vec{E}'(t) \wedge \vec{E}''(t) = \vec{0}$ entraîne en général l'existence d'un point d'inflexion.

Si l'égalité $\vec{E}'(t) = \vec{0}$ a lieu, on aura en général $\vec{E}''(t) \wedge \vec{E}'''(t) \neq \vec{0}$ et par suite on sera en général dans le troisième cas.

L'égalité $\vec{E}'(t) = \vec{0}$ entraîne donc en général l'existence d'un point de rebroussement de première espèce.

Concavité en coordonnées cartésiennes. — Plaçons-nous en un point ordinaire $M(t)$ c'est-à-dire tel que $\vec{E}'(t) \neq \vec{0}$ et $\vec{E}'(t) \wedge \vec{E}''(t) \neq \vec{0}$. Les points de la courbe voisins de $M(t)$ sont alors situés du côté de la tangente MT défini par le sens du vecteur $\vec{E}'(t)$ (fig. 10).

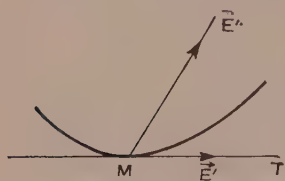


FIG. 10.

Donc si $\vec{U}$ est un vecteur non colinéaire à $\vec{E}'(t)$, pour que la courbe soit du côté de MT défini par le sens du vecteur $\vec{U}$, il faut et il suffit que les deux vecteurs $\vec{E}'(t) \wedge \vec{U}$ et $\vec{E}'(t) \wedge \vec{E}''(t)$ aient même sens, soit

$$(\vec{E}'(t) \wedge \vec{U}) \cdot (\vec{E}'(t) \wedge \vec{E}''(t)) > 0$$

En particulier, si $\vec{j}$ est le vecteur unité de l'axe des y , c'est-à-dire le vecteur d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, dire que la courbe C a au point M sa concavité tournée vers les y positifs revient à écrire :

$$(\vec{E}'(t) \wedge \vec{j}) \cdot (\vec{E}'(t) \wedge \vec{E}''(t)) > 0$$

Les relations :

$$\vec{E}'(t) \wedge \vec{j} = x' \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{E}'(t) \wedge \vec{E}''(t) = (x' y'' - y' x'') \vec{k}$$

montrent que pour qu'au point $M(t)$ la courbe tourne sa concavité vers les y positifs, il faut et il suffit que :

(1)

$$x'(x'y'' - y'x'') > 0$$

On remarquera que si $m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ représente la pente de la tangente à la courbe au point $M(t)$, la quantité $x'y'' - y'x''$ a le signe de la dérivée $m'(t)$. Par suite, l'inégalité (1) peut s'écrire encore :

$$x'(t)m'(t) > 0$$

ce qui a l'interprétation géométrique intuitivement évidente suivante. Pour que la courbe C tourne au point M sa concavité vers les y positifs, il faut et il suffit que dans un voisinage de M la pente de la courbe varie dans le même sens que l'abscisse du point M (fig. 11).

Si le premier membre de l'inégalité (1) s'annule, on a nécessairement $x' = 0$ ou $x'y'' - y'x'' = 0$.

Le cas $x' = 0$ est celui où la tangente à la courbe en M est parallèle à l'axe Oy , auquel cas il est bien évident que la direction Oy ne peut pas permettre de déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Le cas $x'y'' - y'x'' = 0$ est celui où $\vec{E}'(t) \wedge \vec{E}''(t) = \vec{0}$, c'est-à-dire en général le cas où $M(t)$ est un point d'inflexion de la courbe C .

Concavité en coordonnées polaires. — Si A est un point non situé sur la tangente MT , on dit que la courbe *tourne au point $M(t)$ sa concavité vers A* si elle est située du même côté que A par rapport à la droite D . Ceci revient à dire que l'on a :

$$(\vec{E}'(t) \wedge \overrightarrow{M(t)A}) \cdot (\vec{E}'(t) \wedge \vec{E}''(t)) > 0.$$

Si la courbe C est définie en coordonnées polaires on précise en général sa position par rapport à la tangente MT en regardant si elle en est du même côté que le point O , c'est-à-dire si au point M elle tourne sa concavité vers le point O .

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les vecteurs $\vec{M}' \wedge \vec{MO}$ et $\vec{M}' \wedge \vec{M}''$ aient même sens. On a :

$$\vec{M}'' = \frac{d\vec{M}'}{dt} = r'' \vec{U} + 2r' \vec{U}' + r \vec{U}''.$$

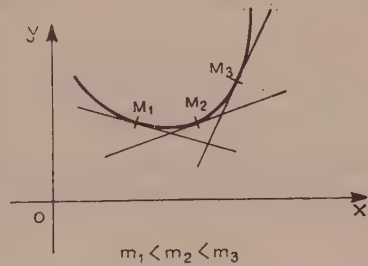


FIG. 11.

Mais $\vec{U}''$ est le vecteur qui se déduit de $\vec{U}'$ par la rotation de $+\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire le vecteur $-\vec{U}$. D'où l'égalité :

$$\vec{M}'' = (r'' - r) \vec{U} + 2r' \vec{U}'.$$

D'autre part,

$$\overrightarrow{MO} = -r \vec{U}.$$

Rapportés au repère $(O, \vec{U}, \vec{U}')$, les vecteurs $\vec{M}'$, $\overrightarrow{MO}$ et $\vec{M}''$ ont donc pour composantes :

$$\vec{M}' \begin{vmatrix} r' \\ r \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{MO} \begin{vmatrix} -r \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{M}'' \begin{vmatrix} r'' - r \\ 2r' \end{vmatrix}$$

On a donc

$$\vec{M}' \wedge \overrightarrow{MO} = r^2 \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{M}' \wedge \vec{M}'' = (r^2 + 2r'^2 - rr'') \vec{k}$$

Comme, par hypothèse, $r \neq 0$, on voit que :

Une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe C tourne au point M sa concavité vers le point O est que l'on ait l'inégalité :

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' > 0$$

L'égalité $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$, étant équivalente à $\vec{M}' \wedge \vec{M}'' = 0$, exprime en général que M est un point d'inflexion de la courbe C .

6. — Fonctions vectorielles de deux variables.

u et v étant deux variables indépendantes si, à tout couple de valeurs de u et v on associe un vecteur noté $\vec{E}(u, v)$, on définit une fonction vectorielle de u et de v . La donnée d'une telle fonction vectorielle revient à la donnée de ses trois composantes $X(u, v)$, $Y(u, v)$ et $Z(u, v)$ qui sont trois fonctions des deux variables u et v .

Lorsque u et v varient indépendamment l'un de l'autre, l'extrémité M du vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{E}(u, v)$ décrit une certaine surface S . Un point M de S étant déterminé par u et v , ces deux nombres peuvent être considérés comme des coordonnées du point M sur la surface S . Les coordonnées du point M sont données par les égalités :

$$\begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v) \\ z = Z(u, v) \end{cases}$$

qui fournissent ainsi une *représentation paramétrique* de la surface S (les deux paramètres étant u et v).

EXEMPLE 4. — La surface graphe de la fonction $z = f(x, y)$ peut encore être définie de la manière précédente, les variables indépendantes étant x et y et les composantes du vecteur $\vec{OM} = \vec{E}(x, y)$ étant :

$$X(x, y) = x \quad Y(x, y) = y \quad \text{et} \quad Z(x, y) = f(x, y).$$

EXEMPLE 5. — Soit la sphère de centre O et de rayon R . Étant donné un point M de S et sa projection orthogonale m sur le plan xOy , on désigne par φ l'angle $(\vec{Ox}, \vec{Om})$ que l'on appelle la *longitude* du point M . Si on connaît la longitude du point M , on sait que ce dernier appartient au demi-cercle section de S par le demi-plan bordé par Oz et passant par M . Il suffira alors pour déterminer M de se donner l'angle $\theta = (\vec{Om}, \vec{OM})$, l'orientation du demi-plan étant choisie de telle façon que :

$$(\vec{Om}, \vec{Oz}) = +\frac{\pi}{2}.$$

L'angle θ , toujours compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ est appelé la *latitude* du point M .

Les nombres φ et θ sont des coordonnées sur la sphère. On remarquera que si S est la surface de la terre et le plan xOy celui de l'équateur, l'axe Ox étant choisi convenablement, les nombres φ et θ sont effectivement la longitude et la latitude du point M au sens ordinaire.

Om ayant pour longueur $R \cos \theta$, on voit que les coordonnées cartésiennes x, y et z de M sont déterminées en fonction de sa longitude et de sa latitude par les égalités :

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \cos \varphi \\ y = R \cos \theta \sin \varphi \\ z = R \sin \theta. \end{cases}$$

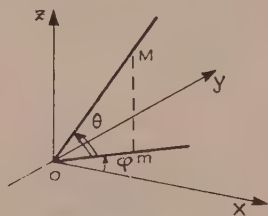


FIG. 12.

Le point M peut donc être considéré comme l'extrémité du vecteur variable $\vec{E}(\varphi, \theta)$ dont les trois composantes sont :

$$X(\varphi, \theta) = R \cos \theta \cos \varphi \quad Y(\varphi, \theta) = R \cos \theta \sin \varphi \quad \text{et} \quad Z(\varphi, \theta) = R \sin \theta.$$

On obtient ainsi une représentation paramétrique de la sphère S .

7. — Plan tangent à une surface.

$\vec{E}(u, v)$ étant une fonction vectorielle des deux variables indépendantes u et v , on définit sans peine les *dérivées partielles premières* :

$$\vec{E}'_u = \frac{\partial \vec{E}}{\partial u}, \quad \vec{E}'_v = \frac{\partial \vec{E}}{\partial v}$$

et plus généralement les dérivées $n^{\text{ième}}$ de la forme :

$$\frac{\partial^n \vec{E}}{\partial^m u \partial^{n-m} v}$$

dont les composantes sont :

$$\frac{\partial^n X}{\partial^m u \partial^{n-m} v}, \quad \frac{\partial^n Y}{\partial^m u \partial^{n-m} v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^n Z}{\partial^m u \partial^{n-m} v}.$$

Dans les mêmes conditions que pour les fonctions scalaires de deux variables on a l'égalité :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial v \partial u}.$$

Supposons maintenant que $u = u(t)$ et $v = v(t)$ soient deux fonctions d'une même variable t , le vecteur $\vec{E}(u(t), v(t))$ devient une fonction de la seule variable t et l'extrémité M du vecteur $\vec{OM} = \vec{E}(u(t), v(t))$ décrit une courbe C située sur la surface S . La courbe C est définie paramétriquement sur la surface S par les équations :

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t). \end{cases}$$

En particulier les courbes $u = \text{Constante}$ et $v = \text{Constante}$, définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} u = u_0 \\ v = t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u = t \\ v = v_0 \end{cases}$$

sont dites les *courbes coordonnées* sur la surface S .

C'est ainsi que dans l'exemple 2, les courbes $\varphi = \text{Constante}$ sont des demi-cercles dits les *méridiens* de la sphère, et les courbes $\theta = \text{Constante}$ sont des cercles axés sur Oz dits *parallèles* de la sphère.

La tangente T à la courbe C au point M a pour direction celle du vecteur :

$$(2) \quad \vec{E}'(t) = \vec{E}'_u u'_t + \vec{E}'_v v'_t.$$

Le vecteur $\vec{E}'(t)$ étant une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{E}'_u$ et $\vec{E}'_v$, on voit que si les deux vecteurs $\vec{E}'_u$ et $\vec{E}'_v$ ne sont pas colinéaires, et si nous les supposons d'origine M , ils déterminent un plan P passant par M tel que la tangente T à la courbe C soit située dans ce plan.

Comme les vecteurs $\vec{E}'_u$ et $\vec{E}'_v$ ne dépendent pas du choix des fonctions $u(t)$ et $v(t)$, on voit que

La tangente en M aux diverses courbes situées sur la surface S et passant par M est dans le même plan P qui est dit le plan tangent à S au point M .

REMARQUE. — On voit facilement que si D est une droite passant par M et située dans P il existe une courbe C située sur S , passant par M et ayant pour tangente en M la droite D . Soit, en effet, un vecteur $\vec{D}$ ayant D pour support. On a

$$\vec{D} = a \vec{E}'_u + b \vec{E}'_v.$$

La courbe C définie paramétriquement sur la surface par les égalités :

$$\begin{cases} u = at \\ v = bt \end{cases}$$

répond à la question d'après l'égalité (1).

On définit souvent le plan tangent P par le vecteur $\vec{E}'_u \wedge \vec{E}'_v$ qui lui est perpendiculaire. La droite perpendiculaire à P en M est dite la *normale* à la surface S en M . Tout vecteur dont la direction est celle de cette normale est dit *vecteur normal* à S en M .

EXEMPLE 6. — Dans le cas de la surface graphe de la fonction $z = f(x, y)$, on a :

$$\vec{E}(x, y) \begin{vmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{vmatrix} \quad \vec{E}'_x \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{vmatrix} \quad \vec{E}'_y \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{vmatrix}$$

d'où le vecteur normal :

$$\vec{E}'_x \wedge \vec{E}'_y \begin{vmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1. \end{vmatrix}$$

EXEMPLE 7. — Dans le cas de la sphère :

$$\vec{E} \begin{vmatrix} R \cos \theta \cos \varphi \\ R \cos \theta \sin \varphi \\ R \sin \theta \end{vmatrix} \quad \vec{E}'_\theta \begin{vmatrix} -R \sin \theta \cos \varphi \\ -R \sin \theta \sin \varphi \\ R \cos \theta \end{vmatrix} \quad \vec{E}'_\varphi \begin{vmatrix} -R \cos \theta \sin \varphi \\ R \cos \theta \cos \varphi \\ 0 \end{vmatrix}$$

d'où le vecteur normal :

$$\vec{E}'_\theta \wedge \vec{E}'_\varphi \begin{vmatrix} -R^2 \cos^2 \theta \cos \varphi \\ -R^2 \cos^2 \theta \sin \varphi \\ -R^2 \sin \theta \cos \theta. \end{vmatrix}$$

On a donc la relation :

$$\vec{E}'_\theta \wedge \vec{E}'_\varphi = -R \vec{E} \cos \theta$$

et le vecteur $\vec{E}$ est normal à la sphère. On retrouve ici la propriété géométrique bien connue : le plan tangent en M à la sphère est perpendiculaire au rayon OM passant par ce point.

REMARQUE. — Ceci peut encore se voir plus rapidement de la façon suivante : pour que l'extrémité du vecteur E soit sur la sphère, il faut et il suffit que $|\vec{E}| = R$ ou encore que :

$$(\vec{E})^2 = R^2.$$

Soit une courbe C située sur la sphère lieu du point M tel que $\vec{OM} = \vec{E}(t)$. La relation $(\vec{E}(t))^2 = R^2$ permet d'écrire en dérivant :

$$2\vec{E}(t) \cdot \vec{E}'(t) = 0.$$

Le vecteur $\vec{E}'$ est donc orthogonal à $\vec{E}$ ce qui montre à nouveau que toute courbe située sur la sphère et passant par M a sa tangente en M qui est perpendiculaire à OM .

8. — *Plan osculateur à une courbe gauche.*

Soit une courbe gauche C définie par une fonction vectorielle $\vec{E}(t)$. On sait que la tangente à C en M est le support du vecteur $\vec{E}'(t)$ supposé d'origine M . Pour qu'un plan passant par M soit tangent à la courbe C au point M , il faut et il suffit donc qu'il contienne le support de ce vecteur $\vec{E}'(t)$. Supposons qu'au point M on ait $\vec{E}' \wedge \vec{E}'' \neq 0$. Parmi les plans tangents à C en M celui qui contient également le support du vecteur $\vec{E}''(t)$ (supposé d'origine M) joue un rôle particulier et est appelé le *plan osculateur* à la courbe C au point M . Ce plan osculateur est donc le plan passant par M et normal au vecteur $\vec{E}'(t) \wedge \vec{E}''(t)$. Il peut aussi être caractérisé par certaines propriétés géométriques que nous allons indiquer.

Π étant un plan passant par M , étudions le comportement de la distance à Π d'un point P de la courbe C lorsque P tend vers M (en restant sur C). Définissons pour cela le plan Π par un vecteur unitaire $\vec{U}$ normal à Π . La distance de P au plan Π est alors égale à la valeur absolue $|\vec{MP} \cdot \vec{U}|$, le signe du produit scalaire $\vec{MP} \cdot \vec{U}$ dépendant de la position du point P par rapport au plan Π .

Si t et $t + h$ désignent les paramètres des points M et P , la formule de Taylor permet d'écrire :

$$\vec{MP} = \vec{E}(t + h) - \vec{E}(t) = h \vec{E}'(t) + \frac{h^2}{2} \vec{E}''(t) + \frac{h^3}{6} \vec{E}'''(t) + h^3 \varepsilon(h)$$

le vecteur $\varepsilon(h)$ tendant vers 0 en même temps que h .

On a par suite :

$$\vec{U} \cdot \vec{MP} = h \vec{U} \cdot \vec{E}'(t) + \frac{h^2}{2} \vec{U} \cdot \vec{E}''(t) + \frac{h^3}{6} \vec{U} \cdot \vec{E}'''(t) + h^3 \vec{U} \cdot \varepsilon(h).$$

On voit donc que si $\vec{U} \cdot \vec{E}'(t) \neq 0$, c'est-à-dire si le plan Π n'est pas tangent en M à C , la quantité $\vec{U} \cdot \vec{MP}$ est un infiniment petit équivalent à $h \vec{U} \cdot \vec{E}'(t)$. On voit en particulier que la distance de P à Π est un infiniment petit du premier ordre par rapport à la distance MP (qui est équivalente à $|h| |\vec{E}'(t)|$) et que la courbe C traverse le plan Π au point M .

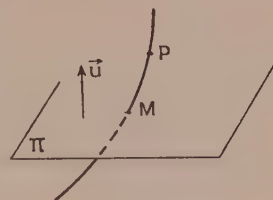


FIG. 13.

Supposons maintenant que Π soit tangent à C au point M , c'est-à-dire que $\vec{U} \cdot \vec{E}'(t) = 0$. Si $\vec{U} \cdot \vec{E}''(t) \neq 0$, c'est-à-dire si le plan Π n'est pas osculateur en M à C , la quantité $\vec{U} \cdot \vec{MP}$ est un infiniment petit équivalent à $\frac{h^2}{2} \vec{U} \cdot \vec{E}''(t)$. On voit en

particulier que la distance de P à Π est un infiniment petit du deuxième ordre par rapport à la distance MP et que la courbe C ne traverse pas le plan Π au point M .

Si Π est le plan osculateur à C au point M , la quantité $\vec{U} \cdot \vec{MP}$ est équivalente à $\frac{h^3}{6} \vec{U} \cdot \vec{E}'''(t)$. On voit que la distance de P à Π est alors un infiniment petit du troisième ordre par rapport à la distance MP et que la courbe C traverse le plan Π au point M .

On voit donc que le plan osculateur à C en M peut être caractérisé des deux façons suivantes :

C'est le plan passant par M « le plus rapproché de la courbe C ».

C'est le seul plan tangent en M à C que C traverse au point M .

On pourrait montrer également que c'est la limite, lorsque P tend vers M en restant sur C , du plan tangent à C au point M et passant par le point P .

Ceci montre en particulier que le plan osculateur ne dépend pas du paramètre t choisi pour définir la courbe. Ce dernier résultat peut encore se démontrer directement.

Soit en effet u un autre paramètre définissant la courbe C . La relation :

$$\frac{d^2 \vec{E}}{du^2} = \left(\frac{dt}{du} \right)^2 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} + \frac{d^2 t}{du^2} \frac{d\vec{E}}{dt}$$

montre que $\frac{d^2 \vec{E}}{du^2}$ est dans le plan osculateur, lequel est donc bien défini par les

deux vecteurs $\frac{d\vec{E}}{du}$ et $\frac{d^2 \vec{E}}{du^2}$.

Le plan passant par M et normal à la tangente en M à C est appelé le *plan normal* à la courbe C au point M . L'intersection du plan normal et du plan osculateur est une droite normale à C qui est dite la *normale principale*.

EXEMPLE 8. — *Hélice circulaire.* — Une des courbes que l'on rencontre le plus fréquemment dans les applications est l'*hélice circulaire* définie paramétriquement par les égalités :

$$(3) \quad \begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = a \sin \varphi \\ z = b\varphi \end{cases}$$

a et b étant deux longueurs données.

La projection de cette courbe sur le plan xOy est le cercle défini paramétriquement par :

$$x = a \cos \varphi \quad y = a \sin \varphi.$$

La courbe est donc tracée sur le cylindre d'équation :

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

En remarquant que la cote $\overline{mM}$ (fig. 14) est proportionnelle à la longueur de l'arc Am :

$$\overline{mM} = \frac{b}{a} \widehat{Am}$$

on en déduit que par développement d'un cylindre sur un plan, l'hélice devient une droite.

De là résulte en fait la propriété essentielle de l'hélice. Faisons-lui subir une rotation d'angle α autour de Oz et une translation parallèle à Oz de longueur h . Les coordonnées du point M deviennent :

$$\begin{aligned} x &= a \cos (\varphi + \alpha) \\ y &= a \sin (\varphi + \alpha) \\ z &= b\varphi + h = b\left(\varphi + \frac{h}{b}\right). \end{aligned}$$

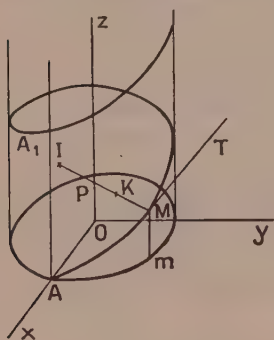


FIG. 14.

Si donc $h = b\alpha$, l'hélice coïncidera avec elle-même dans le déplacement hélicoïdal envisagé. De même qu'un cercle coïncide avec lui-même par une infinité de rotations, qu'une droite coïncide avec elle-même par une infinité de translations, une hélice coïncidera avec elle-même par une infinité de déplacements hélicoïdaux.

De là résulte également un ensemble de propriétés que nous allons d'ailleurs vérifier par le calcul : la tangente fait un angle constant avec Oz , le plan osculateur fait un angle constant avec Oz .

$\vec{E}(\varphi)$ étant le vecteur dont les coordonnées vérifient les égalités (3), on a :

$$\begin{array}{c|c|c|c} \vec{E}' & \begin{vmatrix} -a \sin \varphi \\ a \cos \varphi \\ b \end{vmatrix} & \vec{E}'' & \begin{vmatrix} -a \cos \varphi \\ -a \sin \varphi \\ 0 \end{vmatrix} & \vec{E}' \wedge \vec{E}'' & \begin{vmatrix} ab \sin \varphi \\ -ab \cos \varphi \\ a^2 \end{vmatrix} \end{array}$$

$\vec{k}$ étant le vecteur unitaire de l'axe Oz , la relation $\vec{k} \cdot \vec{E}' = b$ montre que la tangente à l'hélice fait avec Oz l'angle constant θ tel que :

$$\cos \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Le plan osculateur qui est normal au vecteur $\vec{E}' \wedge \vec{E}''$ a donc pour équation :

$$ab \sin \varphi (X - a \cos \varphi) - ab \cos \varphi (Y - a \sin \varphi) + a^2(Z - b\varphi) = 0$$

ou :

$$bX \sin \varphi - bY \cos \varphi + aZ - ab\varphi = 0.$$

Il fait avec Oz l'angle constant θ' tel que :

$$\sin \theta' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \text{D'où } \theta' = \theta$$

Le plan osculateur coupe Oz au point P de cote $b\varphi$, donc :

$$\overline{OP} = \overline{mM}$$

PM est donc la normale à la courbe située dans le plan osculateur, c'est donc la normale principale à l'hélice.

EXERCICES

*1° Un point M décrit une conique de foyers F et F' . En différenciant la relation :

$$\varepsilon \sqrt{\overline{MF}^2} + \varepsilon' \sqrt{\overline{MF'}^2} = 2a \quad (\varepsilon = \pm 1, \varepsilon' = \pm 1)$$

établir que la tangente est bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$. Préciser ce résultat selon qu'il s'agit d'une ellipse ou d'une hyperbole.

*2° Un cube est mobile, un de ses sommets O étant fixe. On appelle t la variable et A, B, C les sommets du cube les plus voisins de O . Montrer que l'on peut définir des fonctions scalaires $p(t), q(t), r(t)$ telles que :

$$\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = q\overrightarrow{OC} - r\overrightarrow{OB}, \quad \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} = r\overrightarrow{OA} - p\overrightarrow{OC}, \quad \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} = p\overrightarrow{OB} - q\overrightarrow{OA}.$$

En déduire :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}, \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}, \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} \right) = 0.$$

$$R. \quad a^2 p = \overrightarrow{OB} \cdot \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}, \quad a^2 q = \overrightarrow{OC} \cdot \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}, \quad a^2 r = \overrightarrow{OA} \cdot \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}.$$

3° Vérifier la relation :

$$\frac{d}{dt} [\vec{E} \wedge \vec{E}'] = \vec{E} \wedge \vec{E}''$$

où $\vec{E}$ désigne une fonction vectorielle de t ayant pour dérivées $\vec{E}', \vec{E}'', \dots$. En déduire que si le vecteur $\vec{E}$ a une origine fixe et si le vecteur $\vec{E}''$ est colinéaire au vecteur $\vec{E}$, le vecteur $\vec{E}$ reste dans un plan fixe.

****4°** Si deux points A et B sont mobiles, la distance AB restant constante, les projections des vitesses de A et de B sur la droite AB sont égales.

***5°** Le point M varie en fonction d'un paramètre t sur une sphère de centre O et de rayon R . Montrer que si $\frac{dOM}{dt}$ a une longueur constante, le vecteur égal à $\frac{d^3 OM}{dt^3}$ d'origine M est dans le plan tangent en M à la sphère.

6° Si $\vec{E}(u)$ est une fonction vectorielle d'un paramètre t par l'intermédiaire d'une fonction $u(t)$, vérifier l'égalité :

$$\frac{|\vec{E}_t'|^3}{|\vec{E}_t' \wedge \vec{E}_t''|} = \frac{|\vec{E}_u'|^3}{|\vec{E}_u' \wedge \vec{E}_u''|}.$$

7° La courbe définie paramétriquement par :

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t$$

est tracée sur un cône de révolution de sommet O . Montrer que la tangente et le plan osculateur en un point M de cette courbe font des angles constants avec la génératrice OM .

8° La projection de l'hélice :

$$x = a \cos \varphi \quad y = a \sin \varphi \quad z = b\varphi$$

sur le plan xOy parallèlement à la direction d'une tangente à l'hélice est une cycloïde.

9° Si par un point P on mène les plans osculateurs à une hélice, les points de contact de ces plans osculateurs avec l'hélice sont tous dans un même plan passant par le point P .

R . Si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du point P , l'équation du plan est, dans les conditions de l'exemple 8 :

$$b(y_0 X - x_0 Y) + a^2(Z - z_0) = 0.$$

CHAPITRE XXIX

CONSTRUCTION DES COURBES PARAMÉTRIQUES ET POLAIRES

1. — *Principes généraux.*

Pour construire une courbe plane C définie paramétriquement par des équations de la forme :

$$(1) \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

on étudie les variations simultanées des fonctions f et g de la variable t . On en déduit alors la manière dont se déplace le point $M(t)$ de coordonnées $f(t)$ et $g(t)$ et par suite l'allure de la courbe C , ensemble des positions successives du point $M(t)$.

Période. — Il convient avant toute chose d'étudier les particularités des fonctions f et g . C'est ainsi que si ces deux fonctions ont une *période commune* T , c'est-à-dire si l'on a pour toute valeur de t :

$$f(t + T) = f(t) \quad \text{et} \quad g(t + T) = g(t)$$

le point $M(t + T)$ s'identifie au point $M(t)$ et par suite il suffit de faire varier t dans un intervalle de longueur T pour obtenir toute la courbe.

Il se peut qu'un *changement de paramètre* fasse apparaître une telle périodicité. C'est ainsi que la courbe C définie par les égalités :

$$\begin{cases} x = \cos t^3 \\ y = \sin t^3 \end{cases}$$

est telle que le changement de variable $u = t^3$ fait apparaître x et y comme des fonctions périodiques de u (alors qu'elles ne sont pas des fonctions périodiques de t). Il suffit donc de faire varier u dans un intervalle de longueur 2π pour obtenir toute la courbe (qui est le cercle de centre O et de rayon 1).

D'une façon générale, il faut toujours examiner si un changement de paramètre ne permet pas de définir la courbe plus simplement.

Symétries. — Si les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sont toutes deux des fonctions paires, le point $M(-t)$ s'identifie au point $M(t)$. Pour obtenir toute la courbe il suffit donc de considérer les valeurs positives de t .

Si $f(t)$ est une fonction paire et $g(t)$ une fonction impaire, les deux points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des x . Pour tracer la courbe C il suffira donc de tracer l'arc correspondant à $t \geq 0$ et de le compléter en lui adjoignant son symétrique par rapport à l'axe Ox .

On a de même une symétrie par rapport à l'axe Oy dans le cas où $f(t)$ est une fonction impaire et $g(t)$ une fonction paire.

Enfin, si $f(t)$ et $g(t)$ sont toutes deux des fonctions impaires, la courbe C admet le point O comme centre de symétrie.

EXEMPLE 1. — *Courbe de Lissajous.* — Les courbes de Lissajous sont les courbes définies par des égalités de la forme :

$$\begin{cases} x = a \cos(\omega t + \alpha) \\ y = b \cos(\omega' t + \alpha') \end{cases}$$

où $a, b, \omega, \omega', \alpha$ et α' sont des constantes (on peut supposer a, b, ω et ω' positifs).

On voit que les projections de $M(t)$ sur les axes Ox et Oy sont animées d'un mouvement vibratoire simple. Ces courbes jouent par suite un rôle important dans la physique des mouvements vibratoires, en particulier en acoustique. Lorsque $\omega = \omega'$, la courbe est une ellipse et devient même un segment de droite si l'on a aussi $\alpha = \alpha'$.

Nous allons construire ici la courbe d'équations :

$$\begin{cases} x = a \sin 2t \\ y = b \sin 3t. \end{cases}$$

La fonction $x(t)$ a pour plus petite période $T_1 = \pi$, la fonction $y(t)$ a pour plus petite période $T_2 = 2\frac{\pi}{3}$. La plus petite période commune à $x(t)$ et $y(t)$ est donc $T = 2\pi$ (on a $T_1 = 3\frac{\pi}{3}$ et $T_2 = 2\frac{\pi}{3}$. Le plus petit commun multiple de 3 et 2 étant 6, la plus petite période commune est $T = 6\frac{\pi}{3} = 2\pi$). Il suffit donc pour obtenir toute la courbe de faire varier t dans un intervalle de longueur 2π .

Si on change t en $-t$, x se change en $-x$ et y en $-y$. Donc la courbe admet le point O pour centre de symétrie. Il suffira donc de tracer l'arc de courbe Γ correspondant dans l'intervalle $(0, \pi)$. La courbe est obtenue en adjoignant à Γ l'arc Γ' symétrique de Γ par rapport à O . Comme d'autre part :

$$x(\pi - t) = -x(t) \quad \text{et} \quad y(\pi - t) = y(t)$$

on voit que les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$ sont symétriques par rapport à l'axe Oy . Il suffit donc pour tracer Γ de tracer l'arc Γ_1 correspondant à t compris

dans $(0, \frac{\pi}{2})$. Γ est obtenu en adjoignant à Γ_1 son symétrique par rapport à l'axe Oy .

La courbe admettant Oy comme axe de symétrie et O comme centre de symétrie admet encore Ox comme axe de symétrie. En fait, on voit immédiatement que les points $M(t)$ et $M(t + \pi)$ sont symétriques par rapport à l'axe Ox .

Traçons l'arc Γ_1 . Lorsque t varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $2t$ varie de 0 à π et $3t$ de 0 à $3 \frac{\pi}{2}$.

On a donc le tableau des variations :

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
x	0	$\nearrow a \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow a$	$\searrow 0$
y	0	$\nearrow b$	$\searrow b \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow -b$
m	$\frac{3b}{2a}$	0		0

Nous avons mis sur la dernière ligne du tableau les valeurs correspondantes de :

$$m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3b \cos 3t}{2a \cos 2t}$$

qui détermine la pente de la tangente à la courbe.

Sur la figure 1 nous avons tracé l'arc de courbe Γ_1 en traits pleins et son symétrique par rapport à Oy en pointillés.

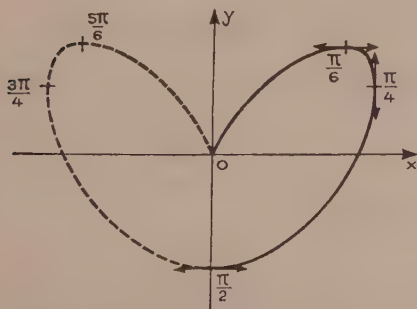


FIG. 1.

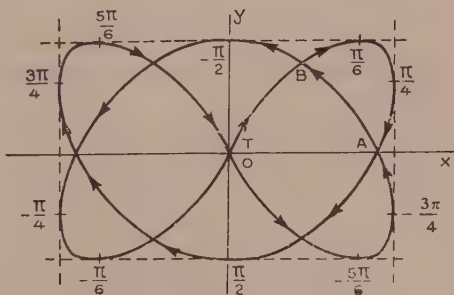


FIG. 2.

Sur la figure 2 nous avons tracé la courbe C en traits pleins et nous avons tracé en pointillés le rectangle, limité par les droites $x = \pm a$ et les droites $y = \pm b$, dans lequel est inscrite la courbe C . Les flèches indiquent le sens des t croissant sur la courbe.

On voit sur la figure 2 que la courbe C admet 7 points doubles où se croisent deux branches de courbe.

Le point O , le point A et son symétrique par rapport au point O , le point B et ses trois symétriques : par rapport à Ox , par rapport à Oy et par rapport au point O . Déterminons avec précision les coordonnées de ces points, c'est-à-dire finalement celles du point A et du point B .

Le point A , étant situé sur l'axe des x , correspond à la valeur de t comprise entre $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{2}$ telle que y s'annule. A correspond donc à $t = \frac{\pi}{3}$ (et à $t = -\frac{\pi}{3}$) et son abscisse est :

$$x = a \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le point B correspond à deux valeurs de t , soient t_0 et t_1 telles que :

$$(2) \quad \begin{cases} 0 < t_0 < \frac{\pi}{6} \\ -\frac{3\pi}{4} < t_1 < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

et telles que l'on ait :

$$(3) \quad \begin{cases} \sin 2t_0 = \sin 2t_1 \\ \sin 3t_0 = \sin 3t_1. \end{cases}$$

Les égalités (3) sont équivalentes à l'ensemble des quatre systèmes suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{I} \quad \begin{cases} 2t_0 = 2t_1 + 2k\pi \\ 3t_0 = 3t_1 + 2k'\pi \end{cases} & \text{II} \quad \begin{cases} 2t_0 = \pi - 2t_1 + 2k\pi \\ 3t_0 = \pi - 3t_1 + 2k'\pi \end{cases} \\ \text{III} \quad \begin{cases} 2t_0 = \pi - 2t_1 + 2k\pi \\ 3t_0 = 3t_1 + 2k'\pi \end{cases} & \text{IV} \quad \begin{cases} 2t_0 = 2t_1 + 2k\pi \\ 3t_0 = \pi - 3t_1 + 2k'\pi \end{cases} \end{array}$$

les nombres k et k' étant des entiers quelconques. Mais les conditions (2) entraînent :

$$(2') \quad \begin{cases} -\frac{3\pi}{4} < t_0 + t_1 < -\frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{2} < t_0 - t_1 < \frac{11\pi}{12}. \end{cases}$$

Les systèmes I et IV conduisant à une égalité de la forme $t_0 - t_1 = k\pi$ ne peuvent donc fournir aucune solution.

Le système II s'écrit :

$$t_0 + t_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$t_0 + t_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{2k'\pi}{3}.$$

Il conduit donc à une égalité de la forme :

$$\frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{2k'\pi}{3}$$

ou $6k - 4k' = 1$, ce qui est absurde car le nombre $6k - 4k'$ est nécessairement pair et ne peut être égal à 1. Le système II n'admet donc en tout état de cause aucune solution.

C'est donc *a priori* le système III qui doit donner la solution. Et, en effet, il s'écrit :

$$\begin{cases} t_0 + t_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ t_0 - t_1 = 2k' \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Les inégalités (2') montrent qu'il faut prendre $k = -1$ et $k' = 1$, d'où :

$$\begin{cases} t_0 + t_1 = -\frac{\pi}{2} \\ t_0 - t_1 = \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

C'est-à-dire encore :

$$\begin{cases} t_0 = \frac{\pi}{12} \\ t_1 = -\frac{7\pi}{12}. \end{cases}$$

Le point B a donc pour abscisse :

$$x = a \sin 2t_0 = a \sin \frac{\pi}{6} = \frac{a}{2}$$

et pour ordonnée :

$$y = b \sin 3t_0 = b \sin \frac{\pi}{4} = b \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. — Points doubles.

Lorsqu'une courbe est définie paramétriquement par les équations (1), il peut arriver qu'elle présente un *point double* comme on l'a vu à l'exemple 1.

Un tel point double se présente lorsqu'il existe deux valeurs distinctes t_0 et t_1 du paramètre t telles que :

$$\begin{cases} f(t_0) = f(t_1) \\ g(t_0) = g(t_1) \end{cases}$$

(c'est-à-dire telles que les points $M(t_0)$ et $M(t_1)$ soient confondus), et telles qu'il existe deux voisinages $]a_0, b_0[$ et $]a_1, b_1[$ respectifs de t_0 et t_1 tels que si $t \in]a_0, b_0[$ et $t' \in]a_1, b_1[$ le point $M(t)$ soit toujours distinct du point $M(t')$, sauf si $t = t_0$ et $t' = t_1$. Cette dernière précaution concernant les voisinages est prise pour éviter de prendre pour des points doubles les points d'un arc de la courbe qui seraient décrits deux fois par le point $M(t)$: c'est ainsi que si T est une période commune à $f(t)$ et $g(t)$ et si on a $t_1 = t_0 + T$, le point $M(t_0 + T)$ est confondu avec le point $M(t_0)$ et n'est cependant pas un point double.

EXEMPLE 2. — Recherchons les points doubles de la courbe définie paramétriquement par les égalités :

$$\begin{cases} x = 4t^3 + 3t^2 - 6t \\ y = 3t^2 + 2t + 1. \end{cases}$$

Nous sommes amenés à résoudre le système des deux équations en t_0 et t_1 :

$$\begin{cases} 4t_0^3 + 3t_0^2 - 6t_0 = 4t_1^3 + 3t_1^2 - 6t_1 \\ 3t_0^2 + 2t_0 + 1 = 3t_1^2 + 2t_1 + 1. \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} 4(t_0^3 - t_1^3) + 3(t_0^2 - t_1^2) - 6(t_0 - t_1) = 0 \\ 3(t_0^2 - t_1^2) + 2(t_0 - t_1) = 0. \end{cases}$$

En divisant par $t_0 - t_1$ (qui n'est pas nul puisque, par hypothèse, $t_0 \neq t_1$) :

$$\begin{cases} 4(t_0^2 + t_0 t_1 + t_1^2) + 3(t_0 + t_1) - 6 = 0 \\ 3(t_0 + t_1) + 2 = 0. \end{cases}$$

On pourrait penser à tirer t_1 en fonction de t_0 dans la deuxième équation et à porter la valeur ainsi trouvée de t_1 dans la première équation qui devient ainsi une équation du second degré en t_0 . Il vaut mieux cependant ne pas rompre la symétrie des calculs. Nous poserons donc $s = t_0 + t_1$ et $p = t_0 t_1$. Les deux équations s'écrivent alors :

$$\begin{cases} 4(s^2 - p) + 3s - 6 = 0 \\ 3s + 2 = 0. \end{cases}$$

D'où on tire $s = -\frac{2}{3}$ et $p = -\frac{14}{9}$. Par suite t_0 et t_1 sont les deux racines de l'équation :

$$t^2 + \frac{2}{3}t - \frac{14}{9} = 0.$$

D'où on tire (par exemple) :

$$t_0 = \frac{-1 - \sqrt{15}}{3} \quad \text{et} \quad t_1 = \frac{-1 + \sqrt{15}}{3}.$$

Il y a donc un point double qui est $M(t_0)$ (ou $M(t_1)$) et qui a pour coordonnées :

$$x(t_0) = x(t_1) = \frac{14}{27} \quad \text{et} \quad y(t_0) = y(t_1) = \frac{17}{3}.$$

3. — Branches infinies.

Une *branche infinie* correspondra à une valeur t_0 de t (finie ou non) telle que l'un au moins des deux nombres $|f(t)|$ ou $|g(t)|$ tende vers $+\infty$ lorsque t tend vers t_0 .

Lorsqu'on a mis en évidence une telle branche infinie, on cherche si elle admet une direction asymptotique en regardant si le rapport $\frac{y}{x} = \frac{g(t)}{f(t)}$ tend ou non vers une valeur limite (qui peut être infinie) lorsque t tend vers t_0 . Si une telle limite m existe la branche infinie admet la direction asymptotique de pente m .

Lorsqu'une telle direction asymptotique existe, on cherche s'il existe une asymptote.

1° Lorsque m est un nombre fini, on cherche pour cela si la fonction $y - mx = g(t) - mf(t)$ tend vers une limite finie p lorsque t tend vers t_0 . Si un tel nombre p existe, la courbe a pour asymptote la droite d'équation $y = mx + p$ et est placée au-dessus (ou au-dessous) de cette asymptote (par rapport au sens de l'axe Oy) si la fonction $g(t) - mf(t) - p$ reste positive (ou négative) lorsque t tend vers t_0 . Lorsque $|g(t) - mf(t)|$ tend vers $+\infty$, la courbe présente alors une branche parabolique.

2° Lorsque m est infini, c'est-à-dire lorsque la direction asymptotique est celle de l'axe Oy , pour que la branche infinie admette une asymptote il faut et il suffit que $x = f(t)$ tende vers un nombre fini x_0 lorsque t tend vers t_0 . L'asymptote est alors la droite d'équation $x - x_0 = 0$ et la position de la courbe par rapport à cette asymptote se déduit du signe de $f(t) - x_0$ lorsque t tend vers t_0 .

EXEMPLE 3. — Soit à étudier les branches infinies de la courbe d'équations :

$$\begin{cases} x = t^2 + \frac{1}{t+1} \\ y = t + \frac{1}{t^2-1} \end{cases}$$

Il y a trois branches infinies correspondant à $t_0 = -1$, $t_0 = +1$ et $t_0 = \infty$. Étudions celle qui correspond à $t_0 = -1$.

Lorsque t tend vers -1 , le rapport

$$\frac{y}{x} = \frac{t(t^2-1) + 1}{t^2(t^2-1) + t-1}$$

tend vers $m = -\frac{1}{2}$. Il y a donc une direction asymptotique de pente $m = -\frac{1}{2}$.

La quantité $y - mx = y + \frac{x}{2}$ est égale à :

$$t + \frac{1}{t^2-1} + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2(t+1)} = t + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2(t-1)}$$

et tend vers $p = -\frac{3}{4}$ lorsque t tend vers -1 .

La courbe a donc pour asymptote la droite d'équation $y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{4}$.

Pour étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote, il faut étudier le signe, lorsque t tend vers -1 , de la fonction :

$$\varphi(t) = y(t) - mx(t) - p = t + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2(t-1)} + \frac{3}{4}.$$

Pour cela étudions le signe de :

$$\varphi'(t) = 1 + t - \frac{1}{2(t-1)^2}.$$

On a $\varphi'(-1) = -\frac{1}{8}$. Donc la fonction $\varphi(t)$ est décroissante dans un voisinage de -1 . Comme $\varphi(-1) = 0$, on a $\varphi(t) > 0$ lorsque t tend vers -1 par valeurs inférieures et $\varphi(t) < 0$ lorsque t tend vers -1 par valeurs supérieures.

Lorsque t tend vers -1 par valeurs supérieures, x tend vers $+\infty$ et lorsque t tend vers -1 par valeurs inférieures x tend vers $-\infty$, d'où la position de la courbe indiquée figure 3.

Lorsque t tend vers $+1$, x tend vers $\frac{3}{2}$ et $|y|$ vers $+\infty$. On a donc une

branche infinie d'asymptote $x = \frac{3}{2}$. La disposition de la courbe est celle indiquée figure 3.

Enfin, lorsque $|t|$ tend vers $+\infty$, le rapport $\frac{y}{x}$ tend vers 0. On a donc une direction asymptotique qui est celle de Ox , mais comme $|y|$ tend vers $+\infty$ on voit que l'on a une branche parabolique (située au-dessus de Ox pour $t \rightarrow +\infty$ et au-dessous pour $t \rightarrow -\infty$).

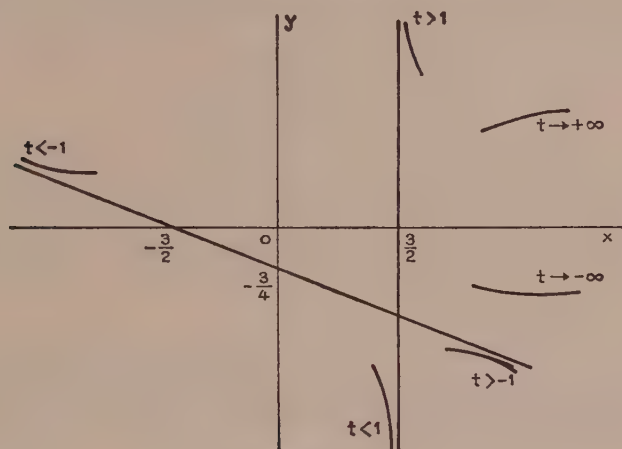


FIG. 3.

4. — *Tracé d'une courbe en coordonnées polaires.*

Les coordonnées cartésiennes x et y d'un point M sont liées à ses coordonnées polaires r et θ par les relations :

$$(4) \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Une courbe C du plan peut être définie par la relation qui doit lier les coordonnées polaires r et θ d'un point M pour qu'il appartienne à C , donc par une équation de la forme :

$$f(r, \theta) = 0.$$

Nous nous occuperons essentiellement ici de construire les courbes qui peuvent être définies par une équation de la forme :

$$r = f(\theta).$$

Les égalités (4) montrent qu'une telle courbe C est définie paramétriquement par les relations :

$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

ce qui permettrait de ramener l'étude de ces courbes à celle faite dans les paragraphes précédents.

Comme toujours quand on construit une courbe, il faut chercher à réduire l'intervalle dans lequel on doit étudier la variation de $f(\theta)$ (périodes, symétries).

L'étude du signe de $r = f(\theta)$ permet de placer le point M par rapport au point O sur l'axe OX d'angle polaire θ . L'annulation de $f(\theta)$ indique que pour cette valeur de θ la courbe passe par l'origine avec la tangente OX si f est continue (chap. XXVIII, § 3).

EXEMPLE 4. — Construire la courbe (appelée *strophoïde droite*) d'équation polaire

$$r = f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$$

Période. — La fonction f a comme période $T = 2\pi$. On obtient cependant toute la courbe en faisant varier θ sur un intervalle de longueur moitié $\frac{1}{2}T = \pi$. En effet le changement de θ en $\theta + \pi$ change le signe de r sans modifier $|r|$ et par conséquent redonne le même point.

Symétrie. — Le changement de θ en $\frac{\pi}{2} - \theta$, laissant r invariant, la courbe possède un axe de symétrie d'angle polaire $\frac{\pi}{4}$ (première bissectrice des axes).

Ainsi on tracera la moitié de la courbe en faisant varier θ de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$ et on complètera par symétrie autour de la première bissectrice. La dérivée r'_θ peut se mettre sous la forme

$$r'_\theta = \frac{2(\cos^3 \theta - \sin^3 \theta)}{(\cos \theta + \sin \theta)^2}$$

Sur l'intervalle considéré on a $r'_\theta \leq 0$. D'où le tableau de variations :

θ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
r	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow 0 \searrow$	$-\infty$

Au point A d'angle polaire $\frac{\pi}{4}$

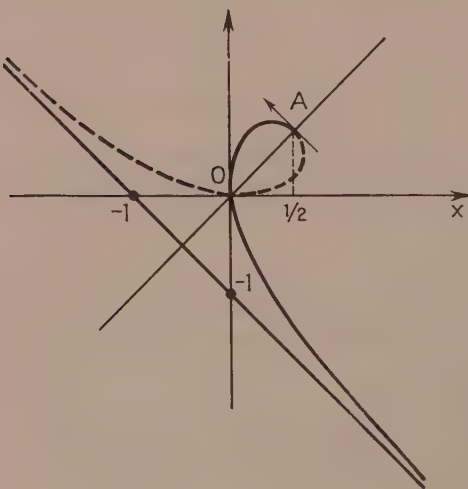


FIG. 4.

on a $r' = 0$, la courbe possède en ce point une tangente perpendiculaire à l'axe polaire. D'où l'allure de la courbe (fig. 4) en traits pleins pour $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{3\pi}{4}$ et en tirets pour $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$.

Branche infinie. — Lorsque θ tend vers $\frac{3\pi}{4}$ on voit que $|r|$ augmente indéfiniment. La courbe a donc une branche infinie dont la direction asymptotique est celle de la deuxième bissectrice des axes (de pente $m = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -1$). Pour étudier si la courbe possède une asymptote considérons l'expression

$$y - mx = y + x = r(\cos \theta + \sin \theta) = \sin 2\theta$$

on a

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}} (y + x) = -1$$

D'où l'équation de l'asymptote :

$$y + x = -1.$$

5. — Points doubles. Branches infinies.

Le tracé de la courbe peut faire apparaître des points doubles en dehors de l'origine. En effet, si θ_0 est un nombre tel que l'on ait l'une des égalités :

$$f(\theta_0) = f(\theta_0 + 2k\pi),$$

k étant un entier différent de 0 ou :

$$f(\theta_0) = -f(\theta_0 + \pi + 2k'\pi),$$

k' étant un entier quelconque, les deux points M et M' de C d'angles polaires θ_0 et $\theta_0 + 2k\pi$ (ou $\theta_0 + \pi + 2k'\pi$) sont confondus. Si les égalités précédentes n'ont pas d'autre solution en θ_0 dans un intervalle de la forme $\theta_0 - \alpha, \theta_0 + \alpha$ (avec $\alpha > 0$, le point M est un point double de C .

D'autre part, le tracé de la courbe obligera à rechercher les valeurs de θ annulant la fonction f et par suite mettra en évidence le nombre de branches de courbes passant par l'origine.

Pour que l'on ait une branche infinie, il faut et il suffit que la distance OM , c'est-à-dire $|f(\theta)|$, augmente indéfiniment. Si $|f(\theta)|$ tend vers $+\infty$ lorsque θ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, on voit que M s'éloigne indéfiniment en tournant autour de O . On a alors une sorte de spirale sans direction asymptotique (la droite OM ne tendant vers aucune position limite).

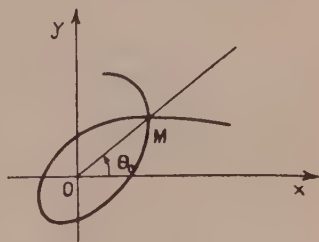


FIG. 5.

Supposons maintenant que $|f(\theta)|$ tende vers $+\infty$ lorsque θ tend vers une valeur finie α . Le point M s'éloigne indéfiniment en même temps que la droite OM tend vers la droite de direction α . On a donc une direction asymptotique qui fait l'angle α avec Ox .

Dans le cas $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ il suffit d'examiner si l'abscisse du point M : $x = f(\theta) \cos \theta$ a une limite lorsque θ tend vers α pour reconnaître s'il existe une asymptote parallèle à Oy .

Dans le cas $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ la direction asymptotique ayant comme pente $m = \operatorname{tg} \alpha$ on considère l'expression

$$y - mx = f(\theta) \sin \theta - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} f(\theta) \cos \theta = \frac{f(\theta) \sin (\theta - \alpha)}{\cos \alpha}$$

Lorsque l'on a

$$\lim_{\theta \rightarrow \alpha} f(\theta) \sin (\theta - \alpha) = l$$

il existe une asymptote d'équation $y - mx = \frac{l}{\cos \alpha}$.

EXEMPLE 5. — *Spirale d'Archimède*. — C'est la courbe C d'équation :

$$r = a\theta$$

a étant une constante que nous supposons positive.

r étant une fonction impaire, la courbe est symétrique par rapport à Oy .

Traçons l'arc correspondant à $\theta \geq 0$: C part du point O tangentiellement à Ox et s'écarte de plus en plus du point O pour donner finalement naissance à une branche infinie sans direction asymptotique.

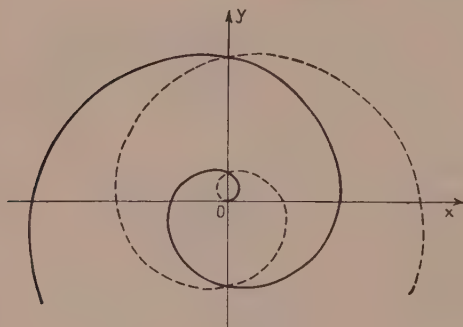


FIG. 6.

Sur la figure 6 nous avons tracé en traits pleins la partie de la courbe correspondant à $\theta \geq 0$ et en traits pointillés la partie correspondant à $\theta \leq 0$.

Les points doubles de la courbe sont ses points d'intersection avec Oy . Ceci est évident géométriquement, mais vérifions-le :

Un point double de la courbe a un angle polaire θ_0 tel que :

$$\theta_0 = \theta_0 + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \neq 0$$

ou :

$$\theta_0 = -\theta_0 + \pi + 2k\pi.$$

Le premier cas est impossible. Le deuxième conduit à l'égalité :

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

qui montre bien que les points doubles sont les points de la courbe situés sur Oy .

EXEMPLE 6. — *Rosace*. — Construisons la courbe C d'équation :

$$r = \cos 4\theta.$$

La fonction $r(\theta)$ admet la période $T = \frac{\pi}{2}$. Comme $4T = 2\pi$, on voit que l'on peut tracer C de la façon suivante :

On trace l'arc Γ de C correspondant à θ variant dans un intervalle de la forme :

$$(\alpha, \alpha + \frac{\pi}{2} ($$

et on complète Γ en lui adjoignant les trois arcs obtenus en faisant tourner Γ autour du point O des angles $\frac{\pi}{2}$, π et $3\frac{\pi}{2}$.

Comme $r\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -r(\theta)$, on voit que le point M' de C ayant pour angle polaire $\theta + \frac{\pi}{4}$ se déduit du point M de C ayant pour angle polaire θ par une rotation de $5\frac{\pi}{4}$ autour de O . Pour tracer l'arc Γ il suffit donc de tracer l'arc Γ' obtenu en faisant varier θ dans l'intervalle $(\alpha, \alpha + \frac{\pi}{4} ($ et en le complétant par l'arc obtenu en faisant tourner Γ' autour de O de l'angle $5\frac{\pi}{4}$.

Comme $r(\theta)$ est une fonction paire, l'axe Ox est axe de symétrie de C . Par suite, si on prend $\alpha = -\frac{\pi}{8}$, on voit que l'arc Γ' est obtenu en traçant l'arc Γ'_1 correspondant à θ variant dans l'intervalle $(0, \frac{\pi}{8})$ et en lui adjoignant son symétrique par rapport à Ox .

Nous sommes donc ramenés à tracer l'arc Γ'_1 .

Lorsque θ varie de 0 à $\frac{\pi}{8}$, 4θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et r décroît de 1 à 0. Cet arc arrive donc en O tangentiellement à la droite d'angle polaire $\frac{\pi}{8}$. Il part du

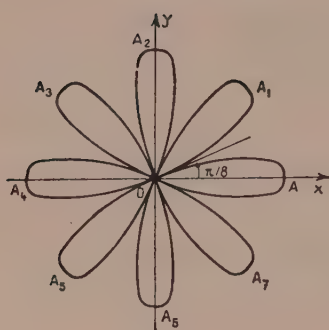


FIG. 7.

point A d'abscisse 1 sur Ox . La quantité $\frac{r}{r'} = -\frac{\cos 4\theta}{\sin 4\theta}$ est infinie pour $\theta = 0$. Donc la tangente en A à la courbe C est perpendiculaire à Ox .

Sur la figure 7 nous avons tracé la courbe C . L'arc Γ' est la boucle A . L'arc Γ se compose des boucles A et A_5 . L'arc obtenu en faisant tourner Γ de $+\frac{\pi}{2}$ se compose des boucles A_2 et A_7 . L'arc obtenu en faisant tourner Γ de π se compose des boucles A_4 et A_1 . L'arc obtenu en

faisant tourner Γ de $3\frac{\pi}{2}$ se compose des boucles A_6 et A_3 .

Le point O est le seul point double de la courbe. Il est en fait multiple d'ordre 8 car huit branches distinctes de la courbe passent par le point O .

EXERCICES

1° Tracer les courbes définies paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = t^4 - 4t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \cos t - \cos^3 t \\ y = \sin 3t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t + \frac{1}{t^2} \\ y = t^2 - \frac{1}{t} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3t^2}{t^3 + 1} \\ y = \frac{4t^3}{t^3 + 1} \end{cases}$$

*2° Acheter le tracé des courbes données comme exemples au § 2 (vérifier qu'il n'y a pas de point d'inflexion) et au § 3 (montrer que la courbe possède un point triple).

*3° On appelle C_0 le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$ supposé matérialisé. On fait rouler sans glisser ce cercle sur l'axe Ox et on appelle C_φ la position du cercle quand il a tourné d'un angle φ . Calculer en fonction de φ les coordonnées du point M du cercle C_φ qui était en coïncidence avec l'origine des coordonnées sur le cercle C_0 . Tracer la courbe (appelée cycloïde) décrite par le point M quand φ varie.

$$R. \quad x = R(\sin \varphi - \varphi), \quad y = R(1 - \cos \varphi).$$

*4° On appelle C_0 le cercle d'équation $(x - 2R)^2 + y^2 = R^2$ qui touche en $A(3R, 0)$ le cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 = 9R^2$. On fait rouler sans glisser le cercle C supposé matérialisé sur l'intérieur de la circonférence Γ et on appelle C_φ la position de ce cercle lorsqu'il a tourné d'un angle φ . Calculer en fonction de φ les coordonnées du point M du cercle C_φ qui était en coïncidence avec le point A sur le cercle C_0 .

Tracer la courbe (appelée hypocycloïde à trois rebroussements) décrite par le point M quand φ varie.

$$R. \quad x = R \left(\cos \varphi + 2 \cos \frac{\varphi}{2} \right), \quad y = R \left(\sin \varphi - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right).$$

***5°** Construire la courbe définie par :

$$x = \frac{t^2 + 1}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{2t}{t^3 - 1}.$$

Vérifier que les points d'inflexion ont même ordonnée.

***6°** Construire les courbes définies paramétriquement par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t^{\frac{1}{t}} \\ y = t^t \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \text{Log} \left| \frac{t^2 - 1}{4} \right| \\ y = \sqrt{3} \text{Log} \left| \frac{t + 1}{t - 1} \right| \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t \\ y = \cos t + \text{Log} \operatorname{tg} \frac{t}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{e^t}{1 - t} \\ y = \frac{te^t}{1 + t} \end{array} \right.$$

***7°** Construire la courbe définie par :

$$x = \frac{1}{t} + \frac{1}{t - 1}, \quad y = \frac{1}{t} + \frac{1}{t + 1}.$$

Axe de symétrie?

****8°** Construire la courbe définie par :

$$x = t + \sin t - 4 \sin \frac{t}{2}, \quad y = 3 + \cos t - 4 \cos \frac{t}{2}.$$

Coordonnées du point double sur l'axe Oy à 0,001 près?

$$R. \quad x = 0 \quad y = 4,731.$$

****9°** Construire la courbe définie par :

$$x = \sin t - t \cos t \quad y = 1 - \cos t$$

et étudier sa concavité.

10° Tracer la spirale logarithmique définie par $r = e^{m\theta}$, m étant une constante donnée. Montrer que toute similitude de centre d'origine O , menant le point $A(0, 1)$ en un point donné M de la spirale, fait coïncider la spirale avec elle-même. Vérifier que l'angle de OM et de la tangente en M à la spirale a une valeur constante.

$$R. \quad \operatorname{tg} V = m.$$

11° Tracer la cardioïde définie par $r = a(1 + \cos \theta)$. Montrer quelle est la trajectoire d'un point d'un cercle de diamètre a roulant sans glisser sur le cercle défini par $r = a \cos \theta$.

***12°** Tracer les spirales d'équations :

$$r = \frac{1}{1 + e^\theta}, \quad r = \pi^2 - 2\theta^2, \quad r = e^\theta \cos \theta.$$

***13°** Construire les courbes d'équations :

$$r = \sin \theta \cos 2\theta, \quad r = \sqrt[3]{\cos 3\theta}, \quad r = \sin \frac{3\theta}{5}.$$

***14°** Construire les courbes d'équations :

$$r = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad r = \operatorname{tg} \theta, \quad r = \operatorname{tg} \theta - 1, \quad r = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta - 1}.$$

15° Construire les courbes d'équations :

$$r = \frac{9a}{5 + 4 \cos \frac{3\theta}{2}}, \quad r = \frac{9a}{4 + 5 \cos \frac{3\theta}{2}}.$$

****16°** Tracer la courbe définie par $r = a \cos \frac{\theta}{3}$. Vérifier que son inverse par rapport à son point double est une conique ayant ce point double pour foyer.

****17°** Montrer que les normales à la courbe définie en polaires paramétriquement par :

$$r = \frac{a}{\cos t} \quad \text{et} \quad \theta = \operatorname{tg} t - 1$$

sont tangentes au cercle d'équation $r = a$. Tracer cette courbe (développante de cercle).

****18°** Tracer la cochléoïde définie par $r = \frac{\sin \theta}{\theta}$. Montrer que les pieds des normales menées de l'origine sur cette courbe sont sur un cercle C et que les points de contact des tangentes parallèles à l'axe polaire sont sur un cercle C' .

R . C d'équation $r = \cos \theta$ et C' d'équation $r = 2 \cos \theta$.

****19°** Tracer les conchoïdes de droites d'équations :

$$r = \frac{a}{\cos \theta} + h.$$

****20°** Tracer les conchoïdes de cercles, appelées limaçons de Pascal, d'équations

$$r = a \cos \theta + h.$$

Pour quelles valeurs du rapport $\frac{h}{a}$ la courbe présente-t-elle des points d'inflexion ?

$$R. \quad 1 < \left| \frac{h}{a} \right| < 2.$$

****21°** Vérifier que les points d'inflexion de la courbe définie par :

$$r = \frac{1}{f(\theta)}$$

satisfont à l'équation $f(\theta) + f''(\theta) = 0$. Cas particulier d'une droite ou d'une conique.

CHAPITRE XXX

COURBES D'ÉQUATION $f(x, y) = 0$.

COURBES ALGÈBRIQUES.

INTÉGRALES ABÉLIENNES

1. — *Fonctions implicites.*

Soit une fonction $f(x, y)$ des deux variables x et y . L'ensemble des points du plan dont les coordonnées (cartésiennes) x et y satisfont à l'égalité :

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

forme en général une courbe C que nous nous proposons d'étudier (fig. 1).

Si on donne à x une valeur x_0 , trouver les valeurs de y qui sont racines de l'équation (en y) :

$$(2) \quad f(x_0, y) = 0$$

revient à chercher les points de la courbe C qui se trouvent sur la parallèle à l'axe des y d'abscisse x_0 .

Au chapitre VI nous avons appris à discuter une telle équation et au chapitre XXVII nous avons appris à déterminer ces racines avec autant de précision que l'on peut désirer.

Supposons que l'équation (2) admette m racines réelles distinctes que nous noterons $y_0(x_0), y_1(x_0), \dots, y_{m-1}(x_0)$.

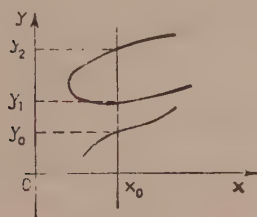


FIG. 1.

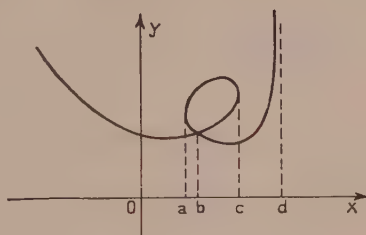


FIG. 2.

Considérons la racine y_0 , il est en général possible de « suivre par continuité » cette racine y_0 lorsque x varie, c'est-à-dire que lorsque x est un nombre très voisin de x_0 l'équation en y :

$$f(x, y) = 0$$

admet en général m racines $y_0(x), \dots, y_{m-1}(x)$ dont une et une seule, soit $y_0(x)$, a une valeur très voisine de y_0 et tend en particulier vers y_0 lorsque x tend vers x_0 . C'est ainsi que lorsque x varie dans un petit intervalle de la forme :

$$]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\quad (\varepsilon > 0),$$

les nombres $y_0(x), y_1(x), \dots, y_{m-1}(x)$ apparaissent comme des fonctions continues de x qui sont dites parfois les *branches* de la courbe C .

Si, par exemple, la courbe C a l'allure indiquée sur la figure 2, la courbe possède :

Une branche dans l'intervalle $] - \infty, a[$.

Trois branches dans chacun des deux intervalles $]a, b[$ et $]b, c[$.

Une branche dans l'intervalle $]c, d[$.

Elle n'admet pas de branche dans l'intervalle $]d, + \infty[$.

D'une façon plus précise le théorème suivant (que nous admettrons sans démonstration) donne une condition suffisante pour qu'il existe une branche $y(x)$ prenant pour x_0 la valeur y_0 :

THÉORÈME 1. — *Si la fonction $f(x, y)$ est continue et admet une dérivée partielle continue f'_y par rapport à l'ensemble des variables x et y dans un voisinage du couple de valeurs (x_0, y_0) , si $f(x_0, y_0) = 0$ et si $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, alors il existe une fonction continue $y(x)$ et une seule définie dans un voisinage suffisamment petit de x_0 telle que l'on ait pour toute valeur x de ce voisinage :*

$$f(x, y(x)) = 0$$

et de plus $y(x_0) = y_0$.

Si $f(x, y)$ admet aussi une dérivée partielle continue $f'_x(x, y)$ par rapport à x dans un voisinage du couple de valeurs (x_0, y_0) la fonction $y(x)$ admet une dérivée dans un voisinage de x_0 .

La valeur $y'(x)$ de cette dérivée se calcule immédiatement :

En effet, la fonction $f(x, y(x))$ de x admet pour dérivée $f'_x + f'_y y'(x)$ (dérivée d'une fonction composée). L'égalité $f(x, y(x)) = 0$ entraîne alors :

$$f'_x + f'_y y'(x) = 0$$

c'est-à-dire :

$$y'(x) = - \frac{f'_x}{f'_y}$$

Sous réserve que les calculs suivants aient un sens, la dérivée seconde $y''(x)$ s'obtient en dérivant par rapport à x la relation :

$$f'_x(x, y) = y' f'_y(x, y) = 0$$

et en remarquant que y et y' sont des fonctions de x , ce qui donne :

$$f''_{x^2}(x, y) + y' f''_{xy}(x, y) + y'(f''_{xy}(x, y) + y' f''_{y^2}(x, y)) + y'' f'_y(x, y) = 0.$$

En décrivant cette nouvelle égalité on obtiendrait la valeur de y''' et ainsi de suite.

Si la fonction $f(x, y)$ admet les dérivées partielles nécessaires dans un voisinage du point de coordonnées x_0 et y_0 tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, on pourra appliquer la formule de Taylor à la fonction $y(x)$ pour la valeur x_0 . En général, on utilisera de préférence le développement limité de $y(x)$ et pour le déterminer on évitera le calcul des dérivées successives en utilisant une méthode de coefficients indéterminés. En effet, en posant :

$y = y_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$
la fonction :

$$u(x) = f(x, y_0 + a_1(x - x_0) + \dots + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0))$$

pourra, par les méthodes habituelles, donner naissance à un développement limité de la forme :

$$u(x) = b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots + b_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$$

sans terme constant puisque $u(x_0) = f(x_0, y_0) = 0$.

Les coefficients $b_1, b_2, \dots, b_n$ se calculent en fonction de $a_1, a_2, \dots, a_n$. Mais puisque $u(x)$ doit rester nul, nous aurons donc les conditions :

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad \dots, \quad b_n = 0$$

qui permettent de calculer $a_1, a_2, \dots, a_n$. On vérifiera aisément que dans l'hypothèse $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ ce système d'équation permettra de calculer successivement $a_1, a_2, \dots, a_n$ en résolvant des équations du premier degré.

EXEMPLE 1. — Soient :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad x_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On écrira :

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + t^3 \varepsilon(t)$$

avec :

$$t = x - \frac{1}{2}.$$

D'où le développement limité de :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= \left(\frac{1}{2} + t\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + t^3 \varepsilon(t)\right)^2 - 1 \\ &= t(1 - a_1 \sqrt{3}) + t^2(1 + a_1^2 - a_2 \sqrt{3}) + t^3(2a_1 a_2 - a_3 \sqrt{3}) + t^3 \varepsilon(t) \end{aligned}$$

et par suite :

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}, \quad a_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{9\sqrt{3}}.$$

Tangente. — On voit que la tangente à C au point M_0 de coordonnées x_0 et y_0 a pour pente :

$$-\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)},$$

c'est-à-dire a pour paramètres directeurs les nombres :

$$f'_y(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad -f'_x(x_0, y_0).$$

Par suite, elle a pour équation :

$$\frac{x - x_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_x(x_0, y_0)}$$

ou encore :

$$(x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0) = 0$$

On remarquera que le vecteur de coordonnées $f'_x(x_0, y_0)$ et $f'_y(x_0, y_0)$ est *normal* à la courbe C au point M_0 (c'est-à-dire perpendiculaire à la tangente à C en M_0).

Point singulier. — En supposant toujours que l'on ait $f(x_0, y_0) = 0$ et que $f(x, y)$ ainsi que les dérivées partielles f'_x et f'_y soient continues dans un voisinage du point $M_0(x_0, y_0)$ que se passe-t-il si $f'_y(x_0, y_0) = 0$?

1^{er} cas. — Supposons $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$. — On peut alors permuter le rôle des variables x et y . On voit que près du point M_0 la courbe C est le graphe d'une fonction $x(y)$ de la variable y dont la dérivée s'annule pour $y = y_0$. Par suite, la courbe C a au point M_0 une tangente parallèle à Oy .

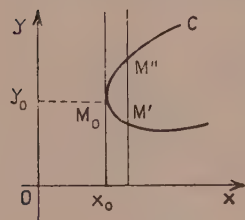


FIG. 3.

On voit sur la figure 3 que si ce point n'est pas un point d'inflexion c'est-à-dire si C ne traverse pas sa tangente au point M_0 (ce qui est le cas usuel), la conclusion du théorème 1 n'est pas vérifiée. Si petit que soit le nombre $\varepsilon > 0$ il n'y a pas de fonction continue $y(x)$ définie dans l'intervalle $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ telle que le graphe de $y(x)$ fasse partie de C et telle que $y(x_0) = y_0$. Pour $x < x_0$ une telle fonction ne serait pas définie et pour $x > x_0$ elle aurait toujours deux valeurs possibles « indiscernables » correspondant aux points M' et M'' .

2^e cas. — Supposons que l'on ait $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$. — Dans ce cas M_0 sera appelé un *point singulier* de la courbe C . Le cas de la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 0$ dont l'origine est point singulier montre que M_0 peut être un *point isolé* de C , c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de M_0 ne contenant aucun point de C autre que M_0 . Le point M_0 peut être encore un point de rebroussement ou un point multiple de la courbe C comme le montre l'exemple 2.

EXEMPLE 2. — Étudions l'allure de la courbe C d'équation :

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0 \quad (a \neq 0)$$

dans un voisinage du point O .

On a ici :

$$f(0, 0) = f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0,$$

donc l'origine est un point singulier de la courbe.

L'étude de l'équation, obtenue en coupant C par la droite $x = \lambda$:

$$y^4 + 2y^2(a^2 + \lambda^2) + \lambda^4 - 2a^2\lambda^2 = 0$$

montre que pour $|\lambda| < |a|\sqrt{2}$, nous obtenons deux valeurs réelles de y et il y a donc deux branches de courbes passant par O .

Posons alors $y = tx$, la relation $g(x, t) = 0$ s'écrit (après division par x^2) :

$$x^2(1 + t^2)^2 + 2a^2(t^2 - 1) = 0.$$

Cette relation définit une courbe Γ rapportée à deux axes Ox , Ot (fig. 4) que nous étudions près de l'axe des t .

Pour $x = 0$, on a $t = 1$ ou $t = -1$. En ces points, on a :

$$\begin{aligned} g'_x(0, 1) &= 0 & g'_t(0, 1) &= 4a^2 \\ g'_x(0, -1) &= 0 & g'_t(0, -1) &= -4a^2. \end{aligned}$$

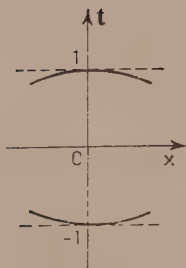


FIG. 4.

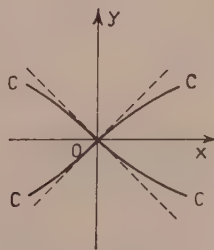


FIG. 5.

Cette courbe Γ a donc deux tangentes parallèles à Ox aux points considérés. En calculant t''_{x^2} par la formule indiquée, on trouve :

$$\text{au point } (0, 1) \quad t''_{x^2} = -\frac{2}{a^2},$$

$$\text{au point } (0, -1) \quad t''_{x^2} = +\frac{2}{a^2},$$

ce qui précise le sens de la concavité de la courbe Γ aux points considérés.

On en déduit que sur les deux arcs de Γ considérés, et par suite sur les deux arcs de C correspondants, $|t|$ tend vers 1 par valeurs inférieures lorsque x tend vers 0. D'où la conclusion : les tangentes aux arcs de la courbe (C) passant par O sont les droites de pente ± 1 et ces tangentes sont tangentes d'inflexion (fig. 5).

REMARQUE. — On peut relier ce qui se passe dans l'hypothèse :

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

à l'étude déjà faite (chap. XXI) des extrema de la fonction $z = f(x, y)$. En effet, la courbe C d'équation $f(x, y) = 0$ est l'intersection de la surface S graphe de la fonction z et du plan xOy . Si en un point M_0 de C les quantités f'_x et f'_y sont nulles, nous pouvons mentionner les circonstances suivantes :

a) z possède un extremum relatif et le point M_0 est un point isolé de la courbe (c'est le cas du point O pour $z = x^2 + y^2$). Le plan xOy est tangent en M_0 à la surface S mais ne coupe pas cette surface dans le voisinage de M_0 .

b) z n'a pas d'extremum relatif en M_0 . Le plan xOy tangent à la surface S coupe cette surface dans le voisinage de M_0 . Dans le cas le plus usuel la courbe C possède deux branches passant par M_0 (c'est le cas du point O pour la fonction : $z = x^2 - y^2$).

2. — Principes généraux de construction.

Il est souvent assez délicat de construire une courbe C dont l'équation est donnée sous la forme :

$$(3) \quad f(x, y) = 0.$$

Il ne faut donc le faire que si l'on s'est assuré qu'il n'y a pas un moyen plus simple de construire cette courbe. En particulier, il faut regarder si l'égalité (3) ne peut pas s'écrire d'une façon explicite sous la forme :

$$y = g(x) \quad \text{ou} \quad x = h(y)$$

Si ce moyen ne réussit pas il faut regarder si C ne peut pas être représentée paramétriquement sous la forme :

$$x = \varphi(t) \quad \text{et} \quad y = \psi(t).$$

On peut également regarder si la courbe C ne peut pas être représentée en coordonnées polaires par une équation de la forme $r = F(\theta)$.

Dans le cas où ces recherches n'aboutissent pas et où il faut étudier la courbe C à partir de son équation implicite, on pourra également chercher si l'équation (3) ne peut pas s'écrire sous une forme plus simple :

$$g(X, Y) = 0$$

les variables X et Y étant liées très simplement aux variables x et y , par exemple par des relations de la forme :

$$X = x^m \quad \text{et} \quad Y = y^n.$$

La connaissance, même sommaire, de la courbe d'équation $g(X, Y) = 0$ permet alors d'obtenir l'allure générale de la courbe C .

Il faut également regarder si la courbe C n'admet pas des éléments de symétrie évidents :

Par exemple si $f(x, y) = f(y, x)$ la courbe admet la première bissectrice comme axe de symétrie.

Si $f(x, y) = f(-x, -y)$, la courbe admet le point O pour centre de symétrie, etc.

Pour entreprendre l'étude directe de la courbe, on pourra commencer par la couper par des droites variables parallèles à l'un des axes de coordonnées, par exemple par les droites d'équation :

$$x = \lambda$$

ce qui revient à étudier l'existence des fonctions $y_0(x)$, $y_1(x)$, ... dont nous avons parlé au § 1.

La discussion de l'équation en y :

$$f(\lambda, y) = 0$$

indiquera en combien de points la droite coupe la courbe. En faisant varier λ on pourra donc partager le plan en bandes dans lesquelles on saura qu'il existe tel nombre d'arcs de courbes.

EXEMPLE 3. — La courbe d'équation

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)(x + y) - 2xy = 0$$

peut être représentée paramétriquement. En coupant la courbe par des droites $y = tx$ passant par l'origine. On obtient en effet :

$$(1 + t^2)(1 + t)x^3 - 2x^2t = 0$$

ce qui conduit aux équations :

$$x = \frac{2t}{(1 + t^2)(1 + t)} \quad \text{et} \quad y = tx = \frac{2t^2}{(1 + t^2)(1 + t)}$$

On peut également obtenir une représentation simple en coordonnées polaires. En portant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ dans l'équation $f(x, y) = 0$ il vient

$$r^3 (\cos \theta + \sin \theta) - 2r^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

D'où

$$r = \frac{\sin 2\theta}{\cos \theta + \sin \theta}$$

Nous avons construit cette courbe au chapitre XXVIII, exemple 4.

EXEMPLE 4. — Soit la courbe C d'équation :

$$4y^5 - 5xy^4 - x^3 + 2x^2 = 0.$$

Nous coupons la courbe C par la droite d'équation $x = \lambda$ et nous sommes conduits à discuter l'équation :

$$P(y) = 4y^5 - 5\lambda y^4 - \lambda^3 + 2\lambda^2 = 0.$$

Or :

$$P'(y) = 20y^4 - 20\lambda y^3$$

s'annule pour $y = 0$ et $y = \lambda$.

Les extrema de la fonction $P(y)$ ont donc pour valeur :

$$P(0) = 2\lambda^2 - \lambda^3 = \lambda^2(2 - \lambda)$$

et :

$$P(\lambda) = -\lambda^5 - \lambda^3 + 2\lambda^2 = \lambda^2(1 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda + 2)$$

ce qui met en évidence les valeurs remarquables de λ :

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = 2$$

Nous aurons suivant les diverses valeurs de λ les tableaux des variations et les résultats suivants :

$\lambda < 0$	y	$-\infty$	λ	0	$+\infty$			
	P'		$+$	0	$-$	0	$+$	
	P	$-\infty$	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	$+$	$\nearrow$	$+\infty$

$P(y)$ s'annule pour une seule valeur de y inférieure à λ .

$0 < \lambda < 1$	y	$-\infty$	0	λ	$+\infty$			
	P'		$+$	0	$-$	0	$+$	
	P	$-\infty$	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	$+$	$\nearrow$	$+\infty$

$P(y)$ s'annule pour une seule valeur de y inférieure à 0 .

$1 < \lambda < 2$	y	$-\infty$	0	λ	$+\infty$			
	P'		$+$	0	$-$	0	$+$	
	P	$-\infty$	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	$+\infty$

$P(y)$ s'annule pour trois valeurs de y , une inférieure à 0, la deuxième comprise entre 0 et λ , la troisième supérieure à λ .

$\lambda > 2$	y	$-\infty$	0	λ	$+\infty$
	P'		$+$	0	$-$
	P	$-\infty$	$\nearrow$	$-$	$\searrow$
				$-$	$\nearrow$
					$+\infty$

$P(y)$ s'annule pour une seule valeur de y supérieure à λ .

On remarquera de plus que dans les cas limites on a :

pour : $\lambda = 0$ $y = 0$ (racine quintuple)
 $\lambda = 1$ $y = 1$ (racine double) et une racine négative y_0
 $\lambda = 2$ $y = 0$ (racine quadruple) et $y = \frac{5}{2}$

ce qui donne un premier aperçu sur l'allure de la courbe (fig. 6).

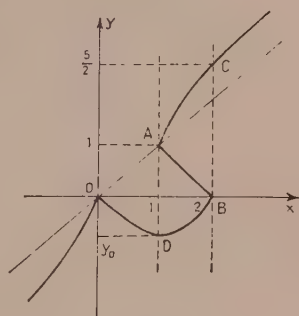


FIG. 6.

La méthode des régions. — La méthode des régions est fondée sur la remarque très simple suivante. Supposons tracée la courbe Γ d'équation :

$$f(x, y) = 0$$

la fonction $f(x, y)$ étant continue par rapport à l'ensemble des variables x et y .

Cette courbe partage le plan en régions. Soient A et B deux points situés dans la même région, c'est-à-dire que l'on peut joindre par une courbe continue L ne coupant pas la courbe Γ .

Lorsqu'un point M décrit l'arc AB (fig. 7), il reste toujours dans la même région. Si nous considérons la valeur de la fonction $f(x_M, y_M)$, x_M et y_M étant les

coordonnées du point M , cette quantité ne s'annule pas, donc $f(x_A, y_A)$ et $f(x_B, y_B)$ sont de même signe.

La courbe d'équation $f(x, y) = 0$ partage donc le plan en régions telles que dans chacune d'entre elles $f(x, y)$ garde un signe constant. En général, ce signe change lorsqu'on passe d'une région à une région adjacente.

Lorsqu'on veut tracer un arc de courbe assez important avec quelque précision, on pourra utiliser avec profit la méthode des régions. Supposons que nous voulions quelques repères pour tracer l'arc BAC de la courbe d'équation :

$$f(x, y) = 4y^5 - 5xy^4 - x^3 + 2x^2 = 0.$$

On constate aisément (fig. 8) que dans la région comprise entre le segment BC et l'arc BAC , la quantité $f(x, y)$ est négative. Quadrillons cette bande par les droites d'équations :

$x = 1,1$	$x = 1,2$	$x = 1,3$	...	$x = 1,9$
$y = 0,1$	$y = 0,2$			$y = 2,4$

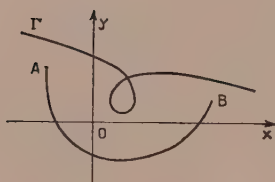


FIG. 7.

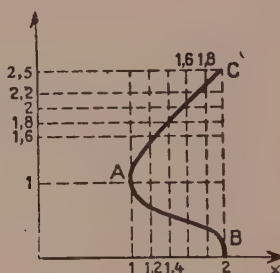


FIG. 8.

et considérons une valeur de y , par exemple $y = 2$:

$$f(x, 2) = 128 - 80x - x^3 + 2x^2.$$

Donnons maintenant à x les valeurs successives de $\frac{1}{10}$ en $\frac{1}{10}$, nous constatons que $f(1,6; 2)$ est positif et $f(1,7; 2)$ est négatif.

La courbe coupe donc la droite $y = 2$ entre les points d'abscisse 1,6 et 1,7.

En disposant systématiquement les calculs on arrive assez vite à encadrer suffisamment la courbe pour pouvoir la tracer avec quelque précision.

3. — Courbes algébriques.

On appelle *courbe algébrique* toute courbe C qui admet une équation implicite de la forme :

$$f(x, y) = 0$$

$f(x, y)$ étant un polynôme par rapport à l'ensemble des variables x et y .

Le degré du polynôme f est appelé le *degré de la courbe algébrique* C . C'est ainsi que la droite $Ax + By + C = 0$ est une courbe du premier degré, que le cercle d'équation $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ est une courbe du second degré et que la courbe $x^2y + y^2 - R^2 = 0$ est une courbe du troisième degré.

Ici apparaît une difficulté. Si la courbe C a une équation implicite de la forme :

$$(4) \quad f(x, y) = 0$$

elle a également pour équation implicite :

$$(5) \quad (f(x, y))^2 = 0.$$

Mais si $f(x, y)$ est un polynôme de degré n , la fonction $g(x, y) = (f(x, y))^2$ est un polynôme de degré $2n$. Faut-il considérer que C a le degré n ou le degré $2n$? On se tire de cette difficulté en convenant que si C est définie par l'équation (4), l'équation (5) représente la courbe C *comptée deux fois*. Ceci se généralise aisément : p étant un entier ≥ 1 , on considère que l'équation :

$$(f(x, y))^p = 0$$

est l'équation de la courbe C comptée p fois.

Nous avons vu au chapitre V que si l'on introduit de nouveaux axes de coordonnées $O'x'$ et $O'y'$ (pas nécessairement rectangulaires), les nouvelles et les anciennes coordonnées du point M sont liées par des relations de la forme :

$$\begin{cases} x = d_1 + a_1 x' + b_1 y' \\ y = d_2 + a_2 x' + b_2 y' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = d'_1 + a'_1 x + b'_1 y \\ y' = d'_2 + a'_2 x + b'_2 y. \end{cases}$$

Si une courbe C du plan a pour équation implicite :

$$f(x, y) = 0$$

lorsqu'on la rapporte aux anciens axes, elle a pour équation implicite :

$$g(x', y') = 0$$

avec :

$$g(x', y') = f(d_1 + a_1 x' + b_1 y', d_2 + a_2 x' + b_2 y')$$

lorsqu'on la rapporte aux nouveaux axes.

Si $f(x, y) = 0$ est un polynôme du $n^{\text{ième}}$ degré en x et y , la fonction $g(x', y')$ est un polynôme en x' et y' de degré m au plus égal à n . De la même manière on a $n \leq m$ et par suite $m = n$.

Le fait qu'une courbe est algébrique de degré n est indépendant des axes de coordonnées choisis.

Une courbe qui n'est pas algébrique est dite *transcendante*. Tels sont les graphes des fonctions $y = \sin x$ et $y = e^x$.

Courbes unicursales. — Une courbe est dite *unicursale* si elle a une représentation paramétrique de la forme :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

où f et g sont des fonctions rationnelles du paramètre t . Les formules de changement de coordonnées montrent immédiatement que le fait pour une courbe d'être unicursale ne dépend pas des axes de coordonnées choisis. On démontre que toutes les courbes unicursales sont algébriques, mais qu'il existe par contre des courbes algébriques qui ne sont pas unicursales.

Les droites, c'est-à-dire les courbes du premier degré, sont unicursales (chap. XXIII, § 5).

Intersection d'une droite et d'une courbe algébrique. — Soit C une courbe algébrique de degré n d'équation implicite :

$$f(x, y) = 0$$

$f(x, y)$ étant un polynôme de degré n par rapport à l'ensemble des variables x et y , et soit D une droite que nous pourrions toujours supposer représentée paramétriquement sous la forme :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases}$$

Cherchons à déterminer les points d'intersection de la droite D et de la courbe C . Pour qu'un point M appartenant à la droite D appartienne aussi à la courbe C , il faut et il suffit que le paramètre t du point M satisfasse à l'égalité :

$$(6) \quad f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) = 0.$$

Le premier membre de l'égalité précédente est un polynôme en t qui est soit nul, soit d'un degré inférieur ou égal à n .

S'il est nul, l'égalité (6) est vérifiée pour toute valeur de t et la droite D fait partie de la courbe C . S'il n'est pas nul, l'égalité (5) peut être considérée comme une équation algébrique en t dont le degré est inférieur ou égal à n . Les points d'intersection de C et de la droite D correspondent aux racines réelles de cette équation. Par suite :

Une droite ne faisant pas partie d'une courbe algébrique de degré n la coupe en n points tout au plus.

4. — Courbes du second degré (coniques).

Élémentairement, on a étudié plusieurs types de courbes du second degré : les ellipses (avec le cas particulier du cercle), les hyperboles, les paraboles et les systèmes de deux droites (distinctes ou confondues). Nous allons montrer dans ce paragraphe que l'on obtient ainsi toutes les courbes du second degré.

Une courbe Γ du second degré a une équation de la forme :

$$(7) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

les nombres A , B et C n'étant pas simultanément nuls.

Nous allons d'abord étudier le cas particulier où $B = 0$.

a) Si A et C ne sont pas nuls, l'équation (7) peut s'écrire sous la forme :

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F.$$

Soit O' le point d'abscisse $-\frac{D}{A}$ et d'ordonnée $-\frac{E}{C}$ et soient $O'X$ et $O'Y$ les axes parallèles à Ox et Oy et de même sens menés par O' . Rapportons le plan à ces nouveaux axes de coordonnées.

Les nouvelles coordonnées X et Y d'un point M du plan sont liées aux anciennes par les relations :

$$X = x + \frac{D}{A} \quad \text{et} \quad Y = y + \frac{E}{C}.$$

Rapportée à ces axes, la courbe Γ a donc une équation de la forme :

$$(8) \quad AX^2 + CY^2 = K.$$

Si $K = 0$ on obtient $Y^2 + \frac{C}{A}X^2 = 0$.

Lorsque $\frac{C}{A} > 0$, la courbe Γ se réduit donc au seul point $X = Y = 0$.

Lorsque $\frac{C}{A} < 0$, soit $\frac{C}{A} = -m^2$, on a $Y^2 - m^2X^2 = (Y - mX)(Y + mX)$ et la courbe Γ se « décompose » en deux droites $Y = mX$ et $Y = -mX$.

Si $K \neq 0$, l'équation (8) s'écrit :

$$\frac{X^2}{\frac{K}{A}} + \frac{Y^2}{\frac{K}{C}} - 1 = 0.$$

Suivant les signes de $\frac{K}{A}$ et de $\frac{K}{C}$ elle représente une ellipse ou une hyperbole axée sur $O'X$ et $O'Y$ ou encore ne représente rien si $\frac{K}{A}$ et $\frac{K}{C}$ sont négatifs.

b) Supposons maintenant que l'un des deux nombres A ou C soit nul, A par exemple. C est alors non nul puisque A , B et C ne sont pas simultanément nuls (le cas de $C = 0$ et $A \neq 0$ se traiterait de manière analogue en renversant le rôle des coordonnées x et y).

L'équation (7) s'écrit alors :

$$\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 + \frac{2D}{C}x + \frac{F}{C} - \frac{E^2}{C^2} = 0.$$

Si $D = 0$, c'est une équation de la forme :

$$\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 + K = 0.$$

Elle ne représente rien si $K > 0$. Si $K \leq 0$ elle s'écrit

$$\left(y + \frac{E}{C} + \sqrt{-K}\right)\left(y + \frac{E}{C} - \sqrt{-K}\right) = 0$$

et se décompose en deux droites parallèles à l'axe des x (confondues si $K = 0$). Si $D \neq 0$ l'équation (6) s'écrit :

$$\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 + \frac{2D}{C}\left(x + \frac{F}{2D} - \frac{E^2}{2CD}\right) = 0.$$

Rapportée aux axes $O'X$ et $O'Y$ parallèles à Ox et Oy , de même sens et dont l'origine O' a pour abscisse $\frac{E^2}{2CD} - \frac{F}{2D}$ et pour ordonnée $-\frac{E}{C}$, on voit que Γ a pour équation :

$$Y^2 + \frac{2D}{C}X = 0.$$

C'est donc une parabole axée sur $O'X$.

Donc dans tous les cas où $B = 0$, la courbe du deuxième degré Γ a l'une des formes annoncées.

Supposons maintenant $B \neq 0$.

On va montrer que l'on peut se ramener au cas précédent en faisant une rotation des axes de coordonnées, c'est-à-dire en prenant de nouveaux axes (rectangulaires) OX et OY définis par l'angle :

$$(\vec{Ox}, \vec{OX}) = \alpha.$$

Nous allons montrer que l'on peut choisir α de telle façon que l'équation de Γ par rapport aux axes OX et OY ne contienne pas de terme en XY . On a les formules de passage :

$$\begin{cases} x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha \\ y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha \end{cases}$$

La nouvelle équation de Γ est obtenue en remplaçant dans l'équation (7) x et y par leurs valeurs en fonction de X et de Y . Ce sera donc :

$$A(X \cos \alpha - Y \sin \alpha)^2 + 2B(X \cos \alpha - Y \sin \alpha)(X \sin \alpha + Y \cos \alpha) + C(X \sin \alpha + Y \cos \alpha)^2 + \dots = 0$$

(les termes non écrits étant ceux de degré 1 ou 0).

Le coefficient de XY est :

$$-2A \cos \alpha \sin \alpha + 2B (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2C \sin \alpha \cos \alpha = (C - A) \sin 2\alpha + 2B \cos 2\alpha.$$

Ce coefficient s'annulera donc si on choisit α tel que :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}$$

(avec évidemment $\alpha = \frac{\pi}{4}$ si $A = C$).

Par rapport à ces nouveaux axes on est donc ramené au cas précédent, ce qui achève de montrer ce que nous avons annoncé.

Unicursalité des coniques. — *Les courbes du second degré non décomposées en deux droites sont unicursales.*

En effet rapportée à des axes convenables $O'X$ et $O'Y$, une telle courbe a l'une des formes canoniques :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{dans le cas d'une ellipse}$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{dans le cas d'une hyperbole}$$

$$Y^2 - 2pX = 0 \quad \text{dans le cas d'une parabole.}$$

L'ellipse admettant la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} X = a \cos \theta \\ Y = b \sin \theta \end{cases}$$

on peut poser $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = t$. On en déduit la représentation unicursale :

$$\begin{cases} X = a \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ Y = b \frac{2t}{1 + t^2} \end{cases}$$

Dans le cas de l'hyperbole on a les représentations des deux branches :

$$\begin{cases} X = a \operatorname{ch} \varphi \\ Y = b \operatorname{sh} \varphi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} X = -a \operatorname{ch} \varphi \\ Y = -b \operatorname{sh} \varphi \end{cases}$$

En posant $t = e^\varphi$, on voit que la première branche est représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} X = \frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) = \frac{a}{2} \frac{t^2 + 1}{t} \\ Y = \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) = \frac{b}{2} \frac{t^2 - 1}{t} \end{cases} \quad \text{avec} \quad t > 0$$

et, en posant $t = -e^\varphi$ on voit que la deuxième branche est représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} X = -\frac{a}{2} \left(-t - \frac{1}{t} \right) = \frac{a}{2} \frac{t^2 + 1}{t} \\ Y = -\frac{b}{2} \left(-t + \frac{b}{t} \right) = \frac{b}{2} \frac{t^2 - 1}{t} \end{cases} \quad \text{avec} \quad t < 0.$$

Par suite l'hyperbole est représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} X = \frac{a}{2} \frac{t^2 + 1}{t} \\ Y = \frac{b}{2} \frac{t^2 - 1}{t} \end{cases}$$

le point M décrivant toute l'hyperbole lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$ en évitant la valeur 0.

Quant à la parabole, elle admet la représentation unicursale évidente :

$$\begin{cases} X = \frac{t^2}{2p} \\ Y = t. \end{cases}$$

Dans la pratique, lorsque l'équation d'une conique non décomposée Γ ne se met pas presque immédiatement sous la forme canonique, on peut obtenir une représentation unicursale très simplement de la façon suivante : on choisit un point fixe P de Γ et on coupe Γ par une droite variable passant par P et de coefficient angulaire (variable) t . Cette droite coupe Γ en P et en un autre point M dont les coordonnées sont données par des équations du premier degré. Ces coordonnées s'expriment donc rationnellement en fonction du paramètre t , ce qui fournit la représentation unicursale cherchée. Supposons, par exemple, que l'origine O des coordonnées se trouve sur la conique ⁽¹⁾, c'est-à-dire que celle-ci soit une équation de la forme :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = 0.$$

Coupons la conique par la droite $y = tx$. L'équation aux abscisses des points d'intersection s'écrit :

$$(A + 2Bt + Ct^2)x^2 + 2(D + Et)x = 0.$$

⁽¹⁾ Une simple translation des axes de la forme $x = X + x_0$ et $y = Y + y_0$, le point de coordonnées x_0 et y_0 appartenant à Γ , permet toujours de se ramener à ce cas.

En écartant la racine $x = 0$ qui correspond au point O , on voit que M a pour abscisse :

$$x = -\frac{2(D + Et)}{A + 2Bt + Ct^2}$$

et pour ordonnée :

$$y = tx = -\frac{2(Dt + Et^2)}{A + 2Bt + Ct^2}$$

ce qui donne bien une représentation unicursale de Γ .

On voit ici qu'il importe de considérer la valeur $t = \infty$ du paramètre qui donne le point d'intersection, autre que O , de Γ avec l'axe Oy .

5. — *Intégrales abéliennes.*

On appelle *intégrale abélienne* toute intégrale de la forme :

$$\int R(x, y(x)) dx$$

où $R(x, y)$ est une fraction rationnelle en x et y (c'est-à-dire le quotient de deux polynômes en x et y) et où $y(x)$ est une branche d'une fonction de x définie implicitement par une relation de la forme :

$$f(x, y) = 0$$

$f(x, y)$ étant un polynôme en x et y .

L'intégrale abélienne est alors dite *attachée à l'équation* $f(x, y) = 0$ ou encore à la courbe plane C définie implicitement par cette équation. Lorsque la courbe C est unicursale on peut calculer une telle intégrale abélienne de la façon suivante :

Soit :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

une représentation paramétrique de la courbe C telle que $x(t)$ et $y(t)$ soient des fonctions rationnelles de la variable t . En prenant cette nouvelle variable comme variable d'intégration, on a :

$$\int f(x, y(x)) dx = \int f(x(t), y(t)) \left(\frac{dx}{dt} \right) dt$$

et comme $f(x(t), y(t))$ et $\frac{dx}{dt}$ sont des fractions rationnelles en t on est ramené à intégrer une fraction rationnelle.

EXEMPLE 5. — Toute courbe du second degré étant unicursale, on saura intégrer les intégrales abéliennes attachées aux équations $f(x, y) = 0$ lorsque $f(x, y)$ est un polynôme en x et y du second degré.

C'est ainsi que l'on saura intégrer une intégrale de la forme :

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

car elle est attachée à la courbe unicursale :

$$ax^2 - y^2 + bx + c = 0.$$

EXEMPLE 6. — Il en sera également ainsi lorsque y sera une fonction de la forme :

$$y = \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^r$$

r étant un nombre rationnel. En effet, nous pouvons poser $r = \frac{p}{q}$ où p est un entier, et q un entier strictement positif. La relation entre x et y s'écrit alors :

$$(cx + d)^p y^q - (ax + b)^p = 0$$

et la courbe (algébrique) définie implicitement par cette équation est encore définie paramétriquement par les égalités :

$$\begin{cases} x = \frac{b - dt^q}{ct^q - a} \\ y = t^p \end{cases}$$

(la première égalité s'écrit en effet $\frac{ax + b}{cx + d} = t^q$).

EXEMPLE 7. — Soit à calculer l'intégrale $\int xy^2 dx$ où y est défini en fonction de x par la relation :

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

La courbe C définie implicitement par cette dernière équation est une courbe du troisième degré (cubique) admettant l'origine O comme point double. Nous pouvons obtenir une représentation unicursale d'une telle courbe en la coupant par une droite D (de coefficient angulaire t) passant par O . Cette droite coupe la courbe C en trois points dont deux sont confondus en O . Les coordonnées du troisième point seront données par des équations linéaires et seront donc des fonctions rationnelles de t .

En fait la droite D a pour équation $y = tx$. Elle coupe donc C en des points dont les abscisses sont les racines de l'équation en x :

$$x^3 + t^3 x^3 - 3tx^2 = 0.$$

Cette dernière équation admet la racine double 0 (qui correspond au point O) et la racine simple $x = \frac{3t}{1+t^3}$. D'où la représentation paramétrique de la courbe C :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{array} \right.$$

Comme $\frac{dx}{dt} = \frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}$, on a :

$$\begin{aligned} \int xy^2 dx &= \int \frac{3t}{1+t^3} \cdot \frac{9t^4}{(1+t^3)^2} \cdot \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} dt = \int \frac{81(1-2t^3)t^5 dt}{(1+t^3)^5} \\ &= \int \frac{27(1-2t^3)t^3}{(1+t^3)^5} 3t^2 dt \end{aligned}$$

la dernière forme de l'intégrale suggère de prendre comme variable d'intégration t^3 ou mieux $1+t^3$. Posons donc :

$$1+t^3 = u \quad 3t^2 dt = du,$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int xy^2 dx &= \int \frac{27(3-2u)(u-1)}{u^5} du = \int \left(-\frac{81}{u^5} + \frac{135}{u^4} - \frac{54}{u^3} \right) du \\ &= \frac{81}{4u^4} - \frac{45}{u^3} + \frac{27}{u^2} = \frac{81-180u+108u^2}{4u^4} = \frac{9}{4u^4} (9-20u+12u^2). \end{aligned}$$

On peut remplacer u en fonction de x et de y sans introduire de radicaux. On a :

$$u = 1+t^3 = \frac{3t}{x} = \frac{3y}{x^2}$$

et par suite :

$$\int xy^2 dx = \frac{x^4}{12y^4} (3x^4 - 20x^2y + 36y^2).$$

Remarquons que, pour certaines valeurs de x , l'équation :

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

définit trois fonctions y de la variable x . Il est bien évident qu'il faudra prendre la même fonction sous le signe somme et dans la primitive ainsi calculée.

6. — Remarques sur le paragraphe précédent.

Le procédé général que nous avons indiqué pour calculer les intégrales abéliennes attachées aux courbes unicursales conduit parfois à des calculs assez

longs et peut, dans certains cas, être remplacé avantageusement par d'autres comme le montrent les exemples suivants.

EXEMPLE 8. — Soit à calculer l'intégrale $\int x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ qui est une intégrale abélienne attachée à une courbe unicursale comme le montre l'exemple 6. Comme le radical n'a un sens (dans le domaine réel) que si x est compris entre -1 et $+1$, on peut poser $x = \sin \varphi$ avec $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. On a donc :

$$dx = \cos \varphi d\varphi = \sqrt{1-x^2} d\varphi$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \int x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sqrt{1-x^2} d\varphi = \int x(1-x) d\varphi \\ &= \int \sin \varphi (1 - \sin \varphi) d\varphi = \int \left[\sin \varphi - \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right] d\varphi = -\cos \varphi - \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}. \end{aligned}$$

Or :

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi = 2x\sqrt{1-x^2} \quad \text{et} \quad \cos \varphi = \sqrt{1-x^2}.$$

D'où :

$$\int x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = -\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \text{Arc sin } x.$$

EXEMPLE 9. — Soit à calculer l'intégrale abélienne $I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ (x variant dans un intervalle tel que $ax^2 + bx + c \geq 0$).

1^{er} cas. $a > 0$. — On peut écrire :

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}}}.$$

Si $4ac - b^2 > 0$, on est ramené à calculer une intégrale de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-p)^2 + q^2}}$, qui, par le changement de variable $u = \frac{x-p}{q}$, se ramène à une intégrale de la forme $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}}$ dont une primitive est égale à

$$\text{Log} (u + \sqrt{u^2 + 1}).$$

Si $4ac - b^2 < 0$, on est ramené à une intégrale de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-p)^2 - q^2}}$ qui, par le changement de variable $u = \frac{x-p}{p}$, se ramène à une intégrale de la forme $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}$, dont une primitive est égale à $\text{Log} |u + \sqrt{u^2 - 1}|$.

Enfin, si $4ac - b^2 = 0$, l'intégrale prend la forme :

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\left| x + \frac{b}{2a} \right|} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}} \text{Log} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

ε étant égal à ± 1 suivant le signe de $x + \frac{b}{2a}$.

2^e cas. $a < 0$. — On peut écrire :

$$I = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}}.$$

On a nécessairement ici $b^2 - 4ac > 0$, sinon la quantité sous le radical serait toujours négative ou nulle et la fonction à intégrer ne serait jamais réelle.

On est donc ramené à calculer une intégrale de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{q^2 - (x-p)^2}}$ qui, par le changement de variable $u = \frac{x-p}{p}$ se ramène à une intégrale de la forme $\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$ dont une primitive est $\text{Arc sin } u$.

3^e cas. $a = 0$. — Alors $I = \int \frac{dx}{\sqrt{bx + c}}$ se ramène par le changement de variable $u = bx + c$ à l'intégrale $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{u}}{2}$.

EXEMPLE 10. — *Intégration de différentielles binômes.* — Proposons-nous de calculer l'intégrale

$$\int x^a (Ax^b + B)^c dx$$

où A et B sont deux constantes réelles et a, b, c des nombres rationnels.

Faisons le changement de variable $Ax^b = Bt$ d'où

$$x = \left(\frac{B}{A} t \right)^{1/b} \quad \text{et} \quad dx = \frac{B}{bA} \left(\frac{B}{A} t \right)^{1/b-1} dt.$$

A un coefficient près l'intégrale prend la forme :

$$\int t^{\alpha}(1+t)^{\beta} dt$$

α et β désignant deux nombres rationnels.

On peut calculer cette intégrale dans les trois cas suivants où la courbe $y = x^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ est unicursale.

1° α entier.

Posons $\beta = \frac{m}{n}$, m et n étant entiers faisons le changement de variable $1+t = u^n$. Nous sommes ramenés à l'intégration d'une fraction rationnelle en u .

2° β entier.

Le changement de variable $1+t = \theta$ ramène à l'intégrale

$$\int \theta^{\beta}(\theta-1)^{\alpha} d\theta$$

qui se traite comme dans le cas précédent.

3° $\alpha + \beta$ entier.

Posons $\beta = \frac{m}{n}$, m et n étant entiers, l'intégrale peut s'écrire sous la forme

$$\int t^{\alpha+\beta} \left(\frac{1+t}{t} \right)^{\beta} dt.$$

Il suffit de poser $\frac{1+t}{t} = u^n$ pour être amené à intégrer une fraction rationnelle de u .

EXERCICES

1° L'équation $y + x^2 + y^2 + x^3 + y^3 = 0$ définit une fonction $y_0(x)$ telle que :

$$y_0(0) = 0.$$

Former le développement limité de y jusqu'au 7^e ordre.

$$R. \quad y = -x^2 - x^3 - x^4 - 2x^5 - 2x^6 - 3x^7 + x^7 \varepsilon(x).$$

2° Montrer que si y est négatif, l'équation :

$$z - ye^z - x = 0$$

définit une fonction $z(x, y)$ vérifiant la relation :

$$(zz'_x)'_y = (ze^z z'_x)'_x.$$

***3°** Montrer que la courbe d'équation :

$$x^2y^2 - x^2y - 2xy - x + 1 = 0$$

est unicursale, en prenant $xy = t$ comme paramètre. Construire la courbe.

***4°** Construire la courbe d'équation :

$$x(x^2 - a^2) = y(y^2 - a^2).$$

R. Droite et ellipse.

***5°** Construire, en utilisant les coordonnées polaires, la courbe d'équation :

$$(x^2 + y^2)^2 - ax(x^2 + 3y^2) = 0.$$

***6°** Tracer et placer l'une par rapport à l'autre, les deux courbes (H) d'équation $x^2 - 3y^2 + 1 = 0$ et (K) d'équation $xy + y^2\sqrt{3} + 1 = 0$. En déduire que si un point $M(x, y)$ décrit la courbe (H), la quantité $xy + y^2\sqrt{3} + 1$ reste positive.

****7°** Équation de la courbe d'équation $x^3y^3 + 2(y - x) = 0$ lorsqu'on choisit comme nouveaux axes de coordonnées les bissectrices de l'angle xOy . Construire la courbe.

R. $(X^2 - Y^2)^3 + 16\sqrt{2}Y = 0$, résoluble par rapport à X .

8° Vérifier que les deux cercles d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 - 9x - 14y + 63 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$$

sont tangents. Coordonnées du point de contact ?

R. $x = 6, \quad y = 9.$

9° Les quatre droites d'équations :

$$\begin{array}{ll} x = 0 & y = 0 \\ x - y - 1 = 0 & x + 2y - 4 = 0 \end{array}$$

associées trois à trois déterminent quatre triangles. Vérifier que les cercles circonscrits à ces quatre triangles ont un point commun de coordonnées $(1, -1)$.

10° Deux rayons rectangulaires OM et OM' de l'ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vérifient la relation :

$$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OM'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

11° Une normale en un point M d'une hyperbole coupe les axes de l'hyperbole en P et Q . On appelle P' et Q' les projections de ces points sur une asymptote de l'hyperbole. Vérifier que MP' et MQ' sont parallèles aux axes de l'hyperbole.

12° Équation de la conique qui admet Ox et Oy pour axes de symétrie, qui passe par le point $M(\alpha, \beta)$ et dont la tangente en ce point M a pour pente m .

R. $\beta mx^2 - \alpha y^2 = \alpha\beta(\alpha m - \beta).$

13° Calculer, à 0,001 près, les points d'intersection de l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{11} = 1$$

et du cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - x - 14 = 0.$$

$$R. \quad x = 3,922, \quad y = \pm 1,594 \quad \text{et} \quad x = -1,700, \quad y = \pm 3,068.$$

***14°** On considère la fonction de deux variables :

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 2x + k}{x^2 + y^2 + 2x + k}$$

où k désigne une constante donnée. Montrer que la fonction ne possède d'extremum que si k est positif. Interpréter géométriquement en traçant dans le plan les courbes définies par l'équation $f(x, y) = \text{constante}$.

***15°** Équation réduite des coniques d'équation :

$$3x^2 - 5xy + x + y = 0 \quad x^2 + 4xy + 4y^2 + x - 2y = 0.$$

$$R. \quad 25(\sqrt{34} - 3)x'^2 - 25(\sqrt{34} + 3)y'^2 - 16 = 0 \quad 5y'^2\sqrt{5} - 4x' = 0.$$

***16°** Équation implicite, puis équation réduite, de la conique définie par :

$$x = \frac{2t}{1 - t^2} \quad y = \frac{2t + 1}{1 - t^2}.$$

$$R. \quad (7 + \sqrt{65})x'^2 - (\sqrt{65} - 7)y'^2 = 2.$$

***17°** Les deux ellipses d'équation :

$$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 1 = 0$$

et :

$$x^2 - 2xy + 5y^2 - 1 = 0$$

sont égales.

***18°** Soient $A(1, 1)$ et $B(-1, 1)$ deux points fixes, P et Q deux points variables sur l'axe Ox et tels que $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = 1$. Lieu du point d'intersection des droites PA et QB .

$$R. \quad 2x^2 - (2y - 1)^2 = 1.$$

***19°** Intersections de la parabole d'équation $y^2 = 2x$ et du cercle d'équation :

$$(x - 3)^2 + y^2 = 5.$$

Soit M un point quelconque de la parabole, T le point de contact d'une tangente menée de M au cercle et F le foyer de la parabole. Vérifier la relation :

$$MT = \left| MF - \frac{5}{2} \right|.$$

***20°** Étant donné l'ellipse d'équation $x^2 + 3y^2 = 4$ et le point $M(0, 1)$, déterminer l'angle aigu que fait avec Ox la corde de l'ellipse passant par M et ayant la longueur maximum :

$$R. \quad 34^\circ 20'.$$

***21°** Soit $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ l'équation d'une ellipse de centre O . On choisit deux points P et Q de cette conique de sorte que la tangente au point P soit parallèle au rayon OQ . Montrer que la tangente au point Q est parallèle au rayon OP . On choisit des axes de coordonnées obliques ayant comme base les vecteurs $\vec{i}' = \vec{OP}$ et $\vec{j}' = \vec{OQ}$. Vérifier que dans ce système d'axes, l'équation de l'ellipse est

$$x'^2 + y'^2 = 1.$$

***22°** Soient A, B, C trois points de l'hyperbole équilatère d'équation $xy = 1$. Montrer que l'orthocentre du triangle ABC est également sur l'hyperbole.

***23°** Le point M décrivant le cercle d'équation $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, on appelle P et Q ses projections orthogonales sur Ox et Oy . Vérifier que les centres des cercles tangents aux trois droites MP, MQ et PQ sont respectivement sur l'une des quatre droites d'équations :

$$x \pm y \pm R = 0.$$

***24°** Sur le cercle défini par $x = R \cos \theta, y = R \sin \theta$, on marque les quatre points A, B, C, I correspondant aux valeurs $\alpha, \beta, \gamma, 0$ du paramètre θ . Montrer que les projections orthogonales du point I sur les droites AB, BC, CA sont trois points sur une même droite dont on donnera l'équation.

$$R. \quad (x - R) \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - y \cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 2R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

***25°** Établir les résultats, en calculant d'abord les intégrales indéfinies :

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos^5 x \sin^3 x}} = \frac{16}{9} \sqrt[4]{3}$$

$$\int_0^1 x \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx = \frac{2 - \sqrt{2} + 3 \operatorname{Log}(1 + \sqrt{2})}{6}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \sin^2 x dx}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}$$

***26°** Calculer les intégrales :

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x - 1} dx, \quad \int \frac{2 + \sqrt{x + 1}}{1 + \sqrt{x + 2}} dx \quad \text{et} \quad \int \sqrt{x^{5/2} + x} dx$$

$$R. \quad \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \operatorname{Log} |2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1}| - \operatorname{Log} \left| \frac{x + 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1}}{x - 1} \right|$$

$$(\sqrt{x + 2} - 2)(\sqrt{x + 1} + 4) + \operatorname{Log}(\sqrt{x + 2} + \sqrt{x + 1}) - 4 \operatorname{Log}(1 + \sqrt{x + 2})$$

et

$$\frac{4}{9} (x^{3/2} + 1)^{3/2}$$

COURBES DÉFINIES GÉOMÉTRIQUEMENT. ENVELOPPES

1. — Équations de courbes définies géométriquement.

L'ensemble C des points d'un plan qui possèdent une certaine propriété géométrique P peut être étudié en cherchant les conditions que doivent vérifier les coordonnées (x, y) d'un tel point.

Si, par exemple, la propriété P se traduit par une relation $f(x, y) = 0$ l'ensemble C sera l'ensemble des points de la courbe d'équation implicite

$$f(x, y) = 0.$$

Mais bien souvent pour traduire la propriété P on est conduit à introduire un paramètre t . Si la propriété P se traduit par les deux relations :

$$(1) \quad g(x, y, t) = 0 \quad \text{et} \quad h(x, y, t) = 0,$$

il sera avantageux, si cela est possible, de considérer ces deux égalités comme deux équations en x et y , d'où on tire une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$$

D'autres fois, il sera plus commode de considérer les deux égalités (1) comme des équations en t et d'éliminer t entre ces deux équations, c'est-à-dire d'exprimer la relation $f(x, y) = 0$ qui doit lier x et y pour que ces deux équations admettent une même racine t . L'égalité :

$$f(x, y) = 0$$

sera alors l'équation implicite de C .

Enfin, dans certains cas on peut être conduit à utiliser plus d'un paramètre.

La traduction en équations de la condition imposée au point M sera d'autant plus facile que l'on utilisera plus de paramètres, mais les calculs ultérieurs seront d'autant plus compliqués. En général, il n'y a pas d'intérêt à prendre plus d'un ou deux paramètres.

Indiquons encore que l'étude géométrique du problème permet souvent de faciliter les calculs, ne serait-ce qu'en guidant le choix des axes de coordonnées

les plus appropriés à la question et en donnant des indications sur le choix des paramètres.

EXEMPLE 1. — A et B étant deux points du plan, cherchons l'ensemble C des points M du plan tels que

$$(2) \quad MA \cdot MB = \frac{AB^2}{4}.$$

Choisissons pour origine le centre O de AB , pour axe Ox la droite AB dirigée de B vers A , l'axe Oy étant alors la médiatrice du segment AB . En posant $OA = a$, on voit que la relation (2) se traduit immédiatement par l'égalité :

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = a^2$$

et comme les quantités sous les radicaux sont toujours positives, cette égalité équivaut à :

$$[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2] = a^4$$

qui peut encore s'écrire :

$$(3) \quad (x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0,$$

on obtient une courbe du quatrième degré dite *lemniscate de Bernoulli*.

On pourrait construire C à partir de son équation implicite. On aurait pour cela avantage à poser $x^2 = X$, $y^2 = Y$ et à se servir de la portion de la parabole :

$$(X + Y)^2 + 2a^2(Y - X) = 0$$

située dans le premier cadran ($X \geq 0$ et $Y \geq 0$).

Il vaut mieux cependant définir C en coordonnées polaires. En posant $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ l'équation (3) s'écrit :

$$r^4 + 2a^2r^2(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = 0$$

soit, en divisant par r^2

$$r = \pm a\sqrt{2 \cos 2\theta}.$$

Le morceau de courbe correspondant à $r = -a\sqrt{2 \cos 2\theta}$ est symétrique par rapport au point O du morceau $r = a\sqrt{2 \cos 2\theta}$. Mais la courbe d'équation $r = a\sqrt{2 \cos 2\theta}$ admet visiblement le point O pour centre de symétrie (changement de θ en $\theta + \pi$). La lemniscate est donc complètement représentée par l'équation :

$$r = a\sqrt{2 \cos 2\theta}.$$

On voit donc qu'il suffit pour obtenir toute la courbe de faire varier θ dans un intervalle de longueur π et de compléter par une symétrie de centre O . Comme $r(-\theta) = r(\theta)$, la courbe est symétrique par rapport à Ox . Il suffit

donc de construire l'arc de courbe correspondant à $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et de compléter par les symétries indiquées.

r n'étant pas défini pour $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$, on a le tableau

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
r	$a\sqrt{2}$	$\searrow$	0

D'où l'allure de la courbe indiquée sur la figure 1.

EXEMPLE 2. — Étant donné deux points A et B , on considère les cercles tangents en A à la droite AB ; on demande d'étudier l'ensemble C des points d'intersection de ces cercles avec leur diamètre passant par B .

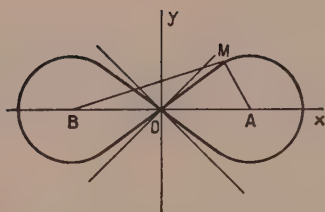


FIG. 1.

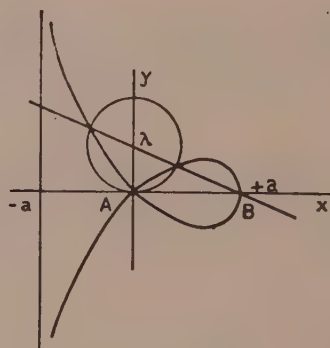


FIG. 2.

La droite AB est axe de symétrie de C . Nous la choisirons donc comme axe de coordonnées. Nous prendrons comme origine des coordonnées un des deux points A ou B , par exemple le point A (fig. 2). La seule donnée sera la distance $AB = a$.

Prenons comme paramètre l'ordonnée t du centre d'un des cercles tangents en A à Ax , l'équation du cercle est :

$$x^2 + (y - t)^2 = t^2$$

ou :

$$x^2 + y^2 - 2ty = 0.$$

On voit que l'équation du diamètre passant par B est :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{t} - 1 = 0.$$

Les coordonnées d'un point de C satisfont donc aux deux équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ty = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{t} - 1 = 0. \end{cases}$$

L'élimination de t entre ces deux équations est très facile. En effet, on tire de la deuxième équation :

$$t = \frac{ay}{a - x}$$

et l'équation de C est

$$x^2 + y^2 - \frac{2ay^2}{a - x} = 0$$

ou :

$$x(x^2 + y^2) + a(y^2 - x^2) = 0.$$

C'est une courbe du troisième degré (cubique) admettant Ox comme axe de symétrie que l'on construit sans difficulté en remarquant que son équation peut s'écrire :

$$y^2 = \frac{x^2(a - x)}{a + x}.$$

On constate que x doit être compris entre $-a$ et $+a$. Il y a une asymptote d'équation $x = -a$.

Le point A est un point double de la courbe à tangentes rectangulaires ($\frac{x^2}{y^2}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0). Le point B est un sommet de cette courbe appelée *strophoïde droite* (voir exemple 4, chap. XXIX).

EXEMPLE 3. — On appelle *cycloïde* la trajectoire d'un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite fixe : c'est par exemple la trajectoire de la valve d'une roue de bicyclette qui roule en ligne droite.

Si nous considérons la base D sur laquelle roule le cercle (fig. 3), le centre C du cercle décrit une droite parallèle à D située à une distance de D égale au rayon R du cercle. Un point M du cercle est à un instant donné sur la droite D

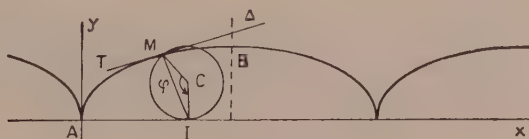


FIG. 3.

en A . Quand le cercle aura accompli une révolution complète, le point M sera de nouveau sur la droite D en un point A' tel que $AA' = 2\pi R$. Entre ces deux positions A et A' le point M va décrire une arche de cycloïde : la cycloïde sera donc composée d'une infinité d'arches toutes égales entre elles et déduites l'une de l'autre par des translations parallèles à D de longueurs $2n\pi R$ ($n \in \mathbf{Z}$).

Pour déterminer cette courbe prenons comme axes de coordonnées Ax confondu avec la droite D et la perpendiculaire Ay à D menée par A . Nous prendrons comme paramètre l'angle du rayon CM avec une direction fixe, par exemple l'angle $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CI}) = \varphi$, I étant le point de contact du cercle avec la base Ax .

Le roulement sans glissement se traduit par l'égalité :

$$\overline{AI} = \widehat{MI} = R\varphi.$$

En projetant l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CM}$$

nous aurons les coordonnées du point M . Pour cela remarquons l'égalité :

$$(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{CM}) = (\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{CI}) + (\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CM}) = -\frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{CM}$ sont donc :

$$R \cos \left(-\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = -R \sin \varphi$$

et :

$$R \sin \left(-\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = -R \cos \varphi.$$

Nous en déduisons les coordonnées du point M :

$$\begin{aligned} x &= R\varphi - R \sin \varphi = R(\varphi - \sin \varphi) \\ y &= R - R \cos \varphi = R(1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

On constate bien sur ces formules que lorsque φ augmente de 2π , y ne change pas et x augmente de $2\pi R$. Mais nous constatons de plus qu'en changeant φ en $2\pi - \varphi$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} x(2\pi - \varphi) &= 2\pi R - x(\varphi) \\ y(2\pi - \varphi) &= y(\varphi) \end{aligned}$$

ce qui traduit une symétrie de la cycloïde par rapport à la droite d'équation $x = \pi R$, symétrie qu'on aurait pu mettre en évidence géométriquement.

Pour construire la demi-arche de la cycloïde nous calculons :

$$\begin{aligned} x' &= R(1 - \cos \varphi) \\ y' &= R \sin \varphi. \end{aligned}$$

D'où le tableau :

φ	0	π
x	0 ↗ πR	
y	0 ↗ $2R$	

Au point B obtenu pour $\varphi = \pi$ la tangente est parallèle à Ax .

Au point A correspondant à $\varphi = 0$ on a $x'(0) = y'(0) = 0$. Comme $x''(0) = 0$ et $y''(0) = R$, on voit que O est un point de rebroussement de première espèce de la cycloïde ayant pour tangente l'axe Ay .

La tangente en un point M quelconque a pour équation :

$$x \cos \frac{\varphi}{2} - y \sin \frac{\varphi}{2} = R \left(\varphi \cos \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right).$$

On constate que cette tangente passe par le point T de coordonnées $R\varphi$ et $2R$. Il en résulte que la normale à la cycloïde est la droite MI joignant le point M au point de contact du cercle avec la base.

2. — Enveloppe d'une famille de courbes définies paramétriquement.

λ étant un paramètre variable, attachons à chaque valeur de λ une courbe C_λ . On appelle *enveloppe* de la famille des courbes C_λ une courbe E remplissant les conditions suivantes :

1° Chaque courbe C_λ est tangente à la courbe E .

2° Pour tout point M de E il existe une valeur λ_0 du paramètre λ telle que E soit tangente au point M à la courbe C_{λ_0} .

EXEMPLE 4. — Les cercles de rayon constant R centrés sur une droite D forment une famille du type précédent (λ étant par exemple l'abscisse du centre d'un tel cercle sur la droite D prise pour axe). L'enveloppe E est constituée par les deux droites D' et D'' parallèles à D et à la distance R de D .

Nous nous proposons dans ce qui suit de déterminer E connaissant la famille des courbes C_λ .

Supposons d'abord les courbes C_λ définies paramétriquement par des équations de la forme :

$$\begin{cases} x = \varphi(t, \lambda) \\ y = \psi(t, \lambda) \end{cases}$$

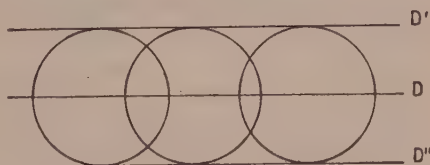


FIG. 4.

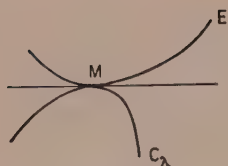


FIG. 5.

(lorsque λ reste fixe les nombres x et y sont fonction du seul paramètre t et le point M de coordonnées x et y parcourt C_λ lorsque t varie).

Soit M un des points de contact de la courbe C_λ avec son enveloppe (fig. 5). L'idée importante qui permet de résoudre le problème consiste à remarquer que le paramètre t fixant le point M sur la courbe C_λ est une fonction de λ , fonction inconnue $t = t(\lambda)$ dont la connaissance déterminera la courbe E au moyen du paramètre λ par les égalités :

$$\begin{cases} x = \varphi(t(\lambda), \lambda) \\ y = \psi(t(\lambda), \lambda). \end{cases}$$

Pour déterminer $t(\lambda)$, écrivons que les deux courbes E et C_λ sont tangentes au point M . Le vecteur tangent à la courbe C_λ a pour composantes :

$$\varphi'_t(t, \lambda) \quad \psi'_t(t, \lambda)$$

et le vecteur tangent à la courbe E a pour composantes :

$$t'_\lambda \varphi'_t(t, \lambda) + \varphi'_\lambda(t, \lambda) \quad t'_\lambda \psi'_t(t, \lambda) + \psi'_\lambda(t, \lambda).$$

En écrivant que ces deux vecteurs sont colinéaires nous obtenons la condition :

$$\frac{t'_\lambda \varphi'_t + \varphi'_\lambda}{\varphi'_t} = \frac{t'_\lambda \psi'_t + \psi'_\lambda}{\psi'_t}$$

ou :

$$(4) \quad \frac{\varphi'_\lambda}{\varphi'_t} = \frac{\psi'_\lambda}{\psi'_t}.$$

Cette relation (4) permettra en principe de déterminer la fonction $t(\lambda)$, et nous aurons ainsi une représentation paramétrique de la courbe E . D'une façon plus générale nous pourrions dire que les coordonnées d'un point E et les deux paramètres t, λ satisfont au système de trois équations :

$$x - \varphi(t, \lambda) = 0 \quad y - \psi(t, \lambda) = 0 \quad \varphi'_\lambda \psi'_t - \varphi'_t \psi'_\lambda = 0.$$

Une remarque s'impose : considérons les courbes Γ_t définies par :

$$x = \varphi(t, \lambda) \quad y = \psi(t, \lambda)$$

λ étant le paramètre de description d'une courbe Γ_t , et t étant le paramètre faisant varier ces courbes. Si nous cherchons l'enveloppe des courbes Γ_t , nous trouvons la même relation (4), donc l'enveloppe des courbes Γ_t est la même que celle des courbes C_λ .

EXEMPLE 5. — Soit à trouver l'enveloppe des ellipses ayant pour axes de symétrie Ox et Oy et dont la somme des longueurs des axes est constante et égale à $4k$.

Ces ellipses ont pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

avec :

$$a + b = 2k.$$

Pour opérer symétriquement, nous poserons :

$$a = k + \lambda \quad b = k - \lambda$$

λ étant un paramètre faisant varier l'ellipse, d'où :

$$x = (k + \lambda) \cos t \quad y = (k - \lambda) \sin t.$$

La relation (4) s'écrit ici :

$$\frac{\cos t}{-(k + \lambda) \sin t} = \frac{-\sin t}{(k - \lambda) \cos t}$$

ou :

$$\lambda = k (\cos^2 t - \sin^2 t).$$

Il est plus facile ici d'éliminer λ que d'éliminer t , ce qui nous conduit à la représentation paramétrique de l'enveloppe :

$$\begin{aligned} x &= k(1 + \cos^2 t - \sin^2 t) \cos t \\ y &= k(1 - \cos^2 t + \sin^2 t) \sin t \end{aligned}$$

ou :

$$x = 2k \cos^3 t \quad y = 2k \sin^3 t.$$

L'enveloppe est une courbe dite *astroïde* qui a l'allure indiquée sur la figure 6.

Remarquons encore que si l'on considère les courbes Γ_t définies par :

$$x = (k + \lambda) \cos t \quad y = (k - \lambda) \sin t$$

ce sont les droites d'équation :

$$\frac{x}{\cos t} + \frac{y}{\sin t} = 2k.$$

En désignant par P et Q les points d'intersection d'une telle droite avec les axes Ox et Oy , on voit qu'elles sont caractérisées par le fait que le segment PQ a une longueur constante $2k$ et nous obtenons la propriété suivante :

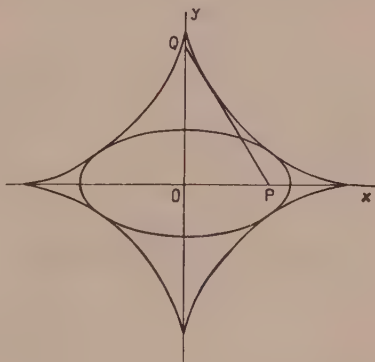


FIG. 6.

L'astroïde est également l'enveloppe d'un segment de longueur constante $2k$ dont les extrémités décrivent les deux axes rectangulaires Ox et Oy .

3. — Enveloppe d'une famille de courbes définies implicitement.

Supposons que les courbes C_λ dont on cherche l'enveloppe soient définies par leur équation implicite :

$$f(x, y, \lambda) = 0.$$

Pour rechercher l'enveloppe nous allons nous ramener au cas précédent en supposant qu'il est possible de choisir une représentation paramétrique de ces courbes, c'est-à-dire de déterminer x et y en fonction de λ et d'un paramètre t par des égalités de la forme :

$$\begin{cases} x = x(t, \lambda) \\ y = y(t, \lambda). \end{cases}$$

On aura donc pour toutes les valeurs de t et de λ :

$$f(x(t, \lambda), y(t, \lambda), \lambda) = 0$$

et par suite, en dérivant par rapport à t et par rapport à λ l'égalité précédente :

$$(5) \quad f'_x x'_t + f'_y y'_t = 0$$

$$(6) \quad f'_x x'_\lambda + f'_y y'_\lambda + f'_\lambda = 0.$$

L'égalité (4) qui s'écrit ici :

$$\frac{x'_\lambda}{x'_t} = \frac{y'_\lambda}{y'_t}$$

s'écrit encore :

$$\frac{x'_t}{y'_t} = \frac{x'_\lambda}{y'_\lambda}$$

ou, compte tenu de l'égalité (5) :

$$\frac{x'_\lambda}{y'_\lambda} = - \frac{f'_y}{f'_x}$$

c'est-à-dire :

$$f'_x x'_\lambda + f'_y y'_\lambda = 0$$

égalité qui, d'après l'égalité (6), est équivalente à :

$$(7) \quad f'_\lambda = 0.$$

L'enveloppe E sera donc déterminée par les deux équations :

$$(8) \quad \begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 \\ f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0. \end{cases}$$

EXEMPLE 6. — *Enveloppe d'une famille de droites.* — Soit à trouver l'enveloppe de la famille de droites d'équation :

$$f(x, y, \varphi) = \frac{x \cos \varphi}{a} + \frac{y \sin \varphi}{b} - 1 = 0.$$

On a :

$$f'_\varphi = -\frac{x \sin \varphi}{a} + \frac{y \cos \varphi}{b}.$$

Des deux égalités $f(x, y, \varphi) = 0$ et $f'_\varphi(x, y, \varphi) = 0$, on tire :

$$\cos \varphi = \frac{\frac{x}{a}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{\frac{y}{b}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

d'où, en exprimant l'égalité $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2.$$

En divisant par $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, on voit que l'enveloppe est l'ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

L'égalité (7) permet de trouver une nouvelle interprétation géométrique de l'enveloppe. Les points d'intersection des deux courbes C_λ et $C_{\lambda+h}$ ont leurs coordonnées x et y qui sont racines du système d'équations :

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 \\ f(x, y, \lambda + h) = 0. \end{cases}$$

Sous cette forme le système tend vers un système indéterminé lorsque h tend vers 0, mais il équivaut à :

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{f(x, y, \lambda + h) - f(x, y, \lambda)}{h} = 0. \end{cases}$$

Si on fait tendre h vers 0 le système précédent « tend » vers le système (8) c'est-à-dire que

Les points de contact d'une courbe C_λ avec l'enveloppe E sont les limites des points d'intersection de la courbe C_λ avec la courbe $C_{\lambda+h}$ lorsque h tend vers 0.

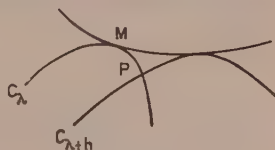


FIG. 7.

Cette remarque permet parfois de déterminer géométriquement l'enveloppe d'une famille de courbes sans faire de calcul.

EXEMPLE 7. — *Enveloppe d'une famille de cercles.* — Cherchons l'enveloppe de la famille des cercles de rayon constant R dont les centres sont situés sur une courbe Γ .

Soient C_λ et $C_{\lambda+h}$ deux de ces cercles ayant pour centres les points I_λ et $I_{\lambda+h}$. Ces cercles se coupent aux points P et P' intersection de C_λ avec la médiatrice du segment $I_\lambda I_{\lambda+h}$. Lorsque h tend vers 0, le point $I_{\lambda+h}$ tend vers I_λ , la droite $I_\lambda I_{\lambda+h}$ tend vers la tangente en I_λ à la courbe Γ et les points P et P' tendent vers les intersections M et M' de C_λ avec la perpendiculaire en I_λ à cette tangente, c'est-à-dire la normale en I_λ à Γ .

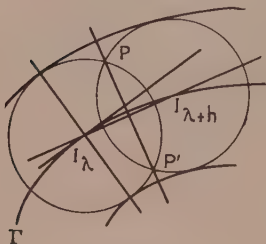


FIG. 8.

Finalement, l'enveloppe est le lieu des points obtenus en portant sur chaque normale à Γ et de part et d'autre de Γ des longueurs égales à R . Cette enveloppe est appelée une *courbe parallèle* à la courbe Γ .

REMARQUES. — 1° Le système (8) peut encore recevoir une autre interprétation : soit M un point quelconque du plan de coordonnées x et y . Pour qu'une courbe C passe par M , il faut et il suffit que λ soit racine de l'équation :

$$f(x, y, \lambda) = 0.$$

Cette équation en λ permet donc de déterminer les courbes de la famille qui passent par M . Appelons ces courbes « courbes-solutions ». Dire que l'on a :

$$f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

signifie que l'équation précédente admet une racine double (et par suite que deux courbes-solutions sont confondues). On voit à partir de là que si d'un côté de l'enveloppe il y a m courbes C_λ passant par un point, de l'autre côté de l'enveloppe il y en aura en général $m - 2$ ou $m + 2$.

Cette remarque permet d'obtenir avec rapidité certaines enveloppes. C'est ainsi que si la fonction $f(x, y, \lambda)$ est du deuxième degré en λ , c'est-à-dire de la forme :

$$f(x, y, \lambda) = \lambda^2 A(x, y) + 2\lambda B(x, y) + C(x, y)$$

l'enveloppe des courbes C_λ est la courbe d'équation implicite :

$$(B(x, y))^2 - A(x, y) C(x, y) = 0.$$

2° Les calculs précédents permettent d'associer à la famille de courbes C_λ une certaine courbe E' . D'après ce qui précède, la courbe E' contient l'enve-

loppe E , mais certains morceaux de la courbe E' peuvent cependant ne pas appartenir à l'enveloppe E .

Ainsi supposons que chaque courbe C_λ admette un *point stationnaire* tel que :

$$\varphi'_i = \psi'_i = 0$$

si les courbes sont définies paramétriquement (ou un point singulier tel que :

$$f'_x = f'_y = 0$$

si les courbes sont définies implicitement).

En ces points l'égalité (4) (ou l'égalité (7) en vertu de (6)) va toujours être réalisée et par suite l'ensemble des points stationnaires (ou des points singuliers) des courbes C_λ appartient à E' .

De même, il est possible que pour une certaine valeur α de λ les fonctions $\varphi'_\lambda(t, \lambda)$ et $\psi'_\lambda(t, \lambda)$ de la variable t soient identiquement nulles (ou encore que la dérivée $f'_\lambda(x, y, \alpha)$ soit identiquement nulle). La courbe C_α correspondante (dite *courbe stationnaire* de la famille considérée) fait alors partie de la courbe E' .

Soit par exemple Γ le graphe de la fonction $y = g(x)$ et soit C_λ la tangente à Γ au point d'abscisse λ . La droite C_λ a pour équation :

$$(9) \quad f(x, y, \lambda) = g'(\lambda)(x - \lambda) - y + g(\lambda) = 0.$$

On a donc :

$$(10) \quad f'_\lambda(x, y, \lambda) = g''(\lambda)(x - \lambda)$$

et par suite si le point d'abscisse α est un point d'inflexion de Γ , c'est-à-dire si $g''(\alpha) = 0$, on a identiquement $f'_\lambda(x, y, \alpha) = 0$, ce qui montre que la courbe E' dont l'équation est obtenue en éliminant λ entre les deux égalités (9) et (10) contient non seulement l'enveloppe de la famille C_λ , c'est-à-dire la courbe Γ , mais encore les tangentes inflexionnelles à cette courbe.

3° On remarquera, enfin, que le système (8) ne permet pas nécessairement de définir une courbe E' . C'est en particulier le cas si f est une fonction linéaire de λ , c'est-à-dire est de la forme :

$$f_1(x, y) + \lambda f_2(x, y) = 0.$$

Dans ce cas l'équation (7) s'écrit :

$$f_2(x, y) = 0$$

et le système (8) est équivalent à :

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0. \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas

Les courbes C_λ passent par les points fixes intersections des courbes d'équations $f_1(x, y) = 0$ et $f_2(x, y) = 0$.

Ces points fixes sont alors les seuls points du plan dont les coordonnées vérifient le système (8) et les courbes C_λ n'admettent pas d'enveloppe.

4. — Développées.

On nomme *développée* d'une courbe C l'enveloppe des normales à cette courbe. Dans le cas particulier où C est un cercle les normales passent par un point fixe qui est le centre du cercle. Dans le cas général désignons par I le point de contact de la normale à C en M avec la développée Γ de C (fig. 9). Au voisinage de M les normales semblent tourner autour du point I . Le cercle de centre I est de rayon $R = IM$ est dit le *cercle de courbure* (ou *cercle osculateur*) de la courbe C au point M . On montre que de tous les cercles passant par M le cercle de courbure est celui qui donne la meilleure approximation de la courbe au voisinage de M . Le centre I et le rayon R sont dits encore le *centre de courbure* et le *rayon de courbure* de la courbe C au point M .

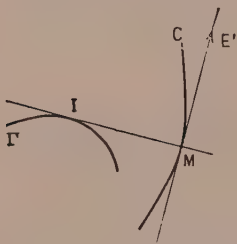


FIG. 9.

EXEMPLE 8. — Cherchons la développée de l'ellipse définie paramétriquement par les égalités :

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} x' = -a \sin \varphi \\ y' = b \cos \varphi \end{cases}$$

D'où l'équation de la normale

$$(x - a \cos \varphi)(-a \sin \varphi) + (y - b \sin \varphi)b \cos \varphi = 0$$

soit

$$f(x, y, \varphi) = -ax \sin \varphi + by \cos \varphi + (a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

on a

$$f'_\varphi(x, y, \varphi) = -ax \cos \varphi - by \sin \varphi + (a^2 - b^2)(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0$$

En résolvant ces deux équations en x et y on obtient les coordonnées du centre de courbure, d'où les équations paramétriques de la développée :

$$\begin{cases} x = \frac{c^2}{a} \cos^3 \varphi \\ y = -\frac{c^2}{b} \sin^3 \varphi \end{cases}$$

Elle peut se déduire par une affinité $\left(x = X, y = -\frac{a}{b} Y\right)$ de l'astroïde :

$$\begin{cases} X = \frac{c^2}{a} \cos^3 \varphi \\ Y = \frac{c^2}{a} \sin^3 \varphi \end{cases}$$

et a une forme qui la rappelle.

Le centre de courbure J au sommet A du grand axe de l'ellipse (obtenu pour $\varphi = 0$) est le point de Ox d'abscisse $\frac{c^2}{a}$ et le centre de courbure K au sommet du petit axe (obtenu pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$) est le point de Oy d'ordonnée $-\frac{c^2}{b}$. En considérant

le rectangle $PQRS$ circonscrit à l'ellipse, il est facile de voir que les points J et K sont les intersections avec les axes Ox et Oy de la perpendiculaire abaissée du sommet P sur la diagonale SQ du rectangle.

En effet, P a pour coordonnées a et b , le vecteur $\overrightarrow{OS}$ a pour coordonnées $-a$ et b et la perpendiculaire abaissée de P sur SQ a donc pour équation :

$$-a(X - a) + b(Y - b) = 0.$$

Elle coupe bien Ox au point d'abscisse $a - \frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{a}$ et Oy au point d'abscisse $b - \frac{a^2}{b} = -\frac{c^2}{b}$.

Les cercles de courbure en A et B à l'ellipse sont très proches de l'ellipse dans des régions assez étendues autour de ces sommets. On pourra constater graphiquement que l'on obtient un excellent tracé de l'ellipse à partir de ses quatre cercles de courbure aux quatre sommets (tracé d'une ellipse en quatre coups de compas).

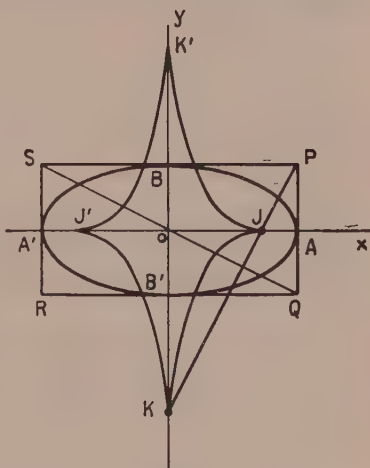


FIG. 10.

EXERCICES

1° Soit M l'image du nombre complexe z . Déterminer l'ensemble des points M tels que la quantité $\frac{z^2}{z+i}$ soit réelle.

R. Strophoïde.

2° On considère les deux droites fixes d'équations $y = mx$ et $y = -mx$ et les trois points fixes $A(a, 0)$, $B(b, c)$, $B'(b, -c)$. Une droite Δ variable passant par A coupe les droites fixes en M et M' . On joint MB et $M'B'$ qui se coupent en P . Étudier la courbe décrite par P .

R. Conique.

3° Courbe décrite par l'orthocentre du triangle AMB , A et B étant fixes et M décrivant une droite parallèle à la droite AB .

R. Parabole.

***4°** On donne une direction D fixe et un cercle fixe C . Par tout point M de C on mène la droite D_M parallèle à D et la droite Δ_M symétrique de D_M par rapport à la tangente en M à la courbe C . Déterminer et construire l'enveloppe de Δ_M (caustique d'un miroir sphérique pour des rayons parallèles).

R. Épicycloïde à deux rebroussements.

***5°** On considère la parabole P d'équation $y^2 - 2x + 1 = 0$. Une droite variable passant par l'origine coupe P en M et M' . Déterminer et construire l'enveloppe de la médiatrice de MM' .

R. Arcs de la courbe d'équation $27y^2 = 4(x - 1)^3$ avec $x \geq 4$.

****6°** Déterminer et construire la développée de $y^2 = x^3$.

***7°** L'enveloppe de la droite d'équation $x \cos \varphi + y \sin \varphi = a \sin 2\varphi$ est une astroïde. En déduire que la développée de l'astroïde est également une astroïde.

R. La développée se déduit de l'astroïde donnée par une similitude ayant pour centre l'origine des coordonnées, pour rapport 2 et pour angle $\frac{\pi}{4}$.

***8°** Le triangle ABC étant équilatéral, l'ensemble des points M tels que :

$$MA \pm MB \pm MC = 0$$

est le cercle circonscrit au triangle.

***9°** Montrer que les centres des cercles coupant l'axe Oy sous un angle de 45° et orthogonaux au cercle d'équation $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ sont les points de l'hyperbole équilatère d'équation $x^2 - y^2 + R^2 = 0$.

***10°** Le cercle d'équation $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0$ touche l'axe Ox en A et l'axe Oy en B . La tangente en un point M variable de ce cercle coupe Ox en P et Oy en Q . Vérifier que les trois droites OM , AQ et BP sont concourantes en un point I . Courbe décrite par I ?

R. $2x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 4y + 2 = 0$.

11° Soient deux points fixes $A(0, p, q)$ et $B(0, -p, r)$. Enveloppe d'une droite variable D du plan xOy sachant que les deux plans DA et DB sont perpendiculaires.

R. Ellipse si $qr < 0$ et hyperbole si $0 < qr < p^2$.

12° On remplace la parabole d'équation $y^2 = 2px$ par son cercle osculateur au sommet. Erreur relative commise sur l'abscisse du point d'ordonnée $\frac{p}{2}$.

R. $\frac{1}{16}$ environ.

13° Soit M un point de la chaînette d'équation $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ($a > 0$), I le centre de courbure en M , P le point d'intersection de la normale en M avec Ox . Vérifier que M est le milieu de IP .

14° Construire la courbe définie par $x = te^{-t^2}$, $y = e^{-t^2}$. Rayon de courbure à l'origine.

R. Ce rayon est nul.

***15°** La développée de la spirale logarithmique (définie en coordonnées polaires par $\rho = e^{m\theta}$) est une spirale semblable.

***16°** On considère en un point M d'une ellipse la tangente MT et le cercle osculateur qui recoupe l'ellipse en P . Vérifier que les bissectrices de l'angle $\widehat{TMP}$ sont parallèles aux axes de l'ellipse.

***17°** L'équation $y^3 + y - x^3 + x = 0$ définit une courbe passant par le point $A(1, 0)$. Calculer son rayon de courbure en A .

R. $\frac{5\sqrt{5}}{6}$.

***18°** Rayon de courbure minimum de la courbe d'équation $y = e^x$.

R. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

***19°** Construire la courbe C d'équation $y^3 = x^4$. Représentation paramétrique unicursale. Développée de C . Construire cette développée. En déduire que le rayon de courbure de la courbe C à l'origine est nul.

****20°** Enveloppe de la droite d'équation :

$$x \cos \theta + y \sin \theta - \frac{a}{\cos \theta} = 0.$$

Rayon de courbure en un point de l'enveloppe.

R. Parabole. Rayon de courbure $= \frac{2a}{|\cos^3 \theta|}$.

***21°** Calculer le rayon de courbure à l'origine de la courbe définie (en axes ortho-normés) par l'équation :

$$y^p = x^q \quad (p, q \text{ entiers positifs}).$$

R. $p < q < 2p$, $R = 0$; $q = 2p$, $R = \frac{1}{2}$; $q > 2p$, $R = \infty$.

INTÉGRALES MULTIPLES

1. — Intégrales doubles.

Un plan étant rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy , soit une région D de ce plan dont on puisse définir l'aire ⁽¹⁾ et qui soit bordée par une courbe close C . Nous conviendrons que la région D est « fermée » en ce sens que $C \in D$. Soit en outre une fonction $f(x, y)$ définie en tout point de D . Nous considérerons d'autre part la fonction $\Phi(x, y)$ égale à $f(x, y)$ en tout point de D et à 0 en tout point n'appartenant pas à D .

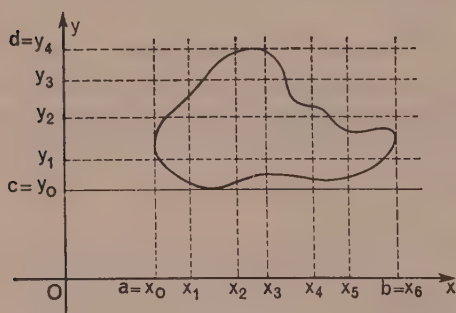


FIG. 1.

Désignons par a et b les bornes inférieure et supérieure des abscisses des points de C et par c et d les bornes inférieure et supérieure des ordonnées des points de C . Partageons l'intervalle (a, b) par les valeurs :

$$x_0 = a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m = b$$

et l'intervalle (c, d) par les valeurs :

$$y_0 = c \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n = d$$

et quadrillons le plan xOy grâce aux droites d'abscisses $x_0, x_1, \dots, x_m$ et aux droites d'ordonnées $y_0, y_1, \dots, y_n$. Désignons par E_{ij} le rectangle fermé $(x_{i-1}, x_j) \times (y_{i-1}, y_j)$ bordé par les droites d'équations $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = y_{j-1}$ et $y = y_j$. On remarque que tout point de la région D appartient à l'un au moins des rectangles E_{ij} .

Ceci posé, associons à tout rectangle E_{ij} un point M_{ij} de coordonnées ξ_{ij} et η_{ij} contenu dans ce rectangle. Désignons par S_{ij} l'aire $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ du rectangle E_{ij} et considérons la somme :

$$(1) \quad \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} \Phi(\xi_{ij}, \eta_{ij}) S_{ij} = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} \Phi(\xi_{ij}, \eta_{ij}) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}).$$

(1) Une région dont on peut définir l'aire est dite *quarrable* ou *mesurable*.

S'il existe un nombre I tel que cette somme tende vers I lorsque les deux nombres $\sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$ et $\sup_{1 \leq j \leq n} |y_j - y_{j-1}|$ tendent vers 0 (indépendamment de la façon dont on fait les partages et dont on choisit les points M_{ij}), on dit que la fonction $f(x, y)$ est *intégrable* sur la région D et on pose :

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

ou :

$$I = \iint_D f(x, y) dS$$

ou encore :

$$I = \iint_D dx dy f(x, y)$$

On peut démontrer que si la fonction $f(x, y)$ est continue sur D par rapport à l'ensemble des variables x et y l'intégrale I existe toujours.

EXEMPLES. — 1) Si $f(x, y)$ est positive ou nulle en tout point de D , des considérations semblables à celles que l'on a faites pour rattacher l'intégrale définie à la notion d'aire montrent que l'intégrale double considérée est égale au volume de la portion de cylindre de base D comprise dans le plan xOy et la surface graphe de la fonction $f(x, y)$.

Dans le cas où la fonction $f(x, y)$ n'est pas nécessairement positive ou nulle en tout point de D , l'intégrale double représente le *volume algébrique* de cette portion de cylindre, les portions de volume situées au-dessous du plan xOy étant comptées négativement.

2) Si D est une plaque pesante de densité superficielle $f(x, y)$, la quantité $\Phi(\xi_{ij}, \eta_{ij})S_{ij}$ est équivalente à la masse du rectangle E_{ij} lorsque le périmètre de celui-ci est suffisamment petit (et lorsque E_{ij} est contenu entièrement dans D). On voit donc à partir de là que l'intégrale double représente la masse de la plaque D .

En particulier, lorsque la fonction f est la constante 1, l'intégrale double est égale à l'aire de la surface D .

3) Supposons que D soit le rectangle $(a, b) \times (c, d)$ et que la fonction $f(x, y)$ soit égale au produit d'une fonction $g(x)$ de x par une fonction $h(y)$ de y . Choisissons alors les points M_{ij} sur des mêmes parallèles aux axes Ox et Oy de telle sorte que l'on ait toujours :

$$\xi_{ij} = \xi_{ik} (= \xi_i)$$

et

$$\eta_{ij} = \eta_{kj} (= \eta_j)$$

La somme (1) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\left[\sum_{1 \leq i \leq m} g(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) \right] \times \left[\sum_{1 \leq j \leq n} h(\eta_j) (y_j - y_{j-1}) \right]$$

qui tend vers le produit :

$$\left(\int_a^b g(x) dx \right) \times \left(\int_c^d h(y) dy \right).$$

L'intégrale double est donc égale dans ce cas au produit de deux intégrales ordinaires (ou *intégrales simples*).

De leur définition on déduit quelques propriétés immédiates des intégrales doubles.

On voit que cette intégration est linéaire par rapport à la fonction à intégrer $f(x, y)$, c'est-à-dire que si l'on a :

$$f(x, y) = \lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 f_2(x, y)$$

(λ_1 et λ_2 étant deux constantes), on a :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lambda_1 \iint_D f_1(x, y) dx dy + \lambda_2 \iint_D f_2(x, y) dx dy$$

Si $f(x, y) \geq 0$ en tout point de D on a :

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$$

car les sommes (1) n'étant pas négatives ne peuvent avoir une limite négative.

Il en résulte que $f(x, y) \geq g(x, y)$ implique :

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy$$

on en déduit (par une démonstration analogue à celle indiquée pour les intégrales simples) :

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy$$

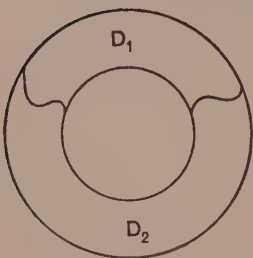


FIG. 2.

On remarque ensuite que si D est la réunion de deux régions D_1 et D_2 sans surface commune (D_1 et D_2 étant par exemple les deux portions d'un anneau circulaire comme sur la figure 2), on a :

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy \\ &+ \iint_{D_2} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

2. — Calcul d'une intégrale double.

Comme dans le dernier exemple traité au § 1, nous allons montrer que le calcul d'une intégrale double :

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

se ramène à des calculs d'intégrales simples.

Commençons par considérer le cas où la région D (fig. 3) est telle qu'une parallèle à Oy dont l'abscisse appartient à (a, b) coupe toujours le contour suivant un segment dont les ordonnées des extrémités Y_0 et Y_1 sont alors des fonctions de x (on prendra $Y_0 \leq Y_1$). Pour évaluer la limite de la somme (1) commençons par considérer la file des rectangles E_{ij} ($1 \leq j \leq n$) ayant le même indice i , c'est-à-dire écrivons la somme (1) sous la forme :

$$\sum_{1 \leq i \leq m} (x_i - x_{i-1}) \sum_{1 \leq j \leq n} (y_j - y_{j-1}) \Phi(\xi_{ij}, \eta_{ij})$$

et choisissons une valeur ξ_i de ξ_{ij} qui soit la même pour toutes les valeurs des indices j . La somme :

$$\sum_j (y_j - y_{j-1}) \Phi(\xi_i, \eta_{ij})$$

a pour limite lorsque le plus grand des nombres $y_j - y_{j-1}$ tend vers 0 :

$$\int_{u_0}^{u_1} f(\xi_i, y) dy.$$

Les bornes d'intégration sont $u_0 = Y_0(\xi_i)$ et $u_1 = Y_1(\xi_i)$.

Nous sommes donc conduits à calculer une première intégrale. Si nous appelons $F(x, y)$ une primitive de $f(x, y)$ par rapport à y , c'est-à-dire une fonction telle que :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = f(x, y)$$

la valeur de cette intégrale sera :

$$F(\xi_i, u_1) - F(\xi_i, u_0).$$

Il restera ensuite à chercher la limite de :

$$\sum_{1 \leq i \leq m} (x_i - x_{i-1}) [F(\xi_i, u_1) - F(\xi_i, u_0)]$$

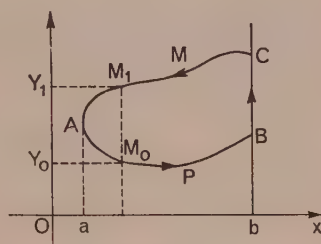


FIG. 3.

et nous savons que cette limite est :

$$\int_a^b [F(x, Y_1) - F(x, Y_0)] dx$$

mais en intégrant il ne faudra pas oublier que Y_0 et Y_1 sont des fonctions de x .

Nous obtenons donc l'égalité :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{Y_0(x)}^{Y_1(x)} f(x, y) dy$$

REMARQUE. — Dans le cas où la région D est la surface du rectangle $(a, b) \times (c, d)$ le calcul précédent montre que l'on a, en supposant $a < b$ et $c < d$:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Mais, aussi, en changeant les rôles des variables x et y :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

En égalant ces deux expressions on trouve l'égalité :

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

EXEMPLE 4. — Soit à calculer l'intégrale :

$$\iint_D y^3 dx dy$$

la région D étant définie par les inégalités (fig. 4) :

$$0 \leq x \quad \text{et} \quad x^2 \leq y \leq 1.$$

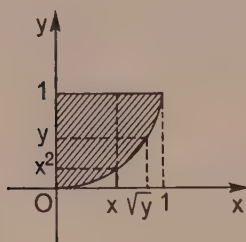


FIG. 4.

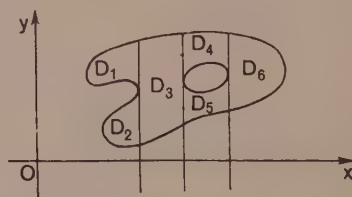


FIG. 5.

Nous aurons ici :

$$Y_0 = x^2 \quad \text{et} \quad Y_1 = 1$$

d'où :

$$\iint_D y^3 dx dy = \int_0^1 \left[\frac{y^4}{4} \right]_{x^2}^1 dx = \int_0^1 \frac{1 - x^8}{4} dx = \left[\frac{x}{4} - \frac{x^9}{36} \right]_0^1 = 2/9.$$

Dans ce cas particulier, on aurait pu changer le rôle des axes et écrire :

$$\iint_D y^3 dx dy = \int_0^1 y^3 \left[x \right]_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 y^{7/2} dy = \left[\frac{2}{9} y^{9/2} \right]_0^1 = 2/9$$

puisque x varie de 0 à $\sqrt{y}$.

Dans le cas général où la région D a une forme quelconque (fig. 5), on décompose D en plusieurs régions $D_1, \dots, D_p$ de la forme précédente en menant des parallèles à Oy d'abscisses convenablement choisies. On aura alors :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{1 \leq i \leq p} \iint_{D_i} f(x, y) dx dy.$$

3. — Intégrales triples.

L'espace étant rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox , Oy et Oz , soit une région D de l'espace dont on peut définir le volume ⁽¹⁾ et bordée par une surface close S et soit une fonction $f(x, y, z)$ définie en tout point de D . Nous conviendrons que la région D est « fermée » c'est-à-dire que $S \in D$. Nous considérerons d'autre part la fonction $\Phi(x, y, z)$ égale à $f(x, y, z)$ en tout point de D et égale à 0 partout ailleurs. Désignons par a et b , c et d , ou e et f les bornes supérieures et inférieures des abscisses, des ordonnées ou des cotes des points de S . Partageons les intervalles (a, b) , (c, d) et (e, f) :

$$\begin{aligned} x_0 &= a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m = b \\ y_0 &= c \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n = d \\ z_0 &= e \leq z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_p = f \end{aligned}$$

et quadrillons l'espace par les plans d'abscisses $x_0, x_1, \dots, x_m$, par les plans d'ordonnées $y_0, y_1, \dots, y_n$ et par ceux de cotes $z_0, z_1, \dots, z_p$. Désignons par E_{ijk} le parallélépipède rectangle fermé $(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j) \times (z_{k-1}, z_k)$ bordé par les six plans d'équations respectives.

$$x = x_{i-1} \quad x = x_i \quad y = y_{j-1} \quad y = y_j \quad z = z_{k-1} \quad \text{et} \quad z = z_k$$

Ceci posé, associons à tout parallélépipède E_{ijk} un point M_{ijk} de coordonnées ξ_{ijk} , η_{ijk} et ζ_{ijk} appartenant à ce parallélépipède. Désignons par :

$$V_{ijk} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

⁽¹⁾ Nous supposons que la région D peut se décomposer en un nombre fini de régions cylindriques dont nous avons défini le volume (§ 1, exemple 1). Par abréviation nous appellerons parfois volume une telle région.

le volume du parallélépipède E_{ijk} et considérons la somme :

$$(2) \quad \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq k \leq p} \Phi(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk}) V_{ijk} \\ = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq k \leq p} \Phi(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk}) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) (z_k - z_{k-1})$$

(le symbole $\Sigma\Sigma\Sigma$ indique que l'on fera varier les trois indices i, j, k de façon à étendre la sommation à tous les parallélépipèdes E_{ijk}). S'il existe un nombre I tel que cette somme tende vers I lorsque les trois nombres :

$$\sup_{1 \leq i \leq m} |x_i - x_{i-1}|, \quad \sup_{1 \leq j \leq n} |y_j - y_{j-1}| \quad \text{et} \quad \sup_{1 \leq k \leq p} |z_k - z_{k-1}|$$

tendent vers 0 (indépendamment de la manière dont on fait les partages et dont on choisit les points M_{ijk}), on dit que la fonction $f(x, y, z)$ est *intégrable sur la région D* et on pose :

$$I = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

ou :

$$I = \iiint_D f(x, y, z) dV$$

ou parfois :

$$I = \iiint_D dx dy dz f(x, y, z)$$

On peut démontrer qu'en fait si on peut définir le volume de D et si la fonction f est continue par rapport à l'ensemble des variables x, y et z sur D l'intégrale I existe toujours.

EXEMPLES. — 5) Si D est un corps pesant de densité volumétrique $f(x, y, z)$ la quantité $\Phi(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk}) V_{ijk}$ est équivalente à la masse du parallélépipède E_{ijk} lorsque les dimensions de celui-ci sont suffisamment petites et lorsque E_{ijk} est entièrement contenu dans D . On voit à partir de là que l'intégrale triple représente la masse du corps D .

En particulier lorsque $f(x, y, z)$ est la constante 1, cette masse est égale au volume de D et l'intégrale triple $\iiint_D dx dy dz$ est le volume D .

6) Supposons que D soit la portion du cylindre droit ayant pour base une surface S' du plan xOy (dont les génératrices sont parallèles à Oz) comprise entre les plans de cotes e et f . Supposons d'autre part que la fonction $f(x, y, z)$ soit égale au produit d'une fonction $g(x, y)$ de x et y par une fonction $h(z)$ de z . En choisissant les points M_{ijk} de telle sorte que les nombres ξ_{ijk} et η_{ijk} ne dépendent pas de k et que les nombres ζ_{ijk} ne dépendent que de k (soient

$\xi_{ijk} = \xi_{ij}$, $\eta_{ijk} = \eta_{ij}$ et $\zeta_{ijk} = \zeta_k$), la somme (1) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} g(\xi_{ij}, \eta_{ij}) (x_i - x_{j-1}) (y_j - y_{j-1}) \sum_{1 \leq k \leq p} h(\zeta_k) (z_k - z_{k-1})$$

qui tend vers le produit :

$$\left(\iint_{S'} g(x, y) dx dy \right) \times \left(\int_e^f h(z) dz \right).$$

A partir de la définition, on déduit quelques propriétés immédiates de l'intégrale triple $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$.

On voit d'abord que celle-ci est *linéaire par rapport à la fonction* $f(x, y, z)$ c'est-à-dire que :

$$\iiint_D (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) dx dy dz = \lambda_1 \iiint_D f_1 dx dy dz + \lambda_2 \iiint_D f_2 dx dy dz.$$

On remarque ensuite que si S est la réunion de deux régions D_1 et D_2 sans volume commun (D_1 et D_2 étant par exemple les deux hémisphères opposées d'une même sphère), on a :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D_1} f dx dy dz + \iiint_{D_2} f dx dy dz.$$

4. — Calcul d'une intégrale triple.

Comme dans l'exemple 5 du § 3, nous allons montrer que d'une façon générale le calcul d'une intégrale triple peut se ramener à celui d'une intégrale double et d'une intégrale simple, c'est-à-dire finalement au calcul de trois intégrales simples.

Considérons d'abord le cas où la région D limitée par la surface close S et ayant pour projection sur le plan xOy une surface S' est telle que toute parallèle à Oz menée par un point de coordonnées x et y de S' coupe D suivant un segment (Z_0, Z_1) (avec $Z_0 \leq Z_1$). Les nombres Z_0 et Z_1 sont alors des fonctions de x et de y , soient

$$Z_0 = Z_0(x, y) \quad \text{et} \quad Z_1 = Z_1(x, y).$$

On remarquera que la surface S est alors formée par la réunion des graphes de $Z_0(x, y)$ et $Z_1(x, y)$. Le quadrillage de l'espace étant fait comme il a été indiqué au § 3, choisissons les points M_{ijk} de telle sorte que les nombres ξ_{ijk} et η_{ijk} ne dépendent pas de k (soient $\xi_{ijk} = \xi_{ij}$ et $\eta_{ijk} = \eta_{ij}$).

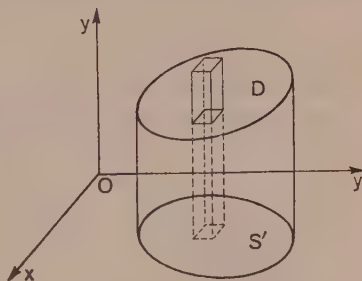


FIG. 6.

En considérant une file de parallélépipèdes parallèle à Oz , on est conduit à écrire la somme (2) sous la forme :

$$\sum_i \sum_j (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) \sum_k (z_k - z_{k-1}) f(\xi_{ij}, \eta_{ij}, \zeta_{ijk})$$

Mais, i et j restant fixes, la somme :

$$\sum_k (z_k - z_{k-1}) f(\xi_{ij}, \eta_{ij}, \zeta_{ijk})$$

tend, lorsque $\text{Sup } |z_k - z_{k-1}|$ tend vers 0, vers l'intégrale :

$$\int_{u_0}^{u_1} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}, z) dz$$

où l'on a posé :

$$u_0 = Z_0(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \quad \text{et} \quad u_1 = Z_1(\xi_{ij}, \eta_{ij}).$$

Si nous appelons $F(x, y, z)$ une primitive de $f(x, y, z)$ par rapport à z , c'est-à-dire une fonction telle que :

$$\frac{\partial F}{\partial z} = f(x, y, z)$$

l'intégrale simple précédente est égale à :

$$F(\xi_{ij}, \eta_{ij}, u_1) - F(\xi_{ij}, \eta_{ij}, u_0)$$

et le problème se ramène à chercher la limite de la somme :

$$\sum_i \sum_j (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) [F(\xi_{ij}, \eta_{ij}, u_1) - F(\xi_{ij}, \eta_{ij}, u_0)]$$

lorsque les nombres $\text{Sup } |x_i - x_{i-1}|$ et $\text{Sup } |y_j - y_{j-1}|$ tendent vers 0. Mais cette limite est, par définition, l'intégrale double :

$$\iint_{S'} [F(x, y, Z_1(x, y)) - F(x, y, Z_0(x, y))] dx dy$$

d'où l'égalité :

$$(3) \quad \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{S'} dx dy \int_{Z_1}^{Z_0} f(x, y, z) dz.$$

EXEMPLE 7. — Calculons le volume V de la sphère D de centre O et de rayon R :

$$V = \iiint_D dx dy dz$$

et, en désignant par S la surface du cercle de centre 0 et de rayon R situé dans le plan xOy

$$\begin{aligned} V &= \iint_S dx dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz = 2 \iint_S \sqrt{R^2-x^2-y^2} dx dy \\ &= 2 \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2} dy \end{aligned}$$

Prenons comme nouvelle variable :

$$y \mapsto t = \text{Arc sin } \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2} dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R^2-x^2) \cos^2 t dt \\ &= (R^2-x^2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) \frac{dt}{2} = (R^2-x^2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2} = \frac{\pi}{2} (R^2-x^2) \end{aligned}$$

d'où :

$$V = 2 \int_{-R}^{+R} \frac{\pi}{2} (R^2-x^2) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{+R} = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

On retrouve l'expression bien connue du volume de la sphère.

Dans le cas général où la région D a une forme quelconque, on la décompose en plusieurs régions $D_1, \dots, D_s$ de la forme précédente telles que les points communs à deux de ces régions soient situés sur des surfaces cylindriques en nombre fini.

REMARQUES. — 1° La méthode précédente permet de calculer une intégrale triple en décomposant la région D en parallélépipèdes dont l'une des sections est un rectangle de petites dimensions situé dans un plan parallèle à xOy . On peut également calculer cette intégrale en décomposant la région D d'une autre façon : par des cylindres droits de génératrices parallèles à Oz et de hauteur très petite (décomposition en « tranches »), ce qui conduit aux considérations suivantes :

Désignons par $S(z)$ la surface intersection de D et du plan de cote z .

Choisissons les points M_{ijk} de telle sorte que les nombres ζ_{ijk} ne dépendent que de k , soit $\zeta_{ijk} = \zeta_k$ ($1 \leq k \leq p$).

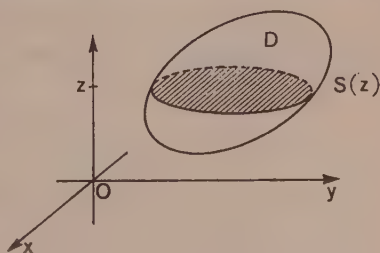


FIG. 7.

La somme (2) peut s'écrire alors sous la forme :

$$\sum_k (z_k - z_{k-1}) \sum_i \sum_j (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) f(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_k)$$

Mais, k restant fixe, la somme :

$$\sum_i \sum_j (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) f(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_k)$$

tend vers l'intégrale double :

$$\iint_{S(\zeta_k)} f(x, y, \zeta_k) dx dy$$

et la somme (2) a la même limite que la somme :

$$\sum_k (z_k - z_{k-1}) \iint_{S(\zeta_k)} f(x, y, \zeta_k) dx dy,$$

c'est-à-dire :

$$\int_e^f dz \iint_{S(z)} f(x, y, z) dx dy.$$

D'où l'égalité :

$$(4) \quad \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_e^f dz \iint_{S(z)} f(x, y, z) dx dy.$$

Ce procédé n'implique aucune restriction sur la forme de la région D .

2° Dans le cas où la région R est cylindrique, c'est-à-dire la forme $S' \times (e, f)$, la comparaison des égalités (3) et (4) permet d'écrire :

$$\iint_{S'} dx dy \int_e^f f(x, y, z) dz = \int_e^f dz \iint_{S'} f(x, y, z) dx dy.$$

(intersion de l'ordre des intégrations).

5. — Application au calcul des volumes.

En prenant $f = 1$ dans l'égalité (4) on obtient l'expression du volume V de D

$$V = \iiint_D dx dy dz = \int_{z_1}^{z_2} dz \iint_{S(z)} dx dy.$$

où z_1 et z_2 (avec $z_1 \leq z_2$) sont les valeurs extrêmes de z dans le domaine D .

Comme l'intégrale double $\iint_{S(z)} dx dy$ est l'aire $\mathcal{A}(z)$ de la surface $S(z)$ il vient

$$V = \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{A}(z) dz.$$

EXEMPLE 8. — *Volume d'un segment sphérique.* — Soit la sphère S de centre O et de rayon r dont l'équation est :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Calculons le volume de la région de la sphère comprise entre les plans de cotes a et b (avec $a < b$). $\mathcal{A}(z)$ est ici l'aire du cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 = r^2 - z^2$$

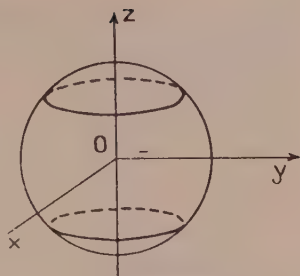


FIG. 8.

dans le plan de cote z . Ce cercle a pour rayon $\sqrt{r^2 - z^2}$ et par suite :

$$\mathcal{A}(z) = \pi(r^2 - z^2).$$

On a donc :

$$V = \int_a^b \pi(r^2 - z^2) dz = \pi \left[r^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_a^b = \pi \left[r^2(b - a) - \frac{(b^3 - a^3)}{3} \right].$$

En particulier on obtient le volume de la sphère en prenant $a = -r$ et $b = r$. On retrouve ainsi la formule déjà obtenue à l'exemple 7.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

EXEMPLE 9. — Soit à calculer le volume V du cône de sommet O ayant pour base dans le plan P_1 d'équation $z = h$ ($h > 0$) une surface S_h d'aire $\mathcal{A}$.

Si $0 \leq z \leq h$, la section S_z du cône par le plan P de cote z se déduit de S_h par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{z}{h}$. L'aire $\mathcal{A}(z)$ de cette section est

donc égale à $\frac{z^2}{h^2} \mathcal{A}$. D'où :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \frac{z^2}{h^2} \mathcal{A} dz \\ &= \frac{\mathcal{A}}{h^2} \int_0^h z^2 dz = \frac{\mathcal{A}}{h^2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{\mathcal{A}h}{3} \end{aligned}$$

On a donc :

$$V = \frac{\mathcal{A}h}{3}.$$

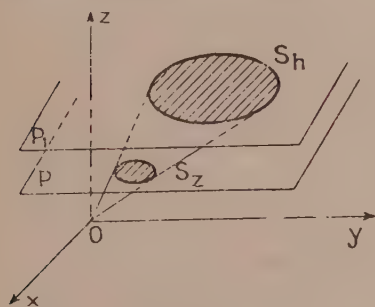


FIG. 9.

6. — Intégrales n -uples.

Les considérations des paragraphes précédents peuvent se généraliser : supposons que nous ayons défini l'intégrale multiple d'ordre $(n - 1)$ sur une région D_{n-1} d'un espace $\mathbf{R}^{n-1}$. Cette intégrale permettra de définir l'hyper-

volume d'une région D_n d'un espace $\mathbf{R}^n$. Nous pourrions alors écrire une somme analogue à (1) ou (2) et si cette somme a une limite, cette limite sera la valeur de l'intégrale n -uple :

$$\underbrace{\iint \dots \int}_{n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Le calcul de cette intégrale se fera d'abord dans le cas où D_n est défini de la façon suivante : le point $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ appartient à D_n si le point $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in D_{n-1}$ et si $u \leq x_n \leq v$, u et v étant des fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Nous aurons alors l'égalité :

$$\underbrace{\iint \dots \int}_{n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \underbrace{\iint \dots \int}_{n} dx_2 \dots dx_{n-1} \int_u^v f dx_n$$

qui rattache donc le calcul d'une intégrale n -uple à ceux d'une intégrale simple et d'une intégrale $(n-1)$ -uple.

Bien entendu, on pourra passer d'une région D_n de la forme particulière considérée ci-dessus à une région D_n de forme quelconque.

EXERCICES

1^o Calculer l'intégrale $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, D étant défini par les conditions $0 \leq x \leq 1$, $y \leq x$.

$$R. \frac{1}{3}.$$

2^o Calculer $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$, D étant le carré $(0, a) \times (0, a)$.

$$R. \frac{\pi}{6a}.$$

3^o Les points M et P ont pour coordonnées respectives :

$$x = a\theta \cos \theta, y = a\theta \sin \theta, z = 0; \quad x = y = 0, z = a\theta.$$

Calculer le volume limité par les plans xOy et yOz et par la surface engendrée par le segment MP lorsque θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

$$R. \frac{a^2 \pi^4}{384}.$$

4° Volume limité par le tore engendré par le cercle d'équation $(x - a)^2 + y^2 = b^2$ tournant autour de Oy .

$$R. \quad 2\pi^2 ab^2.$$

****5°** Volume intérieur à la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ et intérieur au cylindre d'équation $x^2 + y^2 - ay = 0$.

$$R. \quad \frac{a^3}{9} (6\pi - 8).$$

****6°** Volume compris entre le plan d'équation $y = z$ et le parabolôïde de révolution d'équation $x^2 + y^2 - z = 0$.

$$R. \quad \frac{\pi}{32}.$$

***7° Formule des trois niveaux.** — Soit V le volume d'une région D comprise entre les plans de cote $Z = \frac{h}{2}$ et $Z = -\frac{h}{2}$ et telle que l'aire $\mathcal{A}(z)$ d'une section plane parallèle au plan xOy et de cote z soit donnée par

$$\mathcal{A}(z) = az^3 + bz^2 + cz + d \quad \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2} \right)$$

Exprimer V à l'aide de h , de $B = \mathcal{A}\left(\frac{h}{2}\right)$, $B' = \mathcal{A}\left(-\frac{h}{2}\right)$ et $B'' = \mathcal{A}(0)$.

$$R. \quad V = \frac{h}{6} (B + B' + 4B'').$$

****8°** Calculer le volume de la « sphère » de rayon R dans un espace euclidien à 4 dimensions.

$$R. \quad \frac{\pi^2}{2} R^4.$$

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES INTÉGRALES

1. — Calcul des aires.

$f(x)$ et $g(x)$ étant deux fonctions continues dans l'intervalle (a, b) (avec $a \leq b$) telles que l'on ait $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in (a, b)$, calculons l'aire $\mathcal{A}$ de la portion de plan (hachurée sur la fig. 1) comprise entre les deux parallèles AA' et BB' à Oy d'abscisses a et b et les graphes $A'B'$ et $A''B''$ des deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

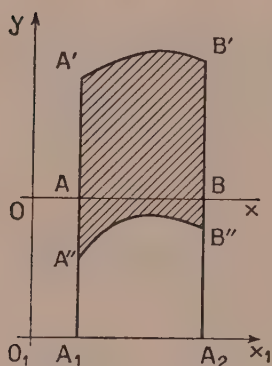


FIG. 1.

Désignons pour cela par $-K$ un nombre inférieur ou égal au minimum de la fonction $g(x)$ sur (a, b) , prenons comme nouvel axe des abscisses l'axe O_1x_1 d'ordonnée $-K$ et désignons par A_1 et B_1 les points de Ox_1 d'abscisses a et b .

Désignons par $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ les aires respectives des deux « trapèzes curvilignes » $A_1A'B_1B_1$ et $A_1A''B_1B_1$. On a alors $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$.

Mais, rapportée aux axes O_1x_1 et O_1y , la courbe $A'B'$ est le graphe de la fonction $f_1(x_1) = f(x_1) + K$.

Par suite :

$$\mathcal{A}_1 = \int_a^b (f(x_1) + K) dx_1$$

de même :

$$\mathcal{A}_2 = \int_a^b (g(x_1) + K) dx_1$$

d'où :

$$\mathcal{A} = \int_a^b (f(x_1) - g(x_1)) dx_1 = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Si on donne maintenant une région R du plan qui soit limitée par une ou plusieurs courbes continues et qui soit *bornée* (c'est-à-dire entièrement contenue dans un cercle de rayon suffisamment grand), on pourra toujours calculer l'aire de R en découpant R en plusieurs régions $R_1, R_2, \dots, R_n$ du même type

que celle dont nous venons de calculer l'aire. L'aire de R est alors la somme des aires des régions $R_1, R_2, \dots, R_n$.

Par exemple si R est la région hachurée sur la figure 2, $A'B'$ étant le graphe de la fonction $f(x)$ et $A''B''$ celui de la fonction $g(x)$, la droite $x = x_0$ coupe R en deux régions du type désiré et l'aire de R est égale à :

$$\int_a^{x_0} (f(x) - g(x)) dx + \int_{x_0}^b (g(x) - f(x)) dx = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

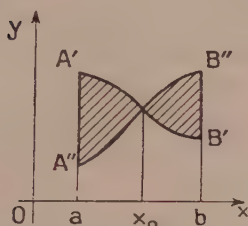


FIG. 2.

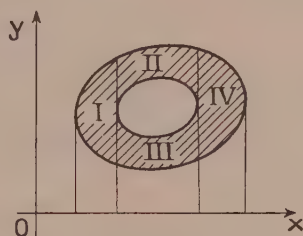


FIG. 3.

L'aire de la région hachurée sur la figure 3 pourrait de même être calculée en découpant cette région en quatre morceaux (notés I, II, III et IV sur la figure) grâce à des parallèles à Oy .

EXEMPLE 1. — Calculons l'aire $\mathcal{A}$ de la région comprise entre les deux courbes

$$y = \cos x, y_1 = \cos \frac{x}{2} \text{ et les deux droites } x = 0 \text{ et } x = \pi.$$

On a :

$$\mathcal{A} = \int_0^\pi \left(\cos \frac{x}{2} - \cos x \right) dx = \left[2 \sin \frac{x}{2} - \sin x \right]_0^\pi = 2.$$

Nous verrons dans le prochain volume une méthode un peu plus générale pour calculer les aires, méthode qui permettra en particulier de calculer très simplement l'aire d'une région limitée par une courbe définie paramétriquement ou d'une aire annulaire telle que celle de la figure 3.

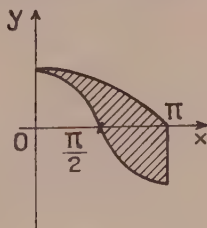


FIG. 4.

2. — Longueur d'un arc de courbe.

Soit dans l'espace (rapporté à des axes de coordonnées rectangulaires) un arc de courbe AB . Nous allons définir la longueur de l'arc de courbe AB en généralisant la définition de la longueur d'un arc d'un cercle donnée en géométrie élémentaire.

Cette longueur sera, par définition, la limite L , si elle existe, de la longueur

$$\sum_{1 \leq i \leq n} M_{i-1} M_i \text{ d'une ligne brisée } A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = B \text{ inscrite}$$

dans l'arc AB lorsque le nombre des sommets de cette ligne augmente indéfiniment.

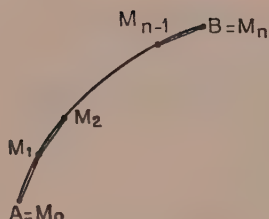


FIG. 5.

niment, la plus grande des distances $M_{i-1} M_i$ tendant vers 0. Supposons d'abord que AB soit une courbe plane graphe de la fonction $y = f(x)$, A et B étant les points d'abscisses a et b avec $a < b$. Désignons par x_i l'abscisse de M_i . On a :

$$M_{i-1} M_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Nous supposons dans ce qui suit que la fonction $f(x)$ soit continue et admette une dérivée continue dans l'intervalle (a, b) . La formule des accroissements finis permet alors d'écrire :

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})f'(\xi_i) \quad (\text{avec } x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$$

et, par suite :

$$M_{i-1} M_i = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}.$$

On a donc à étudier la limite de la quantité :

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}$$

lorsque le plus grand des nombres $(x_i - x_{i-1})$ tend vers 0.

Mais $f'(x)$ étant continue, il en est de même de la fonction $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ et on sait (chap. XVII, § 1) que cette limite existe et est égale à l'intégrale :

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

La longueur L de la courbe est donc ici :

(1)

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Revenons au cas général d'une courbe définie dans l'espace par une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

et supposons que les trois fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ soient continues et admettent une dérivée continue dans l'intervalle fermé (α, β) , α et β étant les valeurs du paramètre t en A et en B .

Supposons de plus $\alpha \leq \beta$.

Soit t_i la valeur du paramètre t définissant le point M_i . On a alors :

$$M_{i-1} M_i = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2}.$$

La formule des accroissements finis montre que l'on a des égalités de la forme :

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1}) x'(\xi_i)$$

$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1}) y'(\eta_i)$$

$$z(t_i) - z(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1}) z'(\zeta_i)$$

les trois nombres ξ_i , η_i et ζ_i étant compris entre t_i et t_{i-1} .

On a donc :

$$\sum_{1 \leq i \leq n} M_{i-1} M_i = \sum_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2 + z'(\zeta_i)^2}$$

(l'hypothèse $\alpha \leq \beta$ entraîne en effet que l'on a $t_{i-1} \leq t_i$ pour tout i).

Les fonctions $y'(t)$ et $z'(t)$ étant continues, la différence :

$$\lambda_i = \sqrt{x'^2(\xi_i)^2 + y'^2(\eta_i)^2 + z'^2(\zeta_i)^2} - \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i) + z'^2(\xi_i)}$$

tendra vers 0 en même temps que $|\eta_i - \xi_i|$ et $|\zeta_i - \xi_i|$, donc encore lorsque $t_i - t_{i-1}$ tendra vers 0. On pourra donc écrire :

$$\sum_{1 \leq i \leq n} M_{i-1} M_i = \sum_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) (\sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i) + z'^2(\xi_i)} + \lambda_i)$$

et appliquer la remarque faite au n° 1 du chapitre XVII. Lorsque le plus grand des nombres $t_i - t_{i-1}$ tendra vers 0, la somme précédente tendra vers :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt.$$

On voit donc que l'arc de courbe AB a une longueur L donnée par la formule :

$$(2) \quad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$$

Si O désigne l'origine des coordonnées et si on pose $\overrightarrow{OM} = \vec{E}(t)$, cette formule s'écrit

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \|\vec{E}'(t)\| dt$$

Dans le cas où $\beta \leq \alpha$, L est évidemment égal à l'opposé de l'intégrale précédente.

REMARQUES. — 1° Dans le cas où AB est l'arc de courbe plane situé dans le plan $z = 0$ et graphe de la fonction $y = f(x)$, on peut prendre comme paramètre $t = x$ et la formule (1) se déduit alors de la formule (2).

2° Lorsque $(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2$ est de la forme $(\varphi(t))^2$, on aura :

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(t)| dt$$

et non pas toujours :

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt.$$

C'est ainsi que si la fonction $\varphi(t)$ est positive ou nulle pour $\alpha \leq t \leq \gamma$ et négative ou nulle pour $\gamma \leq t \leq \beta$, on aura :

$$L = \int_{\alpha}^{\gamma} \varphi(t) dt - \int_{\gamma}^{\beta} \varphi(t) dt.$$

EXEMPLE 2. — Soit à calculer la longueur L de l'astroïde paramétriquement par les équations :

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

Cette courbe, représentée sur la figure 6, a quatre points de rebroussement. Elle se déduit d'ailleurs par une affinité de la développée d'une ellipse (chap. XXXI). On la parcourt complètement (et une fois seulement) en faisant parcourir à t un intervalle de longueur 2π . On a alors :

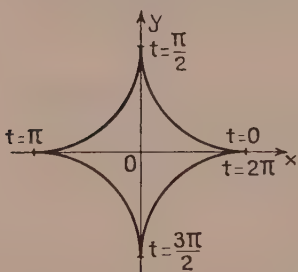


FIG. 6.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

Mais ici :

$$x'_t = -3a \cos^2 t \sin t$$

$$y'_t = 3a \sin^2 t \cos t$$

et :

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t = \left(\frac{3a}{2} \sin 2t\right)^2.$$

On a donc :

$$L = \frac{3a}{2} \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt.$$

On a visiblement :

$$\int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2t| dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt$$

d'où :

$$L = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \, dt = 3a \left[-\cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.$$

On a donc $L = 6a$.

Comme illustration de la seconde remarque que nous avons faite, on voit que si on avait posé

$$L = \frac{3a}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2t \, dt, \text{ on aurait trouvé le résultat absurde } L = 0.$$

EXEMPLE 3. — Soit à calculer la longueur L de l'arc OM de parabole compris entre le sommet O et le point M d'ordonnée $h > 0$.

L'équation de la parabole étant $y^2 = 2px$, ou, paramétriquement :

$$x = \frac{t^2}{2p} \quad y = t$$

nous aurons :

$$x'_t = \frac{t}{p} \quad \text{et} \quad y'_t = 1$$

et par suite :

$$L = \int_0^h \sqrt{1 + \frac{t^2}{p^2}} \, dt.$$

Cette intégrale se calcule aisément en posant :

$$\begin{aligned} t &= p \operatorname{sh} \varphi \\ dt &= p \operatorname{ch} \varphi \, d\varphi \end{aligned}$$

D'où :

$$L = \int_0^{\operatorname{Arg} \operatorname{sh} \frac{h}{p}} p \operatorname{ch}^2 \varphi \, d\varphi = \frac{p}{2} \left[\varphi + \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi \right]_0^{\operatorname{Arg} \operatorname{sh} \frac{h}{p}} = \frac{p}{2} \left[\operatorname{Arg} \operatorname{sh} \frac{h}{p} + \frac{h}{p} \sqrt{1 + \frac{h^2}{p^2}} \right]$$

ou encore :

$$L = \frac{p}{2} \operatorname{Log} \left[\frac{h}{p} + \sqrt{1 + \frac{h^2}{p^2}} \right] + \frac{h}{2} \sqrt{1 + \frac{h^2}{p^2}}.$$

3. — Abscisse curviligne.

Une courbe C de l'espace telle que tout arc continu AB de C ait une longueur est dite *rectifiable*. D'après ce que nous avons vu, il en est en particulier ainsi lorsque C est définie paramétriquement par des équations de la forme :

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

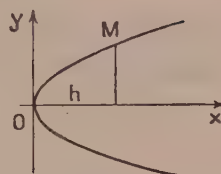


FIG. 7.

les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ étant continues et ayant chacune une dérivée continue, soit, en posant $\overrightarrow{OM} = \vec{E}(t)$, lorsque la fonction vectorielle $\vec{E}(t)$ a une dérivée $\vec{E}'(t)$ continue.

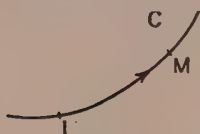


FIG. 8.

Soit donc C une courbe rectifiable ainsi définie. Comme on l'a fait dans le cas d'une droite ou d'un cercle, on peut *orienter* la courbe C en choisissant un sens de parcours (dit *sens positif*) sur C (par exemple celui des t croissants). La courbe C étant ainsi orientée, choisissons un point I de C (correspondant à la valeur t_0 du paramètre). M étant alors un point de C correspon-

dant à la valeur t du paramètre, on appelle *abscisse curviligne* de M sur C et on désigne par $s(t)$ le nombre ainsi défini :

la valeur absolue $|s(t)|$ est égale à la longueur de l'arc IM ,

le nombre $s(t)$ est pris positif si en allant de I à M on parcourt C dans le sens positif, il est pris négatif dans le sens contraire.

(En fait, si C est une courbe close telle que le cercle, l'ellipse ou l'astroïde définie précédemment, le nombre $s(t)$ peut avoir une infinité de déterminations possibles comme dans le cas du cercle.)

Le point I est appelé l'origine des abscisses sur la courbe C .

Ce qui précède montre que, dans le cas où le sens positif de parcours sur C est le sens des t croissants, on a :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt$$

(et :

$$s(t) = - \int_{t_0}^t \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt$$

si le sens de parcours est celui des t décroissants).

On a donc :

$$ds = \pm \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt$$

d'où

$$(3) \quad \left| \frac{ds}{dt} \right| = \| \vec{E}'(t) \|$$

et

(4)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

La formule précédente est valable quel que soit le paramètre t choisi pour définir la courbe C .

Considérons le point A correspondant à la valeur α du paramètre tel que l'on ait :

$$(x'(\alpha))^2 + (y'(\alpha))^2 + (z'(\alpha))^2 \neq 0$$

et considérons le point M correspondant à la valeur $\alpha = \Delta t$ du paramètre. Désignons par $\widehat{AM}$ la longueur de l'arc de courbe AM , par AM la distance des deux points A et M et montrons que

Le rapport $\frac{\widehat{AM}}{AM}$ tend vers 1 lorsque M tend vers A en restant sur la courbe C .

Les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ étant continues pour la valeur α , dire que M tend vers A signifie que Δt tend vers 0. En posant :

$$\Delta x = x(\alpha + \Delta t) - x(\alpha)$$

$$\Delta y = y(\alpha + \Delta t) - y(\alpha)$$

$$\Delta z = z(\alpha + \Delta t) - z(\alpha)$$

on a :

$$AM = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Par suite AM est un infiniment petit équivalent à :

$$|\Delta t| \sqrt{(x'(\alpha))^2 + (y'(\alpha))^2 + (z'(\alpha))^2}.$$

D'autre part $\widehat{AM} = |s(\alpha + \Delta t) - s(\alpha)|$ est un infiniment petit équivalent à $|\Delta t s'(\alpha)|$, c'est-à-dire encore à :

$$|\Delta t| \sqrt{(x'(\alpha))^2 + (y'(\alpha))^2 + (z'(\alpha))^2}.$$

Donc $\widehat{AM}$ et AM sont des infiniment petits équivalents, ce qui démontre le résultat à établir.

Supposons que la courbe C soit une courbe plane et soient r et θ les coordonnées polaires d'un point de la courbe C . Les relations :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

permettent d'écrire :

$$\begin{cases} dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta. \end{cases}$$

On a également $dz = 0$ et la formule (4) permet d'écrire :

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

EXEMPLE 4. — Supposons que la courbe C soit une *spirale logarithmique* d'équation $r = e^{m\theta}$ ($m > 0$). On a :

$$dr = m e^{m\theta} d\theta$$

et, par suite :

$$ds^2 = (m^2 e^{2m\theta} + e^{2m\theta}) d\theta^2 = (m^2 + 1) e^{2m\theta} d\theta^2$$

d'où :

$$ds = \sqrt{m^2 + 1} e^{m\theta} d\theta$$

(en supposant que l'on choisisse pour sens de parcours sur la courbe le sens des θ croissants).

On a donc :

$$s = \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{m} e^{m\theta} + K,$$

K était une constante arbitraire qui dépend de l'origine choisie sur la courbe.

Cette formule montre que, si A est un point fixe de la spirale et si M est un point variable de la spirale tendant vers le point asymptote O (c'est-à-dire si l'angle polaire θ de M tend vers $-\infty$), la longueur de l'arc de courbe AM tend vers une valeur finie lorsque M tend vers O . En considérant O comme un point de la spirale (point correspondant à $\theta = -\infty$), on peut donc prendre O comme origine et l'abscisse curviligne prend alors comme expression :

$$s(\theta) = \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{m} e^{m\theta}.$$

4. — Zone d'une surface de révolution.

Proposons-nous de calculer l'aire S de la surface de révolution Σ engendrée par un arc de courbe AB situé dans le plan xOz en tournant autour de l'axe Oz .

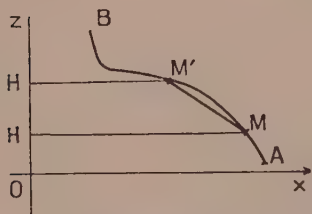


FIG. 9.

Orientons pour cela l'arc AB de A vers B et choisissons une origine sur AB . Désignons par s_A et s_B les abscisses curvilignes des points A et B et, s étant un nombre compris entre s_A et s_B , désignons par $S(s)$ l'aire de la portion de la surface Σ engendrée par l'arc de courbe AM , si M est le point d'abscisse curviligne s sur AB . On a alors $S = S(s_B)$.

Calculons la dérivée $\frac{dS}{ds}$ et pour cela consi-

dérons le point M' d'abscisse curviligne $s + \Delta s$. L'accroissement correspondant $\Delta S = S(s + \Delta s) - S(s)$ est donc égal en valeur absolue à l'aire engendrée par l'arc de courbe MM' en tournant autour de Oz .

On peut alors démontrer, ce qui est assez intuitif ⁽¹⁾, que lorsque Δs tend vers 0, ΔS est un infiniment petit équivalent à la surface du tronc de cône engendré par le segment de droite MM' en tournant autour de Oz . Cette surface est égale à $2\pi MM' \frac{HM + H'M'}{2}$ en désignant par H et H' les projections orthogonales de M et de M' sur Oz . Or MM' est un infiniment petit équivalent à la longueur $|\Delta s|$ de l'arc MM' (§ 3) et la quantité $HM + H'M'$ est de la forme $2HM + \varepsilon(\Delta s)$. Comme $HM = |x(s)|$ est la valeur absolue de l'abscisse du point M , on voit donc que la quantité $|\Delta S|$ est équivalente à $2\pi |\Delta s| |x(s)|$. La quantité $\frac{\Delta S}{\Delta s}$ étant toujours positive ou nulle, celle-ci tend vers $2\pi |x(s)|$ lorsque Δs tend vers 0. On a donc :

$$\frac{dS}{ds} = 2\pi |x(s)|$$

et :

$$S = \int_{s_A}^{s_B} 2\pi |x(s)| ds$$

EXEMPLE 5. — *Calcul de l'aire d'une zone sphérique.* — Il s'agit de calculer l'aire S engendrée en tournant autour de Oz par l'arc de cercle AB de centre O et de rayon R . Désignons par θ l'angle polaire d'un point M du cercle, par θ_A et θ_B les angles polaires des points A et B (avec $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_A \leq \theta_B \leq \frac{\pi}{2}$). En prenant le point I de cote 0 comme origine sur le cercle, on voit que le point M d'angle polaire θ a pour abscisse curviligne $s = R\theta$. D'autre part $x = R \cos \theta$. Donc :

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{\theta_A}^{\theta_B} R^2 \cos \theta d\theta \\ &= 2\pi R^2 (\sin \theta_B - \sin \theta_A) = 2\pi R \cdot A'B' \end{aligned}$$

En particulier si $\theta_A = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta_B = \frac{\pi}{2}$ on obtient l'aire de la sphère $S = 4\pi R^2$.

EXEMPLE 6. — *Aire d'un tore.* — Calculons l'aire engendrée en tournant autour de Oz par le cercle de rayon r dont le centre I est le point d'abscisse a

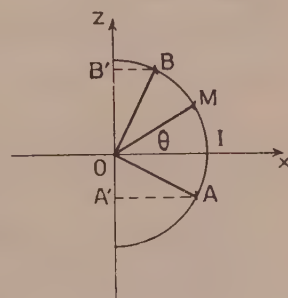


FIG. 10.

⁽¹⁾ On notera que cet appel à l'intuition a pour cause l'absence de définition rigoureuse de l'aire d'une surface (cette définition sera donnée au tome II).

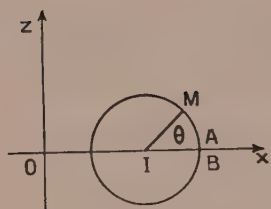


FIG. 11.

sur Ox . Supposons $a \geq r$. M étant un point de tore, désignons par θ l'angle $(\vec{Ox}, \vec{OM})$. Les coordonnées de M sont alors :

$$\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

En orientant le cercle dans le sens des θ croissant et en prenant comme origine des abscisses curvilignes le point A correspondant à $\theta = 0$, on voit que l'abscisse curviligne du point M est $s = r\theta$. L'aire cherchée est donc :

$$S = \int_0^{2\pi} 2\pi(a + r \cos \theta) r d\theta = 2\pi r [a\theta + r \sin \theta]_0^{2\pi} = 4\pi^2 ar.$$

5. — Étude différentielle des courbes.

Soit C une courbe de l'espace décrite par un point M et définie par la fonction vectorielle $\vec{OM} = \vec{E}(t)$. Si s désigne l'abscisse curviligne de M le vecteur $\vec{T} = \frac{d\vec{E}}{ds}$ est unitaire puisque l'on a

$$\|\vec{T}\| = \left\| \frac{d\vec{E}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\vec{E}}{dt} \right\| \cdot \left| \frac{dt}{ds} \right| = 1$$

d'après l'égalité (3) (§ 3).

Par dérivation de l'égalité $\vec{T}^2 = 1$ on obtient

$$\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0$$

ce qui montre que le vecteur $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est un vecteur normal à la courbe C .

Le vecteur d'origine M et égal à $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d^2\vec{E}}{ds^2}$ est, comme on l'a vu (chap. XXVIII), un vecteur contenu dans le plan osculateur. On appelle *normale principale* la normale à la courbe contenue dans le plan osculateur. Ainsi : le vecteur $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est un vecteur directeur de la normale principale.

Posons

$$\left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \frac{1}{R} \quad \text{et} \quad \vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} / \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\|$$

d'où

$$(5) \quad \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R} \vec{N}$$

Le nombre positif R (qui a les dimensions d'une longueur) est dit le *rayon de courbure* de la courbe C au point M , son inverse $\frac{1}{R}$ est la *courbure* de C .

Nous montrerons plus loin que, dans le cas d'une courbe plane, ce rayon de courbure est bien celui qui a déjà été défini au chapitre XXX.

En posant $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ on définit un repère orthonormé $(M, \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ dit *repère local*, ou *repère de Frenet*.

Par dérivation des égalités $\vec{B}^2 = 1$ et $\vec{T} \cdot \vec{B} = 0$ il vient

$$\vec{B} \cdot \frac{d\vec{B}}{ds} = 0$$

et

$$0 = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{B} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{1}{R} \vec{N} \cdot \vec{B} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{B}}{ds} = \vec{T} \cdot \frac{d\vec{B}}{ds}$$

Ainsi le vecteur $\frac{d\vec{B}}{ds}$, orthogonal aux vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{T}$, est colinéaire au vecteur $\vec{N}$, soit :

$$(6) \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{1}{\mathfrak{C}} \vec{N}$$

Le nombre $\mathfrak{C}$ défini par cette égalité est dit le *rayon de torsion* de la courbe C au point M . Son inverse est la *torsion* de la courbe.

Par dérivation de $\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T}$ on obtient

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d\vec{B}}{ds} \wedge \vec{T} + \vec{B} \wedge \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\mathfrak{C}} \vec{N} \wedge \vec{T} + \vec{B} \wedge \frac{1}{R} \vec{N}$$

d'où

$$(7) \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{1}{R} \vec{T} - \frac{1}{\mathfrak{C}} \vec{B}$$

Les égalités (5) (6) (7) qui définissent les dérivées des vecteurs $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$, sont appelées les *formules de Frenet*.

Calcul de la courbure et de la torsion. — On a

$$(8) \quad \vec{E}' = \frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{E}}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{T}$$

Si l'on regarde le paramètre t comme la variable « temps » le vecteur $\vec{V} = \vec{E}'$ est dit le *vecteur vitesse* du point M , le nombre $v = \frac{ds}{dt}$ est la vitesse de M sur sa trajectoire C .

On a donc

$$\|\vec{V}\| = \left\| \frac{ds}{dt} \cdot \vec{T} \right\| = |v| = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$$

Par dérivation de (8) on obtient

$$\vec{E}'' = \frac{d^2\vec{E}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}$$

soit

$$(9) \quad \vec{E}'' = v' \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}.$$

Le vecteur $\vec{\Gamma} = \vec{E}''$ est dit le *vecteur accélération* du point M , l'égalité (9) met en évidence ses *composantes tangentielles* (γ_T) et *normales* (γ_N) :

$$\gamma_T = v' \quad \text{et} \quad \gamma_N = \frac{v^2}{R}.$$

Par dérivation de (9) il vient :

$$\begin{aligned} \vec{E}''' &= v'' \vec{T} + v'v \frac{\vec{N}}{R} + \left(\frac{v^2}{R}\right)' \vec{N} + \frac{v^3}{R} \left(-\frac{1}{R} \vec{T} - \frac{1}{\mathfrak{C}} \vec{B}\right) \\ (10) \quad \vec{E}''' &= \left(v'' - \frac{v^3}{R^2}\right) \vec{T} + \left(\frac{v'v}{R} + \left(\frac{v^2}{R}\right)'\right) \vec{N} - \frac{v^3}{R\mathfrak{C}} \vec{B} \end{aligned}$$

On a

$$\vec{E}' \wedge \vec{E}'' = \frac{v^3}{R} \vec{T} \wedge \vec{N} = \frac{v^3}{R} \vec{B}$$

d'où l'expression du rayon de courbure

$$R = \frac{|v^3|}{\|\vec{E}' \wedge \vec{E}''\|} = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}{[(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2]^{1/2}}$$

En formant le produit mixte

$$\begin{aligned} (\vec{E}', \vec{E}'', \vec{E}''') &= -\frac{1}{R^2\mathfrak{C}} v^6 (\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}) \\ &= -\frac{v^6}{R^2\mathfrak{C}} \end{aligned}$$

On en déduit le rayon de torsion

$$\mathfrak{C} = -\frac{\|\vec{E}' \wedge \vec{E}''\|^2}{(\vec{E}', \vec{E}'', \vec{E}''')} = -\frac{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}{\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix}}$$

Étude de la courbe au voisinage du point M. — Considérons sur la courbe C le point P de paramètre $t + h$. La formule de Taylor permet d'écrire :

$$\overrightarrow{MP} = \vec{E}(t+h) - \vec{E}(t) = h \vec{E}'(t) + \frac{h^2}{2} \vec{E}''(t) + \frac{h^3}{6} \vec{E}'''(t) + h^3 \varepsilon(h)$$

Les coordonnées du point P dans le repère de Frenet $(M, \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ sont donc, compte tenu des égalités (8) (9) et (10),

$$\begin{aligned} X &= hv + \varepsilon(h) \cdot h \\ Y &= h^2 \frac{v^2}{2R} + \varepsilon(h) h^2 \\ Z &= h^3 \left(-\frac{v^3}{6R\mathfrak{C}}\right) + \varepsilon(h) h^3. \end{aligned}$$

Au voisinage de $h = 0$, on a donc $Y \geq 0$: la courbe est située du même côté du plan $(M, \vec{T}, \vec{B})$ que le vecteur $\vec{N}$.

Enfin X et Z sont de signes contraires ou de même signe suivant que l'on a $\mathfrak{T} > 0$ (courbe dite *sinistrorsum* fig. 12) ou $\mathfrak{T} < 0$ (courbe dite *dextrorsum* fig. 13).

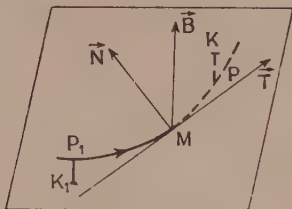


FIG. 12.

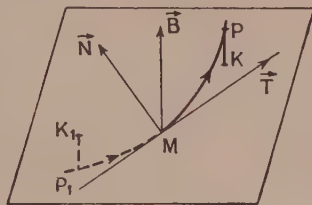


FIG. 13.

EXEMPLE 7. — *Hélice circulaire droite.* — Considérons l'hélice d'équations paramétriques

$$x = a \cos \varphi \quad y = a \sin \varphi \quad z = b\varphi$$

avec $a > 0$ et $b \neq 0$.

Les composantes de $\vec{E}'_\varphi$, $\vec{E}''_\varphi$ et $\vec{E}'''_\varphi$ sont respectivement :

$$\begin{array}{lll} x' = -a \sin \varphi & y' = a \cos \varphi & z' = b \\ x'' = -a \cos \varphi & y'' = -a \sin \varphi & z'' = 0 \\ x''' = a \sin \varphi & y''' = -a \cos \varphi & z''' = 0 \end{array}$$

On a donc

$$\|\vec{E}' \wedge \vec{E}''\|^2 = a^2(a^2 + b^2)$$

d'où

$$R = \frac{\|\vec{E}'\|^3}{\|\vec{E}' \wedge \vec{E}''\|} = \frac{a^2 + b^2}{a}$$

et

$$\mathfrak{T} = - \frac{\|\vec{E}' \wedge \vec{E}''\|^2}{(\vec{E}', \vec{E}'', \vec{E}''')} = - \frac{a^2 + b^2}{b}.$$

Si b est positif (fig. 14) l'hélice est *dextrorsum* (vis à droite) et si b est négatif (fig. 15), l'hélice est *sinistrorsum* (vis à gauche).



FIG. 14.



FIG. 15.

REMARQUE. — La courbure et la torsion ont même valeur en tout point de l'hélice, ce que l'on pouvait prévoir puisque l'hélice peut glisser sur elle-même (*déplacement hélicoïdal*).

Courbes planes. — Les courbes planes sont à torsion nulle, on a donc $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{1}{R}\vec{T}$. Soit alors I le point de la normale défini par $\vec{MI} = R\vec{N}$.

Nous allons montrer que I est le point de contact de la normale avec son enveloppe.

En effet si l'on dérive l'égalité $\vec{OI} = \vec{OM} + \vec{MI}$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{OI}}{ds} &= \frac{d\vec{OM}}{ds} + \frac{dR}{ds}\vec{N} + R\frac{d\vec{N}}{ds} \\ &= \vec{T} + \frac{dR}{ds}\vec{N} + R\left(-\frac{1}{R}\vec{T}\right) \\ &= \frac{dR}{ds}\vec{N}. \end{aligned}$$

Ainsi la tangente à la courbe décrite par I est la normale à C .
Le rayon de courbure est donné par

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|}.$$

Pour une courbe d'équation $y = f(x)$, on obtient (en prenant x comme paramètre)

$$R = \frac{(1 + f'^2(x))^{3/2}}{|f''(x)|}.$$

EXERCICES

1° Aire de l'ellipsoïde de révolution aplati d'équation :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (a > c > 0).$$

$$R. \quad 2\pi a \left[a + \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{Log} \frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c} \right].$$

2° Longueur de l'arche de cycloïde définie par $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.
Aire comprise entre cette arche et Ox .

$$R. \quad 8a, 3\pi a^2.$$

3° Longueur de l'arc de courbe gauche :

$$x = \frac{2 \sin z}{z}, \quad y = \frac{2 \cos z}{z}, \quad 1 < z < 2.$$

$$R. \quad 2.$$

*4° Soit la chaînette d'équation $y = \operatorname{ch} x$ et les points A et B de cette chaînette tels que OA et OB soient tangents à la chaînette. Vérifier que, en tournant autour de Ox , l'arc AB et le contour AOB engendrent des aires de même mesure.

*5° Tracer la courbe (épicycloïde à 4 rebroussements) définie par

$$x = \cos 5t + 5 \cos t, \quad y = \sin 5t + 5 \sin t$$

et calculer sa longueur.

$$R. \quad 40.$$

*6° Tracer la courbe définie paramétriquement par $x = \cos t$, $y = \sin t \cos t$. Calculer l'aire S intérieure à cette courbe et les volumes V et V' engendrés par l'aire tournant autour de Ox ou de Oy .

$$R. \quad S = \frac{4}{3} \quad V = \frac{4\pi}{15} \quad V' = \frac{\pi^2}{4}.$$

*7° Aire de la surface engendrée par la cardioïde (d'équation polaire

$$r = a(1 + \cos \theta))$$

en tournant autour de son axe de symétrie.

$$R. \quad \frac{32\pi a^2}{5}.$$

*8° On considère l'arc de courbe décrit par le point M de coordonnées

$$x = 4t - \sin 4t, \quad y = 8 \sin^4 t$$

quand t varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Tracer cet arc de courbe. La tangente en un point M à cet

arc coupe Ox en P . Vérifier que le rapport $\frac{\overline{OM}}{\overline{PM}}$ reste constant et égal à $\frac{4}{3}$.

**9° Sur la lemniscate d'équation polaire $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$, on considère les 4 points $A(\theta = 0)$, $O(\theta = \frac{\pi}{4})$, $M_1(\theta = \theta_1)$, $M_2(\theta = \theta_2)$ tels que

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \cos \theta_1 \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vérifier que les arcs $\widehat{AM_1}$ et $\widehat{OM_2}$ ont même longueur.

**10° Sans chercher à calculer les primitives, calculer les rayons de courbure $\mathcal{R}$ et de torsion $\mathcal{T}$ de la courbe définie paramétriquement par :

$$x = \int_0^t \cos t \frac{1 + \operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} dt, \quad y = \int_0^t \sin t \frac{1 + \operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} dt, \quad z = \int_0^t \operatorname{sh} t \frac{1 + \operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} dt.$$

$$R. \quad \mathcal{R} = \frac{1 + \operatorname{ch}^2 t}{\sqrt{2}}, \quad \mathcal{T} = -\frac{1 + \operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh} t}.$$

**11° On considère la courbe gauche définie par :

$$x = t, \quad y = \frac{t^2}{2}, \quad z = \frac{t^3}{6}$$

et l'hélice H passant par l'origine et ayant en ce point même tangente, même plan osculateur, même rayon de courbure et même rayon de torsion que la courbe donnée. Calculer le rayon du cylindre sur lequel H est tracée, le pas de l'hélice H et déterminer les équations de l'axe de cette hélice.

$$R. \text{ Rayon du cylindre } \frac{1}{2}, \text{ pas } \pi.$$

$$\text{Équations de l'axe } y = \frac{1}{2}, z = x.$$

**12° Montrer que les courbes gauches qui ont un rayon de courbure $\mathcal{R}$ constant et un rayon de torsion $\mathcal{T}$ constant sont des hélices (on établira que le vecteur $\vec{\mathcal{C}}\vec{B} - \mathcal{R}\vec{T}$ est un vecteur constant et on choisira un axe de coordonnées parallèle à ce vecteur).

CHAPITRE XXXIV

COMPLÉMENTS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. — Équations différentielles.

Nous avons déjà appris à *intégrer* certaines *équations différentielles*, c'est-à-dire à chercher une fonction inconnue $y(x)$ d'une variable x qui doit satisfaire à une équation de la forme :

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

où $F(t, t_0, t_1, \dots, t_n)$ est une fonction donnée des $n + 2$ variables indépendantes $t, t_0, \dots, t_n$.

Une *solution* ou *intégrale* de cette équation sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ est alors une fonction $y(x)$ définie sur I ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n telle que si l'on remplace t par x , t_0 par $y(x)$, t_1 par $y'(x)$, $\dots$, t_n par $y^{(n)}(x)$ dans l'expression $F(t, t_0, t_1, \dots, t_n)$, on obtienne une fonction de x nulle pour toute valeur de $x \in I$. Le graphe de la fonction $y(x)$ est appelé une *courbe intégrale* de l'équation différentielle.

L'ordre le plus élevé des dérivations de la fonction inconnue intervenant effectivement dans l'équation différentielle est appelé l'*ordre* de cette équation différentielle. C'est ainsi que l'équation différentielle :

$$x^2 y' - y^3 + x = 0$$

est du premier ordre, et que l'équation différentielle :

$$y'' y''' - x^2 - y^2 = 0$$

est du troisième ordre.

2. — Exemples de méthodes paramétriques.

La possibilité de représenter une courbe intégrale sous forme paramétrique ou sous forme implicite permet de résoudre certaines équations différentielles. Indiquons quelques cas où de telles méthodes s'appliquent.

EXEMPLE 1. — *Équations homogènes.* — Les équations différentielles homogènes du premier ordre sont des équations de la forme

$$(1) \quad y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

c'est-à-dire celles pour lesquelles y' est une fonction déterminée du rapport $\frac{y}{x}$.

Cette propriété suggère de prendre comme nouvelle variable $t = \frac{y}{x}$. On a donc :

$$y = tx \quad dy = t dx + x dt \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx}.$$

L'équation (1) s'écrit alors :

$$(1') \quad t + x \frac{dt}{dx} = F(t).$$

Nous obtenons donc l'équation à variables séparées :

$$(1'') \quad \frac{dx}{x} = \frac{dt}{F(t) - t}.$$

En désignant par $\varphi(t)$ une primitive (par rapport à t) de la fonction $\frac{1}{F(t) - t}$, et en intégrant membre à membre l'égalité précédente, on trouve :

$$x = K e^{\varphi(t)}.$$

Les courbes intégrales sont donc représentées par les équations implicites :

$$K e^{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)} - x = 0$$

ou par les représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = K e^{\varphi(t)} \\ y = K t e^{\varphi(t)}. \end{cases}$$

On voit sur ces équations que la transformée d'une courbe intégrale par une homothétie de centre O est encore une courbe intégrale, ce que la forme de l'équation (1) aurait d'ailleurs pu permettre de montrer directement.

REMARQUE. — Le passage de l'équation (1') à l'équation (1'') n'a pu se faire qu'en divisant par $F(t) - t$, ce qui entraîne les remarques suivantes :

1° Si $F(t) = t$ pour toute valeur de t , c'est-à-dire si l'équation (1) est de la forme :

$$y' = \frac{y}{x}$$

le calcul précédent n'est pas applicable. En fait nous avons vu que dans ce cas la solution générale s'écrit $y = Kx$ et que les courbes intégrales sont les droites passant par O .

2° Si t_0 est une racine de l'équation $F(t_0) = t_0$, on voit que l'équation (1) admet la solution $t = t_0$, c'est-à-dire $y = t_0 x$ qui apparaît ainsi comme une

solution singulière (cf. § 1, chap. XXII) de cette équation, la courbe intégrale correspondante étant la droite passant par O de pente t_0 .

Soit à intégrer l'équation différentielle homogène

$$(2) \quad y' = \frac{x+y}{x-y}; \quad \text{on a ici} \quad f(t) = \frac{1+t}{1-t}$$

L'équation différentielle proposée s'écrit donc :

$$t + x \frac{dt}{dx} = \frac{1+t}{1-t}$$

c'est-à-dire :

$$x \frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{1-t}$$

ou encore :

$$(2') \quad \frac{dx}{x} = \frac{1-t}{1+t^2} dt.$$

On a :

$$\int \frac{1-t}{1+t^2} dt = \int \left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{2} \frac{2t}{1+t^2} \right] dt = \text{Arc tg } t - \frac{1}{2} \text{Log } (1+t^2) + C$$

d'où, en intégrant membre à membre l'équation (2') :

$$\text{Log } |x| = \text{Log } e^{\text{Arc tg } t} - \frac{1}{2} \text{Log } (1+t^2) + C.$$

La solution générale de (2') s'écrit donc :

$$x = K \frac{e^{\text{Arc tg } t}}{\sqrt{1+t^2}}$$

et les courbes intégrales de (2) sont définies paramétriquement par les équations :

$$\begin{cases} x = K \frac{e^{\text{Arc tg } t}}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = K t \frac{e^{\text{Arc tg } t}}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

En prenant comme nouveau paramètre $\theta = \text{Arc tg } t$, on voit que les courbes intégrales sont encore définies paramétriquement par les égalités :

$$\begin{cases} x = K e^{\theta} \cos \theta \\ y = K e^{\theta} \sin \theta. \end{cases}$$

Ce sont donc des spirales logarithmiques définies en coordonnées polaires par l'équation :

$$r = k e^{\theta}$$

On remarque que l'équation $f(t) = t$ s'écrit ici $t^2 + 1 = 0$ et n'a pas de solution (réelle) ce qui entraîne que l'équation différentielle (2) n'a pas de solution singulière (dans le domaine réel).

EXEMPLE 2. — *Équations résolues en y.* — Supposons que l'on ait à intégrer une équation résolue en y , c'est-à-dire de la forme :

$$(3) \quad y = F(x, y').$$

En prenant comme nouvelle variable $y' = t$ et en posant donc $F(x, y') = F(x, t)$, on voit en dérivant par rapport à x chacun des deux membres de l'égalité précédente que les intégrales de (3) sont encore intégrales de :

$$t = F'_x + F'_t \frac{dt}{dx}$$

c'est-à-dire encore de :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F'_t}{t - F'_x}$$

x est donc une fonction de t , solution d'une équation différentielle résolue par rapport à $\frac{dx}{dt}$. Si nous savons intégrer cette dernière équation nous exprimons x en fonction de t , soit $x = \varphi(t)$, et nous porterons cette valeur dans l'égalité (3), d'où $y = F(\varphi(t), t)$. Les courbes intégrales de l'équation (2) seront donc représentées paramétriquement par les égalités :

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = F(\varphi(t), t) \end{cases}$$

EXEMPLE 3. — *Équations de Lagrange.* — Ceci s'applique en particulier aux équations de Lagrange, c'est-à-dire aux équations de la forme :

$$y = x g(y') + f(y').$$

On a ici :

$$F(x, t) = x g(t) + f(t)$$

et on est donc ramené à intégrer l'équation :

$$t = g(t) + [xg'(t) + f'(t)] \frac{dt}{dx}.$$

En exceptant certaines solutions possibles correspondant aux cas où t serait constant, on est ramené à intégrer l'équation linéaire :

$$[t - g(t)] \frac{dx}{dt} = x g'(t) + f'(t).$$

On remarquera que si t_0 est une racine de l'équation $t - g(t) = 0$, c'est-à-dire si on a $t_0 = g(t_0)$, on peut prendre t constant égal à t_0 , ce qui conduit à la solution singulière :

$$y = t_0 x + f(t_0)$$

de l'équation de Lagrange.

Soit, par exemple, à intégrer l'équation de Lagrange :

$$y = 2xy' + y'^2.$$

On a ici :

$$g(t) = 2t \quad \text{et} \quad f(t) = t^2.$$

On est donc ramené à intégrer l'équation différentielle linéaire :

$$-t \frac{dx}{dt} = 2x + 2t.$$

L'équation sans deuxième membre associée admet l'intégrale générale $x = \frac{K}{t^2}$. La méthode de la variation de la constante conduit à la solution particulière de l'équation avec second membre $x = -\frac{2}{3}t$.

L'équation différentielle linéaire admet donc pour solution générale :

$$x = \frac{K}{t^2} - \frac{2}{3}t$$

et la solution générale de l'équation de Lagrange est définie sous forme paramétrique par les équations :

$$\begin{cases} x = \frac{K}{t^2} - \frac{2}{3}t \\ y = \frac{2K}{t} - \frac{t^2}{3}. \end{cases}$$

L'équation $g(t) = t$ admet ici pour seule solution $t = 0$ qui conduit à la seule solution singulière $y = 0$.

EXEMPLE 4. — *Équation résolue en x .* — Dans le cas d'une équation différentielle résolue en x , c'est-à-dire de la forme :

$$x = F(y, y')$$

on peut considérer x comme fonction de y , on a alors :

$$\frac{dx}{dy} = x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

et x est solution de l'équation différentielle :

$$x = F\left(y, \frac{1}{x}\right)$$

qui est sous forme résolue par rapport à la fonction inconnue, c'est-à-dire de la forme que nous venons d'envisager.

EXEMPLE 5. — *Emploi de deux paramètres.* — Plus généralement envisageons maintenant le cas où l'équation différentielle :

$$(4) \quad f(x, y, y') = 0$$

n'est pas nécessairement résoluble par rapport à y' .

On considère alors la surface d'équation :

$$f(x, y, z) = 0$$

et on cherche à la représenter paramétriquement sous la forme :

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(u, v) \quad z = \chi(u, v).$$

Supposons que l'on ait trouvé une telle représentation. Les égalités précédentes permettent d'écrire :

$$dx = \varphi'_u du + \varphi'_v dv \quad \text{et} \quad dy = \psi'_u du + \psi'_v dv.$$

Pour que x et y soient liés par la relation (4) il faut et il suffit donc que u et v soient liés par la relation :

$$\frac{\psi'_u du + \psi'_v dv}{\varphi'_u du + \varphi'_v dv} = \chi(u, v)$$

qui est de la forme :

$$\frac{du}{dv} = F(u, v)$$

c'est-à-dire qui est une équation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction $u(v)$, équation écrite sous forme résolue par rapport à la dérivée $\frac{du}{dv}$.

Lorsque nous aurons intégré cette équation, x et y seront définis paramétriquement à partir des égalités.

$$\begin{cases} x = \varphi(u(v), v) \\ y = \psi(u(v), v). \end{cases}$$

Soit par exemple à intégrer l'équation différentielle :

$$(5) \quad y^3 + y'^3 - yy' = 0.$$

La surface d'équation :

$$y^3 + z^3 - yz = 0$$

admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = u \\ y = \frac{v}{1 + v^3} \\ z = \frac{v^2}{1 + v^3} \end{cases}$$

On a donc $dx = du$, $dy = \frac{1 - 2v^3}{(1 + v^3)^2} dv$ et on est conduit à intégrer l'équation différentielle :

$$\frac{1 - 2v^3}{(1 + v^3)^2} dv = \frac{v^2}{1 + v^3}.$$

Cette équation est à variables séparées et on peut écrire :

$$u = \int \frac{1 - 2v^3}{(1 + v^3)v^2} dv$$

ce qui conduit à la solution générale de l'équation (5) définie sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{v} + \text{Log} \frac{v + 1}{\sqrt{v^2 - v + 1}} - \sqrt{3} \text{Arc tg} \frac{2v - 1}{\sqrt{3}} + C \\ y = \frac{v}{1 + v^3} \end{cases}$$

où C est une constante arbitraire.

Observations générales. — En conclusion de ce qui précède, lorsqu'on aura à intégrer une équation différentielle du premier ordre on observera la marche suivante :

On essaiera de résoudre l'équation par rapport à y' . Si cela est possible on examinera si l'équation ainsi obtenue est d'un type classique (linéaire, à variables séparées, homogène, de Bernoulli ou de Ricatti). Sinon on regardera si on peut trouver un changement de variables (portant sur x , sur y , ou sur x et y) qui ramène l'équation à un type classique. Ce n'est qu'après plusieurs tentatives infructueuses que l'on devra renoncer à intégrer l'équation et se contenter des méthodes approchées du chapitre suivant.

Si l'équation proposée n'est pas résoluble en y' , on utilisera des méthodes paramétriques pour essayer d'obtenir une équation résoluble par rapport à la dérivée de la fonction inconnue.

On voit que les méthodes utilisées peuvent être très variées. Insistons sur le fait que des changements de variables bien conduits permettent fréquemment la résolution d'équations différentielles. Une interprétation géométrique peut d'ailleurs parfois guider dans le choix des changements de variables à effectuer.

Remarquons encore que nous considérons l'équation différentielle comme intégrée lorsque nous avons obtenu y en fonction x , ou x en fonction de y , ou lorsque nous avons exprimé x et y en fonction d'un paramètre, ou enfin lorsque la relation entre x et y est écrite sous forme d'équation. En bref, nous cherchons une représentation des courbes intégrales.

La résolution des équations différentielles conduit à des quadratures, c'est-à-dire à des calculs de primitives. Il peut arriver que celles-ci ne puissent s'exprimer à l'aide de fonctions connues. Strictement parlant, nous aurons intégré l'équation différentielle, mais la solution obtenue contenant des symboles d'intégration sera plus ou moins commode à manier. Nous reviendrons sur ce point à propos des méthodes de résolution approchée des équations différentielles.

Il faut enfin prendre garde de ne pas oublier, s'il en existe, les solutions singulières des équations différentielles. Ces solutions singulières sont assez facilement omises. Or elles peuvent jouer un rôle très important.

3. — *Cas d'abaissement de l'ordre.*

Pour intégrer une équation différentielle d'ordre n :

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

on cherchera, en faisant des changements sur la variable indépendante et sur la fonction inconnue, à se ramener à l'intégration d'une équation d'ordre $n - 1$. Par répétition du procédé on peut ainsi dans quelques cas se ramener à une équation différentielle du premier ordre et appliquer les méthodes déjà étudiées. Cet abaissement de l'ordre d'une équation différentielle peut, en particulier, se faire dans les deux cas suivants.

1^{er} cas : la fonction y n'intervient pas explicitement. — Soit une équation différentielle :

$$f(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

dans laquelle la fonction inconnue y n'intervient que par ses dérivées. Si nous prenons comme fonction inconnue :

$$y' = z$$

nous sommes ramenés à une équation d'ordre inférieur à n :

$$f(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0$$

et si nous savons déterminer z , y se calculera par une dernière quadrature :

$$y = \int z \, dx.$$

EXEMPLE 6. — Soit à intégrer l'équation différentielle :

$$xy'' + y' - 1 = 0.$$

Posons $y' = z$ et résolvons :

$$xz' + z - 1 = 0$$

ou :

$$\begin{aligned}(xz)' &= 1. \\ xz &= x + C \\ z &= 1 + \frac{C}{x}\end{aligned}$$

et par suite :

$$y = x + C \operatorname{Log} |x| + D.$$

EXEMPLE 7. — Soit à intégrer l'équation différentielle :

$$y''' = y''.$$

En posant $y'' = z$, cette équation s'écrit :

$$z' = z \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{z} = dx$$

et par suite :

$$z = Ce^x.$$

Par deux intégrations successives nous en tirons :

$$\begin{aligned}y' &= Ce^x + D \\ y &= Ce^x + Dx + E.\end{aligned}$$

2^e cas : la variable x n'intervient pas explicitement. — Soit une équation différentielle :

$$f(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

où la variable x n'intervient pas explicitement. Il est alors commode de prendre y comme variable et, en posant :

$$y' = z$$

de considérer z comme une fonction inconnue de y .

Nous avons alors :

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy}$$

puis :

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left(z \frac{dz}{dy} \right) = z \frac{d}{dy} \left(z \frac{dz}{dy} \right) = z \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 + z^2 \frac{d^2 z}{dy^2},$$

etc.

En substituant ces valeurs dans l'équation initiale, on obtient une équation différentielle :

$$F\left(y, z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

d'ordre $n - 1$ par rapport à la fonction z .

Si on sait intégrer cette équation, nous obtiendrons z en fonction de y , soit :

$$z = \varphi(y)$$

et par suite :

$$dx = \frac{dy}{\varphi(y)}$$

qui, par intégration, nous donnera x en fonction de y .

EXEMPLE 8. — Soit à intégrer l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0$$

que nous avons déjà intégré d'une autre manière au chapitre XXI.

En posant :

$$y' = z \quad y'' = z \frac{dz}{dy}$$

l'équation s'écrit :

$$z \, dz + y \, dy = 0$$

ou :

$$z^2 = A - y^2$$

et par suite :

$$dx = \pm \frac{dy}{\sqrt{A - y^2}}$$

ou :

$$x = \pm \operatorname{Arc} \cos \frac{y}{\sqrt{A}} + B$$

ce que l'on peut écrire :

$$y = \sqrt{A} \cos (x - B).$$

4. — Familles de courbes à un paramètre.

Dans tous les exemples que nous avons étudiés, nous avons vu que la solution générale (ou *intégrale générale*) d'une équation différentielle d'ordre n dépend de n paramètres arbitraires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Les diverses solutions obtenues en fixant les valeurs de ces paramètres sont dites *solutions* ou *intégrales particulières*.

Il en résulte que l'on peut en général imposer à une solution, c'est-à-dire à une courbe intégrale de satisfaire à n conditions imposées à l'avance.

C'est ainsi que si on se donne des nombres $x_0, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$, on peut chercher à imposer à la solution $y(x)$ de satisfaire aux conditions initiales

$$y(x_0) = \mu_0 \quad , \quad y'(x_0) = \mu_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \mu_{n-1}.$$

Dans le cas d'une équation différentielle d'ordre 1, les solutions dépendent de 1 paramètre.

Supposons que les courbes intégrales soient définies implicitement par l'équation

$$g(x, y, \lambda) = 0,$$

les courbes intégrales passant par le point M_0 de coordonnées x_0 et y_0 correspondront aux valeurs du paramètre λ racines de l'équation (en λ) :

$$g(x_0, y_0, \lambda) = 0.$$

Inversement, étant donné une famille de courbes planes C dépendant d'un paramètre λ , il est souvent utile de chercher s'il existe une équation différentielle du premier ordre dont toutes les courbes planes soient des courbes intégrales. Cette équation différentielle est alors dite *l'équation différentielle de cette famille de courbes*.

Dans le cas où ces courbes sont définies implicitement par l'équation :

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$

on obtient l'équation différentielle de la famille de courbes en éliminant λ entre cette équation et l'équation obtenue en dérivant par rapport à x l'égalité précédente, c'est-à-dire :

$$f'_x + f'_y y' = 0.$$

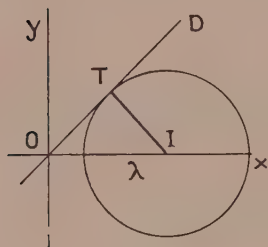


FIG. 1.

On sait en effet que le nombre y' défini par l'égalité précédente est la pente de la tangente à la courbe C au point de coordonnées x et y .

EXEMPLE 9. — Soit à chercher l'équation différentielle de la famille des cercles centrés sur Ox et tangents à la droite d'équation $y = x$.

Définissons un tel cercle C_λ par l'abscisse λ de son centre I . En désignant par T le point de contact de C et de la droite D d'équation $y = x$, la relation

$$IT = OI \sin \frac{\pi}{4} = OI \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ montre que le rayon } R_\lambda = IT \text{ de } C \text{ est égal à } |\lambda| \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le cercle C a donc pour équation :

$$(6) \quad (x - \lambda)^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{2}$$

c'est-à-dire encore :

$$(6') \quad x^2 + y^2 - 2\lambda x + \frac{\lambda^2}{2} = 0$$

λ étant une constante, dérivons cette équation par rapport à x . Nous obtenons :

$$(7) \quad 2x + 2yy' - 2\lambda = 0.$$

L'équation différentielle de la famille de courbes est donc obtenue en éliminant λ entre les équations (6) et (7) (ou (6') et (7)).

On tire de (7) :

$$\lambda = x + yy'$$

et en portant cette valeur de λ dans l'égalité (6) on obtient l'équation différentielle cherchée :

$$y^2 y'^2 + y^2 = \frac{(x + yy')^2}{2}$$

c'est-à-dire encore :

$$(8) \quad y^2 y'^2 - 2x yy' + 2y^2 - x^2 = 0.$$

5. — *Interprétation géométrique d'une équation différentielle du premier ordre.*

Étant donné une courbe plane C et un point M de cette courbe, rappelons que l'on appelle *élément de contact* en M de la courbe C l'ensemble du point M et de la tangente MT de la courbe C au point M . Cet élément de contact est déterminé par les trois nombres x , y et y' , x et y étant les coordonnées de M et y' la pente de la tangente MT .

On voit en particulier que pour que deux courbes C et C' aient un même élément de contact, il faut et il suffit qu'elles soient tangentes en un point M . Si on impose aux éléments de contact de la courbe C de vérifier une certaine propriété (P), celle-ci se traduit en général par une relation de la forme :

$$(9) \quad f(x, y, y') = 0$$

c'est-à-dire par une équation différentielle.

On voit alors que les courbes intégrales de l'équation différentielle (9) sont les courbes dont les éléments de contact vérifient la propriété (P).

Cette interprétation géométrique des équations différentielles montre que *si la courbe E est enveloppe de courbes intégrales de l'équation différentielle, elle est elle-même une courbe intégrale*. La solution correspondant à cette enveloppe peut ne pas faire partie de l'intégrale générale. Pour cela elle est dite *solution* ou *intégrale singulière*.

C'est ainsi que l'équation à variables séparées

$$y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$$

admet pour intégrale générale

$$y = \sin(x^2 + C)$$

et que l'enveloppe de cette famille de courbes se compose des deux droites d'équations $y = \pm 1$ qui sont des intégrales singulières.

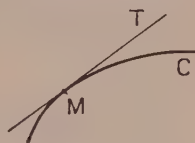


FIG. 2.

Cette interprétation géométrique permet aussi de traiter un certain nombre de problèmes concernant les courbes intégrales de l'équation différentielle (9) :

M_0 étant un point du plan de coordonnées x_0 et y_0 , une courbe intégrale passant par le point M_0 a sa pente m qui vérifie l'égalité :

$$f(x_0, y_0, m) = 0.$$

On peut montrer d'autre part que, si m est un nombre (réel) qui vérifie l'égalité précédente, il y a en général une courbe intégrale et une seule qui passe par le point M et qui a pour pente m .

En particulier, m étant une constante, le lieu I_m des points M du plan tels qu'une courbe intégrale passant par M ait pour pente m a pour équation implicite :

$$f(x, y, m) = 0.$$

Les courbes I_m (m prenant une valeur quelconque) sont dites les *courbes isoclines* de l'équation différentielle.

EXEMPLE 10. — Reprenons l'équation différentielle :

$$(8) \quad y^2 y'^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 = 0.$$

Les courbes intégrales passant par le point M de coordonnées x et y ont leurs pentes m en M racines de l'équation :

$$(10) \quad y^2 m^2 - 2xym + 2y^2 - x^2 = 0.$$

Cette équation du second degré en m n'aura de solution que si son discriminant est positif ou nul, c'est-à-dire si :

$$x^2 y^2 - y^2 (2y^2 - x^2) \geq 0$$

cette inégalité (qui s'écrit encore $|x| \geq |y|$) exprime que le point M se trouve dans la région du plan comprise entre les deux bissectrices des axes (région non hachurée sur la figure 3).

Il n'y a donc pas de courbe intégrale (du moins réelle) dans la région hachurée. En tout point de la région non hachurée non situé sur la frontière de cette

région (c'est-à-dire sur l'une des droites $y = x$ et $y = -x$) l'équation (10) admet deux racines distinctes m_0 et m_1 qui sont les pentes en M des tangentes aux deux cercles passant par M centrés sur Ox et tangents à la première bissectrice des axes.

L'enveloppe de ces cercles est constituée par les deux droites d'équations $y = x$ et $y = -x$, et ces deux droites sont effectivement des courbes intégrales singulières de l'équation (8) comme on le vérifie immédiatement.

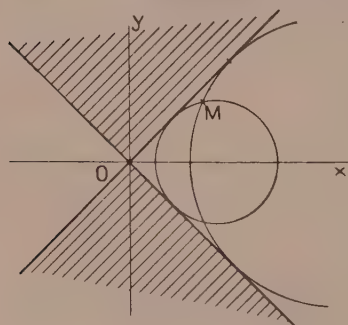


FIG. 3.

En un point M distinct de O et situé sur la droite d'équation $y = x$, l'équation (10) n'admet qu'une seule racine (double). Il y a en fait deux courbes intégrales passant par un tel point : le cercle centré sur Ox et tangent en M à la droite $y = x$ et l'intégrale singulière constituée par la droite $y = x$. Ces deux courbes intégrales ont même élément de contact en M . On aurait un résultat analogue si le point M appartenait à la droite $y = -x$ (et était distinct de O).

Lorsque M est en O l'équation (10) s'écrit $0 = 0$. Elle n'impose donc plus de condition à la pente m (on dit pour cette raison que O est un point singulier de l'équation différentielle (8)). En fait, il n'y a que deux courbes intégrales (réelles) passant par O et qui sont les droites $y = x$ et $y = -x$.

REMARQUE. — On peut interpréter géométriquement une équation différentielle du second ordre

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Comme une condition imposée à la courbe intégrale au point M et qui porte sur l'élément de contact et la courbure au point M . C'est ainsi que l'égalité de la page 474 montre que, lorsque R est un nombre fixe, les courbes intégrales de l'équation différentielle :

$$R |y''| - (1 + y'^2)^{3/2} = 0$$

sont les courbes dont le rayon de courbure est constant et égal à R .

On peut voir que cette équation admet pour intégrale générale la famille à 2 paramètres formée par les cercles de rayon R .

6. — Courbes définies par une propriété différentielle.

Certains problèmes de géométrie ou certaines traductions géométriques de problèmes d'origine mécanique ou physique conduisent à rechercher des courbes vérifiant une propriété différentielle, c'est-à-dire dont les éléments de contact vérifient une propriété donnée (P). Comme nous l'avons dit dans le précédent paragraphe, ces courbes sont les courbes intégrales d'une certaine équation différentielle. Pour déterminer ces courbes, on est donc amené à former cette équation différentielle, puis à l'intégrer.

EXEMPLE 11. — Soit à déterminer les courbes C telles que le point de contact de la tangente soit au milieu du segment découpé sur la tangente par les deux axes de coordonnées (fig. 4), soit $\overline{MP} = -\overline{MQ}$.

Nous avons un problème fonctionnel et nous prenons comme inconnue la fonction $f(x)$ telle que :

$$y = f(x)$$

représente une courbe ayant la propriété énoncée. x et y étant les coordonnées de M , l'équation de la tangente en M est :

$$Y - y = y'(X - x)$$

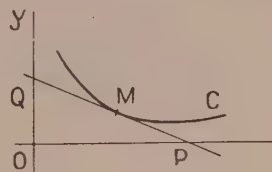


FIG. 4.

X et Y étant les coordonnées du point courant de la tangente. L'ordonnée de Q est donc :

$$\overline{OQ} = y - xy'$$

et doit être double de celle de M , d'où l'équation différentielle :

$$y - xy' = 2y.$$

L'équation est à variables séparées et s'écrit :

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\text{Log } |y| = -\text{Log } |x| + C$$

ou enfin :

$$y = \frac{K}{x}.$$

Les courbes cherchées sont les hyperboles asymptotes à Ox et à Oy .

7. — Trajectoires orthogonales d'une famille de courbes.

Étant donné une famille de courbes C_λ dépendant du paramètre λ , on appelle *trajectoire orthogonale* des courbes C_λ toute courbe Γ telle que par tout point M de Γ il passe une courbe C_λ orthogonale en M à Γ , c'est-à-dire que les tangentes en M aux deux courbes Γ et C_λ sont perpendiculaires.

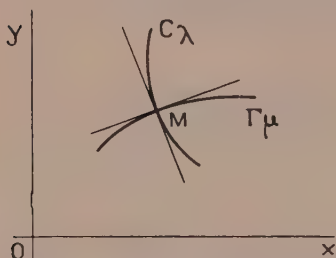


FIG. 5.

En fait, nous constaterons qu'il existe en général une infinité de telles trajectoires orthogonales constituées par une famille de courbes Γ_μ dépendant du paramètre μ . On voit immédiatement que les courbes Γ_μ étant trajectoires orthogonales des courbes C_λ

réciroquement les courbes C_λ sont trajectoires orthogonales des courbes Γ_μ .

EXEMPLE 12. — Si les courbes C_λ sont les cercles de centre O , les trajectoires orthogonales Γ_μ sont les droites passant par O .

EXEMPLE 13. — A et B étant deux points distincts dans le plan, si les courbes C_λ sont les cercles passant par A et B , les courbes Γ_μ sont les cercles du faisceau conjugué, ayant A et B comme points de Poncelet.

Pour chercher les trajectoires orthogonales des courbes C_λ , on peut opérer de la façon suivante. On commence par former l'équation différentielle des courbes C_λ , soit :

$$f(x, y, y') = 0.$$

Un élément de contact de la courbe C_λ étant défini par les trois nombres x , y et y' , définissons celui d'une trajectoire orthogonale par les trois nombres X ,

$Y, Y' = \frac{dY}{dX}$. Dire qu'au point correspondant les deux courbes sont orthogonales revient à écrire les égalités :

$$X = x \quad Y = y \quad Y' = -\frac{1}{y'}$$

d'où l'équation différentielle des trajectoires orthogonales :

$$f\left(X, Y, -\frac{1}{Y'}\right) = 0$$

qui, en revenant à l'écriture habituelle, s'écrit encore :

$$f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

En résumé,

On obtient l'équation différentielle des trajectoires orthogonales à une famille de courbes C_λ en remplaçant y' par $-\frac{1}{y'}$ dans l'équation différentielle des courbes C_λ .

EXEMPLE 14. — Cherchons les trajectoires orthogonales des paraboles de sommet O et d'axe Ox . Ces paraboles ont pour équation $y^2 = \lambda x$ ou $\lambda = \frac{y^2}{x}$ (λ étant le paramètre caractérisant une telle parabole). L'équation différentielle de ces paraboles s'obtient en dérivant par rapport à x la dernière équation. Elle s'écrit donc :

$$2xy' - y = 0$$

et l'équation des trajectoires orthogonales s'écrit :

$$2x + yy' = 0.$$

Elle est à variables séparées et s'intègre immédiatement pour donner :

$$2x^2 + y^2 = \mu \quad (\mu \text{ étant une constante arbitraire}).$$

Les trajectoires orthogonales Γ_μ sont donc des ellipses.

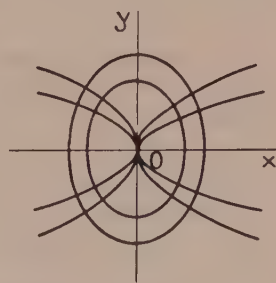


FIG. 6.

EXERCICES

1° Intégrer les équations différentielles :

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \quad y' = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^3 - 3xy^2}, \quad xy'^2 - 2yy' + x = 0, \quad y' = y^2 - \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

$$R. \quad x^2 + y^2 - Cy = 0 \quad \text{et} \quad y = 0, \quad xy^3 - yx^3 = C,$$

$$y = \frac{x^2 + C^2}{2C} \quad \text{et} \quad y = \pm x, \quad y = \frac{\operatorname{tg} \operatorname{Log} |Cx|}{x}.$$

2° Résoudre l'équation différentielle :

$$y = x(y'^2 + y') + \frac{1}{y'}.$$

$$R. \quad x = u^2(1 + Ce^u) \quad \text{et} \quad y = 1 + 2u + C(1 + u)e^u.$$

3° Trajectoires orthogonales des hyperboles asymptotes à Ox et Oy .

$$R. \quad x^2 - y^2 = C.$$

4° Intégrer $x^2y' + y(1 - y) = 0$ et tracer la courbe intégrale passant par $A(1, 5)$.

Calculer à $\frac{1}{100}$ près l'abscisse de l'asymptote.

$$R. \quad 1,29.$$

*5° Déterminer une courbe passant par l'origine O et telle que la longueur de l'arc OM soit proportionnelle à la distance OM quand M décrit la courbe.

R. Spirale logarithmique.

*6° Trajectoires orthogonales des cercles de rayon constant centrés sur Ox . Montrer que les courbes obtenues (appelées tractrices) ont pour développées des chaînettes.

**7° Déterminer une courbe telle que, M étant un point quelconque de la courbe et N étant le point où la normale en M coupe Ox , la projection de MN sur OM ait une longueur constante.

R. Coniques de foyer O .

*8° Résoudre l'équation différentielle $(y - xy')^2 - Ay'^2 - B = 0$ (A et B étant des constantes). Montrer que la solution singulière est une conique. Dédurre de l'équation différentielle que le lieu des points d'où l'on peut mener à cette conique deux tangentes rectangulaires est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = A + B$.

*9° Courbe passant par l'origine et telle que l'angle α que fait la tangente en un point M de cette courbe avec l'axe Ox soit lié à l'ordonnée y du point M par la relation :

$$\cos \alpha = \frac{1 + y}{2 + y}.$$

$$R. \quad 2y^3 + 3y^2 - 9x^2 = 0.$$

****10°** Intégrer l'équation :

$$xy y'^3 + (x^2 - y^2 - c^2)y' - xy = 0$$

en faisant le changement de variables $X = x^2$, $Y = y^2$.

R.
$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{C + c^2} = 1.$$

****11°** On considère l'équation différentielle $y + 2y' + xy'^2 = 0$. Intégrer cette équation. Dans quelle région du plan doit se trouver le point $M(x, y)$ pour que, par ce point, passent deux courbes intégrales réelles? Vérifier que l'hyperbole qui limite cette région est le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales. Tracer les isoclines et vérifier que deux de ces isoclines sont intégrales singulières de l'équation différentielle. Montrer que l'enveloppe de ces isoclines est l'hyperbole déjà considérée :

R.
$$x = \frac{C - 2t - 2 \operatorname{Log} |t|}{(1 + t)^2}, \quad y = \frac{2t^2 \operatorname{Log} |t| - (C + 4)t^2 - 2t}{(1 + t)^2}$$

et :

$$y = 0 \quad \text{et} \quad y = -x + 2.$$

***12°** Montrer que si pour toutes les valeurs de x , la fonction $y(x)$ vérifie l'inégalité :

$$|y' + y| \leq 1$$

on a :

$$y(x) - e^{-x} y(0) \leq |1 - e^{-x}|.$$

13° Équations de Clairant. — Résoudre l'équation $y = xy' + f(y')$, où f est une fonction donnée. Quelles sont les courbes intégrales générales de l'équation? Quelle est l'intégrale singulière? Application : $f(y') = y'^3$.

R. L'intégrale générale est une famille de droites ($y = \lambda x + \lambda^3$); l'intégrale singulière est l'enveloppe de ces droites ($x = -3t^2$, $y = 2t^3$).

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE APPROCHÉE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. — *Calcul numérique approché d'une intégrale définie.*

Considérons l'intégrale définie :

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

où f désigne une fonction continue dans l'intervalle (a, b) et F désigne une primitive de f . Lorsque la fonction F s'exprime uniquement soit à l'aide de fonctions algébriques, soit à l'aide de fonctions transcendentes pour lesquelles nous possédons des tables numériques, le calcul numérique du nombre I se fera en suivant les indications que nous avons données au chapitre XXVI. Mais, fréquemment, nous ne pourrons employer cette méthode, soit parce qu'il sera impossible d'exprimer F au moyen de fonctions déjà connues, soit parce que, F s'exprimant au moyen de fonctions déjà connues, les tables numériques ne permettent pas d'atteindre la précision désirée sur le nombre I .

Dans ces conditions, on sera conduit à remplacer la fonction f par une fonction approchée g dont on sait calculer une primitive G . On prendra comme valeur approchée de I la quantité :

$$J = G(b) - G(a)$$

sachant que la différence $|J - I|$ sera inférieure à $(b - a) M$ (en supposant $a < b$) si M désigne le maximum de $|g(x) - f(x)|$ sur l'intervalle (a, b) .

En général, on utilisera comme fonction g des polynômes parce qu'alors la primitive G est également un polynôme et le calcul numérique de J n'offrira pas de difficultés. Un des procédés les plus simples pour déterminer un polynôme g est d'appliquer la formule de Taylor à la fonction f au voisinage d'un point bien choisi de l'intervalle (a, b) : nous reviendrons sur ce procédé dans le deuxième tome de cet ouvrage à propos des séries entières. Mais un tel procédé ne sera pas applicable si nous ne savons pas calculer commodément les dérivées successives de la fonction f , en particulier si, par exemple, la fonction f est une fonction expérimentale, le calcul numérique de f résultant d'une suite de mesures et non d'un processus mathématiquement défini.

En fait, si on veut déterminer un polynôme g qui soit une bonne approximation de la fonction f dans tout l'intervalle (a, b) , on sera amené à choisir un polynôme g de degré élevé de façon à disposer de nombreux coefficients pour ajuster le polynôme g à la fonction f . Le calcul de ces coefficients et l'étude du maximum de la différence $|f - g|$ seront souvent très pénibles et très longs.

Aussi est-il préférable de morceler l'intervalle (a, b) en intervalles suffisamment petits :

$$(a = \alpha_0, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), \dots, (\alpha_{k-1}, \alpha_k), \dots, (\alpha_{n-1}, \alpha_n = b)$$

pour que dans chacun de ces intervalles on puisse bien approcher f par un polynôme de faible degré. Nous examinerons successivement les cas où ces polynômes sont choisis de degré 0, 1 ou 2. Indiquons tout de suite qu'en général, quoique ce ne soit pas nécessaire, on simplifie les calculs en supposant tous les intervalles égaux : on posera $\frac{b-a}{n} = h$ qui s'appellera le *pas d'intégration* et le k -ième intervalle sera (α_{k-1}, α_k) ou $(a + (k-1)h, a + kh)$.

2. — Méthodes des rectangles.

Si dans le k -ième intervalle on suppose le polynôme g de degré 0 et égal à une constante, par exemple à $f(\alpha_{k-1})$ que nous écrirons f_{k-1} , on remplacera donc l'intégrale :

$$\int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} f(x) dx$$

par

$$\int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} f_{k-1} dx = (\alpha_k - \alpha_{k-1}) f_{k-1}.$$

On aura donc comme valeur J approchée de I :

$$J = \sum_{0 \leq k \leq n-1} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) f_{k-1}.$$

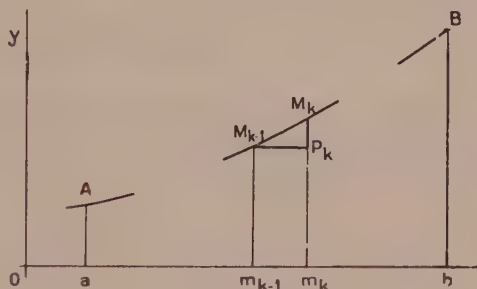


FIG. 1.

J sera la somme des aires des rectangles tels que $m_{k-1} M_{k-1} P_k m_k$ (fig. 1) et la différence :

$$|I - J|$$

sera d'autant plus faible que les intervalles choisis seront plus petits (ce résultat intuitif a été établi au chapitre XVII et a été alors le point de départ de la démonstration de l'existence de l'intégrale définie).

Si les intervalles sont égaux, nous aurons comme valeur approchée de I l'expression :

$$(1) \quad R = h(f_0 + f_1 + \dots + f_k + \dots + f_{n-2} + f_{n-1})$$

où :

$$f_k = f(a + kh).$$

Pour obtenir l'ordre de grandeur $I - R$, considérons la fonction de h .

$$\varphi(h) = \int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x) dx - hf(\alpha)$$

On a :

$$\begin{aligned}\varphi'(h) &= f(\alpha + h) - f(\alpha) \\ \varphi''(h) &= f'(\alpha + h)\end{aligned}$$

en supposant f dérivable.

En appliquant la formule de Taylor :

$$\varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + \frac{h^2}{2}\varphi''(\theta h)$$

nous pourrons écrire :

$$\varphi(h) = \frac{h^2}{2}f'(\alpha + \theta h)$$

d'où :

$$|\varphi(h)| \leq \frac{h^2}{2}N_1$$

N_1 étant le maximum du module de $|f'(x)|$ dans l'intervalle (a, b) . Nous en déduisons :

$$|I - R| \leq \frac{nh^2N_1}{2} = h \frac{(b-a)N_1}{2}.$$

Pour éviter le calcul de N_1 , il est préférable de remarquer que $I - R$ est un infiniment petit en général du premier ordre par rapport à l'infiniment petit principal h . On écrira donc :

$$I - R \sim hr$$

hr étant la partie principale de la différence $I - R$. Pour déterminer r , appliquons la formule (1) avec le pas $2h$, nous trouverons une valeur de R' telle que :

$$I - R' \sim 2hr.$$

et, par différence, $R - R' \sim hr$:

$$(2) \quad I - R \sim R - R'$$

Nous avons ainsi l'ordre de grandeur de l'erreur commise en remplaçant I par R . Bien entendu, il faut ajouter à cette erreur, l'erreur résultant du calcul des valeurs de f . Si on appelle η l'incertitude sur une valeur de f , l'incertitude sur R qui en résulte sera :

$$h\eta = (b-a)\eta.$$

Nous aurons donc calculé I avec une incertitude totale :

$$(3) \quad |R - R'| + (b-a)\eta.$$

3. — Méthode des trapèzes.

Si, dans le k -ième intervalle, on suppose g du premier degré, on pourra définir g par les conditions :

$$g(\alpha_{k-1}) = f_{k-1} \quad \text{et} \quad g(\alpha_k) = f_k$$

ce qui donne :

$$g(x) = \frac{x - \alpha_k}{\alpha_{k-1} - \alpha_k} f_{k-1} + \frac{x - \alpha_{k-1}}{\alpha_k - \alpha_{k-1}} f_k$$

et, en remplaçant $\int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} f(x) dx$ par $\int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} g(x) dx$, nous trouvons l'expression :

$$(\alpha_k - \alpha_{k-1}) \frac{f_{k-1} + f_k}{2}$$

(c'est-à-dire l'aire du trapèze $m_{k-1} M_{k-1} M_k m_k$ de la figure 1, puisque la droite $M_{k-1} M_k$ est le graphe de la fonction g considérée).

Si les intervalles considérés sont égaux, nous aurons alors la valeur approchée de I :

$$(4) \quad T = h \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_k + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right).$$

Pour obtenir l'ordre de grandeur de $I - T$, nous considérerons la fonction :

$$\varphi_1(h) = \int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x) dx - \frac{h}{2} (f(\alpha) + f(\alpha+h))$$

dont les dérivées successives sont (en supposant f trois fois dérivable) :

$$\varphi_1'(h) = \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha) - hf'(\alpha+h)}{2}$$

$$\varphi_1''(h) = -\frac{h}{2} f''(\alpha+h)$$

$$\varphi_1'''(h) = -\frac{1}{2} f''(\alpha+h) - \frac{h}{2} f'''(\alpha+h)$$

et, par suite :

$$\varphi_1(h) = -\frac{h^3}{12} [f''(\alpha + \theta h) + \theta h f'''(\alpha + \theta h)].$$

Si on désigne par N_2 et N_3 les maxima de $|f''(x)|$ et $|f'''(x)|$ dans l'intervalle (a, b) , on pourra donc écrire :

$$|\varphi_1(h)| \leq \frac{h^3}{12} (N_2 + h N_3)$$

et :

$$|I - T| \leq h^2 \frac{(b-a)(N_2 + h N_3)}{12}.$$

On écrira donc :

$$I - T \sim h^2 t$$

$h^2 t$ étant la partie principale, quand h tend vers 0, de $I - T$.

En appliquant la formule (4) avec le pas $2h$, on pourra calculer une valeur T' telle que :

$$I - T' \sim 4h^2 t$$

et, par suite :

$$T - T' \sim 3h^2 t$$

ou :

$$(5) \quad I - T \sim \frac{T - T'}{3}.$$

L'incertitude sur la valeur de I en la remplaçant par la valeur T sera donc :

$$(6) \quad \frac{1}{3} |T - T'| + (b - a) \eta.$$

4. — Méthode de Simpson.

Comme dernière méthode nous utiliserons des polynômes d'approximation de f du second degré, c'est ce qu'on appelle la méthode de Simpson. Supposons n pair et définissons un polynôme du second degré g par les conditions :

$$g(\alpha_{2k}) = f_{2k} \quad g(\alpha_{2k+1}) = f_{2k+1} \quad g(\alpha_{2k+2}) = f_{2k+2}$$

soit :

$$g(x) = \frac{(x - \alpha_{2k+1})(x - \alpha_{2k+2})}{(\alpha_{2k} - \alpha_{2k+1})(\alpha_{2k} - \alpha_{2k+2})} f_{2k} + \frac{(x - \alpha_{2k+2})(x - \alpha_{2k})}{(\alpha_{2k+1} - \alpha_{2k+2})(\alpha_{2k+1} - \alpha_{2k})} f_{2k+1} + \frac{(x - \alpha_{2k})(x - \alpha_{2k+1})}{(\alpha_{2k+2} - \alpha_{2k})(\alpha_{2k+2} - \alpha_{2k+1})} f_{2k+2}$$

ou encore, si les intervalles ont tous pour longueur h , et en posant :

$$x - \alpha_{2k+1} = X$$

$$g(x) = \frac{X^2 - hX}{2h^2} f_{2k} - \frac{X^2 - h^2}{h^2} f_{2k+1} + \frac{X^2 + hX}{2h^2} f_{2k+2} = G(X)$$

et :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} G(X) dX = \frac{h}{3} f_{2k} + \frac{4h}{3} f_{2k+1} + \frac{h}{3} f_{2k+2}.$$

Nous remplacerons donc :

$$\int_{\alpha_{2k}}^{\alpha_{2k+2}} f(x) dx \quad \text{par} \quad \frac{h}{3} (f_{2k} + 4f_{2k+1} + f_{2k+2}).$$

A partir de là, nous calculons comme expression approchée de I :

$$(7) \quad S = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

Pour évaluer l'approximation, étudions la fonction :

$$\varphi_2(h) = \int_{\alpha-h}^{\alpha+h} f(x) dx - \frac{h}{3} [f(\alpha-h) + 4f(\alpha) + f(\alpha+h)]$$

en supposant f dérivable 5 fois.

On vérifiera facilement que :

$$\varphi_2(0) = 0 \quad \varphi_2'(0) = 0 \quad \varphi_2''(0) = 0 \quad \varphi_2'''(0) = 0 \quad \varphi_2^{(4)}(0) = 0$$

et, en général :

$$\varphi_2^{(5)}(0) \neq 0.$$

Donc $\varphi_2(h)$ a le même ordre que h^5 et par suite :

$$I - S \sim h^4 s$$

s ayant une valeur finie quand h tend vers 0.

En calculant S' par la formule (7) avec le pas $2h$, nous aurons :

$$I - S' \sim 16h^4 s$$

d'où :

$$(8) \quad I - S \sim \frac{S - S'}{15}.$$

L'incertitude sur I en le remplaçant par S sera donc :

$$(9) \quad \frac{1}{15} |S - S'| + (b - a) \eta.$$

REMARQUE. — On peut profiter des relations (2), (5) ou (8) pour obtenir de nouvelles expressions approchées de I , soit :

$$2R - R' \quad \frac{4T - T'}{3} \quad \frac{16S - S'}{15}.$$

On notera que $\frac{4T - T'}{3}$ est précisément égal à S .

5. — Exemple.

Nous prendrons comme exemple l'intégrale :

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2 + 3} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = 0,302\,299\,9 \text{ à } \frac{1}{2} 10^{-7} \text{ près.}$$

Nous avons calculé les valeurs de la fonction à $\frac{1}{2} 10^{-6}$ près à l'aide d'une machine de bureau en prenant successivement des pas égaux à 0,1 et 0,2. Nous avons obtenu les valeurs données dans le tableau ci-après; l'avant-dernière

colonne donne la valeur de l'incertitude (formules (3), (6) ou (9)) pour un pas égal à 0,1 ; la dernière colonne donne l'erreur effective.

<i>Pas égal à 0,2</i>	<i>Pas égal à 0,1</i>	<i>Incertainitude</i>	<i>Erreur</i>
$R' = 0,319\ 245$	$R = 0,310\ 703$	0,008 543	0,008 403
$T' = 0,302\ 578$	$T = 0,302\ 369$	0,000 072	0,000 069
$S' = 0,302\ 298$	$S = 0,302\ 300$	0,000 001	0,000 000 2

Dans les deux premières lignes de ce tableau l'incertitude a pour partie importante l'erreur théorique entre les formules donnant R ou T et l'intégrale. Par contre, dans la dernière ligne l'incertitude est due essentiellement à l'incertitude dans le calcul des valeurs de la fonction $\frac{1}{x^2 + 3}$.

6. — Calcul approché des dérivées.

Considérons une fonction connue uniquement par une table de valeurs. En supposant que cette fonction admette des dérivées, il est facile d'écrire des formules donnant des valeurs approchées de ces dérivées. Ainsi :

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

est une valeur approchée de $f'(a)$ avec une erreur équivalente à $\frac{h^2}{6} f'''(a)$. De même :

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

est une valeur approchée de $f''(a)$ avec une erreur équivalente à $\frac{h^2}{12} f^{(4)}(a)$.

Mais à ces erreurs théoriques vont s'ajouter des erreurs dues à l'incertitude sur les valeurs de la fonction f . Si η désigne cette incertitude, il en résultera une incertitude égale à $\frac{\eta}{h}$ pour la dérivée première, c'est-à-dire que l'incertitude totale sur $f'(a)$ sera :

$$\frac{\eta}{h} + \frac{h^2}{6} |f'''(a)|$$

en supposant $f'''(a) \neq 0$. Contrairement à ce qui se passe dans le cas de l'intégration, une valeur de h trop petite conduira à une mauvaise approximation de $f'(a)$.

Ce résultat correspond à un fait évident : si deux fonctions f et g diffèrent

peu dans l'intervalle (a, b) , l'intégrale $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ sera petite en valeur absolue, tandis que nous ne pourrons rien conclure sur la différence :

$$|f'(x) - g'(x)|.$$

Ce résultat apparaît clairement sur la figure 2 où le trait régulier est le graphe de f tandis que le trait ondulé est le graphe de g .

L'intégration approchée est donc beaucoup plus aisée que la dérivation approchée.

Nous verrons apparaître l'aspect théorique de ces considérations au cours du deuxième tome de cet ouvrage.

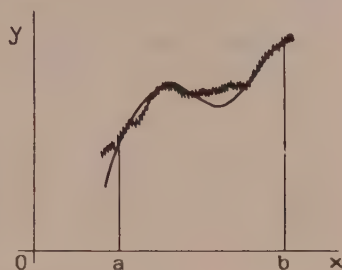


FIG. 2.

7. — Résolution approchée d'une équation différentielle du premier ordre par la méthode de Cauchy.

Soit l'équation différentielle :

$$(10) \quad y' = f(x, y).$$

Supposons que nous soyons dans le cas (fréquent) où nous ne sachions pas intégrer cette équation, c'est-à-dire ramener la détermination des solutions à des quadratures. Le problème qui va se poser est double : existe-t-il une solution satisfaisant à des conditions initiales données, c'est-à-dire telle que $y(a) = p$, où a et p sont des valeurs données ? Comment déterminer les valeurs numériques de cette solution ?

Une première méthode pour traiter ce problème apparaît immédiatement si on suppose que la fonction f admet des dérivées partielles de tous les ordres. En effet, en dérivant la relation (10) nous obtenons :

$$y'' = f''_x + y' f'_y = f''_x + f f'_y$$

puis :

$$y''' = f'''_{x^2} + f'_x f'_y + f f''_{xy} + y' (f''_{xy} + f'^2_{y^2} + f f''_{y^2})$$

soit :

$$y''' = f'''_{x^2} + 2f f''_{xy} + f^2 f''_{y^2} + f'_x f'_y + f f'^2_{y^2}$$

et ainsi de suite. On pourra donc calculer les dérivées successives de la fonction y et en appliquant la formule de Taylor on pourra résoudre le problème proposé. Nous laisserons de côté cette méthode que nous reprendrons au cours du deuxième tome de cet ouvrage.

En écrivant l'équation (10) sous la forme :

$$(11) \quad y(x) = p + \int_a^x f(t, y(t)) dt$$

On notera que ce théorème justifie à la fois l'existence d'une solution unique de l'équation (11) égale à p pour $x = a$ et son calcul approché par les formules (12).

En pratique, on supposera tous les intervalles égaux à $h = \frac{x - a}{n}$, appelé pas d'intégration. Nous écrirons donc successivement :

$$\begin{aligned} r_1 &= p + hf(a, p), \dots, r_{k+1} = r_k + hf(a + kh, r_k), \dots \\ R &= r_{n-1} + hf(a + (n-1)h, r_{n-1}). \end{aligned}$$

En fait, nous obtenons ainsi une table des valeurs approchées de la fonction y dans l'intervalle (a, x) .

L'évaluation de l'erreur commise est assez difficile. En effet, à chaque pas on remplace

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x, y) dx \quad \text{par} \quad hf(a + kh, r_k),$$

ce qui entraîne quatre sources d'erreurs :

1° L'erreur théorique provenant du remplacement d'une intégrale par une valeur approchée, erreur de l'ordre de h^2 (voir méthode des rectangles).

2° L'erreur théorique qui fait remplacer $hf(a + kh, y_k)$ par $hf(a + kh, r_k)$.

3° L'erreur due au fait que, r_k étant le résultat d'un calcul, est remplacé par une valeur approchée.

4° L'erreur de calcul sur la valeur de la fonction hf .

Dans la méthode des rectangles seules interviennent les erreurs n° 1 et n° 4. Le calcul montre que l'erreur n° 2 est du même ordre que la première et que l'erreur n° 3 est négligeable si le nombre de pas est faible. Cela entraîne que l'erreur théorique est de l'ordre de h et que, si les erreurs dues au calcul sont négligeables, on pourra admettre que l'incertitude sur $y(x)$ a pour valeur approximative :

$$(14) \quad |R - R'|$$

R' étant le résultat du même calcul fait avec un pas double.

8. — Méthodes de Runge-Kutta.

On peut améliorer le procédé de calcul défini par les égalités (12) et obtenir des méthodes analogues à celles des trapèzes et de Simpson (méthodes dites de *Runge-Kutta* du deuxième ordre et du quatrième ordre). Nous donnerons ces méthodes sans leur justification qui exige d'assez longs calculs.

La suite des calculs dans la méthode de Runge-Kutta du second ordre est la suivante :

t_k désignant la valeur approchée de y_k , on calcule :

$$\begin{aligned} \theta_k &= hf(a + kh, t_k) \\ \theta'_k &= hf(a + (k+1)h, t_k + \theta_k) \end{aligned}$$

puis :

$$t_{k+1} = t_k + \frac{\theta_k + \theta'_k}{2}.$$

Cette méthode étant du second ordre, si T et T' désignant les valeurs approchées de $y(x)$ avec le pas h et avec le pas double, la différence $|y(x) - T|$ a pour valeur approximative :

$$(15) \quad \frac{|T - T'|}{3}.$$

La méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre consiste, partant de la valeur approchée s_{2k} de y_{2k} , ce qui suppose n pair, de calculer :

$$\sigma_{2k} = hf(a + 2kh, s_{2k})$$

$$\sigma'_{2k} = hf(a + (2k + 1)h, s_{2k} + \sigma_{2k})$$

$$\sigma''_{2k} = hf(a + (2k + 1)h, s_{2k} + \sigma'_{2k})$$

$$\sigma'''_{2k} = hf(a + (2k + 2)h, s_{2k} + 2\sigma''_{2k})$$

puis :

$$s_{2k+2} = s_{2k} + \frac{1}{3}(\sigma_{2k} + 2\sigma'_{2k} + 2\sigma''_{2k} + \sigma'''_{2k})$$

Si S et S' désignent les valeurs approchées de $y(x)$ obtenues avec le pas h et le pas double, $|y(x) - S|$ a pour valeur approximative :

$$(16) \quad \frac{|S - S'|}{15}.$$

EXEMPLE. — Soient l'équation différentielle $y' = xy$ et la solution définie par la condition initiale $y(0) = 1$. Calculons $y(0,8)$.

On vérifie facilement que $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ et que $y(0,8) = e^{0,32} = 1,377\ 124$ à $\frac{1}{2} 10^{-6}$ près.

Dans le tableau ci-dessous on a donné le résultat des calculs faits avec un pas égal à 0,2 (1^{re} colonne), à 0,1 (2^e colonne), l'incertitude telle qu'elle résulte des formules (14), (15), (16) et l'erreur effective (3^e et 4^e colonnes).

$h = 0,2$	$h = 0,1$	Incertainitude	Erreur
$R' = 1,257\ 984$	$R = 1,314\ 230$ (1)	0,056 246	0,062 894
$T' = 1,387\ 303$	$T = 1,379\ 460$	0,002 614	0,002 336
$S' = 1,337\ 101$	$S = 1,377\ 125$	0,000 003	0,000 001

(1) On notera qu'ici l'incertitude, tout en étant du même ordre de grandeur que l'erreur, est inférieure à cette erreur. Cela s'explique aisément : la formule (14) suppose que la dérivée varie peu dans l'intervalle alors qu'ici y' varie de 0 à 1,1.

Signalons enfin que des méthodes analogues sont applicables aux équations différentielles d'ordre supérieur. Par exemple, l'équation :

$$y'' = f(x, y, y')$$

peut se remplacer par un système de deux équations du premier ordre :

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}$$

et on pourra appliquer à ce système la méthode de Cauchy ou celle de Runge-Kutta.

EXERCICES

1° Calculer :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \cos x^2 dx, \quad \int_1^2 e^x \operatorname{Log} x dx.$$

R. $1,396$ à $\frac{1}{2\,000}$ près ; $2,062\,7$ à $\frac{1}{10^4}$ près.

*2° Soit $y(x)$ la solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1+2xy}{1+xy}$ telle que $y(0) = 1$.

Calculer $y\left(\frac{3}{4}\right)$.

R. $y\left(\frac{3}{4}\right) = 2$ à $\frac{1}{1\,000}$ près.

**3° On considère la solution de l'équation différentielle $y' = x^2 + y^2$ soumise à la condition $y(0) = -1$. Déterminer à $\frac{1}{10}$ près la plus petite racine positive de l'équation $y(x) = 0$.

R. $1,2$.

**4° En appliquant à l'équation $y'' + y = 0$ la méthode de Runge-Kutta du second ordre, calculer $\cos 1$ et $\sin 1$.

R. $\cos 1 = 0,54$, $\sin 1 = 0,84$.

5° On considère la fonction $f(x) = \operatorname{Log} x = M \log x$. Calculer la valeur approximative de $f'(7)$ par application de la formule $\frac{f(7+h) - f(7-h)}{2h}$ où on donne à h les valeurs $0,001$, $0,01$, $0,05$, $0,1$ et $0,15$. Calculer directement $f'(7) = \frac{M}{7}$ et comparer les résultats.

R. $0,06$, $0,062$, $0,062\,1$, $0,062\,05$, $0,062\,07$, $0,062\,04$.

ESPACES VECTORIELS

1. — Les ensembles $\mathbf{R}^n$.

On est souvent conduit à décrire un objet, ou une situation, par une suite de n nombres réels, c'est-à-dire par un élément de l'ensemble $\mathbf{R}^n$, produit de n ensembles égaux à $\mathbf{R}$ (Rappels, § 4).

C'est ainsi que, dans une base donnée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, un vecteur $\vec{x}$ de l'espace s'écrit, d'une façon et d'une seule, sous la forme $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$. Ce vecteur $\vec{x}$ est caractérisé par la suite de ses trois composantes (x_1, x_2, x_3) qui est un élément de $\mathbf{R}^3$.

En mécanique la position et la vitesse d'un point M de l'espace sont définies par un couple de vecteurs $(\vec{OM}, \vec{v})$. Ce couple est caractérisé par un élément de $\mathbf{R}^6$ indiquant les trois composantes de $\vec{OM}$ suivi des trois composantes de $\vec{v}$.

Dans le circuit électrique de la figure 1 la description des intensités du courant dans chaque branche du circuit est obtenue par un élément de $\mathbf{R}^7 : (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7)$.

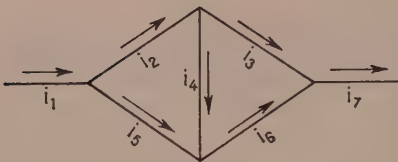


FIG. 1.

Un commerçant disposant de n marchandises différentes peut caractériser l'achat d'un client à l'aide d'un élément de $\mathbf{R}^n$:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

où x_i est la quantité de la i -ième marchandise demandée par ce client (les marchandises ayant été préalablement numérotées de 1 à n).

Rappelons que l'égalité de deux suites de n nombres réels $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ signifie que l'on a $x_i = y_i$ pour toutes les valeurs de l'indice i .

2. — Les espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$.

Dans certains cas on est conduit à munir l'ensemble $\mathbf{R}^n$ de deux opérations qui généralisent l'addition et la multiplication par un nombre réel déjà envisagées dans les cas $n = 1, 2$ (Rappels, § 13, 14) et $n = 3$ (chap. XXIII, § 1).

Addition. — Soient

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

on définit la somme $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$.

Multiplication. — Soient

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

on définit le produit $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

Ces opérations possèdent, entre autres, les propriétés suivantes :

I) L'addition fait de $\mathbf{R}^n$ un groupe commutatif.

II) La multiplication est telle que pour tout x et y de $\mathbf{R}^n$ et tout λ, μ de $\mathbf{R}$ on a

$$\begin{aligned} \lambda(x + y) &= \lambda x + \lambda y & , & & (\lambda + \mu)x &= \lambda x + \mu x \\ \lambda(\mu x) &= (\lambda\mu)x & , & & 1x &= x. \end{aligned}$$

Pour démontrer I) il suffit de remarquer que l'addition est une loi de composition interne, associative et commutative, que la suite nulle $(0, 0, \dots, 0)$ de $\mathbf{R}^n$ est élément neutre, que $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ est l'opposé de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Les propriétés II) se vérifient immédiatement en revenant aux définitions.

L'ensemble $\mathbf{R}^n$ muni de ces deux opérations est alors un *espace vectoriel réel*.

On donne de cette notion la définition générale suivante.

3. — *Espaces vectoriels réels.*

DÉFINITION 1. — *Un espace vectoriel réel est un ensemble E muni d'une addition et d'une multiplication.*

L'addition est une loi de composition interne notée additivement. Elle fait de E un groupe commutatif.

La multiplication fait correspondre à tout nombre réel λ et à tout élément x de E l'élément de E noté λx , avec les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda(x + y) &= \lambda x + \lambda y & , & & (\lambda + \mu)x &= \lambda x + \mu x \\ \lambda(\mu x) &= (\lambda\mu)x & , & & 1x &= x. \end{aligned}$$

où λ et μ sont des nombres réels, x et y des éléments de E .

Les éléments de E sont souvent dits des *vecteurs* et les nombres réels des *scalaires*.

L'élément neutre de l'addition, noté 0 (sans confusion possible avec le scalaire nul), est dit le *vecteur nul*. L'opposé du vecteur x est noté $(-x)$.

Dans ce qui suit on abrégera en écrivant « espace vectoriel » au lieu d'« espace vectoriel réel ».

Propriétés. — Dans tout espace vectoriel on a les propriétés suivantes :

1) Pour tout scalaire λ on a

$$\lambda 0 = 0.$$

En effet

$$\lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0 \quad \text{d'où} \quad \lambda 0 = 0.$$

2) Pour tout vecteur x on a

$$0x = 0 \quad (\text{le premier } 0 \text{ est le scalaire nul, le second } 0 \text{ le vecteur nul}).$$

En effet

$$0x = (0 + 0)x = 0x + 0x \quad \text{d'où} \quad 0x = 0$$

3) Pour tout vecteur x on a

$$(-1)x = (-x)$$

En effet

$$0 = 0x = (1 + (-1))x = 1x + (-1)x = x + (-1)x$$

donc $(-1)x$ est l'opposé de x .

$$4) \quad \lambda x = 0 \quad \text{et} \quad \lambda \neq 0 \quad \text{impliquent} \quad x = 0$$

En effet

$$\lambda x = 0 \quad \text{implique} \quad x = \lambda^{-1}0 = 0$$

EXEMPLE 1. — Soit A un ensemble donné et soit $E = \mathbf{R}^A$ l'ensemble des applications de A dans $\mathbf{R}$. On sait que la somme de deux applications f, g de E est l'application $f + g$ définie par l'égalité

$$\forall a \in A : (f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

et que le produit de l'application f par le nombre réel λ est l'application λf définie par

$$\forall a \in A : (\lambda f)(a) = \lambda f(a)$$

On vérifie aisément que l'ensemble E muni de ces deux opérations est un espace vectoriel (réel).

Les « vecteurs » sont ici des applications et le vecteur nul est l'application nulle f telle que $\forall a \in A : f(a) = 0$.

Lorsque A est un ensemble fini de n éléments on retrouve l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$. Soit en effet $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Une application f de A dans $\mathbf{R}$ est caractérisée par la suite des valeurs de f , soit $(f_1, f_2, \dots, f_n)$, où l'on a posé $f_i = f(a_i)$.

La suite des valeurs de l'application λf est $(\lambda f_1, \lambda f_2, \dots, \lambda f_n)$ puisque $(\lambda f)(a_i) = \lambda f(a_i) = \lambda f_i$, et la suite des valeurs de l'application $f + g$ est, avec des notations évidentes $(f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots, f_n + g_n)$ puisque

$$(f + g)(a_i) = f(a_i) + g(a_i) = f_i + g_i.$$

EXEMPLE 2. — L'ensemble $\mathbf{R}[x]$, des polynômes en x à coefficients réels, est un espace vectoriel pour l'addition des polynômes et leur multiplication par des nombres réels.

4. — Sous-espaces vectoriels.

Soit F une partie d'un espace vectoriel réel E remplissant les deux conditions suivantes :

Pour tout couple (x, y) de vecteurs de F on a $x + y \in F$.

Pour tout vecteur x de F et tout scalaire λ on a $\lambda x \in F$.

Muni de l'addition et du produit par les scalaires, F est alors un espace vectoriel.

En effet si $x \in F$ on a $(-x) = (-1)x \in F$ d'où $0 = x + (-x) \in F$. Il en résulte que F est un sous-groupe du groupe additif E , et comme la multiplication dans F est la multiplication dans E elle en possède les propriétés.

On dit que l'espace vectoriel F est un *sous-espace vectoriel* de E .

Notons que l'ensemble $\{0\}$, réduit à un seul élément, est toujours un sous-espace vectoriel de E , et que l'on doit considérer l'espace E lui-même comme un sous-espace vectoriel de E .

Soient $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$, k vecteurs donnés d'un espace vectoriel E . Tout sous-espace vectoriel de E contenant ces vecteurs contient aussi toutes les *combinaisons linéaires* de ceux-ci :

$$\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \dots + \lambda_k x^{(k)} \quad (\lambda_i \in \mathbf{R})$$

Il se trouve que l'ensemble F de ces combinaisons linéaires est un sous-espace vectoriel de E puisque

$$\sum_i \lambda_i x^{(i)} + \sum_i \mu_i x^{(i)} = \sum_i (\lambda_i + \mu_i) x^{(i)} \quad \text{et} \quad \lambda \sum_i (\lambda_i x^{(i)}) = \sum_i (\lambda \lambda_i) x^{(i)}$$

On dit que le *sous-espace vectoriel* F est *engendré par les vecteurs* $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ et l'on note : $F = \mathcal{E}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)})$.

EXEMPLE 3. — Soit $E = \mathbf{R}^4$ l'ensemble des applications d'un ensemble A dans $\mathbf{R}$ (cf. exemple 1).

Soit B une partie de A . L'ensemble des applications qui s'annulent sur B est un sous-espace vectoriel de E .

EXEMPLE 4. — L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n (qui contient le polynôme nul) est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[x]$.

EXEMPLE 5. — Soit E l'ensemble des applications de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$.

1) L'ensemble F des applications continues est un sous-espace vectoriel de E .

2) L'ensemble G des applications dérivables est un sous-espace vectoriel de F , et donc de E .

5. — Dépendance et indépendance linéaire.

DÉFINITION 2. — On dit que les vecteurs $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ d'un espace vec-

toriel E sont linéairement dépendants s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ non tous nuls et tels que

$$\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \dots + \lambda_k x^{(k)} = 0$$

On dit que les vecteurs $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ sont linéairement indépendants s'ils ne sont pas linéairement dépendants c'est-à-dire si l'égalité

$$\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \dots + \lambda_k x^{(k)} = 0$$

implique

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

EXEMPLE 6. — Soient $x^{(1)} = (1, -1, -1)$, $x^{(2)} = (1, 1, 1)$, et $x^{(3)} = (1, 0, 0)$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Ils sont linéairement dépendants puisque l'on a

$$x^{(1)} + x^{(2)} = (2, 0, 0) = 2x^{(3)}$$

soit

$$x^{(1)} + x^{(2)} + (-2)x^{(3)} = 0$$

EXEMPLE 7. — Considérons les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ tels que tous les termes de la suite définissant e_k sont nuls sauf le k -ième qui vaut 1, soit :

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

Ces vecteurs sont linéairement indépendants.

En effet on a

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n \\ = (\lambda_1, 0, \dots, 0) + (0, \lambda_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, \lambda_n) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \end{aligned}$$

La condition $\sum_i \lambda_i e_i = 0$ implique donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

6. — Dimension. Bases.

DÉFINITIONS 3. — On dit qu'un espace vectoriel est de dimension finie s'il peut être engendré par un nombre fini de vecteurs.

La dimension d'un espace vectoriel de dimension finie est le plus petit nombre de vecteurs non nuls qui peuvent l'engendrer.

La dimension de l'espace vectoriel nul $E = \{0\}$ est zéro.

EXEMPLE 8. — L'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ est de dimension finie. En effet les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ définis à l'exemple 7 engendrent $\mathbf{R}^n$ puisque l'on a

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

EXEMPLE 9. — L'espace vectoriel des polynômes $\mathbf{R}[x]$ n'est pas de dimension finie. Soit en effet F le sous-espace vectoriel engendré par les polynômes $P_1, P_2, \dots, P_k$. On a toujours $F \neq \mathbf{R}[x]$ car F ne contient pas de polynôme de degré supérieur à chacun des degrés des polynômes $P_1, \dots, P_k$.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \neq 0$, et soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

une suite de n vecteurs qui engendrent E . Alors les vecteurs $b_1, b_2, \dots, b_n$ sont linéairement indépendants.

En effet s'il existait une relation $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n = 0$ avec des scalaires λ_i non tous nuls, en changeant au besoin la numérotation des vecteurs b_i , on pourrait supposer $\lambda_n \neq 0$. Il en résulterait l'égalité

$$b_n = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right) b_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) b_{n-1}$$

Toute combinaison linéaire des vecteurs $b_1, b_2, \dots, b_n$ pourrait alors s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$. Ces $n-1$ vecteurs engendreraient E , ce qui est en contradiction avec la définition du nombre n comme dimension de E .

Ces considérations nous amènent à la définition d'une base d'un espace vectoriel :

DÉFINITION 4. — On nomme base d'un espace vectoriel E une suite de vecteurs linéairement indépendants qui engendrent E .

Les résultats précédents peuvent alors s'énoncer :

Un espace vectoriel de dimension $n \neq 0$ possède des bases formées de n vecteurs.

On montre, réciproquement, et nous l'admettrons, que

Toute suite de n vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel de dimension n est une base de cet espace.

EXEMPLE 10. — La suite $e_1, e_2, \dots, e_n$ des vecteurs de $\mathbf{R}^n$ considérée aux exemples 7 et 8 est une base de $\mathbf{R}^n$. On dit que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la base naturelle de $\mathbf{R}^n$.

THÉORÈME 1. — La dimension d'un espace vectoriel est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants.

Le théorème est banal pour la dimension nulle (le vecteur nul est linéairement dépendant).

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \neq 0$.

Nous avons vu qu'il existait n vecteurs linéairement indépendants. Montrons que $n+1$ vecteurs $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n+1)}$ sont toujours linéairement dépendants.

Il en est ainsi si les vecteurs $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ sont déjà linéairement dépendants. Mais s'ils sont linéairement indépendants ils forment une base de l'espace et l'on peut écrire

$$x^{(n+1)} = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \dots + \lambda_n x^{(n)}$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \dots + \lambda_n x^{(n)} + (-1) x^{(n+1)} = 0$$

Cette égalité montre la dépendance linéaire des $(n+1)$ vecteurs.

Il résulte de ce théorème que le nombre de vecteurs d'une base est toujours égal à la dimension de l'espace.

Soit en effet p le nombre de vecteurs d'une base d'un espace de dimension n . On a $p \leq n$, car n est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants et l'on a $p \geq n$, puisque n est le nombre minimum de vecteurs qui engendrent l'espace; ainsi $p = n$.

EXEMPLE 11. — L'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ est de dimension n puisque la base naturelle est formée de n vecteurs.

Notons que pour $n = 1$ on a $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$, avec la base naturelle $e_1 = 1$. *Le corps des nombres réels peut donc être considéré comme un espace vectoriel réel de dimension 1.*

Composantes d'un vecteur. — Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension n .

Tout vecteur x de E s'écrit sous la forme

$$x = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n$$

Cette « décomposition » du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ est unique. Soit, en effet, une deuxième décomposition

$$x = x'_1 b_1 + x'_2 b_2 + \dots + x'_n b_n$$

il en résulte, par différence,

$$0 = x - x = (x_1 - x'_1) b_1 + (x_2 - x'_2) b_2 + \dots + (x_n - x'_n) b_n$$

d'où, puisque les vecteurs de base sont linéairement indépendants :

$$x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2, \quad \dots, \quad x_n = x'_n.$$

Les nombres $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont dits les *composantes* (ou *coordonnées*) du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

REMARQUE. — Une base $\mathcal{B}$ ayant été choisie, tout vecteur x de E est caractérisé par la suite $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de ses composantes. Nous retrouvons ainsi les espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$ du § 2.

Le vecteur $\lambda x = \lambda x_1 b_1 + \lambda x_2 b_2 + \dots + \lambda x_n b_n$ a pour composantes $(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ et, si l'on considère le vecteur y de composantes $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, on a

$$x + y = (x_1 + y_1) b_1 + (x_2 + y_2) b_2 + \dots + (x_n + y_n) b_n,$$

c'est-à-dire que la suite des composantes de $x + y$ est $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$.

Ceci peut encore s'exprimer de la façon suivante.

Soit φ l'application de E dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$x \mapsto \varphi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Alors

1) φ est une bijection de E sur $\mathbf{R}^n$.

2) φ respecte les opérations des espaces vectoriels E et $\mathbf{R}^n$ c'est-à-dire

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$$

On résume ces propriétés en disant que l'application φ est un isomorphisme de l'espace vectoriel E sur l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$, donc : *Tout espace vectoriel réel de dimension n est isomorphe à $\mathbf{R}^n$.*

Construction d'une base. — Soit $b_1, b_2, \dots, b_k$ une suite de k vecteurs linéairement indépendants de l'espace vectoriel E de dimension n , avec $0 < k < n$. L'espace vectoriel $F_k = \mathcal{E}(b_1, b_2, \dots, b_k)$ est de dimension $k < n$, d'où $F_k \neq E$.

Il existe donc des vecteurs de E qui n'appartiennent pas à F_k . Soit b_{k+1} un tel vecteur, *les vecteurs $b_1, b_2, \dots, b_k, b_{k+1}$ sont linéairement indépendants*; en effet dans une relation de la forme

$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k + \lambda_{k+1} b_{k+1} = 0$$

on ne peut avoir $\lambda_{k+1} \neq 0$, car ceci entraînerait

$$b_{k+1} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}}\right)b_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)b_k$$

c'est-à-dire $b_{k+1} \in F_k$. On a donc $\lambda_{k+1} = 0$ et la relation devient

$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k = 0$$

elle entraîne $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ (puisque $b_1, \dots, b_k$ sont bien indépendants).

Le sous-espace $F_{k+1} = \mathcal{E}(b_1, b_2, \dots, b_{k+1})$ est de dimension $k+1$. Si $k+1 < n$ on recommence la construction précédente; *on obtient ainsi, au bout d'un nombre fini d'étapes, une base $b_1, b_2, \dots, b_k, \dots, b_n$ de l'espace E .*

7. — Espaces vectoriels complexes.

Si, dans la définition d'un espace vectoriel, on envisage que l'ensemble des scalaires est le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes (au lieu du corps des nombres réels), on obtient un *espace vectoriel complexe*.

C'est ainsi que l'*espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^n$* est l'ensemble des suites de n nombres complexes muni de deux opérations d'addition et de multiplication par les nombres complexes :

Addition.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

avec $x_i \in \mathbf{C}$ et $y_i \in \mathbf{C}$.

Multiplication.

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

avec $\lambda \in \mathbf{C}$ et $x_i \in \mathbf{C}$.

Tout ce qui a été dit sur les espaces vectoriels réels reste valable pour les espaces vectoriels complexes.

Ainsi la suite de vecteurs de $\mathbf{C}^n$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$;

$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0); \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ est une base de $\mathbf{C}^n$ (dite encore base naturelle de $\mathbf{C}^n$). L'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^n$ est donc de dimension n .

Notons qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel complexe est un espace vectoriel complexe.

Dans le but de simplifier l'exposé nous désignerons par K l'un des deux corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et nous entendrons par espace vectoriel sur le corps K un espace vectoriel réel lorsque $K = \mathbf{R}$ et un espace vectoriel complexe lorsque $K = \mathbf{C}$. Ainsi K^n désigne soit l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ (si $K = \mathbf{R}$) soit $\mathbf{C}^n$ (si $K = \mathbf{C}$).

EXERCICES

1° Soit $E = C[a, b]$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$.

Parmi ces fonctions on considère :

l'ensemble F_1 des fonctions dérivables sur $]a, b[$,

l'ensemble F_2 des fonctions qui s'annulent en a ,

l'ensemble F_3 des fonctions qui ne s'annulent pas sur $[a, b]$,

l'ensemble F_4 des fonctions à valeurs positives sur $[a, b]$,

l'ensemble F_5 des fonctions telles que $\int_a^b f(x) dx = 0$,

l'ensemble F_6 des fonctions telles que $\int_a^b f^3(x) dx = 0$.

Quels sont les ensembles F_i qui sont des sous-espaces vectoriels de E ?

R. F_1, F_2, F_5 .

2° Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

1) $F_1 \cup F_2$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

2) $F_1 \cap F_2$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

3) On désigne par $F_1 + F_2$ l'ensemble des vecteurs de E de la forme $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$.

$F_1 + F_2$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

4) Comparer $F_1 + F_2$ et $\mathcal{E}(F_1 \cup F_2)$ c'est-à-dire le sous-espace vectoriel engendré par $F_1 \cup F_2$.

R. 1) Non, si F_1 et F_2 sont quelconques. 2) Oui. 3) Oui. 4) $\mathcal{E}(F_1 \cup F_2) = F_1 + F_2$.

3° Soient $x_1, x_2, \dots, x_N$ des vecteurs d'un espace vectoriel E .

1) Les vecteurs $y_1 = x_1 - x_2, y_2 = x_2 - x_3, \dots, y_N = x_N - x_1$ sont-ils linéairement indépendants?

2) Montrer que si les vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_N$ sont linéairement indépendants, il en est de même pour les vecteurs $z_1 = x_1 + x_2, z_2 = x_2 + x_3, \dots, z_N = x_N + x_1$, lorsque N est impair. Que peut-on dire dans le cas où N est pair?

R. 1) Non. 2) Si N est pair les vecteurs $z_1, \dots, z_N$ sont linéairement dépendants.

4° Soient $a = (1, -1, 2, 0), b = (0, 2, 1, 1), c = (1, 1, 3, 1), d = (2, 0, 5, 1)$ quatre vecteurs de $\mathbf{R}^4$.

1) Les vecteurs a, b, c, d sont-ils linéairement indépendants?

2) Quelle est la dimension de $\mathcal{E}(a, b, c, d)$.

R. 1) Non. 2) $n = 2$.

5° Soient $P_0, P_1, \dots, P_n$ des polynômes en x à coefficients réels et tels que $\deg P_k = k$.

Montrer que ces polynômes sont linéairement indépendants.

6° Soit $r_0 = 0, r_1, r_2, \dots, r_n$ une suite de $n + 1$ nombres réels tous distincts. On considère les fonctions $f_i(x) = e^{r_i x}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

1) Montrer que f_0 et f_1 sont linéairement indépendantes.

2) En déduire (par dérivation) que f_0, f_1, f_2 sont linéairement indépendantes.

3) En déduire (par récurrence sur p) que $f_0, f_1, f_2, \dots, f_p$ sont linéairement indépendantes ($p \leq n$).

7° Soit E l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, solutions, pour tout x , de l'équation différentielle

$$y'' + 2ry' + (r^2 + \omega^2)y = 0 \quad (r, \omega \in \mathbf{R})$$

1) Montrer que E est un espace vectoriel réel. Quelle est la dimension de E ?

2) L'ensemble F des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 2ry' + (r^2 + \omega^2)y = 1$$

est-il un espace vectoriel?

R. 1) $n = 2$. 2) Non.

8° Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ l'espace vectoriel des applications de l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels dans $\mathbf{R}$.

1) Soit F l'ensemble des applications précédentes et qui vérifient de plus la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad f(n+2) = f(n) + f(n+1)$$

L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

2) Montrer qu'il existe des applications $f \in F$ de la forme $f(n) = r^n$, avec $r \in \mathbf{R}$.

3) En déduire l'existence d'une fonction $f \in F$ qui vérifie de plus les conditions $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$ où α et β sont deux nombres réels donnés.

En déduire $\dim F$.

R. 1) oui. 2) $r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. 3) $\dim F = 2$.

9° Soient E et F deux espaces vectoriels réels. On munit l'ensemble $E \times F$ des deux opérations suivantes :

Addition $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ où $x_1, x_2 \in E$ et $y_1, y_2 \in F$.

Multiplication par un nombre réel λ

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

1) L'ensemble $E \times F$ est-il alors un espace vectoriel?

Si $\dim E = n$ et $\dim F = p$ quelle est la dimension de $E \times F$?

2) Soit E^* l'ensemble des couples $(x, 0)$ $x \in E$ et F^* l'ensemble des couples $(0, y)$ $y \in F$.

E^* et F^* sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E \times F$?

Que peut-on dire de $E^* + F^*$ (notation de l'exercice 2 (3)).

R. 1) $\dim E \times F = n + p$. 2) $E^* + F^* = E \times F$.

10° Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n et $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ une base de E .

1) A tout vecteur $x = \sum x_i b_i$ ($x_i \in \mathbf{C}$) on fait correspondre le vecteur $\bar{x} = \sum \bar{x}_i b_i$ ($\bar{x}_i$ désigne le conjugué de x_i). Exprimer $\overline{x+y}$ et $\overline{\lambda x}$ ($\lambda \in \mathbf{C}$) à l'aide de $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{\lambda}$.

2) Montrer que si $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ sont k vecteurs linéairement indépendants, il en est de même des vecteurs $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(k)}$.

11° Soit E un espace vectoriel réel. On définit sur l'ensemble $F = E \times E$ les deux opérations suivantes :

Addition : $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.

Multiplication par un nombre complexe : $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$)

$$\lambda(x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x).$$

1) Montrer que F est un espace vectoriel complexe.

2) On suppose que E est de dimension n sur $\mathbf{R}$.

Quelle est la dimension de F sur $\mathbf{C}$?

R. 2) $\dim F = n$.

APPLICATIONS LINÉAIRES. CALCUL MATRICIEL

1. — Applications linéaires.

De nombreux dispositifs peuvent être décrits schématiquement comme transformant un « objet » ou « signal » qui se présente à l'« entrée » du dispositif en un second « objet » ou « réponse » qui est recueilli à la sortie du dispositif (fig. 1).

Si le signal est repéré par un vecteur x d'un espace vectoriel E et la réponse par un vecteur y d'un espace vectoriel F la correspondance $x \mapsto y$ réalisée par le dispositif s'exprime mathématiquement par une application φ de E dans F .

On dit que le dispositif est *linéaire* si E et F sont deux espaces vectoriels sur le même corps K (c'est-à-dire tous deux réels lorsque $K = \mathbf{R}$ et tous deux complexes si $K = \mathbf{C}$ (chap. XXXVI, § 7), et si :

- 1) Pour tout scalaire $\lambda \in K$, au signal λx correspond la réponse $\lambda y = \lambda \varphi(x)$.
- 2) A un signal x somme de deux signaux x^1, x^2 correspond une réponse y somme des deux réponses aux signaux x^1, x^2 :

$$y = \varphi(x^1 + x^2) = \varphi(x^1) + \varphi(x^2)$$

ceci nous conduit à la

DÉFINITION 1. — Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K . Une application linéaire φ de E dans F est une application qui respecte les opérations dans E et dans F c'est-à-dire telle que pour tous vecteurs x, x^1, x^2 de E et tout scalaire $\lambda \in K$ on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) \quad \text{et} \\ \varphi(x^1 + x^2) = \varphi(x^1) + \varphi(x^2) \end{array} \right.$$

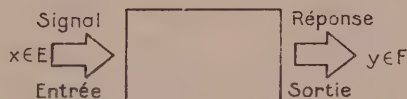


FIG. 1.

Il en résulte que l'on a, plus généralement,

$$\varphi(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_k x^k) = \lambda_1 \varphi(x^1) + \lambda_2 \varphi(x^2) + \dots + \lambda_k \varphi(x^k)$$

avec

$$x^1, x^2, \dots, x^k \in E \quad \text{et} \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in K$$

ce que l'on peut écrire, en utilisant le signe de sommation Σ .

$$\varphi\left(\sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_i x^i\right) = \sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_i \varphi(x^i)$$

EXEMPLE 1. — *Homothéties*. — Soit E un espace vectoriel sur le corps K et $k \in K$ un scalaire donné.

L'application $x \mapsto kx$ de E en lui-même est une application linéaire, dite *homothétie de rapport k* on a en effet

$$\begin{cases} k(\lambda x) = \lambda(kx) & \text{et} \\ k(x^1 + x^2) = kx^1 + kx^2 \end{cases}$$

Pour $k = 1$ on obtient l'application identique id_E (qui est évidemment linéaire) et pour $k = 0$ l'application nulle.

EXEMPLE 2. — *Projections*. — L'application $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_i$ de K^n dans K est une application linéaire dite la $i^{\text{ème}}$ projection de K^n .

EXEMPLE 3. — Soit $E = C^1[a, b]$ l'espace vectoriel réel des fonctions à valeurs réelles et à dérivées continues sur l'intervalle $[a, b]$ et $F = C^0[a, b]$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles et continues sur l'intervalle $[a, b]$.

a) L'application $\mathcal{D}$ de E dans F , qui à toute fonction $f \in E$ fait correspondre sa dérivée $\mathcal{D}f = f'$, est une application linéaire puisque l'on a

$$(\lambda f)' = \lambda f' \quad \text{et} \quad (f + g)' = f' + g' \quad \lambda \in \mathbf{R}, f, g \in E$$

b) L'application $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$ est une application linéaire de F dans $\mathbf{R}$ (cf. chap. XVII, § 2, 3).

EXEMPLE 4. — Soient $p_1, p_2, \dots, p_n$ les prix de vente des quantités unité de n marchandises offertes par un commerçant et $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ le vecteur de $\mathbf{R}^n$ qui caractérise l'achat d'un client (x_i est la quantité de la $i^{\text{ème}}$ marchandise demandée par le client). La somme due par le client est

$$p(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

et la correspondance $x \mapsto p(x)$ est linéaire.

DÉFINITION 2. — *Endomorphismes, formes linéaires*. — Une application linéaire d'un espace vectoriel en lui-même est dite un endomorphisme ou encore un opérateur linéaire.

Une application linéaire d'un espace vectoriel dans le corps des scalaires est dite *une forme linéaire*.

Ainsi les exemples 2, 3 b, 4 sont des exemples de formes linéaires.

Les homothéties (exemple 1) sont des endomorphismes.

2. — L'espace vectoriel $\mathfrak{L}(E, F)$.

Soit E un ensemble donné et F un espace vectoriel sur le corps K . Étant donné une application φ de E dans F et un scalaire $\lambda \in K$ on notera $\lambda\varphi$ l'application de E dans F définie par $(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$. Étant donné deux applications φ_1 et φ_2 de E dans F on notera $\varphi_1 + \varphi_2$ l'application de E dans F définie par $(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$.

On vérifie sans peine que, muni de ces deux opérations, l'ensemble F^E des applications de E dans F est un espace vectoriel sur K .

Supposons maintenant que E soit lui-même un espace vectoriel, sur le corps K . La somme de deux applications linéaires φ_1, φ_2 de E dans F est alors une application linéaire, puisque l'on a, pour $x, y \in E$ et $\lambda \in K$,

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(\lambda x) = \varphi_1(\lambda x) + \varphi_2(\lambda x) = \lambda\varphi_1(x) + \lambda\varphi_2(x) = \lambda(\varphi_1 + \varphi_2)(x)$$

et

$$\begin{aligned} (\varphi_1 + \varphi_2)(x + y) &= \varphi_1(x + y) + \varphi_2(x + y) = \varphi_1(x) + \varphi_1(y) + \varphi_2(x) + \varphi_2(y) \\ &= (\varphi_1 + \varphi_2)(x) + (\varphi_1 + \varphi_2)(y) \end{aligned}$$

On vérifie de même que pour tout scalaire $\lambda \in K$, $\lambda\varphi_1$ est une application linéaire.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel F^E . Ainsi : l'ensemble des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel sur le corps K , nous le noterons $\mathfrak{L}(E, F)$.

3. — Composition d'applications linéaires.

1° Soient trois espaces vectoriels E, F, G sur le même corps K . Si f est une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G alors l'application $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G .

En effet, si $x, y \in E$ et $\lambda \in K$, on a

$$g \circ f(\lambda x) = g(f(\lambda x)) = g(\lambda f(x)) = \lambda g \circ f(x)$$

et

$$g \circ f(x + y) = g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) = g \circ f(x) + g \circ f(y)$$

2° Si $f, f_1, f_2 \in \mathfrak{L}(E, F)$ et $g, g_1, g_2 \in \mathfrak{L}(F, G)$, on a

$$(1) \quad \begin{cases} g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2 & \text{et} \\ (g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f \end{cases}$$

et, pour tout scalaire $\lambda \in K$, on a

$$(2) \quad g \circ (\lambda f) = (\lambda g) \circ f = \lambda(g \circ f)$$

Les démonstrations sont immédiates en revenant aux définitions.

avec

$$(3) \quad \begin{cases} y_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \dots + \alpha_{1n} x_n \\ y_2 = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \dots + \alpha_{2n} x_n \\ \vdots \\ y_p = \alpha_{p1} x_1 + \alpha_{p2} x_2 + \dots + \alpha_{pn} x_n \end{cases}$$

L'application f est caractérisée par les coefficients α_{ij} des égalités (3) que nous rassemblons dans un tableau rectangulaire A à p lignes et n colonnes et qui est dit une *matrice de format* (p, n) à éléments dans le corps K .

On écrit

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \dots & \alpha_{pj} & \dots & \alpha_{pn} \end{bmatrix} \quad \text{ou aussi} \quad A = \left\| \begin{array}{cccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \dots & \alpha_{pj} & \dots & \alpha_{pn} \end{array} \right\|$$

La matrice A est la matrice de l'application linéaire f de E dans F dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et F , ce que l'on note $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ ou plus simplement $A = \mathcal{M}(f)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Les éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne de A sont les composantes du vecteur $f(b_j)$ dans la base $\mathcal{C}$. On dira que $f(b_j)$ est le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de A . L'élément α_{ij} situé à l'intersection de la $j^{\text{ème}}$ colonne et la $i^{\text{ème}}$ ligne de A est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $f(b_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Calcul matriciel. — Nous définissons des opérations sur les matrices qui correspondent aux opérations sur les applications linéaires qu'elles représentent.

1^o *Addition.* — Soient $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ $B = \mathcal{M}(g, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ où $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit

$$A + B = \mathcal{M}(f + g, \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

2^o *Multiplication par un scalaire.*

$$\lambda A = \mathcal{M}(\lambda f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \quad (\lambda \in K)$$

3^o *Multiplication de deux matrices.* — Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ des bases de E, F et G

$$A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \quad B = \mathcal{M}(g, \mathcal{C}, \mathcal{D})$$

on définit

$$BA = \mathcal{M}(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{D})$$

Explicitons ces opérations.

1^o *Addition.*

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pj} & \dots & \alpha_{pn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1} & \dots & \beta_{ij} & \dots & \beta_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{p1} & \dots & \beta_{pj} & \dots & \beta_{pn} \end{bmatrix}$$

on a

$$(f + g)(b_j) = f(b_j) + g(b_j) = \sum_i \alpha_{ij} c_i + \sum_i \beta_{ij} c_i = \sum_i (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) c_i$$

d'où la somme

$$A + B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \dots & \alpha_{1j} + \beta_{1j} & \dots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} + \beta_{i1} & \dots & \alpha_{ij} + \beta_{ij} & \dots & \alpha_{in} + \beta_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} + \beta_{p1} & \dots & \alpha_{pj} + \beta_{pj} & \dots & \alpha_{pn} + \beta_{pn} \end{bmatrix}$$

Pour ajouter deux matrices de même format on ajoute les éléments semblablement placés (on ne définit pas la somme de deux matrices qui n'ont pas le même format).

2° Multiplication par un scalaire. — On a

$$\lambda f(b_j) = \lambda \sum_i \alpha_{ij} c_i = \sum_i (\lambda \alpha_{ij}) c_i$$

d'où

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda \alpha_{11} & \dots & \lambda \alpha_{1j} & \dots & \lambda \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda \alpha_{i1} & \dots & \lambda \alpha_{ij} & \dots & \lambda \alpha_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda \alpha_{p1} & \dots & \lambda \alpha_{pj} & \dots & \lambda \alpha_{pn} \end{bmatrix}$$

Pour multiplier une matrice par le scalaire $\lambda \in K$ on multiplie par λ tous les éléments de la matrice.

3° Multiplication de deux matrices. — Soient $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_p)$, $\mathcal{D} = (d_1, d_2, \dots, d_q)$ les bases des espaces vectoriels E, F, G .

$A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ $B = \mathcal{M}(g, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ avec $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pj} & \dots & \alpha_{pn} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1} & \dots & \beta_{ij} & \dots & \beta_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{q1} & \dots & \beta_{qj} & \dots & \beta_{qp} \end{bmatrix}$$

L'élément γ_{ij} situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de $j^{\text{ème}}$ colonne du produit BA est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $g \circ f(b_j)$.

On a

$$f(b_j) = \alpha_{1j} c_1 + \dots + \alpha_{pj} c_p = \sum_k \alpha_{kj} c_k$$

et

$$g(c_k) = \beta_{1k} d_1 + \dots + \beta_{qk} d_q = \sum_i \beta_{ik} d_i$$

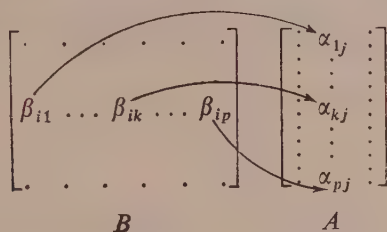
d'où

$$\begin{aligned} g \circ f(b_j) &= g\left(\sum_k \alpha_{kj} c_k\right) = \sum_k \alpha_{kj} g(c_k) = \sum_k \sum_i \alpha_{kj} \beta_{ik} d_i \\ &= \sum_i \left(\sum_k \beta_{ik} \alpha_{kj}\right) d_i \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\gamma_{ij} = \sum_k \beta_{ik} \alpha_{kj}$$

L'élément γ_{ij} s'obtient en multipliant les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de B par les éléments de $j^{\text{ème}}$ colonne de A et en ajoutant ces produits.



on dit souvent que l'on multiplie les « lignes de la première matrice » par les « colonnes de la seconde ».

EXEMPLE 5.

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a - 2b + c & -d - 2e + f \\ 2a + 3b - 4c & 2d + 3e - 4f \end{bmatrix}$$

REMARQUE 1. — On ne peut effectuer le produit BA d'une matrice B de format (p, n) par une matrice A de format (m, q) que si $n = m$ (le nombre de colonnes de B doit être égal au nombre de lignes de A). Le produit BA est alors une matrice de format (p, q) .

Ainsi le produit d'une matrice de format $(1, n)$, dite *matrice-ligne*, par une matrice de format $(n, 1)$, dite *matrice colonne* est une matrice de format $(1, 1)$, soit

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

où l'on a écrit le nombre $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ pour la matrice $[x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n]$ de format $(1, 1)$.

La justification en est que l'addition et la multiplication des matrices de format $(1, 1)$ reproduisent les mêmes opérations sur les scalaires :

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta] \quad \text{et} \quad [\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$$

REMARQUE 2. — La composition d'applications étant associative il en résulte que le produit de matrices (quand il est défini) est associatif :

$$(AB)C = A(BC)$$

Les égalités (1) et (2) du paragraphe 3 s'écrivent ici

$$(1') \quad \begin{aligned} A(B_1 + B_2) &= AB_1 + AB_2 \\ (A_1 + A_2)B &= A_1B + A_2B \end{aligned} \quad \text{et} \quad (2') \quad A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda AB$$

La matrice A d'une application linéaire nulle et qui a donc, dans toutes bases, tous ses éléments nuls est dite une *matrice nulle* et notée O .

Écriture matricielle d'une application linéaire. — Soit f une application linéaire de E dans F et A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de E et F .

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pn} \end{bmatrix}$$

Le vecteur x de E de composantes $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ a comme image par f le vecteur $y = f(x)$ dont les composantes $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ dans la base $\mathcal{C}$ sont données par les égalités (3)

$$(3) \quad \begin{cases} y_1 = \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_i = \alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n \\ \vdots \\ y_p = \alpha_{p1}x_1 + \dots + \alpha_{pn}x_n \end{cases}$$

Si l'on associe au vecteur x la matrice colonne X des composantes de x dans la base $\mathcal{B}$ et, de même, au vecteur y la matrice colonne Y des composantes de y dans la base $\mathcal{C}$, soit :

$$X = \mathcal{M}(x, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \mathcal{M}(y, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

On vérifie alors que les égalités (3) peuvent s'écrire

$$(4) \quad \boxed{Y = AX}$$

Expliquons un tel résultat : la matrice X est la matrice de l'application linéaire φ_x de K dans E définie par $\forall \lambda \in K \quad \lambda \mapsto \varphi_x(\lambda) = \lambda x$.

De même Y est la matrice de l'application ψ_y de K dans $F : \lambda \mapsto \psi_y(\lambda) = \lambda y$. On a

$$f \circ \varphi_x(\lambda) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda y = \psi_y(\lambda)$$

c'est-à-dire

$$\psi_y = f \circ \varphi_x$$

ce qui s'écrit matriciellement

$$Y = AX$$

6. — L'espace vectoriel $M_K(p, n)$.

Nous désignons par $M_K(p, n)$ l'ensemble des matrices de format (p, n) à éléments dans le corps K .

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps K avec $\dim E = n$, $\dim F = p$. A toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ faisons correspondre sa matrice $\mathcal{M}(f)$ dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et F .

$$\text{Soit} \quad \mathcal{M} : f \mapsto \mathcal{M}(f)$$

L'application $\mathcal{M}$ est une application de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $M_K(p, n)$. L'application $\mathcal{M}$ est bijective, car toute matrice de $M_K(p, n)$ est la matrice d'une application linéaire de E dans F , et d'une seule (dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$). On a de plus :

$$\begin{cases} \mathcal{M}(f + g) = \mathcal{M}(f) + \mathcal{M}(g) \\ \mathcal{M}(\lambda f) = \lambda \mathcal{M}(f) \end{cases}$$

où $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in K$.

Il en résulte que $M_K(p, n)$ est un espace vectoriel isomorphe à l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$.

On a donc les règles de calcul suivantes

$$(5) \quad \begin{cases} A + B = B + A & ; & (A + B) + C = A + (B + C), \\ A + O = A & ; & -A = (-1)A & ; & (1)A = A \\ \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B & ; & (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A ; \\ \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A \end{cases}$$

où A, B, C sont trois matrices de $M_K(p, n)$, O est la matrice nulle, λ et μ des scalaires du corps K .

7. — L'anneau $M_K(n)$.

Notons $M_K(n)$, de préférence à $M_K(n, n)$, l'ensemble des matrices de format (n, n) , dites aussi matrices carrées d'ordre n , à éléments dans le corps K .

Soit alors E un espace vectoriel de dimension n sur le corps K , $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{M}$ l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans $M_K(n)$ qui fait correspondre à tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{M} : f \mapsto \mathcal{M}(f).$$

On obtient ainsi une bijection de $\mathcal{L}(E)$ sur $M_K(n)$ telle que

$$\begin{cases} \mathcal{M}(f + g) = \mathcal{M}(f) + \mathcal{M}(g) & \text{et} & \text{pour } fg = f \circ g, \\ \mathcal{M}(fg) = \mathcal{M}(f) \mathcal{M}(g) \end{cases}$$

avec $f, g \in \mathfrak{L}(E)$. Il en résulte que l'espace vectoriel $M_K(n)$ est un anneau isomorphe à l'anneau $\mathfrak{L}(E)$. En plus des règles de calcul précédentes (5) on a donc aussi

$$(6) \quad \begin{cases} (AB)C = A(BC) \\ A(B+C) = AB+AC \\ (B+C)A = BA+CA \end{cases}$$

avec $A, B, C \in M_K(n)$.

L'anneau $M_K(n)$ est unitaire : la matrice unité est la matrice de l'application identique id_E . Quelle que soit la base $\mathcal{B}$ de E on a

$$I_n = \mathcal{M}(id_E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice a tous ses éléments nuls sauf ceux de la diagonale (dite *principale*) qui sont tous égaux à 1.

On a

$$I_n A = A I_n = A \quad A \in M_K(n)$$

Montrons que l'anneau $M_K(n)$ n'est ni intègre ni commutatif dès que $n \geq 2$. Soient a et b deux éléments non nuls du corps K .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices A et B ont un seul élément non nul. On a $AB = 0$: le produit des deux matrices non nulles A et B est cependant la matrice nulle. On a

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

d'où $AB \neq BA$.

Pour $n = 1$, l'anneau $M_K(1)$ peut être identifié au corps K (cf. Chap. XXXVI, Exemple 11 et § 5, Remarque 1, de ce chapitre).

8. — Inversion d'une matrice.

Une matrice carrée $A \in M_K(n)$ est inversible, c'est-à-dire possède une matrice inverse A^{-1} si l'on a $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

$$\begin{array}{lll} \text{Soit} & A = \mathcal{M}(f) & \text{et} \quad A^{-1} = \mathcal{M}(g) \\ \text{on a} & AA^{-1} = \mathcal{M}(fg) & \text{et} \quad A^{-1}A = \mathcal{M}(gf) \end{array}$$

on doit donc avoir $fg = gf = id_E$ c'est-à-dire $g = f^{-1}$. Ainsi :

Une matrice A de $M_K(n)$ est inversible si elle est la matrice d'un endomorphisme inversible f c'est-à-dire si f est bijectif. On a alors

$$A^{-1} = \mathcal{M}(f^{-1})$$

Reprenons l'écriture matricielle (4) de l'endomorphisme f :

$$Y = AX$$

La matrice A étant inversible on en déduit

$$A^{-1}Y = A^{-1}AX = X$$

Pour déterminer la matrice inverse A^{-1} il suffit donc d'exprimer les composantes de X à l'aide des composantes de Y .

EXEMPLE 6. — Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

L'égalité $Y = AX$ s'écrit

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_3 = x_2 - x_3 \end{cases}$$

On en déduit aisément

$$\begin{cases} x_1 = y_2 + y_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases}$$

On a donc

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Note. — Une matrice carrée A est inversible si et seulement si les vecteurs colonnes de cette matrice sont linéairement indépendants.

Soit en effet $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ une base de l'espace vectoriel E et $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ où f est un endomorphisme de E .

Si les n vecteurs colonnes $b'_1 = f(b_1), b'_2 = f(b_2), \dots, b'_n = f(b_n)$, sont linéairement indépendants ils forment une base $\mathcal{B}'$ de E .

Soit alors f' l'endomorphisme de E défini par $f'(b'_i) = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). On a

$$ff'(b'_i) = b'_i \quad \text{donc} \quad ff' = id_E$$

et

$$f'f(b_i) = b_i \quad \text{donc} \quad f'f = id_E$$

Il en résulte que l'on a $f' = f^{-1}$ et par conséquent A est inversible.

Réciproquement, si A est inversible les vecteurs $f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n)$ sont linéairement indépendants. En effet l'égalité

$$0 = \lambda_1 f(b_1) + \lambda_2 f(b_2) + \dots + \lambda_n f(b_n) = f(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n)$$

implique

$$0 = f^{-1}(0) = f^{-1}f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, puisque $b_1, b_2, \dots, b_n$ sont linéairement indépendants.

Lorsque $n = 2$ ou $n = 3$ la matrice A n'est donc inversible que si le déterminant des vecteurs colonnes de A , dit *déterminant de A* , est non nul (cf. Rappels, § 14, et chap. XXIII, § 4).

EXERCICES

1° Soit E l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels. On définit les applications suivantes de E dans E :

$$\begin{aligned} f_1 : P(x) &\mapsto P(x+1) & ; & \quad f_2 : P(x) \mapsto P(x)+1 ; \\ f_3 : P(x) &\mapsto P(x^2) & ; & \quad f_4 : P(x) \mapsto (P(x))^2 \\ f_5 : P(x) &\mapsto P(x) + x^2 P''(x) & ; & \quad f_6 : P(x) \mapsto \int_{-1}^{+1} P(x+y) dy \end{aligned}$$

Quelles sont de toutes ces applications f_i , celles qui sont linéaires (c'est-à-dire des endomorphismes de E).

R. f_1, f_3, f_5, f_6 .

2° Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbf{R}^n$. On définit les applications suivantes de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1 + x_2 + \dots + x_n & f_2(x) &= x_1 \\ f_3(x) &= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| & f_4(x) &= x_1 x_2 x_3 \dots x_n \\ f_5(x) &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \end{aligned}$$

Quelles sont de toutes ces applications f_i celles qui sont linéaires (c'est-à-dire des formes linéaires).

R. f_1 et f_2 .

3° Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E sur le corps K et $f_1, f_2, \dots, f_n$ des formes linéaires.

1) Montrer que l'application $x \mapsto \phi(x) = f_1(x)e_1 + \dots + f_n(x)e_n$ est un endomorphisme de E .

2) Montrer que tout endomorphisme ϕ de E peut s'écrire d'une façon et d'une seule sous la forme précédente.

4° Soit f une application linéaire de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F et a un vecteur donné de F . On considère l'application φ de E dans F définie par

$$\forall x \in E \quad \varphi(x) = f(x) + a$$

1) L'application φ est-elle linéaire ?

2) Montrer que pour tout scalaire λ et tous vecteurs x, y de E on a la relation

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)$$

3) Réciproquement, montrer que toute application φ qui vérifie la relation précédente est telle que $x \mapsto \varphi(x) - \varphi(0)$ est une application linéaire.

R. 1) Non.

5° Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F .

On désigne par $\mathcal{N}(f)$ l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est le vecteur nul, soit $\mathcal{N}(f) = \{x \mid x \in E, f(x) = 0\}$.

1) Montrer que $\mathcal{N}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

2) Montrer que f est injectif si et seulement si $\mathcal{N}(f) = \{0\}$.

6° Soient A, B, C des matrices de formats respectifs $(n, p); (m, q); (l, r)$ et à éléments dans le corps K .

1) Quelles conditions doivent vérifier les entiers n, p, m, q, l, r pour que l'on puisse calculer la matrice

$$AB + BC$$

2) Même question relativement à la matrice $AB + BC - C^2$.

R. 1) $m = n = p$ et $q = l = r$, 2) $m = n = p = q = l = r$.

7° Soit $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer $(AB)^n$ et $(BA)^n$ (n entier ≥ 1).

R. $(AB)^n = I_2; \quad (BA)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8° Déterminer toutes les matrices A carrées réelles d'ordre 2 telles que $A^2 = 0$.

R. $A = \pm \begin{pmatrix} ab & a^2 \\ -b^2 & -ab \end{pmatrix}$

9° Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n ($n \in \mathbf{N}$)

R. $A^{2n} = 2^n I \quad A^{2n+1} = 2^n A$

10° On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier les égalités $BC - CB = A, AB - BA = 2B, CA - AC = 2C$.

*11° Montrer que l'ensemble des matrices

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbf{C}$$

a une structure d'anneau unitaire. Calculer A^n

R. $A^n = a^n I + na^{n-1}b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

*12° Déterminer les matrices, à termes complexes, carrées d'ordre 2 dont le cube est nul. Vérifier que le carré de la matrice est alors nul.

*13° On donne $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, vérifier l'égalité

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a+b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}$$

14° Une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée dont tous les éléments situés au-dessus de la diagonale principale sont nuls.

$$(\alpha_{ij} = 0 \quad \text{pour} \quad i < j)$$

Montrer que l'ensemble $T_K(n)$ des matrices triangulaires inférieures d'ordre n , à éléments dans le corps K , est un anneau.

15° Soit M_n l'ensemble des matrices carrées d'ordre n dont tous les éléments ont un module inférieur ou égal à $\frac{1}{n}$.

1) Montrer que si A et B appartiennent à M_n et si λ est un nombre réel de l'intervalle $[0, 1]$ on a $\lambda A + (1 - \lambda)B \in M_n$.

2) Montrer que $AB \in M_n$.

*16° Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps K avec $\dim E = n$, $\dim F = p$.

1) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$?

2) Si $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_p)$ sont des bases de E et de F , construire une base de $\mathcal{L}(E, F)$ à l'aide de $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{C}$.

R. 1) $\dim \mathcal{L}(E, F) = np$.

2) Les applications f_{ij} définies par $f_{ij}(b_k) = \delta_{ik}c_j$.

17° Chercher toutes les matrices A à éléments dans $\mathbf{Z}$ qui commutent avec la matrice B .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire telles que} \quad AB = BA$$

Vérifier qu'elles forment un anneau commutatif.

$$R. \quad A = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad m, n \in \mathbf{Z}$$

18° On considère en axes orthonormés la transformation qui au point de coordonnées (x, y) fait correspondre le point de coordonnées

$$\begin{aligned} x' &= (1+t)x + (1-t)y \\ y' &= (1-t)x + (1+t)y \end{aligned}$$

Pour quelle valeur du paramètre t cette transformation est-elle une similitude?

$$R. \quad t = \pm 1.$$

19° Déterminer les matrices réelles A telles que $A^2 = I$ (matrice unité d'ordre 2) et telles que $A \neq \pm I$. Si on considère A comme la matrice d'un opérateur sur l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ d'un plan d'origine fixe O et si $\overrightarrow{OM'}$ désigne l'image de $\overrightarrow{OM}$, vérifier que la droite MM' garde une direction fixe et que le milieu de MM' décrit une droite fixe.

$$R. \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 + bc = 1.$$

20° Montrer que l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

forme un corps isomorphe au corps $\mathbf{C}$ lorsque $a, b \in \mathbf{R}$ et un anneau commutatif unitaire lorsque $a, b \in \mathbf{C}$.

21° Soit c un nombre réel positif donné ($c > 0$).

A tout nombre $v \in]-c, +c[$ on fait correspondre la matrice $M(v)$:

$$M(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix}$$

1) Soient v_1 et v_2 deux nombres de l'intervalle $] -c, +c[$. Montrer que l'on peut déterminer un nombre v de cet intervalle et tel que l'on ait l'égalité $M(v_1) \cdot M(v_2) = M(v)$.

2) Montrer que les matrices $M(v)$ forment un groupe multiplicatif.

R. 1)
$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

***22°** Soit $\varphi_1(x) = e^{-x}$, $\varphi_2(x) = e^x$, $\varphi_3(x) = e^{2x}$. On désigne par $D(x)$ et $\phi(x)$, pour tout $x \in \mathbf{R}$ les matrices

$$D(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) \\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) & \varphi_3''(x) \end{pmatrix}$$

où les accents désignent des dérivations.

On désigne par $D'(x)$ et $\phi'(x)$ les matrices obtenues à partir de $D(x)$ et $\phi(x)$ en dérivant tous les éléments de $D(x)$ et $\phi(x)$.

Déterminer trois matrices A, L, M à éléments constants, c'est-à-dire indépendants de x , et telles que pour tout x réel on ait les égalités

$$\phi(x) = A D(x); \quad D'(x) = L D(x) \quad ; \quad \phi'(x) = M \phi(x)$$

Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse A^{-1} .

R.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = A L A^{-1}$$

CHAPITRE XXXVIII

ESPACES EUCLIDIENS

1. — *Espaces euclidiens.*

Nous avons défini, au chapitre XXIII, le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace. Rappelons que, si (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) sont les composantes des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$, dans une base orthonormée, le produit scalaire $\vec{x} \cdot \vec{y}$ est le nombre réel : $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

On généralise aisément cette notion de produit scalaire.

DÉFINITION 1. — *Le produit scalaire des vecteurs $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ est le nombre $(x | y)$ défini par l'égalité*

$$(x | y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Propriétés. — Les propriétés suivantes résultent immédiatement de cette définition :

a) Symétrie $(y | x) = (x | y)$

b) Linéarité $(\lambda x + \lambda' x' | y) = \lambda(x | y) + \lambda'(x' | y)$

où x, x', y sont des vecteurs de $\mathbf{R}^n$, et λ, λ' des nombres réels.

c) $(x | x) \geq 0$

En effet $(x | x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ est une somme de termes positifs.

d) $(x | x) = 0$ implique $x = 0$

En effet $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$ implique que chaque terme de la somme est nul : $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, c'est-à-dire $x = 0$.

Les propriétés *a)* et *b)* impliquent la *bilinéarité* du produit scalaire c'est-à-dire que l'on a

$$(\lambda x + \lambda' x' | \mu y + \mu' y') = \lambda \mu (x | y) + \lambda \mu' (x | y') + \lambda' \mu (x' | y) + \lambda' \mu' (x' | y')$$

pour tous les vecteurs x, x', y, y' de $\mathbf{R}^n$ et tous les nombres réels $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$.

La propriété *c)* permet de définir la longueur, ou *norme*, d'un vecteur x , soit $\|x\|$, par l'égalité

$$\|x\| = (x | x)^{1/2}$$

La propriété *d*) peut alors s'énoncer : *Le vecteur nul est le seul vecteur de norme nulle.*

C'est à partir de ces propriétés que nous allons définir la notion de produit scalaire dans un espace vectoriel réel quelconque.

DÉFINITION 2. — *Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E est une application de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$, qui fait correspondre à tout couple (x, y) de vecteurs de E le nombre réel $(x | y)$, dit produit scalaire de x et de y , et qui possède les propriétés *a*), *b*), *c*), *d*).*

Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est dit un *espace euclidien*.

EXEMPLE 1. — L'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire donné par la définition 1 est un espace euclidien à n dimensions. Nous l'appellerons l'*espace euclidien $\mathbf{R}^n$* .

EXEMPLE 2. — Soit $E = \mathcal{C}[a, b]$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur l'intervalle fermé (a, b) de $\mathbf{R}$ (avec $a < b$). On sait que E est un espace vectoriel réel. On vérifie aisément que l'application :

$$(f, g) \mapsto (f | g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

définit un produit scalaire sur E (cf. chap. XVII, § 5).

Remarquons que *tout sous-espace vectoriel d'un espace euclidien est un espace euclidien.*

2. — Norme euclidienne. Orthogonalité.

La longueur, ou *norme euclidienne*, d'un vecteur x de l'espace euclidien E est le nombre positif

$$\|x\| = (x | x)^{1/2}$$

Le vecteur nul est le seul vecteur de norme nulle.

Si λ est un nombre réel on a

$$\|\lambda x\| = (\lambda x | \lambda x)^{1/2} = (\lambda^2(x | x))^{1/2} = |\lambda| \cdot \|x\|$$

Si $x \neq 0$ (d'où $\|x\| \neq 0$) on a donc

$$\left\| \frac{1}{\|x\|} x \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1$$

On obtient ainsi un vecteur de norme 1, ou vecteur *unitaire*, en multipliant un vecteur non nul par l'inverse de sa norme.

DÉFINITION 3. — *Deux vecteurs d'un espace euclidien sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul.*

Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs d'un espace euclidien E .

En effet la condition $\forall y \in E : (x | y) = 0$ implique, pour $y = x$,

$$(x | x) = 0 \quad \text{d'où} \quad x = 0.$$

EXEMPLE 3. — Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base naturelle de $\mathbf{R}^n$. On a $(e_1 | e_2) = 1.0 + 0.1 + 0.0 + \dots + 0.0 = 0$. On a de même $(e_i | e_j) = 0$ pour $i \neq j$ c'est-à-dire que les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont deux à deux orthogonaux. Une base ayant cette propriété est dite une *base orthogonale*.

THÉORÈME 1. — *Tout couple (x, y) de vecteurs d'un espace euclidien E vérifie les deux inégalités a) et b).*

$$\begin{array}{ll} a) & |(x | y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{Inégalité de Schwarz} \\ b) & \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{Inégalité du triangle} \end{array}$$

En effet l'inégalité a) est évidemment vérifiée pour $x = 0$. Supposons alors $x \neq 0$ (d'où $\|x\| \neq 0$). Pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a

$$0 \leq \|tx + y\|^2 = (tx + y | tx + y) = t^2 \|x\|^2 + 2t(x | y) + \|y\|^2$$

Cette inégalité implique que le polynôme du second degré en t ainsi obtenu n'a pas de racines réelles distinctes, soit

$$\Delta' = (x | y)^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0$$

d'où résulte l'inégalité a).

En donnant à t la valeur $t = 1$ on obtient

$$(1) \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x | y)| + \|y\|^2$$

d'où en vertu de a)

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

on obtient l'inégalité b).

REMARQUE. — Il résulte de l'égalité (1) que l'on a l'égalité

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

si et seulement si $(x | y) = 0$, c'est-à-dire si les vecteurs x et y sont orthogonaux (théorème de Pythagore).

EXEMPLE 4. — Reprenons l'espace euclidien défini à l'exemple 2. L'inégalité de Schwarz s'écrit

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2}$$

c'est l'inégalité déjà obtenue au chapitre XVII, § 5.

DÉFINITION 4. — *Distance.* — La distance de deux vecteurs x, y d'un espace euclidien E est le nombre positif $d(x, y)$ défini par

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Les propriétés suivantes sont immédiates

$$1) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$2) \quad d(x, y) = 0 \quad \text{implique} \quad y = x$$

3) L'inégalité $\|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$ s'écrit

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

3. — Construction de bases orthogonales.

Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ une base d'un espace euclidien E de dimension n . Nous allons construire à partir de $\mathcal{B}$ une base $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ qui soit orthogonale, c'est-à-dire telle que $(c_i | c_j) = 0$ pour $i \neq j$, et telle que chaque vecteur c_k soit une combinaison linéaire des vecteurs $b_1, b_2, \dots, b_k$ (construction de Schmidt).

La construction se fait par récurrence à partir du choix $c_1 = b_1$.

Supposons obtenus les vecteurs non nuls $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ et cherchons un vecteur c_k de la forme

$$c_k = b_k - (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_{k-1} c_{k-1}) \quad (\lambda_i \in \mathbf{R})$$

On veut avoir les conditions d'orthogonalité

$$(c_k | c_1) = (c_k | c_2) = \dots = (c_k | c_{k-1}) = 0$$

Or on a

$$(c_k | c_1) = (b_k | c_1) - \lambda_1 \|c_1\|^2$$

car

$$(c_2 | c_1) = (c_3 | c_1) = \dots = (c_{k-1} | c_1) = 0$$

On a de même

$$(c_k | c_2) = (b_k | c_2) - \lambda_2 \|c_2\|^2$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

et finalement

$$(c_k | c_{k-1}) = (b_k | c_{k-1}) - \lambda_{k-1} \|c_{k-1}\|^2$$

Il faut donc choisir

$$\lambda_1 = \frac{(b_k | c_1)}{\|c_1\|^2}, \quad \lambda_2 = \frac{(b_k | c_2)}{\|c_2\|^2}, \quad \dots \quad \lambda_{k-1} = \frac{(b_k | c_{k-1})}{\|c_{k-1}\|^2}$$

On ne peut avoir $c_k = 0$ car cette égalité entraînerait $b_k = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_{k-1} c_{k-1}$. Le vecteur b_k combinaison linéaire de $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ serait une combinaison linéaire de $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}$ ce qui est impossible puisque les vecteurs $b_1, b_2, \dots, b_k$ sont linéairement indépendants.

En continuant cette construction jusqu'à la valeur $k = n$ on obtient les vecteurs non nuls $c_1, c_2, \dots, c_n$ qui sont linéairement indépendants. En effet une égalité de la forme $u = \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \dots + \mu_n c_n = 0$ implique $(u | c_i) = \mu_i \|c_i\|^2 = 0$ d'où $\mu_i = 0$ puisque $c_i \neq 0$. Les n vecteurs $c_1, c_2, \dots, c_n$ forment donc une base de E .

4. — Bases orthonormées.

Soit $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ une base orthogonale d'un espace euclidien à n dimensions E (de telles bases existent toujours d'après le résultat précédent).

Posons $e_i = \frac{1}{\|c_i\|} c_i$. On obtient une base orthogonale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ avec des vecteurs de base unitaires. Une telle base est dite *orthonormée*; elle est caractérisée par les égalités :

$$(e_i | e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

(Les nombres δ_{ij} égaux à 0 lorsque les deux indices i et j sont différents et égaux à 1 lorsque les deux indices sont égaux sont appelés « symboles de Kronecker »).

Soit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ la représentation d'un vecteur x dans une base orthonormée. On a

$$(x | e_i) = x_i (e_i | e_i) = x_i$$

La $i^{\text{ème}}$ composante d'un vecteur est donc le produit scalaire de ce vecteur et du $i^{\text{ème}}$ vecteur de base.

Soit $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$ un second vecteur. On a

$$\begin{aligned} (x | y) &= \left(\sum_i x_i e_i \middle| \sum_j y_j e_j \right) = \sum_{i,j} x_i y_j (e_i | e_j) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \delta_{ij} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \end{aligned}$$

On voit que le produit scalaire de deux vecteurs de E s'exprime alors comme dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$.

D'une façon précise, considérons l'application ϕ de E dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$x \mapsto \phi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

où $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont les composantes du vecteur x dans une base orthonormée de E .

Il est aisé de vérifier que ϕ est une application linéaire bijective et qui respecte le produit scalaire c'est-à-dire telle que $(\phi(x) | \phi(y)) = (x | y)$.

On résume ces propriétés en disant que ϕ est un isomorphisme de l'espace euclidien E et de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$.

EXEMPLE 5. — Les polynômes de Legendre. — Soit E l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à un entier n donné.

Muni du produit scalaire

$$(P | Q) = \int_{-1}^{+1} P(x) Q(x) dx$$

l'espace vectoriel E est un espace euclidien.

La construction de Schmidt appliquée à la base $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ de E , qui n'est pas une base orthogonale, conduit à la base orthogonale $(P_0, P_1, \dots, P_n)$. Les polynômes P_k sont, à un facteur numérique près, les polynômes de Legendre (cf. exercice n° 7, chap. XVII, et exercice n° 8 de ce chapitre).

5. — Projections orthogonales.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension r d'un espace euclidien E de dimension n . On suppose $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$, c'est-à-dire $1 < r < n$.

Soit $(b_1, b_2, \dots, b_r)$ une base de F . On peut la compléter en une base $(b_1, b_2, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n)$ de E (chap. XXXVI, § 6). Le procédé de Schmidt permet d'obtenir une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ de E telle que $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ soit une base orthonormée de F . Soit G le sous-espace engendré par $(e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n)$, la dimension de G est donc $n - r$.

Montrons que G est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F , d'où il résulte que G ne dépend que de F (et non des bases envisagées ci-dessus).

Soit en effet x un vecteur de E :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_r e_r + x_{r+1} e_{r+1} + \dots + x_n e_n$$

Pour que x soit orthogonal à tous les vecteurs de F il faut et il suffit que x soit orthogonal aux vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$:

$$(x | e_1) = (x | e_2) = \dots = (x | e_r) = 0$$

c'est-à-dire :

$$x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$$

d'où :

$$x = x_{r+1} e_{r+1} + \dots + x_n e_n \in G$$

On montre de même que F est l'ensemble de tous les vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de G . On dit que F et G sont deux sous-espaces orthogonaux.

Remarquons que F et G n'ont en commun que le vecteur nul.

Tout vecteur x de E , $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, s'écrit comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$(2) \quad x = x_F + x_G \quad \text{avec} \quad x_F \in F \quad \text{et} \quad x_G \in G$$

Il suffit en effet de choisir $x_F = x_1 e_1 + \dots + x_r e_r$ et $x_G = x_{r+1} e_{r+1} + \dots + x_n e_n$.

La décomposition (2) est unique. En effet l'égalité $x = x'_F + x'_G = x_F + x_G$ avec $x_F, x'_F \in F$ et $x_G, x'_G \in G$ entraîne $x_F - x'_F = x'_G - x_G$. Le vecteur $x_F - x'_F$ est un vecteur de F et un vecteur de G , il est donc nul comme on l'a vu ci-dessus : $x_F - x'_F = x'_G - x_G = 0$ c'est-à-dire $x'_F = x_F$, $x'_G = x_G$.

Le vecteur x_F entièrement déterminé par le vecteur x et le sous-espace F est dit la *projection orthogonale* de x sur F .

Dans le cas où $F = E$ il est naturel de définir $x_E = x$. Le sous-espace orthogonal à E est l'espace nul $G = \{0\}$ et l'on définit $x_G = 0$.

THÉORÈME 2. — *La projection orthogonale x_F d'un vecteur x sur un sous-espace F d'un espace euclidien E est déterminée par l'une ou l'autre des conditions suivantes :*

a) *Le vecteur x_F de F est tel que $x - x_F$ soit orthogonal à F , c'est-à-dire orthogonal à tous les vecteurs de F .*

b) *Le vecteur x_F est le vecteur de F le plus voisin du vecteur x c'est-à-dire tel que*

$$d(x, x_F) = \|x - x_F\| = \min_{y \in F} \|x - y\|$$

En effet :

a) Soit y un vecteur de F tel que $x - y$, soit orthogonal à F . Il en résulte $z = x - y \in G$ c'est-à-dire $x = y + z$ avec $y \in F, z \in G$ d'où $y = x_F$.

b) Soit y un vecteur de F . On a

$$\|x - y\|^2 = \|x - x_F + x_F - y\|^2 = \|x - x_F\|^2 + \|x_F - y\|^2$$

puisque $x - x_F$ est orthogonal au vecteur $x_F - y \in F$. Le minimum de $\|x - y\|^2$ s'obtient donc pour $x_F - y = 0$.

APPLICATION. — *Méthode des moindres carrés.* — Soit f un vecteur d'un espace euclidien E . On cherche à déterminer la *meilleure approximation* φ de f par une combinaison linéaire de N vecteurs donnés $f_1, f_2, \dots, f_N$ de E .

Soit $\varphi = c_1 f_1 + \dots + c_N f_N$.

Ceci revient à déterminer les coefficients c_i de telle sorte que $d(f, \varphi) = \|f - \varphi\|$ soit minimum.

Le théorème précédent montre qu'il suffit de choisir φ projection orthogonale de f sur le sous-espace F engendré par $f_1, f_2, \dots, f_N$.

EXEMPLE 6. — Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur l'intervalle $(-1, +1)$ de $\mathbf{R}$ et $f_0(x) = 1, f_1(x) = x, \dots, f_N(x) = x^N$. Soit E l'espace vectoriel engendré par $f, f_0, \dots, f_N$, muni du produit scalaire

$$(g | h) = \int_{-1}^{+1} g(x) h(x) dx.$$

Si f n'est pas un polynôme de degré inférieur ou égal à N , f n'appartient pas au sous-espace F de E engendré par $(f_0, f_1, \dots, f_N)$.

La meilleure approximation de f par un polynôme de degré inférieur ou égal à N est donc la projection orthogonale f_F de f sur F .

Pour déterminer f_F il est commode d'utiliser comme base de F la base orthogonale $(P_0, P_1, \dots, P_N)$ définie à l'exemple 5.

Soit $f_F = c_0 P_0 + c_1 P_1 + \dots + c_N P_N$.

On a

$$(f - f_F | P_i) = (f | P_i) - c_i (P_i | P_i) = 0$$

d'où

$$c_i = \frac{(f | P_i)}{\|P_i\|^2} \quad \text{avec} \quad (f | P_i) = \int_{-1}^{+1} f(x) P_i(x) dx.$$

On a alors

$$\|f - f_F\|^2 = (f - f_F | f - f_F) = (f - f_F | f) - (f - f_F | f_F) = (f - f_F | f)$$

puisque
donc

$$(f - f_F | f_F) = 0$$

$$\begin{aligned} \|f - f_F\|^2 &= (f | f) - (f_F | f) = \|f\|^2 - \sum_k (c_k P_k | f) \\ &= \|f\|^2 - \sum_k c_k \cdot (f | P_k) = \|f\|^2 - \sum_k \frac{c_k^2}{\|P_k\|^2} \end{aligned}$$

ce qui permet d'évaluer la précision de l'approximation.

EXERCICES

1° A tout couple (x, y) de vecteurs de $\mathbf{R}^2$ on associe le nombre

$$(x | y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$$

1) Montrer que $(x, y) \mapsto (x | y)$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$.

2) Déterminer $\alpha > 0$ de telle sorte que le vecteur $e_1 = (\alpha, 0)$ de $\mathbf{R}^2$, soit unitaire; puis λ et μ ($\lambda > 0$) de telle sorte que la base (e_1, e_2) avec $e_2 = (\lambda, \mu)$ soit orthonormée.

$$R. \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \mu = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

*2° Soit E l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels. A tout couple (P, Q) de polynômes on associe le nombre

$$(P | Q) = \int_{-1}^{+1} \frac{P(x) Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

1) Montrer que $(P, Q) \mapsto (P | Q)$ est un produit scalaire sur E .

2) On considère les polynômes $T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \operatorname{Arc} \cos x)$. Montrer que l'on a $(T_p | T_q) = \delta_{pq}$.

3° Soient $a = (2, 1, 1, 1)$, $b = (3, 2, -1, 1)$, $c = (-1, -1, m, 1)$ trois vecteurs de l'espace euclidien $\mathbf{R}^4$ (m est un paramètre réel).

1) Existe-t-il des nombres réels α, β tels que l'on ait $\alpha a + \beta b = c$?

2) Déterminer α et β (en fonction de m) de telle sorte que le vecteur $d = \alpha a + \beta b - c$ soit de longueur minimum.

3) Pour quelle valeur de m , le vecteur d obtenu ci-dessus a-t-il une longueur minimum?

$$R. 1) \text{ non. } \quad 2) \alpha = \frac{3m-20}{56}, \quad \beta = \frac{-5m-4}{56}. \quad 3) m = \frac{156}{1219}.$$

*4° Soit E l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels et de degré au plus égal à n . Soit $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ une suite donnée de $(n+1)$ nombres réels tous distincts. Soit $P_k(x)$ le produit de tous les polynômes $x - x_i$ avec $i \neq k$ (on a donc $P_0(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$, P_0 ne contient pas le facteur $x - x_0$).

1) Montrer que la suite $P_0, P_1, \dots, P_n$ est une base de E .

2) A tout couple (P, Q) de polynômes de E on associe le nombre

$$(P | Q) = \sum_{0 \leq i \leq n} P(x_i) Q(x_i)$$

Montrer que $(P, Q) \mapsto (P | Q)$ est un produit scalaire sur E .

3) On pose $\pi_k(x) = \frac{P_k(x)}{P_k(x_k)}$. Montrer que la suite $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ est une base orthonormée de E .

5° Soit E un espace euclidien de dimension finie et f une forme linéaire sur E . Montrer qu'il existe un vecteur a de E , et un seul, tel que

$$\forall x \in E : f(x) = (a | x).$$

6° Soit E un espace euclidien de dimension finie F un sous-espace vectoriel de E et G un sous-espace vectoriel de F . Soit x_F la projection orthogonale d'un vecteur x sur F et x_G sa projection sur G . Montrer que x_G est la projection orthogonale de x_F sur G (théorème des 3 perpendiculaires).

7° On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs $a = (1, 1, -1, -1)$ et $b = (1, -1, 1, -1)$.

1) Montrer que l'orthogonal G de F est engendré par les vecteurs $c = (1, -1, -1, 1)$ et $d = (1, 0, 0, 1)$.

2) Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un vecteur donné de $\mathbf{R}^4$. Déterminer les projections orthogonales x_F et x_G de x sur F et sur G . Vérifier que l'on a

$$\|x\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x_G\|^2$$

$$R. 2) \quad x_F = \frac{1}{2}(x_1 - x_4, x_2 - x_3, -x_2 + x_3, -x_1 + x_4)$$

$$x_G = \frac{1}{2}(x_1 + x_4, x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_4).$$

*8° On nomme polynômes de Legendre les polynômes

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (\text{Pour } n = 0, \quad P_0(x) = 1)$$

1) Montrer que l'on a $\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = 0$ lorsque $m \neq n$.

Déterminer $\int_{-1}^{+1} P_n^2(x) dx$.

1) Montrer que les polynômes P_n vérifient la relation de récurrence :

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

2) Montrer que le polynôme P_n est solution de l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$$

R. 1)

$$\frac{1}{n+1/2}.$$

CHAPITRE XXXIX

CHANGEMENT DE BASE

1. — *Changement de base.*

Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ une base de l'espace vectoriel E de dimension n .

On est souvent amené à remplacer cette base $\mathcal{B}$ par une nouvelle base $\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_n)$ mieux adaptée à un problème donné.

La question se pose alors d'exprimer les composantes d'un vecteur x de E dans la base $\mathcal{B}$ à l'aide des composantes de ce même vecteur dans la « nouvelle base » $\mathcal{B}'$ (ou inversement les composantes de x dans $\mathcal{B}'$ à l'aide des composantes dans « l'ancienne base » $\mathcal{B}$).

Pour cela remarquons qu'à ce changement de base on peut associer un endomorphisme, c'est-à-dire un opérateur linéaire ϕ de E . Cet opérateur défini par $\phi(b_1) = b'_1$, $\phi(b_2) = b'_2$, ... et $\phi(b_n) = b'_n$, fait « passer » de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, nous le nommerons un *opérateur de passage*.

Soit x un vecteur de E , on a

$$\begin{aligned} x &= x'_1 b'_1 + x'_2 b'_2 + \dots + x'_n b'_n = x'_1 \phi(b_1) + \dots + x'_n \phi(b_n) \\ &= \phi(x'_1 b_1 + x'_2 b_2 + \dots + x'_n b_n) \text{ soit} \\ (1) \quad x &= \phi(x') \end{aligned}$$

en désignant par x' le vecteur de composantes $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Si l'on pose $X = \mathcal{M}(x, \mathcal{B})$, $X' = \mathcal{M}(x', \mathcal{B})$, et $P = \mathcal{M}(\phi, \mathcal{B})$ l'égalité (1) s'écrit matriciellement

(2)

$$X = P X'$$

Ainsi la *matrice de passage* P étant connue, l'égalité (2) permet d'exprimer les « anciennes » composantes $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ du vecteur x en fonction des « nouvelles » composantes $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$.

Pour qu'un opérateur linéaire ϕ soit un opérateur de passage (d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$) il faut et il suffit qu'il soit inversible, l'opérateur

inverse ϕ^{-1} étant l'opérateur de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ (voir aussi la note du paragraphe 8, chapitre XXVII).

La matrice de passage P est donc inversible et l'égalité (2) peut aussi s'écrire

$$(3) \quad X' = P^{-1} X$$

ce qui permet d'exprimer les « nouvelles » composantes en fonction des anciennes.

Les égalités (2) et (3) généralisent les formules de changement de bases obtenues dans le plan (Rappels, § 14) et dans l'espace (chap. XXIII, § 1).

EXEMPLE 1. — Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension 3. Définissons

$$(4) \quad \begin{cases} b'_1 = b_1 \\ b'_2 = b_1 + b_2 \\ b'_3 = b_1 + b_2 + b_3 \end{cases}$$

$\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ est une base de E car on a

$$(5) \quad \begin{cases} b_1 = b'_1 \\ b_2 = -b'_1 + b'_2 \\ b_3 = -b'_2 + b'_3 \end{cases}$$

et par conséquent les vecteurs (b'_1, b'_2, b'_3) engendrent E . La matrice de passage P se lit à l'aide de (4) et son inverse P^{-1} à l'aide de (5)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a donc

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2 + x'_3 \\ x_2 = x'_2 + x'_3 \\ x_3 = x'_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 - x_2 \\ x'_2 = x_2 - x_3 \\ x'_3 = x_3 \end{cases}$$

résultats qu'il est d'ailleurs facile de retrouver directement.

2. — *Les matrices d'une application linéaire.*

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de deux espaces vectoriels E et F et f une application linéaire de E dans F . La relation $y = f(x)$ se traduit matriciellement par l'égalité

$$(6) \quad Y = AX$$

avec $X = \mathcal{M}(x, \mathcal{B})$, $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ et $Y = \mathcal{M}(y, \mathcal{C})$.

Si l'on fait choix de nouvelles bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ pour E et F avec des matrices de passage P et Q on a, avec des notations évidentes :

$$X = PX' \quad \text{et} \quad Y = QY'$$

d'où, en portant ces expressions dans (6)

$$QY' = APX'$$

c'est-à-dire

$$Y' = Q^{-1}APX'$$

cette égalité signifie que, dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$, la matrice A' de l'application linéaire f est

$$A' = Q^{-1}AP$$

Dans le cas $F = E$, c'est-à-dire dans le cas où f est un endomorphisme (opérateur linéaire) de E , on choisira $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$. On aura donc $Q = P$ et, par conséquent

$$(7) \quad A' = P^{-1}AP$$

Une matrice A' définie à partir de A par une relation de la forme (7) est dite *semblable* à A . L'ensemble des matrices d'un même endomorphisme f rapporté à toutes les bases de l'espace est donc l'ensemble des matrices semblables à l'une d'entre elles. Il en résulte, comme on peut le vérifier directement, que la *relation de similitude de deux matrices est une relation d'équivalence*. Notons les égalités

$$P^{-1}(A + B)P = P^{-1}AP + P^{-1}BP \quad ; \quad P^{-1}ABP = P^{-1}AP P^{-1}BP$$

d'où en particulier $P^{-1}A^n P = (P^{-1}AP)^n$.

EXEMPLE 2. — *Diagonalisation.* — Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Proposons-nous d'examiner s'il existe une *matrice diagonale* $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$ semblable à A ,

c'est-à-dire qui soit la matrice de f rapporté à une base $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ de $\mathbf{R}^3$. Il faudra pour cela que l'on ait $f(c_1) = \alpha c_1$; $f(c_2) = \beta c_2$; $f(c_3) = \gamma c_3$. Cherchons donc des nombres λ et des vecteurs x non nuls tels que l'on ait l'égalité

$$(8) \quad \boxed{f(x) = \lambda x}$$

soit, en désignant par (x_1, x_2, x_3) les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \lambda x_1 \\ 2x_2 + 2x_3 = \lambda x_2 \\ 3x_3 = \lambda x_3 \end{cases}$$

Si $\lambda \neq 3$ la troisième équation donne $x_3 = 0$ et l'on doit avoir alors

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ 2x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

Si $\lambda \neq 2$ on a $x_2 = 0$ et $x_1 = \lambda x_1$. Comme $x_2 = x_3 = 0$ on ne peut avoir $x_1 = 0$, il faut donc choisir $\lambda = 1$ et x_1 est alors indéterminé. On peut choisir $x_1 = 1$ et l'on obtient le vecteur $c_1 = b_1$ pour lequel $f(c_1) = c_1$.

Si $\lambda = 2$ on a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_1 \\ 2x_2 = 2x_2 \end{cases}$$

d'où $x_1 = x_2$ on peut choisir le vecteur c_2 de composantes $(1, 1, 0)$ pour lequel $f(c_2) = 2c_2$.

Si enfin $\lambda = 3$ on a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3x_1 \\ 2x_2 + 2x_3 = 3x_2 \\ 3x_3 = 3x_3 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_2 + x_3 = 2x_1 \\ 2x_3 = x_2 \\ x_3 \text{ indéterminé.} \end{cases}$$

Choisissons $x_3 = 1$ on aura $x_2 = 2x_3 = 2$ et $2x_1 = x_2 + x_3 = 1 + 2 = 3$ soit $x_1 = 3/2$, ainsi le vecteur c_3 de composantes $(3/2, 2, 1)$ est tel que $f(c_3) = 3c_3$.

On vérifie aisément que $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ est une base. Dans cette base la matrice de f est la matrice diagonale :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ on pourra vérifier

que l'on a bien l'égalité :

$$D = P^{-1}AP$$

REMARQUE 1. — La puissance $n^{\text{ème}}$ de la matrice diagonale D se calcule aisément :

$$D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

il en résulte $A^n = PD^nP^{-1}$ d'où

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2^n - 1 & \frac{1}{2} - 2^{n+1} + \frac{1}{2}3^{n+1} \\ 8 & 2^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

REMARQUE 2. — *Valeurs propres et vecteurs propres.* — On nomme *valeur propre* d'un endomorphisme f un scalaire λ pour lequel il existe un vecteur x non nul vérifiant l'égalité (8) : $f(x) = \lambda x$. Un tel vecteur x est dit un *vecteur propre* associé à la valeur propre λ .

L'égalité (8) s'écrit matriciellement $AX = \lambda X$ où A et X sont les matrices de f et de x dans une base de l'espace. On dit que λ est une valeur propre de A et X la matrice d'un vecteur propre associé ($X \neq 0$).

3. — Changement de bases orthonormées.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases orthonormées d'un espace euclidien E de dimension n .

L'opérateur de passage ϕ vérifie donc les conditions

$$(\phi(e_i) | \phi(e_j)) = (e'_i | e'_j) = \delta_{ij} = (e_i | e_j)$$

Il en résulte que l'opérateur ϕ conserve le produit scalaire de deux vecteurs x et y . Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ on a en effet

$$(\phi(x) | \phi(y)) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = (x | y)$$

DÉFINITION 1. — Dans un espace euclidien E on appelle *opérateur orthogonal* un opérateur linéaire ϕ qui « conserve » le produit scalaire de deux vecteurs, c'est-à-dire tel que

$$\forall x, y \in E \quad (\phi(x) | \phi(y)) = (x | y)$$

Il en résulte qu'un opérateur orthogonal conserve la norme euclidienne des vecteurs :

$$\| \phi(x) \| = (\phi(x) | \phi(x))^{1/2} = (x | x)^{1/2} = \| x \|^2$$

On a vu ci-dessus que les opérateurs de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée sont des opérateurs orthogonaux. La réciproque est immédiate : tout opérateur orthogonal ϕ transforme une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ en une base orthonormée

$$\mathcal{B}' = (e'_1 = \phi(e_1), e'_2 = \phi(e_2), \dots, e'_n = \phi(e_n)).$$

On a en effet les égalités

$$(e'_i | e'_j) = (\phi(e_i) | \phi(e_j)) = (e_i | e_j) = \delta_{ij}$$

et il suffit de remarquer que ces égalités entraînent l'indépendance linéaire des vecteurs $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$.

Matrices orthogonales. — Soit P la matrice de passage d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ en une base orthonormée $\mathcal{B}'$.

La matrice P est donc la matrice d'un opérateur orthogonal dans une base orthogonale.

Notons p_{ij} l'élément de P qui est dans la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. On a donc

$$\phi(e_i) = \sum_k p_{ki} e_k$$

d'où

$$(9) \quad (\phi(e_i) | \phi(e_j)) = \sum_k p_{ki} p_{kj} = \delta_{ij}$$

Soit tP la matrice, dite *transposée* de la matrice P , obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de P . L'élément situé dans la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de tP est donc

$${}^t p_{ij} = p_{ji}$$

Les relations (9) s'écrivent alors

$$\sum_k {}^t p_{ik} p_{kj} = \delta_{ij}$$

ce qui signifie que l'on a l'égalité

(10)

$${}^tP \cdot P = I$$

soit encore

$$({}^tP)^{-1} = P \quad \text{ou} \quad {}^tP = P^{-1}$$

On nomme *matrice orthogonale* une matrice vérifiant l'égalité (10).

Les matrices orthogonales sont donc les matrices des opérateurs orthogonaux dans des bases orthogonales.

EXEMPLE 3. — Cherchons les matrices orthogonales d'ordre 2. Soit

$$P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

on doit avoir les conditions

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

Posons

$$a = \cos \theta \quad b = \sin \theta$$

$$c = \sin \varphi \quad d = \cos \varphi$$

il faut

$$ac + bd = \sin(\theta + \varphi) = 0$$

d'où (1) $\varphi = -\theta (+ 2k\pi)$ ou (2) $\varphi = \pi - \theta (+ 2k\pi)$.

Dans le cas (1) on obtient

$$P_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{on a } \det P_1 = +1)$$

Dans le cas (2)

$$P_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{on a } \det P_2 = -1)$$

Interprétation géométrique. — L'opérateur orthogonal de matrice P_1 se traduit géométriquement par une rotation d'angle θ autour de l'origine (voir Rappels, § 15). On vérifiera que l'opérateur de matrice P_2 se traduit par une symétrie autour d'une droite passant par l'origine et faisant l'angle $\frac{\theta}{2} (+ k\pi)$ avec le premier axe.

EXERCICES

1° Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base naturelle de $\mathbf{R}^5$. On pose $c_1 = e_1 + e_2$, $c_2 = e_2 + e_3$, $c_3 = e_3 + e_4$, $c_4 = e_4 + e_5$, $c_5 = e_5 + e_1$.

1) Montrer que $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ est une base de $\mathbf{R}^5$. Exprimer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ et la matrice inverse P^{-1} .

2) Expliciter les composantes $(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)$ d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de $\mathbf{R}^5$ dans la base $\mathcal{C}$.

$$R. \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où

$$x'_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5), \text{ etc.}$$

2° Soit ϕ l'opérateur de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ et $P = \mathcal{M}(\phi, \mathcal{B})$ la matrice de passage. Montrer que l'on a $P = \mathcal{M}(\phi, \mathcal{B}')$.

3° Soit E l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2, et α, β, γ trois nombres réels donnés.

1) Déterminer les polynômes p, q, r de E qui vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} p(\alpha) = 1 & p'(\beta) = 0 & p''(\gamma) = 0 \\ q(\alpha) = 0 & q'(\beta) = 1 & q''(\gamma) = 0 \\ r(\alpha) = 0 & r'(\beta) = 0 & r''(\gamma) = 1 \end{cases}$$

où les accents désignent des dérivations.

2) Montrer que $\mathcal{B} = (p, q, r)$ est une base de E .

Quelles sont les composantes d'un polynôme Q de E dans la base $\mathcal{B}$?

3) Soit $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$ la base naturelle de E .

Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$, ainsi que la matrice inverse P^{-1} .

R. 1) $p(x) = 1$; $q(x) = x - \alpha$; $r(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2\beta x + \alpha(2\beta - \alpha))$.

2) Les composantes de $Q(x)$ sont $Q(\alpha)$, $Q'(\beta)$ et $Q''(\gamma)$.

3)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & 2\beta \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \frac{\alpha}{2}(2\beta - \alpha) \\ 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4° Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice d'ordre 2 à éléments complexes.

1) Vérifier que l'on a toujours l'égalité

(1) $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I = 0$

où I est la matrice unité d'ordre 2.

2) En déduire que, si λ est une valeur propre de A (soit $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$), on a

(2) $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$

3) Soient λ_1 et λ_2 les deux racines de l'équation (2).

Montrer que l'on a $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = (A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I) = 0$.

4) Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ la matrice d'un vecteur de $\mathbf{C}^2$. Montrer que l'on a l'alternative suivante :

a) X est la matrice d'un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 ou bien,

b) $X_1 = AX - \lambda_1 X$ est la matrice d'un vecteur propre associé à la valeur propre λ_2 .

5) Application. — Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 9 + \sqrt{5} & 2i \\ -2i & 9 - \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

R. 5) $\lambda_1 = 6$; $\lambda_2 = 12$.

Si l'on prend $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ alors X n'est pas la matrice d'un vecteur propre, $(A - 6I)X$ et $(A - 12I)X$ sont donc des vecteurs propres associés à $\lambda_2 = 12$ et à $\lambda_1 = 6$.

*5° Soit A une matrice à éléments dans $\mathbf{C}$ et telle que

$$A = A^2.$$

Valeurs propres à A . Montrer que si $t \neq 1$, la matrice $I - tA$ est inversible et calculer son inverse en fonction de I , A et t .

$$R. \quad (I - tA)^{-1} = I + \frac{t}{1-t} A.$$

6° Soit une application linéaire f telle que $f^3 = id$. Montrer que si α est une valeur propre de f et x un vecteur non nul, le vecteur

$$y = x + \alpha^2 f(x) + \alpha f(f(x))$$

est un vecteur propre.

7° Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice

$$\begin{vmatrix} m+2 & \sqrt{2}(1-m) \\ \sqrt{2}(1-m) & 1+2m \end{vmatrix} \quad m \in \mathbb{C}$$

Cas particulier $m = 1$.

8° Montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable par un changement de base.

9° Montrer que les valeurs propres d'une matrice orthogonale ne peuvent être que $+1$ ou -1 .

10° Soient P et Q des matrices carrées d'ordre n , tP et tQ les matrices transposées.

1) Exprimer ${}^t(P+Q)$ et ${}^t(PQ)$ à l'aide de tP et tQ .

2) On suppose P inversible. Comparer ${}^t(P^{-1})$ et $({}^tP)^{-1}$.

3) On suppose P à éléments réels et telle que ${}^tPP = 0$. Que peut-on en conclure pour la matrice P ?

$$R. 1) {}^t(P+Q) = {}^tP + {}^tQ \quad ; \quad {}^t(PQ) = {}^tQ {}^tP.$$

$$2) ({}^tP)^{-1} = {}^t(P^{-1}) \quad 3) P = 0.$$

*11° On considère la suite définie par

$$s_0 = 3 \quad s_1 = 2 \quad s_n = \frac{3}{2}s_{n-1} - \frac{1}{2}s_{n-2}$$

On pose

$$u_n = \begin{vmatrix} s_n \\ s_{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Montrer que $u_n = Au_{n-1} = A^{n-1}u_1$. En déduire que lorsque n tend vers l'infini, s_n tend vers 1.

*12° On considère les suites :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 & u_n &= 3u_{n-1} + (1-2i)v_{n-1} \\ v_0 &= 0 & v_n &= -(1+3i)u_{n-1} - 2v_{n-1} \end{aligned}$$

Calculer u_n et v_n en fonction de n .

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_n}{v_n} \right| = 1.$$

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

(Les numéros renvoient aux pages correspondantes)

A

Abaque, 357.
Abélienne (intégrale), 421.
Abscisse, 25.
Abscisse curviligne, 466.
Absolument convergente (intégrale), 278.
Accélération (vecteur), 373, 472.
Accroissements finis (formule des), 96, 335.
Addition (formule d'), 33, 126.
Affixe, 179.
Aire algébrique, 34, 103.
Aire plane, 101, 460.
Alembert (théorème de d'), 204.
Algébrique (courbe), 414.
Analogiques (calculs), 357.
Anneau, 17.
Antilogarithme, 355.
Antisymétrie, 11.
Appartenance, 1.
Application (ou fonction), 5.
Application bijective, 8.
Application constante, 6.
Application identique, 6.
Application injective, 7.
Application linéaire, 517.
Application réciproque, 8.
Application surjective, 7.
Approximation par défaut, 55.
Approximation par excès, 55.
Arrangement, 43.
Argument (d'un nombre complexe), 180.
Associativité, 13.
Astroïde, 437.
Asymptote, Asymptotique, 169, 170.
Automorphisme, 21.
Axe, 25.

B

Barycentre, 25.
Base, 24, 27, 314, 511.
Bernoulli (équation de), 293.
Bernoulli (spirale de), 375.

Bezout (théorème de), 193.
Bijectif, bijection, 8.
Bilinéarité, 532.
Binômes (différentielles), 425.
Binôme (formule du), 44.
Borné (ensemble), 54.
Borne inférieure (inf.), 54.
Borne supérieure (sup.), 54.
Branche (d'une courbe), 406.
Branche infinie, 168, 395.
Branche parabolique, 170.

C

Caractéristique (fonction), 18.
Cardinal, 42.
Cauchy (méthode de), 501.
Centre de courbure, 442.
Cercle de courbure, 442.
Cercle osculateur, 442.
Chaînette, 127.
Changement de base (de repère), de coordonnées, 25, 28, 30, 315, 342.
Chasles (formule de), 238.
Classe (d'une équivalence), 10.
Coefficients binomiaux, 44.
Coefficients indéterminés (méthode des), 216.
Col, 339.
Colinéaires (vecteurs), 26.
Colonne (matrice), 521.
Combinaisons, 44.
Combinaisons linéaires, 26, 509.
Compatibles (relations), 20.
Complémentaire (ensemble), 4.
Complémentaire (terme), 135.
Complexe (nombre), 177.
Composante, 24, 27, 314, 512.
Composition (loi de), 12.
Composition (d'applications), 8, 78.
Concavité, 165, 379.
Conditions initiales, 295.
Cône, 323.
Conique, 416.
Conjugué (nombre), 178.

Congruence, 10.
 Continuité, 61, 329, 330.
 Continuité à droite, à gauche, 61.
 Continuité à peu près partout, 283.
 Continuité sur un intervalle, 72.
 Continuité uniforme, 74.
 Convergence (d'une suite), 55.
 Convergence (d'une intégrale), 273, 280.
 Convergence absolue, 278.
 Coordonnées cartésiennes, 24, 27, 314.
 Coordonnées polaires, 374.
 Coplanaires (vecteurs), 313.
 Corps, 19.
 Corps des fractions, 21.
 Cosinus, 32, 117, 121.
 Cote, 314.
 Couple, 4.
 Courbe de niveau, 325.
 Courbure, 470.
 Croissante (fonction), 74.
 Croissante (suite), 56.
 Cycloïde, 433.
 Cylindre, 323.

D

Débit, 84.
 Décomposition (en éléments simples), 215.
 Décroissante (fonction), 74.
 Décroissante (suite), 56.
 Degré (d'une courbe algébrique), 415.
 Degré (d'un polynôme), 188.
 Demi-tangente, 84.
 Dénombrable, 47.
 Dépendance linéaire, 510.
 Dérivé (polynôme), 193.
 Dérivée, 82, 83, 86.
 Dérivée (d'une fonction vectorielle), 371.
 Dérivée logarithmique, 105.
 Dérivée d'ordre n , 86.
 Dérivée partielle, 330, 381.
 Déterminant, 20, 28, 34, 319.
 Développée, 442.
 Développement limité, 137, 138, 147.
 Diagonale principale, 526.
 Diagonale (matrice), 544.
 Diagonalisation, 544.
 Différence tabulaire, 254.
 Différentielle, 91, 342.
 Différentielle totale, 342.
 Dimension, 510.
 Direct (repère), 31, 315.
 Directeur (vecteur), 29.
 Direction asymptotique, 170.
 Discontinuité de 1^{re} espèce, 283.
 Disque, 328.
 Discuter (une équation), 100.
 Disjoints (ensembles), 3.
 Distance, 53, 534.
 Distingué (sous-groupe), 39.

Distributivité, 16.
 Divergente (intégrale), 273, 280.
 Dividende, diviseur, 189.
 Diviseur de zéro, 18.
 Divisibilité, 190.
 Division suivant les puissances croissantes, 195.
 Division suivant les puissances décroissantes, 189.
 Division généralisée (de polynômes), 197.
 Domaine (de définition), 5.

E

Égalité, 2.
 Élément, 1.
 Élément de contact, 487.
 Élément simple, 213.
 Ellipse, 419.
 Endomorphisme, 518.
 Ensemble, 1.
 Ensemble de définition, 5, 326.
 Ensemble quotient, 11.
 Ensemble vide, 2.
 Entiers naturels, 1.
 Entiers rationnels, 1.
 Entière (partie), 215.
 Enveloppe, 435.
 Équation algébrique, 203.
 Équation caractéristique, 305.
 Équation différentielle, 287, 476.
 Équation différentielle à variables séparées, 292.
 Équation différentielle homogène, 476.
 Équation différentielle linéaire, 288, 300.
 Équation différentielle à coefficients constants, 305.
 Équation différentielle sans second membre, 288, 300.
 Équation différentielle sans second membre associée, 288.
 Équation intégrale, 502.
 Équation implicite (d'une courbe), 405.
 Équation paramétrique (d'une courbe), 322, 389.
 Équation paramétrique (d'une surface), 380.
 Équation polaire, 397.
 Équipollents (vecteurs), 22.
 Équipotents (ensembles), 42.
 Équivalence (relation d'), 9.
 Espace vectoriel (réel, complexe), 507, 513.
 Espace vectoriel euclidien, 533.
 Euler (formule d'), 288.
 Événement aléatoire, 46.
 Exponentielle, 109.
 Exponentielle complexe, 226.
 Extremum, 94, 336.

F

Factorielle, 44.
 Fini (ensemble), 42.
 Fonction, 5.
 Fonction affine, 30.
 Fonction caractéristique, 18, 45.
 Fonction composée, 78, 90, 333.
 Fonction de plusieurs variables, 6, 326.
 Fonction hyperbolique, 126.
 Fonction identique, 6.
 Fonction impaire, 77.
 Fonction implicite, 405.
 Fonction monotone, 74.
 Fonction paire, 77.
 Fonction périodique, 118.
 Fonction polynôme, 66, 187.
 Fonction puissance, 66, 111.
 Fonction rationnelle, 67, 221.
 Fonction symétrique (des racines), 207.
 Fonction vectorielle, 370.
 Format (d'une matrice), 521.
 Forme indéterminée, 151.
 Forme linéaire, 519.
 Forme trigonométrique, 180.
 Fraction rationnelle, 211.
 Frenet (formules de), 471.
 Frenet (repère de), 471.

G

Gauss (théorème de), 193.
 Graphe, 9.
 Groupe, 16.

H

Hélice, 386, 473.
 Hélicoïdal (déplacement), 386, 473.
 Homothétie, 518.
 Hyperbole, 417, 419.
 Hyperboliques (fonctions), 126, 227.

I

Idéal, 39.
 Image (d'un nombre complexe), 179.
 Image (par une fonction), 5.
 Implication, 2.
 Incertitude absolue, 350.
 Incertitude relative, 350.
 Inclusion, 2.
 Indépendance linéaire, 313, 510.
 Indicatrice, 18.
 Indice, 43.
 Inégalité triangulaire, 39, 534.
 Injectif, injection, 7.
 Infini, 61.
 Infiniment petit, 64, 152.

Infiniment grand, 154.
 Inflexion, 97.
 Intégrale abélienne, 421.
 Intégrale (courbe), 287, 476.
 Intégrale définie, 103, 236.
 Intégrale d'une équation différentielle, 476.
 Intégrale double, 446.
 Intégrale générale, 485.
 Intégrale indéfinie, 102.
 Intégrale multiple, 457.
 Intégrale particulière, 485.
 Intégrale singulière, 487.
 Intégrale triple, 451.
 Intégration par parties, 244.
 Intègre (anneau), 18.
 Intégrer, 102.
 Intensité efficace, 241.
 Intervalle ouvert, fermé, 53.
 Invariant (sous-groupe), 39.
 Inverse (d'un élément), 15.
 Inverse (d'une fonction), 74.
 Inverse (d'un opérateur, d'une matrice), 526.
 Irrationnel (nombre), 4.
 Isoler (les racines), 100.
 Isoclines, 488.
 Isomorphisme, 21.
 Itération (méthode d'), 364.

K

Kronecker (symbole de), 536.

L

Lagrange (équation différentielle), 479.
 Lagrange (identité de), 317.
 Lagrange (méthode de), 362.
 Laplacien, 345.
 Latitude, 381.
 Legendre (Polynôme de), 536.
 Lemniscate, 431.
 Libres, liés (vecteurs), 22.
 Ligne (matrice), 523.
 Limite d'une fonction, 59, 223, 224.
 Limite d'une suite, 55.
 Linéaire (application), 516.
 Linéaire (forme), 519.
 Linéaire (opérateur), 519.
 Linéairement dépendant, indépendant, 26, 313, 510.
 Lissajous (courbes de), 390.
 Logarithmes de base a , 112.
 Logarithmes décimaux, 112.
 Logarithmes népériens, 107.
 Logarithmes d'un nombre complexe, 230.
 Longitude, 381.
 Longueur (d'un arc), 461.
 Longueur (d'un vecteur), 30.

M

Mac Laurin (formule de), 135.
 Majorant, 54.
 Majoré, 54.
 Matrice, 521.
 Matrice carrée, 525.
 Matrice colonne, 523.
 Matrice diagonale, 544.
 Matrice inverse, 526.
 Matrice nulle, 526.
 Matrice orthogonale, 546.
 Matrice de passage, 542.
 Matrice semblable, 544.
 Matrice unité, 526.
 Maximum, 73, 336.
 Méridien, 382.
 Minimum, 73, 336.
 Minorant, minoré, 54.
 Module (d'un nombre complexe), 179.
 Moindres carrés (méthode des), 538.
 Moivre (formule de), 183.
 Moyenne, 240.
 Moyenne (formule de la), 241, 248.
 Multiple, 15.
 Multiplicité (racine, pôle), 67, 194, 212.

N

Neutre (élément), 14.
 Newton (méthode de), 363.
 Nombre complexe, 177.
 Nombre entier naturel, 1.
 Nombre entier rationnel, 1.
 Nombre imaginaire pur, 177.
 Nombre irrationnel, 4.
 Nombre rationnel, 1.
 Nombre réel, 1, 51.
 Normale, 164, 383.
 Normale principale, 470.
 Norme, 30, 533.
 n -uple, 5.
 Numérotage, 43.

O

Opérateur (linéaire), 518.
 Opérateur orthogonal, 546.
 Opposé (d'un élément), 15.
 Ordonnée, 29.
 Ordre (d'une équation différentielle), 476.
 Ordre (d'un infiniment grand/petit), 152.
 Ordre (d'une matrice), 525.
 Ordre (d'un pôle, d'une racine), 67, 194, 212.
 Ordre (relation d'), 11.
 Ordre strict, 11.
 Ordre total, 11.

Origine d'un repère, 25, 39, 314.
 Orthogonale (matrice), 546.
 Orthogonaux (vecteurs), 533.
 Orthogonaux (sous-espaces), 536.
 Orthonormé (repère), 31, 315.
 Orthonormée (base), 536.
 Osculateur (plan), 384.

P

Paramètres directeurs, 322.
 Parallèle (courbe), 440.
 Parallèle, 382.
 Partie, 2.
 Partie entière, 215.
 Partie imaginaire, 177.
 Partie principale (pour un pôle), 213.
 Partie principale (d'un infiniment grand/petit), 152, 154.
 Partie réelle, 177.
 Partition, 10.
 Pas d'intégration, 495.
 Passage (matrice de), 542.
 Pente, 32.
 Période, 118.
 Périodique, 118, 227.
 Permutation, 8.
 Plan osculateur, 384.
 Plan tangent, 338.
 Plus grand commun diviseur, 192.
 Point anguleux, 85.
 Point d'inflexion, 137, 378.
 Point double, 393.
 Point isolé, 403.
 Point multiple, 402.
 Point ordinaire, 168.
 Point de rebroussement, 377.
 Point singulier, 168.
 Pôle, 67, 212.
 Polynôme, 66, 187.
 Polynôme dérivé, 193.
 Premiers entre eux, 192.
 Préordre, 36.
 Primitive, 102.
 Probabilité, 46.
 Produit (de deux ensembles), 4, 5.
 Produit (d'un vecteur par un scalaire), 23, 507.
 Produit mixte, 318.
 Produit scalaire, 33, 316, 533.
 Produit vectoriel, 316.
 Programme de calcul, 349.
 Projection, 6.
 Projection orthogonale, 537.
 Pseudo-vecteur, 317.
 Puissance entière, 15, 66.
 Puissance (fonction), 113.
 Puissance fractionnaire, 79.
 Pythagore (théorème de), 31, 534.

Q

Quadrature, 291.
Quarrable (domaine), 446.
Quotient (ensemble), 11.

R

Racine d'un nombre complexe, 201.
Racine d'une équation algébrique, 203.
Racine d'un polynôme, 67, 191.
Racine (d'une fraction rationnelle), 67, 212.
Racine multiple, 194.
Racine simple, 194.
Rationnel (nombre), 1.
Rationnelle (fraction), 211.
Rationnelle (fonction), 67, 221.
Rationnelle (puissance), 79.
Rayon de courbure, 442, 470.
Rayon de torsion, 471.
Rebroussement (de 1^{re}/2^e espèce), 86, 377, 378.
Réciproque (fonction), 8.
Rectifiable (arc), 465.
Réflexivité, 9.
Régions (méthode des), 413.
Relation, 8.
Repère, 471.
Réponse (à un signal), 517.
Représentant, 10.
Représentation matricielle, 520.
Représentation paramétrique, 380.
Reste (division avec), 189.
Ricatti (équation de), 294.
Rolle (théorème de), 94.
Rosace, 401.
Runge Kutta (méthode), 503.

S

Sarrus (règle de), 319.
Scalaire, 507.
Schmidt (construction de), 535.
Schwarz (inégalité de), 247, 534.
Segment sphérique, 457.
Séparation (des racines), 361.
Semblables (matrices), 544.
Semiconvergente (intégrale), 278.
Sens direct, 315.
Signal, 517.
Simpson (méthode de), 499.
Singulier (point), 409.
Singulière (solution), 296.
Sinus, 117.
Sinusoïde, 120.
Somme (procédé de), 104.
Sous-anneau, 22.

Sous-espace vectoriel, 509.
Sous-groupe, 20.
Sphère, 322.
Spirale (Archimède), 400.
Spirale (Bernoulli), 375.
Spirale logarithmique, 468.
Stationnaire (courbe), 441.
Strophoïde, 398.
Suite, 55.
Support (d'un vecteur), 22.
Surjection, 7.
Symétrique (d'un élément), 14.

T

Tangente (à une courbe), 84, 372.
Tangente (à une surface), 382.
Tangente (d'un arc), 117.
Taylor (formule de), 134.
Thalès (théorème de), 24.
Tore, 469.
Torsion, 471.
Total (ordre), 11.
Trajectoire, 370, 471.
Trajectoires orthogonales, 490.
Transcendante (courbe), 415.
Transitivité, 9.
Translation, 182.
Transposée (matrice), 547.
Trapèze (méthode des), 497.
Triangle arithmétique (Pascal), 45.
Trièdre de référence, 314.
Trois niveaux (formule des), 459.

U

Unicursale (courbe), 416.
Uniforme (continuité), 74.
Union, 3.
Unitaire (anneau), 18.
Unitaire (vecteur), 30, 533.

V

Valeur absolue, 52.
Valeur principale, 279, 282.
Valeur propre, 546.
Variable, 5.
Variation de la constante, 289, 302.
Varignon, 318.
Vecteur, 507.
Vecteur accélération, 373, 472.
Vecteur colonne, 521.
Vecteur lié, 22.
Vecteur libre, 22.
Vecteur ligne, 521.
Vecteur nul, 22.

Vecteurs orthogonaux, 533.

Vecteur propre, 546.

Vecteur unitaire, 533.

Vecteur vitesse, 371.

Vecteurs linéairement indépendants/dépendants, 510.

Vitesse, 84.

Voisinage, 53, 329.

Volume orienté, 320, 446.

W

Wallis (intégrale de), 247.

Z

Zone de révolution, 468.

Zone sphérique, 469.

MASSON, Editeur.
120, boulevard Saint-Germain
75280 Paris Cedex 06
4^e trimestre 1981

Imprimé en France

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
av. d'Embrun, 05002-GAP
Dépôt légal 574-1981

