

Maths de base

arithmétique

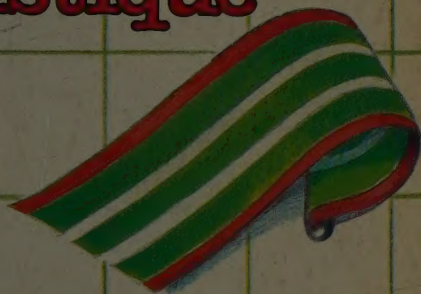
algèbre géométrie

trigonométrie

statistique



marabout



MICHÈLE GARIN



Michel Fouchard
09 / 1592

Afin de vous informer de toutes ses publications, **marabout** édite des catalogues et prospectus où sont annoncés, régulièrement, les nombreux ouvrages qui vous intéressent. Pour les obtenir gracieusement, il suffit de nous envoyer votre carte de visite ou simple carte postale mentionnant vos nom et adresse, aux Nouvelles Editions Marabout, 65, rue de Limbourg, B-4800 Verviers (Belgique).

Dans la même série:

Les 30 problèmes de l'orthographe, méthode Thimonnier,
Marabout Service n° 527.

Philo de Base,
Vladimir Grigorieff, Marabout Service N° 583.

MICHELE GARIN

Licenciée en mathématiques
et en informatique

Maths de base

marabout



Je remercie vivement Monsieur le Professeur P. Gillis de l'Université Libre de Bruxelles, pour ses judicieux conseils et pour les corrections qu'il a apportées à une grande partie de ce texte.

Merci également à mon ami René Hamm, chimiste et professeur de physique, qui m'a très gentiment encouragée à faire de mes notes un livre et m'a aidée à l'élaboration de celui-ci.

Enfin, je remercie de tout cœur Madame Claire Henricot, un de mes anciens professeurs de mathématiques au Lycée Royal d'Ixelles (aujourd'hui Athénée Madeleine Jacquemotte), qui m'a apporté une aide discrète mais très efficace.

© 1983, by s.a. Les Nouvelles Editions Marabout, Verviers, Belgique.

Toute reproduction d'un extrait quelconque de ce livre par quelque procédé que ce soit, et notamment par photocopie ou microfilm est interdite sans autorisation écrite de l'éditeur.

Sommaire

Avant-propos	7
Première partie: éléments d'algèbre	9
Des fractions	11
Des quatre opérations fondamentales sur les nombres réels	25
Des techniques de calcul mental	35
De la règle de trois	40
Des équations du premier degré	45
Des puissances à exposants entiers de nombres réels	48
Des radicaux	52
De l'ordre des opérations dans $\mathbb{R}$	55
Des fonctions	56
<i>Fonction du premier degré en deux variables</i>	60
<i>Fonction du second degré</i>	73
Des polynômes à une variables à coefficients réels	78
Des identités (produits) remarquables	83
De la factorisation	84
Des fractions rationnelles	90
Des équations à une inconnue de degré supérieur à 1	92
Des équations irrationnelles	98
Des inéquations du premier degré	99

Des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues	102
Des systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues	113
De la mise en équation d'un problème	115
Des logarithmes décimaux	120
Formulaire	124
Deuxième partie: éléments de géométrie euclidienne plane	129
Des définitions et axiomes	130
Des propriétés	151
Quelques formules concernant les figures planes simples	165
Troisième partie: éléments de trigonométrie	169
Des définitions	170
<i>Signe des fonctions trigonométriques</i>	177
Des propriétés des nombres trigonométriques	184
Des propriétés des triangles	196
De quelques applications typiques des propriétés des triangles	201
Des équations trigonométriques à une inconnue	204
Quatrième partie: éléments de statistique descriptive	213
Des définitions	214
De la présentation des données	242
De la réduction des données	247

Avant-propos

Pourquoi un tel aide-mémoire ?

Au départ, j'ai rassemblé quelques notes concernant des notions fondamentales, afin de répondre aux besoins de mes élèves de l'enseignement secondaire, à l'Athénée Charles Janssens à Bruxelles.

Il faut savoir que les programmes actuels de mathématique ne nous permettent pas, faute de temps, de revoir, dans le cadre de nos cours, des notions élémentaires.

L'absence de révision systématique des notions vues antérieurement, dont plusieurs furent d'ailleurs présentées très superficiellement étant donné une certaine optique de la mathématique dite moderne, est, je crois, une des causes des si nombreux échecs en mathématique.

Une grande partie de cette matière est en effet continuellement utilisée les années suivantes, aussi bien au cours de mathématique qu'aux cours de sciences et de "sciences commerciales".

Il est à noter aussi que de solides préjugés — et certains sont justifiables — existent face aux sciences mathématiques, ou plutôt face à leur enseignement.

Les lacunes des premières années d'étude constituent, essentiellement chez les élèves faibles en mathématique, de sérieux obstacles à la compréhension de la matière des dernières années et amènent ainsi beaucoup d'élèves à renoncer à tout effort dans l'étude intelligente du cours, à passer à côté de ce que sont les sciences mathématiques, à savoir un mode de pensée, un merveilleux moyen pour développer un esprit logique,

critique, analytique, ainsi qu'un outil pour d'autres sciences, comme les sciences chimiques, physiques et commerciales, ou pour les arts comme l'architecture et la peinture, ou encore dans le secteur des travaux publics (construction de ponts, de routes,...) et celui du bâtiment. C'est pourquoi j'ai pensé qu'il fallait tenter quelque chose, au risque de paraître simpliste ou même « hérétique » à certains moments aux yeux des « mathématiciens spécialistes ».

J'ai pu constater d'ailleurs que s'il suffisait souvent de donner confiance en lui à un élève pour que de réels progrès apparaissent, il fallait aussi lui redonner les notions de base du cours.

J'ai voulu également, par ces quelques notes, présenter certaines définitions et propriétés en partant de l'intuition.

En effet, une notion sera réellement comprise si elle a d'abord été « sentie ».

J'estime qu'il n'y a pas de mathématique de seconde zone, que toute chose doit être comprise en profondeur, mais je crois aussi que ce n'est pas déshonorer les sciences mathématiques que de les présenter de façon intuitive, de donner, dans certains cas, d'abord des exemples avant de passer à l'abstraction, et cela en utilisant essentiellement le langage habituel qui, en ce qui me concerne, est le français.

Ce livre pourrait non seulement être utile aux élèves mais aussi à toute personne devant présenter un examen de mathématiques élémentaires (comme ceux organisés par certains organismes financiers) dans le but d'obtenir un emploi, à qui devrait utiliser certaines notions mathématiques comme la règle de trois par exemple, ou simplement à quiconque voudrait se rappeler ce qu'il a oublié !

Je tiens à signaler que je n'ai pas la prétention de présenter ici un résumé de toutes les définitions et propriétés d'algèbre, de géométrie euclidienne plane, de trigonométrie et de statistique descriptive, mais un aide-mémoire des principales notions de base de ces « parties » des mathématiques.

J'ai conscience qu'il serait intéressant de rassembler les notions essentielles de l'analyse, et j'espère pouvoir le faire prochainement.

La partie « éléments d'algèbre » est conçue comme un texte suivi destiné à faire sentir, à partir de notions intuitives, les définitions et propriétés. Les autres parties se présentent plus sous l'aspect de formulaires. En géométrie essentiellement, des notions sont volontairement non formellement définies et je pense par exemple à celles de distance ou de longueur. J'ai tablé sur la compréhension intuitive de ces notions, qu'un enfant de 7 ans ressent déjà naturellement, et cette sensation de l'objet mathématique me paraît suffisante dans l'optique de ce livre.

PREMIÈRE PARTIE

Éléments d'algèbre

Des fractions

Point de vue intuitif

On partage une «unité» en un certain nombre de «parts» égales et l'on considère un certain nombre de ces parts.

Exemple: $\frac{2}{3}$ d'une tarte représentent la quantité obtenue en partageant la tarte en trois parts égales et en prenant deux des morceaux ainsi obtenus.

Définition

Une fraction est le quotient de deux nombres entiers:

$$\frac{p}{q} \quad (q \neq 0)$$

p s'appelle le numérateur et q le dénominateur de la fraction; p et q sont les termes de la fraction.

Si l'un des termes ou les deux sont négatifs, on peut se ramener à une fraction à termes positifs par les «règles» des signes de la division de nombres relatifs (voir chapitre: Des quatre opérations fondamentales sur les nombres réels); cette fraction sera alors positive (égale à un nombre positif) ou négative.

Exemples

$$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75$$

$$8 = \frac{8}{1} \quad (\text{un nombre entier peut toujours s'écrire sous forme d'une fraction})$$

$$\frac{5}{7} = 5 : 7 = 0,7142857142857...$$

$$\frac{-1}{6} = -\frac{1}{6} = -1:6 = -0,0625 \text{ (voir chapitre: Des quatre opérations fondamentales sur les nombres réels.)}$$

$$\frac{-1}{-4} = +\frac{1}{4} = 0,25 \text{ (voir chapitre concernant le nombres réels)}$$

Remarque

Nous considérerons, dans la suite de ce chapitre, *des nombres entiers et des fractions positifs*. Les propriétés qui suivent restent cependant valables si certaines des fractions ou certains des nombres entiers sont négatifs (que ceux-ci soient ou non des termes de fractions), mais il faut alors tenir compte des «règles» des signes (voir chapitre relatif aux nombres réels). Il est cependant préférable de déterminer d'abord le signe des opérations sur les nombres entiers et sur les fractions.

Multiplication d'une fraction par un nombre

Point de vue intuitif

Si l'on désire, par exemple, une quantité trois fois plus grande que deux cinquièmes de tarte, on demande six cinquièmes de tarte.

$$\frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5}$$

Si l'on désire, par exemple, une quantité deux fois plus grande qu'un douzième de tarte, on demande un morceau deux fois plus grand, c'est-à-dire un sixième de tarte.

$$\frac{1}{12} \cdot 2 = \frac{1}{12:2} = \frac{1}{6}$$

Pour multiplier une fraction par un nombre, on multiplie le numérateur de la fraction par ce nombre, ou, si c'est possible, on divise le dénominateur par ce nombre.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}; \forall a, c \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}_0$$

Division d'une fraction par un nombre

Point de vue intuitif

Partager, par exemple, trois cinquièmes de tarte entre trois enfants revient à leur donner à chacun un morceau, c'est-à-dire un cinquième de tarte.

$$\frac{3}{5} : 3 = \frac{1}{5}$$

Partager, par exemple, une demi-tarte entre trois enfants consiste à couper ce morceau de tarte en trois parts égales (on obtient ainsi des morceaux trois fois plus petits qu'une demi-tarte, c'est-à-dire des sixièmes de tarte) et à donner une part à chacun des enfants.

$$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$$

Pour diviser une fraction par un nombre positif, on multiplie le dénominateur par ce nombre, ou, si c'est possible, on divise le numérateur par ce nombre.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c} ; \forall a \in \mathbb{Z}, \forall b, c \in \mathbb{Z}_0$$

Fractions équivalentes

Point de vue intuitif

Si l'on possède une demi-tarte, on peut couper ce morceau en deux parts égales, qui sont alors des quarts de tarte.

Ainsi, une demi-tarte représente la même quantité que deux quarts de tarte.





Supposons qu'il reste six huitièmes de tarte. On voit que cela représente la même quantité de tarte que si l'on avait pris trois morceaux d'une même tarte coupée en quatre parts égales.



$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Si on multiplie ou si on divise les deux termes d'une fraction par un même nombre non nul, on obtient une fraction équivalente à la première.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}, \frac{a}{b} = \frac{a : d}{b : d}, \forall a \in \mathbb{Z}, \forall m, d, b \in \mathbb{Z}_0$$

où a , b , m , et d sont des nombres entiers non nuls quelconques.

Exemples:

$$\frac{5}{20} = \frac{5:5}{20:5} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$$

Simplification des fractions

Simplifier une fraction consiste à diviser le numérateur et le dénominateur par un même nombre.

Rendre une fraction irréductible, c'est la simplifier «le plus possible», c'est-à-dire diviser ses deux termes par le plus grand nombre commun possible, à savoir le P.G.C.D. (le plus grand commun diviseur)

Exemples

Soit à simplifier $\frac{12}{16}$

$$\frac{12}{16} = \frac{6}{8} = \left(\frac{12:2}{16:2} \right)$$

Soit à rendre $\frac{12}{18}$ irréductible.

$$\frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$$

Recherche du P.G.C.D. de deux nombres entiers.

1° — on décompose ces nombres en facteurs premiers, on les écrit donc sous la forme de produits où n'«apparaissent» que des nombres premiers, en commençant par le plus petit*

Voici, dans l'ordre croissant, quelques facteurs premiers (c'est-à-dire divisibles** uniquement par eux-mêmes et par l'unité): 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,...

2° — on forme alors très facilement le P.G.C.D. de ces nombres en prenant tous les facteurs qui «apparaissent» à la fois dans les deux nombres.

Exemple

Soit à déterminer le P.G.C.D. de 18 et 24.

18		2	(on peut diviser 18 par 2, le quotient est 9)
9		3	(on ne peut plus diviser par 2; on considère alors le
3		3	nombre premier suivant: 3; et on voit que 9 est divisi-
1			ble par 3; on indique le quotient de la division de 9
			par 3 en dessous de 9)
			(on arrête les divisions lorsque le dernier quotient est
			1)

On peut ainsi écrire: $18 = \underset{x}{2} \cdot \underset{v}{3} \cdot 3$

* Si un des nombres (ou les deux) est (sont) négatif(s) on décompose le(s) nombre(s) en facteurs premiers sans s'occuper du signe et on fait alors précéder le(s) produit(s) du signe —.

** Un entier positif (ou naturel) a est dit divisible par un entier positif b si et seulement si il existe un nombre entier positif c tel que $a:b=c$.

$$\begin{array}{r|l}
 24 & 2 \\
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

On peut écrire: $24 = \underset{x}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \underset{y}{3}$

Prenons tous les facteurs communs à ces deux produits; on obtient bien le plus grand diviseur des deux nombres. P.G.C.D. = $2 \cdot 3 = 6$

Exemples de simplifications (afin d'obtenir des fractions irréductibles)

$$\frac{18}{20} = \frac{18:2}{20:2} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{225}{175} = \frac{225:5}{175:5} = \frac{45}{35} = \frac{45:5}{35:5} = \frac{9}{7}$$

(simplifications successives)

$$\frac{12}{20} = ?$$

P.G.C.D. de 12 et 20:

$$\begin{array}{r|l}
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 20 & 2 \\
 10 & 2 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$$

P.G.C.D. = $2 \cdot 2 = 4$

$$\frac{12}{20} = \frac{12:4}{20:4} = \frac{3}{5}$$

Addition des fractions

Point de vue intuitif

Deux tartes identiques ont été coupées en 8 morceaux égaux chacune. Il reste 3 morceaux de la première tarte, c'est-à-dire $\frac{3}{8}$, et 2 morceaux de la

deuxième tarte, c'est-à-dire $\frac{2}{8}$ de cette tarte. Il reste donc au total 5 morceaux de même grandeur, à savoir $\frac{5}{8}$ de tarte.

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$$

Soit deux tartes identiques, dont l'une a été coupée en 3 parts égales et l'autre en 4 parts égales.

De la première tarte il reste 1 morceau et de la deuxième il en reste 3. Combien reste-t-il au total ?

Les morceaux étant de grandeurs différentes (dans un des cas, il s'agit de tiers de tarte et dans l'autre cas, il s'agit de quarts de tarte), il faudrait d'abord les transformer en les coupant en parts égales afin d'obtenir, pour les deux tartes, des morceaux de même grandeur.

Si l'on coupe le tiers qu'il reste de la première tarte en 4 parts égales, on obtiendra des douzièmes, et on peut donc considérer 1 tiers de tarte comme 4 douzièmes de tarte.

D'autre part, en coupant chacun des quarts restant de l'autre tarte en 3 morceaux égaux, on obtiendra aussi des douzièmes de tarte, et on peut donc considérer les 3 quarts de tarte comme 9 douzièmes de tarte

$$\left(\frac{1}{4} = \frac{3}{12} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{12} \cdot 3 = \frac{9}{12} \right)$$

Et ainsi, on peut dire qu'il reste au total 13 douzièmes de tarte.

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \frac{13}{12}$$

Définition de la somme de deux fractions

La somme de deux fractions de même dénominateur est la fraction dont le numérateur est la somme des numérateurs des deux fractions et le dénominateur celui des deux fractions à additionner.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

où a, b, c sont des nombres entiers quelconques, ($b \neq 0$ par définition des fractions).

Exemple: $\frac{3}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3+1}{7} = \frac{4}{7}$

Pour additionner des fractions de dénominateurs différents, il faut d'abord les réduire au même dénominateur et, ensuite, les additionner.

Le dénominateur commun sera le nombre positif le plus petit qui soit à la fois multiple de chaque dénominateur, c'est-à-dire le p. p. c. m. de ces dénominateurs.

Pour déterminer le plus petit commun multiple de deux nombre (p.p.c.m.), il faut les décomposer en produits de facteurs premiers et former le plus petit nombre positif possible tel qu'on y « retrouve » à la fois les facteurs premiers « apparaissant » dans les deux produits.

Exemple: soit à déterminer le p. p. c. m. de 12 et 15.

12	2	15	3
6	2	5	5
3	3	1	
1			

$12 = 2.2.3 \qquad 15 = 3.5$

$$\text{p. p. c. m.} = \frac{12}{2.3} \cdot 5 = 60$$

Exemples d'addition de fractions:

$$\frac{2}{11} + \frac{5}{44} = \frac{2.4}{11.4} + \frac{5}{44} = \frac{8}{44} + \frac{5}{44} = \frac{13}{44}$$

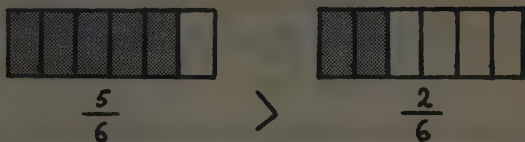
$$\frac{3}{8} + \frac{5}{14} = ?$$

$8 = 2.2.2 \qquad ; \qquad 14 = 2.7$
 p. p. c. m. de 8 et 14: $2.2.2.7 = 56$

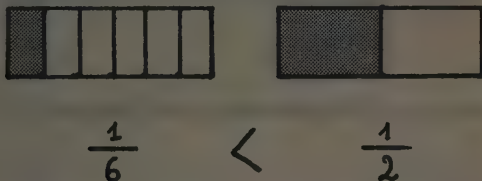
$$\Rightarrow \frac{3}{8} + \frac{5}{14} = \frac{3.7}{8.7} + \frac{5.4}{14.4} = \frac{21}{56} + \frac{20}{56} = \frac{21+20}{56} = \frac{41}{56}$$

Comparaison des fractions

Point de vue intuitif



(Le dénominateur 6 indique que l'on a partagé l'unité en 6 parts égales. Le numérateur indique le nombre de parts que l'on considère. La fraction $5/6$ représente donc la quantité obtenue en considérant 5 parts, tandis que la fraction $2/6$ représente la quantité obtenue en prenant 2 parts.)



(Dans le premier cas, on a partagé l'unité en 6 parts égales et on a considéré un morceau. Dans le deuxième cas, on a partagé l'unité en 2 parts égales, qui sont donc plus grandes que dans le premier cas, et on a également considéré un morceau.)

Si deux fractions positives, à termes positifs*, ont même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.

$$\boxed{\frac{a}{b} > \frac{c}{b} \Leftrightarrow a > c}$$

où a, b, c sont des nombres entiers positifs quelconques ($b \neq 0$, par définition des fractions).

(Les « parts » de l'« unité » sont, dans les deux cas, de même grandeur. Le numérateur indiquant le nombre de parts considérées, la fraction a/b est bien supérieure à c/d , puisque $a > c$.)

* Remarque: $\frac{-2}{-5}$ est une fraction positive (voir chapitre relatif aux nombres réels: règle des signes pour la division), mais dont les termes sont négatifs.

Si deux fractions positives et à termes positifs ont même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.

$$\frac{a}{b} > \frac{a}{c} \Leftrightarrow b < c$$

où a, b, c sont des nombres entiers positifs quelconques (b et $c \neq 0$, par définition).

(Le nombre de «parts» considérées est le même dans les deux cas, mais ces parts sont plus grandes dans le premier cas, puisque, dans ce cas, l'«unité» a été partagée en moins de parts que dans le deuxième, b étant inférieur à c .)

Exemples

Soit à placer les fractions suivantes par ordre croissant :

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{11}{12}$$

1° — On réduit les fractions au même dénominateur, qui sera le p. p. c. m. (plus petit commun multiple) de 5, 4, 8 et 12.

Pour cela, on décompose ces nombres en facteurs premiers : $5=5$; $4=2.2$; $8=2.2.2$; $12=2.2.3 \Rightarrow$ p. p. c. m. = $5.2.2.2.3 = 120$.

On a donc :

$$\frac{2}{5} = \frac{2.24}{5.24} = \frac{48}{120}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3.30}{4.30} = \frac{90}{120}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1.15}{8.15} = \frac{15}{120}$$

2° — On compare alors les fractions ayant le même dénominateur.

$$\text{On a donc : } \frac{15}{120} < \frac{48}{120} < \frac{90}{120} < \frac{110}{120}$$

Ainsi, $\frac{1}{8} < \frac{2}{5} < \frac{3}{4} < \frac{11}{12}$

Soit à compléter les expressions suivantes avec un des signes $>$, $<$, $=$ ou $\neq$, sachant que a, b, c, d sont des nombres entiers positifs et que $a > b, c < d, a \neq c, b \neq d$.

$$\frac{a}{b} \dots \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{b} > \frac{b}{d}$$

En effet, comme $a > b, \frac{a}{b} > 1$, et comme $c < d, \frac{c}{d} < 1$ et donc $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

$$\frac{a}{c} \dots \frac{b}{c} \qquad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

En effet, les fractions ont le même dénominateur et a est plus grand que b .

$$\frac{b}{a} \dots \frac{c}{d} \qquad \frac{b}{a} \neq \frac{c}{d}$$

C'est la seule conclusion que l'on peut faire

puisque $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{d}$ sont toutes deux plus petites que l'unité

(en effet, $b < a$ et $c < d$).

$$\frac{a}{d} \dots \frac{2a}{3d} \qquad \frac{a}{d} > \frac{2a}{3d}$$

En effet, $\frac{a}{d} = \frac{2a}{2d}$ et $\frac{2a}{2d} > \frac{2a}{3d}$

puisque les numérateurs sont égaux (même nombre de «parts» de l'«unité»), et que dans la deuxième fraction, le dénominateur est plus grand que dans la première fraction (les «parts» sont plus petites puisque l'unité a été partagée en un plus grand nombre de parts).

Multiplication des fractions

Le produit de deux fractions est la fraction obtenue en multipliant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

(Si une des fractions (ou les deux) est (sont) précédée(s) d'un signe -, on détermine d'abord le signe du produit (voir règle des signes du produit, chapitre relatif aux nombres réels)).

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

où a, b, c, d sont des nombres entiers quelconques (b et $d \neq 0$ par définition)*.

Exemples:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{11} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 11} = \frac{12}{55}$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 1}{5 \cdot \underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{2}{15}$$

Division d'une fraction par une fraction

Pour diviser une fraction par une fraction, on multiplie la première par l'inverse de l'autre.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

où a, b, c, d sont des nombres entiers ($b, d, c \neq 0$) quelconques.

* $\forall a, c \in \mathbb{Z}, \forall b, d \in \mathbb{Z}_0$

Exemples:

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20}$$

$$\frac{5}{6} : \frac{2}{7} = \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{2} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 2} = \frac{35}{12}$$

$$\frac{1}{6} : \frac{3}{8} = \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1 \cdot \overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{6}} \cdot 3} = \frac{4}{9}$$

Quelques exemples d'opérations sur des fractions négatives ou à termes négatifs

$$\frac{-11}{4} + \frac{3}{-2} = -\frac{11}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{11}{4} - \frac{6}{4} = \frac{-11-6}{4}$$

$$(\text{ou } -\frac{11+6}{4}) = -\frac{17}{4}$$

$$\frac{-3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{-15}{35} + \frac{14}{35} = \frac{-15+14}{35} = \frac{-1}{35} = -\frac{1}{35}$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{-3}{7} = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 7} = -\frac{12}{35}$$

$$\frac{-5}{-3} \cdot \frac{-8}{3} = \frac{(-5) \cdot (-8)}{(-3) \cdot 3} = \frac{+40}{-9} = -\frac{40}{9}$$

$$\frac{-5}{7} : \frac{3}{-11} + \left(-\frac{5}{7}\right) : \left(-\frac{3}{11}\right) = +\frac{5}{7} \cdot \frac{11}{3} =$$

$$\frac{5 \cdot 11}{7 \cdot 3} = \frac{55}{21}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-1 - \frac{2}{3}}{-3 + \frac{1}{-4}} : \frac{\frac{5}{7}}{\frac{3}{-2}} = \frac{\frac{-3-2}{3}}{-3 - \frac{1}{4}} : \frac{\frac{5}{7}}{-\frac{3 \cdot 5}{2}} \\
& \qquad \qquad \qquad \frac{5}{3} \qquad \frac{5}{7} \qquad \frac{5}{3} \qquad \frac{5}{7} \\
& = \frac{-\frac{12}{4} - \frac{1}{4}}{-\frac{15}{2}} = \frac{-\frac{13}{4}}{-\frac{15}{2}} \\
& = + \left(\frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 13} \right) : \left(-\frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 15} \right) = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 13} : \left(-\frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 15} \right) \\
& = -\frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 13} \cdot \frac{7 \cdot 15}{5 \cdot 2} = -\frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot 7 \cdot \overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 13 \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = -\frac{70}{13}
\end{aligned}$$

Des quatre opérations fondamentales sur les nombres réels

Les nombres réels

L'ensemble des nombres réels est formé des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

Un nombre rationnel est soit :

un nombre entier, positif ou négatif. (Pour représenter une dette par exemple, on emploiera un nombre négatif; un gain se traduira par un nombre positif.)

zéro

une fraction.

Tout nombre rationnel peut se mettre sous la forme d'un nombre décimal limité, ou périodique illimité.

Exemples de nombres rationnels :

$$3 = \frac{3}{1} = 3,0 = +3$$

$$-5 = -5,0 = \frac{-5}{1} = -\frac{5}{1}$$

$$0 = \frac{0}{1} = 0,0$$

$$\frac{5}{7} = 0,714285714285...$$

$$\frac{-4}{3} = -\frac{4}{3} = -1,3333...$$

Tout nombre qui n'est pas rationnel est appelé *irrationnel*.

Tout nombre irrationnel peut se mettre sous la forme d'un nombre décimal illimité (on n'en connaît jamais la valeur exacte, mais on peut s'approcher de plus en plus de cette valeur).

Exemples de nombres irrationnels:

$$\pi = 3,14159...$$

$$\sqrt{2} = 1,4142... \text{ (voir radicaux)}$$

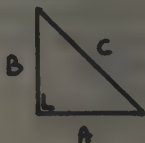
On peut représenter géométriquement $\sqrt{2}$: c'est la « longueur » de la diagonale d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont de longueur égale à l'unité.

En effet, d'après le théorème de Pythagore (voir *Éléments de géométrie euclidienne plane* et *Éléments de trigonométrie*),

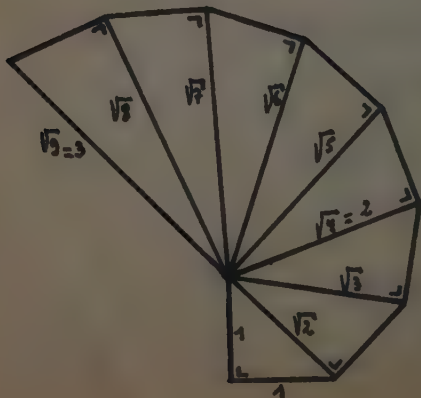
$$A^2 + B^2 = C^2$$

$$\Rightarrow 1^2 + 1^2 = C^2$$

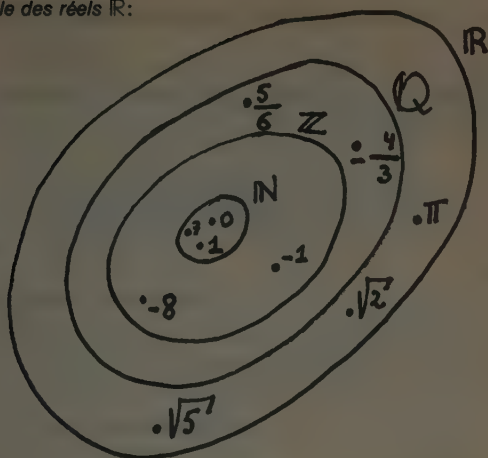
$$\Rightarrow C^2 = 2 \Rightarrow C = + \sqrt{2} \text{ (voir radicaux)}$$



De même, on peut « construire » $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots$



L'ensemble des réels $\mathbb{R}$:



$\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres naturels, c'est-à-dire des nombres entiers positifs et de zéro.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers, c'est-à-dire l'ensemble formé des nombres entiers positifs et négatifs et de zéro.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire l'ensemble formé des fractions, (tout nombre entier peut être considéré comme une fraction: la fraction dont le numérateur est ce nombre entier et dont le dénominateur est 1)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}_0 \right\}$$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$: $\mathbb{N}$ est inclu dans $\mathbb{Z}$; autrement dit, $\mathbb{N}$ est formé de certains éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}$ (dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers positifs et négatifs et du nombre 0 se trouvent donc les nombres positifs et zéro!)

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}$ comprend donc tous les éléments de $\mathbb{Q}$ ainsi que d'autres éléments (π , $\sqrt{2}$, ...)

La valeur absolue d'un nombre réel

Définitions

La valeur absolue d'un nombre réel est le nombre « sans son signe » (c'est-à-dire un nombre positif).

On note $|a|$ la valeur absolue de a

Exemples:

$$|-2| = 2$$

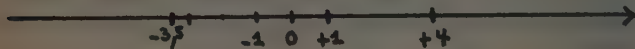
$$|+4| = 4$$

$$|-4| = 4$$

$$|-\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$$

La droite réelle

Chaque nombre réel peut être représenté par un point d'une droite et, réciproquement, chaque point d'une droite représente un et un seul nombre réel.



On choisit une origine sur la droite: c'est le nombre 0, un sens positif et une unité.

Le nombre $+1$ sera représenté par le point situé à une unité de l'origine dans le sens positif.

Le nombre -1 sera représenté par le point situé à une unité de l'origine dans le sens négatif.

Le nombre $2,5$ sera représenté par le point situé à deux unités et demie de l'origine dans le sens positif.

L'addition dans $\mathbb{R}$

C'est une *opération commutative*.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: a + b = b + a$$

(Quels que soient a et b , nombres réels)

Exemple: $3 + 6,51 = 6,51 + 3 = 9,51$

C'est une *opération associative*.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a + (b + c) = (a + b) + c$$

(Pour tout a, b, c appartenant à $\mathbb{R}$)

Exemple: $(2 + 3) + 11 = 2 + (3 + 11) = 16$

Le nombre 0

$$\forall r \in \mathbb{R}: r + 0 = r$$

Exemple: $14,2 + 0 = 14,2$

«Règle» des signes:

La somme de deux nombres positifs est positive (deux gains successifs donnent un gain).

Exemple: $(+3) + (+5) = +8$

La somme de deux nombres négatifs est négative (deux dettes successives donnent une dette).

Exemple: $(-2) + (-8) = -10$

La somme de deux nombres de signes contraires est soit positive, soit négative (une dette et un gain donnent un gain si le gain était plus important que la dette, ou une dette si la dette était plus importante que le gain).

Exemples: $(+3) + (-1) = +2$

$(+5) + (-10) = -5$

La multiplication dans $\mathbb{R}$

Définition du produit d'un nombre réel par un entier positif.

$$n \cdot r = \underbrace{r + r + \dots + r}_{n \text{ termes}}$$

où r est un nombre réel quelconque et n un entier positif quelconque.

Exemples: $3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 = 15$

$6 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$

La multiplication est une *opération commutative* dans $\mathbb{R}$.

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$$

Exemple: $2 \cdot 7 = 7 \cdot 2 = 14$

C'est une *opération associative*.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Exemple: $2 \cdot (3 \cdot 5) = (2 \cdot 3) \cdot 5 = 30$

Le produit d'un nombre par 1

$$\forall r \in \mathbb{R} : r \cdot 1 = r$$

Exemple: $17 \cdot 1 = 17$

Le produit d'un nombre par zéro est toujours égal à zéro.

$$\forall r \in \mathbb{R} : r \cdot 0 = 0$$

Exemple: $12 \cdot 0 = 0$ ($= 0 \cdot 12$ par commutativité de la multiplication dans l'ensemble des réels)

« **Règle** » des signes: le produit de deux nombres de même signe est un nombre positif, le produit de deux nombres de signes contraires est un nombre négatif. La valeur absolue du produit est égale au produit des valeurs absolues.

Exemples: $(-3) \cdot (-2) = +6^*$
 $(-2) \cdot (+5) = -10^{**}$

Multiplication d'une somme par un nombre

Pour multiplier une somme par un nombre, on multiplie chaque terme de la somme par ce nombre et on ajoute les produits obtenus**.

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

où a, b, c, d sont des nombres réels quelconques.

Exemple: $(2 + 3) \cdot 7,1 = 2 \cdot 7,1 + 3 \cdot 7,1 = 14,2 + 21,3 = 35,5$

Multiplication d'une somme par une somme

Pour multiplier une somme par une somme, on multiplie chaque terme de la première par chaque terme de l'autre et on ajoute les produits obtenus.

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

où a, b, c, d sont des nombres réels quelconques.

* $(-3) \cdot (-2)$ s'écrit encore $-3 \cdot (-2)$

** $(-2) \cdot (+5)$ s'écrit encore $-2 \cdot 5$

** Conséquence de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, dans $\mathbb{R}$.

La division dans $\mathbb{R}$

Définition du quotient de deux nombres:

$$a : b = c \Leftrightarrow b \cdot c = a$$

où a et b sont deux réels quelconques (voir division par 0).

Autre notation: $\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = b \cdot c$

Exemple: $\frac{10}{2} = 5$ car $2 \cdot 5 = 10$

«*Règle des signes*»: le quotient de deux nombres de même signe est un nombre positif; le quotient de deux nombres de signes contraires est un nombre négatif.

Division par 0: la division d'un nombre réel non nul par 0 est une opération non définie dans $\mathbb{R}$. En effet, supposons que $b/0 = x$. Alors, d'après la définition du quotient, $0 \cdot x = b$.

Or, $0 \cdot x = 0, \forall x$. On ne peut donc trouver aucune valeur de x telle que $0 \cdot x$ soit égal à b , c'est-à-dire différent de zéro.

D'où, $b/0$ n'est pas défini dans $\mathbb{R}$.

Remarque: $0/0 = x$ est indéterminé, parce que $\forall x: 0 \cdot x = 0$.

Remarques

La division n'est pas une opération commutative:

$a : b \neq b : a$ (autre notation; $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$)

Contre-exemple: $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$ ($2:3 \neq 3:2$)
 $\downarrow \quad \downarrow$
 0,66.. 1,5

La division n'est pas une opération associative:

$(a:b):c \neq a:(b:c)$

Contre-exemple: $\frac{(4:5):10}{0,8} \neq \frac{4:(5:10)}{0,5}$
 $\frac{0,8}{0,08} \quad \frac{0,5}{8}$

$$\frac{4}{\frac{5}{10}} \neq \frac{4}{\frac{5}{10}} \neq \frac{4 \cdot 10}{5}$$

(Autre notation: $\frac{4}{\frac{5}{10}} \neq \frac{4}{\frac{5}{10}} \neq \frac{4 \cdot 10}{5}$)

Un entier positif* a est dit divisible par un entier positif b si et seulement si il existe un nombre entier positif c tel que $a : b = c$.

Division d'une somme par un nombre

Pour diviser une somme par un nombre, on divise chaque terme de la somme par ce nombre et l'on ajoute les quotients obtenus.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) : c = a : c + b : c$$

Autre notation: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

Exemple: $(14 + 3) : 2 = (14 : 2) + (3 : 2) = 14 : 2 + 3 : 2 = 7 + 1,5 = 8,5$

Suppression des parenthèses

On peut supprimer des parenthèses précédées du signe — à condition de changer tous les signes devant les termes dans les parenthèses.

Supprimer des parenthèses précédées du signe — revient à prendre l'opposé du nombre ou de la somme dans les parenthèses.

Exemples: $-(-5) = +5$
 $-(3-2) = -3+2 = -1$

* Entier naturel (élément de $\mathbb{N}$)

On peut **supprimer des parenthèses précédées du signe +**, à condition de ne pas changer les signes des termes dans les parenthèses.

Exemple: $3 + (4 - 5) = 3 + 4 - 5 = 2$

Un nombre précédé d'aucun signe est un nombre positif (le signe + est donc sous-entendu).

Des techniques de calcul mental

Multiplication par 10

On écrit un zéro à la droite du nombre si celui-ci est entier.

Si le nombre est décimal, on déplace la virgule d'un rang vers la droite.

Exemple: $41,762 \cdot 10 = 417,62$

Division par 10

On déplace la virgule d'un rang vers la gauche. Dans le cas d'un nombre entier, si c'est possible, on supprime un zéro à la droite du nombre.

Exemples: $14,2 : 10 = 1,42$

$160 : 10 = 16$

Multiplication par 100

On écrit deux zéros à la droite du nombre si celui-ci est entier.

Si le nombre est décimal, on déplace la virgule de deux rangs vers la droite.

Exemple: $12,6 \cdot 100 = 1260$

Division par 100

On déplace la virgule de deux rangs vers la gauche.

Dans le cas d'un nombre entier, si c'est possible, on supprime deux zéros à la droite du nombre.

Exemple: $25 : 100 = 0,25$

Multiplication par 9

On multiplie le nombre par 10 et on retranche le nombre du produit obtenu.

En effet, $a \cdot 9 = a \cdot (10 - 1) = a \cdot 10 - a \cdot 1 = a \cdot 10 - a$, où a est un nombre réel quelconque.

Exemple: $12 \cdot 9 = 12 \cdot 10 - 12 = 120 - 12 = 108$

Multiplication par 11

On multiplie le nombre par 10 et on ajoute le nombre au produit obtenu.

En effet, $a \cdot 11 = a \cdot (10 + 1) = a \cdot 10 + a \cdot 1 = a \cdot 10 + a$ ($a \in \mathbb{R}$).

Exemple: $14 \cdot 11 = 14 \cdot 10 + 14 = 140 + 14 = 154$

Multiplication par 5

On multiplie le nombre par 10 et on divise par 2 le produit obtenu.

En effet, $a \cdot 5 = a \cdot \frac{10}{2} = \frac{a \cdot 10}{2}$; ($a \in \mathbb{R}$).

Exemple: $12 \cdot 5 = \frac{12 \cdot 10}{2} = \frac{120}{2} = 60$

Division par 5

On divise le nombre par 10 et on multiplie par 2 le quotient obtenu, (ou encore, ce qui revient au même, on multiplie le nombre par 2 et on divise par 10 le produit obtenu).

En effet, $\frac{a}{5} = a \cdot \frac{10}{2} = a \cdot \frac{2}{10} = \frac{a \cdot 2}{10} = \frac{a}{10} \cdot 2$; ($a \in \mathbb{R}$).

Exemple: $\frac{18}{5} = \frac{18 \cdot 2}{10} = 3,6$ (Autre notation: $18 : 5 = (18 \cdot 2) : 10 = 36 : 10 = 3,6$)

Multiplication par 25

On multiplie le nombre par 100 et on divise par 4 le produit obtenu, (ou encore, ce qui revient au même, on divise le nombre par 4 et on multiplie par 100 le quotient obtenu).

$$\text{En effet, } a \cdot 25 = a \cdot \frac{100}{4} = \frac{a \cdot 100}{4} = \frac{a}{4} \cdot 100; (a \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Exemple: } 180 \cdot 25 = \frac{180 \cdot 100}{4} = \frac{180}{4} \cdot 100 = 45 \cdot 100 = 4500$$

Division par 25

On divise le nombre par 100 et on multiplie par 4 le quotient obtenu, (ou, ce qui revient au même, on multiplie le nombre par 4 et on divise par 100 le produit obtenu).

$$\text{En effet, } \frac{a}{25} = a : \frac{100}{4} = a \cdot \frac{4}{100} = \frac{a \cdot 4}{100} = \frac{a}{100} \cdot 4; (a \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Exemple: } 12 : 25 = (12 \cdot 4) : 100 = 48 : 100 = 0,48$$

Multiplication par 15

On multiplie le nombre par 10 et on ajoute au produit obtenu la moitié de ce produit.

$$\text{En effet, } a \cdot 15 = a \cdot (10 + 5) = a \cdot 10 + a \cdot 5 = a \cdot 10 + a \cdot \frac{10}{2} = a \cdot 10 + \frac{a \cdot 10}{2};$$

$(a \in \mathbb{R}).$

$$\text{Exemple: } 114 \cdot 15 = 114 \cdot 10 + \frac{114 \cdot 10}{2} = 1140 + 570 = 1710$$

Divisibilité par 10

Un nombre est divisible par 10 si et seulement si il se termine par au moins un zéro.

Exemples: 2750, 400, 20 sont divisibles par 10; 455 n'est pas divisible par 10.

Divisibilité par 100

Un nombre est divisible par 100 ssi* il se termine par au moins deux zéros.

Exemples: 2700 et 4220000 sont divisibles par 100; 3250 n'est pas divisible par 100.

Divisibilité par 5

Un nombre est divisible par 5 ssi le chiffre des unités est 0 ou 5.

Exemples: 275 et 420 sont divisibles par 5, 342 n'est pas divisible par 5.

Divisibilité par 2

Un nombre est divisible par 2 ssi le chiffre des unités représente un nombre pair (0, 2, 4, ou 6).

Exemple: 424 et 272338 sont divisibles par 2, 247 n'est pas divisible par 2.

Divisibilité par 3

Un nombre est divisible par 3 ssi la somme des nombres représentés par ses chiffres est un multiple de 3 (0, 3, 6, 9, 12, 15,...).

Exemples: 4281 est divisible par 3 ($4 + 2 + 8 + 1 = 15$); 252 est divisible par 3 ($2 + 5 + 2 = 9$); 331 n'est pas divisible par 3 ($3 + 3 + 1 = 7$).

* Si et seulement si.

Divisibilité par 9*a retenir*

Un nombre est divisible par 9 ssi la somme des nombres représentés par ses chiffres est un multiple de 9 (0, 9, 18, 27,...).

Exemples: 6327 est divisible par 9 ($6 + 3 + 2 + 7 = 18$), 439 n'est pas divisible par 9 ($4 + 3 + 9 = 16$).

Divisibilité par 11*a retenir*

Un nombre est divisible par 11 ssi soit la somme des nombres représentés par les chiffres de rangs pairs est égale à la somme des nombres représentés par les chiffres de rangs impairs, soit la différence entre la plus grande de ces sommes et la plus petite est un multiple non nul de 11 (11, 22, 33,...).

Exemples: 132 est divisible par 11 ($1 + 2 = 3$); 627 est divisible par 11 (somme des «rangs impairs»: 13, somme des «rangs pairs»: 2, $13 - 2 = 11$); 353 n'est pas divisible par 11 ($3 + 3 \neq 5$ et $6 - 5 = 1$, non multiple de 11).

De la «règle de trois»

À retenir

But

Calculer ce qui «correspond» à b «unités», connaissant ce qui «correspond» à c «unités», à savoir N .

Principe

Il consiste à établir la «correspondance» pour une «unité».

Méthode

Enoncé:

c «correspond» à N

d'où 1 «correspond» à c fois moins, c'est-à-dire à $\frac{N}{c}$

d'où b «correspond» à b fois plus que ce qui «correspond» à 1,

c'est-à-dire à $\frac{N}{c} \cdot b$

Exemples:

Sachant que 100 FB valent 14,45 FF (cours du 12.82), déterminer ce que valent, en FF, 1350 FB.

100FB valent 14,45 FF

1 FB vaut 100 fois moins, c'est-à-dire $\frac{14,45}{100}$ FF

1350 FB valent 1350 fois plus que 1 FB, c'est-à-dire

$$\frac{14,45 \times 1350}{100} \text{ FF} = 195,075 \text{ FF}$$

La tige d'un thermomètre à mercure est graduée de -10° à $+110^{\circ}$ sur une longueur de 24 cm. A quelle variation de température correspond un déplacement de six cinquièmes de millimètre de l'index de mercure?

240 mm (= 24 cm) correspondent à une variation de température de 120° (de -10° à 110°).

1 mm correspond donc à une variation de température de $\frac{120^{\circ}}{240}$

$\frac{6}{5}$ mm correspondent donc à une variation de température de

$$\frac{120^{\circ}}{240} \cdot \frac{6}{5} = \frac{120^{\circ} \cdot 6}{240 \cdot 5} = \frac{3^{\circ}}{5} = \frac{6^{\circ}}{10}$$

Pourcentage ↓

Définition: l'expression $r\%$ (r pour cent) signifie qu'à 100 «unités» correspondent r «unités».

Technique de calcul: déterminer $r\%$ de A revient donc à déterminer ce qui correspond à A «unités», connaissant ce qui correspond à 100 «unités», à savoir r . Il faut donc faire une «règle de trois» et se ramener ainsi d'abord à une «unité».

Exemples:

Que représentent 12% de 20300?

A 100 F correspondent 12 F.

A 1 F correspondent $\frac{12 \text{ F}}{100}$

A 20300 F correspondent $\frac{12 \text{ F} \cdot 20300}{100} = 2436 \text{ F}$.

Ainsi, 12% de 20300 F valent 2436 F.

(Autrement dit: 100% de 20300 F sont représentés par 20300 F.

1% est donc représenté par $\frac{20300 \text{ F}}{100}$

Et 12% sont représentés par $\frac{20300 \text{ F}}{100} \cdot 12 = 203 \text{ F} \cdot 12 = 2436 \text{ F.}$)

Des cotes sont attribuées sur 45. Combien faut-il obtenir de points pour avoir au moins 85%

Cela revient à déterminer 85% de 45.

100% des points sont représentés par 45 (le maximum des points)

1% des points est représenté par $\frac{45}{100}$

85% des points sont représentés par $\frac{45 \cdot 85}{100} = 38,25$.

Ainsi, pour avoir au moins 85% des points, il faut avoir au moins 38,25 sur 45.

Cas particulier: calcul de l'intérêt annuel (= bénéfice) d'un capital.

On appelle *taux annuel* l'intérêt rapporté en 1 an par un capital de 100 F. Ainsi, un taux annuel de 7% signifie qu'en 1 an un capital de 100 F rapporte 7F.

Exemple: quel est l'intérêt annuel rapporté par 2500 F placés au taux annuel de 6,5% ? On utilise le principe de la « règle de trois »:

100 F rapportent 6,5 F.

1 F rapporte 100 fois moins, c'est-à-dire $\frac{6,5 \text{ F}}{100}$

2500 F rapportent 2500 fois plus que 1 F, c'est-à-dire

$$\frac{6,5 \text{ F} \cdot 2500}{100} = 6,5 \text{ F} \cdot 25 = 162,5 \text{ F}$$

Intérêt simple: formule de calcul

Etablissement de la formule

Soit $r\%$ le taux annuel et C F le capital.

100 F rapportent r F.

1 F rapporte donc 100 fois moins, c'est-à-dire $\frac{r}{100}$ F.

C F rapportent C fois plus que 1 F, c'est-à-dire

$$\frac{r \cdot C}{100} = \left(C \cdot \frac{r}{100} \right) F = (C \cdot t) F, \text{ où } t \text{ est le taux en } \%.$$

Formule:

$$I = C \cdot t$$

où I est l'intérêt annuel, C le capital et t le taux (en $\%$).

Exemples: Quel est l'intérêt annuel d'un capital de 1200 F placé au taux annuel de 5,5% ?

$$I = C \cdot t \Rightarrow I = 1200 \text{ F} \cdot \frac{5,5}{100} = \frac{1200 \text{ F} \cdot 5,5}{100} = 66 \text{ F}$$

Pendant combien ce temps a-t-on placé un capital de 11500 F (intérêt simple), le taux annuel de placement étant de 12% et la valeur acquise par ce capital étant 177100 F ?

Ainsi, après un certain temps (à déterminer), la somme du capital de départ et des intérêts vaut 177100 F.

Les intérêts sont donc: $177100 \text{ F} - 115000 \text{ F} = 62100 \text{ F}$

Le taux annuel étant 12%, l'intérêt annuel est égal à

$$\frac{115000 \text{ F} \cdot 12}{100} = 13800 \text{ F}$$

Le capital a donc été placé autant d'années qu'il y a 13800 F dans 62100 F (chaque année, le capital rapporte 13800 F; or, on sait qu'il a rapporté 62100 F). Le nombre d'années de placement est donc:

$$n = \frac{62100}{13800} \text{ ans} = 4,5 \text{ ans} = 4 \text{ ans et 6 mois.}$$

Remarque: intérêts composés

Principe des intérêts composés: chaque année, les intérêts de l'année précédente sont ajoutés au capital de l'année précédente et un nouveau capital est ainsi formé. C'est sur ce nouveau capital que sont alors calculés les intérêts de l'année suivante. Ainsi, après la première année de placement, le capital est devenu $C + I$. Et la deuxième année, l'intérêt est calculé sur ce capital $C + I$; il vaut donc $(C + I) \cdot t$.

Formule des intérêts composés: cette formule donne la valeur acquise, A (notée aussi C_n), par un capital de départ, C (noté aussi C_0), placé au taux de $r\%$ (noté aussi t) pendant n années.

$$A = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

(notée aussi $C_n = C_0(1 + t)^n$) (voir puissances)

A (ou C_n) représente donc la somme dont on disposera après n années, intérêts compris.

Exemples

Solt $C = 1500$ F, $t = 5,5\%$ et $n = 6$.

$$\text{Alors } A = 1500 \cdot \left(1 + \frac{5,5}{100}\right)^6 = 1500 \cdot (1 + 0,055)^6.$$

$$\Rightarrow A = 1500 \cdot (1,055)^6 = 1500 \cdot 1,3788428 = 2068$$

Après 6 ans, le capital est donc devenu 2068 F.

Quelle est la somme qu'il faut placer pendant 30 ans à intérêts composés, au taux de 7% , pour obtenir 913470,50 F ?

$$913470,5 = C_0 \cdot (1 + 0,07)^{30}$$

$$913470,5 = C_0 \cdot (1,07)^{30}$$

$$913470,5 = C_0 \cdot 7,612255$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{913470,5}{7,612255} \simeq 119999,99 \simeq 120000$$

Il faut donc placer 120000 F.

Des équations du premier degré

Définitions

Une équation est une égalité dans laquelle il y a une (ou plusieurs) inconnue(s) notée(s) par une (ou plusieurs) lettre(s) et qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs de cette (ces) inconnue(s).

Soit une équation à une inconnue. Une valeur de l'inconnue qui vérifie cette équation s'appelle *une solution de cette équation*.

En général, une équation du premier degré à une inconnue admet une solution.

Exemples

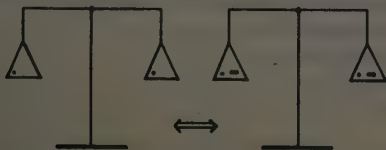
$2x - 3 = 5 - 4x$ est une équation du premier degré à une inconnue. La solution de cette équation est $4/3$. En effet, $2 \cdot 4/3 - 3 = 5 - 4 \cdot 4/3$

$4x - y = 1$ est une équation du premier degré à deux inconnues. Elle admet une infinité de solutions, c'est-à-dire une infinité de couples de valeurs la vérifiant.

$(0, 1)$ est une solution. En effet, $4 \cdot 0 - (-1) = 1$.

$(2, 7)$, $(1/2, 1)$, $(-1, -5)$, $(6, 23)$ sont d'autres solutions de cette équation.

Propriétés des égalités



Lorsqu'on ajoute un même nombre aux deux membres d'une égalité, ou lorsqu'on retranche un même nombre des deux membres d'une égalité, on obtient une égalité équivalente à la précédente.

$$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$$

Exemple: $2 \cdot 5 = 10$

$2 \cdot 5 + 7 = 10 + 7$

Lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une égalité par un même nombre non nul, on obtient une égalité équivalente à la précédente.

$$a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c, c \neq 0$$

Exemple: $30 = 14 + 16$

$30 \cdot 3 = (14 + 16) \cdot 3$

Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue

Méthode:

- 1 — On supprime toutes les parenthèses. Donc on effectue toutes les multiplications et additions possibles dans chaque membre.
- 2 — On «groupe» les termes en inconnue dans un membre et les termes indépendants dans l'autre, (pour cela, on ajoute une ou plusieurs mêmes quantités aux deux membres de l'équation, ou l'on retranche une ou plusieurs mêmes quantités des deux membres).
- 3 — On effectue les additions (et soustractions) dans les deux membres.
- 4 — On isole l'inconnue et on calcule la valeur de l'inconnue, si c'est possible.

Exemple: soit à résoudre $4(x - 3) + 2x - 5 = 3x + 4$.

$$4(x - 3) + 2x - 5 = 3x + 4$$

$$\Rightarrow 4x - 12 + 2x - 5 = 3x + 4$$

$$\Rightarrow 6x - 17 = 3x + 4$$

$$\Rightarrow 6x - 3x - 17 = 4 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 3x = 4 + 17 \quad (2)$$

$$\Rightarrow 3x = 21$$

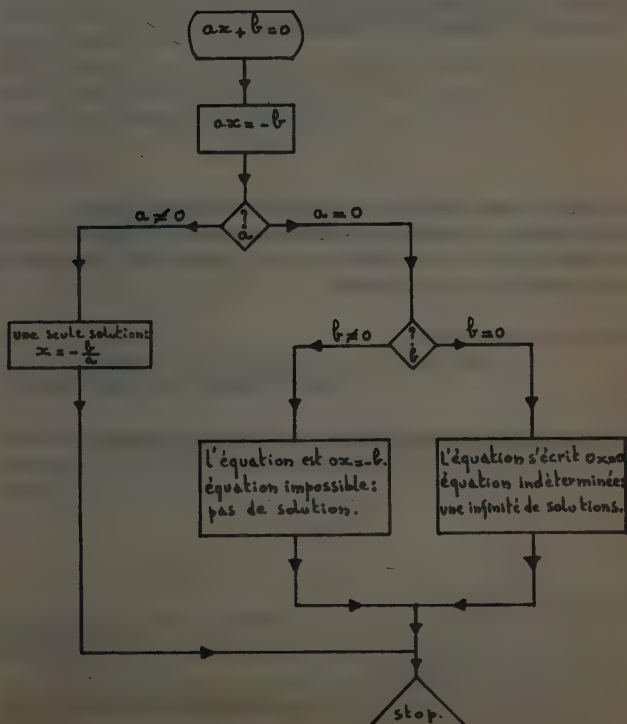
$$\Rightarrow x = \frac{21}{3}$$

$$\Rightarrow x = 7$$

(1) On a retranché $3x$ des deux membres de l'égalité, afin que les x n'apparaissent plus dans le deuxième membre, mais uniquement dans le premier membre.

(2) On a ajouté 17 aux deux membres de l'équation pour ne garder que des x dans le premier membre.

Organigramme de la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue



Des puissances à exposants entiers de nombres réels

Définitions

La $n^{\text{ème}}$ puissance (n étant un nombre entier positif) d'un nombre est le produit de n facteurs égaux à ce nombre.

On appelle n l'exposant de la puissance.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$$

où a est un réel quelconque et n un entier positif quelconque.

Une puissance à exposant entier positif d'un nombre réel représente donc un produit dont tous les facteurs sont les mêmes; c'est l'exposant qui indique combien il y a de facteurs.

Exemples: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$$(-1,2)^4 = (-1,2) \cdot (-1,2) \cdot (-1,2) \cdot (-1,2) = +2,0736$$

La puissance zéro d'un nombre est, par convention, égale à 1.

$$a^0 = 1$$

quel que soit le réel a .

(S'il n'y a aucun facteur a dans un produit, cela signifie que ce nombre ne joue aucun rôle dans ce produit; or, «mettre» 1 dans un produit ne change pas celui-ci. D'où convention !

Autre justification de cette convention: conséquence du quotient de deux puissances d'un même nombre.)

Exemples:

$$(17,3)^0 = 1$$

$$(-4)^0 = 1$$

La puissance à exposant entier négatif d'un nombre:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

où n est un entier positif quelconque et a un réel quelconque.

(Conséquence du quotient de deux puissances d'un même nombre et de la puissance zéro d'un nombre.)

Une puissance à exposant entier négatif d'un nombre réel représente donc l'inverse de la puissance de ce nombre d'exposant égal à l'opposé de celui de la puissance donnée.

Exemples:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$(-5)^{-1} = \frac{1}{(-5)^1} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$$

Propriétés des puissances

Le produit de deux puissances d'un même nombre est la puissance de ce nombre ayant comme exposant la somme des exposants des deux puis-

3211025

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \forall a \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Exemples:

$2^3 \cdot 2^5 = 2^8$ (il y a trois facteurs 2 multipliés par cinq facteurs 2, ce qui donne donc huit facteurs 2)

$$2^{-4} \cdot 2^7 = 2^{-4+7} = 2^3 = 8$$

Le quotient de deux puissances d'un même nombre non nul est la puissance de ce nombre ayant comme exposant la différence des exposants des deux puissances.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \forall a, \in \mathbb{R}_0, \forall m, n \text{ entiers}$$

Exemples :

$$\frac{2^4}{2^2} = 2^2 = 4 \text{ (on a pu simplifier trois facteurs 2 et il en reste deux au numérateur).}$$

$$\frac{2^2}{2^{-3}} = 2^{2-(-3)} = 2^{2+3} = 2^5$$

La puissance d'un produit de plusieurs facteurs est égale au produit des puissances de chacun des facteurs.

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n; \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Exemple : $(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

La puissance d'une puissance d'un nombre est la puissance de ce nombre qui a comme exposant le produit des exposants.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}; \forall a \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Exemple : $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$

La puissance d'un quotient de deux nombres est égale au quotient des puissances de chaque facteur.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemple: $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$

Ces propriétés se démontrent à l'aide de la définition d'une puissance à exposant entier, de propriétés de la multiplication de nombres réels et de la simplification des fractions (dans le cas du quotient de deux puissances d'un même nombre).

Des radicaux

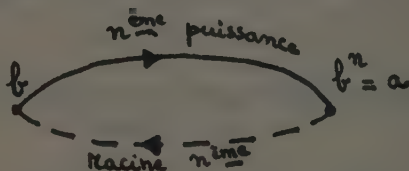
Définition

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

où n est un entier positif quelconque et a un réel quelconque (voir conséquences de la définition: racine d'indice pair d'un nombre négatif!).

On appelle n l'indice de la racine, a le radicand et le signe $\sqrt{}$ le radical.

Si $a > 0$:



Conséquences de la définition

La racine d'indice pair d'un nombre négatif n'est pas un nombre réel.

En effet, supposons que $\sqrt[n]{a}$, avec n pair et a négatif, soit définie dans $\mathbb{R}$. Alors, par définition, $\sqrt[n]{a}$ est un nombre réel x tel que $x^n = a$. Or, toute puissance paire d'un nombre réel non nul quelconque est un nombre positif (= produit d'un nombre pair de facteurs de même signe).

D'où x^n est positif. Mais comme $x^n = a$ et que a est négatif (par hypothèse), on arrive à une contradiction. Donc, la supposition est fausse et $\sqrt[n]{a}$ n'est pas définie dans $\mathbb{R}$.

Exemple: $\sqrt[2]{-16} \notin \mathbb{R}$.

En effet, supposons que $\sqrt[2]{-16} = b$ soit un réel.

Alors, $\sqrt[2]{-16} = b \Leftrightarrow b^2 = -16$, ce qui est impossible parce que $b^2 \geq 0, \forall b \in \mathbb{R}$.

$$(\sqrt[n]{a})^n = (\sqrt[n]{a^n}) = a$$

$$\text{Exemples: } (\sqrt[3]{3^2})^3 = 3^2 = 9; \sqrt[5]{2^5} = 2$$

Exemples

$$\sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2 \text{ car } 2^2 = 4$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ car } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3 \text{ car } 3^2 = 9$$

$$\sqrt[3]{125} = x \Leftrightarrow x^3 = 125 \Leftrightarrow x = 5. \text{ Donc } \sqrt[3]{125} = 5$$

$$\sqrt[3]{-27} = x \Leftrightarrow x^3 = -27 \Leftrightarrow x = -3. \text{ Donc } \sqrt[3]{-27} = -3$$

Remarque

Lorsqu'on écrit $\sqrt[n]{a}$, avec n pair et a positif, il s'agit du nombre positif dont la $n^{\text{ème}}$ puissance est égale à a .

Le nombre négatif dont la $n^{\text{ème}}$ puissance (n pair !) est égale à a (a positif !) se note $-\sqrt[n]{a}$.

Ainsi, par exemple, $\sqrt{16} = 4$ et $-\sqrt[4]{128} = -2$.

Convention

On peut écrire une racine $n^{\text{ème}}$ sous forme d'une puissance à exposant fractionnaire.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; \forall a \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{N}_0$$

En particulier, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Exemples : $2^{\frac{1}{3}}$ représente le nombre $\sqrt[3]{2}$;

$6^{\frac{3}{2}}$ représente le nombre $\sqrt[2]{6^3} = 6\sqrt{6}$.

Règles de calcul des radicaux

Ce sont les mêmes que celles des puissances.

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \forall c \in \mathbb{R}_0^+, \forall m, n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n^p]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Remarque à propos de la racine d'une somme

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

Contre-exemple:

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$$

$$5 \neq 7$$

De l'ordre des opérations dans $\mathbb{R}$*

1 — On effectue tout d'abord les opérations entre parenthèses, les parenthèses les plus intérieures en premier lieu.

2 — On effectue les puissances et les radicaux.

3 — On effectue les multiplications et les divisions.

4 — On effectue les additions et les soustractions.

Exemples:

$$2 \cdot (4 + 1) - 3 \cdot 2^3 + 2 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 8 + 2 = 10 - 24 + 2 = -12$$

$$\begin{aligned} & 4(17 - 3(5 + 2) + 3^3) - (-1)^3 \\ &= 4(17 - 3 \cdot 7 + 3^3) - (-1) = 4(17 - 21 + 27) - (-1) \\ &= 4 \cdot 23 + 1 = 92 + 1 = 93 \end{aligned}$$

* Important pour l'emploi des calculatrices.

Des fonctions

Notion intuitive

Une fonction est un lien entre deux grandeurs variables au moins.

Exemples

La force d'attraction entre deux corps est fonction de la masse de ces corps et de la distance qui les sépare.

Le lien qui existe entre ces variables est donné par la formule suivante:

$$F = K \cdot \frac{m \cdot m'}{d^2} \text{ (loi d'attraction universelle de Newton),}$$

où K est une constante, m et m' les masses des corps et d la distance entre les corps.

La vitesse d'un corps qui tombe (dans le vide) est une fonction du temps: $v = g \cdot t$, où g est l'accélération due à la pesanteur, v la vitesse et t le temps.

Les impôts dépendent des revenus.

Définition

Une fonction réelle liant deux variables est une relation de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que tout nombre réel ait 0 ou 1 image par cette relation.

Autrement dit, à chaque nombre réel correspond au plus un nombre par cette relation.

Exemples: $y = \sqrt{x}$ (ou $y = f(x) = \sqrt{x}$); $y = x + 2$;
 $y = x^2 + x - 1$ sont des fonctions (y est fonction de x).

Valeur numérique d'une fonction réelle

La valeur numérique d'une fonction $f(x)$ pour $x = a$, notée $f(a)$, est l'image de a par la fonction f , c'est-à-dire le nombre qui correspond à a par la fonction.

Exemple: Soit $f: x \mapsto x^2 - 2x + 1$;

$$f(5) = 5^2 - 2 \cdot 5 + 1 = 25 - 10 + 1 = 16.$$

Présentation d'une fonction

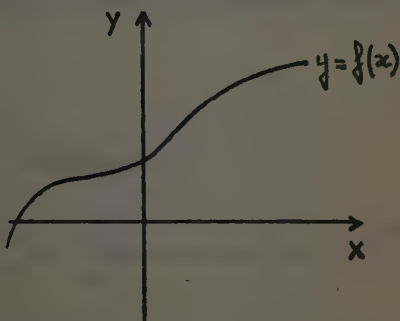
On peut donner une fonction par un **tableau** (spécification partielle), par un **« dessin »** (idée globale du comportement de la fonction), ou **analytiquement**, c'est-à-dire par une ou plusieurs formules liant les variables.

Exemples:

pression atmosphérique
(en mm de mercure)
température d'ébullition
de l'eau (degré Celsius)

300 400 500 600 700

75,8 83 88,7 93,5 97,7



$$y = 3x^2 - x^2 + 1, \text{ ou: } \begin{cases} y = 2x & \text{si } x < 0 \\ y = 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

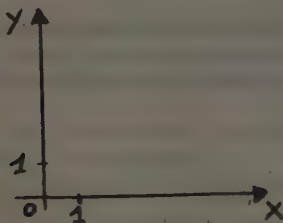
* Ou; soit $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Graphique d'une fonction

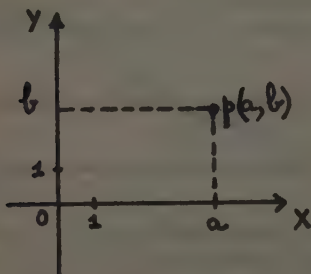
Repère dans le plan: on choisit une origine dans le plan. On y fait passer deux droites sécantes orientées et sur lesquelles on choisit une unité. Ces droites sont appelées les axes de coordonnées.

On prend souvent, pour la facilité, des droites perpendiculaires, ainsi que la même unité.

Autrement dit, on munit le plan d'une base, c'est-à-dire de deux vecteurs non alignés de norme égale à l'unité et dont l'origine est l'origine du plan. On prend souvent une base orthonormée (les vecteurs sont perpendiculaires).

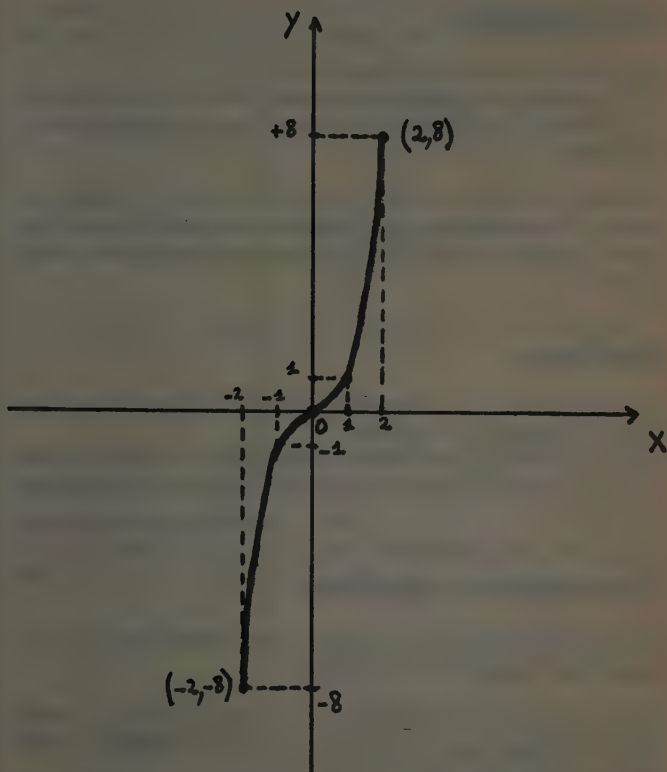


Point du plan coordonné: c'est un couple de valeurs réelles, la première étant appelée *l'abscisse* et la deuxième *l'ordonnée* du point.



Définition: le graphique d'une fonction entre deux variables est, dans le plan coordonné, l'ensemble des points (x, y) tels que $y = f(x)$; c'est-à-dire l'ensemble des points tels que l'ordonnée, y , corresponde à l'abscisse, x , par la fonction.

Exemple: soit à déterminer le graphique de $y = f(x) = x^3$, en dessinant plusieurs points de ce graphique.



Fonction du premier degré entre deux variables

Forme générale

$y = ax + b^*$; ou, $ax + by + c = 0$, avec $b \neq 0$.

On dit que y est une fonction du premier degré de x . Toute fonction du premier degré entre deux variables peut se mettre sous une des deux formes précédentes.

Exemples: $y = 3x - 5$, $2y + 1 = x + 3$, $4x - 3y + 2 = 0$, $2y = -3x$ sont des fonctions du premier degré de x ; l'espace parcouru est une fonction du premier degré du temps dans un mouvement rectiligne uniforme (vitesse v): $e = v \cdot t$.

Graphique

Le graphique d'une telle fonction est **une droite**. On dit que $y = ax + b$ est l'équation cartésienne d'une droite.

a est le **coefficient angulaire** ou coefficient de direction de la droite. Celui-ci donne la pente, l'inclinaison de la droite par rapport à l'axe X (axe des abscisses).

Construction du graphique

Comme ce graphique est une droite, il suffit de déterminer deux des points de la droite pour connaître celle-ci.

Point d'une droite, aspect algébrique: un point d'une droite est, d'après la définition du graphique d'une fonction, un couple de valeurs (x, y) telles que y est liée à x par la fonction donnée.

C'est donc une solution de l'équation qui lie x à y , c'est-à-dire un couple de valeurs qui vérifient cette équation.

* $f: x \mapsto ax + b$

Exemples:

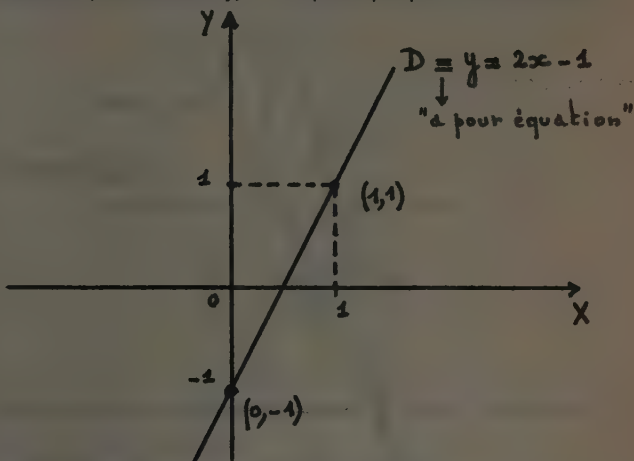
Soit à déterminer le graphique de:

$$y = f(x) = 2x - 1$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow \text{point } (0, -1)$$

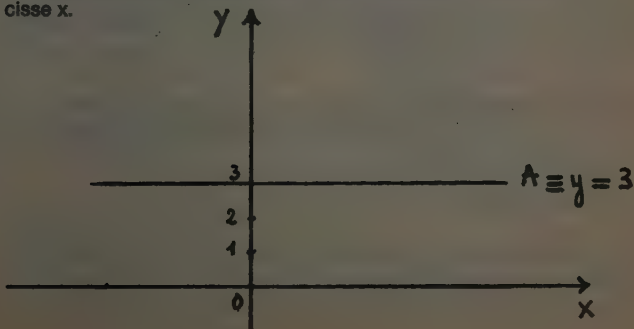
$$x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \Rightarrow \text{point } (1, 1)$$

L'équation de la droite D, $y = 2x - 1$, est donc la relation existant entre l'abscisse x , et l'ordonnée y , de n'importe quel point de cette droite.



Soit à déterminer le graphique de $y = 3$.

C'est une droite dont les points ont pour ordonnée 3, quelle que soit l'abscisse x .

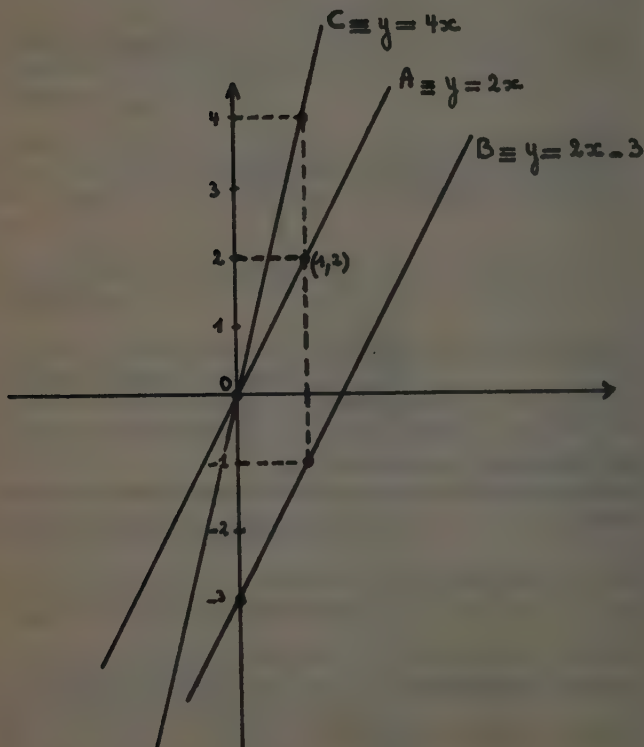


Soit à déterminer les graphiques de $y = 2x$, $y = 2x - 3$, $y = 4x$.

A et B sont parallèles. Elles ont même coefficient angulaire, soit 2.

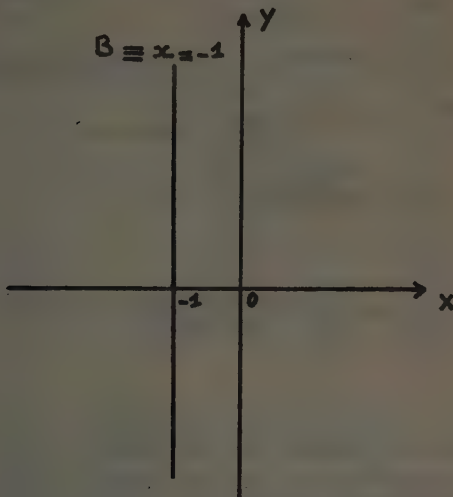
$(0,0) \in A$; en effet, $0 = 2 \cdot 0$

$(0, -3) \in B$; en effet, si $x = 0$, alors $y = -3$ d'après l'équation $y = 2x - 3$ de la droite B.



Cas particulier: soit à déterminer la droite d'équation $x = -1$ ($x - 1$ n'est pas une fonction de x !).

C'est l'ensemble des points dont l'abscisse est égale à -1 , quelle que soit l'ordonnée y .



Coefficient angulaire d'une droite

Soit $y = ax + b$ l'équation d'une droite A ($A \equiv y = ax + b$). Le coefficient angulaire de A est a , c'est-à-dire le coefficient de x lorsque y est isolée dans un membre.

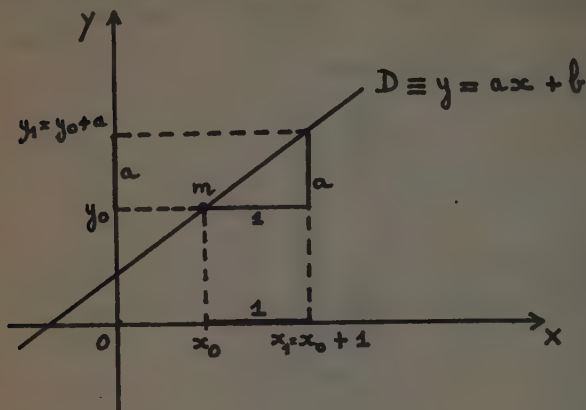
Le coefficient angulaire d'une droite représente la pente, l'inclinaison de cette droite par rapport à la direction de l'axe X .

Soit la droite d'équation $y = 2x + 1$. Prenons le point d'abscisse 3. Son ordonnée y est alors égale à $2 \cdot 3 + 1 = 7$.

Augmentons cette abscisse de 1, c'est-à-dire prenons $x = 4$. Le point sur la droite correspondant à cette abscisse a pour ordonnée $y = 2 \cdot 4 + 1 = 9$.

On constate que y a augmenté de 2, c'est-à-dire du coefficient angulaire de la droite, lorsque x a augmenté de 1.

Soit la droite d'équation $y = ax + b$. Soit un point m quelconque de cette droite. Soit x_0 l'abscisse de m . On a alors comme ordonnée de m : $y_0 = a \cdot x_0 + b$.



Augmentons cette abscisse x_0 de 1, donc prenons $x_1 = x_0 + 1$.

Alors $y_1 = a(x_0 + 1) + b \Rightarrow y_1 = ax_0 + a + b = (ax_0 + b) + a = y_0 + a$.

On voit donc que l'ordonnée augmente de a , c'est-à-dire du coefficient angulaire de la droite, lorsque l'abscisse d'un point quelconque augmente de 1.

Exemples:

Quel est le coefficient angulaire de $D \equiv 2x - 3y + 1 = 0$?

($2x - 3y + 1 = 0$ est une équation du premier degré en x et en y , c'est donc bien l'équation d'une droite).

On écrit cette équation sous la forme $y = ax + b$:

$$2x - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3y \Leftrightarrow 3y = 2x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Le coefficient angulaire de D est alors le coefficient de x de cette dernière forme de l'équation; il est donc égal à $2/3$.

Quel est le coefficient angulaire de $A \equiv -y = -4x + 1$?

($-y = -4x + 1$ est bien l'équation d'une droite puisque c'est une équation du premier degré en x et en y)

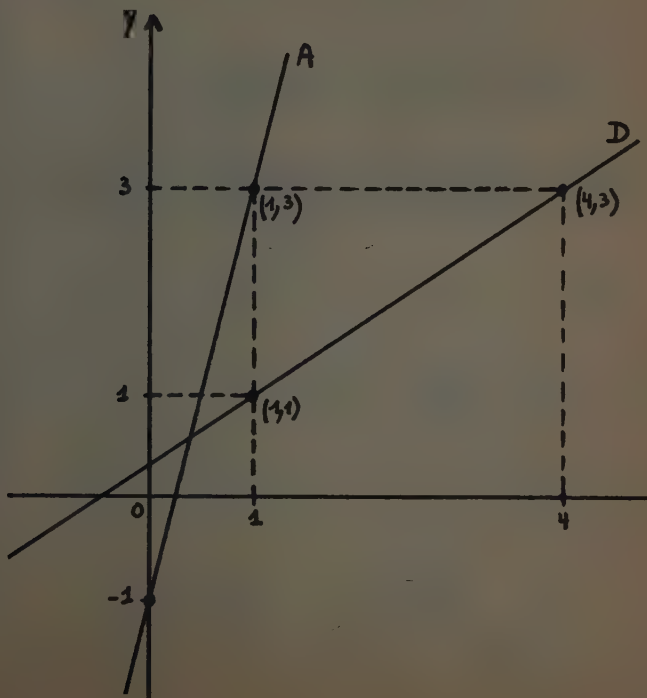
Ecrivons l'équation sous la forme $y = ax + b$:

$$-y = -4x + 1 \Leftrightarrow y = -(-4x + 1) \Leftrightarrow y = 4x - 1.$$

Le coefficient angulaire de A est donc 4, le coefficient de x de cette dernière équation.

Représentons graphiquement les fonctions:

$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ et $y = 4x - 1$, c'est-à-dire traçons les droites A et D :



$$D \equiv y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \text{ (ou } D \equiv 2x - 3y + 1 = 0) \text{ et}$$

$$A \equiv y = 4x - 1 \text{ (ou } A \equiv -y = -4x + 1)$$

Nous aurons ainsi la signification graphique du coefficient angulaire.

Graphique de $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$: comme c'est une droite, on en détermine deux points.

$$\text{si } x = 1, \text{ alors } y = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \text{point } (1, 1)$$

$$\text{si } x = 4, \text{ alors } y = \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow \text{point } (4, 3).$$

Graphique de $y = 4x - 1$:

$$\text{si } x = 0, \text{ alors } y = 4 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow \text{point } (0, -1).$$

$$\text{si } x = 1, \text{ alors } y = 4 \cdot 1 - 1 = 3 \Rightarrow \text{point } (1, 3).$$

La droite A, de coefficient angulaire égal à +4, fait, avec l'axe X un angle compris entre 0° et 90° plus grand que l'angle de D avec l'axe X.

Représentons graphiquement les fonctions $y = -x$ et $y = -2x$, c'est-à-dire traçons les droites A d'équation $y = -x$ et B d'équation $y = -2x$, droites dont les coefficients angulaires sont négatifs.

Déterminons deux points de A:

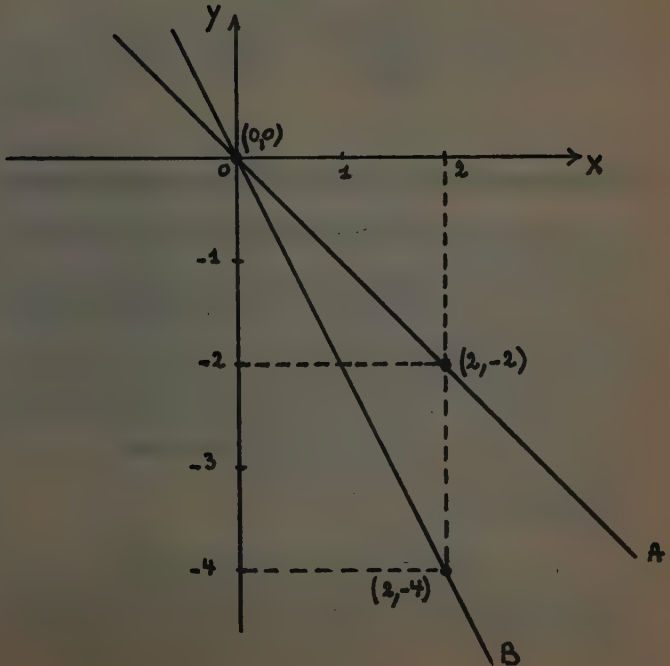
si $x=0$, alors $y=0 \Rightarrow (0,0)$.

si $x=2$, alors $y=-2 \Rightarrow (2,-2)$.

Déterminons deux points de B:

si $x=0$, alors $y=0 \Rightarrow (0,0)$.

si $x=2$, alors $y=-4 \Rightarrow (2,-4)$.



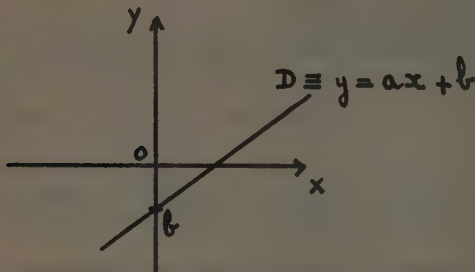
Remarque; signification graphique de «b»*

Soit $D \equiv y = ax + b$.

Le terme indépendant b est l'ordonnée du point d'intersection de la droite D avec l'axe Y .

En effet, comme ce point appartient à l'axe Y , $x = 0$, et comme il appartient à D , $y = ax + b$.

D'où, $y = a \cdot 0 + b = b$.



Détermination de l'équation d'une droite donnée

Soit, par exemple, à déterminer l'équation de la droite A comprenant les points $(1,3)$ et $(2,7)$.

- L'équation de toute droite peut se mettre sous la forme $y = ax + b$ **
- Comme $(1,3) \in A$, le couple $(1,3)$ vérifie l'équation de la droite A (x étant égal à 1 et y à 3) $\Rightarrow 3 = a \cdot 1 + b \Rightarrow a + b = 3$.
- Comme $(2,7) \in A$, $(2,7)$ vérifie l'équation de $A \Rightarrow 7 = a \cdot 2 + b \Rightarrow 2a + b = 7$.
- On a ainsi les deux relations $a + b = 3$ et $2a + b = 7$, d'où l'on peut tirer a et b : $a + b = 3 \Rightarrow b = 3 - a$. Comme, d'autre part, $2a + b = 7$, on peut, dans cette égalité, remplacer b par $3 - a$; on obtient $2a + (3 - a) = 7$
 $\Rightarrow 2a + 3 - a = 7 \Rightarrow a + 3 = 7 \Rightarrow a = 7 - 3 = 4$.
- Et dès lors, puisque $b = 3 - a$, $b = 3 - 4 = -1$.
- L'équation de la droite A est donc $y = 4x - 1$.

* b est le terme indépendant de l'équation $y = ax + b$ d'une droite.

** Excepté dans le cas particulier d'une droite parallèle à l'axe Y , dont l'équation est de la forme $x = c$, où c est un nombre réel non nul, et d'une droite confondue avec Y (équation: $x = 0$). De telles droites ne sont pas les graphiques de fonctions y de x .

Soit, par exemple, à déterminer l'équation de la droite A passant par le point (2,5) et dont le coefficient angulaire est 1,5 (ou $\frac{3}{2}$).

- L'équation de A peut s'écrire $y = ax + b$.

- Comme le coefficient angulaire de A est $\frac{3}{2}$, on a : $a = \frac{3}{2}$

- Comme (2,5) est un point de A, les coordonnées de ce point vérifient l'équation de A :

$$5 = a \cdot 2 + b. \text{ Or, } a = \frac{3}{2} \Rightarrow 5 = \frac{3}{2} \cdot 2 + b \Rightarrow 5 = 3 + b \Rightarrow b = 5 - 3 = 2.$$

- L'équation de A est donc $y = \frac{3}{2}x + 2$.

Signe d'une fonction du premier degré d'une variable

Exemples

Etudier le signe de $y = -2x + 5$.

Le graphique de cette fonction est une droite.

On sait que, dans le plan coordonné, l'ensemble des points (x,y) tels que $y > 0$ est la partie du plan au-dessus de l'axe X, l'ensemble des points (x,y) tels que $y < 0$ est la partie du plan en dessous de l'axe X et l'ensemble des points tels que $y = 0$ est l'axe X.

Ainsi, pour connaître le signe de $y = f(x)$, il suffit de savoir où la droite graphique de cette fonction traverse l'axe X, c'est-à-dire de connaître la valeur de x pour laquelle $y = 0$.

$$y = 0 \Leftrightarrow 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Prenons une valeur de x quelconque inférieure à $\frac{5}{2}$;

par exemple, $x = 0$. Calculons la valeur de y correspondant à $x = 0$:

$$y = -2 \cdot 0 + 5 > 0. \text{ Donc, } \forall x < \frac{5}{2}, y > 0.$$

Dès lors, $\forall x > \frac{5}{2}, y < 0$

(si par exemple $x = 3$, alors $y = -2 \cdot 3 + 5 = -1 < 0$).

On présente ces informations dans un tableau :

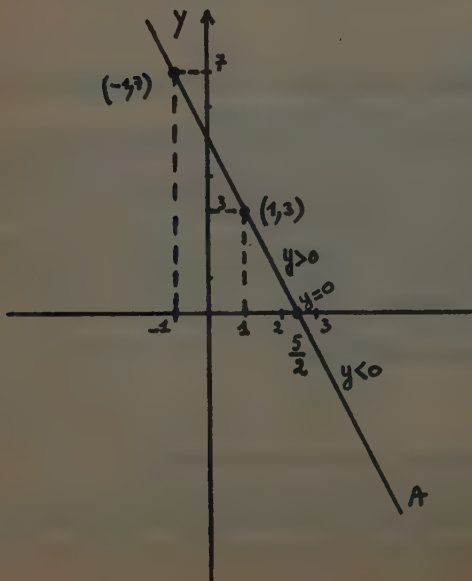
x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
y	$+$	0	$-$

On peut les retrouver graphiquement :

Traçons $A \equiv y = -2x + 5$:

$$x = 1 \Rightarrow y = -2 \cdot 1 + 5 = 3 \Rightarrow (1, 3)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -2 \cdot (-1) + 5 = 2 + 5 = 7 \Rightarrow (-1, 7)$$



Étudions le signe de $y = f(x) = x + 3$

$$y = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y	-	0	+

(soit $x < -3$, par exemple $x = -4$, alors $y = -4 + 3 = -1 \Rightarrow y < 0$
 soit $x > -3$, par exemple $x = 0$, alors $y = 0 + 3 = 3 \Rightarrow y > 0$)

Méthode pour étudier le signe de $y = f(x) = ax + b$.

1 - Déterminer x tel que $y = 0$.

$$y = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$$

2 - Calculer la valeur de y correspondant à une valeur quelconque de x inférieure à $\frac{-b}{a}$.

On a ainsi le signe de $y = f(x) \forall x < \frac{-b}{a}$

(puisque $y = f(x)$ ne peut changer de signe qu'en passant par 0).

3 - Calculer la valeur de y correspondant à une valeur quelconque de x supérieure à $\frac{-b}{a}$.

On en déduit le signe de $y = f(x) \forall x > \frac{-b}{a}$.

Remarquons qu'il suffit de connaître le signe de $y = f(x)$

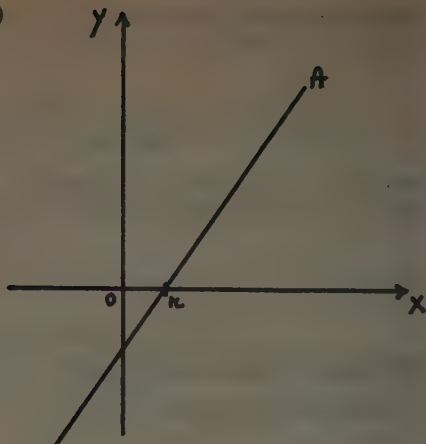
pour $x > \frac{-b}{a}$ ou pour $x < \frac{-b}{a}$, ces deux signes étant contraires.

(La droite traverse l'axe des x en $x = \frac{-b}{a}$!)

si $x = r$, alors $y = 0$ ($f(r) = 0$)

si $x < r$, alors $y < 0$

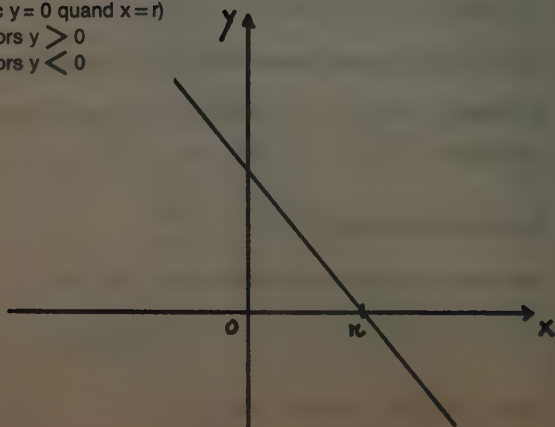
si $x > r$, alors $y > 0$



$f(r) = 0$ (donc $y = 0$ quand $x = r$)

si $x < r$, alors $y > 0$

si $x > r$, alors $y < 0$



Fonction du second degré

Forme générale

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c; a \in \mathbb{R}_0; b, c \in \mathbb{R}.$$

On dit que y est une fonction du second degré de x .

Exemple

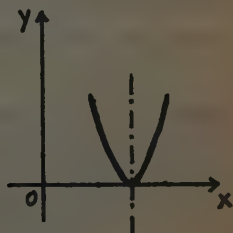
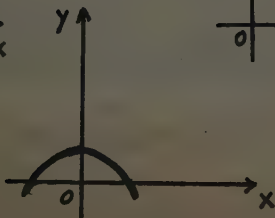
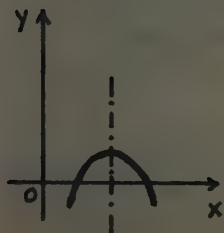
Lors de la chute d'un corps dans le vide, l'espace parcouru par le corps est une fonction du second degré du temps:

$$e = f(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

où g est l'accélération due à la pesanteur.

Graphique

Le graphique d'une telle fonction est **une parabole**. Une parabole est une courbe ayant un point maximum («le plus haut» ou «le plus bas» dans le plan), appelé sommet, et admettant un axe de symétrie, la parallèle à l'axe Y qui passe par le sommet.



Les coordonnées du sommet sont données par les formules:

$$\boxed{x_s = \frac{-b}{2a}} \quad \text{et} \quad \boxed{y_s = \frac{-\Delta}{4a}}$$

(où $\Delta = b^2 - 4ac$)

Remarque: si on connaît x_s , on obtient y_s par $y_s = f(x_s)$, f étant la fonction représentée par la parabole, (donc, on obtient y_s en remplaçant x par x_s dans la formule $y = f(x)$, équation de la parabole).

Le sommet est un maximum si a (coefficient de x^2) est négatif et un minimum si a est positif.

Exemples:

Faire le graphique de $y = x^2 - 4x + 4$.

Cette fonction est une fonction du second degré en x ;

- Sommet: $x_s = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_s = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$

$y_s = f(x_s) = +2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = +4 - 8 + 4 = 0 \Rightarrow s(2,0)$

Ce sommet est un minimum (« a » = +1).

- Axe de symétrie: $A \equiv x = 2$

- Intersection de la parabole avec les axes de coordonnées.

- avec l'axe Y:

Tout point de l'axe Y est tel que $x = 0$.

Tout point (x,y) de la parabole est tel que $y = -x^2 - 4x + 4$.

Les points d'intersection de la parabole avec l'axe Y est (sont) un (des) point(s) qui appartient (appartiennent) à la fois à l'axe Y et à la parabole, c'est-à-dire un (des) point(s) (x,y) vérifiant à la fois les deux conditions:

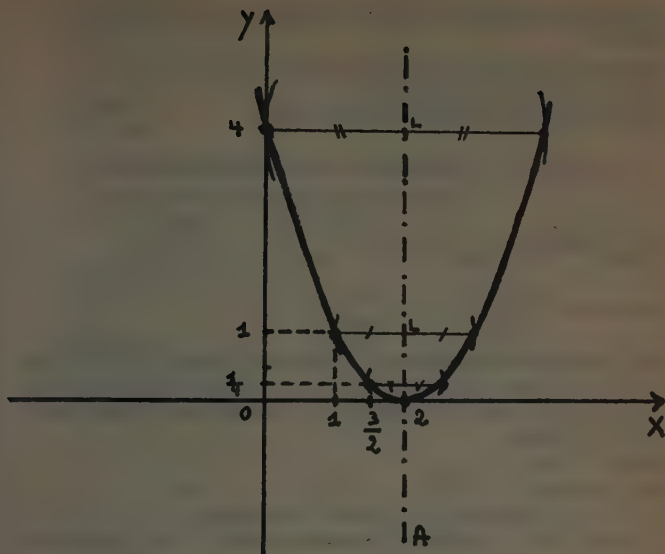
$x = 0$ et $y = +x^2 - 4x + 4$.

De là, $y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 4 = 4$.

Il y a donc un point commun à l'axe y et à la parabole: $(0,4)$.

- avec l'axe X:

Tout point (x,y) de l'axe X est tel que $y = 0$.



Le(s) point(s) (x, y) d'intersection de la parabole avec l'axe X étant des points appartenant à la fois à la parabole et à l'axe X , leurs coordonnées doivent vérifier à la fois $y=0$ et $y=x^2-4x+4$. D'où, $0=x^2-4x+4$ ou $x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=0$.

Il y a donc un point d'intersection de la parabole avec l'axe X : $(2, 0)$, c'est-à-dire le sommet.

Remarquons que si le sommet est sur l'axe X , il est le seul point d'intersection de la parabole avec l'axe X (définition du sommet).

- Autres points de la parabole:

$$x=1 \Rightarrow y=1^2-4 \cdot 1+4=1-4+4=1 \Rightarrow (1, 1).$$

On peut alors dessiner le symétrique de ce point.

$$x=\frac{3}{2} \Rightarrow y=\left(\frac{3}{2}\right)^2-4 \cdot \frac{3}{2}+4=\frac{9}{4}-6+4=\frac{9}{4}-2$$

$$=\frac{9}{4}-\frac{8}{4}=\frac{1}{4} \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Déterminer l'équation de la parabole de sommet (0,3) et contenant* le point (1,4).

- Comme il s'agit d'une parabole, son équation est du type

$y = ax^2 + bx + c$, où $a \in \mathbb{R}_0$, $b, c \in \mathbb{R}$.

- Comme (0,3) est le sommet de cette parabole,

$$0 = \frac{-b}{2a} \text{ (puisque } x_s = \frac{-b}{2a}) \Rightarrow 0 \cdot 2a = -b \Rightarrow -b = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ et}$$

$$3 = \frac{-\Delta}{4a} \text{ (puisque } y_s = \frac{-\Delta}{4a}) \Rightarrow 3 = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$\text{Or } b = 0 \Rightarrow 3 = \frac{-0 + 4ac}{4a} \Rightarrow 3 = \frac{4ac}{4a} \Rightarrow 3 = c$$

(on a pu simplifier par a parce que $a \neq 0$, sinon l'équation $y = ax^2 + bx + c$ ne serait plus l'équation d'une parabole, il n'y aurait plus de terme en x^2)

- Comme (1,4) appartient à la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation de la parabole.

$$\text{D'où } 4 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$

Or, $b = 0$ et $c = 3$

$$\Rightarrow 4 = a + 0 \cdot 1 + 3 \Rightarrow 4 = a + 0 + 3 \Rightarrow 4 - 3 = a \Rightarrow a = 1$$

- L'équation de la parabole est donc $y = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 3$, c'est-à-dire $y = x^2 + 3$.

Signe d'une fonction du second degré

Méthode pour étudier le signe de $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

On cherche les zéros de cette fonction, c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles $y = 0$, si c'est possible (voir équation du second degré).

Soit x_1 et x_2 ces valeurs, quand elles existent.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
y	signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a

Remarques:

- comme y ne peut changer de signe qu'en x_1 et x_2 , il suffit, pour connaître son signe, de calculer $y = f(x)$ pour une valeur quelconque de x inférieure à

* passant par

x_1 , pour une valeur quelconque de x comprise entre x_1 et x_2 et pour une valeur quelconque de x supérieure à x_2 , et de voir quel est le signe de la valeur de y correspondante.

- lorsque la fonction ne s'annule pas, elle aura toujours le même signe.
- lorsque la fonction n'a qu'un seul zéro, elle peut changer de signe après cette valeur.

Exemple: soit à étudier le signe de $y = x^2 - x - 3$.

$x^2 - x - 3 = 0$ (voir équation du second degré)

$$\Delta = 1 + 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}; x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

Remarque

$$3 < \sqrt{13} < 4$$

$$3^2 = 9 \quad (\sqrt{13})^2 = 13 \quad 4^2 = 16$$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	$+\Delta$
y		+	0	+

(si $x = 0$, par exemple, alors $y = -3 < 0$)

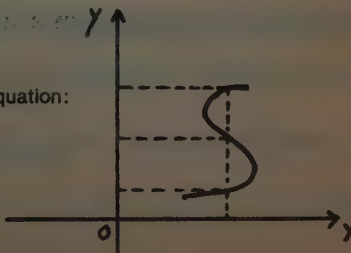
Propriété des fonctions

Toute fonction a un graphique qui la représente et tout graphique tel qu'à chaque valeur de l'abscisse correspond au plus une valeur de l'ordonnée a une équation indiquant le lien entre les variables représentées sur chaque axe.

Remarque:

le graphique suivant

ne peut pas être décrit par une équation:



Des polynômes à une variable à coefficients réels

Définitions

Un **polynôme en x** est une somme dont les termes sont des produits de puissances entières positives de x . Autrement dit c'est une fonction qui fait correspondre à tout nombre réel une somme de produits de puissances de ce nombre par des réels.

Les réels « devant » les puissances de x sont appelés les coefficients du polynôme.

Un **monôme** est un polynôme d'un seul terme; un **trinôme**, un polynôme de trois termes.

Exemples :

$x^5 + 3x^2 - 6x^0$ est un polynôme; on le note aussi

$P(x) = x^5 + 3x^2 - 6x^0$; ou, $P: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}: x \mapsto P(x) = X^5 + 3x^2 - 6x^0$.

$\frac{3x^5}{2}$ est un polynôme.

$\frac{1}{x}$ n'est pas un polynôme.

Degré d'un polynôme à une variable

C'est le degré du terme de plus haut degré du polynôme.

Exemple: le degré de $x^4 - 3x^5 + \frac{x^7}{2} - 3$ est 7.

Degré d'un polynôme à plusieurs variables

C'est le degré du terme de plus haut degré en les variables.

Exemple: $2xy + 3x^3 - 5x^2y^2$ est de degré 4.

Addition de deux polynômes

La somme de deux polynômes en une variable s'obtient en additionnant entre eux les termes de même puissance de cette variable.

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

$$A + B = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n;$$

$$\text{où } a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}.$$

Exemple: soit à déterminer la somme des deux polynômes suivants:

$$P(x) = 4x^3 - 3x^2 + x^5 - 3x + 5 \text{ et } D(x) = -4x^4 + 2x^5 + 1 - 4x^2.$$

On ordonne les polynômes par ordre décroissant des puissances de x :

$$P(x) = x^5 + 4x^3 - 3x^2 - 3x + 5, \quad D(x) = 2x^5 - 4x^4 - 4x^2 + 1.$$

$$P(x) + D(x) = 3x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 3x + 6$$

$$(= (2 + 1)x^5 - 4x^4 + 4x^3 + (-3 - 4)x^2 + (5 + 1))$$

Produit d'un polynôme par un nombre

Pour multiplier un polynôme par un nombre, on multiplie chaque terme du polynôme par ce nombre.

Produit de deux polynômes

Le produit de deux polynômes s'obtient en multipliant chaque terme de l'un par chaque terme de l'autre.

Disposition pratique

Soit, par exemple, à calculer $(x^6 + 8x - 3x^3 + 1) \cdot (x^2 - x + 2)$

$$\begin{array}{r} x^5 - 3x^3 - 8x + 1 \\ \cdot x^2 - x + 2 \\ \hline + 2x^5 - 6x^3 + 16x + 2 \\ - x^8 + 3x^4 - 8x^2 - x \\ + x^7 - 3x^5 + 8x^3 + x^2 \\ \hline x^7 - x^8 - x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 15x + 2 \end{array}$$

Valeur numérique d'un polynôme

La valeur numérique d'un polynôme en un nombre réel est la valeur de ce polynôme obtenue lorsqu'on y remplace x par ce nombre; c'est donc l'image de ce nombre réel par la fonction polynôme considérée.

Examples:

Soit le polynôme $A(x) = 2x^2 - x - 3$.

$$A(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - (-1) - 3 = 2 \cdot 1 + 1 - 3 = 0: \text{valeur du polynôme en } -1.$$

Soit le polynôme $D(t) = 3t^2 - 5t + 1$.

$D(0) = 3 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 1$: valeur numérique du polynôme en 0.

Egalité de deux polynômes

Deux polynômes sont égaux si et seulement si les termes correspondants (c'est-à-dire de même puissance de la variable) ont mêmes coefficients.

Soit $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

et $B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow (a_0 = b_0) \text{ et } (a_1 = b_1) \text{ et } \dots \text{ et } (a_n = b_n)$$

Division de deux polynômes

La méthode est basée sur la définition de la division, à savoir, si $P(x)$ est le dividende (polynôme à diviser), $d(x)$ le diviseur, $Q(x)$ le quotient et $R(x)$ le reste,

$$P(x) = d(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Disposition pratique, exemple

Soit $P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x^3 - 1 - x$ et $d(x) = x^2 - 2x$.

Soit à déterminer le quotient et le reste de la division de $P(x)$ par $d(x)$.

Il faut, tout d'abord, ordonner $P(x)$ et $d(x)$ suivant l'ordre décroissant des puissances de x .

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrrrr}
 x^4 & +3x^3 & -2x^2 & -x & -1 & \\
 -x^4 & +2x^3 & & & & \\
 \hline
 / & +5x^3 & -2x^2 & -x & -1 & \\
 & -5x^3 & +10x^2 & & & \\
 \hline
 & / & +8x^2 & -x & -1 & \\
 & & -8x^2 & +16x & & \\
 & & \hline
 & & & +15x & -1 &
 \end{array}
 & \begin{array}{r}
 x^2 - 2x \\
 \hline
 x^2 + 5x + 8
 \end{array}
 \end{array}$$

1 - On cherche ce qui, multiplié par x^2 , «donne» x^4 , le premier terme du polynôme dividende. On retranche alors ce produit du polynôme dividende, ainsi que le produit de x^2 par les autres termes du diviseur.

2 - Le deuxième terme est $5x$ parce que $5x \cdot x^2 = 5x^3$

Le quotient est $x^2 + 5x + 8$ et le reste est $15x - 1$.

Cas particulier: division d'un polynôme en x par $x - a$

a étant un nombre entier positif ou négatif (c'est-à-dire appartenant à $\mathbb{Z}$)*.

* La variable pourrait, bien évidemment, être désignée par une autre lettre que x . Le polynôme pourrait être un polynôme en t et il s'agirait alors de la division par $t - a$.

Loi du reste

On sait que $P(x) = d(x) \cdot Q(x) + R$, c'est-à-dire, dans ce cas-ci que $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$.

On constate que si on remplace, dans les polynômes, x par a , on obtient :

$$P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R$$

- Valeur numérique du polynôme en a : $P(a) = 0 \cdot Q(a) + R$

$$P(a) = R$$

Ainsi, le reste de la division d'un polynôme par $x - a$ est égal à la valeur numérique de ce polynôme en $x = a$.

On peut donc déterminer le reste d'une division par $x - a$ sans déterminer le quotient. On peut donc aussi en déduire si la division est exacte (cas où $R = 0$)

Il est possible également, grâce à cette loi, de trouver rapidement un polynôme de la forme $x - a$ qui soit un diviseur « exact » d'un polynôme $P(x)$.

Méthode de calcul du quotient; méthode de Horner

Soit, par exemple, à déterminer le quotient de la division de $x^5 + 3x^2 - x - 1$ par $x + 2$.

coefficients du polynôme dividende									
1	0	0	3	-1	-1 → terme indépendant				
					-18 (= -2 · 9)				
-2	-2	+4	-8	+10					
					-19				
					reste				
coefficients du quotient									
1	-2	+4	-5	+9					

« a » → -2
 (= -2 · 1) (-2 · (-2))
 (= 0 · 2) (= 0 · 4) (= -3 · 8)

Comme on a divisé par un polynôme du premier degré en x , $(x - a)$, le degré du quotient sera égal au degré du polynôme dividende moins 1.

$Q(x) = 1 \cdot x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x + 9$ et $R = -19$.

Des identités (produits) remarquables

Des calculs peuvent être évités si l'on se trouve en présence de certaines expressions, telles que le carré d'une somme ou d'une différence de deux nombres, le produit d'une somme de deux nombres par leur différence, le cube d'une somme ou d'une différence de deux nombres.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Pour démontrer ces égalités, il suffit de développer les membres de gauche en effectuant des produits de sommes ou de différences.

Par exemple, $(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot a + b \cdot (-b)$
 $= a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Ainsi, le produit d'une somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence des carrés des deux nombres.

Exemples

$$\left(3x - \frac{ab}{c}\right)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot \frac{ab}{c} + \left(\frac{ab}{c}\right)^2 = 9x^2 - 6 \frac{xab}{c} + \frac{a^2b}{c^2}$$

$$(2 + 5) \cdot (2 - 5) = (2)^2 - 5^2 = 2 - 25 = -23$$

$$(1001)^2 = (1000 + 1)^2$$

$$= 1000^2 + 2 \cdot 1000 + 1^2 = 1000000 + 2000 + 1 = 1002001$$

De la factorisation

Factoriser une expression signifie transformer une somme de termes en un produit de facteurs.

Méthodes de factorisation

1 - Mise en évidence

C'est une conséquence de la propriété suivante: «pour multiplier un nombre par une somme, on multiplie ce nombre par chaque terme de la somme et on ajoute les produits obtenus; $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ».

On peut écrire cette égalité de la façon suivante: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$: formule de mise en évidence de a .

Ainsi, lorsqu'on a une somme de termes, on peut écrire le(s) facteur(s) qui est (sont) commun(s) à tous ces termes devant une parenthèse après laquelle on indique la somme des «facteurs restants».

Exemples:

$$4x + 2x^2 - 6 = 2(2x + x^2 - 3)$$

$$15ab - 3b^2 = 3b(5a - b)$$

$$8(x - 3) + 2y(x - 3) = 2(x - 3) \cdot (4 + y)$$

$$15ac + 5a^2 + 5a = 5a(3c + a + 1)$$

2 - Utilisation des Identités remarquables

Les formules des Identités remarquables permettent de transformer des sommes en des produits. Ainsi, la différence des carrés de deux nombres

peut s'écrire comme produit de la somme de ces nombres par la différence de ces nombres, $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

Exemples :

$$4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$$

$$27a^3 + 8 = (3a)^3 + 2^3 = (3a + 2)(9a^2 - 6a + 4)$$

$$2x^2y + x^4y^2 + 1 = (x^2y + 1)^2$$

$$1 + x^9 + 3x^2 + 3x^4 = (1 + x^3)^3$$

3 - Groupement de termes

De tels groupements ont pour but de pouvoir éventuellement employer une des deux méthodes de factorisation citées précédemment ou les deux.

Exemples :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 1 + 2x^3 &= (x^2 - 1) + (2x^3 - 2x) \\ &= (x + 1)(x - 1) + 2x(x^2 - 1) \\ &= (x + 1)(x - 1) + 2x(x + 1)(x - 1) \\ &= (x + 1)(x - 1) \cdot (1 + 2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x + 1 - y^4 &= (4x^2 + 4x + 1) - y^4 = (2x + 1)^2 - y^4 \\ &= (2x + 1 + y^2) \cdot (2x + 1 - y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8x^3 - 12x^2yz + 6xy^2z^2 - y^3z^3 - 1 \\ &= (8x^3 - 12x^2yz + 6xy^2z^2 - y^3z^3) - 1 \\ &= (2x - yz)^3 - 1 = (2x - yz)^3 - 1^3 \\ &= ((2x - yz) - 1) \cdot ((2x - yz)^2 + (2x - yz) \cdot 1 + 1^2) \\ &= (2x - yz - 1) \cdot (4x^2 - 4xyz + y^2z^2 + 2x - yz + 1) \end{aligned}$$

4 - Artifices de calcul

Ces artifices de calcul consistent en la décomposition d'un terme en une somme ou une différence de deux termes ou en l'addition et la soustraction d'un terme.

On fait de tels artifices dans le but de pouvoir ensuite utiliser une ou plusieurs des méthodes précédentes.

Exemples :

$$\begin{aligned}
 5x^4 + 7x + 2 &= 5x^4 + 5x + 2x + 2 \\
 &= (5x^4 + 5x) + (2x + 2) = 5x(x^3 + 1) + 2(x + 1) \\
 &= 5x(x + 1)(x^2 + x + 1) + 2(x + 1) = (x + 1) \cdot (5x(x^2 + x + 1) + 2) \\
 &= (x + 1)(5x^3 - 5x^2 + 5x + 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^4 + 4 &= x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 \\
 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 \\
 &= ((x^2 + 2) + 2x) \cdot ((x^2 + 2) - 2x) = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^3 - 3a^2 + 7 + 3a &= a^3 - 3a^2 + 8 - 1 + 3a \\
 &= (a^3 - 3a^2 + 3a - 1) + 8 = (a - 1)^3 + 8 \\
 &= ((a - 1) + 2) \cdot ((a - 1)^2 - (a - 1) \cdot 2 + 4) \\
 &= (a - 1 + 2) \cdot (a^2 - 2a + 1 - 2a + 2 + 4) \\
 &= (a + 1)(a^2 - 4a + 7)
 \end{aligned}$$

5 - Division d'un polynôme en x par $x - a$

Pour transformer un polynôme (somme de termes) en un produit de facteurs, il suffit de trouver un diviseur «exact», de la forme $x - a$ (où a est un nombre entier), de ce polynôme.

En effet, si $x - a$ est un diviseur «exact» d'un polynôme $P(x)$, on peut écrire, par définition de la division,

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$$

le reste étant nul.

Pour déterminer si $x - a$ est un polynôme diviseur «exact» de $P(x)$, il suffit de calculer $P(a)$, puisque $P(a)$ est égal au reste de la division.

Lorsque $P(a) = 0$, on est en présence d'un diviseur «exact» et on détermine alors le quotient de la division. Pour que $x - a$ puisse éventuellement être un diviseur «exact» de $P(x)$, il faut que a soit un diviseur du terme indépendant de $P(x)$.

Exemples : soit à factoriser le polynôme $x^3 + x + 2$.

- la division par $x - 1$ est-elle exacte?

$$R = 1^3 + 1 + 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow x - 1 \text{ n'est pas un diviseur «exact»}$$

- la division par $x + 1$ est-elle «exacte»? (c'est-à-dire par $x - (-1)$)

$$R = (-1)^3 + (-1) + 2 = -1 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow x + 1 \text{ est un diviseur «exact»}.$$

On détermine alors le quotient: $x^2 - x + 2$.

$$\text{Et on peut écrire: } x^3 + x + 2 = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 2).$$

6 - Remarque (voir équation du second degré)

Dans le cas d'un polynôme du second degré, $P(x)$, on peut aussi chercher les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

Soit x_1 et x_2 ces solutions, si elles existent.

$$\text{Alors, } P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

En effet, $P(x)$ s'annule bien pour $x = x_1$, parce qu'alors $x - x_1 = 0$; de même

$P(x)$ s'annule pour $x = x_2$, parce qu'alors $x - x_2 = 0$.

Exemples:

Soit à factoriser $x^2 - 2x - 3$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 \text{ (voir équation du second degré)}$$

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2} = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = \frac{2 - 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\text{Ainsi, } x^2 - 2x - 3 = (x - 3) \cdot (x + 1).$$

Soit à factoriser $-x^2 - x + 3$.

$$-x^2 - x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 1 + 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{-2} = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{-2} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

Dès lors, $-x^2 - x + 3$ ne peut pas être décomposé en un produit de facteurs «formés» de nombres entiers, mais on pourrait seulement écrire:

$$-x^2 - x + 3 = \left(x + \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right)$$

Synthèse des méthodes de factorisation

1 - Mise en évidence

2 - Identités remarquables

L'expression est un binôme:

- une différence de deux carrés;
- une différence de deux cubes;
- une somme de deux cubes.

L'expression est un trinôme:

- une somme de deux carrés de deux nombres et du double produit de ces nombres;
- une somme de deux carrés de deux nombres et de l'opposé du double produit de ces nombres.

L'expression est un quadrinôme:

- il se présente sous la forme $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- il se présente sous la forme $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

3 - Groupements

Il y a un nombre pair de termes:

- on groupe les termes par même nombre et, dans chaque parenthèse, on met en évidence ou on remplace l'expression par un produit remarquable. Ensuite, on met en évidence pour toute l'expression;
- on se ramène, après un groupement de trois termes si l'expression en comporte quatre, ou après deux groupements de trois termes chacun si l'expression en comporte six, à une différence de deux carrés; le ou les groupements représentant des produits remarquables, à savoir des carrés d'une somme ou d'une différence de deux nombres;
- si l'expression comporte huit termes, on se ramène, après deux groupements de quatre termes chacun, à une différence ou à une somme de deux cubes; les groupements représentant des produits remarquables, à savoir des cubes d'une somme ou d'une différence de deux nombres.

Il y a un nombre impair de termes, soit cinq : on se ramène, après un groupement de quatre termes, à une somme ou une différence de deux cubes ; le groupement représentant un produit remarquable, à savoir le cube d'une somme ou d'une différence de deux nombres.

4 - Artifices de calcul

L'expression est une somme d'un nombre impair de termes :

- on décompose un des termes en une somme ou une différence de deux termes et ensuite on applique la méthode des groupements (3).

- L'expression est une somme de trois termes telle qu'il « manque » le cube d'un nombre pour avoir un produit remarquable (cube d'une somme de deux nombres ou d'une différence de deux nombres).

On ajoute et on retranche ce cube et on applique la méthode des groupements (3), (on se ramène ainsi à une différence ou une somme de deux cubes).

L'expression est une somme d'un nombre pair de termes :

- c'est une somme de deux termes. Ces termes sont les carrés de deux nombres. On ajoute et on retranche le double de deux nombres. On ajoute et on retranche le double produit de ces nombres et on utilise alors la méthode des groupements (3), (on se ramène ainsi à une différence de deux carrés) ;

- c'est une somme de quatre termes. On décompose un des termes en une somme ou une différence de deux nombres, afin de faire apparaître un produit remarquable, et on se ramène ainsi, après groupement, à une somme ou une différence de deux cubes.

5 - Division d'un polynôme en x par le binôme $x - a$

Si l'expression est un polynôme en une variable, soit x , on cherche un diviseur $x - a$ ($a \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire un entier positif ou négatif) de ce polynôme $P(x)$, ce qui permettra d'écrire $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$.

- On sait que a sera un diviseur du terme indépendant du polynôme.

- Comme le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par $x - a$ vaut $P(a)$ pour les différentes valeurs possibles de a et si on obtient $P(a) = 0$, cela signifie que $x - a$ divise $P(x)$.

Des fractions rationnelles

Définition

On appelle fraction rationnelle une fraction dont les termes sont des polynômes.

Simplification des fractions rationnelles

Pour pouvoir diviser les deux termes de la fraction par un même nombre, il faudra tout d'abord factoriser ces termes (c'est-à-dire les transformer en produits). La simplification consiste en la suppression des facteurs communs aux deux termes de la fraction.

Exemple: soit à simplifier la fraction rationnelle $\frac{x^2 - 16}{2x + 8}$.

$$\frac{x^2 - 16}{2x + 8} = \frac{\overset{1}{(x+4)} \cdot (x-4)}{2\underset{1}{(x+4)}} = \frac{x-4}{2}$$

Opérations sur les fractions rationnelles

Ce sont les mêmes que celles sur les fractions «arithmétiques».

Remarque: il faut toujours essayer de simplifier les fractions.

Exemples:

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{x^2-16} + \frac{1-x}{x^2+x-12} &= \frac{2x}{(x+4)(x-4)} + \frac{1-x}{x^2+4x-3x-12} \\
&= \frac{2x}{(x+4)(x-4)} + \frac{1-x}{(x^2+4x)-(3x+12)} \\
&= \frac{2x}{(x+4)(x-4)} + \frac{1-x}{x(x+4)-3(x+4)} \\
&= \frac{2x}{(x+4)(x-4)} + \frac{1-x}{(x+4)(x-3)} \\
&= \frac{2x(x-3)}{(x+4)(x-4)(x-3)} + \frac{(1-x)(x-4)}{(x+4)(x-3)(x-4)} \\
&= \frac{2x(x-3) + (1-x)(x-4)}{(x+4)(x-4)(x-3)} = \frac{2x^2 - 6x + x - 4 - x^2 + 4x}{(x+4)(x-4)(x-3)} \\
&= \frac{x^2 - x - 4}{(x+4)(x-4)(x-3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{3x+6} \cdot \frac{4x+1}{6x^2+12x} &= \frac{x^2}{3(x+2)} \cdot \frac{4x+1}{6x(x+2)} \\
&= \frac{x^2}{3(x+2)} \cdot \frac{6x(x+2)}{4x+1} = \frac{x^2 \cdot \cancel{6x} \cdot \cancel{(x+2)}}{3 \cdot \cancel{(x+2)} \cdot (4x+1)} = \frac{2x^3}{4x+1}
\end{aligned}$$

Des équations à une inconnue de degré supérieur à 1

Equations du second degré

Définition: c'est une équation dont un des termes contient l'inconnue élevée à la deuxième puissance et dont le degré des autres termes en l'inconnue n'est jamais plus grand que deux.

Exemples: $x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x^2 = x - 5$, $3x \cdot (2 - x) + x = 3$ sont des équations du second degré en x .

Forme générale: $ax^2 + bx + c = 0$, où a est un nombre réel non nul et où b et c sont des nombres réels. Toute équation du second degré peut se mettre sous cette forme.

Résolution d'une équation du second degré en x .

Cas général: (et donc, toujours applicable):

soit $ax^2 + bx + c = 0$. On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

Selon la signe de Δ , il y a trois possibilités:

$$\Delta > 0$$

l'équation admet alors deux solutions (ou racines) réelles distinctes, données par les formules suivantes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0$$

L'équation admet alors une seule solution réelle (ou deux solutions confondues):

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$\Delta < 0$$

L'équation n'admet aucune solution réelle.

Remarque: lorsque le coefficient de x , à savoir b , est divisible par 2, on peut employer la formule $\Delta = b'^2 - 4ac$, où $b' = \frac{b}{2}$. Les autres formules s'écrivent avec Δ' à la place de Δ , b' à la place de b et a à la place de $2a$.

Cas particuliers

L'équation n'a pas de terme en x .

Elle est donc de la forme $ax^2 + c = 0$.

Il suffit alors d'isoler x^2 dans un membre et de calculer $x = \pm \sqrt{x^2}$, si c'est possible.

Rappelons que la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

L'équation n'a pas de terme indépendant.

Elle est donc de la forme $ax^2 + bx = 0$. Il suffit alors de factoriser le premier membre en mettant x , au moins, en évidence, ce qui permet de se ramener à un produit de deux polynômes du premier degré en x , produit égal à 0. Or, un produit de deux facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul :

$$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Ainsi, on obtient les solutions en annulant chacun des facteurs.

Exemples de résolutions d'équations

Résoudre $3x^2 - x + 1 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 1 - 12 = -11$$

$\Delta < 0$ l'équation est impossible dans $\mathbb{R}$.

Résoudre $-x^2 - x + 4 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 1 + 16 = 17$$

L'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{-2} = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{-2} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

Résoudre $-4x^2 + 1 = 0$

$$-4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow -4x^2 = -1 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

Résoudre $3x^2 + 2x = 0$

$$3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 2) = 0 \Leftrightarrow 1^\circ: x = 0 \text{ et } 2^\circ: 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

Il y a donc deux solutions réelles: 0 et $-\frac{2}{3}$.Autrement dit, l'ensemble solution $\text{Sol} = \left\{ -\frac{2}{3}, 0 \right\}$

Equations de degré supérieur à 2

Méthode générale de résolution

On groupe tous les termes dans un membre.

On factorise ce membre, si c'est possible, afin d'obtenir un produit de facteurs égal à zéro.

Il suffit alors d'annuler chacun de ces facteurs pour trouver les solutions.

Exemples:

$$\text{Soit à résoudre } x^6 - x^4 = 0 \Leftrightarrow x^4(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^4(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1^\circ: x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0; 2^\circ: x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ et } 3^\circ: x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Soit à résoudre } 2x^3 + x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + x - 1) = 0$$

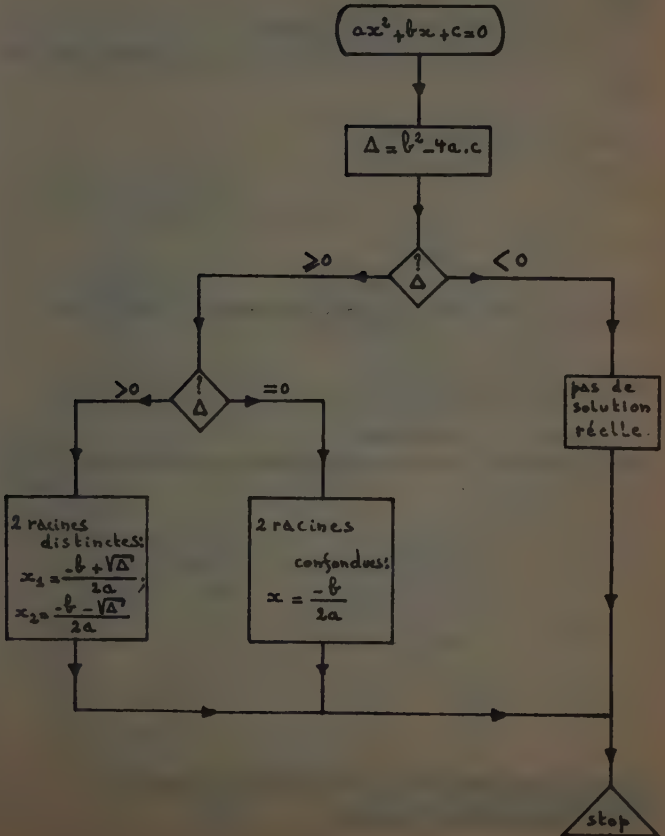
$$\Leftrightarrow 1^\circ: x = 0 \text{ et } 2^\circ: 2x^2 + x - 1 = 0.$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2(-1) = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{-1 - 3}{4} = -1$$

Il y a donc 3 solutions: 0, $\frac{1}{2}$ et -1 .

Organigramme de la résolution (méthode générale) d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$



Equations bicarrées

Définition: on appelle équation bicarrée une équation de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$, c'est-à-dire une équation ayant uniquement un terme du quatrième degré en l'inconnue, un terme du deuxième degré en l'inconnue et un terme indépendant.

Méthode de résolution

On pose $x^2 = y$. Et l'équation devient: $ay^2 + by + c = 0$.

On résout cette équation du second degré en y .

On revient ensuite à x , $x = \pm\sqrt{y}$, lorsqu'on a trouvé les valeurs de y vérifiant $ay^2 + by + c = 0$.

Exemple: soit à résoudre $2x^4 + x^2 - 1 = 0$.

On pose $y = x^2 \Rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$y_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}; y_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$$

$$y = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = +\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ et}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$y = -1 \Rightarrow x^2 = -1$: impossible..

Donc, l'équation $2x^4 + x^2 - 1 = 0$ admet deux solutions réelles:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Organigramme de la résolution, dans $\mathbb{R}$,
d'une équation bicarrée**



$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

on pose $x^2 = t$.
L'équation devient
 $at^2 + bt + c = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

≥ 0

< 0

Δ

$= 0$

> 0

$$t = -\frac{b}{2a}$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

≥ 0

< 0

t

2 solutions:
 $x_1 = \sqrt{t}$
 $x_2 = -\sqrt{t}$

≥ 0

< 0

t_1

≥ 0

< 0

t_2

4 solutions:
 $x_1 = \sqrt{t_1}$,
 $x_2 = \sqrt{t_2}$,
 $x_3 = \sqrt{t_2}$,
 $x_4 = -\sqrt{t_2}$

2 solutions:
 $x_1 = \sqrt{t_1}$,
 $x_2 = -\sqrt{t_1}$

2 solutions:
 $x_1 = \sqrt{t_2}$,
 $x_2 = -\sqrt{t_2}$

stop

Abs de solution
réelle.

Des équations irrationnelles

Définition

Dans des équations irrationnelles simples, l'inconnue apparaît sous un ou plusieurs radicaux d'indice 2.

Technique de résolution

On se «**débarrasse**» des racines carrées en élevant les deux membres au carré (parfois, il faut le faire à deux reprises), mais on perd ainsi des informations que l'on doit donc retrouver sous forme de conditions.

Ces conditions traduisent le fait que :

Toute expression dans une racine carrée doit toujours être positive ou nulle (sinon la racine n'est pas définie dans $\mathbb{R}$).

La racine carrée d'un nombre est, par convention, positive ou nulle (lorsque l'on veut considérer le nombre négatif égal, par exemple, à $\sqrt{16}$, on doit écrire $-\sqrt{16}$. Il a été convenu que $\sqrt{16} = +4$).

On se ramène ainsi à une équation de degré n .

Exemple : soit à résoudre $\sqrt{x+1} = 2x-3$.

$$\sqrt{x+1} = 2x-3 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^2 = (2x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 13x + 8 = 0$$

$$\Delta = 169 - 128 = 41$$

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{41}}{8}$$

$$x_2 = \frac{13 - \sqrt{41}}{8} < \frac{3}{2} \Rightarrow \text{à rejeter.}$$

conditions :

$$2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

$$x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

$$\text{condition : } x \geq \frac{3}{2}$$

Des inéquations du premier degré

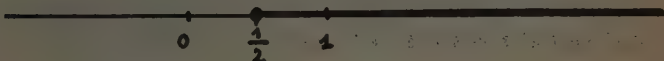
Définition

Une inéquation est une inégalité dans laquelle il y a une (ou plusieurs) inconnue(s) notée(s) par une (ou plusieurs) lettre(s) et qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs de cette (ces) inconnue(s).

Exemples

$4x - 2 \geq 0$, $x - 3 < 2x + 5$, $-3x - 2 < 0$ sont des inéquations du premier degré à une inconnue (x).

L'ensemble solution $4x - 2 \geq 0$ est l'ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à $1/2$.



Propriétés des inégalités

Lorsqu'on ajoute un même nombre aux deux membres d'une inégalité ou que l'on retranche un même nombre des deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité équivalente à la précédente.



$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

Exemple: $3 < 17 \Leftrightarrow 3 + 2 < 17 + 2 \Leftrightarrow 5 < 19$

Lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif, on obtient une inégalité de même sens équivalente à la précédente.

$$a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c, \text{ où } a, b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}_+^*$$

Exemples: $4,1 < 32 \Leftrightarrow 4,1 \cdot 2 < 32 \cdot 2$

Lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif, on obtient une inégalité équivalente à la précédente mais de sens contraire.

$$a < b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c, \text{ où } a, b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}_-^*$$

Exemple: $5 < 7 \Leftrightarrow 5 \cdot (-3) > 7 \cdot (-3) \Leftrightarrow -15 > -21$

Remarque: changer un nombre de signe revient à le multiplier par -1 .
De là,

$$a < b \Leftrightarrow -a > -b$$

Exemple: $7 > 4 \Leftrightarrow -7 < -4$

Résolution d'une inéquation du premier degré à une inconnue

Méthode

- 1 - On supprime toutes les parenthèses.
- 2 - On «groupe» les termes en inconnue dans un membre et les termes indépendants dans l'autre.
- 3 - On effectue les additions et les soustractions dans les deux membres.
- 4 - On calcule la valeur de l'inconnue (en multipliant ou en divisant les deux membres par un même nombre), si c'est possible.

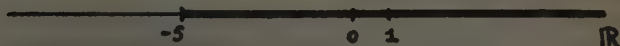
Exemples:

Solt à résoudre $2(-x-5) < x+5$

$$\Leftrightarrow -2x-10 < x+5 \Leftrightarrow -10-5 < x+2x \Leftrightarrow 3x > -15$$

$$\Leftrightarrow x > -15 \Leftrightarrow x > -5$$

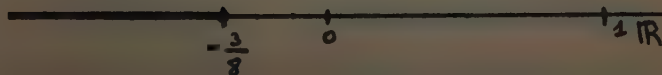
$$\text{Sol} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$$



Solt à résoudre $-5x+1 \geq 4+3x$

$$\Leftrightarrow -5x-3x \geq 4-1 \Leftrightarrow -8x \geq 3 \Leftrightarrow +8x \leq -3 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{8}$$

$$\text{Sol} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{3}{8} \right\}$$



Des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues

Définition

On forme un système de deux équations lorsqu'on doit tenir compte de deux relations entre les variables (deux conditions sur les variables).

Forme générale

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Solution d'un système

Une solution d'un système de deux équations à deux inconnues est une solution commune aux deux équations, c'est-à-dire un couple de valeurs vérifiant à la fois les deux équations.

En général, un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admet une solution.

Ainsi, par exemple, la solution de $\begin{cases} y + x = 2 \\ 2y - 24 - 3x = 0 \end{cases}$... est $(-4, 6)$.

Résolution algébrique

Méthode de substitution

Énoncé : on tire une des inconnues de l'une des équations et on la rem-

place par sa valeur (en fonction de l'autre inconnue) dans l'autre équation; celle-ci est alors une équation du premier degré à une inconnue, que l'on peut résoudre.

Exemple: soit à résoudre $\begin{cases} 4x - 2y + 1 = 0 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 4x - 2y + 1 = 0 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 3y \\ 4(5 + 3y) - 2y + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 20 + 12y - 2y + 1 = 0 \\ x = 5 + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y = -21 \\ x = 5 + 3y \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = -\frac{21}{10} = -2,1 \\ x = 5 + 3 \cdot (-2,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2,1 \\ x = 5 - 6,3 = -1,3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Sol} = \{(-1,3; -2,1)\}$$

Méthode de comparaison

Enoncé: on tire la même inconnue de chacune des équations et on égale les quantités obtenues.

On obtient ainsi une équation du premier degré à une inconnue.

Exemple: soit à résoudre $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3y + x = 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3y + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4 = 2y \\ 3y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3x - 4}{2} \\ y = \frac{2 - x}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = \frac{2 - x}{3} \\ \frac{3x - 4}{2} = \frac{2 - x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2 - x}{3} \\ 3(3x - 4) = 2(2 - x) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 12 = 4 - 2x \\ y = \frac{2-x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 16 \\ y = \frac{2-x}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{11} \\ y = \frac{2 - 16/11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{11} \\ y = \frac{22 - 16}{11 \cdot 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{11} \\ y = \frac{6}{11 \cdot 3} = \frac{2}{11} \end{cases}$$

$$\text{Sol} = \left\{ \left(\frac{16}{11}, \frac{2}{11} \right) \right\}$$

Méthode d'addition (aussi appelée méthode de Gauss)

Enoncé: elle permet d'éliminer une des inconnues en additionnant les deux équations membre à membre. On peut avoir d'abord multiplié les deux membres d'une des équations ou des deux équations par un nombre.

Exemple: soit à résoudre le système
$$\begin{cases} 2x - 5y = 1 & (\cdot 3) \\ y - 3x = 2 & (\cdot 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 15y = 3 \\ -6x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 6x - 15y + 2y = 3 + 4 \\ -6x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -13y = 7 \\ 2y - 4 = 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{7}{13} \\ 2\left(-\frac{7}{13}\right) - 4 = 6x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{7}{13} \\ 6x = -\frac{14}{13} - \frac{52}{13} = -\frac{66}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{7}{13} \\ x = -\frac{66:6}{13} = -\frac{11}{13} \end{cases}$$

$$\text{Sol} = \left\{ \left(-\frac{11}{13}, -\frac{7}{13} \right) \right\}$$

Méthode de Cramer

Cette méthode utilise des déterminants, dont le déterminant des coefficients des inconnues.

Un déterminant d'ordre 2 est une fonction de 4 variables (2^2) et se représente par un tableau des 4 variables.

Le déterminant ci-dessous représente le nombre $ad-bc$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Un déterminant d'ordre 3 est une fonction de 9 variables (3^2).

On représente comme suit un tel déterminant:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Il se calcule suivant une ligne ou une colonne quelconque, chaque élément de cette ligne ou de cette colonne étant multiplié par son mineur. *Le mineur d'un élément* est le déterminant obtenu en supprimant la ligne et la colonne contenant l'élément. Un mineur comporte un signe, qui dépend de la place de l'élément dont il est le mineur dans le tableau des nombres: le mineur du premier élément en haut à gauche a le signe +, ensuite, on alterne les signes, les «déplacements» dans le déterminant de départ se faisant horizontalement ou verticalement.

Si on calcule le déterminant ci-dessus suivant la première ligne, on obtient:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a \cdot (ei - hf) - b \cdot (di - gf) + c \cdot (dh - ge).$$

On aurait pu calculer ce déterminant suivant la deuxième colonne par exemple:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

Énoncé de la méthode de Cramer

- On écrit le système sous la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$
- On calcule le déterminant D des coefficients des inconnues:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

- Si $D \neq 0$, alors le système admet une solution:

$$x = \frac{D_1}{D}, y = \frac{D_2}{D}, \text{ où } D_1 = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$$

(c'est-à-dire le déterminant D où l'on a remplacé les coefficients de x par les termes indépendants)

$$\text{et } D_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

(c'est-à-dire le déterminant D où l'on a remplacé les coefficients de y par les termes indépendants).

- Si $D = 0$, le système est soit impossible, soit indéterminé. Il est impossible si D_1 ou D_2 est non nul; il est indéterminé si D_1 et D_2 sont nuls.

Exemples: soit à résoudre le système

$$\begin{cases} 3x - 5y + 1 = 0 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-5) = 3 - 5 = -2$$

$$D \neq 0 \Rightarrow 1 \text{ solution } (x,y), x = \frac{D_1}{D}, y = \frac{D_2}{D}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-5) = -1 + 10 = 9$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 6 - 1 = 5$$

$$x = \frac{9}{-2} = -\frac{9}{2} \text{ et } y = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$$

$$\text{L'ensemble solution est donc: Sol} = \left\{ \left(-\frac{9}{2}, -\frac{5}{2} \right) \right\}$$

Représentation graphique d'une solution d'un système

Chaque équation du premier degré à deux inconnues (forme générale: $ax + by + c = 0$) étant l'équation d'une droite, une solution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues est représentée graphiquement par un point appartenant à la fois aux deux droites, c'est-à-dire un point d'intersection des deux droites. L'ensemble solution du système est donc représenté graphiquement par l'ensemble des points communs aux deux droites (0,1 ou une infinité!).

Exemples: soit à résoudre graphiquement le système suivant:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

- Dessinons la droite A d'équation $x - 2y = 3$, ou encore, d'équation $x - 2y - 3 = 0$.

Déterminons deux points de cette droite:

$$x = 0 \Rightarrow 0 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow 2y = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \Rightarrow (0, -\frac{3}{2})$$

$$y = 0 \Rightarrow x - 0 - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3, 0).$$

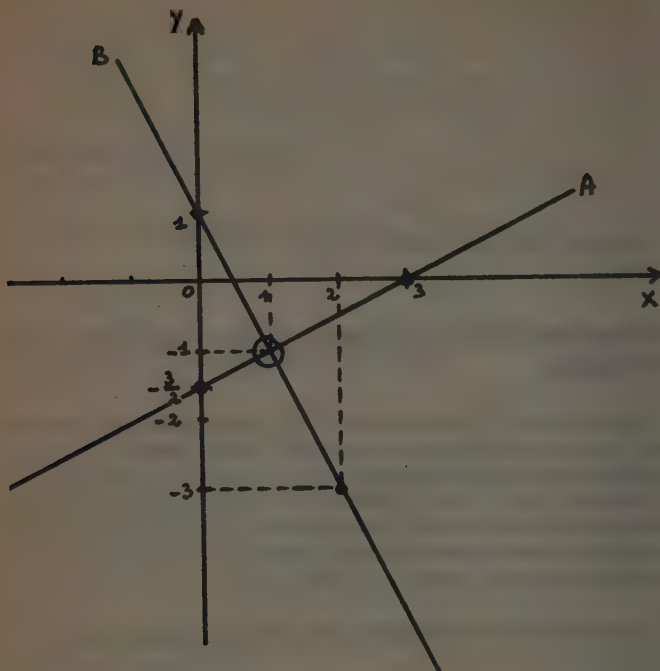
- Dessinons la droite B d'équation $2x + y - 1 = 0$.

Déterminons deux points de cette droite:

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1)$$

$$x = 2 \Rightarrow 2 \cdot 2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow (2, -3)$$

(autre point: $y=0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{1}{2}, 0)$).



- Les coordonnées du point d'intersection des droites A et B sont la solution du système.

Solution; $x = 1, y = -1 \Rightarrow (1, -1)$.

Généralisation: système de n équations à n Inconnues

On applique la méthode d'addition, de substitution, ou de comparaison, afin d'obtenir une équation à une seule inconnue. On résout alors cette équation et on obtient ainsi la valeur d'une des inconnues.

On travaille de la même façon pour une autre équation. Et ainsi de suite jusqu'à l'obtention des valeurs de toutes les inconnues.

On peut aussi utiliser la méthode des déterminants.

Exemples:

Soit à résoudre
$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x + w + z = 0 \\ x - z = 2w \\ w - 2x = 1 + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2w + z & \text{(on isole } x \text{ dans la troisième équation)} \\ 3(2w + z) + w + z = 0 & \text{(on remplace } x \text{ par sa valeur dans la deuxième et la première équation)} \\ 2(2w + z) - y + z = 1 \\ w - 2(2w + z) = 1 + y & \text{(on remplace } x \text{ par sa valeur dans la quatrième équation)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2w + z \\ z = -\frac{7w}{4} \\ 4w + 3 \cdot \frac{-7w}{4} - y = 1 \\ -3w - 2 \cdot \frac{-7w}{4} = 1 + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2w + z \\ z = -\frac{7w}{4} \\ y = -3w + \frac{7w}{2} - 1 \\ 4w + 3 \cdot \frac{-7w}{4} - (-3w + \frac{7w}{2} - 1) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2w + z \\ z = -\frac{7w}{4} \\ y = \frac{w}{2} - 1 \\ \frac{16w}{4} - \frac{21w}{4} + \frac{12w}{4} - \frac{14w}{4} + 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2w + z \\ z = -\frac{7w}{4} \\ y = \frac{w}{2} - 1 \\ -\frac{7w}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \\ y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Sol} = \{ (0, -1, 0, 0) \}$$

Vérification: remplaçons, dans le système d'équations de départ, x par 0, y par -1 , z par 0 et w par 0, et voyons si on obtient bien des égalités.

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 - (-1) + 0 = 1 ? \\ 3 \cdot 0 + 0 + 0 = 0 ? \\ 0 - 0 = 2 \cdot 0 ? \\ 0 - 2 \cdot 0 = 1 + (-1) ? \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Soit à résoudre, par la méthode de Cramer, le système suivant:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x - 3y = 2z + 1 \\ y + 3z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x - 3y - 2z = 1 \\ 0x + y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

(calcul suivant la première colonne)

$$D = 2 \cdot (-9 + 2) - 1 \cdot (-3 - 1) + 0 = 2 \cdot (-7) - (-4) = -14 + 4 = -10$$

$$D \neq 0 \Rightarrow \text{une solution: } x = \frac{D_1}{D}, y = \frac{D_2}{D}, z = \frac{D_3}{D}.$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot ((-3) \cdot 3 - 1 \cdot (-2)) + 1 \cdot (1 \cdot 3 - 4 \cdot (-2)) + 1 \cdot (1 \cdot 1 - 4 \cdot (-3)) \\ &= 5 \cdot (-9 + 2) + (3 + 8) + (1 + 12) = 5 \cdot (-7) + 11 + 13 \\ &= -35 + 11 + 13 = -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 0 \\ &= 2 \cdot (3 + 8) - (15 - 4) = 22 - 11 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \\ &= 2 \cdot (-12 - 1) - (-4 - 5) = -26 + 9 = -17 \end{aligned}$$

$$\text{Solution: } x = -\frac{11}{10}; y = \frac{11}{10}; z = \frac{-17}{10} = -1,7$$

Problème

Deux bergers, Hans et Johann, promenant leurs moutons en montagne se rencontrent. Hans dit à Johann: «si tu me donnais un de tes moutons, j'aurais autant de moutons que toi». Johann lui répond: «si toi tu me donnais un de tes moutons, alors j'aurais deux fois plus de moutons que toi». Combien chacun d'eux a-t-il de moutons?

- Soit x le nombre de moutons de Hans et y le nombre de moutons de Johann.

- Si Johann donnait un de ses moutons à Hans, il en aurait alors $y-1$ et Hans en aurait $x+1$.

Dans ce cas, on aurait $x+1 = y-1$.

- Si Hans donnait un mouton à Johann, il en aurait $y + 1$ et Johann en aurait $x - 1$.

Dans ce cas, on aurait : $y + 1 = 2 \cdot (x - 1)$.

- Il faut donc tenir compte de ces deux relations entre x et y résoudre le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 1 = y - 1 \\ y + 1 = 2(x - 1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 + 1 = y \\ y + 1 = 2x - 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2 + 1 = 2x - 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ 3 + 2 = 2x - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

- Ainsi, lors de la rencontre des deux bergers, Hans à 5 moutons et Johann en a 7.

Des systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues

Forme générale

$$\begin{cases} ax + by + c > 0^* \\ a'x + b'y + c' > 0^* \end{cases}$$

Signification graphique d'une inéquation du premier degré à deux inconnues

Une solution d'une telle inéquation est un couple de valeurs vérifiant cette inéquation.

C'est donc un point du plan coordonné.

L'inéquation $ax + by + c > 0^*$ est représentée par un **demi-plan** (ensemble de points), délimité par la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Méthode de résolution graphique

On écrit les inéquations en isolant y dans un membre.

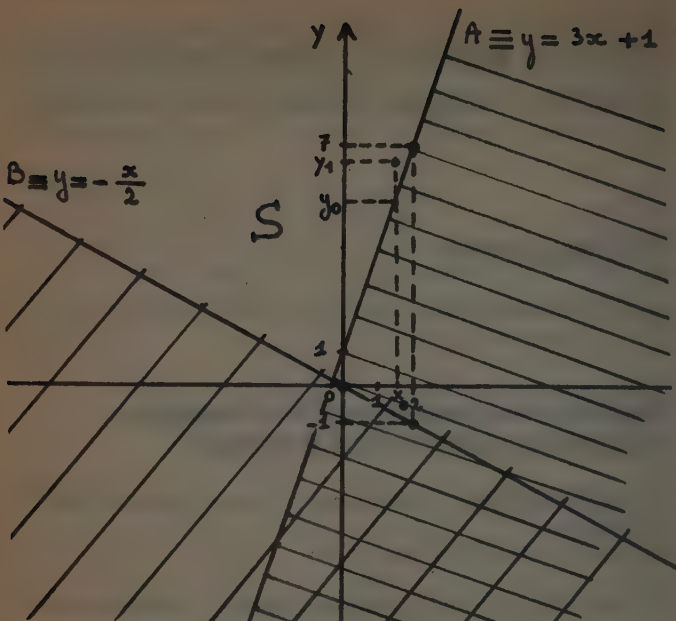
On trace les droites délimitant les deux demi-plans, et on hachure les parties qui ne conviennent pas.

Exemple; soit à résoudre

$$\begin{cases} 3x - y + 1 \leq y \\ x + 2y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \leq y \\ y > -\frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 3x + 1 \\ y > -\frac{x}{2} \end{cases}$$

- Le demi-plan d'inéquation $y \geq 3x + 1$ est délimité par la droite A, d'équation $y = 3x + 1$.

* Ou ≥ 0 , ou < 0 , ou ≤ 0 .



Le demi-plan d'inéquation $y > -x/2$ est délimité par la droite B, d'équation $y = -x/2$

- Droite A: $x=0 \Rightarrow y=3 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ point $(0,1)$; $x=2 \Rightarrow y=7 \Rightarrow$ point $(2,7)$

Le demi plan d'inéquation $y \geq 3x + 1$ est l'ensemble des points au-dessus de la droite A et sur la droite A, (en effet, pour un x choisi, soit x_0 , le point sur la droite A est tel que son ordonnée $y_0 = 3 \cdot x_0 + 1$. Si, pour ce même x_0 , on prend un point au-dessus de la droite A, son ordonnée y , sera plus grande que y_0 , donc plus grande que $3x_0 + 1$, étant donné l'orientation de l'axe Y (voir dessin).

- Droite B: $x=2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (2, -1)$; $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0,0)$

Le demi-plan d'inéquation $y > -x/2$ est l'ensemble des points au-dessus de la droite B, puisque sur B, $y = -x/2$.

$$S = \left\{ (x,y) \text{ du plan} \mid y \geq 3x + 1 \text{ et } y > -\frac{x}{2} \right\}$$

De la mise en équation d'un problème

Méthode

1 - Analyser l'énoncé du problème, afin de bien mettre en évidence ce qui est connu et ce qui est à découvrir.

Eventuellement, réexprimer ce problème en d'autres phrases plus explicites.

2 - Choisir la ou les inconnues, c'est-à-dire représenter par une lettre (x , y , z ,...) une ou des inconnues du problème.

Une inconnue suffit dès que toutes les informations du problème peuvent s'exprimer à l'aide de cette inconnue.

3 - Exprimer les différentes grandeurs du problème, connues ou non, à l'aide de cette(ces) inconnue(s). Exprimer certaines données du problème ou conséquences de ces données en faisant apparaître la (ou les) inconnue(s).

4 - Exprimer alors la(les) relation(s) indiquée(s) dans l'énoncé du problème. Mettre ainsi le problème en équation.

5 - Résoudre l'équation, l'inéquation, ou le système d'équations ou d'inéquations.

6 - Revenir au problème posé.

Exemples

Combien a coûté une voiture d'occasion, sachant qu'après y avoir fait pour 2000 FB de frais de réparations, on l'a vendue 23000 FB et qu'ainsi on a gagné deux cinquièmes du prix d'achat?

Soit x le prix d'achat de la voiture.

$x + 2000$ est la somme totale payée, frais de réparations compris.

Le bénéfice est représenté par les deux cinquièmes du prix d'achat,

c'est-à-dire par $\frac{2x}{5}$.

$$\text{On a donc : } (x + 2000) + \frac{2x}{5} = 2300$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\swarrow$
 Prix d'achat bénéfice Prix de vente
 + frais

$$x + 2000 + \frac{2x}{5} = 2300 \Leftrightarrow \frac{7x}{5} = 21000 \Leftrightarrow$$

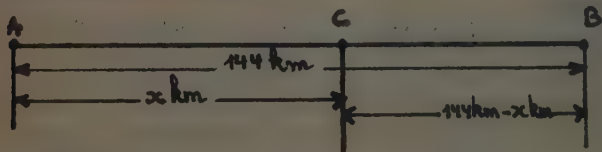
$$x = \frac{21000 \cdot 5}{7} = 15000$$

- Le prix d'achat de la voiture est donc 15000 FB.

Deux trains de marchandises quittent en même temps deux gares, A et B, séparées par 144 km, et vont à la rencontre l'un de l'autre.

Le train partant de A roule à la vitesse constante de 54 km/h et celui partant de B a la vitesse constante de 36 km/h.

A quelle distance des deux gares vont-ils se croiser?



Soit x la distance de A au point de croisement, C, des deux trains.

La distance de B à ce point sera donc $144 \text{ km} - x \text{ km}$.

- Le train partant de A parcourt 54 km en 1h.

Dès lors, il parcourt 1 km en $\frac{1h}{54}$ et donc $x \text{ km}$ en $\frac{1h \cdot x}{54}$

Le train partant de B parcourt 36 km en 1h.

De là, il parcourt 1 km en $\frac{1h}{36}$ et donc $(144 - x)$ km en $\frac{1h(144 - x)}{36}$.

- Il est évident que le temps mis pour arriver au point de croisement est le même pour les deux trains.

On a donc: $\frac{x}{54} = \frac{144 - x}{36} \Leftrightarrow 36x = 54 \cdot (144 - x) \Rightarrow 36x = 54 \cdot 144 - 54x$

$$\Rightarrow 36x + 54x = 54 \cdot 144 \Rightarrow 90x = 54 \cdot 144 \Rightarrow x = \frac{54 \cdot 144}{90} = 86,4$$

- Ainsi, les deux trains se croisent à 86,4 km de la gare A.

Un capital est placé pendant trois ans à intérêts composés au taux annuel de 5,5%. La valeur acquise par ce capital est alors placée pendant deux ans à intérêts simples au taux annuel de 7% et rapporte 1637 F.

Quel est le capital de départ?

Soit x le capital de départ.

- La valeur acquise par ce capital après 3 ans sera $x \cdot (1 + 0,055)^3$ (formule: $A = C \cdot (1 + t)^n$).

L'intérêt simple annuel sur ce nouveau capital sera

$$x \cdot \frac{(1 + 0,055)^3 \cdot 7}{100} \quad (\text{formule: } I = C \cdot t)$$

Et, après deux ans, l'intérêt sera $\frac{x \cdot (1,055)^3 \cdot 7 \cdot 2}{100}$

- On sait que cet intérêt vaut 1637 F.

On a donc l'équation: $\frac{x \cdot (1,055)^3 \cdot 7 \cdot 2}{100} = 1637$

$$x \cdot 1,113025 \cdot 14 = 1637 \cdot 100 \Rightarrow 15,58235 \cdot x = 163700$$

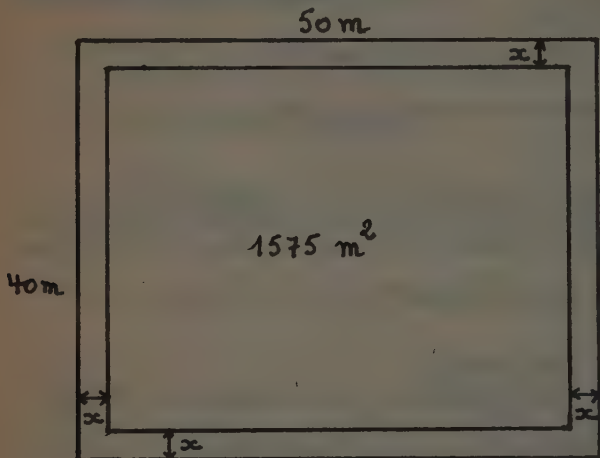
$$x = \frac{163700}{15,58235} \Rightarrow x = 10505$$

- Le capital de départ est donc 10505 F.

Un terrain rectangulaire a pour dimensions 40 m sur 50 m. On désire le border d'un chemin de largeur constante qui en ferait le tour intérieurement. Déterminer la largeur du chemin de telle manière qu'il reste, comme terrain, 1575 m^2 ($= 157,5$ ares).

Soit x la largeur du chemin, en m.

- On doit avoir la situation suivante:



- Exprimons, en formule, que le terrain restant représente 1575 m^2 .

Les «côtés» de ce terrain ont pour mesure: $50\text{m} - 2x\text{m}$ (= longueur du terrain de départ moins deux fois la largeur du chemin) et $40\text{m} - 2x\text{m}$.

Nous savons que l'aire d'un rectangle est donnée par la formule; aire = longueur $\cdot$ largeur, et nous connaissons l'aire du terrain restant, à savoir 1575 m^2 .

On aura donc: $(50 - 2x) \cdot (40 - 2x) = 1575$

- Il faut donc résoudre cette équation, c'est-à-dire trouver la (les) valeur(s) de x vérifiant cette égalité. Il faudra ensuite revenir au problème concret donné.

$$(50 - 2x) \cdot (40 - 2x) = 1575$$

$$\Leftrightarrow 50 \cdot 40 - 50 \cdot 2x - 2x \cdot 40 + 2x \cdot 2x = 1575$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 100x - 80x + 2000 = 1575 \Leftrightarrow 4x^2 - 180x + 2000 - 1575 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 180x + 425 = 0$$

$$\Delta = 180^2 - 4 \cdot 4 \cdot 425 = 32400 - 6800 = 24600 = 160^2$$

$$(\text{ou } \Delta' = b'^2 - ac \Rightarrow \Delta' = 90^2 - 4 \cdot 425 = 8100 - 1700 = 6400 = 80^2)$$

$$x_1 = \frac{180 + \sqrt{160^2}}{8} = \frac{180 + 160}{8} = \frac{340}{8} = 42,5$$

$$x_2 = \frac{180 - 160}{8} = 2,5$$

$$(\text{ou } x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \Rightarrow x_1 = \frac{90 + 80}{4} = 42,5; x_2 = \frac{90 - 80}{4} = 2,5)$$

- La valeur 42,5 m est à rejeter pour la largeur du chemin, cette valeur n'étant pas inférieure à la moitié de la largeur du terrain de départ (voir schéma). La largeur du chemin est donc 2,5 m.

Trouver deux nombres positifs tels que la différence entre le plus grand et le plus petit soit égale à 4 et tels que la somme de leurs carrés soit égale à 106.

Soit x le plus grand des deux nombres et soit y le plus petit.

$$\begin{aligned} \text{- On a: } & \begin{cases} x^2 + y^2 = 106 \\ \text{et } x - y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Les deux nombres doivent vérifier les deux équations (il y a deux conditions sur ces nombres!), ils doivent donc être une solution du système formé par ces deux équations.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = 4 + y \\ (4 + y)^2 + y^2 = 106 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + y \\ (16 + 8y + y^2) + y^2 = 106 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 8y - 90 = 0 \\ x = 4 + y \end{cases} \end{aligned}$$

Résolvons l'équation en y : $2y^2 + 8y - 90 = 0$

$$\Leftrightarrow y^2 + 4y - 45 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-45) = 16 + 180 = 196$$

$$y_1 = \frac{-4 + \sqrt{196}}{2} = \frac{-4 + 14}{2} = \frac{10}{2} = 5; y_2 = \frac{-4 - \sqrt{196}}{2} = \frac{-18}{2} = -9$$

- Le plus petit des deux nombres positifs est donc 5. L'autre est alors égal à $4 + 5 = 9$ ($x = 4 + y$).

La valeur $y_2 = -9$ est à rejeter, puisqu'on demande des nombres positifs.

Des logarithmes décimaux

Définition historique

Tout nombre réel positif (strictement !) peut s'écrire comme puissance de 10, cette puissance représentant exactement le nombre, ou étant une valeur approchée de celui-ci.

L'exposant de cette puissance de 10 s'appelle le **logarithme décimal**, (en base 10), du nombre. Le logarithme décimal d'un nombre N s'écrit $\log N$. Ainsi,

$$\log N = x \Leftrightarrow 10^x = N$$

Exemples :

$\log 100 = 2$. En effet, $100 = 10^2$

$\log 25 = 1,39794\dots$ En effet, $25 \simeq 10^{1,39794}$; $10^{1,39794}$ est une valeur approchée de 25.

Propriétés

Soit A , B , C des nombres réels strictement positifs.

$$\log (A \cdot B \cdot C) = \log A + \log B + \log C$$

Si on multiplie des puissances d'un même nombre, $A \cdot B \cdot C$, le résultat est la puissance de ce nombre dont l'exposant, $\log(A \cdot B \cdot C)$, est égal à la somme des exposants des puissances, $\log A + \log B + \log C$.

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

$$\log A^n = n \cdot \log A$$

$$\log \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \cdot \log A$$

Remarque: définition du logarithme en base a
 ($a \neq 1$, $a > 0$) d'un nombre strictement positif

C'est donc l'exposant de la puissance de a égale à ce nombre.

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$$

Applications des logarithmes

Le passage aux logarithmes permet d'exprimer une inconnue se trouvant en exposant, ou de trouver une inconnue élevée à une puissance supérieure à 2, c'est-à-dire de déterminer une racine $n^{\text{ème}}$.

Les logarithmes apparaissent également en astronomie (magnitude d'une étoile), ainsi qu'en biologie.

D'autre part, on emploie l'échelle logarithmique ou semi-logarithmique pour représenter certaines fonctions. Ainsi, par exemple, si y est fonction de x et que y « augmente ou diminue très vite » quand x varie légèrement, on indiquera le logarithme de y en ordonnée et non y ; on obtiendra alors une droite (à la place d'une exponentielle).

Méthodes

On donne la valeur d'un capital, placé à un taux déterminé à intérêts composés, ainsi que la valeur acquise par ce capital. On peut alors déterminer le nombre d'années de placement.

$$\text{On a : } A = C \cdot (1 + t)^n \Rightarrow \frac{A}{C} = (1 + t)^n \Rightarrow \log \frac{A}{C} = \log (1 + t)^n$$

$$\Rightarrow \log \frac{A}{C} = n \cdot \log(1 + t) \Rightarrow n = \frac{\log \frac{A}{C}}{\log(1 + t)}$$

Les valeurs des logarithmes sont calculées à l'aide d'une machine ou d'une table de logarithmes.

Connaissant le capital après n années de placement, on peut déterminer le taux de placement annuel.

$$\text{On a : } A = C \cdot (1 + t)^n \Rightarrow \frac{A}{C} = (1 + t)^n$$

$$\Rightarrow \log \frac{A}{C} = \log(1 + t)^n \Rightarrow \log \frac{A}{C} = n \cdot \log(1 + t)$$

$$\Rightarrow \log(1 + t) = \frac{\log \frac{A}{C}}{n}$$

Comme le logarithme décimal d'un nombre est l'exposant de la puissance de 10 égale à ce nombre, on peut calculer la valeur de $1 + t$ connaissant le logarithme de $1 + t$ et, dès lors, trouver t .*

* Avec une calculatrice, on utilise si possible la fonction inverse du logarithme. Ainsi, si $\log(1 + t)$ est r , on forme le nombre r , on «pousse» sur la touche INV ou 2nd (ou autre touche indiquant la fonction inverse) et on «pousse» alors sur la touche log; on obtiendra alors le nombre dont r est le logarithme.

Exemples

Pendant combien de temps faut-il placer un capital de 100000 F au taux de 10% l'an pour qu'il double de valeur (intérêts composés)?

$$\text{On a: } 200000 = 100000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^n \Rightarrow \frac{200000}{100000} = (1 + 0,1)^n \Rightarrow 2 = 1,1^n$$

$$\Rightarrow \log 2 = \log 1,1^n \Rightarrow \log 2 = n \cdot \log 1,1 \Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1,1}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log \frac{11}{10}} = \frac{\log 2}{\log 11 - \log 10}$$

$$n = \frac{\log 2}{\log 11 - 1} = \frac{0,30103}{1,04139 - 1} = \frac{0,30103}{0,04139}$$

$$n = 7 \text{ et } \frac{273}{1000} \Rightarrow \text{Le temps de placement est 7 ans et 98 jours.}$$

$$\left(\frac{273}{1000} \text{ d'année} = \frac{360\text{j} \cdot 273}{1000} = 98,28\text{j.} \simeq 98 \text{ j.}\right)$$

A quel taux annuel le capital de 10000 F a-t-il été placé (intérêts composés), sachant que la valeur acquise par ce capital après 5 ans est 13541 F?

$$\text{On a: } 13541 = 10000 \cdot (1 + t)^5$$

$$\Rightarrow \frac{13541}{10000} = (1 + t)^5 \Rightarrow 1,3541 = (1 + t)^5$$

$$\Rightarrow \log 1,3541 = \log (1 + t)^5 \Rightarrow \log 1,3541 = 5 \cdot \log(1 + t)$$

$$\Rightarrow \log(1 + t) = \frac{\log 1,3541}{5} = 0,0263301$$

$$\Rightarrow 1 + t = 1,062503 \Rightarrow t = 1,062503 - 1 = 0,062503 \simeq 0,0625$$

Le taux annuel de placement est donc 6,25%.

Formulaire

Fractions

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a:d}{b:d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{\frac{a}{b} \cdot c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Opérations sur les nombres réels, propriétés

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a+b) \cdot (c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a+b):c = a:c + b:c; \quad \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$a+(b+c) = a+b+c$$

$$a-(b+c) = a-b-c$$

Egalités

$$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$$

$$a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$$

Puissances

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Radicaux

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a^*$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

* si n entier strictement positif

Produits remarquables

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

Produit nul

$$A \cdot B \cdot C = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0 \text{ ou } C = 0$$

Equation du second degré: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ où } \Delta = b^2 - 4ac$$

Inégalités

$$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$$

$$a > b \Leftrightarrow -a < -b$$

$$a > b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c, \text{ où } c > 0$$

Equations de quelques «courbes» du plan en coordonnées cartésiennes

Equation d'une droite: $y = ax + b$

(a = coefficient angulaire) ou $ax + by + c = 0$

Equation de l'axe X: $y = 0$

Equation de l'axe Y: $x = 0$

Equation d'une // à X: $y = a$

Equation d'une // à Y: $x = a$

Equation d'une parabole: $y = ax^2 + bx + c$

coordonnées du sommet de la parabole:

$$x_s = \frac{-b}{2a} \quad y_s = \frac{-\Delta}{4a}$$

Logarithmes décimaux

$$\log N = x \Leftrightarrow 10^x = N$$

$$\log(A \cdot B \cdot C) = \log A + \log B + \log C$$

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

$$\log A^n = n \cdot \log A$$

$$\log A = \log B \Leftrightarrow A > 0, B > 0 \text{ et } A = B$$

Logarithmes en base a ($a > 0, a \neq 1$)

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$$

DEUXIÈME PARTIE

Eléments de géométrie euclidienne plane

Le mot géométrie vient du grec et signifie «qui mesure la terre».
La géométrie plane traite des figures à deux dimensions.
Toutes les figures planes peuvent se décomposer en triangles.
Les concepts de base de la géométrie plane sont le point et la droite.
Les notions et les conventions d'écriture employées dans cette partie
consacrée à la géométrie sont celles qui sont le plus souvent utilisées en
physique élémentaire.

Des définitions et axiomes

Le plan

Notion intuitive

L'idée de plan peut être donnée par la surface d'une plaque de marbre, par la surface d'une eau tranquille, par la surface d'un tableau dans une classe.

Définition

Un plan est un ensemble infini de points.

Un plan est illimité dans tous les sens.

Un plan a deux dimensions.

Le point

Notion intuitive

L'idée de point peut être donnée par la trace d'une pointe effilée d'un crayon sur une feuille de papier.

Le point géométrique est considéré comme n'ayant aucune dimension.

La ligne

L'idée de ligne peut être donnée par un fil très fin.



La droite

Notion intuitive

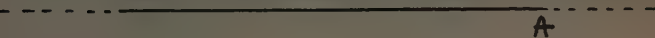
L'idée de droite peut être donnée par le chemin le plus « court » que suivrait un point se déplaçant dans un plan entre deux de ses « positions » sans changer de direction.

Définition

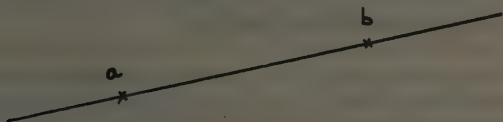
Une droite est une partie du plan.

Une droite est formée d'une infinité de points. Elle est illimitée dans les deux sens.

La droite géométrique est considérée comme ayant une dimension.

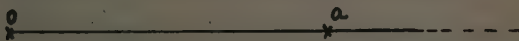


Axiome : deux points déterminent une et une seule droite.



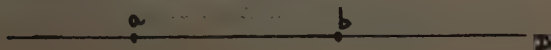
La demi-droite

Une demi-droite d'origine o est l'ensemble des points d'une droite situés d'un côté du point o de cette droite, le point o appartenant à la demi-droite.



Segment de droite

Un segment de droite, ab , ou $[a,b]$, est l'ensemble des points de la droite déterminée par a et b et situés entre a et b , a et b appartenant au segment. On appelle a et b les extrémités du segment.



Longueur d'un segment de droite

La longueur $\overline{ab}$ d'un segment ab est la «distance» entre a et b . Cette distance est mesurée à l'aide d'un segment unité. Ainsi, la longueur du segment ab est 3, si le segment unité est ou :

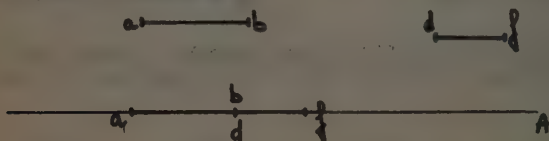


Segments égaux

Deux segments sont égaux lorsqu'on peut les faire coïncider.

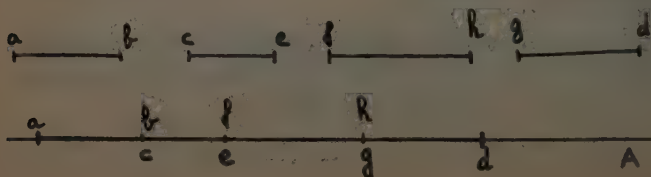
Somme de plusieurs segments

La somme des segments ab et df est le segment d'extrémités a et f obtenu en mettant bout à bout sur une même droite support A les segments ab et df , c'est-à-dire en faisant coïncider le point d , origine de df , avec le point b , extrémité de ab .



S'il y a plus de deux segments, on applique le même principe, consistant à mettre bout à bout les différents segments à additionner.

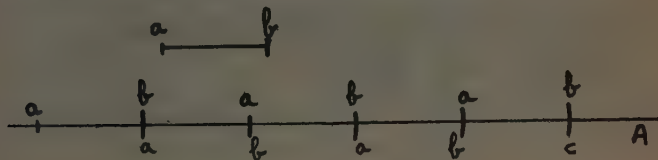
Ainsi, $ad = ab + ce + fh + gd$.



Produit d'un segment par un nombre entier

$$n \cdot ab = \underbrace{ab + ab + \dots + ab}_{n \text{ termes}}$$

Solt à déterminer, *par exemple*, $5.ab$ connaissant $ab : ac = 5ab$

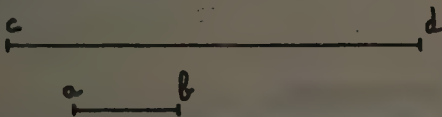


Quotient d'un segment par un nombre entier

Le segment ab est égal au $n^{\text{ème}}$ du segment cd ssi le segment cd est égal au produit de ab par n .

$$\text{On note } ab = \frac{cd}{n}$$

Ainsi, *par exemple*, $ab = \frac{cd}{4}$:

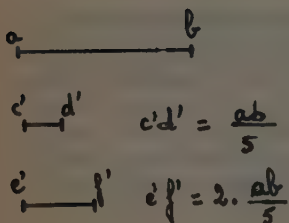
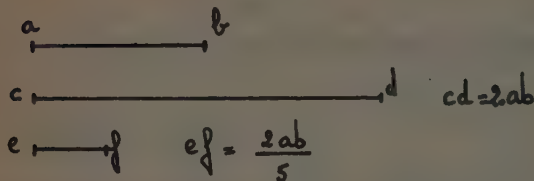


Produit d'un segment par une fraction

$$\frac{n}{m} \cdot ab = \frac{n.ab}{m} = n \cdot \frac{ab}{m}$$

Solt à déterminer, par exemple, $\frac{2}{5} \cdot ab$

On construit $2.ab$ et, ensuite, le cinquième de ce vecteur, ou, ce qui revient au même, $\frac{ab}{5}$ et, ensuite, le double de ce vecteur $\frac{ab}{5}$.



Mesure d'un segment

on choisit un segment U comme segment unité. La mesure du segment ab est le nombre (entier ou non) par lequel il faut multiplier U pour obtenir ab .

Ainsi, par exemple, la mesure de ab est 3,5. En effet, $ab = 3,5 U$.



Milieu d'un segment

Le milieu d'un segment de droite est le point qui partage ce segment en deux segments égaux. Ainsi, m est le milieu de ab ssi m appartient à ab et $ma = mb$.



Droites sécantes

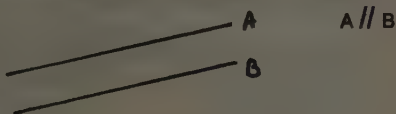
Deux droites qui ont un point d'intersection (un point commun) sont des droites sécantes.

i est le point d'intersection de A et B *

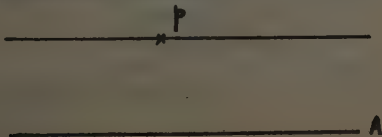


Droites parallèles

Deux droites parallèles ($//$) sont deux droites qui n'ont aucun point commun.



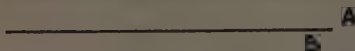
Axiome de parallélisme : d'un point extérieur à une droite on peut tracer une et une seule parallèle à cette droite.



$$A \cap B = \{i\}$$

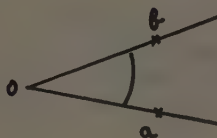
Droites confondues

Deux droites sont confondues lorsqu'elles ont plus d'un point commun.



Angle de deux demi-droites

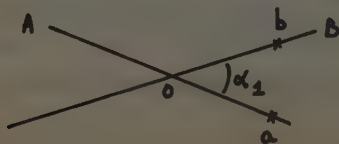
Soit deux demi-droites de même origine o . La rotation autour de ce point origine permettant de superposer les deux demi-droites détermine l'angle de ces deux demi-droites.



Angles de deux droites sécantes

Deux droites sécantes déterminent quatre angles, chacun étant déterminé par deux des quatre demi-droites dont l'origine est le point d'intersection des deux droites sécantes.

α_1 est l'angle des demi-droites ob et oa.

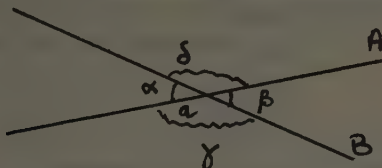


Angles opposés par le sommet

Deux angles opposés par le sommet sont deux angles entre deux droites, qui ont le même sommet, mais qui n'ont aucun côté commun.

α et β sont opposés par le sommet; a est le sommet commun des deux angles; A et B sont les deux droites déterminant ces angles.

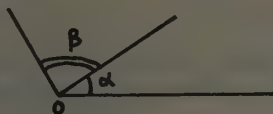
A et B déterminent aussi deux autres angles opposés par le sommet : γ et δ .



Angles adjacents

Deux angles adjacents sont deux angles qui ont même sommet, qui ont un côté commun et qui sont situés de part et d'autre de ce côté commun.

α et β sont adjacents.



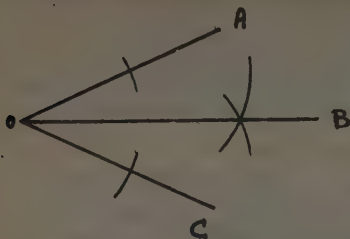
Angles égaux

Deux angles sont égaux si on peut faire coïncider à la fois les sommets et les côtés; donc on peut « superposer » exactement ces deux angles.

Bissectrice d'un angle

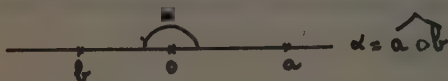
La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage l'angle en deux angles égaux.

Construction de la bissectrice d'un angle : elle consiste en la construction d'un point équidistant des côtés de l'angle (propriété).



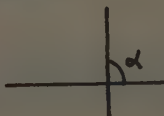
Types d'angles de deux demi-droites

Un angle plat est un angle dont les côtés sont distincts et en ligne droite, c'est-à-dire sur une même droite.



Un angle droit est un angle de mesure égale à 90° , c'est un des quatre angles déterminés par deux droites sécantes lorsque deux angles adjacents sont égaux.

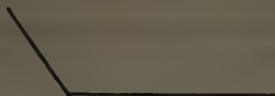
C'est la moitié d'un angle plat.



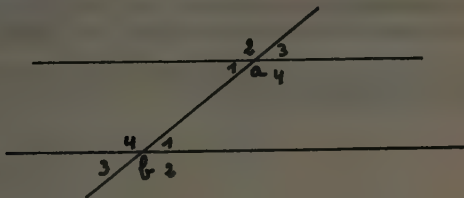
Un angle aigu est un angle plus petit qu'un angle droit.



Un **angle obtus** est un angle plus grand qu'un angle droit.



Angles déterminés par deux droites parallèles coupées par une sécante



Les angles $\hat{a}_1$ et $\hat{b}_1$, de même que les angles $\hat{a}_4$ et $\hat{b}_4$, sont appelés **des angles alternes-internes**.

Les angles $\hat{a}_2$ et $\hat{b}_2$, de même que les angles $\hat{a}_3$ et $\hat{b}_3$, sont appelés **des angles alternes-externes**.

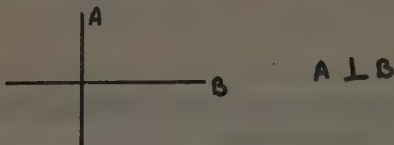
Les angles $\hat{a}_3$ et $\hat{b}_1$, de même que les angles $\hat{a}_2$ et $\hat{b}_4$, $\hat{a}_4$ et $\hat{b}_2$ et $\hat{a}_1$ et $\hat{b}_3$ sont appelés **des angles correspondants**.

Les angles $\hat{a}_1$ et $\hat{b}_4$, de même que les angles $\hat{a}_4$ et $\hat{b}_1$, sont appelés **des angles intérieurs d'un même côté**.

Les angles $\hat{a}_3$ et $\hat{b}_2$, de même que les angles $\hat{a}_2$ et $\hat{b}_3$, sont appelés **extérieurs d'un même côté**.

Droites perpendiculaires

Deux droites sont dites **perpendiculaires** si elles sont sécantes et qu'elles déterminent quatre angles droits.



Axiome de perpendicularité de deux droites : d'un point extérieur à une droite on peut abaisser une et une seule perpendiculaire à cette droite.

Le point d'intersection de cette perpendiculaire avec la droite donnée s'appelle **le pied de la perpendiculaire**.



Distance d'un point à une droite

La distance d'un point à une droite est la longueur du segment déterminé par ce point et par le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite. Ainsi, la distance de m à D est la longueur du segment mp .



Figure plane

Une figure plane est une partie du plan délimitée par une ou plusieurs lignes, droites ou non.

Egalité de deux figures

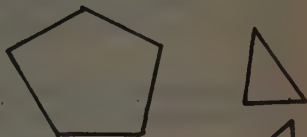
Deux figures sont égales si on peut les faire coïncider exactement.

Polygone

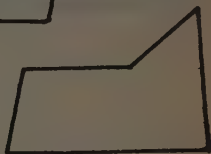
Un **polygone** est une figure plane « fermée » délimitée par des segments de droite.

Exemples :

Ces polygones sont convexes



Ce polygone est concave parce que le prolongement d'un des côtés au moins est à l'intérieur du polygone.



Les polygones convexes qui possèdent n côtés et n angles égaux sont dits **réguliers**.

On peut inscrire un cercle dans ces polygones de façon que les côtés des polygones soient tangents au cercle. On peut également tracer un cercle circonscrit au polygone, c'est-à-dire un cercle tel que les côtés des polygones soient des cordes du cercle.

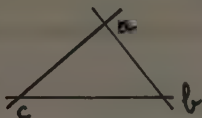
Hexagone (côté = rayon du cercle circonscrit)



Triangle

Un triangle est la figure formée par trois droites sécantes deux à deux. Les points d'intersection des trois droites sont les sommets du triangle.

Un triangle a donc trois angles et trois côtés (c'est ce que l'on appelle les éléments du triangle).



Types de triangles

Triangle rectangle : un triangle rectangle est un triangle dont un des angles est un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'**hypoténuse**.

Triangle équilatéral : un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés sont égaux (et donc les trois angles).



Triangle isocèle : un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés égaux (donc deux angles égaux).



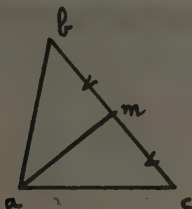
Médiatrice d'un segment

La médiatrice d'un segment est la perpendiculaire élevée en le milieu de ce segment.



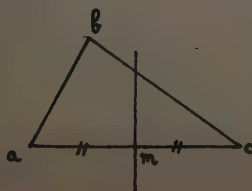
Médianes d'un triangle

La médiane d'un triangle relative à un côté du triangle est le segment de droite joignant le milieu de ce côté au sommet opposé.



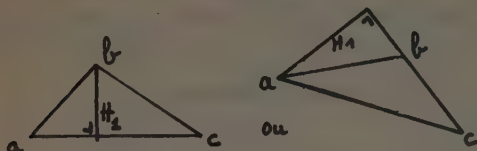
Médiatrice d'un triangle

La médiatrice relative à un côté d'un triangle est la médiatrice de ce côté, c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en le milieu de ce côté.



Hauteur d'un triangle

La hauteur relative à un côté d'un triangle est la perpendiculaire abaissée du sommet opposé à ce côté sur ce côté.

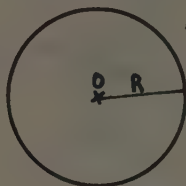


Cercle

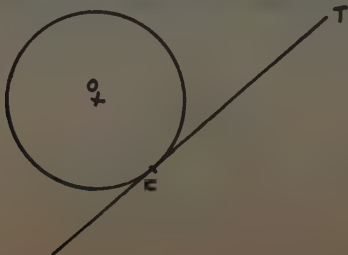
Un **cercle** est un ensemble de points équidistants d'un point fixe.

Un **cercle de centre o** est un ensemble de points à égale distance de o.

Le **cercle de centre o et de rayon R** est l'ensemble des points à la distance R du point o.



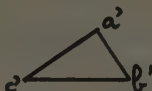
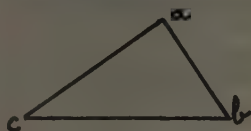
Une **tangente à un cercle** est une droite qui coupe le cercle en un seul point. Ce point est appelé point de contact de la tangente.



Figures semblables

Deux triangles sont semblables ssi ils ont les angles égaux deux à deux et les côtés respectivement proportionnels.**

Le rapport dans lequel sont les côtés s'appelle le rapport de similitude. Ainsi, le triangle $a'b'c'$ est semblable au triangle abc .

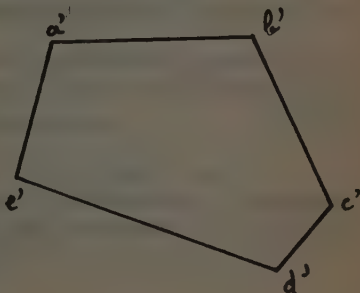
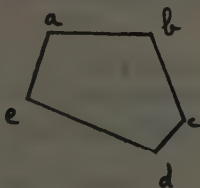


$\begin{matrix} a'b'c' \\ abc \end{matrix}$

$$\frac{a'b'}{ab} = \frac{a'c'}{ac} = \frac{b'c'}{bc} = \frac{1}{2}$$

Deux polygones sont semblables lorsqu'ils ont les angles égaux deux à deux et les côtés respectivement proportionnels.*

Ainsi, le polygone $abcde$ est semblable au polygone $a'b'c'd'e'$.



$$\frac{a'b'}{ab} = \frac{b'c'}{bc} = \frac{c'd'}{cd} = \frac{d'e'}{de} = \frac{e'a'}{ea} = 2$$

Le rapport de similitude est 2.

** Deux triangles sont semblables si l'un est l'image de l'autre par une homothétie.

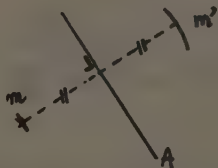
* Deux polygones sont semblables s'il existe une homothétie du plan qui applique l'un sur l'autre.

Symétrie par rapport à une droite

Deux points sont symétriques par rapport à une droite ssi cette droite est la médiatrice du segment joignant les deux points.

Ainsi, *par exemple*, m' est le symétrique de m par rapport à A .

Pour le construire, on a tracé la perpendiculaire à A par m et on a pris $om' = om$.

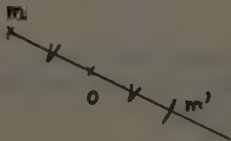


Symétrie par rapport à un point

Deux points sont symétriques par rapport à un point ssi ce dernier est le milieu du segment joignant les deux points.

Ainsi, *par exemple*, m' est le symétrique de m par rapport à o .

Pour le construire, on joint m à o et on prend sur la droite ainsi tracée $om' = mo$.



Vecteurs (au sens physique)

Un **vecteur*** est un segment de droite ab sur lequel on a choisi un sens de parcours indiqué par une flèche. On le représente par $\overrightarrow{ab}$, a étant l'origine et b l'extrémité.

Sa longueur** (valeur absolue, ou module) est représentée par $|\overrightarrow{ab}|$ ou ou par $\overline{ab}$.

Ainsi, un vecteur possède *une direction, un sens, une longueur (module) et une origine déterminée*.

Exemples : les forces, la vitesse, l'accélération sont représentés par des vecteurs.

La force exercée sur un point est le vecteur ayant comme origine ce point d'application de la force, comme direction, la direction de la force, comme sens le sens du déplacement possible de la force*** et comme longueur l'intensité de la force.

Mesure algébrique d'un vecteur

Soit un vecteur $\overrightarrow{ab}$ sur un axe X (droite orientée et graduée) ou // à un axe X . La mesure algébrique de $\overrightarrow{ab}$ est le nombre dont la valeur absolue est la longueur $\overline{ab}$ du vecteur $\overrightarrow{ab}$ et dont le signe est $+$ si l'axe et le vecteur sont de même sens ou $-$ s'ils sont de sens contraires.

* En mathématique « moderne », on définit un vecteur comme suit : le vecteur $\overrightarrow{ab}$ est l'ensemble des couples équipollents au couple (a, b) c'est-à-dire l'ensemble des couples tels qu'on peut passer de l'un à l'autre par une projection parallèle,

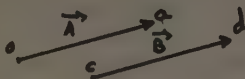
** Ou norme.

*** Tout objet sur lequel est exercé une force ne se déplace pas obligatoirement. Par exemple, si on pousse sur un mur (on exerce une force), le mur ne bouge pas, et pourtant la force a un sens : celui qu'aurait le déplacement du mur s'il avait lieu.

Egalité de deux vecteurs

Deux vecteurs sont égaux* ssi ils ont même longueur, même direction et même sens.

$$\vec{A} = \vec{B} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{oa} = \overrightarrow{cd}$$



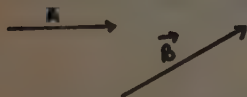
Vecteur opposé

Le vecteur opposé d'un vecteur est le vecteur de même direction, de même longueur, mais de sens opposé. L'opposé d'un vecteur $\vec{A}$ se note $-\vec{A}$.



Somme de deux vecteurs

La somme ou résultante de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est le vecteur $\vec{R}$ dont l'origine est l'origine de $\vec{A}$ et dont l'extrémité est l'extrémité de $\vec{B}$, l'origine de $\vec{B}$ ayant été placée, « par glissement », sur l'extrémité de $\vec{A}$. On écrit $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$.

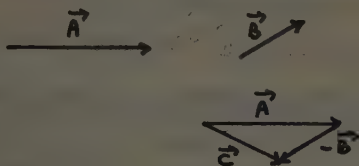


* Des forces seront égales si elles ont la même direction, le même sens, la même intensité et... le même effet. Ainsi, dans un champ électrique, les forces ne sont pas égales.

Différence de deux vecteurs

La différence de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, $\vec{A} - \vec{B}$, est le vecteur $\vec{C}$ tel que $\vec{C} + \vec{B} = \vec{A}$.

On peut aussi définir $\vec{A} - \vec{B}$ comme la somme de $\vec{A}$ et de $-\vec{B}$.



Produit d'un vecteur par un nombre

Le produit d'un vecteur $\vec{A}$ par un nombre r est le vecteur $r\vec{A}$, de longueur $|r| \cdot |\vec{A}|$, de même direction que le vecteur $\vec{A}$ et de même sens si $r > 0$ et de sens opposé si $r < 0$.

Si $r = 0$, $r\vec{A}$ est le vecteur nul.

Soit à déterminer, *par exemple*, le vecteur $5,5 \cdot \vec{ab}$.

$$\vec{cd} = 5,5 \vec{ab}$$



Vecteur unitaire

Un vecteur unitaire est un vecteur de longueur 1.

Tout vecteur $\vec{A}$ peut s'exprimer à l'aide d'un vecteur unitaire de même direction que $\vec{A}$: $\vec{A} = +a\vec{U}$ ou $\vec{A} = -a\vec{U}$, selon que le vecteur et le vecteur $\vec{U}$ sont ou non de même sens, a étant la longueur (module) de $\vec{A}$.

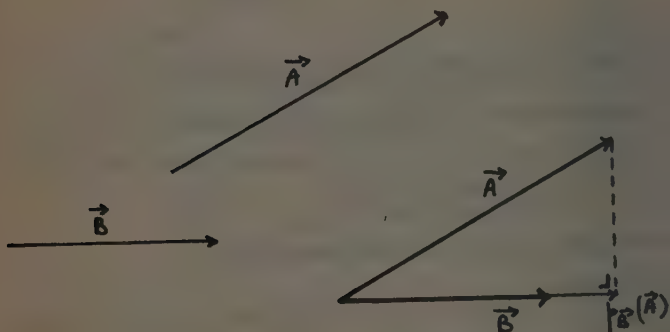
Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire du vecteur $\vec{A} \cdot \vec{B}$, est le nombre $|\vec{A}| \cdot |\text{projection orthogonale}^* \text{ de } \vec{A} \text{ sur } \vec{B}|$ (ou encore, $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$, α étant l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$, $0 < \alpha < 180^\circ$).

Solt, par exemple, les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ suivant:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\text{P}_B \rightarrow (\vec{A})| = 4 \cdot 3 = 12$$

(où $|\text{P}_B \rightarrow (\vec{A})|$ est le vecteur projection orthogonale de $\vec{A}$ sur $\vec{B}$)



Remarque: produit vectoriel

Le produit vectoriel de $\vec{A}$ par $\vec{B}$ est le vecteur $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ tel que son module est le produit des modules de $\vec{A}$ et de $\vec{B}$ par le sinus de l'angle que forment ces deux vecteurs et tel qu'il est perpendiculaire au plan déterminé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$, son sens étant déterminé de façon que $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ forment un repère orthogonal (vecteurs perpendiculaires) direct.

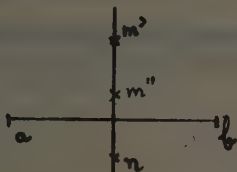
* La projection orthogonale de $\vec{A}$ sur $\vec{B}$ est le vecteur dont l'origine est l'origine de $\vec{B}$ et dont l'extrémité est le pied de la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de $\vec{A}$ sur la droite support $\vec{B}$, étant entendu que l'origine de $\vec{A}$ est placée sur l'origine de $\vec{B}$.

Des propriétés

Médiatrice d'un segment

La médiatrice d'un segment est le lieu géométrique des points (l'ensemble des points) équidistants (à égale distance) des extrémités du segment. C'est-à-dire que tout point de la médiatrice d'un segment est à égale distance des extrémités de ce segment et que tout point à égale distance des extrémités d'un segment est sur la médiatrice de ce segment.

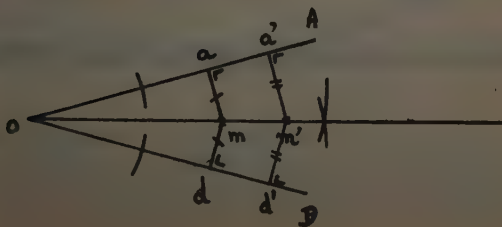
$$am' = bm' ; am'' = bm'' ; an = bn.$$



Bissectrice d'un angle

La bissectrice d'un angle est l'ensemble des points (ou lieu géométrique des points) équidistants des côtés de l'angle.

$$am = dm ; a'm' = d'm'$$



Angles opposés par le sommet

Deux angles opposés par le sommet sont égaux.

$$\alpha = \beta$$

$$\gamma = \delta$$



Angles déterminés par deux droites parallèles coupées par une sécante

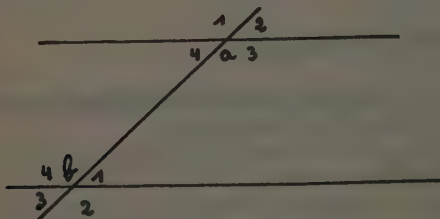
Les angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants déterminés par deux droites parallèles coupées par une sécante sont égaux.

Les angles intérieurs d'un même côté et extérieurs d'un même côté sont supplémentaires (leur somme est égale à deux droits ou un plat).

$$\hat{a}_4 = \hat{b}_1; \hat{a}_3 = \hat{b}_4$$

$$\hat{a}_1 = \hat{b}_2; \hat{a}_2 = \hat{b}_3$$

$$\hat{a}_1 = \hat{b}_4; \hat{a}_4 = \hat{b}_3; \hat{a}_2 = \hat{b}_1; \hat{a}_3 = \hat{b}_2$$



Condition pour que deux droites soient parallèles

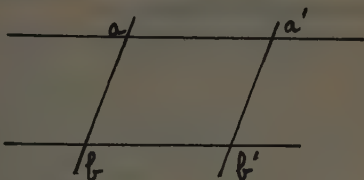
Si deux droites coupées par une sécante déterminent des angles alternes-internes, des angles alternes-externes, des angles correspondants égaux, des angles intérieurs, d'un même côté et des angles extérieurs d'un même côté supplémentaires, alors ces droites sont parallèles.

Segments de droite parallèles

Les segments de droite parallèles compris entre deux parallèles sont égaux.

$$aa' = bb'$$

$$ab = a'b'$$

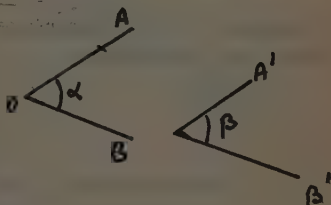


Angles à côtés parallèles

Deux angles à côtés parallèles chacun à chacun sont égaux si les angles sont tous les deux aigus ou tous les deux obtus, et sont supplémentaires si l'un est aigu et l'autre obtus.

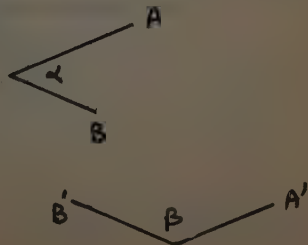
$$\alpha = \beta$$

A/A' et B/B'



$$\alpha = 180^\circ - \beta$$

A/A' et B/B'

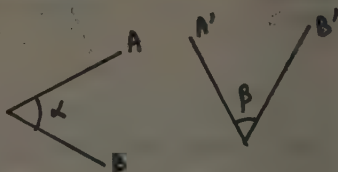


Angles à côtés perpendiculaires

Deux angles à côtés perpendiculaires chacun à chacun sont égaux si les angles sont tous les deux aigus ou tous les deux obtus, et sont supplémentaires si l'un des angles est aigu et l'autre obtus..

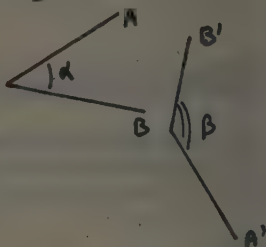
$$\alpha = \beta$$

$$A \perp A' \text{ et } B \perp B'$$



$$\alpha = 180^\circ - \beta$$

$$A \perp A' \text{ et } B \perp B'$$



Théorème de Thalès

Les segments de droite déterminés par des parallèles coupées par deux sécantes sont proportionnels.

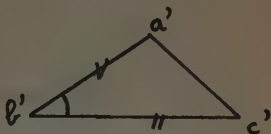
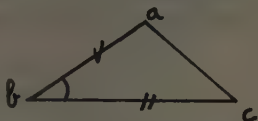
$$\frac{ab}{bc} = \frac{a'b'}{b'c'}; \frac{aa'}{bb'} = \frac{bb'}{cc'}$$



Cas d'égalité des triangles

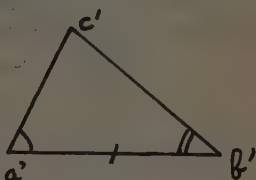
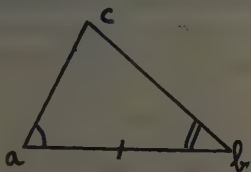
Deux triangles sont égaux s'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.

$$ab = a'b'; \hat{b} = \hat{b}'; bc = b'c' \Rightarrow \text{triangle } a'b'c' = \text{triangle } abc$$



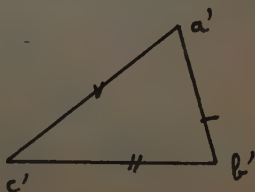
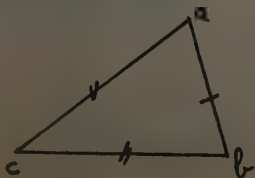
Deux triangles sont égaux s'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.

$$ab = a'b'; \hat{a} = \hat{a}'; \hat{b} = \hat{b}' \Rightarrow \text{triangle } abc = \text{triangle } a'b'c'$$



Deux triangles sont égaux s'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

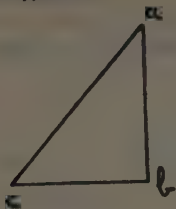
$$ab = a'b'; ac = a'c'; bc = b'c' \Rightarrow \text{triangle } abc = \text{triangle } a'b'c'$$



Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.

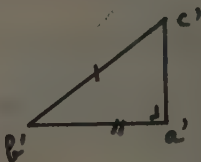
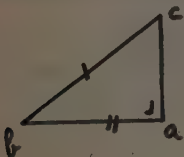
$$\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 = \overline{ac}^2$$



Cas d'égalité des triangles rectangles

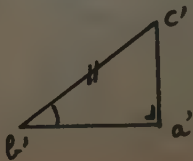
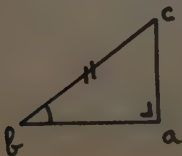
Si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal alors ils sont égaux.

$bc = b'c'$; $ab = a'b'$; $\hat{a} = \hat{a}' = 1 \text{ droit} \Rightarrow \text{triangle rectangle } abc = \text{triangle rectangle } a'b'c'$



Deux triangles rectangles sont égaux s'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.

$bc = b'c'$; $\hat{b} = \hat{b}'$; $\hat{a} = \hat{a}' = 1 \text{ droit} \Rightarrow \text{triangle rectangle } abc = \text{triangle rectangle } a'b'c'$



Triangle - Thalès

Le segment de droite joignant les milieux de deux côtés opposés d'un triangle quelconque est parallèle au troisième et en vaut la moitié.

Hypothèse:

triangle abc

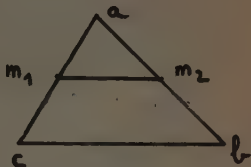
$am_1 = m_1c$ (m_1 est milieu de ac)

$am_2 = m_2b$ (m_2 est milieu de ab)

Thèse:

$m_1m_2 \parallel cb$

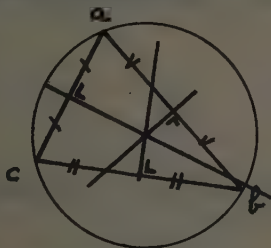
$$m_1m_2 = \frac{cb}{2}$$



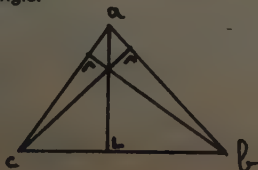
Droites remarquables d'un triangle

Les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un même point qui est à égale distance des sommets du triangle.

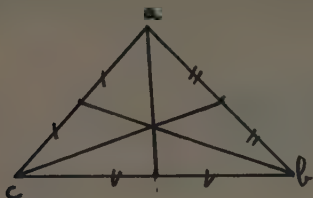
Ce point est le centre du cercle circonscrit au triangle, c'est-à-dire le cercle passant par les sommets du triangle.



Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point, appelé *l'orthocentre* du triangle.

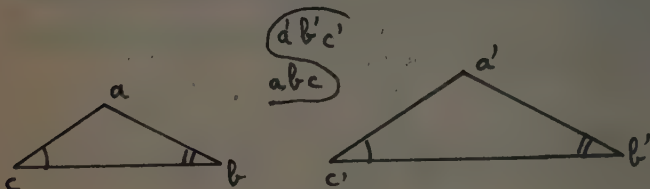


Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point qui est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet. Ce point s'appelle *le centre de gravité* du triangle.



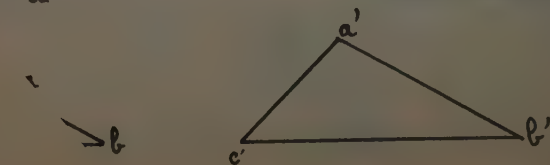
Cas de similitude des triangles

Deux triangles sont semblables s'ils ont deux angles correspondants égaux chacun à chacun.



Deux triangles sont semblables s'ils ont les trois côtés correspondants proportionnels chacun à chacun.

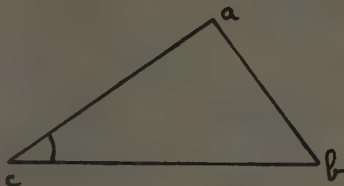
$$\frac{a'b'}{ab} = \frac{b'c'}{bc} = \frac{c'a'}{ca} = 2$$



Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels sont semblables.

$$\hat{C}' = \hat{C}$$

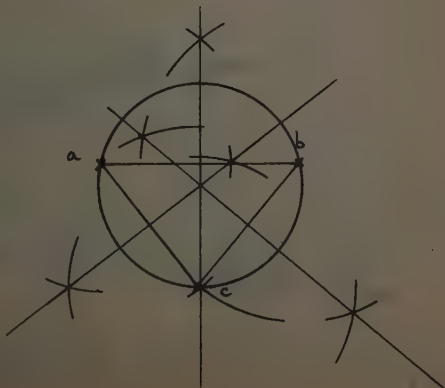
$$\frac{a'b'}{ab} = \frac{a'c'}{ac} = \frac{1}{3}$$



Cercle

Trois points non en ligne droite déterminent un et un seul cercle (une circonférence).

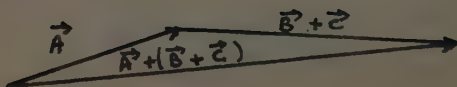
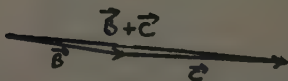
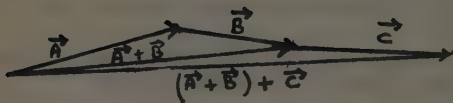
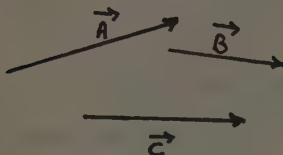
Le centre de ce cercle est le point d'intersection des médiatrices des segments obtenus en joignant les points deux à deux.



Vecteurs (au sens physique)

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$



$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

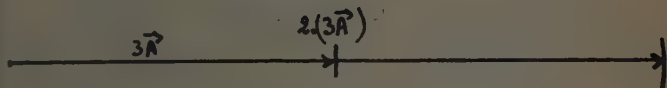
$$\mathbf{r} \cdot \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r}$$

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{s} \cdot \vec{\mathbf{A}}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) \cdot \vec{\mathbf{A}}$$

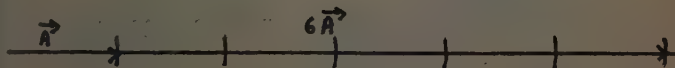


Soit $n = 2$ et $s = 3$

$$n \cdot (s \cdot \vec{\mathbf{A}}) = 2 \cdot (3 \cdot \vec{\mathbf{A}})$$



$$(n \cdot s) \cdot \vec{\mathbf{A}} = (2 \cdot 3) \cdot \vec{\mathbf{A}} = 6 \cdot \vec{\mathbf{A}}$$



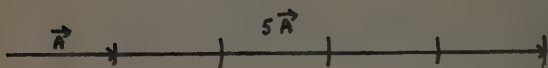
$$2 \cdot (3 \cdot \vec{\mathbf{A}}) = (2 \cdot 3) \cdot \vec{\mathbf{A}}$$

$$(r + s) \cdot \vec{A} = r \cdot \vec{A} + s \cdot \vec{A}$$

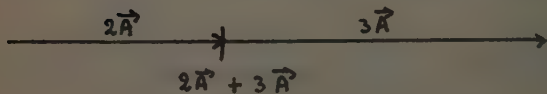
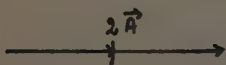


Soit $n = 2$ et $s = 3$

$$\begin{aligned} (n + s) \cdot \vec{A} &= (2 + 3) \cdot \vec{A} \\ &= 5 \cdot \vec{A} \end{aligned}$$



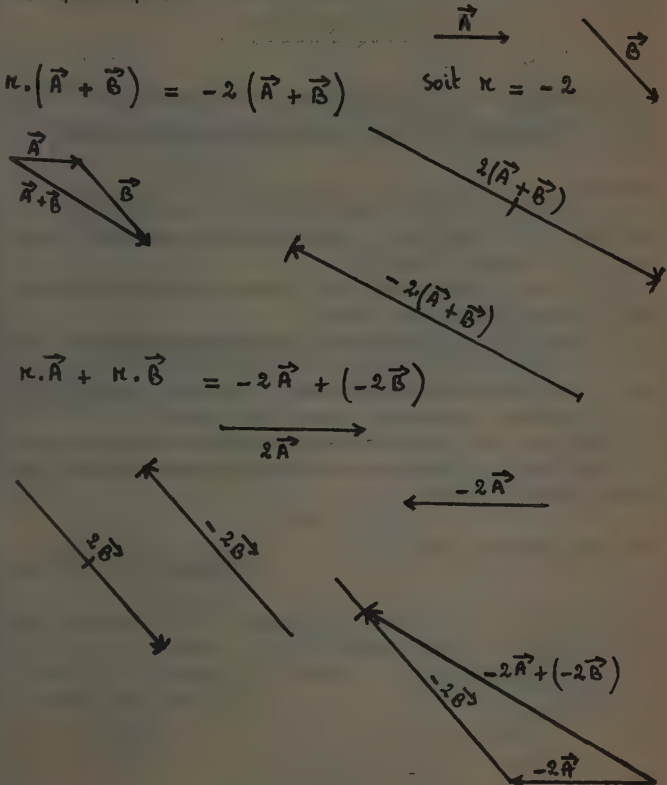
$$n \cdot \vec{A} + s \cdot \vec{A} = 2 \cdot \vec{A} + 3 \cdot \vec{A}$$



$$(2 + 3) \cdot \vec{A} = 2 \cdot \vec{A} + 3 \cdot \vec{A}$$

$$r \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = r \cdot \vec{A} + r \cdot \vec{B}$$

où $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ sont des vecteurs quelconques et où r et s sont des nombres réels quelconques.



Critère de perpendicularité de deux vecteurs non nuls*

Deux vecteurs non nuls sont perpendiculaires si leur produit scalaire est nul.

(Remarque: en physique, les vecteurs peuvent être de nature différente.)

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

Construction du quotient d'un vecteur $\vec{v}$ (ou d'un segment ab) par un nombre entier positif n

Méthode

Le principe de la construction est basé sur le théorème de Thalès.

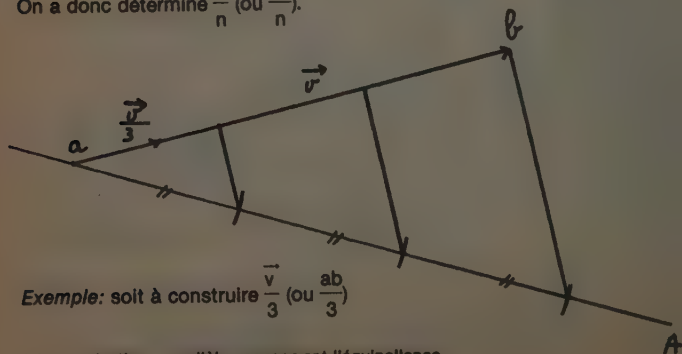
On utilise une droite auxiliaire, A , passant par l'origine du vecteur (ou par une des extrémités du segment).

Sur cette droite, on place bout à bout, à partir de l'origine du vecteur, n vecteurs égaux (ou n segments égaux).

On joint l'extrémité du dernier vecteur (ou segment) construit à l'extrémité du vecteur donné (ou à l'autre extrémité du segment), et on trace, par chacune des extrémités des autres vecteurs construits (ou des autres segments), les droites parallèles au segment ainsi obtenu.

On obtient ainsi, «sur» le vecteur donné (ou segment donné), n vecteurs (ou segments) égaux, puisque les projections parallèles conservent l'égalité des segments (Thalès)*

On a donc déterminé $\frac{\vec{v}}{n}$ (ou $\frac{ab}{n}$).



Exemple: soit à construire $\frac{\vec{v}}{3}$ (ou $\frac{ab}{3}$)

* Les projections parallèles conservent l'équipollence.

Quelques formules concernant les figures planes simples

Définitions

L'aire d'un polygone est le nombre indiquant le rapport de ce polygone à celui pris comme unité d'aire.

L'unité d'aire est le carré construit sur l'unité de longueur (par exemple, 1 m^2 , 1 cm^2 , ...).

Aire d'un carré

Soit un carré dont les côtés mesurent c unités de longueur. Soit A l'aire de ce carré.

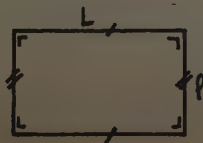
On a : $A = c.c = c^2$



Aire d'un rectangle

Soit un rectangle dont les côtés ont pour mesure L et l . On dit que L unités de longueur et l unités de longueur sont les dimensions du rectangle. On appelle souvent longueur la mesure du plus grand côté et largeur la mesure du plus petit côté.

On a : $A = L.l$

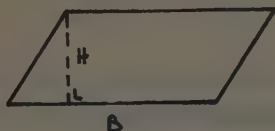


Aire d'un parallélogramme

Elle se calcule à partir d'un côté quelconque, appelé base, et de la hauteur relative à ce côté.

Soit B et H les mesures de la base et de la hauteur.

On a : $A = B.H$

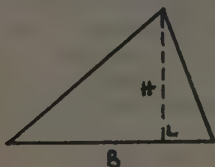


Aire d'un triangle

Elle se calcule à partir d'un côté quelconque, appelé base, et de la hauteur relative à ce côté.

Soit B et H les mesures de la base et de la hauteur.

On a : $A = \frac{B.H}{2}$



Aire d'un disque («cercle»)*

$A = \pi R^2$, où R est la mesure du rayon du cercle et π le nombre irrationnel ($\pi = 3,14159\dots$).

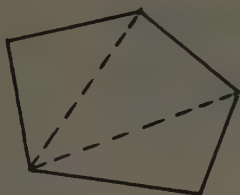
(Remarque: la longueur du cercle est égale à $2\pi R$)



* Le cercle est le «contour» de la figure plane appelée disque.

Aire d'un polygone

On décompose le polygone en triangles, rectangles et parallélogrammes.
L'aire du polygone est la somme des aires des figures en lequel on l'a décomposé.



TROISIÈME PARTIE

Éléments de trigonométrie

Le mot trigonométrie signifie étymologiquement « mesure des triangles ». Son but premier consiste en le calcul de tous les éléments d'un triangle. La trigonométrie fut introduite pour résoudre des problèmes d'arpentage et d'astronomie. Ses applications sont également nombreuses en navigation.

Des définitions

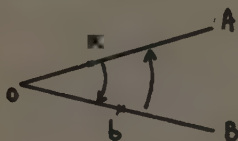
Angle de deux demi-droites

Soit deux demi-droites de même origine, o . La rotation autour de ce point origine permettant de superposer les deux demi-droites détermine l'angle de ces deux demi-droites.

Les demi-droites sont les côtés de l'angle; o est le sommet de l'angle.

On note $\widehat{aob}$ l'angle des deux demi-droites $[o, a]$ et $[o, b]$.

Si on donne une orientation en fixant le sens de la rotation, on distingue alors deux angles: $\widehat{aob}$ ($\curvearrowright$) et $\widehat{boa}$ ($\curvearrowleft$).



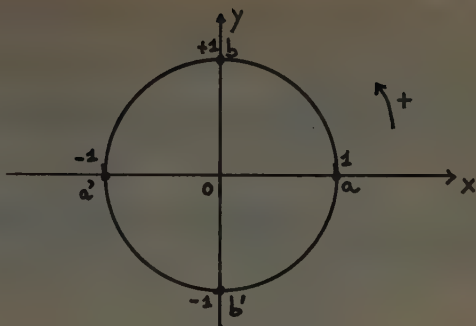
Cercle trigonométrique

Dans le plan, on choisit un point origine; on trace par ce point deux axes perpendiculaires orientés; on choisit la même unité sur chacun des axes. On a ainsi un repère cartésien* dans le plan.

On trace un cercle de rayon égal à l'unité et dont le centre est le point origine.

Les sens positif de mesure des angles ou des arcs est le sens contraire des aiguilles d'une montre.

* Autrement dit, on munit le plan π d'une base orthonormée (voir p. 58, Algèbre).

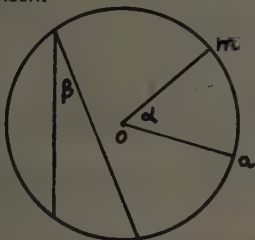


[O, a est le côté origine des angles; a est le point origine des arcs.

Types d'angles se rapportant au cercle trigonométrique

α est un angle au centre

β est un angle inscrit

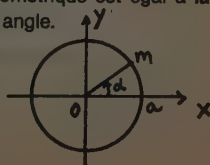


On dit que l'angle au centre α intercepte l'arc am.

Mesure d'un angle

La mesure d'un angle au centre du cercle trigonométrique est égal à la mesure de l'arc sous-tendu (ou intercepté) par cet angle.

$$\text{mes } \alpha = \text{mes } \widehat{aOm} = \text{mes } \overline{am}$$



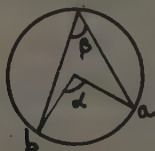
Une des unités de mesure des angles est le **degré**. Un tour complet du cercle* mesure 360° , ce qui correspond à 2π radians.

1 radian est la mesure de l'angle au centre sous-tendu par un arc de longueur égale au rayon de cercle.

La mesure d'un arc ou d'un angle peut être positive ou négative, suivant le sens dans lequel est considéré cet arc ou cet angle.

Propriétés:

La mesure de l'angle au centre interceptant l'arc ab vaut le double de celle de l'angle inscrit interceptant ce même arc.



Un angle inscrit dans un demi-cercle est droit (sa mesure vaut 90°).



Fonctions trigonométriques ou circulaires

Ce sont, entre autres, les fonctions sinus, cosinus, tangente et cotangente.

La variable indépendante de ces fonctions est un angle au centre ou un **arc**.

L'image d'un angle au centre par une fonction trigonométrique est appelé un nombre trigonométrique.

* ou circonférence.

Le cosinus d'un angle ou d'un arc

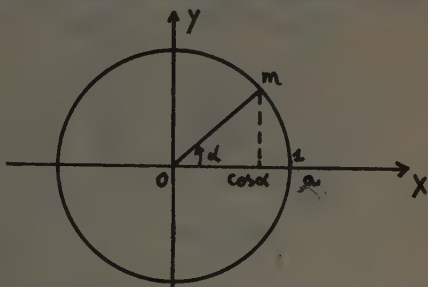
Soit l'angle $\widehat{aOm}$ ou α .

Le cosinus de l'angle $\widehat{aOm}$, ou le cosinus de l'arc $\widehat{am}$, est l'abscisse du point m , point sur le cercle trigonométrique et sur le côté extrémité de l'angle (c'est-à-dire point extrémité de l'arc).

On le note $\cos \alpha$.

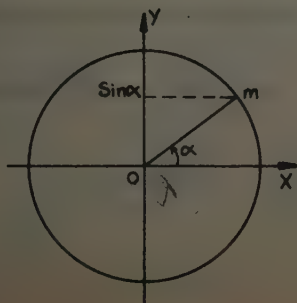
Le cosinus se mesure donc sur l'axe X .

Ainsi, à un angle $\widehat{aOm}$ ou à un arc $\widehat{am}$, de mesure α , il correspond un nombre réel (appelé nombre trigonométrique), le cosinus de cet angle ou arc.



Le sinus d'un angle ou d'un arc

Le sinus de l'angle $\widehat{aOm}$, ou le sinus de l'arc $\widehat{am}$, est l'ordonnée du point m ; on le note $\sin \alpha$.

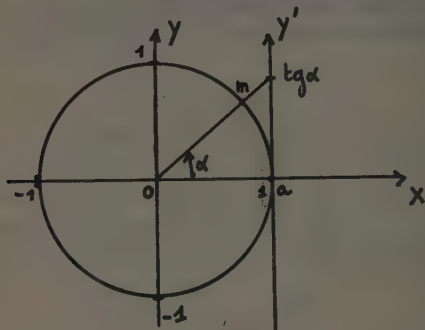


La tangente d'un angle ou d'un arc

On trace, en a (origine des arcs), un axe $Y' \parallel Y$, orienté et gradué comme Y . On déplace donc l'axe Y parallèlement à lui-même en faisant coïncider l'origine o avec a .

Pour déterminer la tangente de $\widehat{aom}$, on prolonge le côté om de l'angle jusqu'à ce qu'il rencontre l'axe Y' .

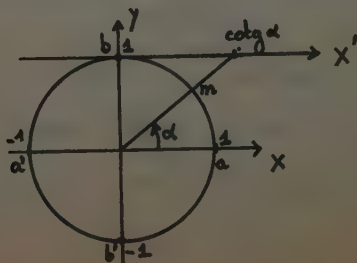
La graduation du point d'intersection du côté om avec Y' donne la tangente de $\widehat{aom}$.



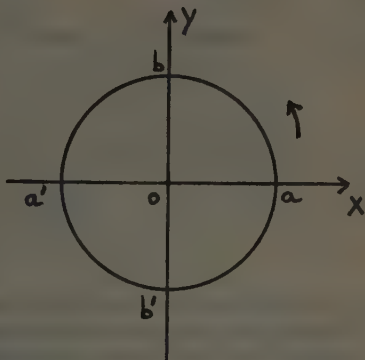
La cotangente d'un angle ou d'un arc

On trace, en b , un axe $X' \parallel X$, orienté et gradué comme X . Donc, on déplace l'axe X parallèlement à lui-même en faisant coïncider o et b . Pour déterminer la cotangente de $\widehat{aom}$, on prolonge le côté om jusqu'à ce qu'il rencontre l'axe X' .

La graduation du point d'intersection du côté om avec X' donne la cotangente de $\widehat{aom}$.



Valeurs des fonctions trigonométriques en quelques valeurs d'angles



Angles du premier quadrant (de 0° à 90°)

x	$0^\circ (\widehat{a'oa})$	30°	45°	60°	$90^\circ (\widehat{aob})$
$\sin x$	ordonnée de a:0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	ordonnée de b:1
$\cos x$	abscisse de a:1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	abscisse de b:0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	+ (ob est // Y')
$\operatorname{cotg} x$	+ (le côté extrémité de l'angle de mesure 0° ne rencontre pas l'axe X' (X'//X))	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Autres angles ($>90^\circ$ et $\leq 360^\circ$)

x	180°	270°	360°
$\sin x$	ordonnée de $a':0$	ordonnée de $b':-1$	ordonnée de $a:0$
$\cos x$	abscisse de a'	abscisse de $b':-1$	abscisse de $a:0$
$\operatorname{tg} x$	0	$-\infty$ ($ob' // Y'$)	0
$\operatorname{cotg} x$	$-\infty$ ($oa' // X'$)	0	$+\infty$ ($oa // X'$)

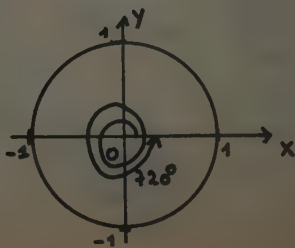
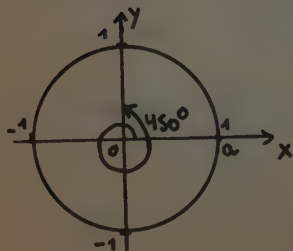
Remarque

Lorsque des angles ont une mesure supérieure à 360° , cela signifie qu'ils sont obtenus en effectuant un ou plusieurs tours complets du cercle. Leurs côtés extrémités sont donc confondus à des côtés extrémités d'angles de mesure comprise entre 0° et 360° . Dès lors, leurs nombres trigonométriques sont égaux à ceux de ces derniers angles.

Exemples:

$$\begin{aligned}
 \sin 450^\circ &= \sin(360^\circ + 90^\circ) \\
 &\text{(un tour complet)} \\
 &= \sin 90^\circ \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

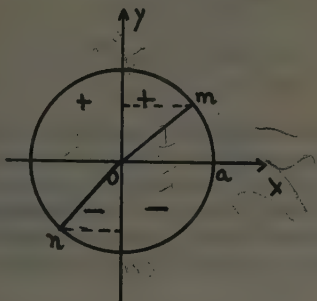
$$\begin{aligned}
 \cos 720^\circ &= \cos(360^\circ + 360^\circ) \\
 &= \cos 360^\circ \\
 &= 1
 \end{aligned}$$



Signe des fonctions trigonométriques

C'est une conséquence immédiate des définitions.

Sinus



Tout arc d'origine a du premier ou du deuxième quadrant a comme extrémité un point d'ordonnée positive et donc un **sinus positif**.

Autrement dit, tout angle au centre de mesure comprise entre 0° et 180° et de côté origine oa a un **sinus positif**.

C'est par exemple le cas de l'arc am , ou de l'angle $\widehat{aom}$.

Ainsi,

$$\sin \alpha > 0 \Leftrightarrow 0^\circ < \alpha < 180^\circ$$

Tout arc d'origine a et d'extrémité dans le troisième ou le quatrième quadrant a un **sinus négatif**, puisque l'ordonnée de son extrémité est négative.

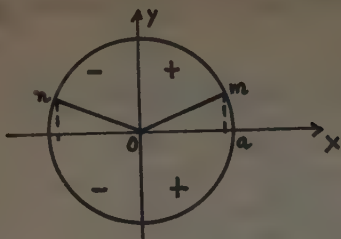
Autrement dit, tout angle au centre de mesure comprise entre 180° et 360° (sens positif de mesure d'angle!) et de côté origine oa a un sinus négatif.

C'est le cas, par exemple, pour l'arc an (ou l'angle $\widehat{aon}$).

Ainsi,

$$\sin \alpha < 0 \Leftrightarrow 180^\circ < \alpha < 360^\circ$$

Cosinus



Tout arc d'origine a et d'extrémité dans le premier ou le quatrième quadrant a un **cosinus positif**, puisque l'abscisse de son point extrémité est positive.

Autrement dit, les angles au centre de mesure comprise entre 0° et 90° et ceux de mesure comprise entre 270° et 360° ont un cosinus positif.

C'est le cas, par exemple, pour l'arc am (ou l'angle $\widehat{aom}$).

Ainsi,

$$\cos \alpha > 0 \Leftrightarrow (0^\circ \leq \alpha < 90^\circ \text{ ou } 270^\circ < \alpha \leq 360^\circ)$$

Tout arc d'origine a et d'extrémité dans le deuxième ou le troisième quadrant a un **cosinus négatif**, puisque l'abscisse de son point extrémité est négative.

Autrement dit, les angles au centre de mesure comprise entre 90° et 270° ont un cosinus négatif.

C'est le cas, par exemple, pour l'arc an (ou l'angle $\widehat{aon}$).

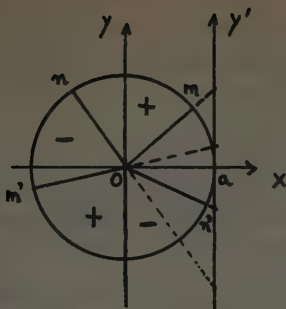
Ainsi,

$$\cos \alpha < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \alpha < 270^\circ$$

Tangente

Tout arc d'origine a et d'extrémité dans le premier ou le troisième quadrant a une **tangente positive**.

Autrement dit, tout angle au centre de côté origine oa et de côté extrémité dans le premier ou le troisième quadrant a une tangente positive: le prolon-



gement de son côté extrémité coupe l'axe Y' (où se mesure la tangente) en une graduation positive.

C'est le cas, par exemple, de l'arc $\widehat{am}$ (ou de l'angle $\widehat{aom}$) et de l'arc $\widehat{am'}$ (ou de l'angle $\widehat{aom'}$).

Ainsi,

$$\operatorname{tg} \alpha > 0 \Leftrightarrow (0 < \alpha < 90^\circ \text{ et } 180^\circ < \alpha < 270^\circ)$$

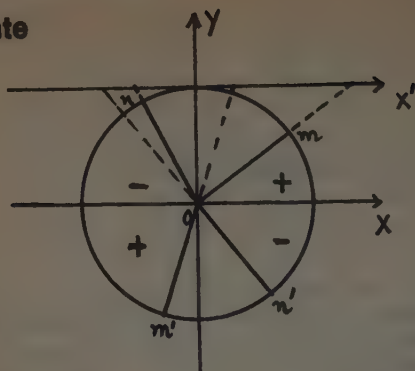
Tout arc d'origine a et d'extrémité dans le deuxième ou le quatrième quadrant a **une tangente négative**.

Autrement dit, tout angle au centre de côté origine oa et de côté extrémité dans le deuxième ou le quatrième quadrant a une tangente négative: le prolongement de son côté extrémité coupe l'axe Y' (où se mesure la tangente) en une graduation négative.

C'est le cas, par exemple, pour l'arc $\widehat{an}$ (ou l'angle $\widehat{aon}$) et pour l'arc $\widehat{an'}$ (ou l'angle $\widehat{aon'}$).

Ainsi,

$$\operatorname{tg} \alpha < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ \text{ et } 270^\circ < \alpha < 360^\circ$$

Cotangente

Tout arc d'origine a et d'extrémité dans le premier ou le troisième quadrant a une **cotangente positive**.

Autrement dit, tout angle de côté origine oa et de côté extrémité dans le premier ou le troisième quadrant a une cotangente positive: le prolongement de son côté extrémité coupe l'axe X' en une graduation positive. C'est le cas, par exemple, pour l'angle $\widehat{aOm}$ (ou l'arc $\widehat{am}$) et pour l'angle $\widehat{aOm'}$ (ou l'arc $\widehat{am'}$).

Ainsi,

$$\cotg \alpha > 0 = (0 < \alpha < 90^\circ \text{ et } 180^\circ < \alpha < 270^\circ)$$

Tout arc d'origine a et d'extrémité dans le deuxième ou le quatrième quadrant a une **cotangente négative**.

Autrement dit, tout angle d'origine oa et de côté extrémité dans le deuxième ou le quatrième quadrant a une cotangente négative, puisque le prolongement de son côté extrémité coupe l'axe X' en une graduation négative.

C'est le cas, par exemple, de l'angle $\widehat{aOn}$ (ou de l'arc $\widehat{an}$) et de l'angle $\widehat{aOn'}$ (ou de l'arc $\widehat{an'}$).

Ainsi,

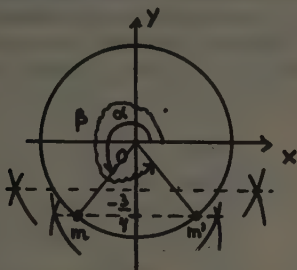
$$\cotg \alpha < 0 \Leftrightarrow (90^\circ < \alpha < 180^\circ \text{ et } 270^\circ < \alpha < 360^\circ)$$

Exemples de recherche d'angles connaissant un de leurs nombres trigonométriques

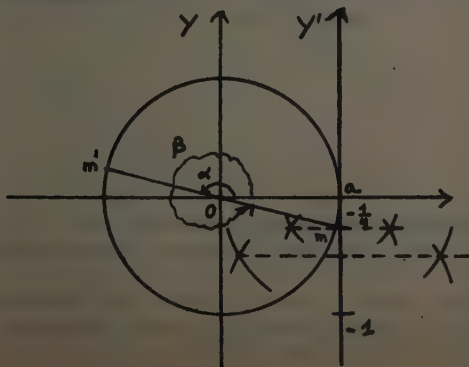
Déterminer les angles α et β , de mesure comprise entre 0° et 360° , dont le sinus vaut $-\frac{3}{4}$.

On prend la valeur $-\frac{3}{4}$ sur l'axe Y (axe sur lequel se mesure le sinus d'un angle) et on cherche les points du cercle trigonométrique d'ordonnée égale à $-\frac{3}{4}$.

On joint ces points au centre du cercle et on obtient ainsi les côtés extrêmes des angles dont le sinus vaut $-\frac{3}{4}$.



Soit à déterminer les angles α et β , de mesure comprise entre 0° et 360° dont la tangente vaut $-\frac{1}{4}$.



On prend le point à la graduation $-1/4$ sur l'axe Y' , où se mesure la tangente d'un angle.

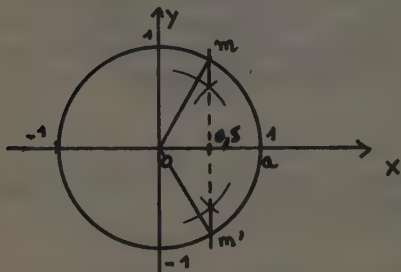
On joint ce point au centre du cercle et on obtient ainsi les côtés extrémités des angles cherchés.

Les points d'intersection avec le cercle de la droite joignant le centre du cercle au point à la graduation $-1/4$ sur l'axe Y' sont les points extrémités des arcs dont la tangente égale $-1/4$.

Soit à déterminer les angles, de mesure comprise entre 0° et 360° , dont le cosinus vaut $1/2$ ($= 0,5$).

On prend la valeur $1/2$ sur l'axe X (où se mesure le cosinus d'un angle). On détermine les points du cercle trigonométrique d'abscisse égale à $1/2$.

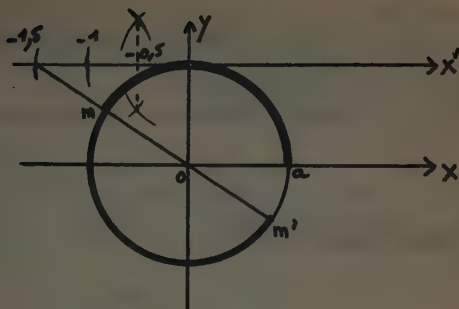
On joint ces points au centre du cercle et on obtient ainsi les côtés extrémités des angles (de côté origine oa) dont le cosinus vaut $1/2$.



Soit à déterminer les arcs dont la cotangente vaut $-1,5$.

On prend le point sur la graduation $-1,5$ de l'axe où se mesure la cotangente (axe X').

On joint ce point à l'origine du cercle. Les deux points d'intersection de cette droite ainsi tracée avec le cercle trigonométrique sont les extrémités des arcs (d'origine a), dont la cotangente vaut $-1,5$.



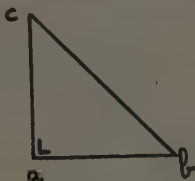
Des propriétés des nombres trigonométriques

Propriété fondamentale

$$\forall \alpha, \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

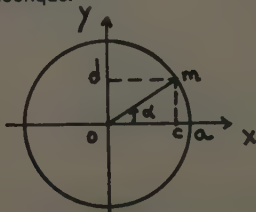
C'est une conséquence du théorème du Pythagore: «Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des mesures des côtés de l'angle droit est égal au carré de la mesure de l'hypoténuse (le troisième côté)».

$$\overline{ac}^2 + \overline{ab}^2 = \overline{bc}^2 *$$



Démonstration de la propriété:

Soit un angle α ($\widehat{aom}$) quelconque.



D'après Pythagore, $\overline{oc}^2 + \overline{cm}^2 = \overline{om}^2 (*)$ (triangle rectangle ocm).

Or, $\overline{oc} = \cos \alpha$, $\overline{cm} = \overline{od} = \sin \alpha$, $\overline{om} = \text{rayon du cercle trigonométrique} = 1$.

D'où, en remplaçant dans (*), on obtient: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

* on peut aussi noter $\left| \begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix} \right|$ (norme de ac)

Utilisation de la propriété: connaissant le sinus d'un angle, on peut déterminer le cosinus de cet angle ou inversement, connaissant le cosinus d'un angle, on peut déterminer le sinus de cet angle.

Exemple: On donne $\sin 75^\circ = 0,9659258$. On demande $\cos 75^\circ$.

On sait que

$$\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ = 1 \Leftrightarrow \cos^2 75^\circ = 1 - \sin^2 75^\circ$$

$$\cos 75^\circ = +\sqrt{1 - \sin^2 75^\circ} \text{ (+ parce que le cosinus de } 75^\circ \text{ est positif)}$$

$$\cos 75^\circ = \sqrt{1 - 0,9330127} = \sqrt{0,0669873} = 0,258819$$

Autres relations entre les nombres trigonométriques d'un angle

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$$

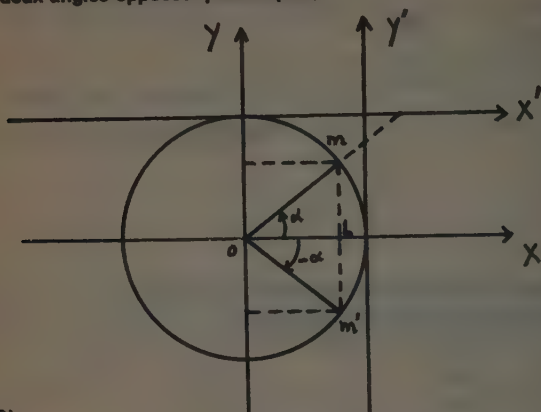
$\Rightarrow$

$$\boxed{\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha}}$$

Relations entre les nombres trigonométriques d'angles associés

Soit deux angles opposés quelconques, α et $-\alpha$.



On a :

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

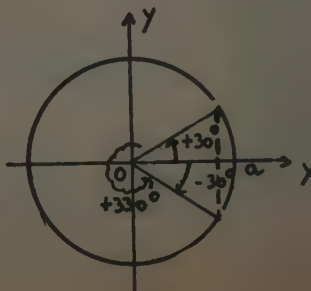
Soit, par exemple, $\alpha = 30^\circ$ et $\beta = 330^\circ$. Ces angles sont opposés; en effet $330^\circ = -30^\circ$ (selon qu'on prend le sens positif ou négatif de mesure des angles).

On aura: $\cos 30^\circ = \cos 330^\circ$,

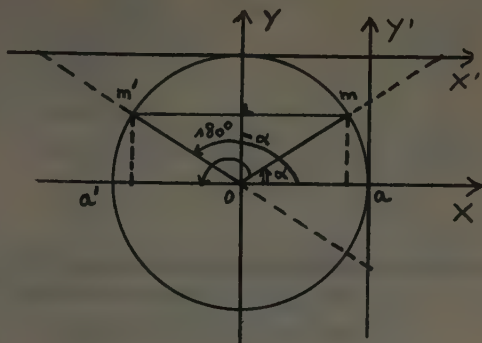
$\sin 30^\circ = -\sin(330^\circ)$,

$\operatorname{tg} 30^\circ = -\operatorname{tg} 330^\circ$,

$\operatorname{cotg} 30^\circ = -\operatorname{cotg} 330^\circ$.



Soit deux angles supplémentaires quelconques, α et $180^\circ - \alpha$.



Deux angles supplémentaires sont deux angles dont la somme est égale à 180° (ou π radians).

Par exemple, 12° et 168° sont supplémentaires, de même que 95° et 75° .

On a :

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$(\cos \widehat{aom'} = -\cos \widehat{aom})$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$(\sin \widehat{aom'} = \sin \widehat{aom})$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{cotg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

Remarque: tous les angles doivent être considérés en prenant leur côté origine en oa .

Si $\widehat{aom}$ est l'angle α , $\widehat{moa'}$ vaudra $180^\circ - \alpha$. Il faut alors «placer» le côté origine om de cet angle en oa .

Le côté extrémité «ira» alors en om' , où m' est le symétrique de m par rapport à Y .

$\widehat{aom'}$ est bien un angle de $180^\circ - \alpha$: il «manque» bien α (angle $\widehat{om'a'}$) pour avoir 180° .

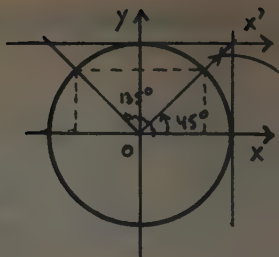
Soit, par exemple, les angles $\alpha = 45^\circ$ et $\beta = 135^\circ$. Ces deux angles sont supplémentaires ($45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$).

On a: $\sin 45^\circ = \sin 135^\circ$

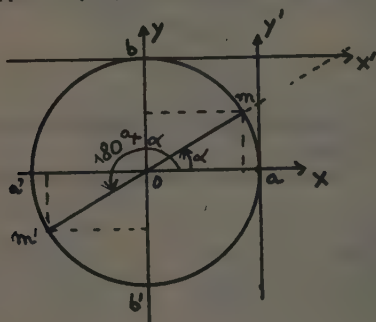
$\cos 45^\circ = -\cos 135^\circ$

$\operatorname{tg} 45^\circ = -\operatorname{tg} 135^\circ$

$\operatorname{cotg} 45^\circ = -\operatorname{cotg} 135^\circ$



Sont deux angles (quelconques) diamétralement opposés, α et $180^\circ + \alpha$.



Des angles diamétralement opposés sont deux angles dont la différence est égale à 180° . Par exemple, 23° et 203° sont diamétralement opposés.

On a:

$$\cos \alpha = -\cos (180^\circ + \alpha)$$

$$(\cos \widehat{aom} = -\cos \widehat{aom'})$$

$$\sin \alpha = -\sin (180^\circ + \alpha)$$

$$(\sin \widehat{aom} = \sin \widehat{aom'})$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (180^\circ + \alpha)$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} (180^\circ + \alpha)$$

Remarque: les côtés extrémités de deux angles diamétralement opposés sont des parties d'un même diamètre.

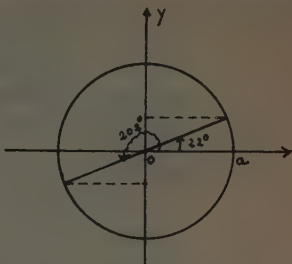
Soit, par exemple, les angles $\alpha = 22^\circ$ et $\beta = 202^\circ$. Ces deux angles sont diamétralement opposés, leurs côtés extrémités sont sur un même diamètre du cercle, ($202^\circ - 22^\circ = 180^\circ$).

On a: $\cos 22^\circ = -\cos 202^\circ$

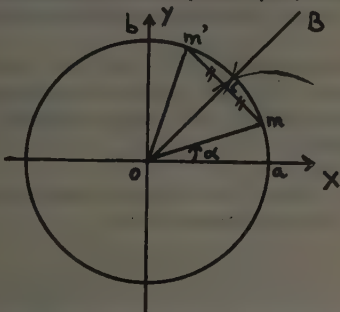
$\sin 22^\circ = -\sin 202^\circ$

$\operatorname{tg} 22^\circ = \operatorname{tg} 202^\circ$

$\operatorname{cotg} 22^\circ = \operatorname{cotg} 202^\circ$



Soit deux angles complémentaires quelconques, α et $90^\circ - \alpha$.



Deux angles complémentaires sont deux angles dont la somme est égale à 90° .

Construction des angles α et $90^\circ - \alpha$, de côtés origines oa : soit $\alpha = \widehat{aom}$. B est la bissectrice de aob , c'est-à-dire la droite qui partage $\widehat{aob}$ en deux angles égaux.

m' est le symétrique de m par rapport à B . mes $\widehat{aom'} = 90^\circ - \alpha$.

On a:

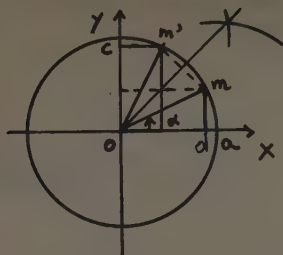
$$\cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{cotg} (90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

Démonstration de $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.



Considérons les deux triangles rectangles ocm' et odm .

Ils ont: $om = om' = 1$: rayon du cercle trigonométrique et $\widehat{om} = \widehat{m'oc} = \alpha$: par construction

Ces deux triangles rectangles, l'un en c , l'autre en d , ont donc l'hypothénuse égale et un angle aigu égal. Ils sont donc égaux et tous leurs éléments sont dès lors égaux chacun à chacun; en particulier, $oc = od$. Mais $oc = \sin(90^\circ - \alpha)$ et $od = \cos \alpha$.

D'où $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

Toutes les démonstrations de ces propriétés peuvent se faire à l'aide des cas d'égalité* des triangles rectangles.

Remarques

Les relations entre les nombres trigonométriques d'angles associés se retrouvent facilement à l'aide du dessin du cercle trigonométrique et des angles en question et à l'aide des définitions des nombres trigonométriques considérés.

Ces relations permettent de «réduire un angle au premier quadrant», c'est-à-dire de se ramener à un angle de mesure comprise entre 0° et 90° . Ainsi, par exemple, déterminer le cosinus de 225° revient à déterminer $-\cos 45^\circ$ (45° est diamétralement opposé à 225° et les cosinus de deux angles diamétralement opposés sont opposés).

* d'isométrie.

Théorèmes d'addition

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta - 1}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \alpha + 1}{\operatorname{cotg} \beta - \operatorname{cotg} \alpha}$$

Remarque: Les formules donnant $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ et $\operatorname{cotg}(\alpha - \beta)$ peuvent être retrouvées respectivement à partir des formules donnant $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ et $\operatorname{cotg}(\alpha + \beta)$, en considérant $\alpha - \beta$ comme $\alpha + (-\beta)$ et en tenant compte alors des relations entre les fonctions trigonométriques d'angles opposés.

Par exemple, $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cdot (-\sin \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.

Nombres trigonométriques du double d'un angle

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

ou $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

ou $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha} = \frac{\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{2}$$

Remarques:

Ces formules peuvent être obtenues à partir des formules d'addition, en considérant 2α comme $\alpha + \alpha$.

Ces formules établissent un lien entre les nombres trigonométriques d'un angle quelconque et les nombres trigonométriques de la moitié de cet angle. On peut ainsi, par exemple, exprimer $\sin \alpha$ en fonction de $\sin \alpha/2$, ou $\sin 4\alpha$ en fonction de $\sin 2\alpha$, etc...

Formules de Simpson

Elles transforment une somme de nombres trigonométrisés en un produit de nombres trigonométriques.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Exemples d'utilisation des propriétés des nombres trigonométriques

Soit à déterminer $\operatorname{tg} 35^\circ$, sachant que $\sin 35^\circ = 0,5735764$

$$1^\circ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \forall\alpha \Rightarrow \operatorname{tg} 35^\circ = \frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ} = \frac{0,5735764}{\cos 35^\circ}$$

$$2^\circ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\cos^2 35^\circ + \sin^2 35^\circ = 1 \Rightarrow \cos^2 35^\circ = 1 - \sin^2 35^\circ$$

$$\cos^2 35^\circ = 1 - (0,5735764)^2 = 1 - 0,3289899$$

$$\cos^2 35^\circ = 0,6710101 \Rightarrow \cos 35^\circ = +\sqrt{0,6710101}$$

(+ parce que le cosinus de 35° est positif)

$$\cos 35^\circ = +0,8191521$$

$$3^\circ \text{ Dès lors, } \operatorname{tg} 35^\circ = \frac{0,5735764}{0,8191521} = 0,7002074$$

Soit à déterminer $\sin(-22^\circ)$, sachant que $\sin 22^\circ = 0,3746066$.

Comme -22° et 22° sont des angles opposés, $\sin(-22^\circ) = -\sin 22^\circ \Rightarrow \sin(-22^\circ) = -0,3746066$.

Soit à déterminer $\cos 28^\circ$, sachant que $\sin 62^\circ = 0,8829476$.

62° et 28° sont des angles complémentaires.

$$\sin 62^\circ = \cos 28^\circ \Rightarrow \cos 28^\circ = 0,8829476$$

Soit à déterminer $\cos(-48^\circ)$, sachant que $\cos 132^\circ = -0,6691306$.

$$1^\circ \cos(-48^\circ) = \cos 48^\circ$$

2° 48° et 132° sont des angles supplémentaires

$$\cos 48^\circ = -\cos 132^\circ \Rightarrow \cos 48^\circ = -(-0,6691306) \Rightarrow \cos 48^\circ = 0,6691306$$

$$3^\circ \text{ D'où } \cos(-48^\circ) = 0,6691306$$

Soit à déterminer $\cos 75^\circ$.

$$\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ$$

(formule: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$)

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0,258819$$

Soit à déterminer $\sin 210^\circ$.

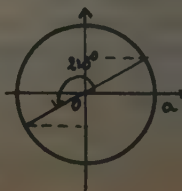
$$1^\circ \sin 210^\circ = \sin(270^\circ - 60^\circ) = \sin 270^\circ \cdot \cos 60^\circ - \cos 270^\circ \cdot \sin 60^\circ$$

(formule: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$)

$$= -1 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}$$

ou 2° D'après le dessin, on voit que $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ$
(les angles 210° et 30° sont diamétralement opposés)

$$\text{Or, } \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$$



Soit à déterminer $\sin 88^\circ$, sachant que $\sin 44^\circ = 0,6946584$.

$$1^\circ \quad \sin 88^\circ = \sin(2 \cdot 44^\circ) = 2 \cdot \sin 44^\circ \cdot \cos 44^\circ$$

$$(\text{formule: } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$= 2 \cdot 0,6946584 \cdot \cos 44^\circ$$

$$2^\circ \quad \sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ = 1$$

$$\cos 44^\circ = +\sqrt{1 - \sin^2 44^\circ} = \sqrt{1 - 0,4825503} = \sqrt{0,5174497} = 0,7193398$$

$$3^\circ \quad \text{De là, } \sin 88^\circ = 2 \cdot 0,6946584 \cdot 0,7193398 = 0,9993908$$

Soit à déterminer $\text{tg} 40^\circ$, sachant que $\text{tg} 20^\circ = 0,3639702$

$$\text{tg } 40^\circ = \text{tg}(2 \cdot 20^\circ) = \frac{2 \cdot \text{tg} 20^\circ}{1 - \text{tg}^2 20^\circ} \quad (\text{formule: } \text{tg} 2\alpha = \frac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha})$$

$$= \frac{2 \cdot 0,3639702}{1 - 0,13244743} = \frac{0,7279404}{0,8675257} = 0,8390995$$

Des propriétés des triangles

Introduction

Comme la trigonométrie plane étudie les relations métriques entre les éléments de figures planes déterminées par des segments de droite et comme ces figures sont toutes décomposables en triangles, la «résolution» des triangles est très importante.

Résoudre un triangle consiste à déterminer tous ses éléments à partir d'un certain nombre d'entre eux, suffisant pour que le triangle puisse être univoquement déterminé.

Un triangle est déterminé lorsque trois de ses éléments, dont au moins un côté, sont connus, (la connaissance d'un côté peut être remplacée par celle de l'aire du triangle).

Formules relatives au triangle rectangle

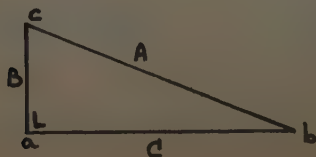
Notation - Vocabulaire

On note A, B, C les mesures des côtés opposés respectivement aux angles de sommet a, b, c .

On dit que l'angle b et le côté de l'angle droit C sont adjacents. De même pour l'angle c et le côté B de l'angle droit.

On appelle A , le côté opposé à l'angle droit, l'hypoténuse du triangle rectangle.

b et c , angles de sommets b et c , sont les angles aigus du triangle rectangle.



Enoncés des propriétés**Théorème de Pythagore**

Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.

$$B^2 + C^2 = A^2$$

La somme des angles aigus d'un triangle rectangle est égale à 90° .

$$\hat{b} + \hat{c} = 90^\circ$$

Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au quotient du côté opposé à l'angle par l'hypoténuse.

$$\sin \hat{b} = \frac{B}{A}$$

$$\sin \hat{c} = \frac{C}{A}$$

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient du côté adjacent à l'angle par l'hypoténuse.

$$\cos \hat{b} = \frac{C}{A}$$

$$\cos \hat{c} = \frac{B}{A}$$

Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est égale au quotient du côté opposé à l'angle par le côté adjacent.

$$\operatorname{tg} \hat{b} = \frac{B}{C}$$

$$\operatorname{tg} \hat{c} = \frac{C}{B}$$

Remarque: tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle.

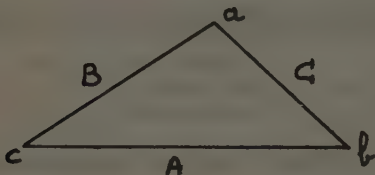
En effet, comme un angle inscrit a pour mesure la moitié de l'angle au

centre interceptant le même arc, la mesure de l'angle $\widehat{ama'}$, par exemple, vaut la moitié de $\widehat{aoa'}$,

c'est-à-dire $\widehat{ama'} = \frac{1}{2} \widehat{aoa'} = \frac{1}{2} 180^\circ = 90^\circ$

Formules relatives au triangle quelconque

Notation



Enoncés des propriétés

La somme des angles d'un triangle est égale à 180° .

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$$

Dans tout triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés et de l'opposé du double produit de ces côtés par le cosinus de l'angle qu'ils forment.

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2 \cdot B \cdot C \cdot \cos \hat{a}$$

$$B^2 = C^2 + A^2 - 2 \cdot C \cdot A \cdot \cos \hat{b}$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos \hat{c}$$

Règle des sinus:

Dans tout triangle, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés à ces côtés.

$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

Remarques:

Le facteur de proportionnalité est le diamètre, $2R$, du cercle circonscrit au triangle.

$$\text{Ainsi, } \frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c} = 2 \cdot R$$

De la règle des sinus, on peut déduire:

$$\frac{A}{B} = \frac{\sin a}{\sin b}; \frac{B}{C} = \frac{\sin b}{\sin c}; \frac{C}{A} = \frac{\sin c}{\sin a}$$

Deux côtés d'un triangle sont entre eux comme le sinus des angles opposés (c'est-à-dire que le rapport de deux côtés est égal au rapport des sinus des angles opposés à ces côtés).

Exemples de résolutions de triangles

Soit à résoudre le triangle abc , sachant qu'il est rectangle en b , que $ab = 15$ m et que $c = 30^\circ$.

Il faut donc déterminer ac , bc et $\hat{a}$.

Comme $\hat{a} + \hat{c} = 90^\circ$, on a: $\hat{a} = 90^\circ - \hat{c} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ (dans un triangle rectangle, la somme des angles aigus est égale à 90°)

$$\text{Comme } \operatorname{tg} \hat{a} = \frac{A}{C} = \frac{bc}{ba}, \text{ on a : } \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{bc}{15}$$

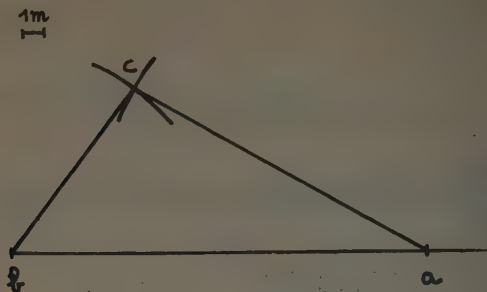
$$\Rightarrow bc = 15 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 15 \cdot 3 = 45$$

(la tangente d'un angle aigu d'un triangle rectangle est égale au quotient du côté opposé à l'angle par le côté adjacent).

$$\text{Comme } ab^2 + bc^2 = ac^2, \text{ on a : } 15^2 + 45^2 = ac^2 = 225 + 2025 = 2250 \Rightarrow$$

$$ac = \sqrt{2250} \simeq 47,43$$

Soit à résoudre le triangle abc , sachant que $ab = 20$ m, $bc = 10$ m et $ac = 16$ m.



$$\text{On a: } A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos \hat{a}$$

$$bc^2 = ac^2 + ab^2 - 2ac \cdot ab \cos \hat{a}$$

$$100 = 256 + 400 - 2 \cdot 16 \cdot 20 \cdot \cos \hat{a}$$

$$2 \cdot 16 \cdot 20 \cdot \cos a = 256 + 400 - 100$$

$$640 \cos a = 556$$

$$\cos a = \frac{556}{640} \Rightarrow \cos a = 0,86875 \Rightarrow \hat{a} \simeq 29^\circ 41'$$

$$\text{D'autre part, } B^2 = C^2 + A^2 - 2 \cdot C \cdot A \cos \hat{b}$$

$$2 \cdot C \cdot A \cdot \cos \hat{b} = C^2 + A^2 - B^2$$

$$2 \cdot 16 \cdot 10 \cos \hat{b} = 16^2 + 10^2 - 20^2$$

$$320 \cos \hat{b} = 256 + 100 - 400$$

$$320 \cos \hat{b} = -44 \Rightarrow \cos \hat{b} = -\frac{44}{320} = -0,1375 \Rightarrow \hat{b} = 97^\circ 54'$$

$$\text{Comme } \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ, \text{ on a: } 29^\circ 41' + 97^\circ 54' + \hat{c} = 180^\circ$$

$$127^\circ 35' + \hat{c} = 180^\circ \Rightarrow \hat{c} = 180^\circ - 127^\circ 35' \Rightarrow \hat{c} = 52^\circ 25'$$

De quelques applications typiques des propriétés des triangles

Mesure de la hauteur d'un arbre (d'un poteau, d'un immeuble,... etc.).

On évalue l'angle sous lequel on voit le sommet de l'arbre, angle o , (grâce à un théodolite), et la distance, C , du point o au tronc de l'arbre.

Un triangle se dessine; il est rectangle en b , puisque l'arbre est perpendiculaire au sol. De ce triangle, on connaît un angle aigu et un côté de l'angle droit.



Dans le triangle obc , on a: $\text{tg } o = \frac{A}{C}$

(la tangente d'un angle aigu d'un triangle rectangle est égale au quotient du côté opposé par le côté adjacent)

$$A = C \cdot \text{tg } o$$

On trouve la valeur $\text{tg } o$ par machine ou à l'aide de tables.

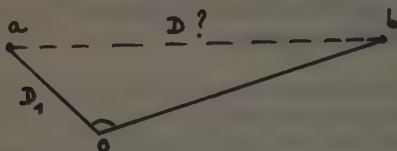
On obtient donc la hauteur de l'arbre $H = A + R$, où R est la hauteur à laquelle se trouve l'œil de l'observateur placé en o .

Distance entre deux points visibles mais non accessibles

Soit à déterminer, par exemple, la distance entre deux points a et b séparés par un marécage.

On choisit un point o d'où l'on peut apercevoir à la fois a et b et tel qu'on puisse mesurer la distance oa , soit D_1 (ou ob).

Au moyen d'un théodolite, on mesure les angles o et b .



Par le théorème des sinus, si l'on considère le triangle quelconque aob ,

$$\text{on a : } \frac{\sin \hat{b}}{\sin \hat{o}} = \frac{D}{D_1}$$

(le rapport de deux côtés d'un triangle est égal au rapport des sinus des angles opposés à ces côtés)

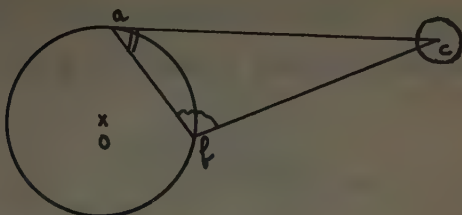
$$D = \frac{\sin \hat{o}}{\sin \hat{b}} \cdot D_1$$

(on détermine $\sin \hat{o}$ et $\sin \hat{b}$ avec une machine ou à l'aide de tables trigonométriques).

Distance entre la terre et un corps céleste pas trop éloigné

On observe le corps céleste à partir de deux points a et b de la surface de la terre, dont la distance qui les sépare est connue.

Le corps céleste est perçu dans deux directions différentes faisant avec la



base ab des angles mesurables $\hat{a}$ et $\hat{b}$.

On peut alors calculer tous les éléments du triangle abc et donc déterminer les distances inconnues ac et bc .

$$\hat{c} = 180^\circ - (\hat{a} + \hat{b})$$

$$\frac{\sin \hat{c}}{\sin \hat{a}} = \frac{ab}{bc} \Rightarrow bc = \frac{\sin \hat{a}}{\sin \hat{c}} \cdot ab$$

$$\frac{\sin \hat{c}}{\sin \hat{b}} = \frac{ab}{ac} \Rightarrow ac = \frac{\sin \hat{b}}{\sin \hat{c}} \cdot ab$$

Des équations trigonométriques à une inconnue, quelques cas

Définition

Une équation trigonométrique à une inconnue est une équation où l'inconnue apparaît dans des nombres trigonométriques.

Solution d'une équation trigonométrique

Une fonction trigonométrique est telle qu'un angle quelconque ne peut avoir qu'un seul sinus, un seul cosinus, une seule tangente et une seule cotangente. La réciproque n'est pas vraie: une valeur donnée d'une fonction trigonométrique (c'est-à-dire à un nombre trigonométrique donné) correspondent une infinité d'angles (ou d'arcs), c'est-à-dire qu'un sinus est le sinus d'une infinité d'angles, et de même pour un cosinus, une tangente et une cotangente.

Ainsi, les équations trigonométriques à une inconnue ont une infinité de solutions.

Par exemple, l'angle $\alpha = 30^\circ$ a

une seule image par la fonction sinus, $\sin 30^\circ = 0,5$,

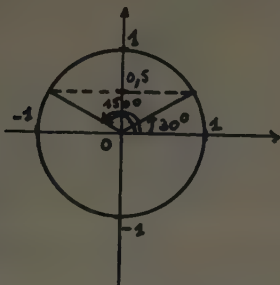
une seule image par la fonction cosinus, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

une seule image par la fonction tangente, $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

et une seule image par la fonction cotangente, $\operatorname{cotg} 30^\circ = \sqrt{3}$.

Mais il y a une infinité d'angles dont le sinus vaut 0,5.

En effet, $\sin 30^\circ = 0,5$; $\sin 150^\circ = 0,5$; $\sin 390^\circ = 0,5$; $\sin 510^\circ = 0,5$; ...etc.



Equations fondamentales

On appelle équation trigonométrique fondamentale, une équation du type $\cos x = r$, $\sin x = r$, $\operatorname{tg} x = r$, $\operatorname{cotg} x = r$, où $r \in \mathbb{R}$ (r est un nombre réel).

Pour résoudre une telle équation, on détermine d'abord graphiquement les angles α tels que $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ qui vérifient cette équation (s'ils existent!) et, ensuite, on déduit de ces solutions particulières toutes les autres solutions.

Exemples de résolutions d'équations fondamentales

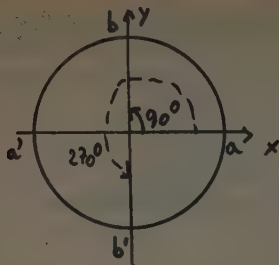
$\cos x = 0$

Résoudre cette équation revient à chercher tous les angles dont le cosinus vaut zéro.

On sait (voir cercle trigonométrique) que: $\cos 90^\circ = 0$ et $\cos 270^\circ = 0$ (ou, $\cos(-90^\circ) = 0$).

En effet, l'abscisse de b est égale à zéro et l'abscisse de b' est égale à zéro. En fait, tous les angles dont le côté extrémité est soit ob , soit ob' vérifient l'équation.

On peut donc faire autant de tours du cercle que l'on veut (autant de fois 360°), et ce dans le sens positif, ou dans le sens négatif, à condition que l'extrémité de l'arc «arrive» en b ou en b' .



Les solutions de l'équation $\cos x = 0$ sont données par les formules:

$$x = k \cdot 360^\circ + 90^\circ, \text{ avec } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\text{et } x = k \cdot 360^\circ - 90^\circ, \text{ avec } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(remarque: $k \cdot 360^\circ$ indique le nombre de tours complets de la circonférence que l'on a fait. Si k est positif, cela indique qu'on a tourné dans le sens positif de mesure des angles, si k est négatif, cela indique qu'on a tourné dans le sens négatif de mesure des angles).

L'ensemble des solutions est donc:

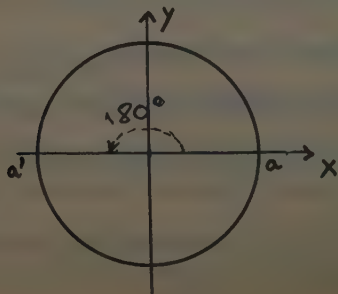
$$\{\text{angles } x \mid x = k \cdot 360^\circ + 90^\circ \text{ ou } x = k \cdot 360^\circ - 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

$\sin x = 0$

On sait que $\sin 0^\circ = 0$ et que $\sin 180^\circ = 0$

En effet, l'ordonnée de a vaut zéro et l'ordonnée de a' vaut 0

En fait, tous les angles dont le côté extrémité est soit oa , soit oa' vérifient l'équation.



On peut donc considérer comme solution de l'équation tout angle dont le côté extrémité est oa ou oa' . Ces angles seront donc des multiples de 180° , que l'on pourra mesurer dans le sens positif ou dans le sens négatif. Les solutions de l'équation $\sin x = 0$ sont donc données par la formule:

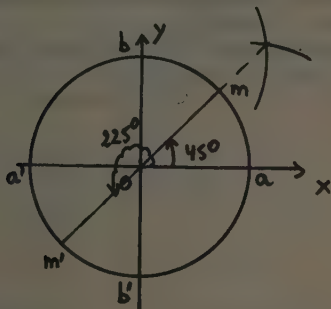
$$x = k \cdot 180^\circ, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(si $k = 0$, il s'agit de l'angle de mesure 0° et $\sin 0^\circ = 0$; si $k = 1$, il s'agit de l'angle de mesure 180° et $\sin 180^\circ = 0$; si $k = -1$, il s'agit de l'angle de mesure -180° et $\sin(-180^\circ) = 0$; si $k = 10$, il s'agit de l'angle de mesure 1800° , dont le côté extrémité est oa ; l'ordonnée de a est bien 0; si $k = 11$, il s'agit de l'angle de mesure 1980° , dont le côté extrémité est oa' ; l'ordonnée de a' vaut bien 0).

$\operatorname{tg} x = 1$

On sait que $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ et que $\operatorname{tg} 225^\circ = 1$ (voir cercle trigonométrique).

En fait, tous les angles dont le côté extrémité est soit om , soit om' vérifient l'équation.



On voit que pour que l'extrémité d'un arc soit m ou m' , il suffit d'ajouter 45° à un arc dont l'extrémité est a ou a' .

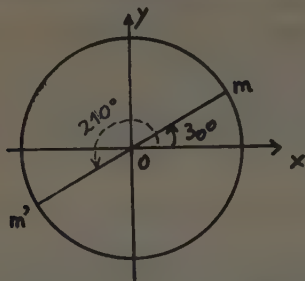
Les solutions de l'équation $\operatorname{tg} x = 1$ sont donc données par la formule:

$$x = k \cdot 180^\circ + 45^\circ, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\cotg x = \sqrt{3}$$

On sait que $\cotg 30^\circ = \sqrt{3}$ et on voit sur le cercle trigonométrique que $\cotg(180^\circ + 30^\circ) = \cotg 210^\circ = \cotg 30^\circ = \sqrt{3}$.

En fait, tous les angles dont le côté extrémité est soit om , soit om' vérifient l'équation.



Pour que le côté extrémité d'un angle soit om ou om' , il suffit de prendre un angle dont le côté extrémité est soit oa , soit oa' (c'est-à-dire un multiple de 180°) et d'ajouter 30° à cet angle.

Les solutions de l'équation $\cotg x = \sqrt{3}$ sont donc données par la formule:

$$x = k \cdot 180^\circ + 30^\circ, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Exemples de résolutions d'équations du type $\cos ax = b$, $\sin ax = b$, $\operatorname{tg} ax = b$, $\operatorname{cotg} ax = b$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

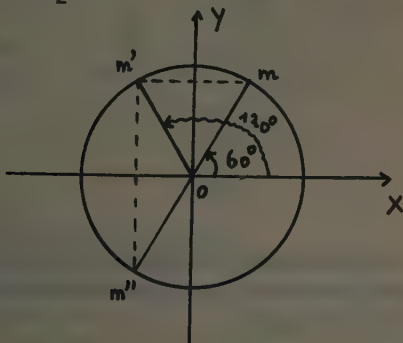
Comme $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, on aura $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

(voir cercle trigonométrique: 120° est le supplémentaire de 60° et les cosinus de deux angles supplémentaires sont opposés).

On voit également que $\cos (180^\circ + 60^\circ) = \cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$

Ainsi, tous les angles dont le côté extrémité est soit om' , soit om'' vérifient

l'équation $\cos = -\frac{1}{2}$.



Pour que le côté extrémité d'un angle soit om , il suffit de prendre un angle dont le côté extrémité est oa et d'ajouter 120 à cet angle. Pour que le côté extrémité d'un angle soit om' , il suffit de prendre un angle dont le côté extrémité est oa et de retrancher 120° de cet angle.

Les solutions de l'équation seront dès lors déduites des formules suivantes:

$$2x = k \cdot 360^\circ + 120^\circ, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{et } 2x = k \cdot 360^\circ - 120^\circ, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Les solutions de l'équation $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ sont donc:

$$x = k \cdot 180^\circ + 60^\circ, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{et } x = k \cdot 180^\circ - 60^\circ, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

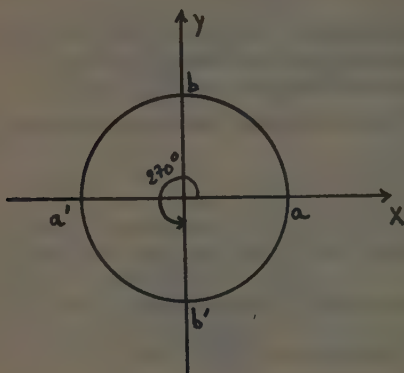
$$\sin 3x = -1$$

On sait que $\sin 270^\circ = -1$ (ou $\sin(-90^\circ)$)

Les angles dont le sinus vaut -1 sont donc des angles dont le côté extrémité est ob'.

On aura donc: $3x = k \cdot 360^\circ - 90^\circ$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Les solutions de l'équation $\sin 3x = -1$ sont dès lors: $x = k \cdot 120^\circ - 30^\circ$,
 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



Exemples de résolutions d'équations pouvant se mettre sous la forme d'une égalité de deux nombres trigonométriques

$$\cos 2x - \cos x = 0$$

Cette équation peut s'écrire $\cos 2x = \cos x$.

On sait que:

$$\cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow$$

soit $\alpha = \beta + k \cdot 360^\circ$ (les angles sont égaux à $k \cdot 360^\circ$ près)

soit $\alpha = -\beta + k \cdot 360^\circ$ (les angles sont opposés à $k \cdot 360^\circ$ près)

De ces relations, on peut déduire que $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ$, ou $\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ$.
 La condition nécessaire et suffisante pour que deux angles aient le même

cosinus est que leur somme ou leur différence soit un multiple de 360° .

On a donc: $2x = x + k \cdot 360^\circ$, ou $2x = -x + k \cdot 360^\circ$

$$\Rightarrow 2x - x = k \cdot 360^\circ \Rightarrow x = k \cdot 360^\circ, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{ou } 2x + x = k \cdot 360^\circ \Rightarrow 3x = k \cdot 360^\circ \Rightarrow x = k \cdot 120^\circ, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\cos 2x + \cos 6x = 0$$

Cette équation peut s'écrire $\cos 2x = -\cos 6x$

Comme $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, on a: $\cos(180^\circ - 6x) = -\cos 6x$ (les cosinus de deux angles supplémentaires sont opposés)

Or, $-\cos 6x = \cos 2x \Rightarrow \cos 2x = \cos(180^\circ - 6x)$

On peut donc conclure, comme les cosinus de $2x$ et de $180^\circ - 6x$ sont égaux, que:

$$2x = (180^\circ - 6x) + k \cdot 360^\circ \Rightarrow 2x + 6x = k \cdot 360^\circ + 180^\circ$$

$$\Rightarrow 8x = k \cdot 360^\circ + 180^\circ \Rightarrow x = k \cdot \frac{360^\circ}{8} + \frac{180^\circ}{8} = k \cdot 45^\circ + 22^\circ 30'$$

$$\text{ou, } 2x = -(180^\circ - 6x) + k \cdot 360^\circ \Rightarrow 2x = -180^\circ + 6x + k \cdot 360^\circ$$

$$\Rightarrow 2x - 6x = k \cdot 360^\circ - 180^\circ \Rightarrow -4x = k \cdot 360^\circ - 180^\circ$$

$$\Rightarrow x = -k \cdot \frac{360^\circ}{4} + \frac{180^\circ}{4} \Rightarrow x = -k \cdot 90^\circ + 45^\circ$$

$$\sin x - \cos 2x = 0$$

On peut écrire l'équation $\sin x = \cos 2x$

On sait que $\sin \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \alpha$ et β sont complémentaires.

On a donc: $x = 90^\circ - 2x = k \cdot 360^\circ$ ($+k \cdot 360^\circ$, parce que $\sin \alpha = \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ)$ et que $\cos \alpha = \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ)$)

De la relation précédente, on peut déduire les solutions de l'équation $\sin x = \cos 2x$.

$$x = 90^\circ - 2x + k \cdot 360^\circ \Rightarrow x + 2x = k \cdot 360^\circ + 90^\circ \Rightarrow 3x = k \cdot 360^\circ + 90^\circ \Rightarrow x = k \cdot 120^\circ + 30^\circ, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Vérifions, pour certaines valeurs de k , que $x = k \cdot 120^\circ + 30^\circ$ est solution de $\sin x - \cos 2x = 0$.

Si $k = 0$, alors $x = 0 \cdot 120^\circ + 30^\circ = 30^\circ$

$$\sin 30^\circ - \cos 2 \cdot 30^\circ = 0?$$

$$\frac{1}{2} - \cos 60^\circ = 0?$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Si $k = 1$, alors $x = 1 \cdot 120^\circ + 30^\circ = 150^\circ$

$$\sin 150^\circ - \cos 2 \cdot 150^\circ = 0?$$

Comme $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = 1/2$ (angles supplémentaires)

et $\cos 300^\circ = \cos 60^\circ = 1/2$ (angles opposés: $300^\circ = -60^\circ$),

$$\text{on a: } 1/2 - 1/2 = 0$$

Si $k = -1$, alors $x = -120^\circ + 30^\circ = -90^\circ$

$$\sin(-90^\circ) - \cos 2 \cdot (-90^\circ) = 0?$$

$$-1 - \cos(-180^\circ) = 0?$$

$$-1 - (-1) = 0?$$

$$0 = 0$$

QUATRIÈME PARTIE

Éléments de statistique descriptive

Des définitions

Introduction

La statistique est l'ensemble des méthodes scientifiques qui permettent de rassembler, de présenter, d'analyser, de résumer et d'interpréter des données; ainsi que de faire des prévisions à partir de ces données et d'en tirer des conclusions.

Population ou univers

Une population est un ensemble d'individus ou d'objets que l'on désire étudier du point de vue de certaines de leurs caractéristiques. Il faut que ces caractéristiques aient un sens pour tous les éléments de la population et donc que ceux-ci soient «du même type».

Exemple:

L'ensemble des pièces fabriquées par une machine.

L'ensemble des élèves d'une école.

Echantillon

Un échantillon est une partie (ou un sous-ensemble) d'une population. Comme il est presque toujours impossible d'observer tous les éléments d'une population, soit parce que celle-ci en comprend un trop grand nombre, soit parce que l'examen d'un élément le détruit (par exemple, la mesure de la durée de vie d'une ampoule électrique), on examine un échantillon de la population.

Effectif

L'effectif d'une population ou d'un échantillon est le nombre d'éléments appartenant à cette population ou à cet échantillon.

Variable

La variable est la propriété ou caractéristique que l'on choisit d'étudier dans un certain ensemble.

Exemples:

- la durée de vie d'une ampoule électrique;
- le revenu mensuel des habitants d'une région;
- le résultat obtenu à un examen;
- l'état civil des habitants adultes d'une ville.

On représente, en général, les variables par les lettres X , Y , Z ,...

Les valeurs possibles d'une variable forment l'ensemble appelé *domaine de la variable*.

Remarque: on peut étendre le concept de variable à des grandeurs non numériques. On peut donc, par exemple, considérer comme variable l'état d'une pièce fabriquée par une machine et qui prendra soit la valeur «bon» soit la valeur «défectueux»; on peut d'ailleurs décider de représenter l'état «bon» par 1 et l'état «défectueux» par 0.

Variable discrète

Une variable est discrète si elle ne peut prendre que des valeurs bien déterminées comprises entre deux valeurs (c'est-à-dire dans un certain intervalle de variabilité).

Remarque: les données discrètes sont, en général, des données obtenues par dénombrement.

Exemples: le nombre d'élèves par classe, la somme des points obtenus lorsqu'on lance trois dés, le nombre d'actions vendues chaque jour à la Bourse de Paris.

Variable continue

Une variable est continue si elle peut, en principe, dans une situation

idéale, prendre n'importe quelle valeur réelle comprise entre deux valeurs données.

Remarque: les données continues sont, en général, des données obtenues par des mesures.

Exemples: les revenus nationaux bruts des pays de la C.E.E., le diamètre des boulons fabriqués par une usine, les températures mesurées chaque jour du mois de décembre, la taille d'individus, le poids d'une série d'objets.

Répétition*

La répétition d'une valeur d'une variable est le nombre de fois que cette valeur est obtenue, vérifiée.

On note r_{x_i} la répétition de la valeur x_i prise par la variable X .

Exemple: voici les valeurs de la variable cote (/10) à la dernière interrogation d'anglais dans une classe de 5^e:

8 - 5 - 4 - 5,5 - 7 - 3 - 8,5 - 8 - 2 - 2 - 3 - 5,5 - 8 - 2 - 0 - 1 - 7,5 - 4 - 5 - 8 - 1,5.

Les valeurs possibles de la variable sont: 0, 0,5, 1, 1,5, ..., 10.

La répétition de la valeur 0 est 1 (il y a en effet une cote 0 dans la classe); la répétition de la valeur 0,5 est 0 (il n'y a en effet aucune cote égale à 0,5 dans la classe); la répétition de la valeur 1 est 1; la répétition de 1,5 est 1; la répétition de 2 est 3 (3 élèves ont en effet obtenu 2/10); ...etc.

Fréquence**

La fréquence d'une valeur est le rapport de sa répétition à l'effectif de la population considérée.

On ramène donc la population à une population de 1 élément. On tient aussi compte des «proportions». Le principe est le même pour le pourcentage, obtenu en ramenant la population à une population comprenant 100 éléments.

Ainsi, connaissant la répétition d'une valeur, c'est-à-dire le nombre de fois

* Aussi appelée *fréquence absolue*.

** Aussi appelée *fréquence relative*.

que cette valeur est vérifiée pour la population donnée, on détermine combien de fois cette valeur serait obtenue si la population comprenait 1 objet (fréquence) ou 100 objets (pourcentage).

Intérêt de la fréquence: grâce aux fréquences, on peut comparer la situation pour une même variable dans des populations d'effectifs différents.

Exemple: étudions la variable «résultat à l'examen de math.» dans trois populations formées des élèves de trois écoles A, B et C. Soit «réussite de l'examen», «échec à l'examen» et «examen non présenté» les valeurs possibles de la variable. Dans l'école A, comprenant 420 élèves, 300 ont réussi l'examen, 112 l'ont raté et 8 ne l'ont pas présenté. La fréquence de la valeur «réussite à l'examen» est, pour cette population,

égale à $\frac{300}{420}$, c'est-à-dire à 0,71.

Dans l'école B, comprenant 600 élèves, 320 ont réussi l'examen et 280 l'ont raté.

La fréquence de la valeur «réussite à l'examen» est, pour cette population,

égale à $\frac{320}{600}$, c'est-à-dire à 0,53.

Dans l'école C, comprenant 552 élèves, 251 ont réussi l'examen, 300 l'ont raté et 1 ne l'a pas présenté. La fréquence de la valeur «réussite à l'examen» est, pour cette population,

égale à $\frac{251}{552}$, c'est-à-dire environ 0,45.

On peut conclure que les meilleurs résultats sont obtenus par l'école A, population pour laquelle la fréquence de la valeur «réussite à l'examen» est la plus grande (0,71).

En se basant uniquement sur les répétitions, on aurait conclu, à tort, que l'école B avait les meilleurs résultats (répétition = 320)

Répétition cumulée

On appelle répétition cumulée d'une valeur d'une variable le nombre de fois que cette valeur et celles qui lui sont inférieures apparaissent.

On note r_{c_a} la répétition cumulée de la valeur a.

Exemple: reprenons l'exemple précédent.

Indiquons dans un tableau les différentes valeurs de la variable cote, leurs répétitions et leurs répétitions cumulées.

valeurs de la variable	répétitions	répétitions cumulées	valeurs de la variable	répétitions	répétitions cumulées
0	1	1	5 ^s	2	14
0 ^s	0	1*	6	0	14
1	1	2	6 ^s	0	14
1 ^s	1	3	7	1	15
2	3	6**	7 ^s	1	16
2 ^s	0	6	8	4	20***
3	2	8	8 ^s	1	21
3 ^s	0	8	9	0	21
4	2	10	9 ^s	0	21
4 ^s	0	10	10 ⁱ	0	21
5	2	12			

* Il y a une cote inférieure ou égale à 0,5: un 0

** Il y a six cotes inférieures ou égales à 2: un 0, un 1, un 1,5 et trois 2.

*** Il y a vingt cotes inférieures ou égales à 8: les seize inférieures ou égales à 7,5 et les quatre cotes égales à 8.

Fréquence cumulée

La fréquence cumulée d'une valeur d'une variable est le rapport de la répétition cumulée de cette valeur à l'effectif.

Si l'on reprend l'exemple précédent, la fréquence cumulée de la valeur 5 de la variable cote est 12/21. (12 parce que la répétition cumulée est 12 et 21 parce que l'effectif de la population est 21).

Intérêt de la répétition cumulée ou de la fréquence cumulée.

On connaît immédiatement la valeur la plus grande prise par la variable: c'est celle pour laquelle la répétition cumulée est égale à l'effectif, ou pour laquelle la fréquence cumulée est égale à 1. En effet, comme la répétition cumulée d'une valeur indique combien de fois se répètent cette valeur et

celles qui lui sont inférieures, si elle vaut l'effectif, cela signifie que tous les éléments de la population ont déjà été pris en considération.

On peut savoir «où» se situe la majorité de la population pour la variable considérée: la première valeur de la variable pour laquelle la répétition cumulée est supérieure à la moitié de l'effectif de la population (ou pour laquelle la fréquence cumulée est supérieure à 0,5 ou encore pour laquelle le pourcentage cumulé est supérieur à 50) indique que la majorité de la population prend, pour la variable considérée, des valeurs inférieures à celle-là.

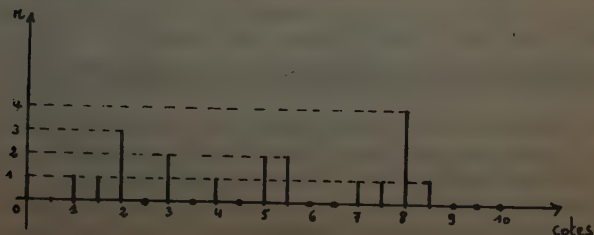
On peut connaître directement le nombre d'éléments (ou le pourcentage) de la population pour lesquels la valeur de la variable est inférieure ou égale à une valeur donnée: il suffit de regarder la répétition cumulée (ou le pourcentage cumulé, égal à cent fois la fréquence cumulée) de cette dernière valeur.

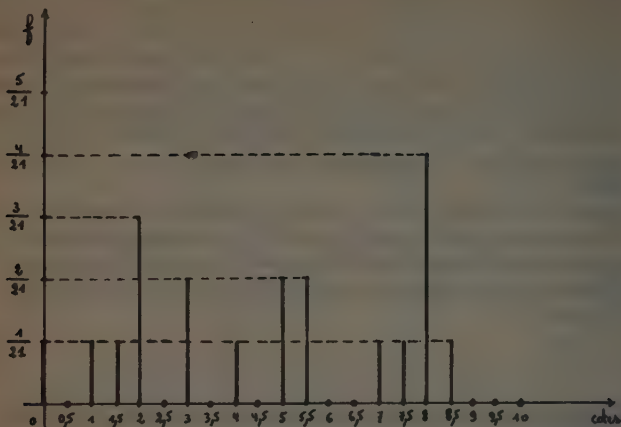
Diagramme en bâtonnets de la distribution des répétitions ou des fréquences

On prend deux axes perpendiculaires. On indique en abscisse (axe horizontal) les valeurs possibles de la variable considérée et en ordonnée (axe verticale) les répétitions ou les fréquences de ces valeurs (on peut aussi y mettre les pourcentages).

Le diagramme de la distribution des répétitions (ou des fréquences) est constitué des «bâtonnets» dont les bases sont les différentes valeurs de la variable et les hauteurs les répétitions (ou fréquences) de ces valeurs.

Exemple: reprenons l'exemple précédent des cotes sur 10. On obtient les diagrammes suivants:





Les deux diagrammes ont évidemment la même «forme», puisque pour passer des répétitions des valeurs aux fréquences de ces mêmes valeurs, on divise les premières par l'effectif de la population.

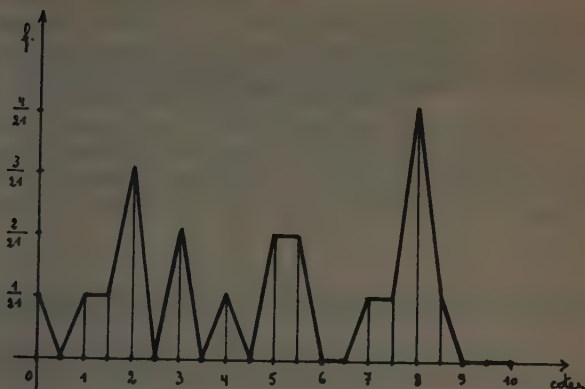
Ainsi, si on gardait la même unité, on obtiendrait, dans le cas du diagramme des fréquences, des bâtonnets n fois plus petits, si n est l'effectif, que dans le cas du diagramme des répétitions.

Remarque: on peut aussi établir le diagramme de la distribution des répétitions cumulées ou des fréquences cumulées.

Polygone des répétitions ou des fréquences

On appelle polygone des répétitions (ou des fréquences) le polygone obtenu en joignant deux à deux les «sommets» des bâtonnets du diagramme des répétitions (ou des fréquences), c'est-à-dire les points (valeurs de la variable, répétition de cette valeur), [ou les points (valeur de la variable, fréquence de cette valeur)]

Exemple: reprenons l'exemple des cotes. Traçons le polygone des fréquences:



Histogramme de la distribution des répétitions ou des fréquences

Lorsque le nombre d'observations, ou le nombre de valeurs différentes prises par la variable, est élevé, on groupe ces valeurs par classes. Pour ce faire, on divise en classes de même étendue l'intervalle de variabilité de la variable*.

Un histogramme est un diagramme constitué de rectangles dont les bases sont les classes et les hauteurs les répétitions (ou les fréquences) de toutes les valeurs dans chacune de ces classes, c'est-à-dire les effectifs de ces classes.

Ainsi, on met en abscisse les extrémités des classes et en ordonnée les répétitions (ou les fréquences) de ces classes.

* Il existe des méthodes permettant de déterminer la «taille» de ces classes.

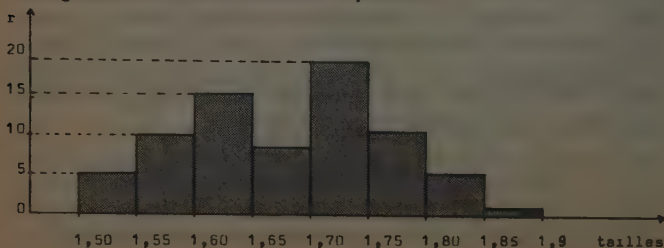
Exemple: voici un tableau donnant une distribution de tailles qui ont été groupées par classes, l'étude de cette variable taille ayant été faite dans une population formée de jeunes gens et jeunes filles de 16 à 20 ans.

Tailles (en m)	Répétition ou effectif de la classe, c'est-à-dire nombre de personnes ayant une taille de la classe considérée.
1,50 - 1,55	5
1,55 - 1,60	10
1,60 - 1,65	16
1,65 - 1,70	8
1,70 - 1,75	20
1,75 - 1,80	12
1,80 - 1,85	6
1,85 - 1,90	2

Remarque: on convient de considérer comme appartenant à une classe soit la « borne » inférieure, soit la « borne » supérieure de cette classe. Ainsi, la classe 1,50 - 1,55 peut représenter l'ensemble des tailles supérieures à 1,50m et inférieures ou égales à 1,55m, ou bien l'ensemble des tailles supérieures ou égales à 1,50m et inférieures à 1,55m.

Dans cet exemple, il s'agit des tailles t telles que $1,50\text{m} \leq t < 1,55\text{m}$. De même, la classe 1,55 - 1,60 représentera l'ensemble des tailles t telles que $1,55 \leq t < 1,60$.

Histogramme de la distribution des répétitions:



Remarques:

Le polygone des répétitions (ou des fréquences) est obtenu en considérant que la valeur de la variable dans une classe est égale à celle correspondant au centre de la classe.

Dans le cas où les données sont groupées par classes, la fréquence (ou répétition) cumulée d'une classe est la fréquence (ou répétition) de toutes les valeurs plus petites (ou plus petites ou égales selon la convention des «bornes») que la borne supérieure de la classe.

Dire, par exemple, que 0,25 est la fréquence cumulée de la classe des groupes de 15 à 20 élèves, 15 compris et 20 non compris (ou 15 non compris et 20 compris) signifie que 1/4 des groupes d'élèves seulement comprennent moins de 20 élèves (ou au plus 20 élèves).

Fonction de densité - Fonction de densité relative

La fonction de densité est la courbe dont «s'approche» le polygone des répétitions, lorsqu'il s'agit d'une grande population et de données continues. On dit qu'une telle courbe théorique peut être approchée en lissant le polygone des répétitions de l'échantillon considéré, cette approximation devenant meilleure lorsque la taille de l'échantillon augmente.

La fonction de densité relative est la courbe théorique prise comme approximation du polygone des fréquences.

Les distributions des fréquences ou des répétitions rencontrées dans la pratique peuvent donc être rattachées à différents types mathématiques de distributions (courbes théoriques dont s'approchent les polygones des fréquences ou des répétitions).

Ces distributions «théoriques» sont, par exemple, *la distribution binomiale (ou de Poisson)* lorsque les données sont discrètes, comme le nombre de pièces défectueuses dans un échantillon de grandeur déterminée ou le nombre d'accidents se produisant au cours d'un mois dans une entreprise, et *la distribution de Laplace-Gauss* lorsque les données sont continues.

La courbe de Gauss est une courbe théorique dont s'approchent les polygones de répétitions ou de fréquences d'une série de distributions rencontrées dans la pratique. C'est une courbe en forme de cloche, parfaitement symétrique.

Exemples:

Les distributions des tailles, des poids, des quotients intellectuels d'un ensemble de personnes sont des distributions que l'on peut approcher par la distribution de Laplace-Gauss, c'est-à-dire que l'histogramme de la distribution des fréquences ou des répétitions de ces valeurs a la forme approximative d'une cloche et cette approximation est d'autant meilleure que l'effectif de l'échantillon est grand.

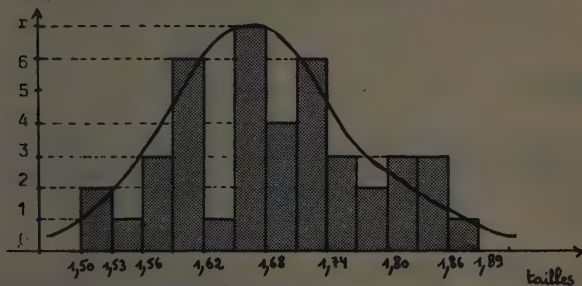
Considérons les tailles des élèves de deux classes, jeunes gens de 16 à 20 ans. Indiquons les résultats dans un tableau:

<i>Tailles (= valeurs de la variable)</i>	<i>Nombre d'élèves (= répétition)</i>	<i>Tailles (= valeurs de la variable)</i>	<i>Nombre d'élèves (= répétition)</i>
1,50	1	1,70	3
1,52	1	1,71	2
1,53	1	1,72	2
1,56	3	1,73	2
1,59	2	1,74	2
1,60	2	1,75	1
1,61	2	1,77	2
1,64	1	1,80	3
1,65	4	1,83	2
1,66	1	1,84	1
1,67	2	1,86	1
1,68	1		

Groupons ces valeurs par classes:

classes $\leq t <$	effectifs des classes	classes $\leq t <$	effectifs des classes
1,50 - 1,53	2	1,71 - 1,74	6
1,53 - 1,56	1	1,74 - 1,77	3
1,56 - 1,59	3	1,77 - 1,80	2
1,59 - 1,62	6	1,80 - 1,83	3
1,62 - 1,65	1	1,83 - 1,86	3
1,65 - 1,68	7	1,86 - 1,89	1
1,68 - 1,71	4		

Histogramme de la distribution des répétitions:



Moyenne arithmétique

Soit une série de données se rapportant à une variable (série statistique).

Soit donc $x_1, x_2, \dots, x_n$ les n valeurs de la variable X correspondant à chacun des éléments de l'échantillon, d'effectif n , considéré.

La moyenne arithmétique de ces n nombres $x_1, x_2, \dots, x_n$ est:

$$m = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

On la note en abrégé: $m = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

Ce paramètre est souvent utilisé (mais hélas trop souvent seul. Voir réduction des données).

C'est, par exemple, la moyenne arithmétique des revenus des habitants d'un pays qui représentera le revenu moyen du pays.

Exemple: Voici les cotes (/20) obtenues en mathématiques par les élèves d'une classe: 6 - 11 - 14,5 - 7 - 11 - 13 - 10,5 - 7 - 9,5 - 13 - 9,5 - 8,5 - 12,5 - 14 - 8 - 8,5 - 7 - 6,5 - 8,5 - 5,5 - 7,5 - 7 - 14,5 - 4,5 - 5 - 5,5 - 10 - 13.

$$m = \frac{6 + 2 \cdot 11 + 2 \cdot 14,5 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 13 + 10,5 + 2 \cdot 9,5 + 3 \cdot 8,5}{28} + \frac{12,5 + 14 + 8 + 6,5 + 2 \cdot 5,5 + 7,5 + 4,5 + 5 + 10}{28} = \frac{258}{28} = 9,21.$$

La moyenne arithmétique des cotes est donc 9,21.

Médiane

Soit une série de données (mesures, cotes, durées de vie de lampes, ...). La médiane est la valeur centrale, ou la moyenne arithmétique des deux valeurs centrales, d'une série de données qui ont été rangées par ordre croissant.

Exemple: reprenons l'exemple précédent. Plaçons d'abord les cotes par ordre croissant:

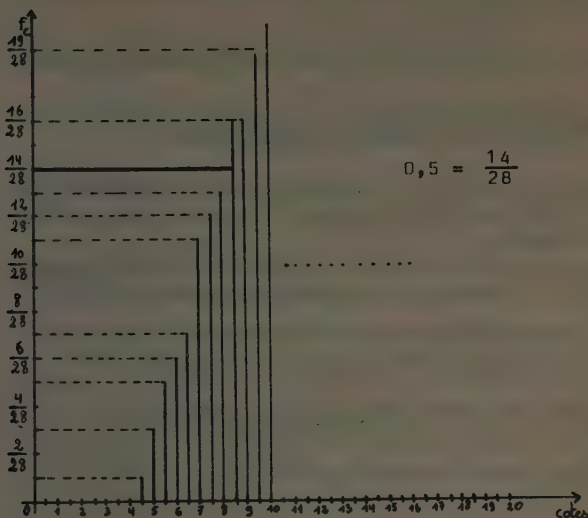
$\frac{4,5 - 5 - 5,5 - 5,5 - 6 - 6,5 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7,5 - 8 - 8,5 - 8,5 - 8,5 - 9,5 -}{13 \text{ valeurs} \qquad \qquad \qquad \text{moyenne arith.} = 8,5}$
 $\frac{9,5 - 10 - 10,5 - 11 - 11 - 12,5 - 13 - 13 - 13 - 14 - 14,5 - 14,5}{13 \text{ valeurs}}$

La médiane est 8,5.

Remarques:

On peut aussi déterminer graphiquement la médiane. On fait le diagramme de la distribution des fréquences cumulées et on détermine la valeur de la variable (axe des abscisses) pour laquelle la fréquence est égale à 0,5 (axe des ordonnées).

Reprenons l'exemple précédent et représentons graphiquement la distribution des fréquences cumulées des données.



La médiane n'est pas influencée, comme l'est la moyenne arithmétique, par des valeurs extrêmes.

Mode

Soit une série statistique. Le mode est la valeur de la variable dont la fréquence est maximale, c'est-à-dire la valeur qui apparaît le plus souvent. Le mode peut ne pas exister (c'est le cas lorsque toutes les valeurs «apparaissent» un même nombre de fois), être multiple, ou être unique.

Exemple: Pour l'exemple de la série de cotes, le mode est 7/20.

Étendue

L'étendue d'une série de données est l'écart entre la plus petite et la plus grande de ces données.

Exemple: dans le cas de l'exemple des cotes, l'étendue est $14,5 - 4,5 = 10$.

Ecart-moyen ou écart à la moyenne

L'écart-moyen d'une série de données est la moyenne arithmétique des écarts (nombres positifs!) entre chaque donnée et la moyenne arithmétique des données.

Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les n valeurs d'une variable correspondant chacune à un élément de l'échantillon où la variable X est étudiée, on a donc:

$$\text{E.M.} = \frac{|x_1 - m| + |x_2 - m| + \dots + |x_n - m|}{n}$$

ce que l'on peut encore écrire: $\text{E.M.} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - m|}{n}$

Exemple: reprenons l'exemple des cotes:

4,5 – 5 – 5,5 – 5,5 – 6 – 6,5 – 7 – 7 – 7 – 7 – 7,5 – 8 – 8,5 – 8,5 – 8,5 – 9,5 – 9,5 – 10 – 10,5 – 11 – 11 – 12,5 – 13 – 13 – 13 – 14 – 14,5 – 14,5.

La moyenne arithmétique est égale à 9,21.

Calculons l'écart-moyen:

$$\begin{aligned} \text{E.M.} &= \frac{|4,5 - 9,21| + |5 - 9,21| + 2 \cdot |5,5 - 9,21| + |6 - 9,21|}{28} \\ &+ \frac{4 \cdot |7 - 9,21| + |7,5 - 9,21| + |8 - 9,21| + 3 \cdot |8,5 - 9,21| + 2 \cdot |9,5 - 9,21|}{28} \\ &+ \frac{|10 - 9,21| + |10,5 - 9,21| + 2 \cdot |11 - 9,21| + |12,5 - 9,21| + 3 \cdot |13 - 9,21|}{28} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{|14 - 9,21| + 2 \cdot |14,5 - 9,21|}{28} = \frac{4,71 + 4,21 + 2 \cdot 3,71 + 3,21 + 4 \cdot 2,21}{28} \\
& + \frac{1,71 + 1,21 + 3 \cdot 0,71 + 2 \cdot 0,29 + 0,79 + 1,29 + 2 \cdot 1,79 + 3,29 + 3 \cdot 3,79}{28} \\
& + \frac{4,79 + 2 \cdot 5,29}{28} = \frac{4,71 + 4,21 + 7,42 + 3,21 + 8,84 + 1,71}{28} \\
& + \frac{1,21 + 2,13 + 0,58 + 0,79 + 1,29 + 3,58 + 3,29 + 11,37 + 4,79 + 10,58}{28} \\
& = \frac{69,71}{28} \simeq 2,49
\end{aligned}$$

Variance

La variance d'une série de données est la moyenne arithmétique des carrés des écarts entre chaque donnée et la moyenne arithmétique de ces données.

Ainsi, si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les n valeurs d'une variable correspondant chacune à un élément de l'échantillon où l'on étudie la variable X , la variance est donnée par:

$$s^2 = \frac{(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \dots + (x_n - m)^2}{n},$$

notée* encore, $s^2 = \frac{(x_i - m)^2}{n}$

Exemple: pour l'exemple précédent, on a:

$$s^2 = \frac{(4,5 - 9,21)^2 + (5 - 9,21)^2 + \dots + 2 \cdot (14,5 - 9,21)^2}{28}$$

$$s^2 = \frac{4,51^2 + 4,21^2 + 2 \cdot 3,71^2 + 3,21^2 + 4 \cdot 2,21^2}{28}$$

$$+ \frac{1,71^2 + 1,21^2 + 3 \cdot 0,71^2 + 2 \cdot 0,29^2 + 0,79^2 + 1,29^2}{28}$$

* Ou σ^2

$$\begin{aligned}
& + \frac{2 \cdot 1,79^2 + 3 \cdot 2,29^2 + 3 \cdot 3,79^2}{28} = \frac{22,1841 + 17,7241}{28} \\
& + \frac{2 \cdot 13,7641 + 10,3041 + 4 \cdot 4,8841 + 2,9241 + 1,4641}{28} \\
& + \frac{3 \cdot 0,5041 + 2 \cdot 0,0841 + 0,6241 + 1,6641 + 2 \cdot 3,2041}{28} \\
& + \frac{10,8241 + 3 \cdot 14,3641}{28} = \frac{165,9584}{28} \simeq 5,93
\end{aligned}$$

Remarque: la variance est plus fine que l'écart-moyen. En effet, les écarts supérieurs à une unité prennent plus d'importance que dans le cas de l'écart-moyen (par le carré), tandis que les écarts inférieurs à l'unité ont moins d'importance que dans le cas de l'écart-moyen (un nombre positif inférieur à 1 a comme carré un nombre encore plus petit que lui-même).

Écart-type

L'écart-type est la racine carrée de la variance. Ainsi, si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n données statistiques (pour une population de n individus), on a :

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - m)^2 + \dots + (x_n - m)^2}{n}}$$

On peut montrer que $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - m^2}$

Exemples:

Pour l'exemple précédent, comme on connaît la variance, il suffit d'en prendre la racine carrée pour obtenir l'écart-type :

$$s = \sqrt{5,93} \simeq 2,44$$

Voici les tailles, en cm, d'élèves de 6^{ème} année: 170 - 164 - 171 - 156 - 163 - 165 - 165 - 159 - 159 - 168 - 160 - 177 - 174 - 150 - 156 - 156 - 170 - 167 - 161 - 174 - 183 - 170 - 166 - 152 - 177 - 161 - 180 - 171 - 165 - 172 - 165 - 173 - 180 - 183 - 167 - 184 - 180 - 160 - 175 - 186.

Employons la formule $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - m^2}$

1. Calculons la moyenne arithmétique: $m = \frac{6735}{40} = 168,375$

2. Calculons $\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{40} = \frac{3 \cdot 170^2 + 164^2 + 2 \cdot 171^2 + 3 \cdot 156^2 + 163^2}{40}$

$$+ \frac{4 \cdot 165^2 + 2 \cdot 159^2 + 168^2 + 2 \cdot 160^2 + 2 \cdot 177^2 + 2 \cdot 174^2 + 150^2 + 2 \cdot 167^2}{40}$$

$$+ \frac{2 \cdot 161^2 + 2 \cdot 183^2 + 166^2 + 152^2 + 3 \cdot 180^2 + 172^2 + 173^2 + 184^2 + 175^2 + 186^2}{40}$$

$$= \frac{86700 + 26896 + 58482 + 73008 + 26569 + 108900 + 50562 + 28224}{40}$$

$$+ \frac{51200 + 62658 + 60552 + 22500 + 55778 + 51842 + 66978 + 27556}{40}$$

$$+ \frac{23104 + 97200 + 29584 + 29929 + 33856 + 30625 + 34596}{40}$$

$$= \frac{1220999}{40} = 30599,975$$

3. $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{40} - m^2} = \sqrt{30599,975 - 168,375^2}$

$$= \sqrt{30599,975 - 28350,141} = \sqrt{2249,834} = 47,432415$$

Quartiles

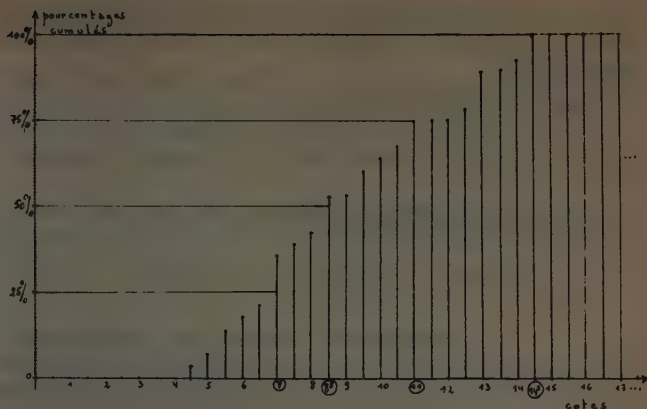
Les quartiles sont les trois valeurs qui séparent la série de données rangées par ordre croissant en 4 parties comprenant le même nombre de valeurs.

L'écart inter-quartile est la distance entre le premier et le troisième quartile.

On détermine les quartiles graphiquement, à partir de la distribution des fréquences (ou des répétitions) cumulées.

Exemple: reprenons l'exemple des cotes. Donnons la distribution du pourcentage cumulé.

cotes	pourcentages	pourcentages cumulés
0	0	0
.	.	.
.	.	.
4,5	$\frac{1}{28} \cdot 100 = 3,57$	3,57
5	3,57	7,15
5,5	7,14	14,28
6	3,57	17,85
6,5	3,57	21,42
7	14,29	35,71
7,5	3,57	39,28
8	3,57	42,85
8,5	10,71	53,56
9	0	53,56
9,5	7,14	60,7
10	3,57	64,27
10,5	3,57	67,84
11	7,14	74,98
11,5	0	74,98
12	0	74,98
12,5	3,57	78,55
13	10,71	89,26
13,5	0	89,26
14	3,57	92,83
14,5	7,14	$\sim 99,97 \simeq 100$
.	0	.
.	.	.
20	0	100



Déciles

Les déciles sont les nombres qui divisent le champ de variabilité en 10 intervalles comprenant chacun le même nombre d'observations.

Ainsi, les deux déciles extrêmes déterminent un intervalle comprenant 80% des résultats.

Centiles

Ce sont les 99 nombres qui divisent le champ de variabilité en 100 intervalles comprenant chacun le même nombre d'observations.

Ainsi, les deux centiles extrêmes déterminent un intervalle comprenant 98% des résultats.

Remarques

Lorsqu'on ne connaît pas les répétitions de toutes les valeurs de la variables (ou les fréquences) mais seulement de classes de ces valeurs, alors on considère que la valeur de la classe est la valeur centrale et c'est avec ces valeurs centrales que l'on calcule la moyenne, la médiane, l'écart-moyen, la variance et l'écart-type des distributions en question.

Ainsi, si $x_1, x_2, \dots, x_k$ sont les centres des classes, où k est le nombre de classes, et si $e_1, e_2, \dots, e_k$ sont les effectifs des classes (répétitions des classes), alors:

$$m = \frac{e_1 x_1 + e_2 x_2 + \dots + e_k x_k}{n}$$

(n étant l'effectif de la population, $n = e_1 + e_2 + \dots + e_k$);

$$E.M. = \frac{e_1 \cdot |x_1 - m| + e_2 \cdot |x_2 - m| + \dots + e_k \cdot |x_k - m|}{n}$$

$$s^2 = \frac{e_1 \cdot (x_1 - m)^2 + e_2 \cdot (x_2 - m)^2 + \dots + e_k \cdot (x_k - m)^2}{n}$$

Quant au mode d'une distribution par classes, c'est la valeur centrale de la classe dont l'effectif est le plus élevé, (cette classe est appelée la classe modale).

Variable centrée réduite

La variable X centrée réduite est la variable qui mesure l'écart à la moyenne en unité d'écart-type. Ainsi, la variable centrée réduite est:

$$z = \frac{X - m}{s}$$

Elle est très utile pour comparer des distributions.

Elle est souvent employée dans les tests psychologiques.

Exemple: soit un élève qui obtient 70% pour l'examen de mathématique et 78% pour l'examen de comptabilité.

La moyenne des cotes de la classe à l'examen de mathématiques est 65% et l'écart-type est 8; quant à la moyenne des cotes de l'examen de comptabilité elle est égale à 72% et l'écart-type est égal à 15.

On demande dans quelle discipline l'élève est *relativement* plus doué.

La variable centrée réduite pour les maths est $\frac{70 - 65}{8} = 0,625$

La variable centrée réduite pour la compt. est $\frac{78 - 72}{15} = 0,4$.

L'élève a donc 0,625 fois l'écart-type au-dessus de la moyenne en mathématiques et 0,4 fois l'écart-type au-dessus de la moyenne en comptabilité. On dira qu'il est meilleur en maths. qu'en comptabilité, relativement à l'ensemble de la classe.

Remarque: si la variable centrée réduite avait été négative, on aurait dit que l'élève avait un certain nombre de fois l'écart-type en dessous de la moyenne.

Dépendance entre deux variables

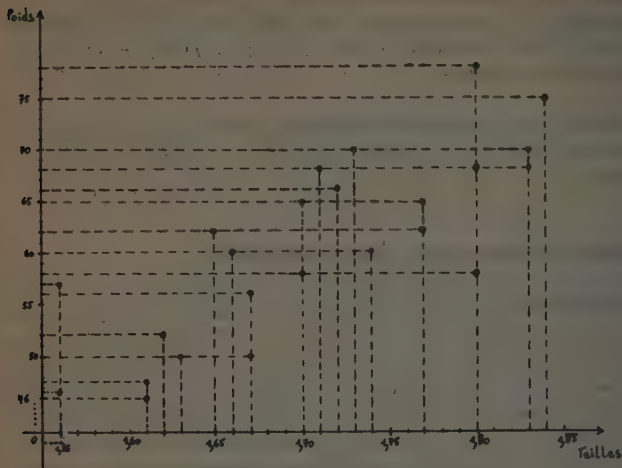
Introduction: deux variables sont dites dépendantes s'il existe un lien entre ces deux variables. Pour voir si un tel lien existe, on représente, dans un plan coordonné cartésien, les couples de valeurs correspondantes de chaque variable. Si ces points sont proches d'une courbe (si le nuage de ces points dessine une courbe) on peut alors conclure que les variables sont dépendantes, une courbe étant le graphique d'une fonction, c'est-à-dire la représentation graphique d'un lien entre deux variables.

Exemple: considérons les poids et les tailles des élèves d'une classe de 6^{ème} année.

Voici la situation:

tailles	poids (en kg)	tailles	poids (en kg)
1,65	46,5	1,71	68
1,70	65	1,62	52
1,67	56	1,72	66
1,61	46	1,65	62
1,74	60	1,73	70
1,83	70	1,80	78
1,70	58	1,83	69
1,66	60	1,67	50
1,56	57	1,84	75
1,77	65	1,80	68
1,61	47,5	1,63	50
1,80	58	1,77	62

Représentons cette situation graphiquement, en indiquant les tailles en abscisse et les poids correspondants en ordonnée.



On constate que ces points sont, en général, groupés et non pas dispersés dans le plan coordonné. On peut les approcher par une droite.

On dira qu'il y a une dépendance linéaire entre la taille et le poids des individus.

Soit X et Y deux variables étudiées dans une population. Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ et $y_1, y_2, \dots, y_n$. Les valeurs de ces variables pour chacun des n éléments de la population.

On représente, dans un système d'axes perpendiculaires, les points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

Si l'on peut représenter une courbe continue approchant ces points, on dit que les deux variables sont dépendantes, (il doit y avoir un nombre suffisamment grand de points!).

La courbe est appelée courbe d'ajustement et son équation donne une approximation du lien entre les deux variables.

Les méthodes d'ajustement linéaire

Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ et $y_1, y_2, \dots, y_n$ les valeurs des variables liées X et Y correspondant à chacun des éléments de la population où ces variables sont étudiées.

Méthodes graphiques

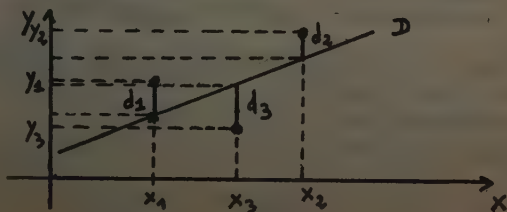
On représente les points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ et on trace, à la règle, une droite d'ajustement.

Plusieurs droites différentes peuvent, bien sûr, être tracées et la méthode n'est donc pas très intéressante, puisqu'elle permet plusieurs solutions. Pour connaître une formule donnant une approximation de la dépendance entre X et Y , on détermine l'équation de la droite tracée (équation d'une droite dont on connaît deux de ses points).

On prend comme droite d'ajustement la droite passant par deux quelconques des points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Il y a donc plusieurs droites d'ajustement possibles.

Méthode des moindres carrés

Pour éviter d'avoir plusieurs droites d'ajustement, on va définir la «meilleure droite d'ajustement»: parmi toutes les droites qui approchent un ensemble de points (qui sont des couples de valeurs correspondantes des deux variables considérées), celle qui donne le meilleur ajustement est celle qui vérifie la propriété « $d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2$ minimum», où d_1 est la différence entre y_1 (qui correspond à x_1) et l'ordonnée du point d'abscisse x_1 sur la droite d'ajustement, où d_2 est la différence entre y_2 (qui correspond à x_2) et l'ordonnée du point d'abscisse x_2 sur la droite d'ajustement, ..., où d_n est la différence entre y_n (qui correspond à x_n) et l'ordonnée du point d'abscisse x_n sur la droite d'ajustement.



C'est donc la droite qui rend minimale la somme des carrés des écarts entre l'ordonnée de tout point (x_i, y_i) et l'ordonnée du point d'abscisse x_i sur cette droite.

Une droite qui vérifie cette propriété est dite «ajuster les données au sens des moindres carrés». On l'appelle *la droite des moindres carrés*.

Détermination de la droite des moindres carrés: l'équation de la droite qui ajuste les points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ sera de la forme $Y = mX + b$, où m et b sont à déterminer (forme générale de l'équation d'une droite). m et b sont les solutions du système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = m \cdot \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot n \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = m \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i \end{cases}$$

(ces équations sont appelées les équations normales de la droite des moindres carrés)

Intérêt de l'ajustement linéaire

On peut donner une formule représentant le lien, la dépendance entre deux variables (c'est-à-dire déterminer une fonction approximation de la fonction liant les deux variables).

On peut, ayant déterminé la dépendance entre deux variables, estimer la valeur d'une des variables pour n'importe quelle valeur (non donnée au départ!) de l'autre variable.

Exemple d'ajustement linéaire

Prenons l'exemple précédent des poids et tailles d'élèves.

Détermination d'une droite d'ajustement par la méthode de construction à la règle (on dit aussi «à main levée»).

La droite passe par les points (1,60; 46) et (1,70; 61)

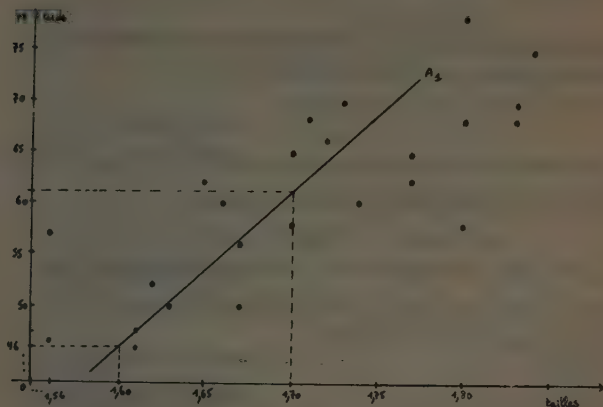
$$A_1 \equiv Y - 46 = \frac{61 - 46}{1,70 - 1,60} (X - 1,60) \Leftrightarrow A_1 \equiv Y - 46 = 150 \cdot X - 150 \cdot 1,60$$

$$\Leftrightarrow A_1 \equiv Y = 150X - 240 + 46 \Leftrightarrow A_1 \equiv Y = 150X - 194$$

Ainsi, on peut par exemple estimer le poids pour la taille 1,90m: $X = 1,90$
 $Y = ?$

$$Y = 150 \cdot 1,90 - 194 = 285 - 194 = 91.$$

Donc à une taille d'1,90m correspondrait un poids de 91 kg.



On choisit comme droite d'ajustement celle passant par les points (1,72 ; 66) et (1,62 ; 52) soit A_2 .

$$A_2 \equiv Y - 66 = \frac{52 - 66}{1,62 - 1,72}(X - 1,72)$$

$$A_2 \equiv Y - 66 = \frac{-14}{-0,10}(X - 1,72)$$

$$A_2 \equiv Y = 140 \cdot (x - 1,72) + 66$$

$$A_2 \equiv Y = 140 X - 240,8 + 66$$

$$A_2 \equiv Y = 140X - 174,8$$

On peut alors estimer le poids pour une taille quelconque, et, par exemple, pour 1,90m.

$$X = 1,90 \Rightarrow Y = 140 \cdot 1,90 - 174,8 = 266 - 174,8 = 91,2$$

Ainsi, à la taille 1,90m correspondrait le poids de 91,2kg.

Détermination de la droite des moindres carrés. On sait que $D \equiv Y = mX + b$, et que m et b sont donnés par:

$$\begin{cases} \sum_i Y_i = m \cdot \sum_i X_i + b \cdot n \\ \sum_i X_i Y_i = m \cdot \sum_i X_i^2 + b \cdot \sum_i X_i \end{cases}$$

Les X_i sont les tailles des élèves et les Y_i les poids correspondants; $n = 24$, puisque la population considérée comprend 24 élèves.

On a donc:

$$\begin{aligned} \sum_i Y_i &= 46,5 + 65 + 56 + 46 + 60 + 70 + 58 + 60 + 53 + 65 + 47,5 + 58 + 68 + 52 \\ &\quad + 66 + 62 + 70 + 78 + 69 + 50 + 75 + 68 + 50 + 62 = 1455 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \cdot \sum_i X_i &= m \cdot (1,56 + 1,70 + 1,67 + 1,61 + 1,74 + 1,83 + 1,70 + 1,66 + 1,52 + \\ &\quad 1,77 + 1,61 + 1,80 + 1,71 + 1,62 + 1,72 + 1,65 + 1,73 + 1,80 + 1,83 + 1,67 \\ &\quad + 1,84 + 1,80 + 1,63 + 1,77) = m \cdot 40,94 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i X_i \cdot Y_i &= 1,56 \cdot 46,5 + 1,70 \cdot 65 + 1,67 \cdot 56 + 1,61 \cdot 46 + 1,74 \cdot 60 + 1,83 \cdot 70 \\ &\quad + 1,70 \cdot 58 + 1,66 \cdot 60 + 1,52 \cdot 53 + 1,77 \cdot 65 + 1,61 \cdot 47,5 + 1,80 \cdot 58 + 1,71 \cdot 68 \\ &\quad + 1,62 \cdot 52 + 1,72 \cdot 66 + 1,65 \cdot 62 + 1,73 \cdot 70 + 1,80 \cdot 78 + 1,83 \cdot 69 + \\ &\quad 1,67 \cdot 50 + 1,84 \cdot 75 + 1,80 \cdot 68 + 1,63 \cdot 50 + 1,77 \cdot 62 = 72,54 + 110,5 + 93,52 \\ &\quad + 74,06 + 104,4 + 128,1 + 98,6 + 99,6 + 80,56 + 115,05 + 76,475 + 104,4 + \\ &\quad 116,28 + 84,24 + 113,52 + 102,3 + 121,1 + 140,4 + 126,27 + 83,5 + 138 + 122,4 \\ &\quad + 81,5 + 109,74 = 2497,05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \cdot \sum_i X_i^2 &= m(1,56^2 + 1,70^2 + 1,67^2 + 1,61^2 + 1,74^2 + 1,83^2 + 1,70^2 + 1,66^2 + \\ &\quad 1,52^2 + 1,77^2 + 1,61^2 + 1,80^2 + 1,71^2 + 1,62^2 + 1,72^2 + 1,65^2 + 1,73^2 + 1,80^2 + \\ &\quad 1,83^2 + 1,67^2 + 1,84^2 + 1,80^2 + 1,63^2 + 1,77^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \cdot \sum_i X_i^2 &= m \cdot (2,4336 + 2,89 + 2,7889 + 2,5921 + 3,0276 + 3,3489 + 2,89 + \\ &\quad 2,7556 + 2,3104 + 3,1329 + 2,5921 + 3,24 + 2,9241 + 2,6244 + 2,9584 \\ &\quad + 2,7225 + 2,9929 + 3,24 + 3,3489 + 2,7889 + 3,3856 + 3,24 + 2,6569 \\ &\quad + 3,1329) = m \cdot 70,0176 \end{aligned}$$

Il faut donc résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} 1445 = 40,94m + 24b \\ 2497,55 = 70,176m + 40,94b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{1445 - 40,94m}{24} \\ 2497,055 = 70,0176m + 40,94 \cdot \frac{1455 - 40,94m}{24} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2497,055 = 70,0176m + \frac{40,94 \cdot 1455}{24} + \frac{40,94 \cdot 40,94m}{24} \\ b = \frac{1455 - 40,94m}{24} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2497,055 - 2481,9875 = 70,0176m - 69,836817m \\ b = \frac{1455 - 40,94m}{24} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,180783 m = 15,0675 \\ b = \frac{1455 - 40,94m}{24} \end{cases} \quad \begin{cases} m = \frac{15,0675}{0,180783} \\ b = \frac{1455 - 40,94m}{24} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 83,345779 \\ b = \frac{1455 - 40,94 \cdot 83,345779}{24} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 83,345779 \\ b = \frac{1445 - 3412,1762}{24} = -81,549008 \end{cases}$$

Ainsi, la droite des moindres carrés a pour équation

$$Y = 83,345779 X - 81,549008$$

Si on estime le poids correspondant à la taille 1,90m, on obtient:

$$Y = 83,345779 \cdot 1,90 - 81,549008$$

$$Y = 158,35698 - 81,549008$$

$$Y = 76,807972$$

Le poids correspondant à 1,90m devrait être à peu près égal à 76,8 kg (valeur qui semble plus en « accord » avec les autres données que celles trouvées précédemment).

De la présentation des données

Introduction

Lorsqu'on veut interpréter des données dans une population (tailles, poids d'individus, investissements d'entreprises, impôts sur des personnes, longueurs de pièces, diamètres de boulons, ...), on doit les présenter de manière telle que cette interprétation soit aisée.

On peut, dès lors, indiquer les informations recueillies dans un tableau; on peut aussi représenter la situation graphiquement, afin d'obtenir, par un graphique, les distributions des répétitions ou des fréquences. Lorsqu'une variable n'est pas numérique, on se contente souvent d'un tableau, mais on peut également représenter les distributions des fréquences ou des répétitions, il suffit pour cela d'associer un nombre ou un sigle à chaque valeur de la variable.

Tableau des répétitions et des fréquences

Lorsqu'on rassemble des données statistiques, c'est-à-dire les valeurs d'une variable correspondant à tous les éléments d'un échantillon, on peut les présenter dans un tableau, en indiquant en première colonne les différentes valeurs de la variable par ordre croissant, en deuxième colonne les répétitions de chaque valeur et en troisième colonne les fréquences de ces valeurs. Cette présentation est plus claire que celle consistant à énumérer les valeurs dans un ordre quelconque (celui du dépouillement de l'enquête, l'ordre alphabétique des noms des personnes interrogées, l'ordre dans lequel les pièces sont fabriquées, ...), elle donne une meilleure idée de la situation générale.

Exemple: voici les cotes (/20) obtenues pour un même contrôle par les élèves de classes de 5^e et 6^e: 6 - 11 - 14,5 - 7 - 11 - 13 - 10,5 - 7 - 9,5 - 13 - 9,5 - 8,5 - 12,5 - 14 - 8 - 8,5 - 7 - 6,5 - 8,5 - 5,5 - 7,5 - 7 - 14,5 - 5 - 5,5 - 5,5 - 10 - 13 - 13 - 9 - 12,5 - 7,5 - 11 - 8 - 9 - 9 - 8,5 - 8 - 10,5 - 12 - 13,5 - 13 - 14,5 - 12,5 - 12 - 9,5 - 9,5 - 12,5 - 11 - 13 - 14,5 - 10 - 14,5 - 6 - 8 - 11 - 15,5 - 14,5 - 12,5 - 12 - 14 - 11,5 - 17,5 - 14 - 13 - 12 - 15 - 10,5 - 11 - 14 - 10,5 - 14,5.

Présentation de la distribution dans un tableau:

<i>valeurs de la variable (cotes)</i>	<i>répétitions (nombre d'élèves ayant ces cotes)</i>	<i>fréquences</i>	<i>répétitions cumulées</i>	<i>fréquences cumulées</i>
0	0	$\frac{0}{75} = 0$	0	
.	.			
.	.			
4,5	1	0,014	1	0,014
5	1	0,014	2	0,027
5,5	3	0,04	5	0,067
6	2	0,027	7	$\frac{7}{75} = 0,094$
6,5	1	0,014	8	0,107
7	1	0,014	9	0,121
7,5	2	0,027	11	0,148
8	4	0,054	15	0,187
8,5	4	0,054	19	0,24
9	3	0,04	22	0,294
9,5	4	0,054	26	0,34
10	3	0,04	29	0,387
10,5	4	0,054	33	0,427
11	6	0,08	39	0,48
11,5	1	0,014	40	0,56
12	1	0,014	41	0,574
12,5	5	0,067	46	0,627
13	7	0,094	53	0,694
13,5	2	0,027	55	0,787
14	4	0,054	59	0,814
14,5	7	0,094	66	0,867
15	1	0,014	67	0,96
15,5	1	0,014	68	0,974
16	0	0	68	0,987
16,5	0	0	68	0,987
17	0	0	68	0,987
17,5	1	0,014	69	0,987
.	.			1
.	.			
.	.			
20	0	0	75	1

Diagramme en bâtonnets des répétitions ou des fréquences

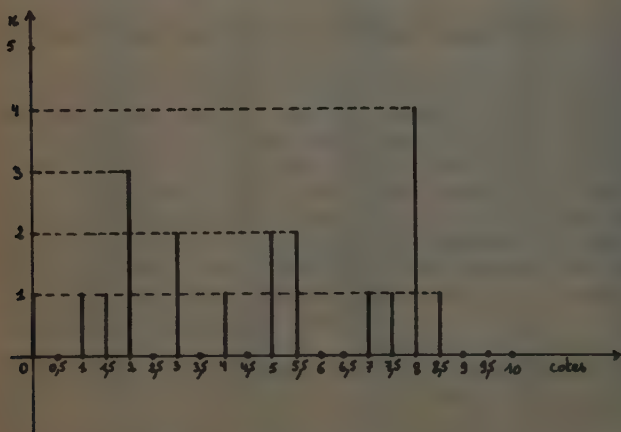
C'est la représentation graphique qui montre le plus clairement comment sont distribuées les répétitions ou les fréquences.

La représentation graphique est plus révélatrice de la distribution qu'un tableau; elle indique mieux la situation générale, dans son ensemble.

Elle permet de voir immédiatement si les valeurs de la variable considérée sont fort dispersées ou non. On peut également, à l'aide du graphique, déterminer où se «situe» la majorité des éléments de la population.

Remarque: selon le but du relevé des informations, on indiquera en ordonnée soit les répétitions des valeurs, soit les répétitions cumulées de ces valeurs, soit leurs fréquences, ou leurs pourcentages, soit leurs fréquences ou pourcentages cumulés.

Exemples: reprenons des cotes (/10) à la dernière interrogation d'anglais (voir répétition pages 218,221 et 222). Le diagramme en bâtonnets de la distribution des répétitions était le suivant:



- On constate que les valeurs sont fort dispersées, qu'il y a un nombre important de cotes très faibles (de 0 à 3) et un nombre important de cotes assez bonnes (de 7 à 8,5).

- On peut en conclure que la classe considérée n'est pas homogène (du moins dans le cas du contrôle en question).
- On constate également que la majorité des élèves de la classe ont une cote inférieure ou égale à 5/10.

Présentation d'une distribution à l'aide d'un cercle

Elle est employée pour des distributions de fréquences ou de pourcentages.

Elle concerne des variables discrètes, qui, en général, ne peuvent prendre que peu de valeurs.

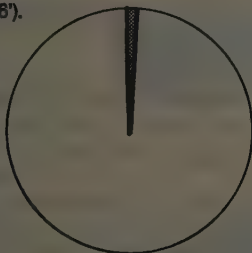
Elle sera par exemple utilisée pour traduire la situation, en sièges ou en voix, après des élections (on attribue une couleur à chaque parti ou groupe politique).

Le principe en est que la partie à l'intérieur du cercle représente 100%.

Dès lors, 1% sera représenté par la partie obtenue en prenant un angle au

centre de $\frac{360^\circ}{100} = 3,6^\circ (= 3^\circ 36')$, puisque $1^\circ = 60'$, d'où $\frac{6}{10}$ de degré sont

égaux à $\frac{60'}{10} \cdot 6 = 36'$.



Si 1% est représenté par la partie délimitée par un angle au centre de $3^\circ 36'$, on retrouve bien que 50% sont représentés par la moitié de la partie à l'intérieur du cercle, c'est-à-dire par la partie délimitée par un angle au centre de 180° ($3^\circ 36' \cdot 50 = 150^\circ 1800' = 180^\circ$). De même, 25% sont représentés par $\frac{1}{4}$ de «cercle», c'est-à-dire par la partie à l'intérieur du «cercle» délimitée par un angle au centre de 90° ($3^\circ 36' \cdot 25 = 75^\circ 900' = 75^\circ + 15^\circ = 90^\circ$).

Exemple: en 1981-82, une enquête au sein des classes de 5^e et 6^e années d'études (16 à 18 ans théoriquement) d'une école de Bruxelles a donné les résultats suivants: 55% de non fumeurs et 46% de fumeurs.

En ce qui concernait uniquement les filles: 48,5% de fumeuses.

En ce qui concernait uniquement les garçons: 39% de fumeurs.

Ces situations peuvent se représenter à l'aide de cercles:

Filles et garçons:

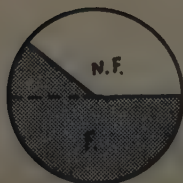


(55% $\Rightarrow$ angle au centre de $3^{\circ}36' \cdot 55 = 198^{\circ}$)

Filles:



Garçons:



De la réduction des données

Grouperment des valeurs par classes

Lorsque la variable considérée est continue (taille, poids, ...) et que les observations sont en grand nombre, ou qu'elle est discrète mais prenant beaucoup de valeurs différentes (des cotes sur 100, par exemple), on groupe les valeurs dans des classes. Pour cela, on divise l'intervalle de variabilité de la variable en classes de même étendue.

Le groupement par classe implique donc une réduction des observations à celles correspondant aux centres des classes (puisqu'on considère que la valeur de la variable dans une classe est égale au centre de la classe); il y a donc une perte d'information.

Le diagramme d'une telle distribution est un histogramme.

Remplacement des informations par quelques paramètres

Pourquoi cette réduction des informations?

Si on étudie une variable dans une population ou dans un échantillon, on associe à chaque élément de cette population ou de cet échantillon une valeur de la variable.

Toute l'information se retrouve dans les tableaux et dans les diagrammes en bâtonnets. L'idée de la situation donnée par ces tableaux ou ces graphiques est donc complète.

Mais un grand nombre de nombres peut rendre l'interprétation des données difficile.

C'est pourquoi on essaiera de réduire les informations, de les remplacer par des valeurs représentatives, par un petit nombre de paramètres.

Quels paramètres choisir?

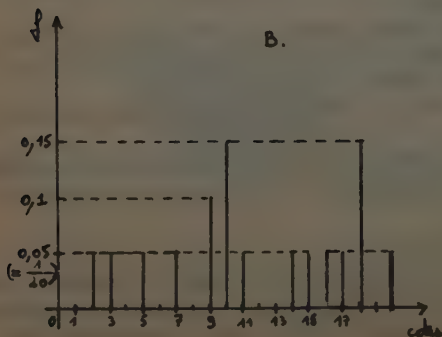
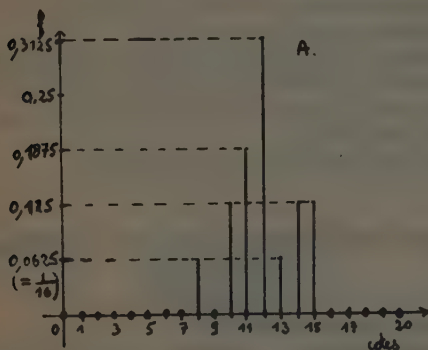
Il y a deux types de paramètres: les paramètres de tendance centrale, comme la moyenne arithmétique, la médiane, le mode, et les paramètres de dispersion, comme l'étendue, l'écart-moyen, la variance et l'écart-type.

Il faut considérer au moins un paramètre de chaque type, afin de ne pas perdre trop d'information de départ.

Exemple: voici les cotes (/20) obtenues par les élèves de deux classes A et B.

classe A: 12 - 15 - 11 - 8 - 15 - 14 - 12 - 12 - 11 - 11 - 12 - 13 - 12 - 10 - 14 - 10
classe B: 10 - 18 - 2 - 5 - 20 - 18 - 16 - 3 - 9 - 18 - 17 - 11 - 10 - 9 - 19 - 7 - 14 - 15 - 9 - 10.

- Représentons graphiquement les distributions des fréquences des valeurs de la variable cote pour les deux populations:



- La moyenne arithmétique des cotes est 12 pour les deux séries de cotes. Or, la situation n'est pas la même dans les deux classes: dans la première, les cotes sont fort proches de 12 (et certaines sont égales à 12); dans la classe B, aucun élève n'a obtenu 12/20 et les cotes sont fort différentes les unes des autres, elles sont dispersées par rapport à la moyenne arithmétique.

La classe A semble assez homogène et des dispositions particulières ne doivent pas être prises vis-à-vis de certains élèves.

Quant à la classe B, elle comprend un important pourcentage d'élèves dont les cotes sont inférieures et même nettement inférieures à 12, tandis que les autres élèves réussissent très bien. Il faudrait envisager, par exemple, des cours supplémentaires pour les premiers cités.

- Ainsi, la cote moyenne, qui est la moyenne arithmétique des cotes, ne traduit pas cette différence dans la dispersion des cotes; il faudrait associer à la moyenne arithmétique un paramètre traduisant la dispersion des observations.

- Calculons, par exemple, l'écart-moyen.

Pour la classe A.

$$\begin{aligned} \text{E.M.} &= \frac{5 \cdot |12 - 12| + 2 \cdot |15 - 12| + 3 \cdot |11 - 12| + |8 - 12|}{16} \\ &+ \frac{2 \cdot |14 - 12| + |13 - 12| + 2 \cdot |10 - 12|}{16} \\ &= \frac{5 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 4 + 2 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 2}{16} = \frac{6 + 3 + 4 + 4 + 1 + 4}{16} \\ &= \frac{22}{16} = 1,375 \end{aligned}$$

Cela signifie qu'en moyenne, l'écart entre la moyenne arithmétique 12 et chacune des cotes est 1,375 points.

Pour la classe B,

$$\begin{aligned} \text{E.M.} &= \frac{3 \cdot |10 - 12| + 3 \cdot |18 - 12| + |2 - 12| + |5 - 12| + |20 - 12|}{20} \\ &+ \frac{|16 - 12| + |3 - 12| + 3 \cdot |9 - 12| + |17 - 12| + |11 - 12| + |19 - 12|}{20} \end{aligned}$$

$$+ \frac{|7-12| + |14-12| + |15-12|}{20}$$

$$= \frac{3 \cdot 2 + 3 \cdot 6 + 10 + 7 + 8 + 4 + 9 + 3 \cdot 3 + 5 + 1 + 7 + 5 + 2 + 3}{20}$$

$$= \frac{6 + 18 + 10 + 7 + 8 + 4 + 9 + 9 + 5 + 1 + 7 + 5 + 2 + 3}{20} = \frac{144}{20} = 7,2$$

Ainsi, en moyenne, l'écart entre chaque cote et la moyenne arithmétique des cotes, soit 12, est 7,2 points.

- Connaissant ces deux paramètres (la moyenne arithmétique et l'écart-moyen) pour chacune des deux populations, on ne risque pas d'imaginer que les deux distributions des fréquences sont à peu près les mêmes, comme on aurait pu le faire, à tort, si l'on n'avait connu que les moyennes arithmétiques!

Table de matières

Avant-propos

7

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE

Des fractions

11

Point de vue intuitif: 11 - définition: 11 - multiplication d'une fraction par un nombre: 12 - division d'une fraction par un nombre: 13 - fractions équivalentes: 13 - simplification des fractions: 14 (recherche de PGCD de deux nombres entiers) - addition des fractions: 16 (déterminer le PPCM de deux nombres entiers) - comparaison des fractions: 19 (plus petit que, plus grand que, égal à) - multiplication des fractions: 22 - division d'une fraction par une fraction: 22 - quelques exemples d'opérations sur des fractions négatives ou à termes négatifs: 23

Des quatre opérations fondamentales sur les nombres réels



Les nombres réels rationnels et irrationnels, les nombres naturels et les nombres entiers: 25 - la valeur absolue d'un nombre réel: 28 - la droite réelle: 28 - l'addition dans $\mathbb{R}$: 29 (propriétés, règle des signes) - la multiplication dans $\mathbb{R}$: 30 (propriétés, règle des signes) - multiplication d'une somme par un nombre: 31 - multiplication d'une somme par une somme: 31 - la division dans $\mathbb{R}$: 32 (propriétés) - division d'une somme par un nombre: 33 - suppression des parenthèses: 33

Des techniques de calcul mental

35

Multiplication par 10, par 100, par 9, par 11, par 5, par 25, par 15; division par 10 par 100, par 5, par 125; divisibilité par 10, par 100, par 5, par 2, par 3, par 9, par 11

De la «règle de trois»

40

But, principe et méthode: 40 - pourcentage: 41 (calcul de l'intérêt annuel d'un capital) - intérêt simple: 43 - intérêt composé: 44

Des équations du premier degré

45

Définition: 45 - propriétés des égalités: 45 - résolution d'une équation du premier degré à 1 inconnue: 46 (organigramme)

Des puissances à exposants entiers de nombres réels

48

Définitions: 48 (lanième puissance, la puissance zéro, la puissance à exposants entiers négatifs) - propriétés des puissances:

cas: 49

Des radicaux	52
Définition: 52 - conséquences de la définition: 52 - Convention: 53 - règles de calcul des radicaux: 54 - racine d'une somme: 54	
De l'ordre des opérations dans $\mathbb{R}$	55
Des fonctions	56
Notion intuitive: 56 - définition: 56 - valeur numérique d'une fonction réelle: 57 - présentation d'une fonction graphique d'une fonction: 58 (repère dans le plan, point du plan coordonné)	
Fonction du premier degré entre deux variables	60
Forme générale ($y = ax + b$): 60 - graphique et construction de graphique: 60 (cas particulier: $x = -1$) - coefficient angulaire d'une droite: 63 - signification graphique de «b»: 68 - détermination de l'équation d'une droite donnée: 68 - signe d'une fonction du premier degré d'une variable: 69 (méthode)	
Fonction du second degré	73
Forme générale ($y = ax^2 + bx + c$): 73 - graphique: 73 (formule des coordonnées du sommet) - signe d'une fonction du second degré: 76 - propriété des fonctions: 76	
Des polynômes à une variable à coefficients réels	78
Définitions: 78 (polynômes, monômes, trinômes) - degré d'un polynôme à une variable: 78 - degré d'un polynôme à plusieurs variables: 79 - addition de deux polynômes: 79 - produit d'un polynôme par un nombre: 79 - produit de deux polynômes: 79 - valeur numérique d'un polynôme: 80 - égalité de deux polynômes: 80 - division de deux polynômes: 81 - division d'un polynôme en x par $x - a$: 81 (loi du reste, méthode de calcul du quotient, méthode de Horner)	
Des identités (produits) remarquables	83
De la factorisation	84
Méthode de factorisation	84
Mise en évidence: 84 - utilisation des identités remarquables: 84 - groupement de termes: 85 - artifices de calcul: 85 - division d'un polynôme en x par $x - a$: 86 - remarque: polynômes du second degré: 87	
Synthèse des méthodes de factorisation	88
Des fractions rationnelles	90
Définition: 90 - simplification: 90 - opérations sur les fractions rationnelles: 90	
Des équations à une inconnue de degré supérieur à 1	92
Equations du second degré: 92 (définition, formes générale, résolution, cas particulier: l'équation n'a pas de terme en x , l'équation n'a pas de terme indépendant, organigramme de résolution) - équation de degré supérieur à 2: 94 - équations bicarrées: 96 (organigramme de résolution)	

Des équations Irrationnelles	98
Définition: 98 - technique de résolution: 98	
Des inéquations du premier degré	99
Définition: 99 - propriétés des inégalités: 99 - résolution: 101	
Des systèmes d'équations du premier degré à 1 Inconnue	102
Définition, forme générale, solution: 102	
Résolution algébrique	102
Méthode de substitution: 102 - méthode de comparaison: 103 -	
méthode d'addition (méthode de Gauss): 104 - méthode de Cramer: 105 - représentation graphique d'une solution d'un système: 107 - système de n équations à n Inconnues: 108	
Des systèmes d'inéquation du premier degré à 2 Inconnues	113
Forme générale: 113 - signification graphique: 113 - méthode de résolution graphique: 113	
De la mise en équation d'un problème	115
Méthode et exemples: 115	
Des logarithmes décimaux	120
Définition historique: 120 - propriétés: 120 - logarithme en base a: 121 - applications: 121	
Formulaires	124
Tableau récapitulatif des formules: 124	

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE PLANE

Des définitions et axiomes	130
le plan: 130 - le point: 130 - la ligne: 130 - la droite: 131 (la demi-droite, segment de droite, longueur d'un segment de droite, segments égaux, somme de plusieurs segments, produit et quotient d'un segment par un nombre entier, produit d'un segment par une fraction, mesure d'un segment, milieu d'un segment, droites sécantes, droites parallèles, droites confondues) - les angles: 136 (angle de deux demi-droites, angles de deux droites sécantes, angles opposés par le sommet, angles adjacents, angles égaux, bissectrice d'un angle, angle plat, droit, aigu, obtus, angles déterminés par deux droites parallèles coupées par une sécante) - Droites perpendiculaires: 140 - Distance d'un point à droite: 140 - Figure plane: 141 (égalité de deux figures, polygone, triangle, triangle rectangle, équilatéral, isocèle, médiatrice d'un segment, médianes d'un triangle, médiatrice d'un triangle, hauteur d'un triangle, cercle, tangente à un cercle, figures semblables) - Symétrie par rapport à une droite: 146 - Symétrie par rapport à un point: 146	
Vecteur au sens physique	147
Mesure algébrique d'un vecteur: 147 - égalité de deux vecteur: 148 - vecteurs opposés: 148 - somme de deux vecteurs: 148 -	

différence de deux vecteurs: 149 - produit d'un vecteur par un nombre: 149 - vecteur unitaire: 149 - produit scalaire de 2 vecteurs: 150 - produit vectoriel: 150

Des propriétés

151

Médiatrice d'un segment: 151 - bissectrice d'un angle: 151 - angles opposés par le sommet: 152 - angles déterminés par deux droites parallèles coupées par une sécante: 152 - condition pour que deux droites soient parallèles: 152 - segments de droite parallèles: 153 - angles à côtés parallèles: 135 - angles à côtés perpendiculaires: 154 - théorème de Thalès: 154 - cas d'égalité des triangles: 155 - théorème de Pythagore: 156 - cas d'égalité des triangles rectangles: 156 - théorème de Thalès: 157 - droites remarquables d'un triangle: 157 (médiatrice, hauteur, médiane) - cas de similitude des triangles: 158 - cercles: 159 - vecteur au sens physique: 160 (critère de perpendicularité, construction du quotient d'un vecteur par un nombre entier positif)

Quelques formules concernant les figures planes simples

165

Définition: 165 - aires: 165 (carrées, rectangles, parallélogramme, triangle, disque, polygone)

ÉLÉMENTS DE TRIGONOMETRIE

Des définitions

170

Angle de deux demi-droites: 170 - cercle trigonométrique: 170 - mesure d'un angle: 171 (degré, radian, propriétés)

Fonction trigonométrique ou circulaire

172

Cosinus: 173 - sinus: 173 - tangente: 174 - cotangente: 174 - quelques valeurs d'angle: 175

Signe des fonctions trigonométriques

177

Sinus: 177 - cosinus: 178 - tangente: 178 - cotangente: 180 - exemples de recherche d'angles connaissant un de leurs nombres trigonométriques: 181

Des propriétés des nombres trigonométriques

184

Propriétés fondamentales: 184 - autres propriétés: 185 - relations entre les nombres trigonométriques d'angles associés: 186 (angles opposés, angles supplémentaires, angles diamétralement opposés, angles complémentaires) - théorèmes d'addition: 191 - nombres trigonométriques du double d'un angle: 192 - formules de Simpson: 193 - exemples d'utilisation des propriétés: 193

Des propriétés des triangles

196

Formules relatives au triangle rectangle: 196 - formules relatives au triangle quelconque: 198 (règle des sinus) - exemples de résolution des triangles: 199

De quelques applications typiques des propriétés des triangles 201

Mesure de la hauteur d'un arbre: 201 - distance entre deux points visibles mais non accessibles: 202 - distance entre la Terre et un corps céleste: 202

Des équations trigonométriques à une inconnue 204

Solution d'une équation trigonométrique: 204 - équations fondamentales: 205 ($\cos x = r$, $\sin x = r$, $\operatorname{tg} x = r$, $\operatorname{cotg} x = r$) - équations du type $\cos ax = b$, $\sin ax = b$, $\operatorname{tg} ax = b$, $\operatorname{cotg} ax = b$: 209 - équation pouvant se mettre sous la forme d'une égalité de deux nombres trigonométriques: 210

ÉLÉMENTS DE STATISTIQUE DESCRIPTIVE**Des définitions** 214

Population ou univers: 214 - échantillon: 214 - effectif: 214 - variable: 214 (discrète, continue) - fréquence: 216 (absolue, relative, répétition, répétition-cumulée, fréquence cumulée, diagramme en bâtonnets et histogramme de la distribution des répétitions des fréquences, polygone des répétitions des fréquences) - fonction de densité: 223 (fonction de densité relative, courbe de Gauss) - moyenne arithmétique: 225 - médiane: 226 - mode: 227 - étendue: 228 - écart moyen ou écart à la moyenne: 228 - variance: 229 - écart-type: 230 - quartiles: 231 - décile: 233 - centile: 233 - valeur centrale: 233 - variable centrée réduite: 234 - dépendance entre deux variables: 235 - méthodes d'ajustement linéaire: 237 (méthodes graphiques, méthode des moindres carrés, détermination de la droite des moindres carrés, intérêt de l'ajustement linéaire)

De la présentation des données 242

Tableau des répétitions et des fréquences: 242 - diagramme en bâtonnets des répétitions ou des fréquences: 244 - présentation d'une distribution à l'aide d'un cercle: 245

De la réduction des données 247

Groupement des valeurs par classes: 247 - remplacement des informations par quelques paramètres: 247

L'éducation des enfants chez marabout service

Aidez votre enfant dans son travail scolaire, R. GUIFFRAY & P. LAVAYSSIERE	MS 535
Almer sans tout permettre, F. DODSON	MS 432
J'apprends à lire avant 6 ans, GAUQUELIN & MOERMAN	MS 437
J'apprends à lire à mon bébé, GLENN DOMAN	MS 481
Bon appétit de 1 jour à 20 ans, G. MATHIOT & Dr. G. VERMEIL	MS 304
Comment connaître son enfant, Dr A. RIDEAU	MS 438
Comment leur dire, Dr MARCELLI	MS 431
Vaincre la dyslexie, R.H.BORDESOULES	MS 500
Le guide Marabout de la dyslexie, P. LEUNEN	MS 542
Les dessins d'enfants et leur signification, A. OLIVERIO FERRARIS	MS 297
Les échecs scolaires, O. DOT	MS 576
Comment connaître son enfant, Dr A. RIDEAU	MS 438
Comment donner à vos enfants une intelligence supérieure, S. & T. ENGELMANN	MS 150
Elever notre enfant, Drs J. RATEL, J. RICHARD & Ph. SAGLIER	MS 435
Soigner notre enfant, Drs. J. RATEL, J. RICHARD & Ph. SAGLIER	MS 434
La gymnastique corrective des enfants, H. CZECHOROWSKI	MS 563
Comment donner à vos enfants une Intelligence supérieure, S. & T. ENGELMANN	MS 150
Je comprends les mathématiques, N. GAUTIER	MS 536
Mathématiques de base, M. GARIN	MS 574
Les 30 problèmes de l'orthographe, méthode THIMONNIER	MS 527
Parents efficaces, Dr. TH. GORDON	MS 436
Pères et filles (le complexe d'Electre), W.S. APPELTON	MS 577
Le père et son enfant, F. DODSON	MS 320
Comment vaincre les peurs enfantines, Dr B. WOLMAN	MS 392
Les prénoms, un choix pour l'avenir, C. MERCIER & P. DACO	MS 369
Psychologie de la création, G. & B. VERALDI	MS 230
Les prodigieuses victoires de la psychologie moderne, P. DACO	MS 15
Répondre aux enfants jusqu'à l'adolescence, C. COTTI	MS 334
Les surdoués, R. CHAUVIN	MS 350
Tests pour mesurer l'Intelligence de votre enfant, G. WILSON & D. GRYLIS	MS 314
Tout se joue avant six ans, F. DODSON	MS 225



Ce guide, très clair, est conçu comme un aide-mémoire pour tous. Vous y retrouverez tout ce que vous avez oublié, ou ignoré, ou ... mal compris. Il vous donnera les bases de la vraie intelligence mathématique.

Vous vous croyez nul en maths ? Vous butez sur un problème ? Dans la très grande majorité des cas, c'est à un mauvais apprentissage des notions de base qu'il faut attribuer cette difficulté à saisir la logique des mathématiques.

- Cet ouvrage reprend toutes les règles de base et les illustre d'exemples.
- Pour favoriser leur compréhension, il les réexplique en faisant appel à l'intuition et à la mémoire visuelle.
- Règles et formules sont mises en évidence de manière à favoriser leur recherche et leur mémorisation.
- Mathématiques traditionnelles et modernes sont revues : l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie, la trigonométrie, la statistique.



9 782501 003575



KS-247-203

