

Terminale *F*-BT

Cours et Exercices de Mathématiques





KAM TSEMO Patrick Noël

PROFESSEUR DE LYCÉE

LAURÉAT DE LA 55^{ème} PROMOTION DE L'ENS DE
YAOUNDÉ

CAMÉROUN

MINESEC

Enseignement Technique-professionnel

Terminale F-BT

Cours et exercices

Adresse :

+237696445986 :

+237673414635 :

+237667872725 :

kam.noel@yahoo.fr :

kamtsemo@gmail.com :

Table des matières

1	Nombres complexes	8
1.1	Forme algébrique et représentation d'un nombre complexe	9
1.1.1	Forme algébrique	9
1.1.2	représentation d'un nombre complexe	9
1.1.3	Addition, Opposé d'un nombre complexe et Soustraction	10
1.1.4	Multiplication d'un complexe par un réel	11
1.2	Inverse et quotient de nombres complexes	11
1.2.1	Conjugué d'un nombre complexe	11
1.2.2	Inverse d'un nombre complexe	11
1.2.3	Opérations avec les conjugués des nombres complexes	12
1.3	Module et argument d'un nombre complexe	12
1.3.1	Définition géométrique	12
1.3.2	Calcul algébrique du module et d'un argument	13
1.3.3	Égalité de deux nombres complexes par module et argument	13
1.4	Forme trigonométrique d'un nombre complexe	14
1.4.1	Définition	14
1.4.2	Passage d'une forme à l'autre	14
1.5	Module, argument et opérations avec les nombres complexes	14
1.6	Forme exponentielle	15
1.6.1	Écriture exponentielle des complexes de module 1	15
1.6.2	Cas général	16
1.6.3	Calculs avec la notation exponentielle	16
1.7	Applications des nombres complexes	16
1.7.1	Racines n-ièmes de l'unité	16
1.7.2	Équations du second degré	17
1.7.3	Formules et applications	19
1.7.4	Application géométrique des nombres complexes	21
2	Statistique	24
2.1	Séries statistiques doubles	25
2.1.1	Tableaux statistiques à double entrée	25

2.1.2	Séries marginales	25
2.2	Représentation graphique d'une série statistique double	26
2.2.1	Nuages de points	26
2.2.2	Point moyen	27
2.3	Ajustement linéaire	27
2.3.1	Covariance	27
2.3.2	Méthode des moindres carrée	28
2.3.3	Coefficient de corrélation linéaire	29
3	Limites et continuités d'une fonction numérique	33
3.1	Limites d'une fonction	34
3.1.1	Limites de références	34
3.1.2	Limites à l'infini des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles.	34
3.1.3	Opérations sur les limites	35
3.1.4	Limites par comparaison	36
3.1.5	Limites des fonctions circulaires	37
3.2	Branche infinie	37
3.2.1	Cas des asymptotes	37
3.2.2	Courbes asymptotes	39
3.2.3	Branches paraboliques	39
3.3	Continuité d'une fonction	41
3.3.1	Continuité sur un intervalle	41
3.3.2	Image d'un intervalle par une fonction continue	41
3.3.3	Théorème des valeurs intermédiaires	42
3.3.4	Théorème des fonctions continues strictement monotone	42
4	Dérivation et étude de fonctions numériques	45
4.1	Dérivation	46
4.1.1	Fonctions dérivées	46
4.1.2	Dérivée de fonctions composées	48
4.1.3	Inégalité des accroissements finis	48
4.1.4	Dérivée et sens de variation	49
4.1.5	Théorème des fonctions dérivables et strictement monotone	49
4.1.6	Dérivées successives	50
4.1.7	Dérivées successives et applications	50
4.1.8	Extremum d'une fonction	50
4.1.9	Dérivée seconde-Points d'inflexions	51
4.2	Étude de fonctions	52
5	Primitive d'une fonctions sur un intervalle	54
5.1	Généralités	55
5.2	Primitives des fonctions de référence	56
5.2.1	Cas des fonctions usuelles de référence	56
5.2.2	Cas des fonctions circulaires de référence	56
5.3	Opérations sur les primitives	57

6	Fonctions logarithme népérien	60
6.1	Définitions et propriétés	61
6.2	Étude de la fonction $\ln$	61
6.3	Fonctions comportant $\ln$	63
6.4	Logarithme décimal	63
6.4.1	Définition	63
6.4.2	Utilisation	63
7	fonctions exponentielles	67
7.1	Définitions et propriétés	68
7.1.1	Sens de variation	69
7.1.2	Dérivée et conséquence	69
7.2	Fonctions comportant Exp	70
7.2.1	Dérivée et conséquences	70
7.2.2	Exemple d'étude de fonction	70
7.2.3	Fonctions exponentielles de base a , ($a > 0$)	71
7.3	Fonctions puissances	73
7.3.1	Définition et conséquences	73
7.3.2	Croissance comparée de $\ln x$, e^x , x^α	73
7.4	Applications des fonctions exponentielle	74
8	Suites Numériques	78
8.1	Généralités sur les suites numériques	79
8.2	Modes de définition d'une suite numérique	79
8.2.1	Suite numérique définie par une formule explicite	79
8.2.2	Suite numérique définie par une relation de récurrence	79
8.2.3	Suites majorées-minorées-bornées et suites monotones	80
8.3	Représentation graphique d'une suite numérique	81
8.3.1	Cas d'une suite définie par une formule explicite	81
8.3.2	Cas d'une suite définie par une formule de récurrence	81
8.4	Suites arithmétiques-Suites géométriques	81
8.4.1	Suites arithmétiques	81
8.4.2	Suites géométriques	82
8.5	Suites et résolution d'équations	83
8.5.1	Point fixe	84
8.5.2	Multiplicité d'une racine, fonction contractante	84
8.5.3	Théorème de point fixe	84
8.5.4	Algorithmes de résolution	85
9	Calcul intégral	90
9.1	Intégrale d'une fonction continue	91
9.1.1	Définition exemple, propriété	91
9.1.2	Interprétation géométrique	92
9.1.3	Propriétés de l'intégrale	93
9.2	Techniques de calcul intégrale	94

9.2.1	Utilisation des règles de dérivation	94
9.2.2	Intégration par parties	95
9.2.3	Changement de variable dans une intégrale	95
9.2.4	Calcul approchée d'une intégrale	96
9.3	Applications du calcul intégral	97
9.3.1	Calcul du volume d'un solide de révolution	97
9.3.2	Calcul d'aire	98
9.3.3	Calcul de la longueur d'une courbe et quelques grandeurs d'électricité	99
9.3.4	Étude d'une fonction définie par une intégrale	101
10	Équation différentielle	105
10.1	Généralités	106
10.2	Équations du type $y' - ay = 0$	107
10.3	Équations du type $y'' + ay' + by = 0$	107
10.4	Cas de quelques équations différentielles avec second membre	108
10.5	Résolution de problèmes	108
11	Coniques	115
11.1	Introduction	116
11.2	Définition par foyer, directrice et excentricité	116
11.2.1	Définition	116
11.2.2	Sommets d'une conique	117
11.3	Étude des paraboles	118
11.3.1	Définitions	118
11.3.2	Équation réduite d'une parabole	118
11.3.3	Tangente à une parabole en un point	119
11.4	Étude des coniques à centre	119
11.4.1	Équations réduites	119
11.4.2	Étude d'une ellipse	120
11.4.3	Étude des hyperboles	123
11.5	Résumé	125
11.6	Quelques applications pratiques des coniques	126
12	Géométrie dans le plan	130
12.1	Orthogonalité et droites du plan	131
12.1.1	Droite définie par un point et un vecteur directeur	131
12.1.2	Droite définie par un point et un vecteur normal	131
12.1.3	Équation normale d'une droite	132
12.1.4	Distance d'un point à une droite	133
12.2	Cercles du plan	133
12.2.1	Équation Cartésienne d'un cercle du plan	134
12.2.2	Équation paramétrique d'un cercle du plan	134
12.2.3	Équation de la tangente en un point du cercle	135

13 Géométrie dans l'espace	137
13.1 Distance d'un point à un plan	138
13.1.1 Équation cartésienne d'un plan	138
13.1.2 Calcul de la distance entre un point et un plan	139
13.2 Distance d'un point à une droite	140
13.2.1 Équation paramétrique d'une droite de l'espace	140
13.2.2 Calcul de la distance entre un point et une droite de l'espace	140
13.3 Équation d'une sphère	141
14 Entraînement	144
14.1 Exercices et Problèmes	145
14.2 Les 10 Anciens Baccalauréat	180



Nombres complexes

Sommaire

1.1	Forme algébrique et représentation d'un nombre complexe	9
1.1.1	Forme algébrique	9
1.1.2	représentation d'un nombre complexe	9
1.1.3	Addition, Opposé d'un nombre complexe et Soustraction	10
1.1.4	Multiplication d'un complexe par un réel	11
1.2	Inverse et quotient de nombres complexes	11
1.2.1	Conjugué d'un nombre complexe	11
1.2.2	Inverse d'un nombre complexe	11
1.2.3	Opérations avec les conjugués des nombres complexes	12
1.3	Module et argument d'un nombre complexe	12
1.3.1	Définition géométrique	12
1.3.2	Calcul algébrique du module et d'un argument	13
1.3.3	Égalité de deux nombres complexes par module et argument	13
1.4	Forme trigonométrique d'un nombre complexe	14
1.4.1	Définition	14
1.4.2	Passage d'une forme à l'autre	14
1.5	Module, argument et opérations avec les nombres complexes	14
1.6	Forme exponentielle	15
1.6.1	Écriture exponentielle des complexes de module 1	15
1.6.2	Cas général	16
1.6.3	Calculs avec la notation exponentielle	16
1.7	Applications des nombres complexes	16
1.7.1	Racines n-ièmes de l'unité	16
1.7.2	Équations du second degré	17
1.7.3	Formules et applications	19
1.7.4	Application géométrique des nombres complexes	21



Les nombres complexes sont d'une grande utilité tant en mathématiques qu'en sciences physiques. Ils permettent en particulier l'étude de circuits électroniques en régime sinusoïdal et ils jouèrent un rôle déterminant dans la théorie de diffusion de la chaleur, de l'électricité et de la lumière développée par Maxwell. Dans ce chapitre, on reprend et approfondit les notions apprises en première quant aux nombres complexes. On verra en particulier comment on peut les utiliser pour trouver les racines de certains polynômes à coefficients réels ou complexes, comment ils servent à résoudre des problèmes de géométrie plane ainsi que des problèmes d'analyse réelle comme celui de la primitivation de produits de fonctions trigonométriques ou la résolution d'équations trigonométriques.

1.1 Forme algébrique et représentation d'un nombre complexe

1.1.1 Forme algébrique

 **Définition :**
On appelle nombre complexe tout nombre de la forme $a + ib$, tel que a et b sont des nombres réels et $i^2 = -1$
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.



Notation et vocabulaire

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$.

 L'écriture $a + ib$ est appelée **forme algébrique** de z .

1) Le nombre réel a est appelé **partie réelle** de z et noté $Re(z)$

2) Le nombre réel b est appelé **partie imaginaire** de z et noté $Im(z)$

 Si $b = 0$, alors $z = a$; z est de ce fait un nombre réel. Donc tout nombre réel est un nombre complexe ie $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

 Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $z = ib$; le nombre z est dit **imaginaire pur**.

 **Exemple :** $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -6$ et $z_4 = 3i$ sont des nombres complexes et on a : $Re(z_1) = 4$, $Im(z_1) = 5$; $Re(z_2) = 1$, $Im(z_2) = -1$; $Re(z_3) = -6$, $Im(z_1) = 0$ et $Re(z_4) = 0$, $Im(z_4) = 3$



Théorème : Unicité de l'écriture algébrique

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes :

$$(z_1 = z_2) \text{ si et seulement si } \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

L'écriture algébrique d'un nombre complexe est unique.

NB : Comme $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, 0 est un nombre complexe appelé nombre complexe nul

1.1.2 représentation d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère **orthonormé direct** : $(O; \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}) := (O; \vec{u}, \vec{v})$.

Définition :

Tout nombre complexe $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ peut être représenté dans ce repère par :

-  un unique point : $M(a; b)$, appelé **image ponctuelle** de $z = a + ib$.
-  un unique vecteur : $\overrightarrow{OM}(a; b)$ appelé **image vectorielle** de $z = a + ib$.

On dit que $z = a + ib$ est l'affixe du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

On note souvent $M(z)$ ou $M(a + ib)$ et $\overrightarrow{OM}(z)$ ou $\overrightarrow{OM}(a + ib)$.

Remarque :

-  Les complexes $z = a \in \mathbb{R}$ sont les nombres réels et sont représentés sur l'axe des abscisses.
-  Les complexes $z = ib, b \in \mathbb{R}$ sont les imaginaires purs et sont représentés sur l'axe des ordonnées.
-  Le plan est alors appelé **plan complexe**.

On se place dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$

1.1.3 Addition, Opposé d'un nombre complexe et Soustraction**Théorème :**

-  Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors : $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.
-  Si z_1 est l'affixe d'un vecteur $\vec{w}_1$ et z_2 l'affixe d'un vecteur $\vec{w}_2$ alors $z_1 + z_2$ est l'affixe du vecteur $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$.

NB : Dans la pratique, on se passe aisément de la formule en calculant avec les règles habituelles

Théorème :

-  L'opposé du nombre complexe $z = a + ib$ noté $-z$ est : $-z := (-a) + i(-b) = -a - ib$.
-  z est l'affixe du point M . L'opposé de z est l'affixe du **symétrique** de M par rapport à l'origine.
-  Si z est l'affixe de $\vec{w}$ alors $-z$ est l'affixe de $-\vec{w}$.

Théorème :

-  Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors : $z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2) := (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$.
-  Si z_1 est l'affixe d'un vecteur $\vec{w}_1$ et z_2 l'affixe d'un vecteur $\vec{w}_2$ alors $z_1 - z_2$ est l'affixe du vecteur $\vec{w}_1 - \vec{w}_2$.
-  Soient A, B deux points d'affixes respectifs z_A, z_B . le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Point méthode Utiliser les complexes en géométrie

La méthode générale consiste à :

-  Transformer les données géométriques du texte ou les questions en terme de vecteurs puis de nombres complexes.
-  Utiliser les règles de calcul pour résoudre le problème.

Exercice d'application

On considère trois points A, B, C d'affixes respectifs : $z_A = -3 + 2i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = 3 - 4i$.

- 1) Déterminer l'affixe du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.
- 2) Déterminer les coordonnées du centre de ce parallélogramme.

Correction

- 1) ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ie $z_B - z_A = z_C - z_D$.
Ainsi $z_D = z_C - z_B + z_A$. Par suite, $z_D = -1 - 3i$
- 2) I est le centre du parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ ie $z_I - z_A = z_C - z_I$.
D'où, $z_I = \frac{z_A + z_C}{2}$, par suite $z_I = -i$.

1.1.4 Multiplication d'un complexe par un réel**Théorème :**

Soit $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{w}$ le vecteur d'affixe z . Le complexe λz est l'affixe du vecteur $\lambda \vec{w}$.

Exemple Soit A, B deux points du plan d'affixe $z_A = 3 - i$, $z_B = -2 + 3i$.
L'affixe du vecteur $2\overrightarrow{AB}$ est : $2(z_B - z_A) = 2(-5 + 4i) = -10 + 8i$.

1.2 Inverse et quotient de nombres complexes**1.2.1 Conjugué d'un nombre complexe****Définition**

- Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$, est le complexe $a - ib$, noté $\bar{z}$
- Si z est l'affixe de M, $\bar{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des réels.

Théorème :

Soit z un nombre complexe :

- ✓ $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$.
- ✓ z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.
- ✓ z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.

1.2.2 Inverse d'un nombre complexe**Théorème :**

Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un nombre complexe z' tel que $zz' = 1$.

- ☆ Ce nombre s'appelle l'inverse de z , noté $\frac{1}{z}$ et il est tel que : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \times \bar{z}}$.
- ☆ Si $z = a + ib$ alors la forme algébrique de $\frac{1}{z}$ est : $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}$.

Exemple : Dans la pratique, on effectue une multiplication par le conjugué du dénominateur

pour se ramener à un dénominateur réel :

1 $z = 2i$, on a : $\frac{1}{z} = \frac{-2i}{2i \times -2i} = \frac{-2i}{4} = -\frac{1}{2}i$

2 $z = 2 + 3i$, on a : $\frac{1}{z} = \frac{1}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$.

Exercice d'application

Résoudre l'équation : $(1+i)z - 2 = 3 + 2i$

Correction On procède comme pour les nombres réels en isolant l'inconnue z :

$$(1+i)z - 2 = 3 + 2i \Leftrightarrow (1+i)z = 5 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{5+2i}{1+i} = \frac{(5+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{7-3i}{2}$$

1.2.3 Opérations avec les conjugués des nombres complexes

Théorème :

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes :

☆ $\overline{\overline{z_1}} = z_1$

☆ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

☆ $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.

☆ $\overline{(z_1)^n} = (\overline{z_1})^n$

☆ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, (z_2 \neq 0)$.



Exemple : Démontrons que : $S = (1+i)^5 + (1-i)^5$ est un nombre réel.

Posons : $z = 1+i$ On a : $\overline{(1+i)^5} = (\overline{1+i})^5 = (1-i)^5$. Donc, $S = z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$.

D'où S est un nombre réel.

1.3 Module et argument d'un nombre complexe

1.3.1 Définition géométrique

Définition

Soit z un nombre complexe.

Soit M (respectivement $\vec{W}$) un point (respectivement un vecteur) d'affixe z .

1 On appelle **module** de z la distance OM (ou la norme $\|\vec{W}\|$). Le module de z est noté $|z|$.

2 Si $z \neq 0$ on appelle **argument** de z une mesure en radians de l'angle $(\vec{U}; \widehat{OM})$ ou (ou de $(\vec{U}; \vec{W})$). Un argument de z est noté $\arg(z)$.

3 Si $z \neq 0$ on appelle **argument principal** de z la mesure principale de l'angle $(\vec{U}; \widehat{OM})$ ou (ou de $(\vec{U}; \vec{W})$). L'argument principale de z est noté $\text{Arg}(z)$.

4 Le complexe nul n'a pas d'argument, ni d'argument principal mais a pour module 0

NB : L'argument principale est unique.

Remarque :

$\arg(z)$ peut prendre une infinité de valeurs différentes : si θ est une mesure de $\arg(z)$ alors $\theta + k2\pi$ est une autre mesure de $\arg(z)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On notera : $\arg(z) = \theta[2\pi]$ et on dit que l'argument de z vaut θ modulo 2π ou à 2π près.



Exemple : On a : $|i| = OV = 1$ et $\arg(i) = (\vec{U}; \widehat{OV}) = \frac{\pi}{2}$.

Soit M_1 d'affixe -4 on a ; $|-4| = OM_1 = 4$ et $\arg(-4) = (\vec{U}; \overrightarrow{OM_1}) = \pi$.

Soit M_2 d'affixe $1 + i$.

On a $|1 + i| = OM_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = 2$ (d'après la formule de des distances)

et $\arg(1 + i) = (\vec{U}; \overrightarrow{OM_2}) = \frac{\pi}{4}$ (la diagonale du carré OOM_2V étant la bissectrice de $(\vec{U}; \vec{V})$).

1.3.2 Calcul algébrique du module et d'un argument

Théorème :

Soit $z = a + ib$ un complexe.

1 $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

2 Si $z \neq 0$ alors $\theta = \arg(z)$ peut être déterminé par :
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

 **Exemple :** Détermination du module et d'un argument du complexe $z = -1 + i\sqrt{3}$.

On a $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.

On cherche à présent $\theta = \arg(z)$ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Or :

$$\cos\theta = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{2\pi}{3}[2\pi] \\ \theta = -\frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

Comme, $\sin\theta > 0$ il s'ensuit que $\theta = \arg(z) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

1.3.3 Égalité de deux nombres complexes par module et argument

Théorème :

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument.

Remarque :

1 $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

2 $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\arg(z) = 0[2\pi]$ ou $\arg(z) = \pi[2\pi]$ ou $z = 0$

3 z est imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\arg(z) = \frac{-\pi}{2}[2\pi]$ ou $z = 0$.

4 Attention, pour l'égalité des arguments, il faut la penser « à 2π près ». Sauf dans le cas des arguments principaux où la mention « à 2π près » est inutile.

1.4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1.4.1 Définition

Définition

Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)[2\pi]$. Cette forme s'appelle **forme trigonométrique** de z .

Remarque :

1 Dans l'écriture sous forme trigonométrique, on peut remplacer θ par n'importe quelle valeur $\theta + k2\pi$, k entier relatif.

2 Dans l'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, il est **crucial** que $r > 0$.

Par exemple : $z = -2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$, n'est pas une forme trigonométrique car -2 n'est pas strictement positif.

1.4.2 Passage d'une forme à l'autre

Théorème :

Soit z un complexe non nul. $z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases} \iff \begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$

1.5 Module, argument et opérations avec les nombres complexes

Dans les deux théorèmes qui suivent z et z' sont des nombres complexes.

Théorème :

- | | | |
|---|-----------------------------------|---|
| 1 | $z \times \bar{z} = z ^2$ | (corrélacion module-conjugué d'un nombre complexe) |
| 2 | $ -z = z $ | $\arg(-z) = \arg(z) + \pi[2\pi]$ pour $z \neq 0$ |
| 3 | $ z = \bar{z} $ | $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)[2\pi]$ pour $z \neq 0$ |
| 4 | $ z \times z' = z \times z' $ | $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$ pour $z \neq 0$ et $z' \neq 0$ |
| 5 | $ z^n = z ^n$ | $\arg(z^n) = n \times \arg(z)[2\pi]$ si $z \neq 0$ |
| 6 | $ z + z' \leq z + z' $ | (Inégalité triangulaire ou inégalité de Minkowski) |

Théorème :

- 1) $z \neq 0 : \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$
- 2) $z' \neq 0 : \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi] \text{ pour } z \neq 0$

Exercice d'application

1) Soient $z_1 = -\sqrt{3} + i$ et $z_2 = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$. Deux nombres complexes. Déterminer le module et un argument de $z_1 z_2$.

2) Déterminer la forme algébrique de $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2016}$.

Correction

1) on a : $|z_1| = 2$ et $|z_2| = \frac{1}{3}$.

Or : $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, donc : $|z_1 z_2| = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

On a : $\theta_1 = \arg(z_1) = \frac{5\pi}{6}[2\pi]$ et $\theta_2 = \arg(z_2) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Dès lors, comme $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi] = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}[2\pi] = \frac{7\pi}{6}[2\pi]$.

2) Posons : $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Il est trivial que : $z = -3z_2$ $|z| = |-3 \times z_2| = |-3| \times |z_2| = 3 \times \frac{1}{3} = 1$

$\arg(z) = \arg(z_2) + \pi[2\pi] = \frac{4\pi}{3}[2\pi] = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

En fin, $|z^{2016}| = |z|^{2016} = 1^{2016} = 1$ et $\arg(z^{2016}) = 2016 \times \arg(z)[2\pi] = 2016 \times -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$\arg(z^{2016}) = -672 \times 2\pi[2\pi] = 0[2\pi]$. Par suite $z^{2016} = 1$

1.6 Forme exponentielle

1.6.1 Écriture exponentielle des complexes de module 1

Définition

Tout nombre complexe de module 1 et d'argument θ ($z = \cos\theta + i\sin\theta$ sa *forme trigonométrique*) peut s'écrire sous la forme :

$$z = \cos\theta + i\sin\theta := e^{i\theta}$$



Exemple :

La forme algébrique des nombres complexes $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_2 = e^{i\pi}$ et $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$ est :

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$\text{et } z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i.$$

1.6.2 Cas général

Définition

Tout nombre complexe $z \neq 0$ s'écrit sous la forme $z := re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)[2\pi]$. Cette écriture est appelée « **forme exponentielle du complexe z** ».

Réciproquement Si $z \in \mathbb{C}^*$ et $z := re^{i\theta}$ avec $r > 0$ alors : $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)[2\pi]$.



Exemple : La forme exponentielle des nombres : $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = -2i$ est :

On a $|z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ donc : $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

De même, $|z_2| = 2$ et $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc : $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

1.6.3 Calculs avec la notation exponentielle

Théorème :

Pour tous nombres réels θ_1, θ_2 on a :

1 $e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

2 $\left(e^{i\theta_1}\right)^n = e^{i.n\theta_1}$. (Formule de Moivre)

3 $\frac{1}{e^{i\theta_1}} = e^{-i\theta_1} = \overline{e^{i\theta_1}}$

4 $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

1.7 Applications des nombres complexes

1.7.1 Racines n-ièmes de l'unité

Dans tout ce paragraphe n désigne un entier naturel non nul :

Définition :

Soit $z \in \mathbb{C}$,

1 On appelle racine n -ième du nombre complexe z tout nombre complexe ω tel que : $\omega^n = z$

2 On appelle racine n -ième de l'unité une racine n -ième de 1 c'est à dire tout nombre complexe ω tel que : $\omega^n = 1$



Exemple : i est une racine deuxième de -1 ; $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est une racine cubique de 1.

NB : On note par $\mathbb{U}$ l'ensemble des racines n -ième de l'unité

Théorème :

Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Il y a exactement n racines n -ièmes de l'unité, elles sont données par les puissances de ω : ω^k avec $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$

ie $\mathbb{U} = \{\omega^0, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\} := \{1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, e^{i\frac{6\pi}{n}}, \dots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\}$

 Théorème :

La somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle :

$$\text{ie } \sum_{z \in \mathbb{U}} z = 1 + \omega^1 + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$$

Expression des racines n -ièmes d'un nombre complexe **Théorème :**

Un complexe non nul $\rho e^{i\theta}$ admet n racines n -ièmes données par :

$$Z_k = (\sqrt[n]{\rho}) e^{i \frac{\theta + k2\pi}{n}}, \text{ avec } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

1.7.2 Équations du second degré**Équations du second degré à coefficient réel** **Théorème :**

Pour tout nombre réel non nul a , l'équation $z^2 = a$ admet deux racines dans $\mathbb{C}$:

- ☆ Si $a > 0$ alors les racines sont $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$
- ☆ Si $a < 0$ alors les racines sont $-i\sqrt{|a|}$ et $i\sqrt{|a|}$.

 **Exemple :** Les solutions de $z^2 = 16$ sont 4 et -4. Les solutions de $z^2 = -5$ dans $\mathbb{C}$ sont : $-i\sqrt{5}$ et $i\sqrt{5}$. (alors que cette équation n'a aucune solution dans $\mathbb{C}$).

 Théorème :

Soit, $az^2 + bz + c = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation.

- ☆ Si $\Delta = 0$ alors l'équation a une unique solution dans $\mathbb{R}$, $z_0 = \frac{-b}{2a}$.
- ☆ Si $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$, $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- ☆ Si $\Delta < 0$ alors l'équation a deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont **conjuguées**

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exercice d'application

Résoudre l'équation : $z^2 - 2z = -3$

Correction On ramène à un second membre nul : $z^2 - 2z + 3 = 0$. On a $\Delta = -8$, le discriminant est strictement négatif, il y a donc deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{2 - i\sqrt{8}}{2} = 1 - i\sqrt{2} \text{ et } z_2 = \frac{2 + i\sqrt{8}}{2} = 1 + i\sqrt{2}$$

qui sont bien complexes conjuguées.

NB : Toute expression $Q(z) = az^2 + bz + c$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ se factorise dans $\mathbb{C}$ et on a : $Q(z) = az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ où z_1, z_2 sont les racines de Q .

Équations du second degré à coefficient dans $\mathbb{C}$ **Racine carrée d'un nombre complexe** **Définition :**

Soit un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$. On appelle racine carrée de z une racine deuxième de z , c'est-à-dire un complexe Z vérifiant $Z^2 = z$

 proposition :

Tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées. De plus, ces deux racines carrées sont opposées l'une de l'autre.

 Remarque :

La notation $\sqrt{z}$ n'a de sens que pour $z \in \mathbb{R}_+$. Si on l'utilise à mauvais escient, on aboutit vite à des absurdités. **Par exemple :** $-1 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \times -1} = \sqrt{1} = 1$

Pour calculer en pratique les racines carrées d'un nombre complexe z , le plus simple consiste souvent à mettre z sous forme trigonométrique et à appliquer les formules précédentes. On dispose également d'une méthode permettant de calculer les parties réelles et imaginaires des racines carrées de z .

Il est judicieux d'utiliser cette méthode lorsque l'argument principal de z n'est pas un angle remarquable.

 Point méthode : calcul des racines carrées d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Soit $Z = X + iY$ une des deux racines carrées de z : $Z^2 = z$. On a :

$$\begin{cases} |Z|^2 = |z| \\ \operatorname{Re}(Z^2) = \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(Z^2) = \operatorname{Im}(z) \end{cases} \quad \text{On en déduit : } \begin{cases} X^2 + Y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ X^2 - Y^2 = a \\ 2XY = \operatorname{Im}(z) \end{cases}$$

La résolution de ce système permet d'obtenir les racines carrées de z .

 Exemple :

Calculons les racines carrées de $z = 8 - 6i$. Soit $Z = X + iY$ une des deux racines carrées de z . Les réels X et Y satisfont :

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = \sqrt{100} = 10 \\ X^2 - Y^2 = 8 \\ 2XY = -6 \end{cases}$$

Par addition des deux premières équations, on obtient :

$X = 3$ ou $X = -3$. Par soustraction de ces deux mêmes équations, on obtient : $Y = 1$ ou $Y = -1$.

Comme le produit XY est négatif, les seules possibilités sont $X = 3$ et $Y = -1$ ou alors $X = -3$ et $Y = 1$. En conclusion, $Z = 3 - i$ ou $Z = -3 + i$.

On vérifie au brouillon que ces deux complexes vérifient bien $Z^2 = 8 - 6i$.

Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes

 Théorème :

Soient a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$.

Considérons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$

1 Si $\Delta = 0$ l'équation admet une racine double z_0 donnée par $z_0 = -\frac{b}{2a}$

2 Si $\Delta \neq 0$ et si δ désigne une des deux racines carrées de Δ alors l'équation admet deux racines distinctes z_1 et z_2 données par : $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$

1.7.3 Formules et applications

 Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z' , pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2 \quad (z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$$

$$(z + z')(z - z') = z^2 - z'^2 \quad (z + z')^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^{n-k} z'^k \quad (\text{Formule du binôme de Newton})$$

 **Algorithme de détermination des coefficients C_n^k de la formule de Newton**

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
...									

Triangle de Pascal

 Théorème : Formules de Moivre

$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}, (e^{i\theta})^n = e^{i.n\theta}$ c'est à dire $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Le mathématicien français **Abraham De Moivre** (XVII ième siècle) est l'auteur de cette formule souvent attribuée injustement à **Stirling**.

 Point méthode : Application de la formule de De Moivre

Pour exprimer $\cos n\theta$ ou $\sin n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.

1 On remarque que $\cos n\theta = \operatorname{Re}[(\cos\theta + i\sin\theta)^n]$ et que $\sin n\theta = \operatorname{Im}[(\cos\theta + i\sin\theta)^n]$

2 Puis on utilise la formule du binôme pour développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$

3 On en extrait alors la partie réelle et la partie imaginaire pour obtenir $\cos n\theta$ $\sin n\theta$.

 **Exemple :** Exprimons $\cos 3\theta$ en fonctions de $\sin\theta$ et $\cos\theta$:

D'après la formule de De Moivre on a : $\cos 3\theta = \operatorname{Re}[(\cos\theta + i\sin\theta)^3]$.

Or : d'après la formule du binôme de Newton on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = C_3^0(\cos\theta)^3(i\sin\theta)^0 + C_3^1(\cos\theta)^2(i\sin\theta)^1 + C_3^2(\cos\theta)^1(i\sin\theta)^2 + C_3^3(\cos\theta)^0(i\sin\theta)^3$$

D'après le triangle de Pascal on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta i\sin\theta + 3(\cos\theta)(-i\sin^2\theta) - i\sin^3\theta$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

$$\text{Ainsi, on a : } \cos 3\theta = \operatorname{Re}[(\cos\theta + i\sin\theta)^3] = \operatorname{Re}[(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)]$$

$$\text{D'où } \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

Exercice : Polynômes de Tchebychev

Il est possible d'exprimer $\cos n\theta$ uniquement à l'aide de $\cos\theta$ sous la forme $T_n(\cos\theta)$.

$T_n(x)$ est un polynôme appelé le n -ième polynôme de Tchebychev.

Pour cela, il suffit de transformer les termes en $\sin\theta$ en utilisant la formule $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.

Déterminer les 5 premiers polynômes de Tchebychev.

Théorème : Formules d'Euler

Soit θ un réel quelconque. Alors :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Bon à savoir

Leonhard Euler (1707-1783), de nationalité suisse, est l'un des plus talentueux mathématiciens. Il a découvert un nombre incroyable de formules.

Ces formules permettent de linéariser (transformer des produits en sommes) des expressions trigonométriques. Cette transformation est particulièrement utile lors du calcul d'intégrales.

Point méthode : Application de la formule d'Euler

Pour linéariser un produit de sinus et de cosinus :

- 1 On remplace les $\cos(a.\theta)$ et les $\sin(b.\theta)$ à l'aide des formules d'Euler.
- 2 On développe l'expression obtenue à l'aide de la formule du binôme.
- 3 On regroupe les termes conjugués entre eux.
- 4 On réutilise les formules d'Euler pour retrouver des cosinus et des sinus.

 **Exemple :** Linéarisons $\cos^2\theta$.

$$\text{On a : } \cos^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \left[e^{i2\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-i2\theta} \right] = \frac{1}{4} \left[e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} + 2 \right] = \frac{1}{4} \left[2\cos 2\theta + 2 \right]$$

$$\text{D'où } \cos^2\theta = \frac{1}{4} \left[2\cos 2\theta + 2 \right] = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$$

Point méthode : Factorisation par l'angle moitié.

Cette technique est TRES utilisée (ex : recherche de la forme trigonométrique d'un complexe).
Remarquons que :

$$\begin{cases} e^{ix} + e^{iy} = e^{i\frac{x+y}{2}} \left(e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{-i\frac{x-y}{2}} \right) = 2e^{i\frac{x+y}{2}} \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ e^{ix} - e^{iy} = e^{i\frac{x+y}{2}} \left(e^{i\frac{x-y}{2}} - e^{-i\frac{x-y}{2}} \right) = 2i.e^{i\frac{x+y}{2}} \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{cases} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on obtient :

$$e^{ix} + 1 = e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}} \right) = 2e^{i\frac{x}{2}} \cos\frac{x}{2}$$

$$e^{ix} - 1 = e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}} \right) = 2ie^{i\frac{x}{2}} \sin\frac{x}{2}$$

1.7.4 Application géométrique des nombres complexes

Propriétés

Soient A, B et C trois points distincts d'affixes respectives a, b et c .

$$1 \quad \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$$

$$2 \quad \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{AC}{AB}$$

Propriétés

Soit A, B et C les points distincts d'affixe $a, b, c \in \mathbb{C}$ on a :

$$1 \quad (A, B \text{ et } C \text{ alignés}) \Leftrightarrow \frac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}$$

$$2 \quad (\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}) \Leftrightarrow \frac{c-a}{c-b} \in i\mathbb{R}$$

$$3 \quad (ABC \text{ est isocèle en } A) \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{i\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

$$4 \quad (ABC \text{ est rectangle isocèle en } A) \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = \pm i$$

$$5 \quad (ABC \text{ est rectangle en } A) \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = ib \quad (b \in \mathbb{R})$$

$$6 \quad (ABC \text{ est équilatéral}) \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

Propriétés

soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ n points d'affixes respectives $z_{A_1}, z_{A_2}, \dots, z_{A_n}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, n nombres réels dont la somme est non nulle.

L'affixe du barycentre G du système de points $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ est :

$$z_G = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k z_{A_k}}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}$$

**Exemple :**

L'affixe du milieu d'un segment $[AB]$ est : $\frac{z_A + z_B}{2}$.

L'affixe du centre de gravité d'un triangle ABC est : $\frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C respectivement d'affixe $z_A = 2i$, $z_B = -2 - i$ et $z_C = 2 - i$. ABC est isocèle en A .

En effet, $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$. Comme $\left| \frac{5}{13} + \frac{12}{13}i \right| = 1$,

il s'ensuit que : $\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i = e^{i\theta}$ où $\theta := \arg\left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i\right)[2\pi]$. D'où, ABC est isocèle en A .



Biographie

Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle et mort le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg.

Peu après sa naissance les parents d'Euler déménagent à Riehen. Le père d'Euler est un ami de la famille Bernoulli et Jean Bernoulli, dont Euler profita des leçons, est alors considéré comme le meilleur mathématicien européen. Le père d'Euler souhaite que Leonhard devienne comme lui pasteur mais Jean Bernoulli qui a remarqué les aptitudes remarquables de son élève, le convainc qu'il est destiné aux mathématiques. Après ses études à Bâle, il obtient un poste à Saint-Pétersbourg en 1726 qu'il quitte pour un poste à l'académie de Berlin en 1741. Malgré la qualité de ses contributions à l'académie, il est contraint de la quitter en raison d'un conflit avec Frédéric II. Voltaire qui était bien vu par le roi avait des qualités rhétoriques qu'Euler n'avait pas et dont il fut la victime. En 1766, il retourne à Saint-Pétersbourg où il décéda en 1783. Euler souffrit tout au long de sa vie de graves problèmes de vue. Fait remarquable, il effectua la plus grande partie de ses découvertes lors des dix-sept dernières années de sa vie, alors qu'il était devenu aveugle. Il fut, avec 886 publications, un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps. Il est à l'origine de multiples contributions en analyse (nombres complexes, introduction des fonctions logarithmes et exponentielles, détermination de la somme des inverses des carrés d'entiers, introduction de la fonction gamma, invention du calcul des variations, ...), géométrie (cercle et droite d'Euler d'un triangle, formule liant le nombre de faces, d'arêtes et de sommets d'un polyèdre, ...), théorie des nombres (fonction indicatrice d'Euler, ...), théorie des graphes (problème des sept ponts de Königsberg) ou même en physique (angles d'Euler, résistance des matériaux, dynamique des fluides...) et en astronomie (calcul de la parallaxe du soleil,...).



Biographie

Abraham de Moivre né le 26 mai 1667 à Vitry-le-François et mort le 27 novembre 1754 à Londres.



Abraham de Moivre est un mathématicien français qui vécut la plus grande partie de sa vie en exil à Londres en raison de la révocation de l'Edit de Nantes. Il fut l'auteur de deux ouvrages majeurs en mathématiques. Le premier, consacré aux probabilités *Doctrine of chance* et paru en 1718, s'intéresse en particulier au calcul des probabilités d'un événement aléatoire dépendant d'autres événements aléatoires ainsi qu'aux problèmes de convergence des variables aléatoires. Le second, *Miscellanea Analytica*, paru en 1730, est un ouvrage d'analyse dans lequel figure pour la première fois la fameuse *formule de Stirling*. On raconte cette histoire au sujet de sa mort. Il s'était rendu compte qu'il dormait un quart d'heure de plus chaque nuit. En utilisant cette suite arithmétique, il avait calculé à quelle date il mourrait : cela devait correspondre au jour où il dormirait 24 heures. Ce fut exactement ce qu'il advint.

Sommaire

2.1	Séries statistiques doubles	25
2.1.1	Tableaux statistiques à double entrée	25
2.1.2	Séries marginales	25
2.2	Représentation graphique d'une série statistique double	26
2.2.1	Nuages de points	26
2.2.2	Point moyen	27
2.3	Ajustement linéaire	27
2.3.1	Covariance	27
2.3.2	Méthode des moindres carrée	28
2.3.3	Coefficient de corrélation linéaire	29



Autrefois la statistique était une science qui s'occupait seulement de la démographie (étude de la population humaine) ; nombre d'habitant des villes ; taux de mortalité, de naissance, densité. Actuellement la statistique peut être vue comme l'ensemble des méthodes et des techniques permettant de traiter les données (**informations chiffrées**) associées à une situation ou un phénomène. **Par exemples** le recensement de la population, la production agricole d'un pays, l'efficacité d'un nouveau remède contre telle maladie, rendement d'une nouvelle variété de riz, de cacao ou de café. La statistique se révèle être un outil fondamental d'aide à la décision. Il est question ici d'apprendre à étudier, d'interpréter et analyser simultanément deux caractères pour une population donnée. La modalité associée à un individu étant dans ce cas un couple de réels.

2.1 Séries statistiques doubles

2.1.1 Tableaux statistiques à double entrée

Les couples de variables statistiques sont représentés sous forme de tableaux à deux dimensions ou **tableaux de contingence** ou **tableau de corrélation**.

Soit X et Y deux caractères à étudier. X prend p valeurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ et Y prend q valeurs $y_1, y_2, \dots, y_q$. On obtient ainsi une série statistique à deux caractères notées $(x_i; y_j, n_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$

On pose :

$$n_{i.} := \sum_{j=1}^q n_{ij} \text{ et } n_{.j} := \sum_{i=1}^p n_{ij}$$

Tableaux des effectifs

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_j	...	y_q	Total
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1j}	...	n_{1q}	$n_{1.}$
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2j}	...	n_{2q}	$n_{2.}$
$\vdots$	...	...	...	...	...	...	$\vdots$
x_i	n_{i1}	n_{i2}	...	n_{ij}	...	n_{iq}	$n_{i.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_p	n_{p1}	n_{p2}	...	n_{pj}	...	n_{pq}	$n_{p.}$
Total	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.j}$	...	$n_{.q}$	n

2.1.2 Séries marginales

La **répartition marginale** permet d'étudier la population suivant un seul caractère.

La répartition marginale selon le caractère X

Modalité	x_1	x_2	...	x_i	...	x_p
effectifs	$n_{1.}$	$n_{2.}$	...	$n_{i.}$	...	$n_{p.}$

La répartition marginale selon le caractère Y

Modalité	y_1	y_2	...	y_j	...	y_q
effectifs	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.j}$	...	$n_{.q}$



Exemple :

Lors d'une enquête auprès des élèves du lycée, on a étudié les caractères suivants :



nombre de livres lus au cours du dernier mois X ;



nombre de sorties au cinéma au cours du dernier mois Y .

Les résultats sont représentés dans le tableau suivant.

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	5	Total
0	35	30	50	25	12	0	152
1	34	58	44	47	10	19	212
2	72	65	57	30	12	7	243
3	24	32	26	25	16	6	129
4	5	21	20	11	7	0	64
Total	170	206	197	138	57	32	800

Les répartitions marginales :

1) Suivant le caractère X (nombre de livres lus)

x_i	0	1	2	3	4
n_i	152	212	243	129	64

2) Suivant le caractère Y (nombre de sorties au cinéma)

y_j	0	1	2	3	4	5
n_j	170	206	197	138	57	32

2.2 Représentation graphique d'une série statistique double

2.2.1 Nuages de points

Soit $(x_i; y_j, n_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$ une série statistique double de caractères X et Y ,

$$X := \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \text{ et } Y := \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$$

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Définition :

On appelle nuage de points associé à la série $(x_i; y_j, n_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$, l'ensemble des points

$$M_{ij} \begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix} \text{ avec } 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$$

On a deux représentations possibles du nuage de points associé à une série statistique :

la représentation par points pondérés et la représentation par tâches.

Représentation par points pondérés

Dans ce cas, on indique à côté de chaque point M_{ij} l'effectif n_{ij} .

Représentation par tâches

Ici, chaque point M_{ij} est remplacé par un disque dont l'aire est proportionnelle à n_{ij} . Pour la représentation pratique, on se donne un rayon arbitraire à l'un quelconque des points M_{ij} .

Il est conseillé de prendre le point qui a le plus grand effectif. Si l'effectif de ce point est n_0 , et si on a choisi pour rayon r_0 , alors l'aire du disque est πr_0^2 . Soit r le rayon du disque centré en un point dont le couple de coordonnées a pour effectifs n , l'aire du disque correspondant est πr^2 .

or d'après l'hypothèse de proportionnalité $\frac{\pi r_0^2}{n_0} = \frac{\pi r^2}{n}$, donc $r^2 = \frac{\pi r_0^2}{n_0} \times n$. Ainsi, $r = r_0 \sqrt{\frac{n}{n_0}}$

2.2.2 Point moyen

Définition :

Soit $(x_i; y_j, n_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$ une série statistique double de caractères X et Y .

On appelle **point moyen du nuage** de points représentant cette série, le point de coordonnées $(\bar{x}; \bar{y})$ où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ désignent les moyennes respectives des séries marginales $(x_i; n_i)$ et $(y_j; n_j)$ associées à la série.



Exemple :

Déterminons le **point moyen du nuage** de points représentant la série statistique de l'exemple précédent :

$$\bar{x} = \frac{0 \times 152 + 1 \times 212 + 2 \times 243 + 3 \times 129 + 4 \times 64}{800} = \frac{1341}{800} = 1,6762$$

$$\bar{y} = \frac{0 \times 170 + 1 \times 206 + 2 \times 197 + 3 \times 138 + 4 \times 57 + 5 \times 32}{800} = \frac{701}{400} = 1,7525$$

Ainsi, le point moyen est :

$$G(1,6762; 1,7525)$$



2.3 Ajustement linéaire

Ajuster un nuage de points consiste à déterminer une courbe simple passant « *le plus près possible* » des points du nuage. Si la courbe recherchée est une droite, l'ajustement est dit **linéaire**.

Dans toute la suite, on considère une série statistique à deux caractères x et y telle que l'effectif de chaque modalité est égal à 1. Une telle série sera notée $(x_i; y_i)_{1 \leq i \leq N}$ où N est l'effectif total de la série et $(x_i; y_i)$ la modalité du i ème individu. Le nuage de points associé à cette série est alors l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i; y_i)$.

Remarque :

Le cas ici considéré est un cas très particulier du cas général d'une série statistique à deux caractères. On a en effet $p = q = n$, $n_{ii} = 1$ et pour $i \neq j$, $n_{ij} = 0$.

2.3.1 Covariance

Définition :

Soit $(x_i; y_i)_{1 \leq i \leq N}$ une série statistique double de caractères X et Y d'effectif total N .

On appelle **covariance** de ladite série et on note $Cov(x; y)$ le nombre réel défini par :

$$Cov(x; y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

NB : Dans la pratique on n'utilise pas cette définition, on optera plus pour la forme donnée dans la proposition suivante, qui est une conséquence de cette définition.

proposition :

Soit $(x_i; y_i)_{1 \leq i \leq N}$ une série statistique double de caractères X et Y d'effectif total N . On a :

$$Cov(x; y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

2.3.2 Méthode des moindres carrée

En statistique, il existe plusieurs méthode d'ajustement notamment l'ajustement analytique (**La méthode des points médians**), l'ajustement mécanique (**l'ajustement mécanique par moyennes échelonnées ou par moyenne discontinue ou par la méthode des moyenne mobiles.**) ; l'ajustement par la méthode de Mayer, l'ajustement analytique (**Méthode des moindres carrés**)....

L'objectif de cette partie est de présenter la **Méthode des moindres carrés**, qui dans le cas d'un ajustement linéaire permet de déterminer deux droites appelées **Droites de régression**.

1 Droite de régression de y en x .

Soit $(x_i; y_i)_{1 \leq i \leq N}$ une série statistique double de caractères x et y telle que : $V(x) \neq 0$. La droite de régression de y en x passe par le point moyen du nuage et à pour coefficient directeur $\frac{Cov(x; y)}{Var(x)}$.

Une équation de cette droite est

$$y - \bar{y} = \frac{Cov(x; y)}{Var(x)}(x - \bar{x})$$

2 Droite de régression de x en y .

Soit $(x_i; y_i)_{1 \leq i \leq N}$ une série statistique double de caractères x et y telle que : $V(y) \neq 0$. La droite de régression de x en y passe par le point moyen du nuage et une équation de cette droite est

$$x - \bar{x} = \frac{Cov(x; y)}{Var(y)}(y - \bar{y})$$

Remarque :

Si la covariance de la série est non nulle, le coefficient directeur de cette droite est $\frac{Var(y)}{Cov(x; y)}$

Remarque :

Dans le cas général, soit $(x_i; y_j; n_{ij})_{1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq q}$ une série statistique double de caractères X et Y . On appelle covariance de ladite série et on note $Cov(x; y)$ le nombre réel défini par :

$$Cov(x; y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \left[\sum_{j=1}^q n_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \left[\sum_{j=1}^q n_{ij} x_i y_j \right] - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

2.3.3 Coefficient de corrélation linéaire

Définition :

Soit $((x_i; y_i))_{1 \leq i \leq N}$ une série statistique double de caractères x et y telle que : $Var(x) \neq 0$ et $Var(y) \neq 0$. On appelle coefficient de corrélation linéaire de cette série le nombre réel noté r et définit par :

$$r := \frac{Cov(x; y)}{\sqrt{Var(x)} \cdot \sqrt{Var(y)}} = \frac{Cov(x; y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$



Exercice d'application :

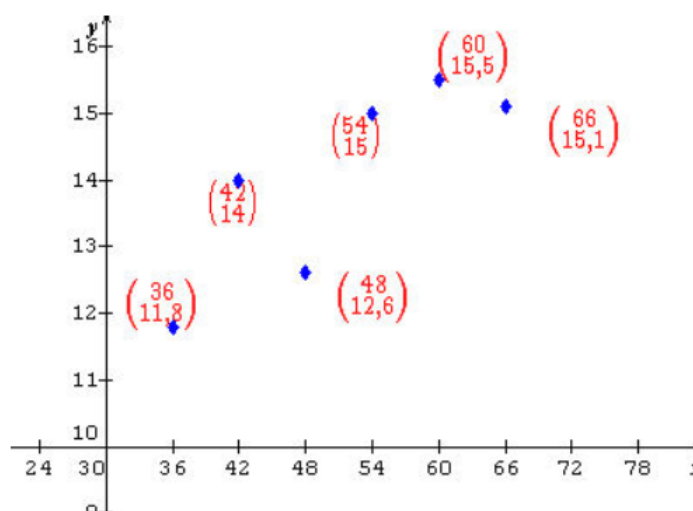
Le tableau suivant donne la tension artérielle moyenne y en fonction de l'âge x d'une population.

Age (x_i)	36	42	48	54	60	66
Tension (y_i)	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

1. Représenter le nuage de point associé à cette série.
2. Déterminer les coordonnées $(\bar{x}; \bar{y})$ du point moyen G du nuage.
3. Déterminer les variances $Var(x)$ et $Var(y)$ des caractères respectifs x et y .
4. Déterminer la covariance $Cov(x; y)$ de la série $(x_i; y_i)$.
5. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et une équation de la droite de régression de x en y . Tracer ces deux droites.
6. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.
7. Une personne de 70 ans a une tension artérielle de 16,2. Cela vous paraît-il « normal » ?

Solution

1. Le nuage de point est :



2. Les coordonnées $(\bar{x}; \bar{y})$ du point moyen G du nuage sont :

$$\bar{x} = \frac{36 + 42 + 48 + 54 + 60 + 66}{6} = 51 \text{ et } \bar{y} = \frac{11,8 + 14 + 12,6 + 15 + 15,5 + 15,1}{6} = 14$$

3. On regroupe toute les données dans un tableau, ce qui facilite les calculs :

Age (x_i)	36	42	48	54	60	66	306
Tension (y_i)	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1	84
x_i^2	1296	1764	2304	2916	3600	4356	16236
y_i^2	139,24	196	158,76	225	240,25	228,01	1187,26
$x_i \cdot y_i$	424,8	588	604,8	810	930	996,6	4354,2

NB La dernière colonne du tableau ci-dessus représente les totaux

On en déduit : $Var(x) = \frac{16236}{6} - 51^2 = 105$ et $Var(y) = \frac{1187,26}{6} - 14^2 = 1,88$

4. $Cov(x; y) = \frac{4354}{6} - 51 \times 14 = 11,7$.

5. Droite de régression de y en x : $y = \frac{11,7}{105}(x - 51) + 14$,

droite de régression de x en y : $x = \frac{11,7}{1,88}(y - 14) + 51$.

6. Coefficient de corrélation linéaire : $r = \frac{11,7}{\sqrt{105} \cdot \sqrt{1,88}} = 0,8327$.

7. 16,2 paraît normal car en utilisant la droite de régression de y en x , on obtient qu'une personne de 70 ans doit avoir une tension artérielle de 16,11714286.

Remarque :

De façon générale, on pourra affirmer que

1 Si $|r| = 1$, alors il existe une relation linéaire entre X et Y .

2 Si $r = 0$, il y a indépendance linéaire entre X et Y (mais il peut exister une autre forme de dépendance).

3 La relation $0 < |r| < 1$ traduit une dépendance linéaire qui est d'autant plus forte lorsque $|r|$ est grand (ie $r \geq 0,8$). Quand le coefficient de corrélation est proche de 1 ou -1 , les caractères sont dits "**fortement corrélés**".

Remarque :

Il faut prendre garde à la confusion fréquente entre **corrélation** et **causalité**.

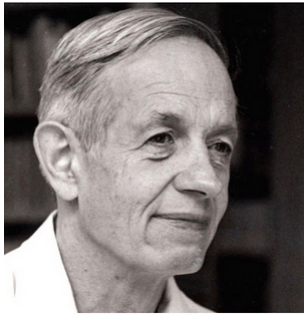
Que deux phénomènes soient corrélés n'implique en aucune façon que l'un soit cause de l'autre. Très souvent, une forte corrélation indique que les deux caractères dépendent d'un troisième, qui n'a pas été mesuré. Ce troisième caractère est appelé "**facteur de confusion**".

Par exemple qu'il existe une corrélation forte entre le rendement des impôts en Angleterre et la criminalité au Japon, indique que les deux sont liés à l'augmentation globale de la population. Le prix du blé et la population des rongeurs sont négativement corrélés car les deux dépendent du niveau de la récolte de blé. Il arrive qu'une forte corrélation traduise bien une vraie causalité, comme entre le nombre de cigarettes fumées par jour et l'apparition d'un cancer du poumon. Mais ce n'est pas la statistique qui démontre la causalité, elle permet seulement de la détecter. L'influence de la consommation de tabac sur l'apparition d'un cancer n'est scientifiquement démontrée que dans la mesure où on a pu analyser les mécanismes physiologiques et biochimiques qui font que les goudrons et la nicotine induisent des erreurs dans la reproduction du code génétique des cellules.

Biographie

John Forbes Nash (13 juin 1928 [Bluefield] - 23 mai 2015 [New Jersey])

John Forbes Nash est un mathématicien et économiste américain dont la vie et la carrière furent brisées durant une trentaine d'années par la schizophrénie. Sa vie et son combat contre la maladie ont été popularisés par le film **A beautiful mind** (en français, Un homme d'exception) où son personnage est joué par **Russell Crowe**.



John Nash est né le 13 juin 1928 à Bluefield, en Virginie Occidentale, d'un père ingénieur électricien et d'une mère qui était avant sa naissance professeur. Il est un enfant solitaire qui préfère mener des expériences dans sa chambre plutôt que de jouer avec sa sœur et ses cousins. Ses parents l'encouragent dans la lecture d'ouvrages scientifiques. En particulier, adolescent, Nash est marqué par la lecture de **Men of Mathematics**, de Bell, un livre de biographies de mathématiciens.

Il entre au collège de Bluefield en 1941, puis à l'Institut de Technologie Carnegie de Pittsburgh en 1945. Son intention première est de devenir ingénieur chimiste, mais ses professeurs détectent son don pour les mathématiques et l'encouragent dans cette direction. Ses relations avec ses camarades restent difficiles. Son comportement parfois très étrange, ses tendances homosexuelles font qu'il est rejeté par les autres étudiants.

Après être diplômé en 1948, il commence ses études doctorales à Princeton plutôt qu'à Harvard qui lui offrait également une bourse. Sa thèse, soutenue en 1950, porte sur la théorie mathématique des jeux. Il introduit une notion d'équilibre, l'équilibre de Nash, dans des jeux non coopératifs. Cette notion a eu, et a encore, beaucoup d'importance en économie et en sciences sociales. Elle est remarquée par les cercles influents et il travaille plusieurs étés à partir de 1950 pour l'**entreprise RAND**, une institution américaine civile, mais fondée par les militaires, dans le but d'appliquer ses travaux en théorie des jeux à la stratégie diplomatique et militaire des États-Unis.

A Princeton, John Nash réalise également ses premiers travaux d'importance en mathématiques fondamentales. Ils portent sur les variétés algébriques réelles et ont déjà un grand retentissement. À partir de 1951, et jusqu'au printemps 1959, il enseigne (pas toujours de façon très orthodoxe) au **Massachusetts Institute of Technology (MIT)**. Durant cette période, il réalise encore des travaux d'une portée exceptionnelle en géométrie différentielle ou portant sur les équations aux dérivées partielles. Il a un enfant avec **Eleanor Stier** en 1953, mais c'est Alicia Larde, une de ses anciennes étudiantes en physique théorique au MIT, qu'il épouse en 1956.

Les excentricités de Nash virent brutalement en troubles mentaux au début de l'année 1959, alors qu'Alicia est enceinte. Il entend des voix, perçoit **des signes crypto-communistes** partout, se sent traqué en permanence. Il doit renoncer à son poste au MIT, réside quelques temps à Princeton, s'enfuit ensuite en Europe où il veut obtenir le statut de réfugié. Finalement, il est interné contre son gré en 1961. Pendant neuf ans, il subira les traitements psychiatriques de l'époque, dont les électrochocs et les sur-doses d'insuline. Ces mois passés en hôpital psychiatrique alternent avec des moments de conscience où il parvient encore à réaliser des travaux de valeur. À partir de 1970, il refuse de fréquenter les hôpitaux psychiatriques et de prendre tout traitement, même s'il est loin d'être guéri. Il est alors hébergé par Alicia Larde, avec qui il avait divorcé en 1963.

Peu à peu, les troubles mentaux de Nash s'atténuent au point qu'il est complètement guéri vers le début des années 1990 et qu'il reprend même ses recherches en mathématiques et en économie. Il reçoit alors les plus grands honneurs : le prix Nobel d'économie en 1994 pour sa contribution à la

théorie des jeux, le prix Abel en 2015 pour ses travaux en géométrie différentielle. Hélas, le destin le rattrape : alors qu'il rentre de Norvège après la cérémonie couronnant son prix Abel, le taxi qui le ramène de l'aéroport sort de route le 23 mai 2015. John Nash et Alicia Larde (avec qui il s'est remarié en 2001), sont éjectés et morts sur le coup.

Biographie

André-Louis Cholesky (15 octobre 1875 [Montguyon] - 31 août 1918 [Bagneux]).



André-Louis Cholesky est un militaire français connu pour un travail important en mathématiques appliquées. Fils de restaurateurs charentais, il entre à **l'Ecole Polytechnique** en 1895, où il s'oriente vers une carrière militaire. Après des missions en Afrique du nord, il est affecté en 1905 au service géographique de l'Etat-Major de l'armée. A cette époque, les officiers de ce service sont préoccupés par la révision de toute la triangulation française qui fait suite à la révision de la Méridienne de Paris. Les calculs à effectuer sont gigantesques. Cholesky, qui s'est déjà fait remarquer pour "une intelligence hors ligne, une grande facilité pour les travaux mathématiques, des idées originales", élabore à cette occasion son procédé de factorisation

de matrice qui permet de résoudre rapidement un grand nombre de systèmes linéaires. Ce procédé sera publié de manière posthume en 1924.

La carrière de Cholesky l'emmène successivement en Crète (où dans des conditions épiques dues à la neige, il entreprend la triangulation de la partie de l'île qui est alors administrée par la France), en Afrique du nord de nouveau (ses travaux visent à la construction de réseaux, notamment de voies ferrées), puis en Roumanie au cours de la Première Guerre Mondiale (il y est directeur technique du service géographique). De retour en France, il décède le 31 août 1918 dans une carrière de Bagneux, dans l'Aisne, des blessures subies sur le champ de bataille. On était à quelques mois de l'armistice...

Limites et continuités d'une fonction numérique

Sommaire

3.1 Limites d'une fonction	34
3.1.1 Limites de références	34
limite en l'infini	34
limite en x_0	34
3.1.2 Limites à l'infini des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles.	34
3.1.3 Opérations sur les limites	35
Limite de la somme de deux fonctions	35
Limite du produit de deux fonctions	35
Limite de l'inverse d'une fonctions	35
Limite de la valeur absolue et de la racine carrée d'une fonctions	35
3.1.4 Limites par comparaison	36
Majoration, minoration	36
Encadrement	36
Comparaison de limites	36
3.1.5 Limites des fonctions circulaires	37
3.2 Branche infinie	37
3.2.1 Cas des asymptotes	37
Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées	37
Asymptote parallèle à l'axe des abscisses	37
3.2.2 Courbes asymptotes	39
3.2.3 Branches paraboliques	39
3.3 Continuité d'une fonction	41
3.3.1 Continuité sur un intervalle	41
3.3.2 Image d'un intervalle par une fonction continue	41
3.3.3 Théorème des valeurs intermédiaires	42
3.3.4 Théorème des fonctions continues strictement monotone	42



*Ce chapitre vise essentiellement à renforcer les notions de **limite** et de **continuité** ; compléter les techniques de calcul des limites et utiliser les propriétés des fonctions continues pour la résolution des problèmes.*

3.1 Limites d'une fonction

3.1.1 Limites de références

limite en l'infini

Nous admettons les résultats suivant :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k = k ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} k = k ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

pour n pair on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$

pour n impair on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$.

limite en x_0

Nous admettons les résultats suivant :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k = k ; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} k = k ; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 ; \quad \text{pour } x_0 \geq 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$$

pour n pair on a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$.

pour n impair on a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$.

3.1.2 Limites à l'infini des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles.



Propriété

la limite en l'infini d'une fonction polynomiale est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.



Propriété

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite à l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.



Exemple :

Calculer les limites en $-\infty$ des fonctions f et g respectivement définie par :

$$f(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x \text{ et } g(x) = \frac{(x-2)^2}{1-3x^2}.$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 5x^2 - 7x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$$

$$\text{En fin on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-3x^2} = \frac{-1}{3}$$

$$\text{Conclusion : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{-1}{3}$$

3.1.3 Opérations sur les limites

Les propriétés présentées sous forme de tableau dans ce paragraphe sont admises. Elles donnent les limites en x_0 des fonctions $f + g$, fg , $\frac{1}{g}$, $|f|$ et $\sqrt{f}$, connaissant les limites en x_0 des fonctions f et g .

Elles restent vraies pour les limites de ces fonctions en $+\infty$, en $-\infty$ et en x_0 par valeurs supérieures ou inférieures.

Dans certains cas on ne peut conclure directement. Ces cas sont signalés par le symbole **FI**

Limite de la somme de deux fonctions

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI



Exemple :

Calculer en 0 et en $+\infty$ les limites des fonctions définies par : $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = x^2 + x$

En 0 on a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

De façon analogue, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

En $+\infty$ de façon similaire on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Limite du produit de deux fonctions

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$l' (l' \neq 0)$	$l' (l' \neq 0)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$.
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x)$	ll'	$\begin{cases} +\infty \text{ si } l' > 0 \\ -\infty \text{ si } l' < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} +\infty \text{ si } l' < 0 \\ -\infty \text{ si } l' > 0 \end{cases}$	FI	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$



Exemple : Calculer en $+\infty$ et en $-\infty$ la limite de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

En $+\infty$ on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Limite de l'inverse d'une fonctions

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$l (l \neq 0)$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 et $f(x) > 0$	0 et $f(x) < 0$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	0	$+\infty$	$-\infty$



Exemple :

Calculer la limite de la fonction g définie par $g(x) = \frac{-5}{x-2}$ à gauche et à droite de 2.

Limite de la valeur absolue et de la racine carrée d'une fonctions

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$+\infty$ ou $-\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$l (l \geq 0)$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f)(x)$	$ l $	$+\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (\sqrt{f})(x)$	$\sqrt{l}$	$+\infty$

**Propriété**

Soit f une fonction, x_0 un nombre réel et $x \mapsto ax + b$ une fonction affine non constante.

La fonction $x \mapsto f(ax + b)$ admet une limite en x_0 si et seulement si f admet une limite en $ax_0 + b$. On a alors : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(ax + b) = \lim_{u \rightarrow ax_0 + b} f(u)$.

3.1.4 Limites par comparaison**Majoration, minoration****Propriété**

Soit f une fonction.

● S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle $]A; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

● S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ sur un intervalle $]A; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

**Exemple :**

1) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$.

1-a) Démontrer que : $\forall x \in]1; +\infty[, g(x) > \sqrt{x} + 1$

1-b) En déduire la limite de g en $+\infty$.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{1 + \sin^2 x}$.

utiliser les propriétés de comparaison pour calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$

Encadrement

Nous admettons la propriété suivante souvent appelée **Théorème des gendarmes**

**Propriété**

Soit f une fonction.

S'il existe deux fonctions g, h telles que $g \leq f \leq h$ sur un intervalle $]A; +\infty[$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

**Exemple :**

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\cos(\pi x + 2)}{x^2}$ Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$

Comparaison de limites**Propriété**

Soit f et g deux fonctions telles $f \leq g$ sur un intervalle $]A; +\infty[$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l'$, alors $l \leq l'$.

3.1.5 Limites des fonctions circulaires

On admet la proposition suivante :



Proposition

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Démonstration Admise.

Toute fois il est à noter que la troisième limite se démontre en utilisant la première, et ceci en constatant que : $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$.

Quant aux deux premières on utilise la définition du nombre dérivé en 0 vu en première, respectivement pour les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$.

3.2 Branche infinie



Définition :

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

On dit que C_f admet une branche infinie dès que **l'une des coordonnées** d'un point de C_f peut tendre vers l'infini.

3.2.1 Cas des asymptotes

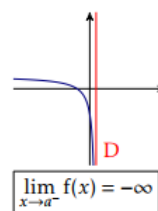
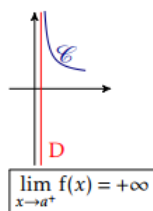
Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées



Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf en un réel a de I et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La droite (D) d'équation : $x = a$ est une asymptote (**verticale**) à la courbe C_f si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

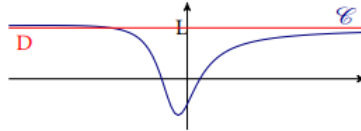


Asymptote parallèle à l'axe des abscisses



Définition :

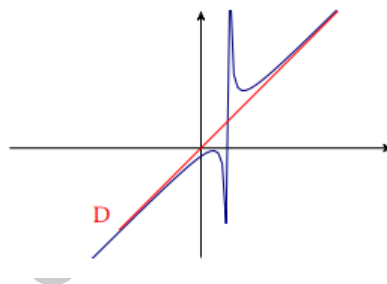
- La droite (D) d'équation : $y = L$ est une asymptote (horizontale) à la courbe C_f en $+\infty$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (L réel)
- La droite (D) d'équation : $y = L$ est une asymptote (horizontale) à la courbe C_f en $-\infty$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ (L réel)



Asymptote non parallèle aux axes de coordonnées

Définition :

- La droite (D) d'équation : $y = ax + b$ est une asymptote (**oblique**) à C_f en $+\infty$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.
- La droite (D) d'équation : $y = ax + b$ est une asymptote (**oblique**) à C_f en $-\infty$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.



Propriété

- La droite (D) d'équation : $y = ax + b$ est une asymptote à C_f en $+\infty$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$ ($b \in \mathbb{R}$)
- La droite (D) d'équation : $y = ax + b$ est une asymptote à C_f en $-\infty$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b$ ($b \in \mathbb{R}$).



Exemple Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Déterminons la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$:

Solution :

Remarquons d'abord que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Pour tout réel strictement positif x , $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = +\infty. \text{ D'où, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

$$\text{Pour tout réel strictement positif } x, f(x) - x = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

$$\text{Donc, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \frac{1}{2}.$$

D'où la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à C_f .

3.2.2 Courbes asymptotes

Définition :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle du type $[A; +\infty[$; C_f et C_g leurs courbes représentatives respectives dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

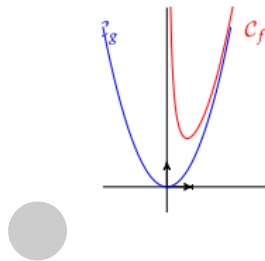
On dit que C_f et C_g sont asymptotes en $+\infty$ si et seulement si : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = 0$

NB : Définition analogue pour deux courbes asymptotes en $-\infty$



Exemple

Les fonctions définies par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ et $g(x) = x^2$ ont leurs courbes qui sont asymptotes car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = 0$.



3.2.3 Branches paraboliques

Soit f une fonction telle que $f(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

Alors la branche infinie de C_f dépend de la limite $\frac{f(x)}{x}$, lorsque x tend vers l'infini.

Définition :

- On dit que C_f admet une branche parabolique dans la direction de l'axe $(O; \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$: si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$
- On dit que C_f admet une branche parabolique dans la direction de l'axe $(O; \vec{i})$ au voisinage de $+\infty$: si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.
- On dit que C_f admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = ax$ ($a \neq 0$) au voisinage de $+\infty$: si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \infty$.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par : $f(x) = 2x + \sqrt{x+1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Déterminons la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$:

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sqrt{x+1} = +\infty$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 2$.

Ensuite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = +\infty$ Donc C_f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = 2x$ au voisinage de $+\infty$.

Remarque :

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a (a \in \mathbb{R}^*)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ n'existe pas alors C_f n'admet ni asymptote, ni branche parabolique. On dit que C_f admet **direction asymptotique**, celle de la droite $y = ax$.



Exemple Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \sin x$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R} : x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Or : Or la fonction $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$:

Donc C_f admet une direction asymptotique celle de la droite $y = x$.

Remarque :

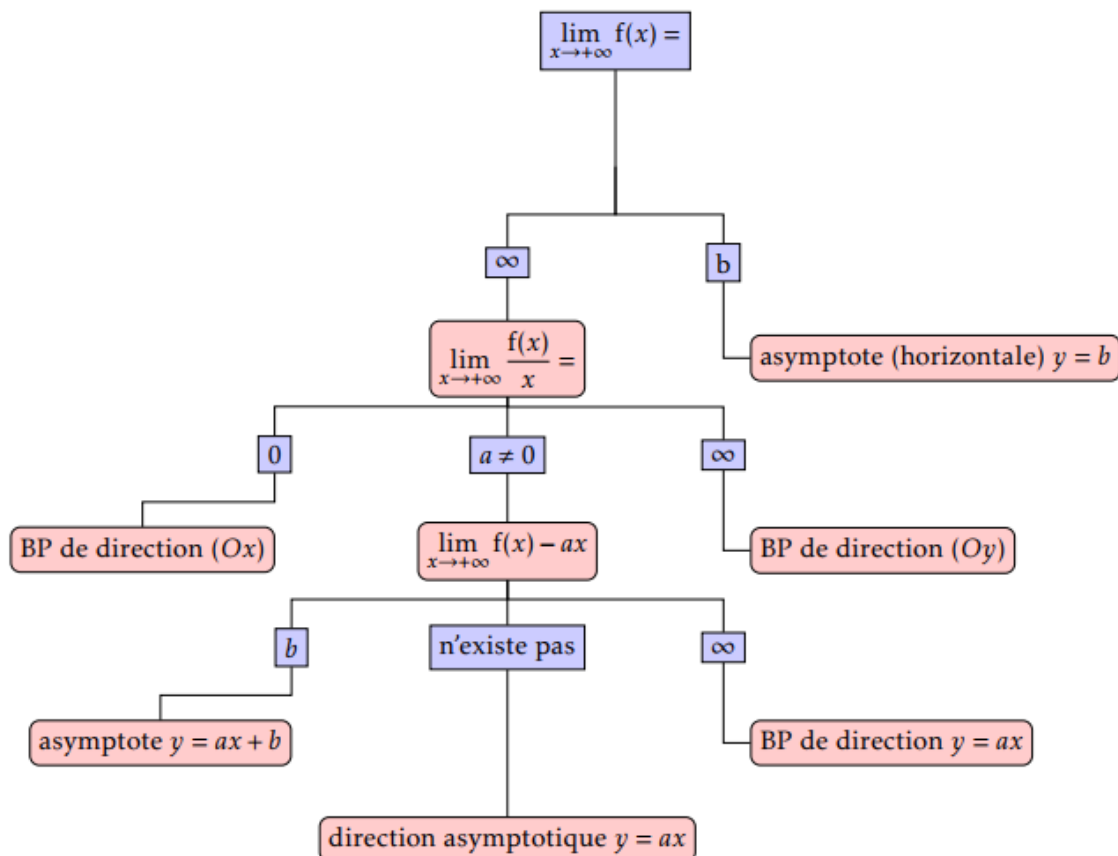
Si $\frac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite en $+\infty$ alors C_f n'admet ni asymptote, ni branches parabolique, ni direction asymptotique.



Exemple Soit f la fonction définie par $f(x) = x(1 + \sin^2 x)$. On a : $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq f(x)$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. On a : $\frac{f(x)}{x} = (1 + \sin^2 x)$ et cette expression n'a pas de limite en $+\infty$

Diagramme de synthèse



3.3 Continuité d'une fonction

3.3.1 Continuité sur un intervalle

Définition :

- On dit qu'une fonction f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$x_0 \in D_f \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

- f est continue à gauche en x_0 si et seulement si $x_0 \in D_f$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
- f est continue à droite en x_0 si et seulement si $x_0 \in D_f$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Théorème :

Une fonction f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite de x_0

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-2} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x+1}{x-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Étudions la continuité de f en 0

On a $D_f = \mathbb{R}$, donc $0 \in D_f$.

En outre, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, il s'ensuit que f n'est pas continue en 0, cependant, est continue à droite en 0

Définition :

- Une fonction f est continue sur un intervalle I lorsqu'elle est continue en chaque x_0 de I .
- En particulier**, f est continue sur $I = [a; b]$ si et seulement si
 - f est continue sur $]a; b[$
 - f est continue à droite en a
 - f est continue à gauche en b

Théorème :

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

3.3.2 Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème :

L'image directe $f(I)$ d'un intervalle I par une fonction continue f est un intervalle.

En particulier Si I est un intervalle fermé alors $f(I)$ est un intervalle fermé.

Intervalle	f est croissante sur I	f est croissante sur I
$I = [a; b]$	$f(I) = [f(a); f(b)]$	$f(I) = [f(b); f(a)]$
$I =]a; b[$	$f(I) =]\lim_{x \rightarrow a} f(x); \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$	$f(I) =]\lim_{x \rightarrow b} f(x); \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$
$I =]-\infty; a]$	$f(I) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a)]$	$f(I) =]f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$
$I =]b; +\infty[$	$f(I) =]\lim_{x \rightarrow b} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$f(I) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$



Soit $I =]-5; -1[$, $J =]-1; +\infty[$. Il est trivial de montrer que f est strictement décroissante
 $f(I) =]f(-1); f(-5)[=]3; 251[$ et $f(J) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(-1)[=]-\infty; 3[$

En particulier : Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$ (c'est à dire $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire) alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $x_0 \in [a; b]$.
Dès lors, **quand f est strictement monotone alors la solution est unique.**

- f définit une bijection de I dans $f(I)$;
- La bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et est **de même stricte monotonie** que f sur $f(I)$
- Dans un repère orthogonal du plan, les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétrique par rapport à la première bissectrice ($y = x$)
- Les asymptotes verticales pour C_f ($x = a$) se transforme en asymptote horizontales pour $C_{f^{-1}}$ ($y = a$) et **Réciproquement**.
- Les asymptotes obliques $y = ax + b$ pour C_f demeure des asymptotes obliques $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ pour $C_{f^{-1}}$.

En mathématique en générale et en analyse numérique en particulier, il existe toute une pléthore d'algorithmes permettant d'approcher les solutions d'une équation et les zéros d'une fonction en

particulier. Nous allons notamment présenter via des exemples, un de ces algorithmes à savoir : **La méthode par balayage.**

La méthode par balayage



Exemple : Démontrons que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ admet une seule solution x_0 appartenant à l'intervalle $] -1; 0[$ et déterminons un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-1}

Solution

Résoudre l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ revient à déterminer les zéros de la fonction $f : x \mapsto x^3 + x + 1$

Localisation du zéro

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires f admet un seul zéro x_0 appartenant à $] -1; 0[$.

Encadrement de x_0 par la méthode de balayage

Calculons de **proche en proche**, les images par f des nombres décimaux d'ordre 1 (un chiffre après la virgule, correspondant au pas du balayage) de l'intervalle $] -1; 0[$, **jusqu'à ce qu'on observe un changement de signe.**

Valeur de x	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6
Signe de $f(x)$	-	-	-	+

Par conséquent,

$$-0,7 < x_0 < -0,6$$



Astuce pour concours et urgence

Règle de L'Hospital

Il s'agit d'une règle pour lever (**parfois**) des formes indéterminées du type **zéros sur zéros** ou **l'infini sur l'infini**. Si f et g sont deux fonctions qui tendent toutes les deux vers 0 en a ou vers l'infini en a et si le rapport $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite finie ou égale à ∞ en a , alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Cette règle apparaît pour la première fois en 1696 dans le traité Analyse des infiniment petits de Guillaume de L'Hospital, qui est le premier livre sur le calcul différentiel. Elle serait en fait due à Jean Bernoulli, qui l'aurait découverte deux ans plus tôt.



Exemple

On a : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{3}$



Remarque :

N'oublions pas la blague favorite des profs de maths : "La règle de L'Hospital ? **A n'utiliser qu'en cas d'urgence !**".

Biographie

Guillaume de l'Hospital (1661 [Paris] - 2 février 1704 [Paris])

Guillaume de L'Hospital, marquis de Saint Mesme, est un élève de Jean Bernoulli qui lui apprend le calcul différentiel. C'est ainsi que L'Hospital est le premier à écrire un traité sur ce nouvel outil, le livre *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696). C'est dans ce livre qu'apparaît la célèbre règle de L'Hospital, qui permet parfois de lever des formes indéterminées du type **zéros sur zéros**. En 1707, L'Hospital publie également un traité sur les coniques (*Traité analytique des sections coniques*), qui sera pendant un siècle un classique du genre. La connaissance du calcul différentiel fait que L'Hospital est un de ceux qui résout le problème de la **brachistochrone**, indépendamment de mathématiciens prestigieux comme Newton ou Leibniz. Toutefois, ce mérite est entâché par les déclarations, après la mort de son élève, de Jean Bernoulli : à la suite d'un arrangement financier, L'Hospital aurait publié sous son propre nom des résultats dus à Bernoulli.



Biographie

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (27 février 1881, Overschie (maintenant une partie de Rotterdam) - 2 décembre 1966, Blaricum)



Luitzen Egbertus Jan Brouwer est un grand mathématicien hollandais du début du XX^e s. Né d'un père proviseur, il réalise des études secondaires très brillantes, et très rapides. A l'université d'Amsterdam, il est formé par Korteweg, qui est connu pour des contributions en mathématiques appliquées. Il soutient son doctorat le 16 juin 1904. De 1909 à 1913, **Brouwer** s'intéresse à la topologie, et découvre la majeure partie des théorèmes auxquels son nom est resté attaché, dont son fameux théorème du point fixe. Pour beaucoup, **Brouwer est le père de la topologie moderne**. En 1912, il obtient grâce aux recommandations de **Hilbert** une chaire à l'Université d'Amsterdam. Il y enseigne la théorie des ensembles, celle des fonctions, et

l'axiomatique. Plus tard, il refusera de rejoindre Hilbert à Göttingen. La Première Guerre mondiale, et sa santé fragile, l'éloignent quelques temps des champs de la recherche scientifique. Quand il y revient, c'est pour se consacrer à ses premières amours (sa thèse portait déjà sur ce sujet) : les fondements des mathématiques.

Brouwer est le fer de lance avec Poincaré des mathématiques intuitionnistes, par opposition au logicisme de Russel et Frege, et au formalisme de Hilbert. En particulier, pour Brouwer, un théorème d'existence ne peut être vrai que si on peut exhiber un processus, même formel, de construction. Cela le conduit notamment à rejeter la loi du tiers-exclu, qui dit qu'une propriété est ou vraie, ou fausse ! Les preuves ainsi obtenues sont souvent plus longues, mais Brouwer fut capable de réécrire des traités de théorie des ensembles, de théorie de la mesure, et de théorie des fonctions en se conformant aux règles de l'intuitionnisme. Bizarrement, Brouwer n'enseigne jamais la topologie. C'est probablement que les théorèmes que lui-même avait prouvés ne rentraient plus dans le cadre qu'il s'était fixé. Selon les témoignages de quelques-uns de ses étudiants, il était un personnage vraiment étrange, fou amoureux de sa philosophie, et un professeur auquel il ne fallait surtout pas poser de questions !

Dérivation et étude de fonctions numériques

Sommaire

4.1	Dérivation	46
4.1.1	Fonctions dérivées	46
4.1.2	Dérivée de fonctions composées	48
4.1.3	Inégalité des accroissements finis	48
4.1.4	Dérivée et sens de variation	49
4.1.5	Théorème des fonctions dérivables et strictement monotone	49
4.1.6	Dérivées successives	50
4.1.7	Dérivées successives et applications	50
4.1.8	Extremum d'une fonction	50
4.1.9	Dérivée seconde-Points d'inflexions	51
4.2	Étude de fonctions	52



L'histoire du calcul différentiel débute en grande partie avec **Galilée** et **Newton** qui avaient besoin de nouveaux outils mathématiques pour développer les notions de vitesse et d'accélération d'un mouvement. Mais la possibilité de calculer la pente de la tangente à une courbe était essentielle dans d'autres problèmes comme dans ceux d'extremum ou pour des questions plus appliquées. **Newton** et **Leibniz** furent les premiers à tenter de formaliser la notion de dérivée. Ils se disputèrent la paternité de cette invention mais il semble certain maintenant qu'ils l'ont découvert de manière indépendante et chacun via des formalismes différents. La notion de limite n'a été développée que bien plus tard, au $XIX^{ième}$ siècle par **Cauchy** et **Weierstrass** aussi la formalisation de la dérivation par **Newton** et **Leibniz** souffrait de nombreuses lacunes. **Newton** refusa d'ailleurs de publier son travail et les écrits de **Leibniz** étaient obscurs et difficiles à comprendre. **Lagrange**, un siècle plus tard introduit le terme de **dérivée** ainsi que la notation f' .

4.1 Dérivation

4.1.1 Fonctions dérivées

Définition :

On dit qu'une fonction f est dérivable en un point x_0 lorsque :

$$x_0 \in D_f \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

Notation et définition

Lorsque f est dérivable en x_0 le réel $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est noté $f'(x_0)$ et s'appelle le nombre dérivée de f en x_0

Définition :

Soit f une fonction définie en x_0 et $a \in \mathbb{R}$.

1) On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $]a; x_0]$ et $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie à gauche en x_0 . Cette limite est appelée nombre dérivé de f à gauche en x_0 et est noté $f'_g(x_0)$.

2) On dit que f est dérivable à droite en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $[x_0; a[$ et $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie à droite en x_0 . Cette limite est appelée nombre dérivé de f à droite en x_0 et est noté $f'_d(x_0)$.

Théorème :

f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite de x_0 et

$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$$

Remarque :

 Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ alors f est non dérivable en x_0 et C_f admet au point d'abscisse x_0 une demi tangente verticale d'équation

$$x = x_0$$

 Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ alors f est non dérivable en x_0 et le point de C_f d'abscisse x_0 est un point **anguleux**.

Exemple :

Étudier la dérivabilité de la fonction f définie par : $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ en $x_0 = 2$.

Étudier la dérivabilité de la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ en $x_0 = 2$.

Définition :

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I lorsque f est dérivable en chaque point x_0 de I .

En particulier, Si $I := [a; b]$ alors f est dérivable sur I lorsque :

- f est dérivable sur $]a; b[$;
- f est dérivable à droite en a ;
- f est dérivable à gauche en b

Théorème :

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I . **La réciproque n'est pas vraie**

Propriétés

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition

 **Exemple** On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x) = \frac{|x^2 - 1| - 2}{x}$; $g(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$. Étudions la dérivabilité de ces fonctions sur $\mathbb{R}$.

Table des dérivées des fonctions usuelles et opérations sur les dérivées

Fonction f	Dérivée f'
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$f'(x) = a \cos(ax + b)$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$f'(x) = -a \sin(ax + b)$
$f(x) = \tan x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = (u(x))^n, n \in \mathbb{Z}^*$	$f'(x) = n \cdot u'(x) \cdot (u(x))^{n-1}$
$f(x) = a \cdot u(x)$	$f'(x) = a \cdot u'(x)$
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}$

Remarque :

Soient a, b, c, a', b', c' des nombres réels non tous nuls. On considère f la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$. On a :

$$f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2 + b'x + c')^2}$$

En particulier pour la fonction homographique : $g(x) = \frac{bx + c}{b'x + c'}$ on a :

$$g'(x) = \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(b'x + c')^2}$$

4.1.2 Dérivée de fonctions composées**Théorème :**

Soient $u : E \rightarrow F$ et $v : F \rightarrow G$ deux fonctions.

Si u est dérivable au point x_0 et v dérivable au point $u(x_0)$ alors $v \circ u$ est dérivable au point x_0 et on a :

$$(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'[u(x_0)]$$



Exemple : Calculons la fonction dérivée de la fonction h définie par : $h(x) = \cos^3(x^2 + 3x - \pi)$

Par application de la formule de dérivée $(U^n)' = nU'U^{n-1}$ On a :

$$h'(x) = 3 \times [\cos(x^2 + 3x - \pi)]' \times \cos^2(x^2 + 3x - \pi)$$

Or Par application de la formule de la dérivée de fonction composée on a :

$$[\cos(x^2 + 3x - \pi)]' = (2x + 3) \times [-\sin(x^2 + 3x - \pi)]$$

$$\text{Par conséquent, } h'(x) = 3 \times \left[(2x + 3) \times [-\sin(x^2 + 3x - \pi)] \right] \times \cos^2(x^2 + 3x - \pi)$$

4.1.3 Inégalité des accroissements finis**Théorème :**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I = [a; b]$.

S'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in [a; b], m \leq f'(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

En particulier : Si $|f'(x)| \leq M \forall x \in [a; b]$ alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$



Exemple : Démontrons que pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$, $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction cosinus.

Donc en posant $f(x) = \sin x$ on a $f'(x) = \cos x$

Or pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$ on a $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq 1$.

Soit $u \in [0; \frac{\pi}{4}]$, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction sinus sur l'intervalle $[0; u]$,

on a :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(u - 0) \leq \sin u - \sin 0 \leq 1(u - 0)$$

d'où, $\frac{\sqrt{2}}{2}u \leq \sin u \leq u$, de ce fait, pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$, $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$

Exercice d'application

1) Démontrer que pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\tan x \geq x$

2-a) Pour tout x élément de $[0; \frac{\pi}{2}]$, appliquer les inégalités d'accroissement finies à la fonction cosinus sur l'intervalle $[0; x]$.

2-b) En déduire que, $1 - x^2 \leq \cos x \leq 1$

4.1.4 Dérivée et sens de variation

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K .

- 1) f est croissante sur K si et seulement si f' est positive sur K .
- 2) f est décroissante sur K si et seulement si f' est négative sur K .
- 3) f est constante sur K si et seulement si f' est nulle sur K .

4.1.5 Théorème des fonctions dérivables et strictement monotone

Théorème

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle ouvert I . Alors

- 1) f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
- 2) f^{-1} la bijection réciproque est de même stricte monotonie que f sur $f(I)$. En plus en tout point $y = f(x)$ de $f(I)$ tels que $f'(x) \neq 0$ f^{-1} est dérivable et on a

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}$$

Exemple :

On considère la fonction f définie par $f : [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0; 1]$ $x \mapsto f(x) = \cos x$.

Justifions que f est bijective et calculons $(f^{-1})'$.

Il est évident que f est dérivable (donc continue) et strictement décroissante.

De ce fait, f réalise une bijection de $[0; \frac{\pi}{2}]$ sur $[0; 1]$.

D'après le **Théorème des fonctions dérivables et strictement monotone** on a

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]} = \frac{1}{-\sin(f^{-1}(x))}$$

Or pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$$\text{Ainsi, } [f^{-1}(y)]' = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(f^{-1}(x))}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - (f \circ f^{-1})^2(x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Exercice d'application

Faites le même travail de l'exemple pour les fonctions h et g définie par :

$$h : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1; 1], x \mapsto \sin x \text{ et } g : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$$

4.1.6 Dérivées successives

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f est dérivable sur I , on note $\frac{df}{dx}$ ou f' ou encore $f^{(1)}$ la dérivée première de f .
- Si f' est dérivable sur I , on note $\frac{d^2f}{dx^2}$ ou f'' ou encore $f^{(2)}$ la dérivée seconde de f .
- Par itération on définit la fonction dérivée d'ordre n , ($n \in \mathbb{N}^*$) par : $f^n(x) := (f^{n-1}(x))'$



Exemple Calculons la dérivée d'ordre 3 de la fonction polynomiale f définie par

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$$

4.1.7 Dérivées successives et applications

4.1.8 Extremum d'une fonction

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K .

- 1) On dit que f admet un maximum relatif en un point x_0 de K , s'il existe $a; b \in K$ tels que : $a < b$, $x_0 \in [a; b]$ et pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq f(x_0)$.
- 2) On dit que f admet un minimum relatif en un point x_0 de K , s'il existe $a; b \in K$ tels que : $a < b$, $x_0 \in [a; b]$ et pour tout $x \in [a; b]$, $f(x_0) \leq f(x)$.
- 3) f admet un extremum relatif si elle admet un maximum relatif ou un minimum relatif.

Théorème

Soit f une fonction numérique et $I \subset D_f$ un intervalle. Soit $x_0 \in I$. On suppose que f est dérivable en x_0 .

- 1) Si f admet un extremum en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.
- 2) Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum en x_0 .



Exemple :

Déterminer l'extremum de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 2$

4.1.9 Dérivée seconde-Points d'inflexions

Définition :

Soient x_0 un réel et f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 . Si la fonction dérivée f' est définie sur un voisinage de x_0 et admet elle-même une dérivée en x_0 , cette dérivée est appelée dérivée seconde (ou dérivé d'ordre 2) de f en x_0 et est notée $f''(x_0)$

Définition :

On appelle point d'inflexion de la courbe représentative (C) de la fonction f dans un repère cartésien tout point M_0 de (C) en lequel (C) traverse sa tangente.

Propriétés

Si une fonction f est deux fois dérivable sur un intervalle I et si f'' s'annule en $x_0 \in I$, en changeant de signe, alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f .

Remarque

L'étude de la position relative d'une courbe et de sa tangente permet d'identifier un point d'inflexion sans avoir recours à la propriété précédente.

En fait on a bien des fonction qui admettent des points d'inflexions sans pour autant que la dérivée seconde puisse exister.

Exemple :

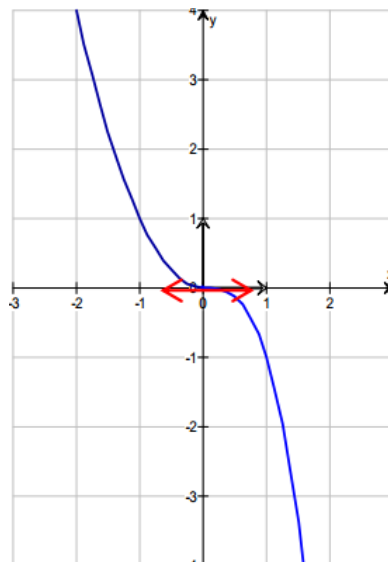
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

f est dérivable en $x_0 = 0$ mais n'admet pas de dérivée seconde en $x_0 = 0$.

Or la courbe représentative de f traverse sa tangente en 0 :

$M(0, f(0))$ est donc un point d'inflexion de (Cf)



Définition :

■ Une fonction réelle d'une variable réelle est dite *convexe* si : quels que soient deux points A et B du graphe C_f de cette fonction f , le segment $[AB]$ est entièrement situé au dessus du graphe. **ie** f est convexe sur I lorsque, pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0; 1]$ on a :

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

■ Une fonction réelle d'une variable réelle est dite *concave* si : quels que soient deux points A et B du graphe C_f de cette fonction f , le segment $[AB]$ est entièrement situé en dessous du graphe. **ie** f est concave sur I lorsque, pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0; 1]$ on a :

$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

NB : Nonobstant cette définition, dans la pratique on utilise en général le Lemme suivant :

★ Lemme

soit f une fonction réelle d'une variable réelle deux fois dérivable sur l'intervalle I et tel que f' et f'' soient continues sur I (**ie** f est de classe C^2 sur I).

- si $f'' \geq 0$ sur I alors f est convexe sur I .
- si $f'' \leq 0$ sur I alors f est concave sur I

4.2 Étude de fonctions

Nous étudions ici un exemple de fonction, ce qui permettra à l'apprenant de revoir le canevas à suivre lors de l'étude d'une fonction.

L'étude d'une fonction suit les différentes étapes suivantes :

1. détermination de l'ensemble de définition ;
2. calcul des limites aux bornes du domaine de définition ; (recherche des asymptotes et branche infinie éventuellement) ;
3. étude de la dérivabilité et calcul de la dérivée.
4. étude du signe de la dérivée et tableau de variation de la fonction.
5. recherche d'éventuelles demi-tangentes, d'éventuels points d'inflexions.
6. Tracer de la courbe représentative.



Exemple étudier la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$

Biographie

Sofia Kovaleskaya (15 janvier 1850 [Moscou] - 10 février 1891 [Stockholm])

Sofia Kovaleskaya est née le 15 janvier 1850 dans une famille de l'aristocratie russe (son père était général d'artillerie). Très jeune, elle manifeste des capacités remarquables (on dit notamment qu'elle apprit à lire seule à 6 ans). Dans son autobiographie, elle raconte que son intérêt pour les mathématiques lui est venu à 11 ans, car les murs de sa chambre avaient été provisoirement tapissés de notes du mathématicien **Ostrogradsky**. Après avoir mené ses études secondaires, Sofia Kovaleskaya souhaite poursuivre sa découverte des mathématiques à l'université. Malheureusement, les universités russes sont alors interdites aux femmes, et elle doit quitter le pays. Mais pour cela, toute femme russe devait alors avoir une autorisation écrite de son père ou de son mari. Devant le refus de son père, Sofia Kovaleskaya arrange un mariage de convenance avec un jeune paléontologue, **Vladimir Kovalesky**, célébré en septembre 1868.



Le couple prend le chemin de l'Allemagne en 1869, et se rend d'abord à Heidelberg. Là, Kovaleskaya découvre que les universités allemandes sont aussi interdites aux femmes. Elle pourra toutefois suivre les cours de façon non officielle. Elle impressionne alors un ancien élève de Weierstrass, Königsberger, qui la recommande à son maître. Ainsi, en 1870, elle se rend à Berlin, où Weierstrass lui prodigue 4 heures de cours particulier par semaine. Sous la direction du "législateur de l'analyse", Kovaleskaya est la première femme à recevoir un doctorat de mathématiques en 1874, après avoir écrit 3 articles remarquables (sur les équations aux dérivées partielles, sur les intégrales abéliennes, sur les anneaux de Saturne).

Malgré la qualité de ses travaux, et les recommandations appuyées de Weierstrass, Kovaleskaya ne parvient pas à obtenir un poste universitaire. Cela provoque une grande déception chez elle, et pendant 6 ans elle va complètement s'écarter des mathématiques, ne répondant même plus aux lettres de Weierstrass. Pendant ce temps, elle est retournée en Russie, et comme elle est finalement tombée amoureuse de son mari, elle a une petite fille prénommée Fufa en 1878. Le couple mène alors un train de vie dispendieux, mais en fait il accumule les dettes. L'attrait pour les mathématiques revient vers 1880, mais l'événement déterminant est sans conteste le suicide du mari de Kovaleskaya en 1883. Même si le couple était séparé depuis quelques temps, sans doute en raison de ses graves problèmes financiers, la nouvelle de ce décès perturbe profondément Sofia Kovaleskaya. Elle retrouve alors Weierstrass, qui l'aide à rédiger plusieurs articles sur la réfraction de la lumière.

En 1884, enfin, Mittag-Leffler parvient à lui obtenir une position à Stockholm, où elle est "privat docent", avant d'obtenir définitivement une chaire en 1889 (elle est alors la 3ème femme à avoir obtenu une chaire à l'université, après la physicienne Laura Bassi et la mathématicienne Maria Agnési). Durant son séjour à Stockholm, Kovaleskaya mène une carrière très active. Elle reçoit notamment en 1888 le prix Bodin de l'académie des sciences française pour un mémoire Sur le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe. Le mémoire est si brillant que pour l'occasion, l'Académie augmente la prime accordée de 3000 à 5000 francs.

En 1889, elle devient membre correspondant de l'Académie des Sciences russes. Malgré cet honneur, et sa volonté de retourner en Russie, elle n'y trouvera pas de poste. Elle décède le 10 février 1891 d'une pleurésie lors d'un voyage vers Stockholm. Elle était alors au fait de sa carrière.

Primitive d'une fonctions sur un intervalle

Sommaire

5.1	Généralités	55
5.2	Primitives des fonctions de référence	56
5.2.1	Cas des fonctions usuelles de référence	56
5.2.2	Cas des fonctions circulaires de référence	56
5.3	Opérations sur les primitives	57



Nous avons vu en classe de première que qu'**Isaac Newton** (1642-1727) en Angleterre et **Gottfried Leibniz** (1646-1716) en Allemagne, créèrent la notion de dérivée indépendamment l'un de l'autre.

A la fin du $XIX^{ième}$ siècle, le problème qui se pose est le suivant : Quelles sont les fonctions qui admettent pour dérivée une fonction donnée ?

Le mathématicien **Henri Lebesgue** (1875-1941) apporta une réponse à cette question, ce qui permit d'introduire la notion de Primitive

5.1 Généralités

Activité

Soit la fonction $f : x \mapsto 2x + 3$

Calculer la dérivée de chacune des fonctions F, G et H définies par :

$$F(x) = x^2 + 3x + 10; G(x) = x^2 + 3x - 17; H(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 11 \text{ que remarque-t-on ?}$$

On dit que F, G, H sont des primitives de f sur D_f

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F **définie et dérivable** sur I vérifiant

$$F'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in I.$$

NB : On ne parle pas de **LA** primitive, mais **DES** primitives de f . En effet, si F est une primitive de f alors $F + c$, $c \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f .

En outre, si f est continue sur I alors sa primitive F est continue sur I (Car F est dérivable sur I)

Notation

Lorsque F est une primitive de f sur I alors on note :

$$F := \text{Prim}_I(f) \text{ ou } F = \int f(x)dx$$

proposition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

 Si f admet une primitive F sur I , les primitives de f sont les fonctions du type $F + c$ où c est une constante réelle.

 Si de plus on impose la condition $F(x_0) = y_0$, **la primitive est unique**.

 Si F et G sont respectivement des primitives de f et g et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $F + G$ et λF sont des primitives de $f + g$ et λf .

Si la **primitivation** est une opération **linéaire**, elle n'est en rien **compatible avec la multiplication** et personne ne songera **JAMAIS** à écrire qu'une primitive de $f \times g$ est $\text{Prim}(f) \times \text{Prim}(g)$. Cependant, nous disposons de l'astuce ci-après, appelée **Primitivation par partie**

$$\text{Prim}(f' \times g) = [f \times g] - \text{Prim}(f \times g') \text{ ou } \int (f' \times g)(x)dx = [f \times g] - \int (f \times g')(x)dx$$



Exemple :

1) les primitives de la fonction $f : x \mapsto 2 \cos(x) + 1$ sont les fonctions $x \mapsto \sin(x) + x + c$, $c \in \mathbb{R}$

Déterminons dans cette famille de primitive celle qui vérifie : $F(0) = \frac{\pi}{2}$

En exploitant cette condition On a : $2 \sin(0) + 0 + c = \frac{\pi}{2}$, par suite $c = \frac{\pi}{2}$.

D'où, $F(x) = 2 \sin(x) + x + \frac{\pi}{2}$

2) Par l'astuce de **Primitivation par partie** déterminons une primitive de la fonction $x \mapsto x \sin x$

On a $\int (x \sin x)dx = [-x \cos x] - \int (-\cos x)dx = -x \cos x + \sin x + c$, $c \in \mathbb{R}$

5.2 Primitives des fonctions de référence

La lecture du tableau des primitive se fait en lisant celui des dérivées **à l'envers**. Les fonctions f suivantes sont définies, dérivables sur l'intervalle I , n est un entier relatif non nul différent de -1 .

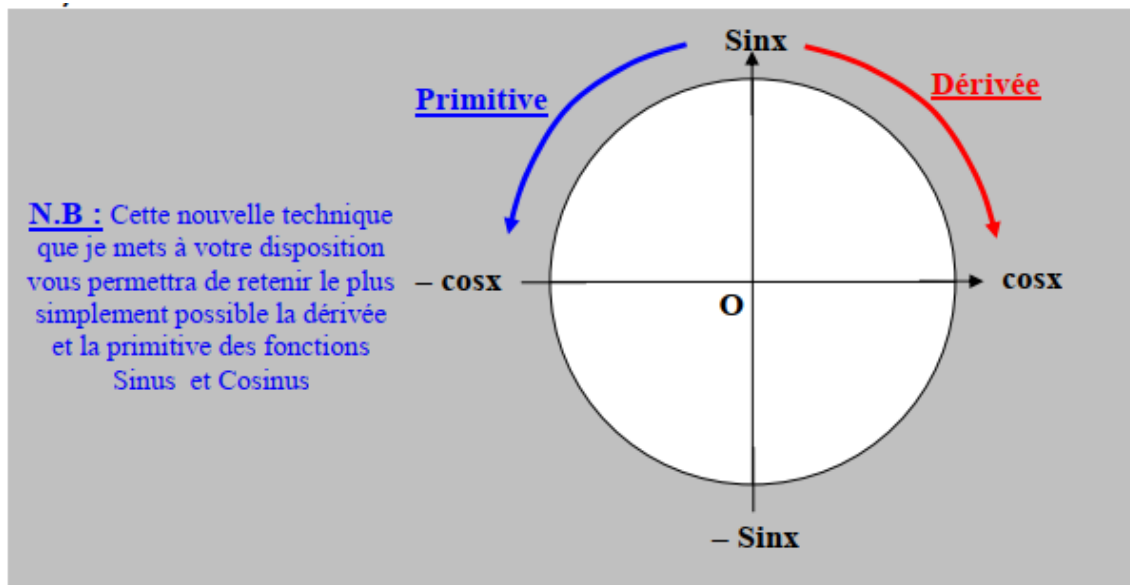
5.2.1 Cas des fonctions usuelles de référence

Fonction f	Fonction F	I
$x \mapsto 0$	$x \mapsto c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$

NB : Ce tableau ne donne qu'UNE primitive de la fonction f . Pour obtenir toutes les primitives de f , il suffit de rajouter une constante c à F

💡 **Exemple** Une primitive de la fonction $x \mapsto x^5 + \frac{1}{x^8} + \frac{3}{\sqrt{x}}$ est : $x \mapsto \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{7x^7} + 6\sqrt{x}$

5.2.2 Cas des fonctions circulaires de référence



Fonction f	Fonction F	I
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[, (k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto 1 + \cotan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	$x \mapsto -\cotan x$	$x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$x \mapsto \cos(ax + b)$ où $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$	$x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax + b)$ où $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$	$x \mapsto -\frac{1}{a} \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$

Exemple

Une primitive de la fonction $x \mapsto -\sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ est $x \mapsto \cos x + \tan x$

NB : Ne pensez pas, cependant, qu'il sera toujours aussi facile de trouver une primitive d'une fonction. C'est, le plus souvent **une question extrêmement difficile voire irrésoluble** pour les plus grands

5.3 Opérations sur les primitives

u' et v' sont des fonction définies sur I , de primitives u et v et n est un entier relatif non nul différent de -1 . Il est question ici de résumer la proposition précédente et de se rappeler de la formule de la dérivée d'une fonction composée : $F(u)' = u' \times f(u)$, où F est une primitive de f (ie $F' = f$).

Fonction du type	Une primitive	Condition
$u' + v'$	$u + v$	
$k \times u'$, ($k \in \mathbb{R}$)	$k \times u$	
$u'u^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ sur I
$u' \times v' \circ u$	$v \circ u$	
$\frac{u'}{u^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	$u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$

Exemple

$f(x) = 2x(x^2 - 1)^5$ est du type $u'u^5$ de primitive $\frac{u^6}{6}$, donc, une primitive est $F(x) = \frac{(x^2 - 1)^6}{6}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+4}}$ est du type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ de primitive $2\sqrt{u}$. Donc, une primitive est $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+4}$

$f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+2)^2}$ est du type $\frac{u'}{u^2}$ de primitive $-\frac{1}{u}$. Donc, une primitive est $F(x) = \frac{1}{(x^2-x+2)^2}$

Primitives de polynômes trigonométrique

Dans cette partie, nous allons apprendre à déterminer les primitives des fonctions trigonométrique de la forme $x \mapsto \cos^n x \sin^m x$, n , et m étant des entiers naturels non nuls.

Travaux dirigés

1. Soit la fonction $f : x \mapsto \cos^4 x \sin^2 x$. Après avoir linéarisé $f(x)$ déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$
2. Soit la fonction $g : x \mapsto 2 \sin^5 x \cos^4 x$
 - Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2 \sin x (\cos^8 x - 2 \cos^6 x + \cos^4 x)$
 - En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g

Solution

1. En utilisant la formule d'Euler on a :

$$f(x) = -\frac{1}{32} \cos 6x - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{32} \cos 2x + \frac{1}{16}$$

$$x \mapsto -\frac{1}{192} \sin 6x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 2x + \frac{1}{16}x$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

2. On a : $g(x) = 2 \sin x (\sin^4 x \cos^4 x) = 2 \sin x \cos^4 x (1 - \cos^2 x)^2 = 2 \sin x (\cos^8 x - 2 \cos^6 x + \cos^4 x)$

On en déduit que la fonction $x \mapsto -\frac{2}{9} \cos^9 x + \frac{4}{7} \cos^7 x - \frac{2}{5} \cos^5 x$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

**Point méthode :**

Pour déterminer les primitives des fonctions de la forme $x \mapsto \cos^n x \sin^m x$, $n, m \in \mathbb{N}^*$, on peut utiliser l'un des procédés suivants :

- 1 Si m et n sont de la même parité, linéariser $\cos^n x \sin^m x$
- 2 Si m et n sont de parité différente, utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et écrire $\cos^n x \sin^m x$ sous la forme :
 - $\cos x \times P(\sin x)$ si n est impair
 - $\sin x \times P(\cos x)$ si m est impair

P désignant un polynôme

Biographie

Joseph Liouville (24 mars 1809 [Saint-Omer] - 8 septembre 1882 [Paris])

Joseph Liouville est né le 24 mars 1809 à Saint-Omer. Il est le fils d'un militaire qui survit aux campagnes napoléoniennes et, en 1814, la famille s'établit à Toul. Joseph va étudier au collège Saint-Louis de Paris, et en 1825, il entre à l'Ecole Polytechnique. Deux ans plus tard, il intègre l'Ecole des Ponts et Chaussées, dont il n'obtient pas le diplôme en raison de problèmes de santé et surtout de sa volonté de suivre une carrière académique plutôt qu'une carrière d'ingénieur. Ainsi, Liouville commence-t-il à enseigner en 1831 ; il assumera une charge allant jusqu'à 40H par semaine, et c'est l'été, à Toul, qu'il se consacre à la recherche, notamment sur les équations aux dérivées partielles. En 1838, il bénéficie d'une chaire à l'Ecole Polytechnique, puis, l'année suivante, il est élu à l'Académie des Sciences.



Parallèlement, Liouville est engagé en politique. Ami d'Arago, il est un républicain modéré et se fait élire à l'Assemblée Constituante en 1848. Sa non-réélection l'année suivante le rendra très irritable. Liouville a travaillé dans de nombreux domaines, écrivant plus de 400 articles en analyse, théorie des nombres, physique mathématique et même astronomie. Parmi ses travaux les plus célèbres, on peut citer :

✎ la découverte des nombres transcendants en 1844 : Liouville est en effet le premier à prouver l'existence de nombres transcendants, les nombres dits de Liouville. Cette découverte intervient dans le cadre plus général de l'approximation par des nombres rationnels.

✎ le problème des valeurs au bord des solutions d'équations différentielles.

✎ les intégrales elliptiques : il prouve notamment que les fonctions abéliennes sont transcendentes.

On doit aussi à Liouville un rôle fondamental dans **la publication mathématique**. Ainsi, il fonde en 1836 le Journal des Mathématiques Pures et Appliquées, dit aussi Journal de Liouville, qui concurrence et complète le Journal de Crelle, allemand. Ce journal fera beaucoup pour la diffusion des mathématiques en France. Liouville est aussi celui qui prend conscience de l'importance des travaux de Galois, mésestimés du vivant de ce dernier. C'est le frère de Galois qui insiste beaucoup pour que Liouville lise le manuscrit oublié, et c'est en 1843 que Liouville fait sa première déclaration publique à ce sujet. Finalement, en 1846, **il publie dans son journal l'intégralité du mémoire de Galois**.

Fonctions logarithme népérien

Sommaire

6.1	Définitions et propriétés	61
6.2	Étude de la fonction $\ln$	61
6.3	Fonctions comportant $\ln$	63
6.4	Logarithme décimal	63
6.4.1	Définition	63
6.4.2	Utilisation	63



La fonction logarithme a été créée par un drapier écossais du XVII^e siècle. Ce drapier (relatif à la production ou au commerce des draps), **John Napier (1550-1617)** avant qu'il soit anobli (quelqu'un qui est devenu noble) et prenne le nom de **John Néper**, cherche une fonction pour simplifier les longs calculs des astronomes, des navigateurs et des financiers. Il crée alors une fonction qui transforme le produit en somme (ie) $f(ab) = f(a) + f(b)$. Cette découverte allait donner naissance aux tables de logarithmes, règles de calcul et ph-mètre.

La règle de calcul fut inventé en 1620 par l'Anglais **Edmund Gunter** et restera l'outil de calcul privilégié des ingénieurs et des techniciens, jusqu'à son abandon en 1970 au profit des calculatrices électroniques de poche.

6.1 Définitions et propriétés

Définition :

On appelle fonction logarithme népérien la primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui prend la valeur 0 en 1. On note $\ln$ cette fonction. On a donc $\ln 1 = 0$ et $D_{\ln} =]0; +\infty[$

NB : le logarithme népérien de x est noté $\ln x$, $\ln 1 = 0$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. La touche $\ln$ de la calculatrice permet d'obtenir le logarithme népérien de tout nombre réel strictement positif.

 **Exemple** $\ln 3 \simeq 1,098$, $\ln \sqrt{2} \simeq 0,346$, $\ln \frac{3}{4} = -0,287$

Propriétés *Propriété fondamentale*

Pour tous nombres réels a, b strictement positif, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Propriétés

Pour tous nombres réels a, b strictement positif et pour tout nombre rationnel r

$$1. \ln \frac{1}{a} = -\ln a \quad 2. \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad 3. \ln a^r = r \ln a$$

Remarque :

En particulier, pour tout nombre réel a strictement positif, $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

 **Exemple** $\ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2$, $\ln \frac{1}{25} = -\ln 25 = -\ln 5^2 = -2 \ln 5$

6.2 Étude de la fonction $\ln$

la fonction $\ln$ étant strictement croissante sur son ensemble de définition on a la propriété suivante :

Propriétés

Pour tous nombres réels a, b strictement positif

- $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$
- $\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$

Remarque :

En particulier on a :

- $\ln x = 0$ si et seulement si $x = 1$
- $\ln x < 0$ si et seulement si $0 < x < 1$
- $\ln x > 0$ si et seulement si $1 < x$

La fonction $\ln$ est dérivable en 1 et de nombre dérivé égal 1 on en déduit que



Propriétés

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$



Propriétés

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \ln x = -\infty.$$



Propriétés

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} x \ln x = 0.$$

Étude de la fonction $\ln$

On a $D_{\ln} =]0; +\infty[$, la fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$

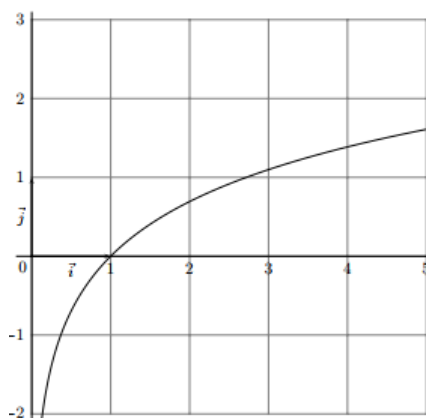
NB : La base d'un logarithme est le lieu où logarithme prend la valeur 1

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, elle réalise donc une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. De façon précise, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in]0; +\infty[$ tel que $\ln x = y$. En particulier, il existe un unique réel noté e tel que $\ln e = 1$. On a $e \simeq 2,718$.

Tableau de variation

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$			+	
$\ln$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

Les propriétés énoncées ci dessus nous permettant de conclure sur les branches infinie, il s'ensuit que,



6.3 Fonctions comportant $\ln$

u est une fonction strictement positive et dérivable. On a :

proposition :

Soit u une fonction strictement positive et dérivable. On a :

- la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est définie pour tout x tel que $u(x) > 0$
- $[\ln(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$



Exemple on considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 - 4)$, f est définie si et seulement si $x^2 - 4 > 0$ ie $x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ donc $D_f =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$. f est dérivable sur D_f comme composée de fonction dérivable et on a : $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$

proposition :

Soit u une fonction dérivable, de signe constant et ne s'annulant pas sur un intervalle K de $\mathbb{R}$.

Alors, les primitives de la fonction $\frac{u'(x)}{u(x)}$ sur K sont les fonctions de la forme $\ln \circ |u| + k$ $k \in \mathbb{R}$



Exemple

Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, la fonction $x \mapsto \tan x$ admet pour primitive $x \mapsto -\ln(\cos x) + k$, $k \in \mathbb{R}$

6.4 Logarithme décimal

6.4.1 Définition

Définition :

On appelle fonction **logarithme décimal** la fonction notée $\log$ et définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

10 est la base du logarithme décimal.

Définition : Logarithme de base a

Soit a un nombre réel strictement positif différent de 1.

On appelle logarithme de base a et on note $\log_a$, la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

6.4.2 Utilisation

En acoustique

Le niveau sonore L (en décibels) d'un son d'intensité I est donnée par la formule :

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

où $I_0 = 10^{-12} \text{W.m}^{-2}$ correspond au seuil d'audibilité en dessous duquel aucun son n'est perçu. Par exemple le niveau sonore L_2 **d'une conversation normale** entre deux personnes correspondant à $I = 10^5 I_0$ est de :

$$L_2 = 10 \log 10^5 = 10 \times 5 = 50 \text{ décibels.}$$

Si 2 personnes de plus se joignent à la conversation (**ie** : $I = 10^5 I_0 + 10^5 I_0 = 2 \times 10^5 I_0$), le niveau sonore n'est pas multiplié par 2!!! En effet, $L_4 = 10 \log(2 \times 10^5) = 10 \times 5 + 10 \log 2 \simeq 53$ décibels.

En Sismologie

Pour évaluer la puissance d'un séisme, on définit une quantité appelée magnitude du séisme, liée à l'énergie développée au foyer. L'échelle de magnitude ou échelle de Richter permet de comparer les énergies développées par plusieurs séismes.

- Un séisme de magnitude 3 correspond à une secousse ressentie sur une surface peut étendue
- Un séisme de magnitude 4,5 peut causer des dégâts légers et de magnitude 6 des dégâts important.
- Les plus grands séismes enregistrés ont une magnitude comprise entre 7 et 8,5
- On estime que le séisme de plus forte magnitude (voisine de 9) a été celui de Lisbonne en 1755

L'énergie libérée au foyer d'un séisme étant notée E , la magnitude M correspondante est donnée par la formule

$$\log E = 11,4 + 1,5M$$

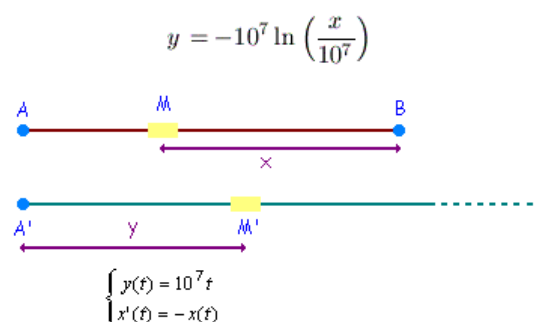
Le séisme de **Skopje** en 1963 a libéré une énergie E' 1000 fois supérieur à l'énergie (E) d'un séisme de magnitude 4 On a $E' = 1000 \times E$ ainsi $\log E' = 3 + \log E = 3 + 11,4 + 1,5 \times 4$
ie $\log E' = 3 + 11,4 + 1,5 \times 4 = 20,4$. Or $\log E' = 11,4 + 1,5M'$, donc $11,4 + 1,5M' = 20,4$, par suite $M' = 6$

Par conséquent Le séisme de **Skopje** en 1963 était de magnitude 6.

Biographie

John Napier (1er février 1550 [Edimbourg] - 4 avril 1617 [Edimbourg])

John Napier, peut-être plus connu en France sous le nom de **Neper**, a laissé son nom dans la postérité mathématique pour son invention des logarithmes. Né en 1550, il est issu d'une riche famille écossaise, et deviendra lui-même baron de Merchiston. A 13 ans, il est envoyé à l'Université de Saint-Andrews, dont les archives révèlent qu'il n'y a obtenu aucun diplôme. On pense qu'il a poursuivi ses études quelque part sur le continent, peut-être à Paris ou en Italie. En 1571, il est de retour en Écosse pour le mariage de son père, et lui-même se marie en 1572. Deux ans plus tard, il s'établit dans un château nouvellement bâti sur les terres familiales. Il gère activement sa propriété, commerce beaucoup, et développe une approche scientifique de l'agriculture. Par ses contemporains, John Napier est surtout connu comme théologien. Il est un fervent protestant, et cette religion lui paraît menacée en Écosse par les agissements du catholique roi Philippe d'Espagne. Ce dernier semble conspirer avec le pape afin d'envahir l'Écosse dans le but de conquérir la Grande-Bretagne toute entière. Napier met en garde le roi Jacques VI d'Écosse contre toute collusion avec l'ennemi. Il écrit aussi en 1593 son ouvrage le plus célèbre, *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John*. Il y fait une lecture du livre des Révélation en condamnant vivement l'Eglise de Rome et faisant même du pape l'antéchrist de l'Apocalypse. Cet ouvrage lui vaudra une certaine réputation jusque sur le continent. Les activités mathématiques ne constituaient donc qu'un passe-temps pour Neper. On le connaît pour avoir donné quelques formules en trigonométrie sphérique, et pour avoir popularisé la notation du point pour séparer la partie entière et la partie fractionnaire d'un nombre en écriture décimale. Surtout, il est passionné par le fait de rendre le plus simple et le plus rapide possible les calculs portant sur les multiplications, les divisions et les extractions de racine carrée de grands nombres. Cela le conduit d'une part à l'invention des os de Neper, des petits bâtons de bois sur lesquels sont inscrits les tables de multiplication, et qui permettent de simplifier ces opérations. Surtout, cela le conduit à l'invention des logarithmes. L'approche des logarithmes de Napier est cinématique. Il considère un mobile M qui parcourt une droite (AB) de longueur 10^7 m. Il démarre du point A à la vitesse 10^7 , et va à une vitesse égale à la distance MB par heure. Au même moment, un mobile M' part d'un autre point A' , et avance à une vitesse uniforme égale à 10^7 m.h^{-1} . On note x la longueur BM , y la longueur $A'M'$. Napier constate que, si on prend des intervalles de temps régulièrement répétés, x croît en progression géométrique, et y croît en progression arithmétique : il dit que y est le logarithme de x . Avec des notations modernes, on a en effet :



Le logarithme transforme donc multiplications en additions, racines carrées en division par 2... Napier publie son invention dans *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (description de la règle magnifique des logarithmes). Ce livre est lu par **Briggs**, un mathématicien anglais, qui entreprend à l'été 1615 le voyage à Edimbourg, et persuade Napier d'utiliser des logarithmes en base 10, vérifiant $\log(1)=0$. C'est Briggs qui publia des tables très complètes de ces logarithmes, car Napier s'éteint le 4 avril 1617, apparemment des suites d'une crise de goutte. Les logarithmes se propageront très rapidement, sous l'impulsion des astronomes comme des commerçants. Deux cents ans après leur invention, **Laplace dira que les logarithmes, en abrégant leurs labeurs, "doublait la vie des astronomes"**.

Terminons cette biographie par une petite anecdote. Dans ces temps un peu irrationnels, les esprits brillants comme Napier étaient souvent vus comme des magiciens. La légende rapporte que, confronté à des problèmes de vols, Napier aurait annoncé pouvoir reconnaître le voleur parmi ses serviteurs grâce à son coq magique. Chaque serviteur est envoyé dans une pièce obscure caresser l'animal. Napier l'a malicieusement enduit de suie noire et le voleur, qui n'ose caresser le coq de peur d'être démasqué, est le seul à revenir la main propre !



fonctions exponentielles

Sommaire

7.1 Définitions et propriétés	68
7.1.1 Sens de variation	69
7.1.2 Dérivée et conséquence	69
7.2 Fonctions comportant Exp	70
7.2.1 Dérivée et conséquences	70
7.2.2 Exemple d'étude de fonction	70
7.2.3 Fonctions exponentielles de base a , ($a > 0$)	71
Étude de la fonction $f_a : x \mapsto a^x$	71
7.3 Fonctions puissances	73
7.3.1 Définition et conséquences	73
7.3.2 Croissance comparée de $\ln x$, e^x , x^α	73
7.4 Applications des fonctions exponentielle	74



La naissance de la fonction exponentielle est le fruit d'un long murissement qui n'aboutit qu'à la fin du XVII^e siècle. L'idée de combler les trous entre plusieurs puissances d'un même nombre est très ancienne. Ainsi trouve-t-on dans les mathématiques babyloniennes un problème d'intérêts composés où il est question du temps pour doubler un capital placé à 20% conduisant à une interpolation linéaire.

*Plus récemment, **Nicole Oresme** dans son **De proportionibus (vers 1360)** introduit puissances fractionnaires. **Nicolas Chuquet**, dans son **Triparty (1484)** cherche des valeurs intermédiaires dans des suites géométriques en utilisant des racines carrées et des racines cubiques et **Michael Stifel**, dans son **Arithmetica integra (1544)** met en place les règles algébriques sur les exposants entiers, négatifs et même fractionnaires.*

7.1 Définitions et propriétés

La fonction $\ln :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective, elle admet donc une bijection réciproque définie de $\mathbb{R}$ vers $]0; +\infty[$

Définition :

On appelle fonction exponentielle la bijection réciproque de la fonction $\ln$ qu'on note Exp définie par :

$$\begin{aligned} Exp : \mathbb{R} &\longrightarrow]0; +\infty[\\ x &\mapsto Exp(x) \end{aligned}$$

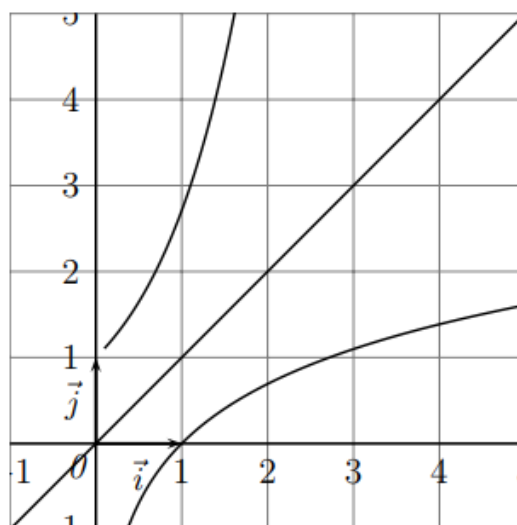
NB : Par définition de la fonction exponentielle on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(Exp(x)) = x$ or $\ln(e^x) = x$
Donc $\ln(Exp(x)) = \ln(e^x) \forall x \in \mathbb{R}$, ainsi $Exp(x) = e^x \forall x \in \mathbb{R}$. De ce fait, pour des raisons de commodité, le nombre $Exp(x)$ sera souvent noté plus simplement e^x

proposition :

- 1 $D_{Exp} = \mathbb{R}$
- 2 $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
- 3 $\forall x \in \mathbb{R}, e^x := y$ si et seulement si $x = \ln y$
- 4 $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$ et $\forall y \in]0; +\infty[, e^{\ln y} = y$
- 5 $e^0 = 1$ et $e^1 = e \simeq 2,718$

Remarque :

$x \mapsto Exp(x)$ varie dans le même sens que sa bijection réciproque $\ln$ et les courbes $(C_{\ln})$ et (C_{exp}) sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes.



proposition :

Pour tout couple $(x; y)$ de nombres réels on a : $e^{x+y} = e^x \times e^y$

Corollaire :

Pour tout couple $(x; y)$ de $\mathbb{R}^2$ et tout entier relatif n , on a :

- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{nx} = (e^x)^n$

7.1.1 Sens de variation

La fonction $x \mapsto e^x$ étant bijective et strictement croissante, il s'ensuit que :

Propriétés

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

- $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$
- $e^a < e^b$ si et seulement si $a < b$

7.1.2 Dérivée et conséquence

Théorème : *Dérivabilité*

La fonction $f : x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = e^x$.

Propriété

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Propriétés

- | | |
|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; | 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; | 4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ |



Exemple

1. Écrire plus simplement $A = \frac{e^{1+\ln 2}}{e^{2+\ln 3}}$ et $B = \frac{e^{x^2-4}}{e^{x+2}}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $(E_1) : e^{\sin x} = \sqrt{e}$, $(E_2) : e^{2x} + e^x - 2 = 0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $(I_1) : e^{2x} + e^x - 2 \geq 0$, $(I_2) : \frac{2e^x + 1}{e^x - 3} < 0$
4. Calculer en $+\infty$ et en $-\infty$ les limites des fonctions :
 - $x \mapsto (x - 4)e^x$
 - $x \mapsto (x^2 + 1)e^{-x} - x$
 - $x \mapsto \frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^x + 1}$

7.2 Fonctions comportant Exp

7.2.1 Dérivée et conséquences



Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K . La fonction e^u est dérivable sur K et on a :

$$(e^u)' = u' \times e^u$$



Exemple

La fonction $x \mapsto e^{-x^2+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto (-2x + 1)e^{-x^2+x}$



Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K .

La fonction $u' \times e^u$ admet pour primitive sur K la fonction e^u



Exemple Une primitive sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$ est la fonction $x \mapsto e^{\tan x}$

7.2.2 Exemple d'étude de fonction

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x+1}{e^{x^2+2x}}$

Ensemble de définition et Limites f est définie sur $\mathbb{R}$. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

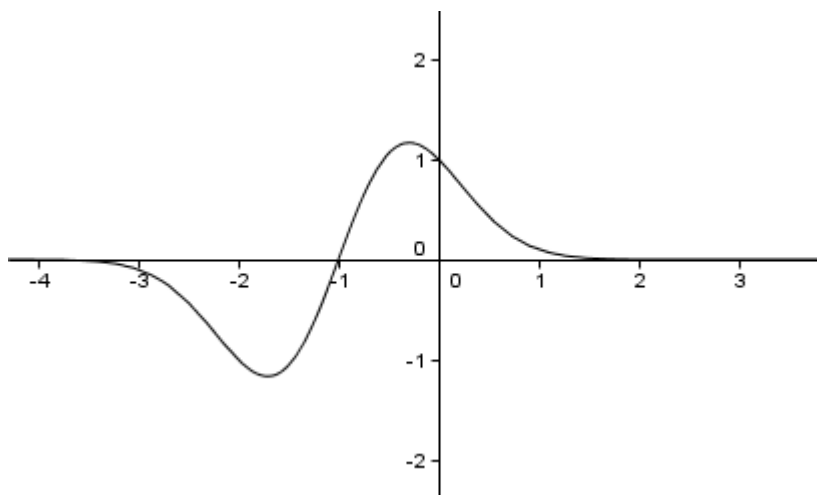
Dérivabilité et dérivée f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme rapport de fonction dérivable et on a :

$$f'(x) = \frac{(1 - \sqrt{2} - \sqrt{2}x)(1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}x)}{e^{x^2+2x}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ si et seulement si } x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$	$-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\frac{2}{2}e^{1/2}$			0
		$-\frac{2}{2}e^{1/2}$			



7.2.3 Fonctions exponentielles de base a , ($a > 0$)



Définition :

Soit a un nombre réel strictement positif, on a : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x \ln a}$.
On appelle fonction exponentielle de base a , la fonction $x \mapsto a^x$



Exemple

La fonction exponentielle de base 10 est la bijection réciproque du logarithme décimal ($x \mapsto \log x$)



Propriété

Soit a un nombre réel strictement positif, on a :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln a^x = x \ln a$

De cette propriété, il s'ensuit les propriétés ci-après



Propriétés

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b , pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

- | | | |
|------------------------|---|--------------------------------|
| 1) $a^{x+y} = a^x a^y$ | 2) $a^{-y} = \frac{1}{a^y}$ | 3) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ |
| 4) $(ab)^x = a^x b^x$ | 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ | 6) $(a^x)^y = a^{xy}$ |



Remarque :

Pour tout nombre réel strictement positif a , $a^0 = 1$ et $a^1 = a$

Étude de la fonction $f_a : x \mapsto a^x$

Ensemble de définition

$$D_{f_a} = \mathbb{R}$$

Dérivée et sens de variation

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x \ln a}$, donc f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f'_a telle

que

$$f'_a(x) = (\ln a)e^{x \ln a} = (\ln a)a^x$$

De ce fait, f'_a est du signe de $\ln a$. Dès lors, on distingue deux cas : $0 < a < 1$ et $a > 1$

1^{er} cas $0 < a < 1$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_a(x) < 0$

Donc f_a est décroissante sur $\mathbb{R}$

2^{em} cas $a > 1$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_a(x) > 0$

Donc f_a est croissante sur $\mathbb{R}$

Étude aux bornes de l'ensemble de définition

1^{er} cas $0 < a < 1$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

La droite (OI) est asymptote à C_{f_a} en $+\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln a \times \frac{e^{x \ln a}}{x \ln a} \right) = -\infty$$

C_{f_a} admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ)

2^{em} cas $a > 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

La droite (OI) est asymptote à C_{f_a} en $-\infty$

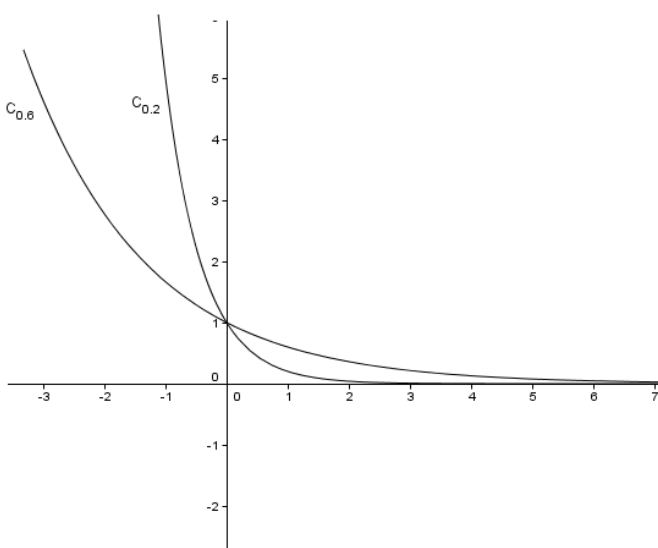
On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln a \times \frac{e^{x \ln a}}{x \ln a} \right) = +\infty$$

C_{f_a} admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ)

Variation du 1^{er} cas $0 < a < 1$

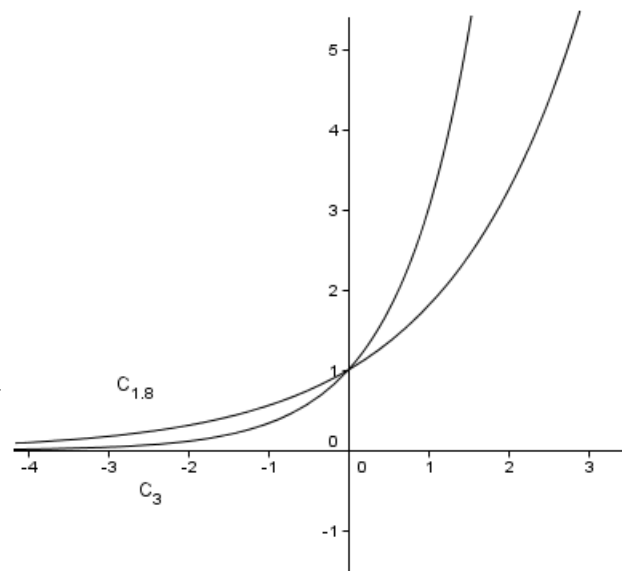
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'_a(x)$			—	
$f_a(x)$	$+\infty$		1	0



Pour $a = 0,2$ et $a = 0,6$

Variation du 2^{em} cas $a > 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'_a(x)$			+	
$f_a(x)$	0		1	$+\infty$



Pour $a = 1,8$ et $a = 3$

Exercice d'application

Étudier les fonctions suivantes et tracer leurs courbes représentatives $x \mapsto \ln(2^x - 1)$ et $x \mapsto \pi^{2x} + 1$

7.3 Fonctions puissances

7.3.1 Définition et conséquences

 Définition :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On appelle fonction puissance d'exposant α , la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f_\alpha :]0; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{aligned}$$

 proposition :

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Les primitives sur $]0; +\infty[$ de $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ sont les fonctions $F_\alpha : x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + k, k \in \mathbb{R}$

**Exemple**

Les primitives de la fonction $x \mapsto x^2 \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + k, k \in \mathbb{R}$

 proposition :

soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K :

La fonction u^α est dérivable sur K et on a $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$



Exemple La fonction $x \mapsto (\sin x)^\pi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $x \mapsto \pi \cos x (\sin x)^{\pi-1}$

 proposition :

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K :

La fonction $u' u^\alpha$ admet pour primitive sur K la fonction $\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}$.

**Exemple**

La fonction $x \mapsto 2x(1-x^2)^{\sqrt{2}}$ admet pour primitive sur $] -1; 1[$ la fonction $x \mapsto -\frac{(1-x^2)^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}$

7.3.2 Croissance comparée de $\ln x, e^x, x^\alpha$ **Théorème :**

Soit α un nombre réel strictement positif.

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad ; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0.$$

NB : La première limite traduit le fait que la fonction puissance croît vers $+\infty$ plus vite que la

fonction logarithme népérien et la deuxième limite traduit le fait que la fonction exponentielle croît vers $+\infty$ plus vite que la fonction puissance.

Lorsqu'une croissance est "très forte", on dit qu'elle est exponentielle et lorsqu'elle est "très lente", on dit qu'elle est logarithmique.

Le théorème précédent indique que la croissance de la fonction exponentielle l'emporte sur celle de toute fonction polynomiale et que la croissance de la fonction polynomiale l'emporte sur celle de la fonction logarithmique. Il s'ensuit qu'une croissance moyenne, ou intermédiaire, est polynomiale.

proposition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$$

Remarque :

Lorsqu'on ne peut conclure directement, on peut conjecturer la limite d'une fonction comportant des fonctions logarithme, puissance ou exponentielle en remarquant que :

- La fonction exponentielle « ***l'emporte*** » sur la fonction puissance ;
- la fonction puissance « ***l'emporte*** » sur la fonction logarithme.



Exemple Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{\ln(x^2 + 1)}$

indication on remarquera que : $\frac{e^x}{\ln(x^2 + 1)} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 + 1} \times \frac{x^2 + 1}{\ln(x^2 + 1)}$

7.4 Applications des fonctions exponentielle

Croissance bactérienne

On a cultivé la bactérie **Salmonella anatum** dans un bouillon nutritif ordinaire. Avec des comptages au cours des 8 premières heures, on a modélisé l'évolution de l'effectif y (en nombre de bactéries par mL) en fonction du temps x (en heures) par la fonction exponentielle :

$$y = 2240e^{1,035x}$$

1. Quel effectif (en nombre de bactéries par mL) pouvez-vous prévoir à 9 h dans l'hypothèse où le milieu n'est pas limitant ?
2. Quelles sont les vitesses de croissance aux temps 3 h ? 5 h ? 8 h ?

Solution

1) On va supposer que le modèle, qui a été validé au cours des 8 premières heures, est encore valable à 9 heures. C'est une hypothèse raisonnable si le milieu nutritif est suffisant.

Dans ce cas, en remplaçant x par 9, on obtient : $y = 2240e^{1,035 \times 9} = 24871451$ soit environ 25 millions de bactéries par mL

2) La dérivée de y en fonction de x est :

$$y' = 2318,4e^{1,035x}$$

Les vitesses de croissance demandées (en bactéries par mL et par heure) sont donc :

$$y'(3) \simeq 51722, y'(5) \simeq 409885 \text{ et } y'(8) \simeq 9144220$$

Intérêt composé

Un placement ou un emprunt est fait à intérêts composés lorsque à chaque fin de période l'intérêt simple est ajouté au capital pour produire à son tour un intérêt simple lors de la période suivante. On dit que l'intérêt est capitalisé. Soit : C : Capital prêté ou placé, n : Nombre de périodes, i : Le taux d'intérêt par période et V_{acq} la valeur acquise au bout de n période.

On vérifie que

$$V_{acq} = C.(1 + i)^n = C.e^{n.ln(1+i)}$$

NB : *La notion de fonction exponentielle admet plusieurs autres applications en économie (taux proportionnel, taux équivalent, les annuités, ...), en statistique et en probabilité (loi normale, loi exponentielle,...)*



Biographie

Henry Briggs (février 1561 [Warley Wood] - 26 janvier 1630 [Oxford])

Henry Briggs est né en février 1561, dans le Yorkshire. On sait peu de choses sur sa vie, si ce n'est qu'il entre en 1572 **au Saint John's College**, où il est diplômé en 1581. De 1596 à 1619, il est professeur de géométrie au Gresham College de Londres. Il s'intéresse à l'astronomie qui nécessite de lourds calculs. Il est le premier à déceler la puissance des logarithmes tout juste inventés par Napier pour simplifier les calculs complexes. A l'été 1615, il entreprend le voyage à Edimbourg pour rencontrer Napier. De leurs discussions, il ressortira l'adoption d'un logarithme en base 10 et tel que $\log(1) = 0$. C'est Briggs qui se chargera de la construction de tables du logarithme de plus en plus précises : 14 décimales pour tous les nombres compris en 1 et 20000, puis 15 décimales pour toutes les fonctions trigonométriques, pour chaque centième de degré.

A partir de 1620, Briggs est professeur à Oxford. Il laissera peu de travaux portant sa propre marque, mais son activité pour populariser le logarithme mérite un grand respect.



Biographie

John Littlewood (9 juin 1885 [Rochester] - 6 septembre 1977 [Cambridge])



John Littlewood est un mathématicien anglais du XX^e siècle. Né à Rochester en Angleterre en 1885, il émigre en Afrique du Sud en 1892 lorsque son père prend la direction d'une école dans ce pays. La qualité de l'enseignement est faible en Afrique du Sud, même à l'Université du Cap, et Littlewood retourne en Angleterre en 1900 pour étudier d'abord à l'école Saint-Paul de Londres, puis au **Trinity College de Cambridge** à partir de 1903. Il commence ses recherches en 1906 sous la direction de Barnes, qui le confronte très vite à **l'Hypothèse de Riemann**, ignorant sans doute sa difficulté. Si Littlewood ne parvient pas (bien sûr !) à résoudre ce problème, il réalise néanmoins des progrès remarquables.

En 1907, il obtient son premier poste à l'Université de Manchester, avant de retourner au Trinity College en 1910. Il y restera jusqu'à sa retraite. Il commence à cette période sa collaboration avec Hardy qui durera plus de 30 ans et donnera lieu à plus de 100 publications. C'est peut-être dans toute l'histoire des mathématiques la collaboration la plus importante entre deux mathématiciens de cette importance. L'impact de Hardy et Littlewood dans des domaines aussi variés que la théorie des nombres (approximation diophantienne, zéros de la fonction ζ) ou l'analyse harmonique (fonction maximale, théorèmes taubériens,...) est impressionnant ! Dans les années 1930, David Hilbert disait d'ailleurs qu'en Angleterre, il n'y avait que trois bons mathématiciens : **Hardy, Littlewood, et Hardy-Littlewood !**

De 1914 à 1918, Littlewood sert comme lieutenant dans l'artillerie, où il élabore des méthodes pour simplifier des calculs importants à faire en ballistique. Après la mort d'Hardy, il continue ses travaux sur **l'analyse de Fourier** avec **R. Paley**, mais aussi sur les équations différentielles avec **M. Cartwright**. Actif jusqu'au crépuscule de sa vie, il publie son dernier article alors qu'il est âgé de

87 ans. Durant sa vie, il reçut de nombreux honneurs : *membre de plusieurs académies des sciences (dont la Royal Society de Londres et l'Académie des Sciences de Paris), il reçoit la médaille Sylvester en 1943 et la médaille Copley en 1958.*

Terminons cette biographie en signalant l'humour et la fantaisie qui caractérisaient Littlewood : il existe des centaines de plaisanteries ou d'anecdotes mathématiques qui lui sont attribuées. Une partie est réunie dans son livre de vulgarisation **A mathematician's Miscellany**. En voici une. A la fin d'un article paru en français, Littlewood avait mis trois notes de bas de page disant ceci : 1. Je suis très reconnaissant au professeur M. Riesz d'avoir traduit le présent article. 2. Je suis reconnaissant au professeur M. Riesz d'avoir traduit la note précédente. 3. Je suis reconnaissant au professeur M. Riesz d'avoir traduit la note précédente. Dans A mathematician's Miscellany, il ajoute qu'il a arrêté légitimement cette récurrence au $n^{\circ} 3$: "aussi peu que je sache de français, je suis capable de copier une phrase française".



Sommaire

8.1	Généralités sur les suites numériques	79
8.2	Modes de définition d'une suite numérique	79
8.2.1	Suite numérique définie par une formule explicite	79
8.2.2	Suite numérique définie par une relation de récurrence	79
8.2.3	Suites majorées-minorées-bornées et suites monotones	80
8.3	Représentation graphique d'une suite numérique	81
8.3.1	Cas d'une suite définie par une formule explicite	81
8.3.2	Cas d'une suite définie par une formule de récurrence	81
8.4	Suites arithmétiques-Suites géométriques	81
8.4.1	Suites arithmétiques	81
8.4.2	Suites géométriques	82
	Limite de la suite géométrique q^n	83
8.5	Suites et résolution d'équations	83
8.5.1	Point fixe	84
8.5.2	Multiplicité d'une racine, fonction contractante	84
8.5.3	Théorème de point fixe	84
8.5.4	Algorithmes de résolution	85
	Méthode de dichotomie	85
	Méthodes du point fixe	86
	Méthode de Newton	86



Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (**mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers**) et à l'analyse (**une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique**). La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On en trouve, par exemple, chez Archimède, spécialiste des procédés illimités d'approximation (séries géométriques de raison $\frac{1}{4}$) pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700 av. J.-C. et plus récemment au 1^e siècle après J.-C.

8.1 Généralités sur les suites numériques

Définition

On appelle suite numérique, toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$

Notation

Soit u une suite numérique. Désignons par E son ensemble de définition. On a les notations suivantes :

Notation fonctionnelle $u : n \mapsto u(n)$.

Notation indicielle $(u_n)_{n \in E}$.

Vocabulaire

1. $u(n)$ ou u_n est appelé terme d'indice n ou terme général de la suite numérique.
2. Le $n^{\text{ième}}$ terme est appelé terme de rang n .

Remarque

Il ne faut pas confondre terme de rang n et terme d'indice n , qui sont deux concepts bien distincts



Exemple 11-1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

Le terme général de cette suite est : $\frac{2n+1}{n+2}$.

Le premier terme est $u_0 = \frac{1}{2}$

Le 15^{ième} terme ou terme de rang 15 est $u_{14} = \frac{29}{16}$

Le terme d'indice 15 est $u_{15} = \frac{31}{17}$

8.2 Modes de définition d'une suite numérique

8.2.1 Suite numérique définie par une formule explicite

Il s'agit de donner une formule explicite qui permet de définir le terme général u_n en fonction de n . On écrit alors $u_n = f(n)$ où f est une fonction numérique.



Exemple 11-2 Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique de terme général $V_n = \sqrt{n^2 - 1}$. Cette suite est déterminée par une formule explicite. le premier terme est $V_1 = 0$; le second est $V_2 = \sqrt{3}$.

8.2.2 Suite numérique définie par une relation de récurrence

Dans ce cas, on donne le ou les premier(s) terme(s) de la suite et une relation liant un ou deux ou plusieurs termes consécutifs.



Exemple 11-3 Soit la suite $(W_n)_n$ définie par :

$$1) \begin{cases} W_0 = 0 \\ W_{n+1} = -\frac{1}{2}W_n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Cette suite est définie par son premier terme et une relation de récurrence. On a $W_1 = 3$, $W_2 = \frac{3}{2}$.

$$2) \begin{cases} F_0 = 1 ; F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Cette suite est définie par une relation de récurrence et est appelée suite de **Fibonacci**. On a $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_5 = 8$.

8.2.3 Suites majorées-minorées-bornées et suites monotones

Soit (u_n) une suite numérique.

Définition

- 1 (u_n) est dite minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n, u_n \leq m$
- 2 (u_n) est dite majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n, u_n \geq M$
- 3 La suite (u_n) est dite bornée si elle est la fois majorée et minorée.

Remarque

- 1 (u_n) est dite positive, lorsque $\forall n, u_n \geq 0$
- 2 (u_n) est dite négative, lorsque $\forall n, u_n \leq 0$



Exemple 11-4 La suite de terme général $v_n = \frac{n+2}{n+1}$ est bornée.

Définition

- 1 On dit que (u_n) est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
- 2 On dit que (u_n) est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.
- 3 On dit que (u_n) est constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$.
- 4 On dit que (u_n) est stationnaire s'il existe un rang à partir duquel la suite (u_n) est constante.



Exemple 11-5

La suite (u_n) définie par $u_n = 3n + 1$ est croissante. La suite (v_n) définie par $v_n = -2n + 3$ est décroissante.

Remarque

Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique (u_n) , on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si la suite est positive, on peut aussi comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Notion de convergence

Définition

- Une suite est convergente si elle a une limite finie.
- Une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

On admet la propriété suivante.

**Propriétés**

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique.
 Si f a une limite en $+\infty$ alors u_n a une limite et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

8.3 Représentation graphique d'une suite numérique

8.3.1 Cas d'une suite définie par une formule explicite

**Exemple 11-6**

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = 6 - n^2$. Représenter les 4 premiers termes de (u_n) .

8.3.2 Cas d'une suite définie par une formule de récurrence



Exemple 11-7 Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; I; J)$.

Tracer les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $y = \frac{1}{2}x + 4$ et $y = x$. Puis Construire les 4 premiers termes de (u_n) .

8.4 Suites arithmétiques-Suites géométriques

8.4.1 Suites arithmétiques

**Définition**

Une suite (u_n) est dite arithmétique lorsqu'il existe un réel r tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = r$.
 r est appelé la raison de la suite (u_n) .

**Remarque**

Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, il suffit donc de montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante.

**Proposition**

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_p ($p \in \mathbb{N}$), et de raison r . Alors on a :
 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, u_n = u_p + (n - p)r$

NB : En particulier, lorsque le premier terme de la suite (u_n) est u_0 on a : $u_n = u_0 + nr$.



Bon à savoir Toute suite numérique (u_n) dont le terme général est de la forme $u_n = an + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ est une suite arithmétique.

**Proposition**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- 1) Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.
- 2) Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- 3) Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.



Exemple 11-8 : On considère la suite numérique (u_n) de terme général $u_n = 2n + 3$. Montrer que (u_n) est arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme. Quelle est le sens de variation de (u_n) .

**Proposition**

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 , et de raison r .

On pose $S_n = \sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$. S_n peut être calculé par la formule

$$S_n = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

Démonstration Exercice

8.4.2 Suites géométriques

**Définition**

Une suite (u_n) est dite géométrique lorsqu'il existe un réel q tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = qu_n$. q est appelé la raison de la suite (u_n) .

**Remarque**

Pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique, il suffit donc de montrer que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constante.

**Proposition**

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_p ($p \in \mathbb{N}$), et de raison q . Alors on a : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, u_n = u_p \times q^{n-p}$

NB : En particulier, lorsque le premier terme de la suite (u_n) est u_0 on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

**Proposition**

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 , et de raison q ($q \neq 1$).

On pose $S_n = \sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$. S_n peut être calculé par la formule

$$S_n = u_p \times \frac{1 - q^{(n-p+1)}}{1 - q}$$

**Exemple 11-9**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

Calculer la somme des 20 premiers termes de la suite (u_n) .

Limite de la suite géométrique q^n **Propriétés**

Soit q un nombre réel strictement positif.

- Si $q = 1$ alors $\min_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
- Si $q > 1$ alors $\min_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\min_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q < -1$ alors (q^n) n'a pas de limite.

8.5 Suites et résolution d'équations

En mathématiques, en physique, et en science expérimentale de façon générale, on est souvent confronté à des problèmes dont nous ne pouvons avoir la solution exacte. Nous sommes alors amené déterminer des valeurs approchées de la solution.

Il existe de nombreux problème dont la solution peut être définie comme la limite d'une suite de nombres ou de vecteurs.

Les algorithmes de calcul itérative consistent alors à déterminer un nombre fini, suffisamment grand, d'élément d'une suite, de telle sorte que le dernier calculé soit une valeur approché de la solution cherchée.

Les suites considérés sont souvent les suites récurrentes. En guise de rappel, une suite récurrente est une suite dont les valeurs sont définies à partir de valeurs précédentes.

En analyse numérique, nous disposons de plusieurs algorithmes ou méthodes de résolutions allant dans ce sens : Entre autre **Méthode du point fixe**, **la méthode de Newton**, **Méthode par dichotomie**.

Nous allons présenter quelques généralités et notions essentielle avant de faire un exposé plus ou moins formel de ces algorithmes.

8.5.1 Point fixe

Soient a, b des nombres réels tel que $a \leq b$

Définition :

Un réel $l \in [a; b]$ est dit point fixe d'une fonction $g : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ si $g(l) = l$

 **Exemple** On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 4x + 2$, les nombres $l_1 = -2$ et $l_2 = -1$ sont des points fixes de la fonction f car $f(-2) = -2$ et $f(-1) = -1$

Exercice d'application

Déterminer un point fixe de la fonction $x \mapsto \frac{2x-1}{x+3}$

8.5.2 Multiplicité d'une racine, fonction contractante

Définition :

Soit p un entier et f une fonction p fois dérivable.

(1) On dit que a est un zéro de f de multiplicité p si

$$f(\alpha) = f^{(1)}(\alpha) = f^{(2)}(\alpha) = \dots = f^{(p-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } f^{(p)}(\alpha) \neq 0$$

(2) Un zéro de multiplicité 1 (respectivement 2) est appelé un **zéro simple** (respectivement **double**).

 **Exemple** Considérons la fonction $f(x) = x^2 + 4x + 4$, $\alpha = -2$ est un zéros double ou de multiplicité 2 car $f(-2) = f'(-2) = 0$

Définition :

Soit $k \in]0; 1[$. Une fonction $g : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ est dite **fonction contractante** de rapport k ou **k -contractante** lorsque :

$$\forall x; y \in [a; b]; |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$$

Remarque :

 Soit $g \in C^1([a; b])$ (**ie** g est dérivable sur $]a; b[$ et sa dérivée g' y est continue).

Si $|g'(x)| < 1; \forall x \in [a; b]$; alors g est contractante sur $[a; b]$.

 Une fonction contractante est continue .

8.5.3 Théorème de point fixe

Théorème :

Soit g une fonction **continue**, si la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ est convergente alors sa limite est un point fixe de g

Théorème : point fixe

Soit $g : [a; b] \mapsto [a; b]$ une fonction contractante de rapport k . Alors g admet **un unique point fixe** $l \in [a; b]$.

De plus, pour tout choix de $x_0 \in [a; b]$; la suite numérique définie par $x_{n+1} = g(x_n)$; $\forall n \geq 0$ converge vers l

8.5.4 Algorithmes de résolution

Pour déterminer la ou (les) solution(s) d'une équation de la forme $f(x) = 0$ où f est une fonction continue sur un intervalle I , lorsqu'on ne connaît pas la formule directe donnant la réponse ou si elle est trop compliquée à calculer, on peut chercher des suites récurrentes dont les limites donnent les solutions.

On présente dans la suite 3 algorithmes classiques :

- La dichotomie (*principe également utilisé dans d'autres problèmes*) la plus simple, la plus sûre, **mais lente (ie linéaire)**.
- Les méthodes de point fixe
- la méthode de Newton (*qui est un cas particulier de méthode de point fixe*)

Méthode de dichotomie

Principe

Considérons une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$. On suppose que f admet une et une seule racine α dans $]a; b[$ et que $f(a) \times f(b) < 0$. On note

$$c := \frac{a + b}{2}$$

le centre de l'intervalle $[a; b]$

1 Si $f(c) = 0$; c'est la racine de f et le problème est résolu.

2 Si $f(c) \neq 0$; nous regardons le signe de $f(a) \times f(b)$.

- Si $f(a) \times f(c) < 0$; alors $\alpha \in]a; c[$
- Si $f(c) \times f(b) < 0$; alors $\alpha \in]c; b[$

On recommence le processus en prenant l'intervalle $[a; c]$ au lieu de $[a; b]$ dans le premier cas, et l'intervalle $[c; b]$ au lieu de $[a; b]$ dans le second cas. De cette manière, on construit par récurrence sur n trois suites (a_n) , (b_n) et (c_n) telles que $a_0 = a$; $b_0 = b$ et telles que pour tout $n \geq 0$,

1 $c_n := \frac{a_n + b_n}{2}$

2 Si $f(c_n) \times f(b_n) < 0$ alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

3 Si $f(c_n) \times f(a_n) < 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.



exemple : On voudrait approximer le zéros de la fonction $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0; \pi]$

Méthodes du point fixe

Principe

Le principe de cette méthode consiste à transformer l'équation $f(x) = 0$ en une équation équivalente $g(x) = x$ où g est une fonction auxiliaire **"bien" choisie**. Le point α est alors un point fixe de g . Approcher les zéros de f revient à approcher les points fixes de g . Le choix de la fonction g est motivé par les exigences du théorème de point fixe. En effet, elle doit être **contractante** dans un voisinage I de α , ce qui revient à vérifier que $|g'(x)| < 1$ sur ce voisinage. Dans ce cas, on construit une suite $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \text{ dans un voisinage } I \text{ de } \alpha \\ \forall n \geq 0, x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$



exemple On considère l'équation, $x^2 - 2 = 0$, (prendre $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$)

Méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode particulière de point fixe. Elle est basée sur l'idée de construction d'une suite (x_n) qui converge vers α d'une manière quadratique (**ie** rapide).

Principe

On suppose que f est continue et dérivable. On choisit x_0 et on définit une suite récurrente de la façon suivante :

x_{n+1} est l'abscisse de l'intersection avec l'axe des abscisses de la tangente à la courbe au point $(x_n; f(x_n))$. Autrement dit :

$$\begin{cases} x_0 \text{ proche de } \alpha \\ f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0, \forall n \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \text{ proche de } \alpha \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Sous certaine condition, la suite a une limite α qui vérifie $f(\alpha) = 0$ et est un point fixe de la fonction

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$



exemple : considérons la fonction polynomiale f définie par $f(x) = x^2 - 2$ on veut résoudre l'équation $f(x) = 0$, considérons la suite $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \forall n \geq 0 \end{cases}$
Elle converge vers $\sqrt{2}$. Après 4 itérations on obtient $\sqrt{2}$ à 10^{-8} près.

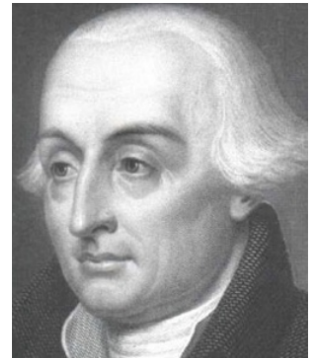
NB : Dans certaines situations, la dérivée de f est très compliquée voir même impossible à calculer. Dans ce cas, nous approchons la dérivée par un taux d'accroissement (**ie** on remplace $f'(x_n)$ par $\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ et dans ce cas nous avons besoin de deux itérés initiaux x_0, x_1).

Ce que nous obtenons est appelée **la méthode de Lagrange ou méthode de la sécante**

Biographie

Joseph-Louis Lagrange (25 janvier 1736 [Turin]-10 avril 1813 [Paris])

Giuseppe Lodovico Lagrangia est né le 25 janvier 1736 à Turin, alors capitale du royaume de Sardaigne. Il est pourtant considéré comme un mathématicien français et non italien, ceci de sa propre volonté (la branche paternelle de sa famille étant française). Son père dispose d'une position sociale favorable auprès du roi de Sardaigne, mais il a perdu beaucoup d'argent dans une spéculation hasardeuse. Lagrange étudia brillamment à l'université de sa ville natale ; son intérêt pour les mathématiques ne se manifeste que vers 17 ans, à la lecture d'un mémoire de Halley sur l'utilisation de l'algèbre en optique. Il se plonge alors aussitôt, seul et sans aide, dans l'étude des mathématiques.



Très rapidement, il obtient des résultats probants. A l'été 1755, deux ans seulement après le début de ses travaux, il écrit une longue lettre à Euler (alors le plus grand mathématicien vivant) sur la détermination de la courbe tautochrone (i.e. la courbe telle que deux mobiles identiques lâchés au même moment en des points différents de la courbe arrivent au point le plus bas au même moment). Cette courbe (une cycloïde) a été déterminée pour la première fois par Huyghens, mais la méthode que propose Lagrange pour l'obtenir est beaucoup plus générale, et donnera naissance au "Calcul des variations". Cet échange est le prémice d'une riche correspondance entre Lagrange et Euler, marquée par un respect mutuel important.

A la fin de cette même année 1755, Lagrange devient professeur à l'école d'artillerie de Turin., ville où il fonde en 1757 une académie des sciences. Son talent est très vite reconnu, et il écrit durant ses premières années de brillants mémoires où il applique les méthodes du calcul des variations à la mécanique (propagation du son, problème des n-corps, cordes vibrantes). En 1764 notamment, Lagrange gagne le Grand Prix de l'Académie des Sciences de Paris, pour son travail sur les libérations de la lune, c'est-à-dire les petites perturbations de son orbite, et sur ce phénomène étrange qui fait que la lune présente toujours la même face à la terre. Lagrange deviendra un véritable habitué de ce prix, le gagnant à nouveau en 1772, 1774 et 1780.

En 1766, grâce à l'appui de D'Alembert, Lagrange succède à Euler au poste prestigieux de directeur des mathématiques à l'Académie des Sciences de Berlin. Il passera 20 ans là-bas, d'une extraordinaire fertilité. Hormis quelques arrêts dus à une santé fragile, il publie avec une régularité impressionnante des mémoires qui touchent tous les domaines des mathématiques et de la mécanique : astronomie, probabilités, théorie des équations algébriques (son travail sur les racines ouvre la voie à Abel et Galois), équations différentielles, théorie des fonctions. Lagrange excelle particulièrement en arithmétique, en résolvant plusieurs conjectures difficiles dues à Fermat, et en prouvant que tout entier naturel est somme de 4 carrés. Dans une perspective plus historique, Lagrange est à la transition entre l'époque d'Euler, où l'on publie à tout va sans trop se soucier de la rigueur, et le XIX^e s., où sous l'impulsion de Gauss, Cauchy et Weierstrass, la rigueur devient un élément central des mathématiques.

La vie privée de Lagrange est peut-être moins heureuse. Il souffre parfois de dépression, et s'il se marie en 1767 avec une de ses cousines (il est veuf en 1783), il n'a pas d'enfants, et on dit que ce mariage est peu heureux. Les dernières années à Berlin sont consacrées à l'étude du monumental *Traité de Mécanique Analytique*, où il reprend, complète et unifie les connaissances accumulées depuis Newton. Ce livre, qui devient pour tous ses contemporains une référence, se veut notamment

une apologie de l'utilisation des équations différentielles en mécanique.

En 1787, après la mort de l'Empereur Frédéric II, Lagrange part pour la France où il devient membre de l'Académie des Sciences de Paris. Il est un des rares à traverser la Révolution sans être inquiété : il est même Président de la Commission des poids et des mesures, et est à ce titre un des pères du système métrique et de l'adoption de la division décimale des mesures. Les événements le marquent cependant beaucoup, en particulier le guillotinage du chimiste Lavoisier, au sujet duquel il déclare : ***Il a fallu un instant pour couper sa tête, et un siècle ne suffira pas pour en produire une si bien faite.***

Lagrange participe encore à la création de l'Ecole Polytechnique, provisoirement nommée Ecole Centrale des Travaux Publics, dont il est le premier professeur d'analyse, d'ailleurs peu apprécié. Il écrit encore 2 traités mathématiques (Théorie des fonctions analytiques - Résolution des équations numériques), moins bien accueillis que celui de mécanique analytique. Il se remarie en 1792 avec une jeune fille qui lui est toute dévouée. Il décède le 10 avril 1813, après avoir reçu de Napoléon Ier tous les honneurs de la nation française (comte de l'empire, Grand Officier de la Légion d'Honneur).

Biographie

Leonardo Fibonacci (1170 [Pise] - 1245 [Pise])



Leonard de Pise, plus connu sous le nom de Fibonacci, est le premier grand mathématicien de l'ère chrétienne du monde occidental. D'assez nombreux détails de sa jeunesse nous sont connus par les propos qu'il tient lui-même dans la préface d'un de ses livres, le Liber abaci. Né à Pise vers 1170, il rejoint très jeune son père à la colonie de Bujania, en Algérie, où ce dernier est responsable du bureau des douanes pour le compte de l'ordre des marchands de Pise. Voulant faire de son fils un marchand, il l'initie à l'art du calcul indo-arabe. Fibonacci apprendra en outre les savoirs et algorithmes orientaux grâce à ses nombreux voyages en Syrie, en Grèce, en Égypte. Vers 1200, il retourne vivre dans sa ville natale (où il verra la construction de la célèbre tour penchée). Il réalise alors pendant 25 ans des travaux pour

rassembler, mettre à jour et développer les connaissances qu'il a collectées jusque là.

Fibonacci vivait avant l'invention de l'imprimerie, ce qui signifiait que pour avoir plusieurs exemplaires du même ouvrage, il fallait le travail entièrement manuel d'un copiste. Si bien que peu d'ouvrages de l'époque ont survécu, et que l'on doit considérer presque comme un miracle de pouvoir disposer de copies de 4 documents écrits de la main de Fibonacci, même si l'on sait que deux ouvrages au moins ont été perdus. Le premier ouvrage de Fibonacci, le Liber abaci, daté de 1202, connut un grand succès, et on peut même estimer que c'est lui qui popularisa définitivement en Europe la numérotation indo-arabe. Le Liber abaci contenait aussi de petits problèmes. C'est dans l'un d'entre eux, concernant la reproduction des lapins, qu'est introduite la célèbre suite de Fibonacci.

En ce début de *XIII*e s. règne sur l'Europe l'empereur Frédéric II, le plus cultivé des empereurs germaniques, avec de nombreux philosophes à sa cour. L'un d'entre eux, Maître Dominicus, encouragea Fibonacci à écrire un nouvel ouvrage, Practica geometriae (1220), où Fibonacci commente par des exemples, et de nouveaux théorèmes, 8 des Eléments d'Euclide. Dominicus arrangea par ailleurs une rencontre entre Fibonacci et Frédéric II, alors que ce dernier visitait Pise.

Un autre des plaisirs de l'empereur était les défis mathématiques qu'un membre de sa cour posait à la communauté des scientifiques. Fibonacci en résout 3, dont il donne une réponse dans Flos dédié à Frédéric II, et daté de 1225. C'est aussi de cette année que date le Liber quadratorum, alors que

Fibonacci écrit en 1228 une version enrichie de Liber abaci. Le Liber Quadratorum est probablement le livre le plus personnel et le plus abouti de Fibonacci. Il y présente ses recherches en arithmétique, introduit la notion de congruence, trouve des triplets pythagoriciens. Depuis Diophante, et jusque Fermat, personne ne fit autant progresser la théorie des nombres que Fibonacci. Il faut dire qu'après Fibonacci, la recherche mathématique ne connut pas de nouvelles envolées de tout le Moyen-âge.

A compter de 1228, on ne connaît qu'un seul document qui donne trace de la vie de Fibonacci. Il s'agit d'un décret de la République de Pise de 1240, lui attribuant une rente annuelle de 20 livres pour les services rendus à la vie publique.

Biographie

Georg Cantor, né le 3 mars 1845 Saint-Petersbourg , mort le 6 janvier 1918 à Halle

Mathématicien Allemand. Les parents de Georg Cantor appartenaient à un milieu aisé, tant financièrement qu'intellectuellement. Son père était homme d'affaire et sa mère était issue d'une famille de musicien. Il jouait du violon de manière remarquable. Il reçut une excellente éducation et se montra très tôt doué en particulier pour les activités manuels. Mais son père rêve qu'il devienne ingénieur aussi il part faire ses études supérieures à Berlin. Il obtient son doctorat de mathématiques en 1867. Les premiers travaux qu'il mène après sa thèse lui sont suggérés par Heine. Ils concernent l'unicité de la décomposition d'une fonction périodique d'une variable réelle comme série de fonctions trigonométriques (les fameuses séries de Fourier que vous découvrirez en deuxième année). Il parvient à prouver cette propriété pour les fonctions continues alors qu'elle échappait à des mathématiciens de la classe de Lejeune Dirichlet, Lipschitz, Riemann et Heine lui-même. Afin de résoudre ce problème, il est amené à définir et étudier l'ensemble des points de discontinuité de ces fonctions. C'est alors qu'il commence à étudier des ensembles de cardinal infini et cela le conduit en 1872 à définir rigoureusement ce qu'est un nombre réel. Il est le premier à comprendre que l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, autrement dit qu'il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. Il y a beaucoup plus de réels que d'entiers et tous les ensembles infinis n'ont pas le même nombre d'éléments ... Ces découvertes soulèvent évidemment des contestations, en particulier celles de Poincaré et Kronecker. Ce dernier n'hésita pas à bloquer non seulement les articles de Cantor mais aussi sa carrière. Cantor est frappé de sa première dépression en 1884. Les attaques de Kronecker à son sujet n'y sont sûrement pas étrangères. Il ne retrouva plus alors sa puissance intellectuelle. En 1899 il perd son plus jeune fils et commence à souffrir de dépression chronique et de schizophrénie. Il est affecté à un poste administratif le dispensant de cours. Il prend sa retraite en 1913 et meurt dans la pauvreté en 1918.



Sommaire

9.1	Intégrale d'une fonction continue	91
9.1.1	Définition exemple, propriété	91
9.1.2	Interprétation géométrique	92
9.1.3	Propriétés de l'intégrale	93
9.2	Techniques de calcul intégrale	94
9.2.1	Utilisation des règles de dérivation	94
9.2.2	Intégration par parties	95
9.2.3	Changement de variable dans une intégrale	95
9.2.4	Calcul approchée d'une intégrale	96
9.3	Applications du calcul intégral	97
9.3.1	Calcul du volume d'un solide de révolution	97
9.3.2	Calcul d'aire	98
9.3.3	Calcul de la longueur d'une courbe et quelques grandeurs d'électricité	99
	Calcul de la longueur d'une courbe	99
	Quelques grandeurs d'électricité	101
9.3.4	Étude d'une fonction définie par une intégrale	101



En mathématiques, **l'intégration** est le fait de calculer une intégrale. C'est aussi une des deux branches du calcul infinitésimal, appelée également calcul intégral, l'autre étant le calcul différentiel. Les opérations de mesure de grandeurs (longueur d'une courbe, aire, volume, flux...) et de calcul de probabilités étant souvent soumises à des calculs d'intégrales, l'intégration est un outil scientifique fondamental.

Les différents domaines dans lesquels peuvent se rencontrer des intégrales ont conduit à donner des définitions différentes de l'intégrale permettant d'en calculer pour des fonctions de moins en moins régulières. On rencontre ainsi les intégrales dites **de Riemann, de Lebesgue ou de Kurzweil-Henstock**. Mais toutes ces définitions coïncident dans le cas des fonctions continues.

Le symbole mathématique représentant l'intégration, $\int$ est appelé **signe somme, signe d'intégration, signe intégral ou intégrateur**; il a été introduit par **Leibniz**. Il s'agit en fait d'un *s* allongé, mis pour somme. En effet, Leibniz s'est servi de l'initiale du mot latin **summa**, « somme »

9.1 Intégrale d'une fonction continue

9.1.1 Définition exemple, propriété

Activité

On considère la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 5$.

1. Vérifier que $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + 5x$ est une primitive de f .
2. Déterminer deux autres primitives G et H de f .
3. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Calculer les nombres $F(b) - F(a)$, $G(b) - G(a)$, $H(b) - H(a)$. Conclure.

Définition :

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de f . Soit a et b deux éléments de I . On appelle intégrale de a à b de f le nombre $F(b) - F(a)$ et on note

$$\int_a^b f(x)dx := [F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$$



Exemple Une primitive de $f(x) = 3x^2 + \sin x$ est $F(x) = x^3 - \cos x$.

On en déduit $\int_0^\pi (3x^2 + \sin x)dx = [x^3 - \cos x]_0^\pi = \pi^3 + 2$.

Remarque :

La variable x dans $\int_a^b f(x)dx$ est **muette** et pourrait bien être remplacée par n'importe quoi.

De façon précise, on a $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\mu)d\mu = \int_a^b f(\theta)d\theta = \dots$

proposition :

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, a, b, c sont trois réels, on a :

1 $\int_a^a f(x)dx = 0$

2 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3 $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ (**relation de Chasles**)



Exemple

Calculons $\int_0^3 |t - 2|dt$

On a : $|t - 2| = \begin{cases} t - 2 & \text{si } t \geq 2 \\ 2 - t & \text{si } t \leq 2 \end{cases}$ Donc $\int_0^3 |t - 2|dt = \int_0^2 (2 - t)dt + \int_2^3 (t - 2)dt$

Ainsi, $\int_0^3 |t - 2|dt = \left[2t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}t^2 - 2t\right]_2^3 = \dots$

9.1.2 Interprétation géométrique

Le plan est rapporté à un repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On se donne I, J, K des points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{i} + \vec{j}$

Définition : Unité d'aire

On appelle unité d'aire **u.a** l'aire du parallélogramme $OIJK$. En général, le repère est orthogonal, auquel cas, **u.a** est l'aire du rectangle $OIJK$

Activité

On considère la fonction f , définie par $f(x) = x$

1. Tracer la courbe représentative de f .
2. Déterminer une primitive F de f .
3. Calculer $F(4) - F(2)$
4. Déterminer l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe de f , les droites d'équation $x = 2$, $x = 4$ et $y = 0$. Conclure.

Définition :

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Soit H le domaine limité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Alors :

$$\text{Aire}(H) := \int_a^b f(x)dx \times u.a$$

Remarque :

Si le repère est orthonormé, alors $u.a = 1$ et $\text{Aire}(H) := \int_a^b f(x)dx$. Ce sera le plus souvent le cas.

Exemple

Soit $f : [0; \pi] \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin t$. Unités graphiques : $OI = 2\text{cm}$, $OJ = 3\text{cm}$.

Calculer l'aire du domaine limité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.

On a : $\text{Aire} = \int_0^\pi \sin t dt \times u.a = [-\cos t]_0^\pi \times 6\text{cm}^2 = 12\text{cm}^2$

Remarque :

Si f est une fonction positive et continue sur $[a; b]$, le domaine H est l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$.

Et si f est continue et négative sur $[a; b]$, alors H est l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient $a \leq x \leq b$, $f(x) \leq y \leq 0$. (*Introduire une figure représentative des deux cas de figure lors de l'exposé.*)

9.1.3 Propriétés de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a et b deux réels appartenant à I , α un nombre réel quelconque.

proposition :

 $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (**Linéarité 1**)

 $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ (**Linéarité 2**)

 $\int_a^a f(x)dx = 0$ (**Continuité**)

 Si de plus f est positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

 On suppose que $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

 On a toujours $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

proposition :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ tel que $-a \in I$. Soit f une fonction continue sur I .

 Si f est paire sur $[-a; a]$, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

 Si f est impaire sur $[-a; a]$, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

proposition : inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, m et M deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$, alors, si $a \neq b$,

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

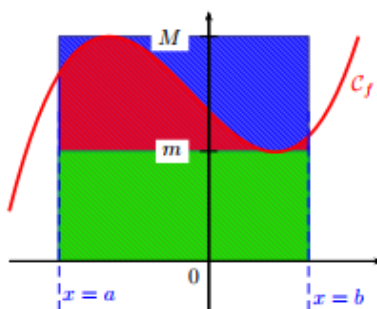


Illustration graphique

NB : D'un point de vue graphique, l'aire $\int_a^b f(x)dx$ est encadrée par l'aire des deux rectangles inférieur et supérieur.

La philosophie de cette proposition est que l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ ne peut faire n'importe quoi comme devenir **infinie** par exemple. Elle est bornée par le produit des **extrema** de la fonction par la longueur de l'intervalle. Ce théorème est important mais on a mieux. Pourquoi se contenter d'une faible inégalité alors qu'on pourrait avoir une égalité ?

💡 **Théorème : Valeur moyenne d'une fonction**

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Alors il existe un réel c de $[a; b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Le nombre $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ est alors appelé la valeur moyenne de f entre a et b .

NB : Le signe $\int$ se dit aussi « somme », ce qui nous donne une formule similaire à la formule de la **moyenne classique**.

Interprétation graphique si f est positive sur $[a; b]$

Le réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ est le réel pour lequel l'aire délimitée par la courbe représentative C_f de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle **bleu** dont les côtés ont pour mesures $b-a$ et μ

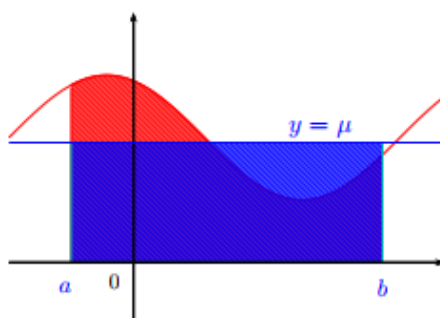


Illustration graphique

9.2 Techniques de calcul intégrale

9.2.1 Utilisation des règles de dérivation

💡 **proposition :**

Lorsque tout est bien défini, on a :

$$\int_a^b \left(\frac{u'(x)}{u(x)} \right) dx = [\ln|u(x)|]_a^b \text{ et } \int_a^b u'(x)e^{u(x)} = [e^{u(x)}]_a^b$$

💡 **Exemple** $J = \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \left[\ln|1+x^2| \right]_0^1 = \ln 2$

proposition :linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx = \alpha [F(x)]_a^b + \beta [G(x)]_a^b$$

où F est une primitive de f et G une primitive de g .

 **Exemple** $I = \int_0^1 \frac{1-2x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$

Ainsi $I = \left[\text{Arctan}(x) \right]_0^1 - \left[\ln|1+x^2| \right]_0^1 = \dots$

9.2.2 Intégration par parties

Cette technique d'intégration est fondée sur la propriété de **Primitivation par partie**

Théorème :

Soit $I = [a; b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f et g deux fonctions continues et dérivables sur I .

On a :

$$\int_a^b (f'g)(x) dx = [(fg)(x)]_a^b - \int_a^b (fg')(x) dx$$

 **Exemple** Calculons $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

Posons : $\begin{cases} f'(x) = \sin x \\ g(x) = x \end{cases} \implies \begin{cases} f(x) = -\cos x \\ g'(x) = 1 \end{cases}$

Dès lors $K = \left[-x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx = \dots = 1$

Exercice d'application

Calculer $P = \int_1^2 \ln x dx$, $Q = \int_0^1 x e^x dx$

9.2.3 Changement de variable dans une intégrale

Théorème :

Soit ϕ une fonction dérivable sur un intervalle I de dérivée continue sur I (**ie** $\phi \in C^1(I)$) et f une fonction continue sur $\phi(I)$. Soit a et b deux réels dans I , alors on a :

$$\int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t) dt$$

 **Exemple** Calculons $M = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$. Posons $t = \sin u$ on a $u = \text{Arcsin} t$.

Ainsi $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du$ (car $\sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$)

$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2} du = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

Exercice d'application Calculer $N = \int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ (*indication* poser $u = e^x$)

Corolaire :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et p -**périodique**. Pour tous nombres réels a et b on a :

$$\int_{a+p}^{b+p} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \text{ et } \int_a^{a+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt$$



Exemple La fonction $t \mapsto \cos 2t$ est continue sur $\mathbb{R}$ et π -périodique

$$\text{Donc } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2t dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\pi} \cos 2t dt = \int_0^{\pi} \cos 2t dt = 0$$

9.2.4 Calcul approchée d'une intégrale

Nous avons appris jusqu'ici à calculer les intégrales des fonctions dont on pouvait déterminer des primitives. Supposons un instant qu'on veuille calculer $\int_0^1 e^{x^2} dx$, on est très rapidement coincé par nos méthodes, on ne connaît pas de primitive de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$. On procède alors par une approximation. Il existe plusieurs méthodes permettant d'obtenir des valeurs approchées de telle intégrale : entre autre on la méthode des rectangles, la méthode des points médians, et celle des trapèzes.

Dans chacun des cas :

- on partage l'intervalle $[a; b]$ en intervalle de même amplitude
- On prend pour valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$, l'aire du domaine délimité par la courbe C_f , les droites d'équation $x = a$, $x = b$ et l'axe des abscisses

Cependant, nous allons uniquement présenter la méthode des rectangles.

Théorème :

Soit une fonction f continue, dérivable et de dérivée continue sur le segment $[a; b]$ tel que $|f'| \leq M$ sur $[a; b]$. On effectue une subdivision du segment $[a; b]$ de pas (**Amplitude**) constant $h = \frac{b-a}{n}$. On pose pour un entier $k \in [0; n]$, $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

Posons pour tout entier naturel n

$$R_n = \left(\frac{b-a}{n} \right) \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

On obtient une majoration de l'erreur commise en approximant l'intégrale I de la fonction f sur $[a; b]$ par R_n :

$$|I - R_n| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M$$



Exemple Déterminer une valeur approchée de $A = \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ en partageant l'intervalle $[0; 1]$ en 10 intervalles de même amplitude et majorer l'erreur commise.

On considère la fonction $f : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$, On a : $R_{10} = \frac{1}{10} \left[f(0) + f\left(\frac{1}{10}\right) + \dots + f\left(\frac{9}{10}\right) \right] \simeq 0.875$
 Par ailleurs, $|f'|$ est majoré par 1 sur $[0; 1]$, Par suite, $|A - R_n| \leq 5 \times 10^{-2}$.

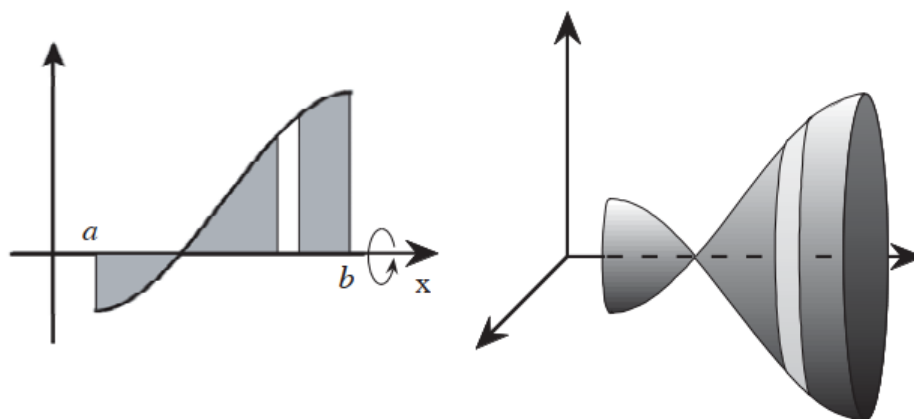
Exercice d'application

Déterminer une valeur approchée de $B = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ en partageant $[0; 1]$ en 5 intervalles.

9.3 Applications du calcul intégral

9.3.1 Calcul du volume d'un solide de révolution

Il s'agit ici de calculer le volume de solides générés par la révolution autour de l'axe (Ox) d'une portion de courbe $y = f(x)$ comprise entre $x = a$ et $x = b$.



Méthode des disques

L'idée est la même que lorsque l'on cherchait l'aire sous une courbe.

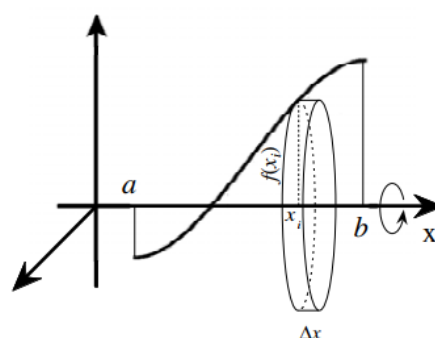
On va découper l'intervalle $[a; b]$ en n sous intervalles de largeur identique : $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$, avec $x_0 = a$ et $x_n = b$. La largeur de chaque sous-intervalle est égale à la largeur de l'intervalle $[a; b]$ divisé par le nombre de sous-intervalles, c'est-à-dire : $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Pour chaque $i = 0, 1, \dots, n-1$, on dessine un rectangle ayant comme base le segment $[x_i; x_{i+1}]$ et comme hauteur $f(x_i)$.

Lorsqu'ils tourneront autour de l'axe Ox , chacun de ces rectangles va définir un cylindre très fin (presque un disque) de volume $\pi \cdot [f(x_i)]^2 \Delta x$. Le volume du corps de révolution sera la somme de tous ces cylindres :

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i)]^2 \Delta x$$

Qui se traduira en termes d'intégrale par :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



Volume des solides particuliers

Cône et Pyramide

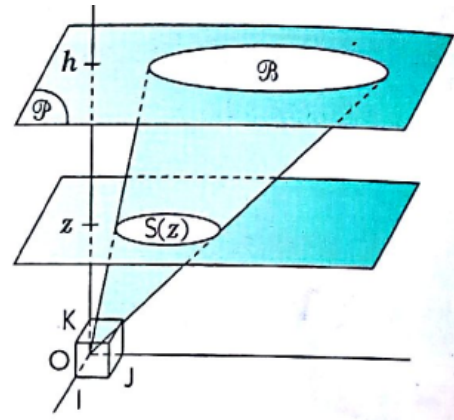
Soit h la hauteur ($h \neq 0$) et $\mathcal{B}$ l'aire de la base du cône. Choisissons comme origine du repère le sommet O de ce cône et pour axe (OK) , la perpendiculaire au plan P de la base.

La section du cône par le plan de cote z ($0 \leq z \leq h$) est l'image de la base par l'homothétie de centre O et de rapport $k = \frac{z}{h}$

De ce fait, son aire est $S(z) = \mathcal{B} \times \left(\frac{z}{h}\right)^2$

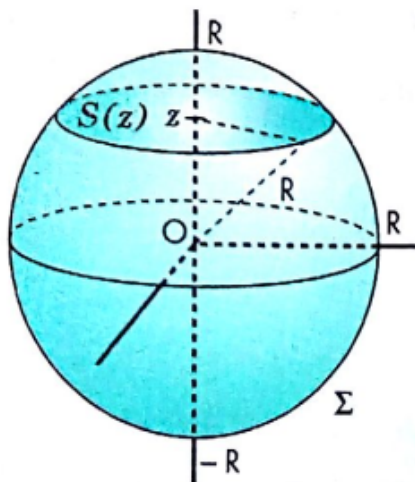
Par conséquent le volume du cône est donc :

$$\mathcal{A} = \int_0^h \mathcal{B} \times \left(\frac{z}{h}\right)^2 dz = \left[\frac{\mathcal{B}}{h^2} \cdot \frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h.$$



Pour le cas de la pyramide la démonstration et la formule son identique.

Boule de rayon R



Choisissons comme origine du repère le centre de la boule. La section de la boule par le plan de cote z ($-R \leq z \leq R$) est un disque de rayon

$$\sqrt{R^2 - z^2}$$

L'aire de ce disque est :

$$S(z) = \pi(R^2 - z^2)$$

Le volume de la boule est donc :

$$\mathcal{V} = \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz = \left[\pi\left(R^2 z - \frac{z^3}{3}\right)\right]_{-R}^R.$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi R^3$$

On a bien un résultat admis au collège et prouvé par Archimède (287-212 av-JC)

9.3.2 Calcul d'aire

Théorème :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$ telles que, pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \leq g(x)$ et C_f et C_g leur courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ vaut :

$$\mathcal{A} = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

Exemple Déterminons l'aire de la portion du plan limitée par les courbes représentatives des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 4$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

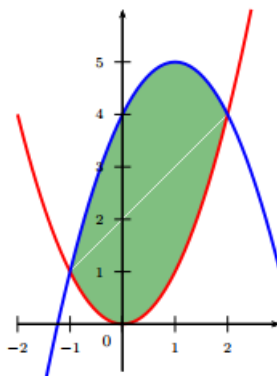


Schéma pour illustration

Ainsi, $\mathcal{A} = \int_{-1}^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = 9 \text{ u.a}$

⚠ Remarque :

Si $g(x) - f(x)$ change de signe sur l'intervalle d'intégration, on découpera de même que précédemment l'intégrale afin que ce dernier garde un signe constant.

9.3.3 Calcul de la longueur d'une courbe et quelques grandeurs d'électricité

Calcul de la longueur d'une courbe

🔗 Définition : Préalable

Une fonction est **lisse** sur un intervalle si elle est dérivable sur cet intervalle et sa dérivée est continue sur cet intervalle.

💡 Théorème : Accroissement finie

Soit une fonction $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

H_1 la fonction f est continue sur le segment $[a; b]$,

H_2 la fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$.

Alors il existe un point intérieur $c \in]a; b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

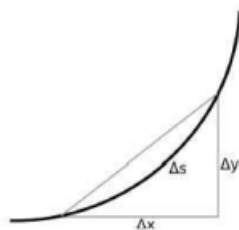
Soit f une fonction lisse dans l'intervalle $[a; b]$.

Trouvons la longueur L de la courbe d'équation $y = f(x)$ de a à b . L'idée consiste à découper l'intervalle $[a; b]$ en n sous-intervalles $[x_0; x_1], [x_1; x_2]; \dots; [x_{n-1}; x_n]$ de largeur Δx . On pose évidemment $x_0 = a$ et $x_n = b$. On relie ensuite par **une ligne polygonale** les points $P_0; P_1; \dots; P_n$.



On obtiendra une bonne approximation de la longueur de la courbe en additionnant les longueurs L_k des n différents segments, pour $k = 1; \dots; n$.

Regardons un segment.



Le théorème de Pythagore nous donne facilement sa longueur Δs :

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\Delta s = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}} \cdot (\Delta x) = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

Si l'on regarde le segment $[x_{k-1}; x_k]$, on peut écrire

$$L_k = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})}\right)^2} \cdot (x_k - x_{k-1})$$

D'après le théorème des accroissements finis,

$$\text{Il existe } \zeta_k \in]x_{k-1}; x_k[\text{ tel que } f'(\zeta_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})}$$

Par conséquent,

$$L_k = \sqrt{1 + [f'(\zeta_k)]^2} \Delta x$$

Donc, la longueur de la ligne polygonale est

$$L_P = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(\zeta)]^2} \Delta x$$

Si nous augmentons maintenant le nombre de sous-intervalles de sorte que $\Delta x \mapsto 0$, alors la longueur de la courbe polygonale va approcher la longueur de la courbe $y = f(x)$. Par définition, ce n'est rien d'autre que l'intégrale définie suivante :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Exercice d'application

Calculez la longueur de la courbe $y = 2x$ entre les points $(1; 2)$ et $(2; 4)$ en utilisant la formule ci-dessus, puis vérifiez votre réponse à l'aide du théorème de Pythagore.

Quelques grandeurs d'électricité

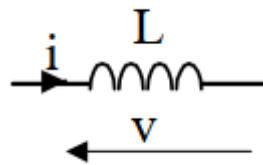
Valeur moyenne des signaux périodiques



Lorsqu'on veut décrire un signal variable sans utiliser une description trop détaillée, on peut se contenter d'indiquer la moyenne de ses valeurs sur un intervalle donné.

Toutefois, lorsque le signal est périodique, on s'intéresse plus particulièrement à la moyenne de ses valeurs sur un intervalle d'une période. Cette information peut s'avérer suffisante, lorsque ce signal est appliqué à un dispositif lent, uniquement sensible à la moyenne des sollicitations qu'il reçoit.

Inductance, condensateur et valeur moyenne

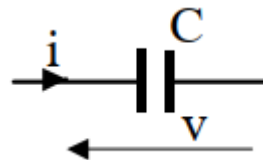


Pour une inductance on a : $v(t) = L \cdot \frac{d(i(t))}{dt}$. Le calcul de la valeur moyenne de $v(t)$ notée en générale $\bar{V}$, $\langle V \rangle$ ou V_{Moy} donne le résultat suivant :

$$\langle V \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} L \cdot \frac{d(i(t))}{dt} dt = \frac{L}{T} [i(t)]_{t_0}^{t_0+T} = \frac{L}{T} [i(t_0 + T) - i(t_0)]$$

En régime périodique on a : $i(t_0 + T) = i(t_0)$. Donc $\langle V \rangle = 0$

La valeur moyenne de la tension aux bornes de l'inductance est nulle



Pour un condensateur on a : $i(t) = C \cdot \frac{d(v(t))}{dt}$. Le calcul de la valeur moyenne de $i(t)$ notée en générale $\bar{I}$, $\langle I \rangle$ ou I_{Moy} donne le résultat suivant :

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} C \cdot \frac{d(v(t))}{dt} dt = \frac{C}{T} [v(t)]_{t_0}^{t_0+T} = \frac{C}{T} [v(t_0 + T) - v(t_0)]$$

En régime périodique on a : $v(t_0 + T) = v(t_0)$. Donc $\langle I \rangle = 0$

la valeur moyenne du courant dans le condensateur est nulle

9.3.4 Étude d'une fonction définie par une intégrale

Confère Travaux dirigé

Biographie

Niels Abel, né le 5 août 1802, la vie de ce mathématicien norvégien est marquée par la pauvreté. Son père était pourtant un éminent homme politique norvégien, mais à la fin de sa vie il est tombé en disgrâce, et quand il meurt en 1820, c'est Abel qui doit supporter la charge de la famille.

Grâce à l'aide financière de ses professeurs, il parvient cependant à poursuivre ses études et à faire ses premières découvertes. Mais ses mémoires sont perdus par **Cauchy**, mésestimés par **Gauss**.

Après son doctorat, Abel ne parvient pas à trouver un poste, ses conditions de vie sont de plus en plus précaires et sa santé se fait fragile : il est atteint de la tuberculose. Malgré des déplacements à Paris et à Berlin, ses travaux ne sont toujours pas perçus à leur juste valeur. Dans ses dernières semaines, il n'a plus assez de force pour quitter son lit. Il décède le 5 avril 1829, à même pas 27 ans, alors qu'un ami venait juste de lui trouver un poste à Berlin. C'est **Jacobi** qui comprendra tout le génie de ce jeune mathématicien. Abel avait notamment démontré, à l'âge de 19 ans, l'impossibilité de résoudre par radicaux les équation algébriques de degré 5, ce que son contemporain Galois généralisera à tout $n > 4$. A titre posthume, Abel recevra en 1830 le grand prix de Mathématiques de l'Institut de France.



Biographie

Bernhard Riemann, né le 17 septembre 1826 à Breselenz (Allemagne), mort le 20 juillet 1866 à Selasca, Italie



Mathématicien Allemand. Bernhard Riemann est le deuxième enfant d'une famille de six. Il reçoit de son père, pauvre pasteur luthérien, une éducation stricte et rigoureuse. Bien que très tôt il montre des talents intellectuels exceptionnels, il souffre d'une grande timidité, de dépression nerveuse et hypocondrie. Ses problèmes d'expression le poursuivront toute sa vie et l'empêcheront d'être reconnu à sa juste valeur de son vivant. A 19 ans, il s'établit à Hanovre pour étudier la théologie et la philosophie, mais ses goûts s'orientent vite vers les mathématiques. Il rencontre Gauss à l'université de Göttingen qui sera son directeur de thèse. Celle-ci porte sur les fonctions complexes et il y introduit les surfaces qui portent maintenant son nom et qui sont d'une grande importance dans la recherche mathématique actuelle. Quelques années plus tard, il jette les bases de **la géométrie différentielle**. C'est aussi lui qui a finalisé le travail de Cauchy sur les fonctions intégrables et qui a, le premier, produit une théorie rigoureuse de l'intégration. Il est le découvreur de la fonction ζ qui est au carrefour de nombreuses théories mathématiques modernes. La position des zéros de cette fonction est l'objet d'une célèbre conjecture qui n'a toujours pas été prouvée et qui permettrait de mieux comprendre la répartition des nombres premiers. Bernhard Riemann est mort à 40 ans de la tuberculose.

Biographie

Gaston Darboux (14 août 1842 [Nîmes] - 23 février 1917 [Paris])

Gaston Darboux est un mathématicien français né le 14 août 1842 à Nîmes. Après des études dans les lycées de sa ville natale et de Montpellier, il entre en 1861 à l'Ecole Normale Supérieure. Son désir alors est de devenir enseignant. Très vite, il se révèle brillant et il soutient en 1866 sa thèse de doctorat sur les surfaces orthogonales. Il enseigne ensuite aux lycées Saint-Louis et Louis-le-Grand avant en 1872 de devenir maître de conférences à l'Ecole Normale Supérieure. En 1880, il succède à Chasles à la chaire de Géométrie supérieure de la Sorbonne. Les travaux de Darboux portent essentiellement sur l'analyse et la géométrie différentielle. Il poursuit ainsi les travaux de Riemann sur l'intégration, introduisant les sommes de Darboux inférieures et supérieures qui lui permettent de donner un critère d'intégrabilité. Il s'intéresse aussi à la théorie des fonctions et aux équations aux dérivées partielles. Son domaine de prédilection reste toutefois l'étude des courbes et des surfaces, notamment les cyclides.



Darboux était aussi un administrateur très efficace. Il est doyen de la faculté des Sciences de 1889 à 1903 ; en 1900, il succède à Joseph Bertrand comme Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, dont il était devenu membre seize ans plus tôt. Membre des académies de nombreux pays, il reçut notamment en 1916 la **médaille Sylvester de la Royal Society de Londres**.

Biographie

Henri Léon Lebesgue (28 juin 1875 [Beauvais] - 26 juillet 1941 [Paris])



Henri Léon Lebesgue est né le 28 juin 1875 à Beauvais. Son père, né de la plus humble des origines, avait réussi à s'élever ouvrier typographe. Mais il décède, ainsi que les deux sœurs aînées d'Henri, de la tuberculose, peu de temps après la naissance de son fils. Ce dernier aura lui-même des séquelles de cette maladie toute sa vie, et sa santé demeurera toujours fragile. La mère de Lebesgue fut une travailleuse infatigable. Elle ne rechignera jamais à ce que son fils poursuive ses études et reste, pour quelques années encore, à sa charge. Ainsi Lebesgue, brillant dès l'école primaire, fut porté de bourse en bourse, au lycée, en classe préparatoire au Lycée Louis-Le-Grand, et enfin à l'Ecole Normale Supérieure. Il y côtoie l'élite intellectuelle de la nation, mais reste fidèle à son milieu social. Ainsi, il épouse la sœur d'un camarade de collège. Ensemble, ils auront deux enfants, Suzanne et Jacques.

Après sa réussite à **L'Agrégation** en 1897, il enseigne quelques années en classes préparatoires à Nancy, et simultanément prépare sa thèse. Il la soutient en 1902, sous le titre Intégrale, longueur, aire. Dans cette thèse, Lebesgue présente la théorie d'une nouvelle intégrale, appelée depuis intégrale de Lebesgue, qui va considérablement simplifier et amplifier l'étude des séries trigonométriques, et plus généralement toute l'analyse de Fourier.

L'intégrale de Riemann avait montré ses limites, d'abord sur le champ des fonctions intégrables (assez restreint), et surtout sur les permutations de limites et d'intégrales. Lebesgue s'appuie sur les

travaux de Jordan, Borel et Baire pour présenter une théorie des fonctions mesurables, qui peuvent être très discontinues. Dans la foulée, il définit une nouvelle méthode de sommation. Dans la théorie de Lebesgue, les théorèmes de permutation limite et intégrale ont un énoncé très simple, et sont très puissants ! En outre, par sa nature même, l'intégrale de Lebesgue est aussi bien adaptée aux fonctions d'une seule variable que de plusieurs. Le revers de la médaille est que sa présentation réclame de longs préliminaires théoriques. C'est toujours un problème, dans l'enseignement actuel, d'essayer d'introduire le plus tôt possible l'intégrale de Lebesgue, de façon à mettre ce formidable outil à la disposition des physiciens.

Si Lebesgue n'a pas été le chef d'une école de chercheurs, ses qualités pédagogiques étaient reconnues. Dans ses cours à la Sorbonne, au Collège de France ou à l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles, il faisait preuve d'originalité dans l'exposition. Étonnamment peut-être, Lebesgue n'enseigna jamais sa propre théorie. C'est qu'il craignait la généralisation à outrance ("Réduites à des théories générales, les mathématiques seraient une belle forme sans contenu" dit-il). Les succès qu'ont retiré les analystes de l'intégrale de Lebesgue ont depuis démenti ces faits.



Sommaire

10.1 Généralités	106
10.2 Équations du type $y' - ay = 0$	107
10.3 Équations du type $y'' + ay' + by = 0$	107
10.4 Cas de quelques équations différentielles avec second membre	108
10.5 Résolution de problèmes	108



Les équations différentielles tirent leur origine dans la résolution des problèmes de **Physique** et de **Mécanique** proposés aux mathématiciens par des physiciens. Elles se sont développées au fil des ans et se sont détachées de leur carcan originel pour atteindre les sommet de la théorie. Des mathématiciens illustres ont élaboré la théorie des équations différentielles et donné des théorèmes généraux d'existence et d'unicité de solutions de telles équations satisfaisant à des conditions initiales. Nous citerons particulièrement **Clairaut, Ricatti, Bernoulli, Lagrange, Maxwell, D'Alembert, Cauchy, Lipschitz** dont les travaux s'appliquent à différent domaines telles que : **L'électromagnétisme, la relativité restreinte ou généralisée, la recherche opérationnelle, la mécanique générale, la mécanique quantique, l'astronomie et l'astronautique...**

Dans ce chapitre, nous allons définir clairement ce qu'est une équation différentielle en faisant remarquer que l'on a déjà résolu quelques une sans le "savoir". Nous insisterons particulièrement sur les équations différentielles linéaires du premier et du second ordre à coefficients constants et sans second membre (conformément au programme en vigueur). Il ne sera néanmoins pas exclu de faire une légère extension sur des équations avec second membre (notamment avec le **Principe de supposition des solution**) étant entendu que les élèves devront pouvoir affronter les concours professionnels après l'obtention de leur Baccalauréat.

10.1 Généralités

Activité d'apprentissage

On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-4x}$; $g(x) = (2x + 1)e^{4x}$, $h(x) = x^2$.

1. Calculer $f'(x)$ puis montrer que $f'(x) + 4f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Calculer $g'(x)$, $g''(x)$ et vérifier que $g''(x) - 8g'(x) + 16g(x) = 0$.
3. Montrer que $xh''(x) + (h'(x))^2 - 4h(x) = 2x$.

Définition :

- 1 Une équation différentielle est une relation entre une fonction et ses dérivées successives. La fonction inconnue est souvent notée y et ses dérivées successives $y', y'', \dots$
- 2 Une équation différentielle est dite d'ordre n si le plus grand ordre des dérivées intervenant dans la relation est n .



Exemple Les équations différentielles satisfaites par les fonctions g et h de l'activité sont du second ordre alors que celle satisfaite par f est du premier ordre.

Définition :

- 1 Une solution d'une équation différentielle sur un intervalle ouvert I est toute fonction vérifiant cette équation différentielle sur I .
- 2 **Intégrer ou résoudre** une équation différentielle sur un intervalle ouvert K , c'est déterminer l'ensemble des solutions sur K de cette équation différentielle.
- 3 On va appeler **courbe intégrale** d'une équation différentielle la courbe représentative d'une de ses solutions.

Définition :

une équation différentielle sera dite :

- 1 **linéaire** : si elle est une combinaison linéaire d'une fonction inconnue et ses dérivées. Les équations satisfaites par f et g sont linéaires.
- 2 **à coefficients constants** si les coefficients de la combinaison sont des constantes (réels ou complexes); (c'est le cas des équations satisfaites par f et g).
- 3 **Homogène ou sans second membre** si le second membre est nul.

Remarque :

Le problème de recherche de primitives des fonctions sur un intervalle K est un problème de résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants mais avec second membre. En effet, étant donnée une fonction f (**continue**) sur un intervalle K , trouver une primitive de f , c'est résoudre l'équation différentielle $y' = f$. La solution des équations de ce dernier type est

$$y(x) = \int f(x)dx + c$$

NB : Nous avons dans notre activité introductive, à partir des fonctions données, former des équations différentielles. Il est généralement plus facile d'établir une équation différentielle que de la résoudre : C'est ainsi, qu'il y a des équations différentielles qu'on ne sait pas résoudre et d'autres

où la fonction f qui les satisfait se présente sous la forme d'une série (**Somme infini**) ou d'une nouvelle intégrale.

10.2 Équations du type $y' - ay = 0$



Proposition *Solution générale*

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - ay = 0$, $a \in \mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$.



Exemple : Soit à intégrer l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$.

Elle est équivalente à $y' - \left(-\frac{3}{2}\right)y = 0$, on a alors $a = -\frac{3}{2}$ et les solutions sont $y(x) = ke^{-\frac{3}{2}x}$, $k \in \mathbb{R}$.



Proposition

Pour tout couple de réels (x_0, y_0) et étant donnée l'équation différentielle $y' - ay = 0$, il existe une seule de ses solutions qui vérifie la condition $y(x_0) = y_0$. Elle est donnée par $f(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$.



Exemple : Déterminer la solution de $y' - 3y = 0$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 2$.

Les solutions sont les fonctions de la forme $y(x) = ke^{3x}$.

Comme $y(0) = 2$, on déduit que $k = 2$ d'où $y : x \mapsto 2e^{3x}$.

10.3 Équations du type $y'' + ay' + by = 0$



Définition :

L'équation caractéristique de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est $r^2 + ar + b = 0$.



Proposition

1 Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , alors les solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions

$$f(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}, A, B \in \mathbb{R}$$

2 Si l'équation caractéristique admet une racine réelle double r , alors les solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions

$$f(x) = (Ax + B)e^{rx}, A, B \in \mathbb{R}$$

3 Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ alors les solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions

$$f(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)), A, B \in \mathbb{R}$$



Exemple Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $6y'' + y' - y = 0$, b) $25y'' + 60y' + 30y = 0$, c) $y'' + y' + y = 0$.

**Proposition**

Pour tout triplet (x_0, y_0, z_0) de réels, étant donnée l'équation $y'' + ay' + by = 0$, il existe une unique solution vérifiant $y_0 = y(x_0)$ et $y'(x_0) = z_0$.



Exemple Résoudre $y'' + 4y' + 7y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

10.4 Cas de quelques équations différentielles avec second membre

**Théorème : principe de superposition**

La solution générale de l'équation différentielle $(E_1) : y'' + ay' + by = g(x)$ est somme d'une de ses solutions particulières et de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée

NB : Ce **Théorème** s'applique également aux équations différentielle du type $(E_2) : y' - ay = h(x)$. On sait déjà trouver les solutions homogènes associées à $(E_1) : y'' + ay' + by = f(x)$ et à $(E_2) : y' - ay = f(x)$. Le problème est de trouver une solution particulière de l'une ou l'autre de ses équations. La **forme de la solution particulière dépend essentiellement de la forme du second membre f** . Voici quelques cas.

 $f(x) = ax^2 + bx + c$, chercher la solution particulière f_0 sous la forme $f_0(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

 $f(x) = a \cos x + b \sin x$, chercher la solution particulière f_0 sous la forme $f_0(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$.

 $f(x) = ke^{ax}$, chercher la solution particulière f_0 sous la forme $f_0(x) = \alpha e^{ax}$.



Exemple : Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$.

10.5 Résolution de problèmes

De nombreux problèmes **en démographie, en biologie, en électricité**, ...relevant de phénomène continu ($\mathbb{R}$) satisfaisant à une loi d'évolution et à une condition initiale sont décrit par une fonction solution d'une équation différentielle.

Pour résoudre de tels problème, nous procédons suivant les étapes ci dessous :

**La modélisation du problème**

Ici il est question de déterminer un modèle, qui consiste à la mise en équation c'est à dire la recherche d'une équation différentielle permettant de décrire la situation.

**La résolution mathématique du problème**

c'est à dire la résolution de l'équation différentielle avec la condition initial

**L'interprétation du résultat obtenu**

d'où la solution du problème posé

Exercice d'application : **Accroissement d'une population**

En 1990, la population du **Bénin** était de 4.750.000 d'habitants et d'environ 5.500.000 d'habitants en 1995.

On suppose que la vitesse d'accroissement $h'(t)$ de cette population à l'instant t est proportionnelle au nombre $h(t)$ d'habitant à cette instant.

Dans ces conditions, en quelle année la population du Bénin sera-t-elle de 20 millions d'habitant ?

Solution

Modélisation ou mise en équation :

la vitesse d'accroissement $h'(t)$ de cette population à l'instant t étant proportionnelle au nombre $h(t)$ d'habitant à cette instant. on a : $h'(t) = ah(t)$ (avec $a \in \mathbb{R}$)

Résolution

Cette équation étant du type $h' - ah = 0$,

il s'ensuit que la fonction solution est définie par $h(t) = Ke^{at}$ ($a, k \in \mathbb{R}$)

Déterminons a et k à l'aide des conditions initiale :

On sait que : en 1990, la population était de 4.750.000 d'habitants **ie** $h(1990) = 4.750.000$

en outre, en 1995, la population était de 5.500.000 d'habitants **ie** $h(1995) = 5.500.000$.

$$\text{Donc : } \begin{cases} ke^{1990a} = 4.750.000 \\ ke^{1995a} = 5.500.000 \end{cases} \quad \text{d'où, } \frac{ke^{1995a}}{ke^{1990a}} = \frac{5.500.000}{4.750.000} \quad \text{ie } e^{5a} = \frac{5.50}{4.75}.$$

$$\text{Par suite, } a = \ln\left(\frac{5.50}{4.75}\right) = 0,03$$

En conclusion, $h(t) = 5.500.000e^{0,03(t-1995)}$

Déterminons l'année à laquelle la population du Bénin sera de 20 millions d'habitants.

Cela revient à trouver t tels que $5.500.000e^{0,03(t-1995)} = 20.000.000$

Après résolution, il s'ensuit que $t = 2039$

ie En 2039 la population du Bénin sera de 20 millions d'habitants

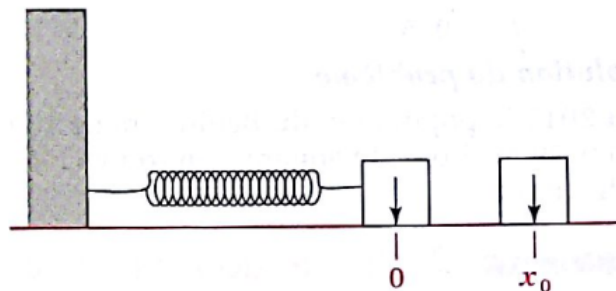
Exercice d'application : Oscillations non amorties

On fixe un solide de masse m à l'extrémité d'un ressort à spire non jointive de dureté ou constante de raideur k ; on fixe l'autre extrémité à un mur.

Le solide peut se déplacer horizontalement sur une droite (D) . Le repère de (D) est tel que :

lorsque le ressort n'est pas tendu la marque sur le solide a une abscisse nulle.

On tire le ressort jusqu'à amener la marque sur le solide à l'abscisse x_0 , comme l'illustre le schéma ci-dessous :



On abandonne le système et on demande de trouver la position x du solide en fonction du temps t .

On négligera la masse du ressort

Solution

Modélisation ou mise en équation :

Désignons par f la fonction définie par : $x = f(t)$.

L'accélération à la date t est : $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \equiv f''(t) = x''$ et les forces s'exerçant sur le solide sont :

la tension du ressort $\vec{T} = k\vec{x}$ et le poids du solide $\vec{P} = m.\vec{g}$ (où g est l'intensité de pesanteur) les forces de frottement étant négligeable.

D'après le théorème du centre d'inertie ou deuxième loi de Newton on a :

$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$. En projetant cette relation suivant l'horizontal ou axe des abscisses on obtient :

$$T_x + P_x = ma_x \text{ ie } -kx + 0 = m \frac{d^2x}{dt^2}. \text{ Ainsi, } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

De ce fait, on définit une équation différentielle du type $y'' + ay = 0$ (avec $a = \frac{k}{m}$)

Le ressort étant lâche sans vitesse initiale on a $f'(0) = 0$ par ailleurs on sait que : $f(0) = x_0$

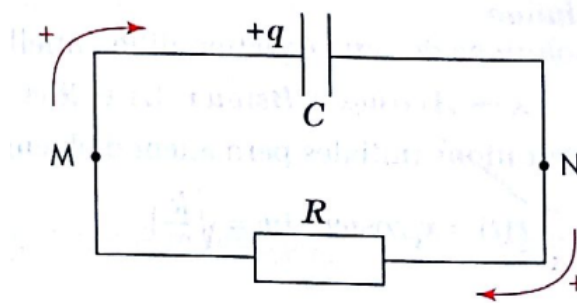
Il s'ensuit que **le modèle** pour ce problème est :
$$\begin{cases} f'' + \frac{k}{m}f = 0 \\ f(0) = x_0, f'(0) = 0 \end{cases}$$

Résolution

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions :

$$x \mapsto A \cos \left[\sqrt{\frac{k}{m}} x \right] + A \sin \left[\sqrt{\frac{k}{m}} x \right] \text{ (avec } A, B \in \mathbb{R})$$

De ce fait, les condition initiale nous permettent d'obtenir la fonction $f(t) = x_0 \cos \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right]$

Exercice d'application : Décharge dans un circuit RC**Modélisation ou mise en équation :**

M et N sont les armatures d'un condensateur de capacité C initialement neutre (**ie** $C = 0$). Chargeons-le sous une différence de potentielle U_0 et relions ses armatures à un resistor de résistance R . Le condensateur décharge à travers la résistance R

Désignons par q_0 la charge du condensateur à l'instant initial où commence la décharge (**ie** $q(0) = q_0$). L'intensité i_0 du courant dans le circuit étant nul.

A un instant quelconque t de la décharge, q est la charge de l'armature M du condensateur, i l'intensité du courant dans le circuit.

q est une fonction du temps et on a : $i = \frac{dq}{dt}(t) \equiv q'(t)$.

La définition de la capacité du condensateur, donne la différence de potentielle entre les armatures :

$$U_{MN} = \frac{q}{C}$$

La loi d'Ohm exprimer aux bornes du resistor donne : $U_{NM} = Ri = -U_{MN}$, d'où $Ri = -\frac{q}{C}$

De ce fait, $R\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C}$ *ie*, $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0$.

Il s'ensuit que q est solution de l'équation différentielle $\begin{cases} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0 \\ q(0) = q_0 \end{cases}$ *ie* $\begin{cases} q'(t) + \frac{1}{RC}q(t) = 0 \\ q(0) = q_0 \end{cases}$

Résolution Cette équation différentielle est du type $q' + aq = 0$ où $a = \frac{1}{RC}$

Bon à Savoir

Culture sur les condensateur

Le condensateur est un composant électronique élémentaire, constitué de deux armatures conductrices (appelées électrodes) en influence totale et séparées par un isolant polarisable (ou diélectrique). Sa propriété principale est de pouvoir stocker des charges électriques opposées sur ses armatures. La valeur absolue de ces charges est proportionnelle à la valeur absolue de la tension qui lui est appliquée.

Le condensateur est utilisé principalement pour :

- stabiliser une alimentation électrique (il se décharge lors des chutes de tension et se charge lors des pics de tension) ;
- traiter des signaux périodiques (filtrage) ;
- séparer le courant alternatif du courant continu, ce dernier étant bloqué par le condensateur ;
- stocker de l'énergie, auquel cas on parle de **super-condensateur**.



Condensateurs électrochimiques (électrolytiques aluminium)

Le premier est de $1000\mu F$ pour une tension de service de $35V$ (**modèle axial**), le second est de $10\mu F$ pour $160V$ (**modèle radial**).

Culture Sur la Dynamique des Populations.

De nombreuses modélisations de dynamique des populations (espèces animales, diffusion des virus, substances radioactives ou chimiques) ont été proposées. Parmi les plus simples, on peut citer celle attribuée à **Malthus** (1798) qui traduit la conservation du nombre d'individus N d'une espèce sous l'effet des naissances b et des décès d :

$$\begin{cases} N'(t) = bN(t) - dN(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Lorsque $b = 0$, on reconnaît dans cette équation **la loi de décroissance exponentielle des substances radioactives** si d est interprétée comme une constante de désintégration. Dans le cas où $b > d$, rien ne vient limiter la croissance de la population, **ce qui n'est pas très réaliste**. **Verhulst (1836)** a proposé un modèle phénoménologique non linéaire (modèle logistique) qui s'écrit :

$$\begin{cases} N'(t) = \alpha N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{N_1}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

où α et N_1 sont des constantes positives. **Ce modèle a un comportement très différent du modèle linéaire de Malthus**. On montre que qu'il n'existe plus de solutions qui conduisent à l'extinction de l'espèce (On dit que la solution $N = 0$ est instable), le terme non linéaire conduisant à une stabilisation de la population vers la valeur limite $N = N_1$.

Une classe de modèles plus sophistiqués met en jeu 2 populations : une de proies (ou d'exploités) et une de prédateurs (ou d'exploiteurs). Les hypothèses suivantes sont vraisemblables :

- 1** en l'absence de prédateurs, les proies se multiplient proportionnellement à leur effectif.
- 2** en l'absence de proies, les prédateurs meurent proportionnellement à leur effectif.
- 3** le nombre de rencontres entre les 2 populations est proportionnel au produit des 2 populations.
Chaque rencontre augmente le nombre de prédateurs et diminue le nombre de proies.

Ces hypothèses sont modélisées par **un système non linéaire dit de Lokta-Volterra**.

Biographie

George David Birkhoff (21 mars 1884 [Overisel, Michigan], 12 novembre 1944 [Cambridge, Massachusetts])

George David Birkhoff est un mathématicien américain du début du XX^e siècle, sans doute le premier à avoir une renommée mondiale, célèbre notamment pour ses travaux en théorie des systèmes dynamiques. Il est né le 21 mars 1884 à Overisel, dans le Michigan. Ses parents sont des immigrants hollandais, son père est médecin. La famille s'installe à Chicago alors que Birkhoff a deux ans, et c'est là qu'il passe son enfance. Il étudie ensuite au Lewis Institute, à l'Université de Chicago, puis à Harvard dont il est diplômé en 1905. Il retourne alors à Chicago pour sa thèse consacrée aux équations différentielles, qu'il soutient en 1907. Élève de E. Moore, il apprend énormément par lui-même et est notamment passionné par les travaux de Poincaré. Les deux années suivantes, Harvard occupe un premier poste à l'université du Wisconsin. Il épouse alors Margaret Elizabeth Grafius. Le couple aura trois enfants, dont l'un, Garrett, deviendra lui-même un grand mathématicien.



En 1909, Birkhoff obtient un poste de précepteur à Princeton, qui se transforme en poste de professeur deux ans plus tard. Il retourne à Harvard en 1912 pour y travailler jusqu'à la fin de ses jours, d'abord comme assistant, puis comme professeur en 1919, et enfin comme titulaire de la chair Perkins à partir de 1932. En 1936, il devient doyen de la faculté des arts et sciences. Impliqué dans la vie de **la société mathématique américaine (AMS)**, il en est vice-président en 1919, président en 1925-1926, éditeur des Transactions of the AMS de 1921 à 1924. Il est aussi président de l'American Association for the Advancement of Science en 1937, et président du congrès international de mathématiques en 1940. Il décède en 1944, à l'âge de 60 ans, après avoir souffert d'insuffisance cardiaque les dernières années de sa vie.

Le premier fait d'armes mathématique de Birkhoff remonte à 1913. Il démontre alors le dernier lemme géométrique de Poincaré, conjecturé par ce dernier en 1905, et qui s'énonce ainsi :

Soit Γ la couronne formée par deux cercles concentriques et soit f une application continue injective de Γ dans elle-même. Si f préserve les aires et fait tourner les bords dans des sens opposés, alors f possède au moins deux points fixes.

Ce théorème est très important car il confirme l'existence d'un nombre infini de solutions périodiques au problème des trois corps, et il fait beaucoup pour le prestige de Birkhoff. Un autre théorème célèbre de Birkhoff est son théorème ergodique, qu'il démontre en 1933 à la suite notamment de travaux de **von Neumann**. Ce théorème répond, de façon théorique, à un problème fondamental de mécanique statistique. Il a aussi des répercussions en probabilités, en théorie des groupes et en analyse fonctionnelle. Outre ces travaux concernant les systèmes dynamiques, Birkhoff a également travaillé sur le théorème des quatre couleurs, les équations différentielles et les équations aux différences. Il s'est intéressé à la musique et aux arts, publiant en 1933 le livre Aesthetic Measure qui construit une théorie mathématique du beau.

Birkhoff s'est aussi énormément impliqué dans le développement des mathématiques aux États-Unis. Professeur brillant, **il a dirigé plus de 40 thèses** et défendu les mathématicaines américaines à

travers le monde. Cependant, ce patriotisme lui a attiré de nombreuses critiques, notamment à la fin des années 1930, lorsque de nombreux mathématiciens européens, souvent juifs, ont émigré aux États-Unis. Birkhoff s'est ouvertement plaint qu'ils empêchaient l'obtention de postes par de jeunes américains et lui-même a fait obstruction à la nomination de plusieurs collègues à Harvard. Celui lui valut d'être accusé d'anti-sémitisme, notamment par Einstein et par Wiener.

Le dernier projet mené par Birkhoff à la fin de sa vie concerne le développement des mathématiques dans les pays d'Amérique latine, conformément à la politique de bon voisinage du président Roosevelt. Il voyage ainsi au Mexique, au Pérou, au Chili, en Argentine et en Uruguay. À son retour, il persuade la fondation Guggenheim de créer un poste de professeur invité en Amérique latine. Ce poste est occupé pour la première fois par Lefschetz en 1942.

Biographie

Constantin Carathéodory(13 septembre 1873 [Berlin] - 2 février 1950 [Münich])



Constantin Carathéodory est un mathématicien allemand d'origine grec. Né à Berlin en 1873, il est issu d'une famille de l'élite de Constantinople. Après des études à l'académie militaire de Bruxelles, il exerce comme ingénieur sur le barrage d'Assiout en Egypte. Ce n'est qu'en 1900 qu'il se tourne vers les mathématiques, reprenant ses études d'abord à Berlin, puis à Göttingen en 1904 où il passe son doctorat sous la direction de Minkowski. Ses recherches portent alors sur le calcul des variations, et ses relations avec les équations aux dérivées partielles. De 1909 à 1920, Carathéodory enseigne successivement à Hanovre, Breslau, Göttingen et Berlin. En 1920, à la demande du gouvernement grec, il part enseigner à Smyrne (maintenant Izmir, port turc sur les bords de la mer Egée), ville que les Grecs viennent de conquérir. Quand les turcs reprennent la ville en 1922, il arrive à emmener avec lui à Athènes la bibliothèque de l'université. Après deux années à Athènes, Carathéodory retourne en Allemagne et s'installe définitivement à Munich, où **il succède à Lindemann**.

Outre les travaux déjà cités, Carathéodory s'est aussi intéressé à la théorie de la mesure, aux fonctions d'une variable réelle, aux fondements mathématiques de la physique (notamment relativité et thermodynamique). Il était un auteur très brillant, à qui l'on doit la simplification de la preuve de nombreux théorèmes.

Sommaire

11.1 Introduction	116
11.2 Définition par foyer, directrice et excentricité	116
11.2.1 Définition	116
11.2.2 Sommets d'une conique	117
11.3 Étude des paraboles	118
11.3.1 Définitions	118
11.3.2 Équation réduite d'une parabole	118
11.3.3 Tangente à une parabole en un point	119
11.4 Étude des coniques à centre	119
11.4.1 Équations réduites	119
11.4.2 Étude d'une ellipse	120
Tangente en un point de l'ellipse	121
Définition bifocale de l'ellipse	121
Cercle principal d'une ellipse	122
11.4.3 Étude des hyperboles	123
Équation réduite de l'hyperbole	123
Équation d'une hyperbole par rapport à ses asymptotes	124
Tangente en un point de l'hyperbole	124
Définition bifocale d'une hyperbole	124
11.5 Résumé	125
11.6 Quelques applications pratiques des coniques	126



En classe de première, vous avez vu que les courbes représentatives des fonctions du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont appelées **paraboles** et que celles de certaines fonctions homographiques $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ sont appelées **hyperboles**. Vous savez également que le cercle de centre $\omega(a; b)$ et de rayon r est le lieu géométrique des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation du second degré $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Par ailleurs tout le monde a entendu parler de ces **cercles aplatis** qu'on appelle **ellipses**...

Toutes ces courbes, ont été étudiées depuis l'Antiquité pour le rôle important qu'elles jouent en

physique (en particulier en astronomie) et Télécommunication.

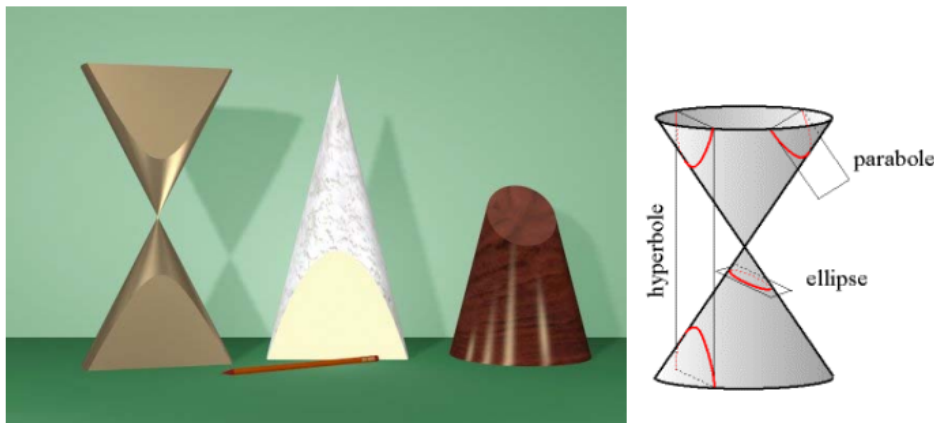
Dans ce chapitre, il est question pour nous de faire une étude formelle de cette notion selon plusieurs approches, notamment géométrique et analytique

11.1 Introduction

Étymologiquement, une conique est une courbe plane obtenue en coupant un cône de révolution par un plan. Les **coniques propres** obtenues ainsi sont les **cercles**, les **ellipses**, les **paraboles**, les **hyperboles**, mais dans certains cas, l'intersection d'un cône et d'un plan donne **un point**, **une droite** ou **deux droites**, ce sont des **coniques impropres** ou **dégénérées**.

Plusieurs définitions des coniques sont possibles (**foyers et directrice**, **définition bifocale**,...), la seule qui englobe tous les cas particuliers est la **définition analytique** suivante : *une conique est une courbe plane définie par une équation qui peut s'écrire sous la forme*

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$



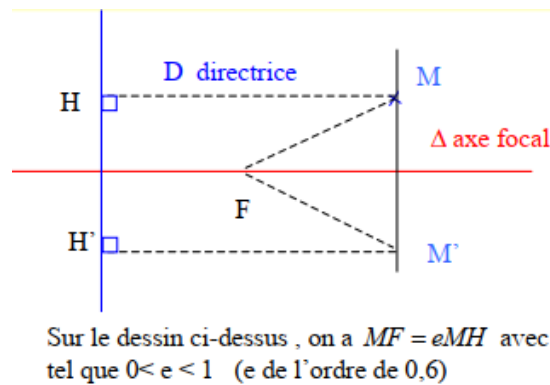
11.2 Définition par foyer, directrice et excentricité

11.2.1 Définition

Définition :
 Soit F un point du plan, e un **réel strictement positif**, et D une droite ne contenant pas F , on appelle conique de foyer F , d'excentricité e , et de directrice D , l'ensemble Γ des points M du plan P tels que : $MF = e \times d(M, D)$ où $d(M, D)$ est la distance de M à la droite D .

NB : On peut également caractériser l'ensemble Γ ci dessus de la façon suivante :

$M \in \Gamma$ si et seulement si $MF = e \times MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur D .



Remarque :

- Si $0 < e < 1$, la conique Γ est **une ellipse**
- Si $e = 1$, la conique Γ est **une parabole**
- Si $e > 1$, la conique Γ est **une hyperbole**.

Définition :

- On appelle **axe focal** de la conique la droite perpendiculaire à D et passant par F .
L'axe focal d'une conique est un axe de symétrie pour la conique.
- Un **sommet** de la conique est un point d'intersection entre la conique et son axe focal

11.2.2 Sommets d'une conique

Soit Γ la conique de directrice D , d'excentricité e et d'axe focal Δ

Détermination du nombre de sommet d'une conique

Soit M un sommet de la conique Γ .

Par définition on a : $M \in \Gamma \cap \Delta$ **ie** $M \in \Gamma$ et $M \in \Delta$.

Comme $M \in \Gamma$ on a : $MF = eMK$ où K désigne le projeté orthogonal de M sur D .

Or $\Delta \perp D$, alors M, F et K sont alignés.

De ce fait, $MF = eMK$ entraîne que $\overrightarrow{MF} = e\overrightarrow{MK}$ ou $\overrightarrow{MF} = -e\overrightarrow{MK}$

1 Si $e = 1$ (**ie** Γ est une parabole) alors $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MK}$ ou $\overrightarrow{MF} = -\overrightarrow{MK}$.

Or : Le cas $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MK}$ est impossible car sinon on aurait $F = K$.

Par conséquent : $\overrightarrow{MF} = -\overrightarrow{MK}$ **ie** M est le milieu du segment $[FK]$

Conclusion Une parabole a un seul sommet S

2 Si $e \neq 1$ (**ie** Γ est une ellipse ou une hyperbole) alors les relations $\overrightarrow{MF} = e\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{MF} = -e\overrightarrow{MK}$ induisent l'existence de deux points A et A' définies par :

$$A = \text{Bar}\{(F, 1); (K, -e)\} \text{ et } A' = \text{Bar}\{(F, 1); (K, e)\}$$

Conclusion Une ellipse et une hyperbole ont deux sommets A et A'

NB : Le milieu des deux sommets de l'ellipse et l'hyperbole est appelé **Centre de la conique**

11.3 Étude des paraboles

11.3.1 Définitions

Définition :

 Une parabole est une conique d'excentricité $e = 1$.

 On appelle **paramètre** de la parabole Γ , le nombre positif p représentant la distance du foyer à la directrice.

$$\text{ie } p := FK = d(F; D)$$

11.3.2 Équation réduite d'une parabole

Soit Γ une parabole de sommet S , de foyer F , de directrice D , d'axe focale Δ et de paramètre p

Théorème :

L'équation de Γ dans le repère orthogonal $(S; \vec{i}, \vec{j})$ (où $\vec{i} := \frac{1}{SF} \overrightarrow{SF}$) est de la forme $y^2 = 2px$

Dans $(S; \vec{i}, \vec{j})$ $D : x = -\frac{p}{2}$ et $F(\frac{p}{2}; 0)$

Définition :

L'équation $y^2 = 2px$ est appelé **équation réduite** de la parabole Γ

Remarque :

Un changement d'axe focale $\Delta := (S; \vec{i})$ en $\Delta' := (S; \vec{j})$ donne une équation réduite de la forme $x^2 = 2py$

Dans ce cas, $D : y = -\frac{p}{2}$ et $F(0; \frac{p}{2})$

 **Exemple** La plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) Donner l'équation réduite et tracer la parabole de foyer $F(0; 2)$ et de directrice $D : x = -1$

2) Donner la nature et les éléments caractéristiques géométriques des courbes C et C' d'équations respectives : $x^2 - 2y + 2x - 1 = 0$ et $4x - 8 - y^2 + 4y = 0$

Solution

1) Soit S le sommet de la parabole et K le projeté orthogonal de $F(0; 2)$ sur $D : x = -1$. de ce fait on a : $K(-1; 2)$. Soit $M(x; y)$ un point du plan, soit $H(-1; y)$ sont projeté orthogonale sur $D : x = -1$. M appartient à cette parabole si et seulement si $MF = MK$ ie $MF^2 = MK^2$.

Donc $x^2 + (y - 2)^2 = (x + 1)^2$, par suite l'équation cartésienne de la parabole est $y^2 - 4y - 2x + 3 = 0$.

Il s'ensuit que sont équation réduite est : $(y - 2)^2 = 2(x + \frac{1}{2})$

$$\text{Posons } \begin{cases} X = x + \frac{1}{2} \\ Y = y - 2 \end{cases} \quad \text{De ce fait, } Y^2 = 2X$$

Ainsi la parabole a pour sommet $S(-\frac{1}{2}; 2)$ et pour paramètre $p = 1$.

Dès lors dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j})$ on a $F(\frac{1}{2}; 0)$ et $D : X = \frac{1}{2}$

2) Donnons la nature et éléments caractéristiques géométriques

$x^2 - 2y + 2x - 1 = 0$ **ie** $(x+1)^2 = 2(y+1)$ Posons $\begin{cases} X := x+1 \\ Y := y+1 \end{cases}$ Alors : $X^2 = 2Y$. Soit $S(-1; -1)$

Dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j})$, P a pour équation $X^2 = 2Y$, son paramètre est $p = 1$, $F(0; \frac{1}{2})$ est son foyer, sa directrice est $Y = -\frac{1}{2}$ et son axe focal est $(S; \vec{i})$

11.3.3 Tangente à une parabole en un point

Théorème :

Soit P une parabole d'équation réduite $y^2 = 2ax$, $a \in \mathbb{R}^*$. La tangente T à la parabole P au point $M_0(x_0; y_0)$ a pour équation

$$(T) : yy_0 = a(x + x_0)$$

Exemple

Donner une équation de la tangente à la parabole d'équation $x^2 - 2x + y = 0$ au point $A(2; 0)$

11.4 Étude des coniques à centre

11.4.1 Équations réduites

Théorème :

La conique Γ de foyer F , de directrice associée d , d'excentricité e d'axe focal $(\Delta) = (O; \vec{i})$, de sommets A et A' avec O milieu de $[AA']$, $OA = OA' = a$, $OF = c$ admet dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (où $\vec{OA} = a\vec{i}$) une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

En outre, $F(c; 0)$, $A(a; 0)$, $A'(-a; 0)$, $d : x = \frac{a^2}{c}$ et $e = \frac{c}{a}$

Définition :

une équation de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ est appelé équation réduite de la conique Γ

11.4.2 Étude d'une ellipse

Dans le cas où Γ est une ellipse, on a $0 < e < 1$ comme $e = \frac{c}{a}$, on en déduit que $c < a$. On pose dans ce cas $b^2 = a^2 - c^2$, l'équation s'écrit donc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Remarque :

Dans le cas d'une ellipse Γ , pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $M(x; y) \in \Gamma$ alors $M_1(-x; y)$, $M_2(-x; -y)$ et $M_3(x; -y)$ appartiennent à Γ .

Conséquences

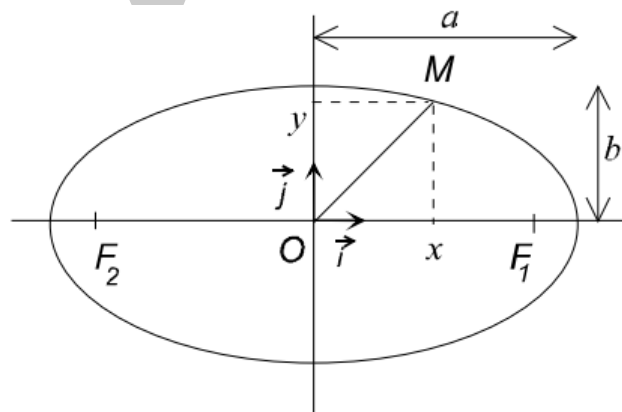
Soit une ellipse Γ on a :

1 Γ admet deux axes de symétrie :

- L'axe focal (AA') (ou **grand axe**)
- La médiatrice de $[AA']$ (ou **petit axe**) encore appelée axe non focal

2 Γ admet un centre de symétrie qui est le point O milieu du segment $[AA']$

NB : La conique Γ admet donc une autre directrice (d') associé à un autre foyer F' image respectives de (d) et F par la symétrie de centre O .



Théorème :

L'ellipse Γ de foyer F et F' de sommets A et A' de centre O , d'axe focal Δ , de directrices d et d' et excentricité e , admet dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où $OF = OF' = c$, $OA = OA' = a$ et $\overrightarrow{OA} = a\vec{i}$, une équation de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ avec } b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

En outre, dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on a $F(c; 0)$, $F'(-c; 0)$, $A(a; 0)$, $A'(-a; 0)$, $B(0; b)$, $B'(0; -b)$, $(d) : x = \frac{a^2}{c}$, $(d') : x = -\frac{a^2}{c}$, $e = \frac{c}{a}$ et $a > b$

NB : Lorsque $a < b$ l'axe focal est $(O; \vec{j})$

Définition :

L'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est appelée équation réduite de l'ellipse Γ



Exemple : 1. Donner une équation cartésienne de l'ellipse E de foyer $F(2; 3)$ de directrice

$d : y = 2$ et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$.

2. Donner la nature et les éléments géométriques de la courbe C d'équation $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$.

Solution

1. Soit $M(x; y) \in E$ et H son projeté orthogonal sur (d) . On a $H(x; 2)$.

Par définition de E on a $MF = \frac{1}{2}MH$ d'où $MF^2 = \frac{1}{4}MH^2$

Par conséquent : $(x-2)^2 + (y-3)^2 = \frac{1}{4}(y-2)^2$. Ainsi, $E : 4x^2 + 3y^2 - 16x - 20y + 48 = 0$.

2. nature et les éléments géométriques de la courbe C d'équation $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$:

On a : $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ équivalent à $4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36$

Par suite : $\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$. Posons $\begin{cases} X := x-1 \\ Y := y-2 \end{cases}$.

Soit $I(1; 2)$ donc dans $(I; \vec{i}, \vec{j})$, l'ellipse C a pour équation $\frac{X^2}{3^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1$.

On a : $a = 3$ et $b = 2$. Comme $a > b$, l'axe focal est $(I; \vec{i})$ et on a $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$ $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Dans $(I; \vec{i}, \vec{j})$ les foyers sont $F(\sqrt{5}; 0)$ et $F'(-\sqrt{5}; 0)$, les sommets principaux sont $A(3; 0)$ et $A'(-3; 0)$,

les sommets secondaires sont $B(0; 2)$ et $B'(0; -2)$ et enfin, les directrices sont $(d) : x = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ et

$(d') : x = -\frac{9\sqrt{5}}{5}$.

Tangente en un point de l'ellipse

Théorème :

Soit (E) l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $M(x_0; y_0)$ un point de E .

La tangente T à E au point M_0 a pour équation

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$



Exemple :

Une équation de la tangente à l'ellipse E , d'équation $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ au point $M(5; 2)$ est : $\frac{5x}{25} + \frac{2y}{4} = 1$

Définition bifocale de l'ellipse

Théorème :

Soit (E) l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) et de foyers F et F' . Alors E est aussi l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$

Cette proposition parfois donnée comme définition, est appelée définition bifocale de l'ellipse.

NB : Dans cette définition on a : $FF' = 2c$ tel que $c < a$.



Exemple Dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe on donne les points $F(-5 + 2i)$ et $F'(3 + 2i)$

L'ensemble des points M tels que $MF + MF' = 10$ est l'ellipse d'excentricité $\frac{4}{5}$ et de foyer F et F' .
 En effet, $2a = 10$ donc $a = 5$, $FF' = 8 = 2c$ donc $c = 4$ et $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 3$.
 Par ailleurs le centre de l'ellipse est le milieu I de $[FF']$, donc $I(-1 + 2i)$
 L'équation réduite est donc $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$



Remarque :

- Les points M vérifiant $MF + MF' < 2a$ (respectivement $MF + MF' > 2a$ sont les points intérieurs (respectivement extérieurs) de l'ellipse.
- Lorsque $a = b$ et $F = F'$ alors l'ellipse est le cercle de centre F et de rayon a
- Le théorème ci dessus, permet une construction de l'ellipse par **La méthode du Jardinier**.

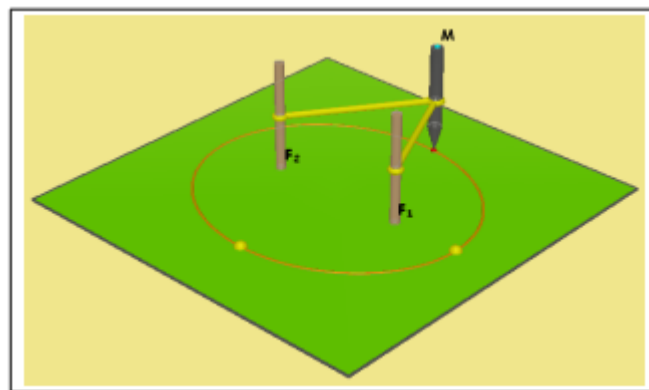
Méthode du Jardinier

La méthode utilise le fait que les points d'une ellipse sont tels que, pour tout point de l'ellipse, la somme des distances du point aux deux foyers est constante.



Principe

- 1 Plantez deux punaises aux foyers de la future ellipse ;
- 2 prenez une ficelle de longueur supérieure à la distance entre les foyers (à titre indicatif : 1,5 à 2 fois cette distance) ;
- 3 faites deux petites boucles fixées chacune par un nœud aux extrémités de la longueur de ficelle ;
- 4 passez chacune de ces boucles sur une des punaises ;
- 5 tendez la ficelle avec un crayon ;
- 6 tout en maintenant la ficelle tendue, faites circuler le crayon ;



Illustration

Cercle principal d'une ellipse

Soit E l'ellipse de sommets principaux A et A' .

On appelle cercle principal de l'ellipse E , le cercle de diamètre $[AA']$

Remarque :
 En examinant de près les éléments de l'ellipse on peut présenter le cercle comme étant une ellipse dont les directrices sont repoussées à l'infini alors que les foyers se confondent avec le centre.

11.4.3 Étude des hyperboles

Équation réduite de l'hyperbole

Dans le cas d'une hyperbole on a, $e > 1$ ainsi, comme $e = \frac{c}{a}$ il s'ensuit que $c > a$ alors $b^2 = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Définition :
 L'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est appelée équation réduite de d'une hyperbole

NB : Comme dans le cas de l'ellipse, l'hyperbole admet un centre de symétrie et deux axes de symétrie.

● Conséquence

- 1 L'hyperbole admet deux foyers F et F'
- 2 L'hyperbole admet deux directrices d et d'
- 3 L'hyperbole admet deux sommets A et A'

NB : $B'(0; -b)$ et $B(0; b)$ ne sont pas des sommets de l'hyperbole.

En se plaçant dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{OA} = a\vec{i}$ on a :

$$F(c; 0), F'(-c; 0), A(a; 0), A'(-a; 0), d : x = \frac{a^2}{c}, d' : x = -\frac{a^2}{c}$$

En fin quelque soit le repère $e = \frac{c}{a}$ et $c^2 = a^2 + b^2$.

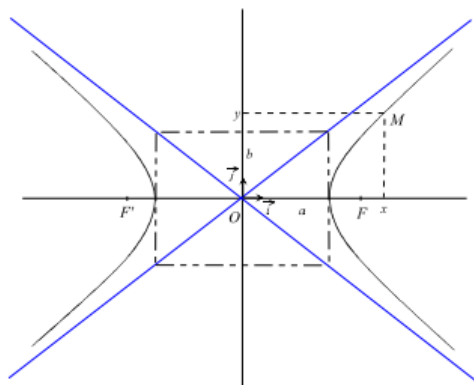


Schéma d'une hyperbole

NB : L'hyperbole est extérieure au rectangle de côté $2a$ et $2b$.

Par ailleurs, lorsque l'axe focal est vertical H à une équation réduite de la forme $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et l'hyperbole d'équation $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l'image de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ par rapport

à la première bissectrice ($y = x$)

D'autre part la réunion des asymptotes de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

En fin, Lorsque $a = b$ les asymptotes de l'hyperbole sont perpendiculaire, $e = \sqrt{2}$ et on dit que ***l'hyperbole est équilatère.***

Équation d'une hyperbole par rapport à ses asymptotes

Soit H , l'hyperbole d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On se propose de déterminer l'équation de H dans un repère où les axes sont les asymptotes. Par exemple $(O; \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}(a; b)$ et $\vec{v}(a; -b)$.

Soit M de coordonnée $(x; y)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et de coordonnée $(X; Y)$ dans $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On a :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{u} + Y\vec{v} = X(a\vec{i} + b\vec{j}) + Y(a\vec{i} - b\vec{j}) = a(X + Y)\vec{i} + b(X - Y)\vec{j}$$

Par conséquent :
$$\begin{cases} x = a(X + Y) \\ y = b(X - Y) \end{cases}$$

On en déduit que l'équation de l'hyperbole dans $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est $Y = \frac{1}{4X}$ qui est l'expression d'une fonction homographique.



Conclusion

L'équation d'une hyperbole dans un repère où les axes sont les asymptotes correspond à l'équation d'une fonction homographique $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

Tangente en un point de l'hyperbole



Théorème :

La tangente T à l'hyperbole H d'équation $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (respectivement $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ au point $M_0(x_0; y_0)$ a pour équation :

$$-\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \text{ (respectivement } \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1)$$

Définition bifocale d'une hyperbole



Théorème :

Soit H l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0; b > 0$) de foyer F et F' .

H correspond également à l'ensemble des point M du plan tel que $|MF - MF'| = 2a$



Exemple

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

On a $a = 2$ et $b = \sqrt{5}$ par conséquent $c = 3$. $\mathcal{H}$ correspond également à l'ensemble des points M du plan tel que $|MF - MF'| = 4$ où $F(3; 0)$ et $F'(-3; 0)$

11.5 Résumé

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition :
 Une courbe C de P est du second degré si, et seulement si elle admet une équation cartésienne de la forme :

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + ax + by + c = 0$$

Où $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$ et tels que α, β, γ soient **non tous nuls** ie $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$

On montre que les courbes du second degré sont, soit des coniques, soit des réunions de points ou de droites ou soit ...le vide ! On classe les courbes du second degré de la façon suivante :

- 1 Si $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$, C est du genre **hyperbole**,
- 2 Si $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$, C est du genre **parabole**
- 3 Si $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$, C est du genre **ellipse**

Equation d'une conique		
Dans un repère orthonormé, l'équation d'une conique est de la forme :	$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$	avec $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$

Equation réduite d'une conique		
Dans des repères orthonormés judicieusement choisis, les coniques ont les équations suivantes appelées équations réduites :		Equations réduites
	Paraboles	$y^2 = 2px$ ou $x^2 = 2py$ (p constante réelle non nulle)
	Ellipses	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
	Hyperboles	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

Parabole Si l'équation est $x^2 = 2py$, on permute dans les résultats précédents abscisse et ordonnée.	Equation réduite dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$:	$y^2 = 2px$	
	Sommet	Ω	
	Excentricité	$e = 1$	
	Foyer	$F(p/2, 0)$	
	Directrice	$D : x = -p/2$	

Ellipse		
	Equation réduite dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > b$
	Centre (de symétrie)	Ω milieu de $[F, F']$
	Excentricité	$e = c/a, e < 1, c = \sqrt{a^2 - b^2}$
	Foyers	$F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$
	Directrices	$D : x = a^2/c,$ et $D' : x = -a^2/c$
si $a < b$, on permute dans les résultats précédents a et b ainsi qu'abscisse et ordonnée		Définition bifocale : $\Gamma = \{M \in P, MF + MF' = 2a\}$

Hyperboles		
Equation réduite	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Centre (de symétrie)	Ω milieu de $[F, F']$	
Excentricité	$e = c/a, e > 1$	
Foyers	$F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$	
Directrices	$D : x = \frac{a^2}{c},$ et $D' : x = -\frac{a^2}{c}$ Avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	
Asymptotes	$\Delta : y = \frac{b}{a}x,$ et $\Delta' : y = -\frac{b}{a}x$	
Définition bifocale	$\Gamma = \{M \in P, MF - MF' = 2a\}$	
Si l'équation est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ou encore $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, on permute dans les résultats précédents a et b , ainsi qu'abscisse et ordonnée.		

NB : Lorsque l'excentricité est nul, la conique est un cercle.

11.6 Quelques applications pratiques des coniques

Les coniques sont des courbes qui ont de nombreuses applications en *Astronomie Télécommunication*, ainsi que dans le domaine ferroviaire

Astronomie

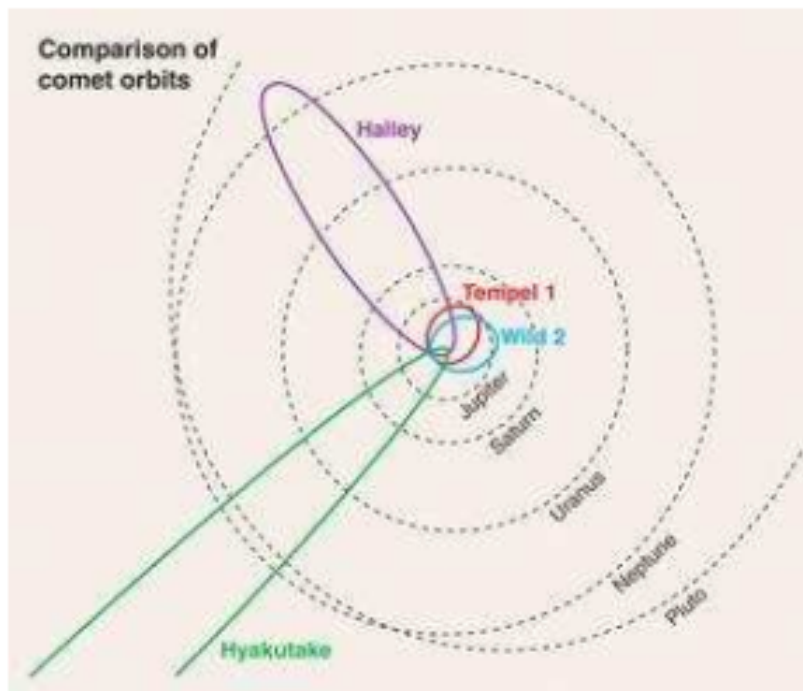
L'excentricité d'une conique est un élément important en astronomie. Par exemple, pour toute nouvelle comète, on détermine une orbite approximative en prenant $e = 1$ (on fait l'hypothèse que cet astre circule sur une parabole). Puis, lorsque le nombre d'observations est suffisant, on détermine la vraie valeur de e . D'après ce qui précède on aura :



Si $0 < e < 1$, la comète circule sur une orbite elliptique. Elle appartient (***tout comme les planètes que nous voyons dans le ciel***), au Système solaire et est périodique.



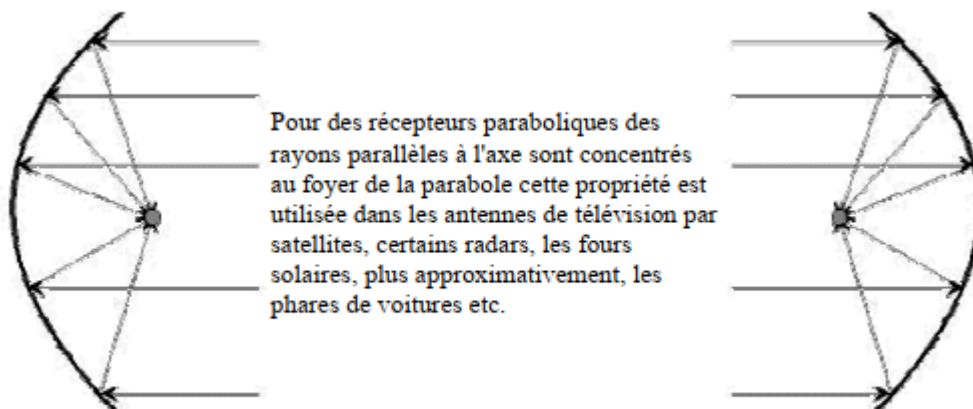
Si $e > 1$, la comète circule sur une hyperbole. Il s'agit donc soit d'une comète venant de l'extérieur du Système solaire, soit d'une comète appartenant au Système solaire, ***mais déviée par une grosse planète (essentiellement Jupiter)*** auprès de laquelle elle est passée. Dans ce dernier cas, cette comète sortira du Système solaire.



Orbites de quatre comètes périodiques (vues en projection sur l'écliptique) :
Halley, Hyakutake, Tempel1, et Wild2

Télécommunication : *Antenne parabolique et miroirs de télescopes*

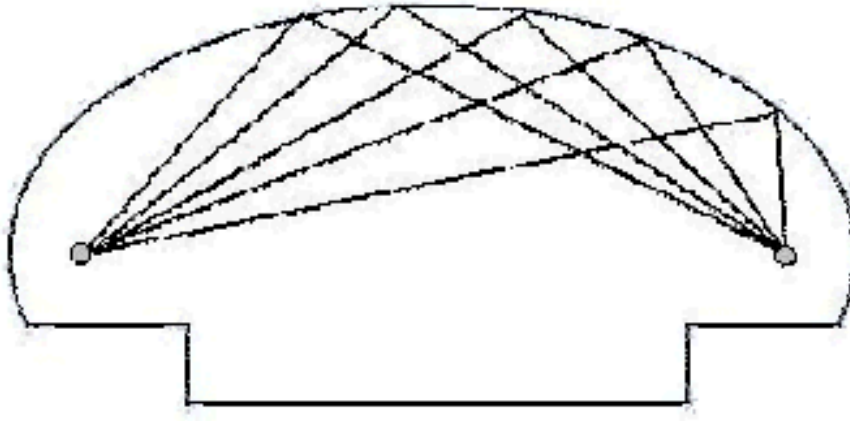
Il est établi qu'un **miroir parabolique** permet d'éviter le défaut d'aberration chromatique rencontré avec les lunettes : avec un miroir parabolique, **tous les rayons lumineux convergent vers le foyer du miroir**, ce qui n'est pas le cas lorsqu'ils traversent une lentille.



Domaine ferroviaire

Dans le métro parisien certaines stations en profondeur ont une section partiellement elliptique (figure), les 2 points gris représentent les foyers de l'ellipse.

2 personnes placées sur ces foyers peuvent parfaitement converser, en attendant leur métro, sans être obligées d'élever la voix



*Extrait du livre "Fulgence Bienvenüe et la construction du métropolitain de Paris"
Claude Berton et Alexandre Ossadzow*

"Stations en profondeur"

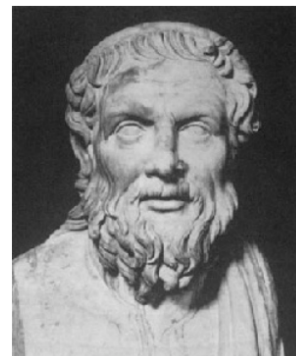
La voûte de celles-ci a la forme d'une parfaite ellipse [...]. L'ellipse se dessine autour de 2 foyers et présente la particularité que tous les sons émis dans un plan transversal à partir d'un des foyers se regroupent, après réflexion sur la paroi courbe, sur l'autre foyer.

Lorsque, quelques années après l'ouverture, les contrôleurs et contrôleuses seront logés exactement aux foyers, ils pourront ainsi, éloignés de 14m, se parler d'un quai à l'autre sans besoin d'élever la voix".

Biographie

Apollonius de Perge (262 av J-C [Perge] - 190 av J-C [Alexandrie])

Apollonius de Perge est un géomètre et astronome grec, surnommé par ses contemporains le Grand Géomètre. Il est né à Pergé, cité antique qui était un grand centre culturel de **la Pamphylie** et qui est actuellement située en Turquie, à Aksu. On connaît très peu de choses sur la vie d'Apollonius, si ce n'est quelques bribes retrouvés dans les préfaces de ses ouvrages ou dans les textes de ses commentateurs (principalement Eutocius et Pappus). On sait qu'il a étudié à Alexandrie sous la direction des successeurs d'Euclide, qu'il visita la ville de Pergame, sans doute attiré par l'université et la bibliothèque inspirées de celles d'Alexandrie qui s'y trouvaient alors, avant de retourner à Alexandrie où il a fini sa vie. Il eut également un fils.



L'œuvre monumentale d'Apollonius de Perge est son **traité sur les coniques en huit volumes** ; les quatre premiers nous sont parvenus en grec, les trois suivants dans des traductions arabes et le dernier est perdu. Avant Apollonius, une conique était définie comme l'intersection d'un cône par un plan perpendiculaire à une génératrice du cône. Suivant l'angle du cône, on retrouve les trois possibilités, ellipse, parabole et hyperbole. Apollonius a l'idée de définir les coniques à partir d'un unique cône, mais en faisant varier l'angle du plan l'intersectant. Le travail réalisé par Apollonius est remarquable, tant par son ampleur (asymptotes, tangentes, relations entre pôles et polaires,...) que par sa nouveauté. C'est lui aussi qui introduit les noms ellipse, parabole et hyperbole.

Les autres ouvrages d'Apollonius sont perdus et on en connaît l'existence et le contenu que par les textes notamment de Pappus. Parmi ses nombreux travaux, on peut citer :

- ✎ la recherche de lieux géométriques, notamment, lorsque A et B sont deux points fixés, la recherche des points M pour lesquels le produit des longueurs $MA \times MB$ ou leur quotient $\frac{MA}{MB}$ vaut une quantité donnée ;
- ✎ des recherches sur les contacts, plus précisément la recherche d'un point tangent (ou passant par) trois objets donnés, ces objets pouvant être un point, une droite ou un cercle ;
- ✎ des travaux en astronomie sur le mouvement des planètes, des travaux en optique ;
- ✎ une étude des propriétés des dodécaèdres et des icosaèdres.

Sommaire

12.1 Orthogonalité et droites du plan	131
12.1.1 Droite définie par un point et un vecteur directeur	131
12.1.2 Droite définie par un point et un vecteur normal	131
12.1.3 Équation normale d'une droite	132
12.1.4 Distance d'un point à une droite	133
12.2 Cercles du plan	133
12.2.1 Équation Cartésienne d'un cercle du plan	134
12.2.2 Équation paramétrique d'un cercle du plan	134
12.2.3 Équation de la tangente en un point du cercle	135



*La difficulté pratique qui a limité les progrès des géomètres est le manque d'un formalisme adapté à la description des relations entre grandeurs géométriques. **François Viète**, à la fin du XVI^e siècle unifie le calcul sur les nombres et le calcul sur les grandeurs géométriques à travers un outil précieux, le calcul littéral. Le principe de la réduction au calcul algébrique est posé, il manque encore une méthode systématique pour l'exploiter.*

***Marino Ghetadi**, puis **René Descartes** proposent de résoudre les problèmes de géométrie par le recours systématique au calcul algébrique. Dans sa *Géométrie* de 1637, Descartes en formule le principe. Il s'agit de représenter grandeurs connues et inconnues par des lettres, et de trouver autant de relations entre grandeurs connues et inconnues qu'il y a d'inconnues au problème. On y reconnaît bien une démarche analytique, conduisant à des systèmes d'équations qu'il s'agit de réduire à une seule équation.*

12.1 Orthogonalité et droites du plan

12.1.1 Droite définie par un point et un vecteur directeur

Soit $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point du plan. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $(\mathcal{P})$.

Notation

On note $D(A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}; \vec{u})$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\mathcal{P})$. $M \in D(A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}; \vec{u})$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

ie $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$. D'où la proposition ci-après :

Proposition

Soit $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point du plan. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur non nul. La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ a pour équation cartésienne :

$$D(A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}; \vec{u}) : bx - ay + c = 0 \quad \text{avec} \quad c = ay_0 - bx_0$$

12.1.2 Droite définie par un point et un vecteur normal

Définition

Soit (D) une droite du plan. Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal à (D) s'il est orthogonal à tout vecteur de (D) .

Proposition

Soit $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point du plan. Soit $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $(\mathcal{P})$. La droite passant par A de vecteur normal $\vec{n}$ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_0 - by_0$

Démonstration : Exercice



Exemple

Soit (D) une droite d'équation $2x + 3y + 4 = 0$. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (Δ) perpendiculaire à (D) et passant par $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Un vecteur normal de (D) est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Et un tel vecteur est un vecteur directeur de (Δ) .

Un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est donc sur (Δ) si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{n}) = 0$ c'est-à-dire si $3x + 2y - 1 = 0$. Ce qui est l'équation cherchée.

12.1.3 Équation normale d'une droite



Cette section prépare au calcul de la distance d'un point à une droite.

Soit (D) une droite et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur normal à (D) . On pose $\vec{v} := \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$.

On définit alors un vecteur unitaire colinéaire à $\vec{n}$. On pose ensuite $\theta := \widehat{(\vec{i}, \vec{v})}$, alors dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $\vec{v}$ a pour coordonnées $(\cos\theta; \sin\theta)$.



Proposition

Soit (D) une droite, $\vec{n}$ un vecteur normal à (D) et θ une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\vec{i}, \vec{v})}$. Alors (D) admet une équation cartésienne de la forme :

$$x \cos \theta + y \sin \theta + k = 0$$

Démonstration : Exercice (**Indication** utiliser la proposition précédente)



Définition

L'équation de (D) obtenue dans la proposition ci dessus est appelée équation normale de (D) .



Remarque

Si (D) a pour équation $ax + by + c = 0$, alors, un vecteur normal est $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

De ce fait, un vecteur normal unitaire est : $\vec{v} := \frac{\vec{n}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Une équation normale de (D) est alors

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$



Exemple

Trouver une équation normale de la droite (D) passant par $B(1; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2; 2\sqrt{3})$.
Un vecteur normal de (D) est $\vec{n}(2\sqrt{3}; -2)$. On a $\|\vec{n}\| = 4$ et un vecteur unitaire associé est $\vec{v}(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$.
Ainsi une équation normale est : $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1-\sqrt{3}}{2} = 0$

12.1.4 Distance d'un point à une droite

Définition

Soit (D) une droite et A un point du plan. Soit H le projeté orthogonal de A sur (D) . On appelle distance de A à (D) et on note $d(A; (D))$ la longueur du segment $[AH]$. (faire un schéma illustratif pendant le cours).

Remarque

Pour tout autre point M de (D) , $d(A; (D)) \leq AM$.

Proposition

Soient $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point du plan et (D) une droite d'équation normale $x \cos \theta + y \sin \theta + k = 0$.
Alors $d(A; (D)) = |x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta + k|$

Démonstration : Soit H le projeté orthogonal de A sur (D) et $M(x; y) \in (D)$. Soit $\vec{v}(\cos \theta; \sin \theta)$ un vecteur unitaire normal à (D) . On a :

$$|\cos(\widehat{(\vec{v}; \overrightarrow{AM})})| = \frac{AH}{AM} = \left| \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v}}{AM} \right| = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v}|}{AM}$$

Ainsi, $\frac{AH}{AM} = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v}|}{AM}$ ie $AH = |\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v}| = |x \cos \theta + y \sin \theta - x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta| = |x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta + k|$
Car $x \cos \theta + y \sin \theta = -k$. D'où $d(A; (D)) = |x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta + k|$ ■

Corollaire

Soient $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point du plan et (D) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.
Alors $d(A; (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Démonstration : Exercice

 **Exemple** Déterminer la distance du point $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ à la droite (BC) où $B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ On vérifie aisément que (BC) a pour équation cartésienne $3x + 5y - 1 = 0$.
On a alors $d(A; (BC)) = \frac{\sqrt{34}}{2}$

12.2 Cercles du plan

Dans ce paragraphe, on utilisera essentiellement les expressions analytiques de la distance et du produit scalaire. C'est pourquoi on se placera toujours dans un **repère orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j})$ puisque ce n'est que dans un tel repère que ces expressions sont connues

12.2.1 Équation Cartésienne d'un cercle du plan



Proposition

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I) Soit $(\mathcal{C})$ un cercle ; il existe des nombres réels a, b et c tels que, pour tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$M \in (\mathcal{C}) \iff x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

II) Soit a, b et c des nombres réels ;

l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est :

☞ Soit l'ensemble vide ;

☞ Soit un point

☞ Soit un cercle.

Démonstration Exercice



Exemple : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- 1) Trouver une équation cartésienne du cercle de centre A et de rayon $r = 3$
- 2) Trouver une équation cartésienne du cercle de centre B passant par A
- 3) Trouver une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$



Exemple : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant les équations suivantes :

i) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$; ii) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 15 = 0$; iii) $x^2 + y^2 - 2x\sqrt{2} + 2y\sqrt{3} + 5 = 0$.

12.2.2 Équation paramétrique d'un cercle du plan



Cercle centré à l'origine



Définition

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon r .

Le système $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique de $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



Cercle de centre quelconque

Définition

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre $\Omega \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de rayon r .

Le système $\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique de $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

 **Exemple :** Le système $\begin{cases} x = 3 \cos \theta \\ y = -1 + 3 \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique du cercle de centre $A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de rayon $r = 3$.

12.2.3 Équation de la tangente en un point du cercle

Proposition

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ et $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ un point de $(\mathcal{C})$.

La tangente à $(\mathcal{C})$ en A notée (T_A) a pour équation :

$$xx_A + yy_A - a(x + x_A) - b(y + y_A) + c = 0.$$

(On dit qu'on a obtenu l'équation de la tangente à partir de celle du cercle par **dédoublément**).

Démonstration : Exercice

 **Exemple :** Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On donne le cercle $(\mathcal{C})$ d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$ et $A(2; -1)$. Déterminer une équation de (T_A) .

Biographie

René Descartes, né 31 mars 1596 à La Haye, mort à Stockholm le 11 février 1650.

René Descartes est un philosophe, physicien et mathématicien français. La pensée de Descartes a eu des répercussions fondamentales sur la philosophie et la science moderne. Il est l'auteur du fameux "**Discours de la méthode**". En tant que scientifique, les lignes suivantes, extraites de ce discours, devraient vous interpeller. **La méthode fixe quatre principes** pour la conduite de l'esprit humain :

"Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment être telle : c'est-à-dire, d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention ; et de ne comprendre rien de plus en mes jugements, que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.

Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.

Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusqu'à la connaissance des plus composés ; et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres.

Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre.

Bien que François Viète utilise déjà une notation semi-symbolique, René Descartes est le premier à utiliser une notation entièrement symbolique. Il est à l'initiative de l'introduction des lettres latines dans les notations mathématiques. Il propose d'utiliser les premières lettres de l'alphabet ($a, b, c, \dots$) pour les paramètres et les dernières ($x, y, z, \dots$) pour les inconnues. Nous utilisons toujours cette convention. Descartes est aussi à l'origine de la notion de repère du plan et de ce qu'on appelle maintenant la géométrie analytique, ce qui nous intéresse ici. On raconte que c'est en observant une mouche qui se promenait sur les carreaux d'une fenêtre, qu'il aurait pensé à définir, à l'aide des carreaux, des coordonnées du plan. Descartes comprit le premier qu'on peut transformer un problème de géométrie en un problème algébrique. La géométrie de Descartes est publiée en français en 1637 et traduite en latin par Van Schooten en 1649, puis, dans une édition considérablement augmentée et commentée en deux volumes en 1659 et 1661. Cette seconde édition favorisera considérablement la propagation des idées de Descartes.



Sommaire

13.1 Distance d'un point à un plan	138
13.1.1 Équation cartésienne d'un plan	138
13.1.2 Calcul de la distance entre un point et un plan	139
13.2 Distance d'un point à une droite	140
13.2.1 Équation paramétrique d'une droite de l'espace	140
13.2.2 Calcul de la distance entre un point et une droite de l'espace	140
13.3 Équation d'une sphère	141



Dans le plan muni d'un repère, nous avons caractérisé des droites par des équations cartésiennes ou des représentations paramétriques.

On peut faire de même non seulement avec des droites, mais aussi avec des plans de l'espace.

L'objectif de ce chapitre est d'établir ces caractérisations et de les utiliser pour calculer la distance d'un point à une droite de l'espace et à un plan de l'espace.

Dans toute la suite sauf mention du contraire, l'espace euclidien est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

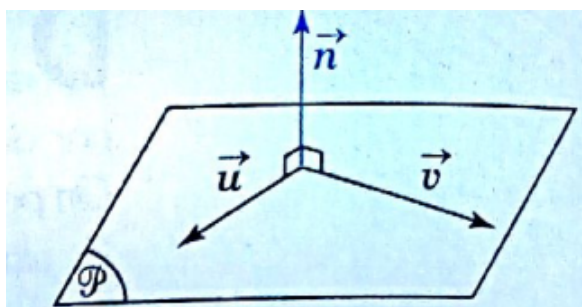
13.1 Distance d'un point à un plan

13.1.1 Équation cartésienne d'un plan

Définition :

Soit P un plan de l'espace, de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On appelle vecteur normal à P , tout vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.



Propriétés *Existence de plan*

Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

Il existe un plan et un seul passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Propriétés *Caractérisation des points d'un plan*

Soit P un plan de l'espace, $\vec{n}$ un vecteur normal de P , soit A un point de P .

Pour tout point M de l'espace, $M \in P$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$.

Propriétés

Soit a, b, c des nombres réels non tous nuls (*ie* $(a, b, c) \neq (0; 0; 0)$).

- Tout plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
- Toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

Remarque :

 Dans n'importe quel repère, même non orthonormé, tout plan admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ et toute équation cartésienne de cette forme est celle d'un plan lorsque a, b, c ne sont pas tous nuls. Mais lorsque le repère n'est pas orthonormé le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ n'est généralement pas vecteur normal au plan.

 Si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne d'un plan P alors, pour tout nombre réel non nul k $k(ax + by + cz + d) = 0$ est également une équation de P

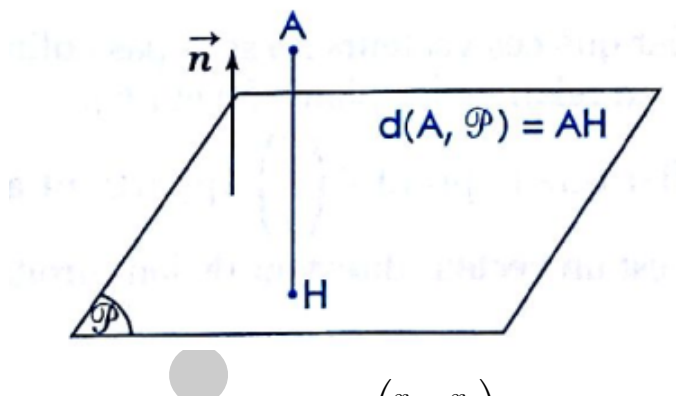
💡 **Exemple :** $2x - y + z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan passant par $A(2; 1; 0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2; -1; 1)$.

13.1.2 Calcul de la distance entre un point et un plan

Soit P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_0; y_0; z_0)$ un point de l'espace.

On se propose de calculer la distance de A à P .

On sait que cette distance est AH avec H projeté orthogonal de A sur P



Soit $(x; y; z)$ les coordonnées du point H , on a $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AH}$ est un vecteur normal à P . Donc $\overrightarrow{AH} \perp \vec{n}$ $|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$. Par suite

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Comme $H \in P$ on a $ax + by + cz + d = 0$. Ainsi,

$$|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)$$

Il s'ensuit que

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

💡 **proposition :**

Soit $A(x_0; y_0; z_0)$ un point de l'espace, P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

La distance du point A au plan P est : $d(A; P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

💡 **Exemple :**

Soit P le plan d'équation $2x - 2y + z - 5 = 0$ et $A(1; -2; 1)$ un point de l'espace On a :

$$d(A; P) = \frac{|2 \times 1 + (-2) \times (-2) + 1 \times 1 + (-5)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}$$

13.2 Distance d'un point à une droite

13.2.1 Équation paramétrique d'une droite de l'espace

Définition :

Soit D la droite passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$

On dit que le système
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$
 est une représentation paramétrique de D

Remarque :

 Dans cette représentation paramétrique, λ est l'abscisse de $M(x; y; z)$ dans le repère $(A; \vec{u})$ de la droite D

 Le choix de A et $\vec{u}$ n'étant pas unique, une droite admet plusieurs représentation paramétrique.



Exemple : la droite passant par $A(1; 2; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; 1)$ a pour représentation

paramétrique.
$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

13.2.2 Calcul de la distance entre un point et une droite de l'espace

L'algorithme qui suit nous permet de déterminer la distance entre un point A et une droite D de l'espace

Point méthode :



1 On détermine la représentation paramétrique de D



2 On appelle H le projeté orthogonal de A sur D



3 Par définition, H est sur D donc les coordonnées de H vérifient la représentation paramétrique de D .



4 Par définition, (AH) et D sont orthogonales donc on utilise le produit scalaire : $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ et on détermine k .



5 On calcule la longueur AH

**Exemple :**

Déterminer la distance de $A(2; 3; 1)$ à la droite D de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - k \\ y = -2 + 3k \\ z = 3 - 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Soit $H(x; y; z)$ le projeté orthogonal de A sur D alors H est sur D et donc

$$\begin{cases} x = 1 - k \\ y = -2 + 3k \\ z = 3 - 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

A partir de la représentation paramétrique de D , on peut déterminer un vecteur directeur de D : $\vec{u}(-1; 3; -2)$; de plus $\overrightarrow{AH}(-1 - k; -5 + 3k; 2 - 2k)$

(AH) et D sont orthogonales donc $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ *ie* $-1(-1 - k) + 3(-5 + 3k) - 2(2 - 2k) = 0$. Par suite, $k = \frac{9}{7}$, d'où $AH = \frac{2\sqrt{84}}{7}$

13.3 Équation d'une sphère

Soit M un point de l'espace, soit $\Gamma_{A;R}$ la sphère de centre A et de rayon R , par caractérisation de $\Gamma_{A;R}$ nous savons que : $M \in \Gamma_{A;R}$ si et seulement si $AM = R$ *ie* $AM^2 = R^2$. Il s'ensuit la définition ci-après :

**Définition :**

L'équation cartésienne d'une sphère de centre A et de rayon R est :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2$$

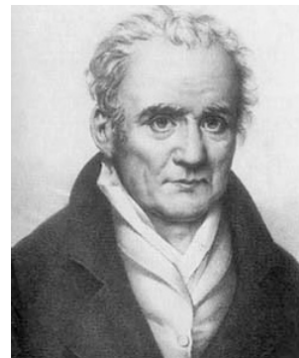
**Exemple**

Une équation cartésienne de la sphère de centre $A(5; 3; 0)$ et de rayon 6 est $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 36$

Biographie

Gaspard Monge (9 mai 1746 [Beaune] - 28 juillet 1818 [Paris])

Gaspard Monge fut un très brillant géomètre, à qui on doit la création de l'école Polytechnique, et qui est aussi connu pour son rôle pendant la Révolution. Gaspard Monge est né le 9 mai 1746, à Beaune, où son père était marchand. Il fait d'excellentes études chez les oratoriens (des membres d'une certaine société cléricale), puis à Lyon. Auteur d'un plan de sa ville natale, il est remarqué par l'état-major de l'école du génie de Mézières, où le mathématicien Bossut enseigne. Monge est de trop modeste origine pour être admis comme élève dans cette école, mais il s'y fait employer comme dessinateur. Ses talents de géomètre ne tardent pas à s'exprimer, et Monge invente une méthode graphique originale et élégante afin de définir le plan d'une fortification "imprenable" par les ennemis, quel que soit leur position.



Son génie mathématique reconnu, Monge enseigne les mathématiques à Mézières à compter de 1766, au départ de Bossut. Il s'investira beaucoup dans cette tâche, pendant presque 20 ans. Il poursuit ses recherches, présentant plusieurs mémoires à l'Académie des sciences, concernant la géométrie différentielle, la géométrie descriptive, le calcul des variations, la combinatoire. En 1777, il épouse Catherine Huart, qui possède une forgerie, et par son intermédiaire, il s'intéresse de très près à la métallurgie. C'est un des traits caractéristiques de Monge : jamais il ne s'est limité aux mathématiques dites "académiques", gardant toujours un intérêt pour le côté pratique, technique, et même artistique des choses.

Après avoir été élu **associé géomètre à l'Académie des sciences**, puis avoir obtenu un poste d'examinateur à l'Ecole Navale, Monge doit renoncer à enseigner à Mézières en 1784. A cette époque, il s'intéresse moins aux mathématiques, participe à des travaux avec des chimistes autour de Lavoisier, étudie des phénomènes météorologiques...

La Révolution va bouleverser la vie de Monge. Scientifique érudit et écouté, il soutient ardemment les événements révolutionnaires. Au lendemain de la chute du roi, en septembre 1792, il est nommé ministre de la marine. Malheureusement, cette expérience, comme celle de Laplace quelques années plus tard, ne fut guère concluante, et il démissionne le 8 avril 1793. Revenu à la vie civile, il s'intéresse à l'armement, rédigeant et enseignant de nouvelles méthodes de fabrication de poudre à canon. Son autre préoccupation est la création de l'Ecole Centrale des Travaux Publics, la future Ecole Polytechnique. Les savants les plus prestigieux y enseigneront les matières actuelles. Monge y donnera de 1794 à 1809 (avec une interruption de 4 ans) des cours d'analyse et de géométrie descriptive, et sera même un temps directeur de l'école.

En 1796, il part en mission en Italie (en fait, il s'agit de repérer les richesses culturelles que les dernières conquêtes permettent de ramener en France), et il y rencontre Napoléon Bonaparte, auquel il vouera une admiration et une amitié sans borne. En 1798, il rejoint les expéditions napoléoniennes en Égypte (au côté des mathématiciens Fourier et Malus), alors que celles-ci rencontrent des succès (Malte, Alexandrie). Mais après la destruction de la flotte napoléonienne par celle de Nelson dans la bataille du détroit du Nil en août 1798, Napoléon et son armée se voient confiner dans les pays qu'ils viennent de conquérir. Monge en profite pour mettre en place l'Institut d'Egypte au Caire, et mettre la dernière touche à son traité Application de l'analyse à la géométrie.

Il accompagne Napoléon dans son périlleux retour vers Paris en 1799. Lorsque ce dernier s'arroge

les pleins pouvoirs, Monge oublie ses visions républicaines, et sert aveuglément l'Empereur dictateur. En retour, il est nommé sénateur, grand officier de la légion d'honneur, Comte de Péluse. Sa santé décline peu à peu, et l'oblige à arrêter ses enseignements. Quand les défaites de Napoléon s'enchaînent jusqu'à celle de Waterloo en 1815, Monge assiste impuissant à la chute de l'empereur, fuyant un temps Paris. Peu de temps après la Restauration, il est chassé brutalement de l'Institut, où il est remplacé par le royaliste Cauchy. Monge n'a alors plus guère d'activité, sa santé mentale et intellectuelle ne lui permettant plus d'ailleurs. Il décède le 28 juillet 1818.

A l'occasion du bicentenaire de la Révolution, en 1989, **les restes de Monge furent transférés au Panthéon.**



Sommaire

14.1 Exercices et Problèmes	145
14.2 Les 10 Anciens Baccalauréat	180



14.1 Exercices et Problèmes



Exercices d'algèbre



Nombres complexes

Forme algébrique-forme trigonométrique

1 Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{lll} 1) z_1 = \left(\frac{1}{3} - 2i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) & 2) z_2 = (1 - 2i)^2 & 3) z_3 = \frac{1}{1 + 3i} \\ 4) z_4 = \frac{2 - i}{1 + i} & 5) z_5 = (2 + i)^3 & 6) z_6 = (1 + i)^2 - (2 - i)^2. \end{array}$$

2 On donne les nombres complexes :

$$z_1 = (\sqrt{6} + i\sqrt{2})\left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \text{ et } z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

1) Mettre z_1 et z_2 sous forme algébrique.

2) Déterminer le module puis un argument de z_1 , z_2 et $z_1 z_2$.

3) Déterminer le module puis un argument de $Z = \frac{z_1}{z_2}$ et $Z' = (z_2)^6$. Écrire Z et Z' sous forme algébrique.

3 Déterminer le module et un argument de $Z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$.

4 Soit $\theta \in [-\pi; \pi]$.

a) Déterminer le module et un argument de $e^{i\theta} + 1$; $e^{i\theta} - 1$.

b) En déduire le module et un argument, pour $\theta \in]-\pi; \pi[$ de $\frac{\cos\theta + i\sin\theta + 1}{\cos\theta + i\sin\theta - 1}$.

5 Trouver les entiers $n \in \mathbb{N}$ tel que $(\sqrt{3} + i)^n$ soit un nombre réel.

6 On considère, pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ le complexe $z = (1 - \sin\theta + i\cos\theta)^n$.

Déterminer les réels θ tels que $\operatorname{Re}(z) = 0$.

Polynômes, équations, racines de l'unité

7 Soit P le polynôme défini dans $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - z^2 + (5 + 7i)z + 10 - 2i$$

a) Montrer que P possède une racine imaginaire pure.

b) En déduire une factorisation de P de la forme $P(z) = (z - 2i)Q(z)$ où Q est un polynôme du second degré à coefficients complexes.

c) Résoudre alors $P(z) = 0$ et factoriser complètement le polynôme P sur $\mathbb{C}$.

8 Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$1) z_1 = -3 + 4i \quad 2) z_2 = -24 - 10i \quad 3) z_3 = -5 - 12i \quad 4) z_4 = -i.$$

9 Déterminer les racines des polynômes suivants :

$$a) z^2 + iz + 5 - 5i \quad b) z^2 - iz + 1 - 3i \quad c) z^2 + z - iz - 5i \quad d) z^2 - 3iz - 3 - i.$$

10 Déterminer :

1) Les racines troisièmes de -8. 2) Les racines cinquièmes de $-i$. 3) Les racines sixièmes de $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$.

11 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$$

12 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

a) $1 + \frac{z+i}{z-i} + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 = 0$ b) $(z+i)^n = (z-i)^n$.

13 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z^3 = \bar{z}$$

14 Soit ω une racine n -ième de l'unité différente de 1. On pose :

$$S := \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$$

Déterminer une valeur de S . ( **Indication** : on pourra calculer $(1-\omega)S$)

Application à la trigonométrie

15 Linéariser les expressions suivantes :

1) $\sin^2 x$ 2) $\sin^4 x$ 3) $\cos \sin^2 x$ 4) $\cos \cos b$
 5) $\cos^4 x$ 6) $\sin^5 x$ 7) $\cos^2 x \sin^2 x$ 8) $\cos \cos b \cos c$

16 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, transformer :

- a) $\cos(3x)$ en un polynôme en $\cos x$.
 b) $\sin(3x)$ en un polynôme en $\sin x$.
 c) $\cos(4x)$ en un polynôme en $\cos x$.

17 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

a) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = e^{in\frac{\theta}{2}} \left(\frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)$$

b) En déduire

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(k\theta).$$

c) En déduire

$$\sum_{k=0}^n k \sin(k\theta).$$



Exercices d'analyse

Limites et continuité

Limites d'une fonctions

18 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions définies par les formules suivantes :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}, h(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5}, g(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+4} \text{ et } r(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

19 Déterminer les limites suivantes quand elles existent :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2} - 1), \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x + 2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4}, \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x} \sin x$$

20 Déterminer les limites suivantes quand elles existent :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-x^n}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \tan x$$

21 a) Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan 2x}{3 \tan x - \tan 2x}$$

b) Étudier les limites suivantes en fonction des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \lambda x + 1}{x^2 - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - \lambda} - \frac{1}{(x - 2)^2} \right).$$

Continuité d'une fonction

22 Pour chacune des fonctions suivantes, décrire l'ensemble D de définition, puis détailler les décompositions et opérations algébriques en jeu pour affirmer la continuité de la fonction sur D .

$$\frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2} - 1), \quad \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x + 2}, \quad \frac{x^2 + 2|x|}{x}, \quad \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4}, \quad x + \sqrt{x} \sin x$$

23 Soit $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2$.

a) Calculer $P(-1)$ et $P(1)$. En déduire que P possède au moins une racine dans $[-1, 1]$.

b) P possède-t-il une racine dans $[0, 1]$?

24 On considère la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f :]0; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

a) Étudier la continuité de f sur son intervalle de définition.

b) Prolonger f par continuité sur $]0; +\infty[$.

25 Montrer que les équations suivantes ont au moins une racine dans l'intervalle I :

1) $x^7 - x^2 + 1 = 0$, $I = [-2, 0]$.

2) $\sqrt[3]{x^3 + 6x + 1} - 3x = 2$, $I = \mathbb{R}$.

3) $\tan x = \frac{3}{2}x$, $I = [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$

 On pourra donner une valeur approchée de l'une de ces racines en utilisant la méthode de dichotomie ou de balayage (à l'aide d'une méthode de calcul de son choix).

Étude d'une branche infinie

26 Étudier les branches infinies de la courbe représentative de chacune des fonctions ci-après

a) $f(x) = x^3 + 3x - 2$, b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$, c) $h(x) = 2x + \sqrt{x+1}$, d) $t(x) = x + \sin x$,

e) $P(x) = x(1 + \sin^2 x)$, f) $L(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x^2 + 3x + 2}$, g) $Q(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, h) $R(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}$

Dérivation et études de fonctions

27 Les fonctions f, g et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = x|x|, \quad g(x) = x^{\frac{3}{5}}, \quad h(x) = \cos(\sqrt{|x|})$$

Sont-elles dérivables en 0 ?

28 Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas calculer $f'(0)$.

29 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2} + \text{Arctan}x$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f et les limites en ses bornes.

b) Calculer la fonction dérivée de f et en déduire le tableau de variation de f .

c) La fonction f admet-elle des points d'inflexion si oui lesquels ?

d) Tracer la courbe représentative de f

30 On considère l'application $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $[-1; 1]$.

b) Montrer que f est dérivable sur $] -1; 1[$ et déterminer f' sur $] -1; 1[$.

c) Montrer que l'application dérivée $f' :] -1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $] -1; 1[$.

Quel est l'ensemble des $x \in] -1; 1[$ pour lesquels $f'(x) = 0$.

d) Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe. En déduire que f est injective.

e) On désigne par $\hat{f}$ la bijection de $[-1; 1]$ sur $f([-1; 1])$ définie par $\hat{f}(x) = f(x)$, pour tout $x \in [-1; 1]$ et on désigne par $\hat{f}^{-1}$ sa bijection réciproque. Justifier l'existence et déterminer $(\hat{f}^{-1})'(0)$.

31 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

b) Déterminer l'ensemble des points où f est dérivable ?

c) Calculer la dérivée de f aux points x où elle est dérivable.

32 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x + \lambda x^2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Déterminer, s'ils existent, les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que f soit continue.

b) Déterminer, s'ils existent, les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que f soit dérivable.

33 Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) := \frac{x^2 + 4x + 7}{2(x + 1)}$;

(C) est sa courbe représentative dans un plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1-a) Déterminer D_f et l'écrire sous forme de réunion d'intervalles.

1-b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f .

1-c) En déduire, en justifiant, que la courbe (C) admet une asymptote dont on précisera une équation cartésienne.

2) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) La courbe (C) rencontre-t-elle l'axe $(O, \vec{i})$?

4-a) Déterminer trois nombres réels a, b et c tel que : $\forall x \in D_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$.

4-b) En déduire, en justifiant, que la courbe (C) admet une autre asymptote (D) dont on précisera une équation cartésienne.

5) Déterminer les coordonnées de Ω point de rencontre des deux asymptotes ainsi obtenus.

6) Montrer alors que Ω est centre de symétrie à la courbe (C).

7) Construire (C), ainsi que ses asymptotes dans le même repère du plan.

8) Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre et le signe des solutions de l'équation : (E) : $x^2 - (2m - 4)x - 2m + 7 = 0$.

9) À partir de la courbe (C), construire dans le même repère la courbe (C') représentative de la fonction $g = |f|$.

34 Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) := x - 1 + \frac{2x}{x^2 + 1}$.

(C) est sa courbe représentative dans un plan rapporté au repère orthonormé (O, I, J) .

1-a) Déterminer D_f .

1-b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f .

1-c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que pour tout réel x , on a : $f'(x) = \frac{x^4 + 3}{(x^2 + 1)^2}$.

2) En déduire le sens de variation de f , puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3) Vérifier que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

4) Montrer qu'il existe deux points dont on déterminera les coordonnées, en lesquels la tangente à (C) est parallèle à la droite (D).

5) Montrer que le point $I(0; -1)$ est centre de symétrie de (C).

6-a) Écrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point I .

6-b) Déterminer la position relative de (T) par rapport à (C).

6-c) Répondre par vrai ou faux en justifiant :

i). I est un maximum ;

ii). I est un minimum ;

iii). I est un point d'inflexion ;

iv). I est un point anguleux.

7) Construire (T), (D) et (C) dans un même repère du plan.

35 Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) := \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2-a) Peut-on dire que les droite d'équation $x = 1$ et $x = -1$ sont asymptotes à la courbe représentative (C_f) de f ? Justifier votre réponse.

2-b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative (C_f) de la fonction f .

3) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe représentative (C_f) de la fonction f .

36 Le repère (O, I, J) est orthonormé. Soit f la fonction définie par : $f(x) := 4\sin^2 x \cdot \cos 2x$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1-a) Démontrer que f est périodique de période π .

1-b) Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie à la courbe $(\mathcal{C})$.

2-a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4\sin 2x(1 - 4\sin^2 x)$

2-b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

3) Tracer $(\mathcal{C})$ sur $[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.

37 Le repère (O, I, J) est orthonormé. Soit f la fonction définie par : $f(x) := -2\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1) Démontrer que f est paire et 2π -périodique.

2) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\sin x(1 + \cos x)$.

3) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.

4) Tracer $(\mathcal{C})$ sur $[-\frac{7\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}]$.

38 On définit la fonction f sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

a) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]1; \frac{3}{2}[$ une unique solution α .

c) Étudier la branche infinie en $+\infty$ de la courbe (C_f) de la fonction f .

d) Montrer que f admet une bijection réciproque.

e) Construire dans un même repère les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

On définit la fonction g sur $I = [1; 2]$ par $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

f) Montrer que $g(\alpha) = \alpha$.

g) Montrer que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

h) En déduire que : $|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

39 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sqrt{x+1}$ et soit $a \in]0; +\infty[$.

a) Déterminer les dérivées première et seconde de g sur $[0; +\infty[$.

b) Vérifier que

$$\forall x \in [0; a] \text{ on a : } \frac{1}{2\sqrt{1+a}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

c) Démontrer que :

$$1 + \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}$$

Fonctions logarithmes népérien-Fonctions exponentielles et fonctions Puissances

Fonctions logarithmes

40 1) Exprimer en fonction de $\ln 2$ les nombres suivants :

$$A := \ln 8, B = \ln \frac{1}{16}, C = \frac{1}{2} \ln 16, D = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4}.$$

2) Exprimez en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les réels suivants : $E = \ln 24$, $F = \ln 144$, $G = \ln \frac{8}{9}$

3) Écrire les nombres A et B à l'aide d'un seul logarithme : $A = 2\ln 3 + \ln 2 + \ln \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2} \ln 9 - 2\ln 3$

41 Comparez les réels x et y : $x = 3\ln 2$ et $y = 2\ln 3$; $x = \ln 5 - \ln 2$ et $y = \ln 12 - \ln 5$.

42 Simplifier au maximum : $A = \ln(e^2)$; $B = \ln(e^3)$; $C = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$; $D = \ln\sqrt{e}$; $E = \ln e\sqrt{e}$.

43 Le son se manifeste par des variations de pression de l'air. L'unité de mesure de la pression de l'air est le Pascal. La pression de l'air s'exerce sur le tympan de l'oreille humaine. Pour une pression supérieure ou égale à 20×10^{-6} Pascals s'exerçant sur son tympan, l'oreille humaine perçoit un son dont le niveau se mesure en décibels. On note $p_0 = 20 \times 10^{-6}$. Pour une pression de p Pascals s'exerçant sur le tympan, avec $p \geq p_0$, le niveau sonore perçu est égale à :

$$f(p) = \frac{20}{\ln 10} \ln(50000p)$$

1) Quel est le niveau sonore perçu pour une pression de 2 Pascals? 0,2 Pascals? 0,02 Pascals? Calculer $f(p_0)$.

2) A partir d'un niveau sonore de 120 décibels, on ressent une douleur. Déterminer la pression p correspondant à ce niveau sonore.

3) Montrer que pour tout réel : $x \geq p_0$, $f(10x) = 20 + f(x)$.

 On en déduit le niveau sonore augmente de 20 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par 10

4) Exprimer, pour tout réel $x \geq p_0$, $f(100x)$ en fonction de $f(x)$ et énoncer la propriété du niveau sonore correspondante.

44 Précisez l'ensemble de définition puis résoudre les équations suivantes :

$$1) \ln(2 + 5x) = \ln(x + 6) \quad 2) \ln(x - 1) + \ln(x - 3) = \ln 3 \quad 3) \ln x = 2$$

$$4) (\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \quad 5) \ln(2x - 5) = 1 \quad 6) \ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right) = 0$$

$$7) \ln(x - 1) = \ln(2x - 1) \quad 8) \ln|x - 1| = \ln(2x - 1) \quad 9) \ln|x - 1| = \ln|2x - 1|$$

$$10) \frac{2(1 + \ln x)}{x} = 0 \quad 11) \ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right) = 0 \quad 12) \ln\sqrt{x-1} = 0$$

45 1) Développer l'expression : $A(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$.

2) Résoudre les équations suivantes :

$$a) \ln(x^3 + 2) = \ln(2x^2 + x) \quad b) \ln(|x|^3 + 2) = \ln(2x^2 + |x|)$$

$$c) \ln(x^3 - x^2 - 3x + 3) = \ln(x^2 - 2x + 1) \quad d) \ln(x^3 - x^2 - 3x + 3) = 2\ln(1 - x)$$

46 Résoudre le système d'équations suivant :

$$a) \begin{cases} x - y = \frac{3}{2} \\ \ln x + \ln y = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 5\ln x + 2\ln y = 26 \\ 2\ln x - 3\ln y = -1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} \ln(xy) = 4 \\ (\ln x)(\ln y) = -12 \end{cases}$$

47 Précisez l'ensemble de définition puis résoudre les inéquations suivantes :

$$1) \ln(2 + 5x) = \ln(x + 6) \quad 2) \ln(x - 1) + \ln(x - 3) < \ln 3 \quad 3) \ln x \geq 2 \quad 4) \frac{2(1 + \ln x)}{x} > 0$$

$$5) (\ln x)^2 + (\ln x) - 6 \leq 0 \quad 6) \ln(2x - 5) \geq 1 \quad 7) (1, 2)^n \geq 4, n \in \mathbb{N} \quad 8) (0, 8)^n \leq 0, 1, n \in \mathbb{N}$$

48 Un capital de 5000000 FcfA XAF est placé à intérêts composés au taux annuel de 6%. Déterminer le nombre d'années n à partir duquel le capital acquis sera supérieur à 12000000 FcfA XAF.

49 Étudier le signe des expressions suivantes :

$$A(x) = (\ln x)(\ln x + 1), B(x) = 2x \ln(1 - x), C(x) = -x^2 \ln(x + 1)$$

50 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \ln(x^2 + 3x - 4) \quad 2) f(x) = \ln\left(\frac{4 - x^2}{x}\right) \quad 3) f(x) = \ln(4 - x^2) - \ln x$$

$$4) f(x) = \ln(x^2 - 4) - \ln(-x)$$

51 Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x) \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) \ln x$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 3 \ln x)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (x - 4 + \ln x) \quad 5) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln x^2)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) \quad 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \left(\triangle\right) \text{poser } X = \frac{1}{x} \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} \quad \left(\triangle\right) \text{poser } X = 2x$$

52 Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions ci-dessous :

$$1) f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + 2 \ln x \quad 2) f(x) = \frac{2 \ln x}{\ln 3} \quad 3) f(x) = \ln(4 - x) + \ln x$$

$$4) f(x) = x \ln x - x \quad 5) f(x) = x^2 \ln x \quad 6) f(x) = \ln(2x - 5)$$

$$7) f(x) = \ln(-3x + 1) \quad 8) f(x) = \ln(x^2 + x + 1) \quad 9) f(x) = \ln\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)$$

$$10) f(x) = \ln(\ln x) \quad 11) f(x) = x \ln(2x - 3) \quad 12) f(x) = 2x(1 - \ln x)$$

$$13) f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad 14) f(x) = \frac{x - \ln x}{x^2} \quad 15) f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x - 4$$

$$16) f(x) = \ln x^2 \quad 17) f(x) = (\ln x)^2 \quad 18) f(x) = \ln(1 - x^2)$$

53 On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(ax + b)$, et C sa courbe représentative.

1) Déterminer les nombres a et b tels que $f(2) = 0$ et $f'(3) = \frac{3}{4}$

Quel est alors l'ensemble de définition de f ? Quel est le sens de variation de f ?

2) Déterminer les nombres a et b tels que la courbe C passe par le point $A(2; 0)$ et la tangente en A ait pour coefficient directeur -2 .

54 Problème 1

Partie A : Fonction Auxiliaire

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2 \ln x$.

1) Étudier le sens de variation de g .

2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (Unité graphique 2cm).

1) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C) .

Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) sur $]0; +\infty[$.

Montrer que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on précisera.

3) Étudier le sens de variation de f . Dresser le tableau de variation de f .

4) Montrer qu'il existe un unique point B de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à (Δ) . Préciser les coordonnées du point B .

5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α . Exprimer $\ln(\alpha)$ en fonction de α .

Montrer que le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse α est supérieur à 1. On admettra que $0,31 < \alpha < 0,35$.

6) Représenter succinctement la courbe (C) et les droites (Δ) et (T) .

55 Problème 2

Partie A : Fonction Auxiliaire

La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$.

1) Étudier le sens de variations de f . Calculer les limites de f aux bords de l'ensemble de définition et dresser le tableau de variations de f .

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution l dans l'intervalle $]0; +\infty[$. Déterminer l'entier n tel que $l \in]n; n+1[$.

3) Déterminer le signe de $f(x)$.

Partie B : La fonction g est définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x = 0 \\ -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x & \text{Si } x > 0 \end{cases}$

1) Montrer que la fonction g est continue en 0. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2) Montrer que pour tout $x > 0$, $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

3) Montrer que $g\left(\frac{1}{l}\right) = \frac{1+4l}{8l^2}$. Dresser le tableau de variation de g .

4) Donner les équations cartésiennes des tangentes à la courbe Γ représentative de g aux points d'abscisses 1 et $\frac{1}{l}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$ et interpréter graphiquement cette limite.

5) Représenter succinctement Γ et ses tangentes dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Fonctions exponentielles

56 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- 1) $e^{3x+2} = e$ 2) $e^x - 7 = 0$ 3) $e^{2x} - 9 = 0$
 4) $e^x + 1 = 0$ 5) $e^x(e^x - 4) = 0$ 6) $e^{2x} + e^x - 6 = 0$
 7) $\ln(e^x - 3) = 0$ 8) $e^{1-2\ln x} = 1$ 9) $\ln(e^{x+1}) = 1$

57 1) Déterminer les racines du polynôme $P(x) = x^2 + 4x - 5$

2) En déduire les solutions de l'équation $e^{2x} + 4e^x = 5$

3) Résoudre les équations suivantes :

- a) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ b) $e^{2x+1} + e^{x+1} - 2e = 0$ c) $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$

58 **équation mêlant logarithme et exponentielle**

1) Développer l'expression $A = (x-1)(x+1)(x-2)$

2) Résoudre les équations suivantes : a) $e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0$ b) $e^{x^3+2} = e^{2x^2+x}$.

59 Résoudre les systèmes d'équations suivants :

- 1) $\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^x - e^y = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} e^x + 2e^y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = -15 \\ e^x e^y = e^{-2} \end{cases}$

60 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

- 1) $e^{3x+2} \leq e$ 2) $e^x - 7 < 0$ 3) $e^{2x} - 9 \geq 0$ 4) $e^x + 1 > 0$ 5) $e^x(e^x - 4) < 0$ 6) $e^{2x} + e^x - 6 \leq 0$

61 A l'aide de polynômes bien choisis résoudre les inéquations suivantes

- a) $e^{2x} + e^x - 2 \geq 0$ b) $e^{2x} - 3e^x + 2 \leq 0$ c) $e^x - e^{-x} > 0$.

62 le nombre d'habitants d'une région ayant un fort taux de natalité, est donné par la fonction

exponentielle :

$f : t \mapsto 12e^{0,05t}$ où $f(t)$ est la population exprimé en millions d'habitants pour l'année 2000+t.

1) A partir de quelle date la population aura-t-elle plus que triplé ?

2) Cette région ne peut pas nourrir plus 20 millions de personnes.

Pendant combien d'année après 2000 la nourriture sera-t-elle suffisante ?

63 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + e^x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 4e^x)$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 3e^x \right)$.

64 Étudier les limites de la fonction f au borne de son ensemble de définition dans chacun des cas et donner les asymptotes éventuelles :

a) $f(x) = e^{-x} - 4$ b) $f(x) = \frac{3}{1 + e^x}$ c) $f(x) = x - 2 + xe^x$ d) $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$

65 On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

1) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

2) Montrer que : $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ et calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3) En déduire l'existence de deux asymptotes de la courbe C_f .

66 Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et les fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x + 3 - e^x$ 2) $f(x) = xe^x$ 3) $f(x) = (2x + 1)e^x$ 4) $f(x) = \frac{e^x}{x}$
 5) $f(x) = e^{-x}$ 6) $f(x) = 3e^{2x} - 5e^x$ 7) $f(x) = e^{3x+5}$ 8) $f(x) = e^{-x^2+1}$
 9) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ 10) $f(x) = x^2e^{-2x}$ 11) $f(x) = \ln(e^x + 1)$ 12) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

67 Problème 1

Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = e^x + e^{-x}$ et $g(x) = e^x - e^{-x}$.

1) Déterminer les ensembles de définitions de f et g , ainsi que leur parité éventuelle.

2) Déterminer les limites aux bornes des domaines d'étude de f et g .

3) Déterminer les fonctions dérivées de f et g , ainsi que leurs tableaux de variations.

4) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer : $\left[f(a) \right]^2 - \left[g(a) \right]^2$

5) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Exprimer $g(a+b)$ en fonction de $f(a)g(b) + g(a)f(b)$.

68 Problème 2

1) Développer l'expression $A = (x - 1)(x^2 + 2x - 8)$.

2) Factoriser en produit de facteur du premier degré $x^3 + x^2 - 2x + 8$.

3) Soit f la fonction définie pour $x \neq \ln\left(\frac{4}{5}\right)$, par $f(x) = \frac{e^{3x+1} + e^{2x+1}}{5e^x - 4}$.

Donner la limite de f en $-\infty$.

4) Résoudre l'équation $f(x) = 2e$.

5) Donner une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

69 Problème 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{1-x}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Quelle conséquence graphique sur C_f peut-on tirer ?

- 2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction dérivée de f .
 3) Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f .

Primitives-Intégration et Équations différentielles

Primitives

- 70** 1) Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie par : $f(x) = 3x^3 - 9x + 1$
 2) Déduisez en deux primitives de la fonction suivante : $g(x) = 9x^2 - 9$.
 3) Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
- 71** Déterminer une primitive de f sur un intervalle contenu dans son ensemble de définition.
 1) $f(x) = 2x + 1$ 2) $f(x) = 10x^4 + 6x^3 - 1$ 3) $f(x) = (x-1)(x-3)$ 4) $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$
 5) $f(x) = \frac{-4}{3x^5}$ 6) $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 7) $f(x) = \sin x - 2\cos x$
- 72** Déterminer la Primitive F de f sur I vérifiant la condition donnée :
 1) $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$ $I = \mathbb{R}$ $F(1) = 0$
 2) $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$ $I =]0; +\infty[$ $F(1) = 1$.
- 73** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :
 1) $f(x) = 3(3x+1)^4$ 2) $f(x) = 16(4x-1)^3$ 3) $f(x) = (6x-2)(3x^2-2x+3)^5$
 4) $f(x) = (2x+1)(x^2+x-7)$ 5) $f(x) = (2x+1)^4$ 6) $f(x) = \sin x \cos x$
 7) $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$ $f(x) = (1 + \tan^2 x)(1 + \tan x)^5$
- 74** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :
 1) $f(x) = \frac{4}{(4x+1)^2}$ 2) $f(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$ 3) $f(x) = \frac{1}{(4x+3)^2}$ 4) $f(x) = \frac{-1}{(2-x)^6}$
 5) $f(x) = \frac{2}{(4-3x)^2}$ 6) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^5}$ 7) $f(x) = \frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}$ 8) $f(x) = \frac{\cos x}{(\sin x)^2}$
- 75** **Décomposition en élément simple**
 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x+4}{(x+1)^3}$
 1) Déterminer les réels a et b tels que, pour $x \neq -1$, $f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3}$.
 2) En déduire une primitive F de f sur $] -1; +\infty[$.
- 76** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :
 1) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x+2}}$ 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-5x}}$ 3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$
 4) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ 5) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ 6) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$
- 77** On considère la fonction f définie sur $]4; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x^2-3x-4}{x-2}$.
 1) Trouver trois réels a, b, c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.
 2) En déduire une primitive de f sur $]4; +\infty[$.
- 78** Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I proposé :
 1) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ sur $I =]0; \frac{\pi}{2}[$ 2) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $I = [1; +\infty[$
 3) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ sur $I =]1; +\infty[$ 4) $f(x) = \tan x$ sur $I =]\frac{\pi}{2}; \pi]$.

79 Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I proposé :

1) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$

2) $f(x) = \frac{3}{3x-4}$ sur $I =]\frac{4}{3}; +\infty[$

3) $f(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$

4) $f(x) = \frac{7}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0; +\infty[$

5) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ sur $I =]-1; +\infty[$

6) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ sur $I =]-\infty; -1[$

7) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $I = \mathbb{R}$

8) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ sur $I =]-1; 1[$

80 Dans chacun des cas suivant, déterminer la primitive de f qui prend la valeur 1 en 0 :

1) $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$

2) $f(x) = (2x-5)e^{x^2-5x+6}$

3) $f(x) = (1+x)e^{x^2+2x-3}$

4) $f(x) = (1-x)e^{x^2-2x-7}$

81 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f dans chaque cas :

1) $f(x) = \frac{1}{4}e^x$

2) $f(x) = -e^{-x}$

3) $f(x) = e^{2x+3}$

4) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

82 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3}{e^{-x}+1}$.

1) Vérifier que pour tout nombre réel x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = \frac{3e^x}{e^x+1}$

2) Déduisez en la primitive de f qui s'annule en 0.

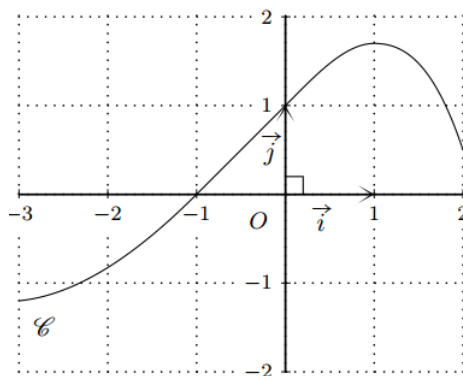
83 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^x$

Déterminer les nombres réels a, b tel que :

F définie sur $\mathbb{R}$ par, $F(x) = (ax+b)e^x$ soit une primitive de f .

84 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère une fonction f continue sur l'intervalle $[-3; 2]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous.



1) Déterminer le sens de variation de toute primitive de f sur $[-3; 2]$.

2) Peut-on dire que toute primitive de f s'annule en -1 ?

85 Dans cet exercice, on considère que la figure de l'exercice précédente est celle d'une primitive F d'une fonction f .

1) Étudier le signe de f sur $[-3; 2]$.

2) Construire la représentation graphique de la primitive G de f qui prend la valeur 0 en -2.

Intégration

86 Calculer les intégrales suivantes :

a) $I = \int_{-1}^3 4x dx$ b) $I = \int_{-2}^6 x^2 dx$ c) $I = \int_2^5 (x^2 + 1) dx$ d) $I = \int_2^3 e^x dx$
 e) $I = \int_0^3 e^{-x} dx$ f) $I = \int_{-1}^3 \frac{2}{x} dx$ g) $I = \int_{-1}^3 (x^3 + 2x) dx$ h) $I = \int_{-1}^3 \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) dx$

87 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

On pose : $I = \int_0^4 f(x) dx$; $J = \int_4^6 f(x) dx$

On suppose que $I = -2$ et $J = 3$.

Calculer : a) $I_1 = \int_0^6 f(x) dx$ b) $I_2 = \int_4^0 f(x) dx$ c) $I_3 = \int_0^4 3f(x) dx$.

88 La réciproque de la propriété « si f est positive sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. » est-elle vraie ? Justifier ou donner un contre-exemple.

89 Calculer les intégrales suivant :

$I_1 = \int_{-3}^2 (x^4 - 5x^2 + 3) dx$; $I_2 = \int_0^1 (x + 3)(x^2 + 6x + 4)^2 dx$; $I_3 = \int_0^1 (x + 1)^n dx$; $I_4 = \int_0^1 (3x + 1)^5 dx$
 $I_5 = \int_{-3}^2 \frac{4x^3 - 3x^2 + 1}{5x^2} dx$; $I_6 = \int_0^2 (2x + 1)^3 dx$; $I_7 = \int_1^2 \frac{3x + 6}{(x^2 + 4x + 3)^4} dx$; $I_8 = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} dx$.

$I_9 = \int_1^2 \frac{3}{(3 - 2x)^4} dx$; $I_{10} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{(\sin x)^2} dx$; $I_{11} = \int_1^2 \frac{(\ln x)^3}{x} dx$; $I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$; $I_{13} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$.

$I_{14} = \int_0^1 \sqrt{x + 3} dx$; $I_{15} = \int_1^2 \frac{1 + \ln x}{x} dx$; $I_{16} = \int_0^\pi \cos x (1 - 3\sin^2 x) dx$; $I_{17} = \int_2^6 \frac{1}{\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}} dx$.

$I_{18} = \int_0^5 (|2x - 5| + |x - 3|) dx$, $I_{19} = \int_{-5}^7 (|x + 3| + |x^2 - 3x + 2|) dx$.

90 En utilisant l'intégration par partie, calculer les intégrales ci-après :

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$; $I_2 = \int_0^1 x^2 e^x dx$; $I_3 = \int_0^1 (-2x^2 + x + 1) e^x dx$; $I_4 = \int_1^2 x \sqrt{2x + 1} dx$;
 $I_5 = \int_0^1 (x + 1) \sqrt{2x + 1} dx$; $I_6 = \int_1^x \ln t dt$; $I_7 = \int_1^2 x \ln x dx$; $I_8 = \int_1^2 x^2 \sqrt{1 - x} dx$; $I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$.

$I_{10} = \int_0^\pi e^x \cos x dx$; $I_{11} = \int_0^1 (x + 2) e^x dx$; $I_{12} = \int_1^2 \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$; $I_{13} = \int_0^\pi x (\sin x)^3 dx$

91 On pose $I = \int_0^1 x^2 e^x dx$; $J = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$. On admet que $I = e - 2$ et $J = \frac{\pi}{4}$. Calculer :

a) $\int_0^1 3x^2 e^x dx$; $\int_0^1 \frac{4}{x^2 + 1} dx$

b) $\int_0^1 \left(2x^2 e^x - \frac{3}{x^2 + 1}\right) dx$.

92 Soit les fonctions les fonctions définies sur $[0; 1]$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$.

1) Comparer f et g

2-a) En déduire sans les calculer la comparaison de $I = \int_0^1 x dx$, $J = \int_0^1 x^3 dx$.

2-b) Interpréter graphiquement le résultat.

3) Retrouver cette comparaison en calculant.

93 Utilisation de la décomposition en éléments simple

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x + 5}{(x + 1)^2}$

1-a) Trouver les réels a et b tels que pour $x \neq -1$, $f(x) = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{(x + 1)^2}$.

1-b) En déduire le calcul de $I = \int_2^3 \frac{2x + 5}{(x + 1)^2} dx$.

2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}$.

2-a) Trouver les réels a, b et c tels que pour $x \neq 0$ $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$.

2-b) En déduire le calcul de $J = \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} dx$.

3) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-3}$.

3-a) Déterminer l'ensemble de définition de h

3-b) Trouver les réels a et b tels que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$, $h(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$.

3-c) En déduire le calcul de $K = \int_0^2 \frac{x+5}{x^2-2x-3} dx$.

94 On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \sin^2 x dx$.

1-a) Calculer $I+J$ et $I-J$.

1-b) En déduire les valeurs de I et J .

2) Trouver les réels a, b et c tels que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.

3) Calculer $A = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x^2+1)} dx$, en déduire en utilisant l'intégration par partie le calcul de :

$$B = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{x(x^2+1)} dx.$$

4) Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

4-a) Calculer I_0 .

4-b) Pour tout entier naturel n , en utilisant une intégration par parties, calculer I_{n+1} en fonction de I_n . En déduire I_1 .

95 Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{3+x} dx$ et $I_0 = \int_0^1 \sqrt{3+x} dx$.

1-a) Calculer I_0 .

1-b) Calculer I_1 en utilisant une intégration par parties.

2) Comparer x^{n+1} et x^n lorsque : $0 \leq x \leq 1$. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

3-a) En procédant par encadrement, établir que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$.

3-b) En déduire la limite de (I_n) .

4-a) Démontrer que :

$$\forall x \in [0; 1], 0 \leq 2 - \sqrt{x+3} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(1-x).$$

4-b) Déduisez du résultat précédent que : $\frac{2}{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{(x+1)(x+2)} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$

4-c) Déterminer la limite de la suite (nI_n) .

96 Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.

1) A l'aide d'une intégration par partie établir une relation entre I_n et I_{n-1} .

2) Calculer I_0 .

3) Calculer I_n .

97 Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n+1} x} dx$.

1-a) Déterminer les réels a et b tels que $\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$.

1-b) En déduire le calcul de I_0 .

2) A l'aide d'une intégration par partie démontrer que :

$$2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$$

98 On se propose de trouver sans les calculer séparément les intégrales :

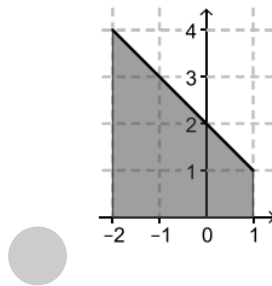
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx; J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx; K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x \cos^2 x dx$$

- 1) Calculer $I - J$ et $I + J + K$.
- 2) Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$
- 3) En déduire la valeur de $I + J - 3K$ et celles de $I; J; K$.

99 On pose $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} dx$; $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2\sin x} dx$ et $I_2 = I_1 + I$.

- 1) Calculer I_2 .
- 2) Calculer I_1 .
- 3) En déduire I .

100 On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-2; 1]$ par $f(x) = -x + 2$.



- 1) Comment s'appelle l'aire de la partie coloriée sur la figure? Comment se note-elle?
- 2) Calculer cette aire par lecture graphique.
- 3) Par lecture graphique déterminer également $\int_0^1 f(x) dx$.

101 Soit f une fonction définie et continue sur $[-3; 5]$ admettant le tableau de variation suivant :

x	-3	1	3	5
f	4	2	6	-3

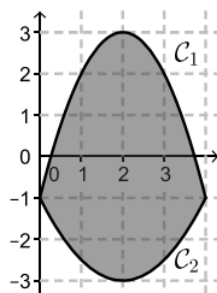
- 1) Déterminer le signe de $\int_{-3}^1 f(x) dx$.
- 2) On donne $f(4) = 0$. Donner le signe de $\int_5^4 f(x) dx$.
- 3) Donner un encadrement de $\int_{-3}^3 f(x) dx$.

102 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1; g(x) = -x^2 + 4x - 1.$$

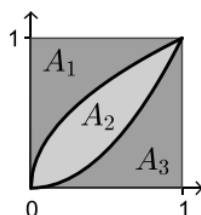
On a représenté ci-après les courbes de f et g sur $[0; 4]$

- 1) Associer chaque fonction à sa courbe.
- 2) Montrer que pour tout réel $x \in [0; 4]$, $g(x) - f(x) \geq 0$.
- 3) Déterminer les points d'intersection de C_1 et C_2
- 4) En déduire l'aire du domaine coloré.



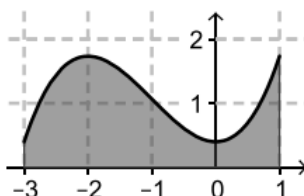
103 On considère les fonctions f , g et h définies sur $[0; 1]$ par :

$f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = 1$. On a représenté f et g sur le graphique ci-après



- 1) Justifier que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
- 2) Exprimer chacune des aires A_1 , A_2 et A_3 à l'aide d'intégrales et des fonctions f , g et h .
- 3) Montrer que la fonction G définie par $G(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de g .
- 4) En déduire que $A_1 = A_2 = A_3$.

104 La courbe C ci-après est la courbe d'une fonction f définie sur $[-3; 1]$.



L'aire sous la courbe est 4,28.

- 1) Exprimer cette aire à l'aide d'une intégrale.
- 2) Déterminer la valeur moyenne de f sur $[-3; 1]$.

105 Problème 1

Certains scientifiques estiment que les futures découvertes de pétrole dans le monde peuvent être **modélisées**, à partir de 2011, grâce à la fonction f définie sur $[11; +\infty[$ par :

$$f(x) = 17280e^{-0,024x}$$

De sorte $f(x)$ représente, en billions de barils (millions de millions de barils), l'estimation de la quantité de pétrole qui sera découverte l'année $2011 + x$.

- 1) Calculer l'estimation du nombre de barils de pétrole à découvrir en 2013 d'après ce modèle.
- 2) Étudier les variations de f sur $[11; +\infty[$.
- 3-a) Déterminer une primitive F de f .
- 3-b) Calculer la valeur exacte de $I = \int_{11}^{21} f(x)dx$, puis donner une valeur arrondie à l'unité.

3-c) En déduire le nombre moyen de barils, en billions, que l'on peut espérer découvrir par an entre les années 2011 et 2021.

106 Problème 2

Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par, $f(x) = xe^{x^2-1}$. On appelle C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

1-a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2-1}$.

1-b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2) On admet que pour tout réel x , $f''(x) = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-1}$.

Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.



Une fonction réelle d'une variable réelle est dite convexe si : quels que soient deux points A et B du graphe C_f de cette fonction f , le segment $[AB]$ est entièrement situé au dessus du graphe **ie** f est convexe sur I lorsque, pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0; 1]$ on a :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Cependant, dans la pratique on utilise le Lemme suivant :

soit f une fonction réelle d'une variable réelle deux fois dérivable sur l'intervalle I et tel que f' et f'' soient continues sur I (**ie** f est de classe C^2 sur I). si $f'' \geq 0$ sur I alors f est convexe sur I .

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x(1 - e^{x^2-1})$

3-a) Justifier que l'inéquation $1 - e^{x^2-1} \geq 0$, a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1; 1]$.

3-b) Déterminer le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[-1; 1]$.

3-c) En remarquant que pour tout réel x , on a l'égalité $h(x) = x - f(x)$, déduire de la question précédente la position relative de la courbe C_f et de la droite D d'équation $y = x$ sur $[0; 1]$.

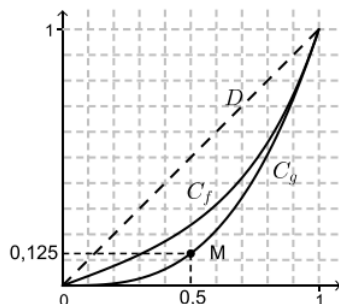
4) Soit $I = \int_0^1 h(x)dx$ et H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}e^{x^2-1}$.

On admet que H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$. Calculer la valeur exacte de I .

Partie B Applications

Sur le graphique suivant, sont tracées sur l'intervalle $[0; 1]$:

- la courbe C_f représentative de la fonction étudiée en partie A ;
- la courbe C_g représentative de la fonction définie par $g(x) = x^3$;
- la droite D d'équation $y = x$.



Les courbes C_f et C_g illustrent ici la répartition des salaires dans deux entreprises F et G

- sur l'axe des abscisses, x représente la proportion des employés ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de l'entreprise ;

• sur l'axe des ordonnées, $f(x)$ et $g(x)$ représentent pour chaque entreprise la proportion de la **masse salariale** (c'est-à-dire la somme de tous les salaires) correspondante.

Par exemple : le point $M(0,5; 0,125)$ est un point appartenant à la courbe C_g . Pour l'entreprise cela se traduit de la façon suivante : si on classe les employés par revenu croissant, le total des salaires de la première moitié (c'est-à-dire des 50% aux revenus les plus faibles) représente 12,5% de la masse salariale.

1) Calculer le pourcentage de la masse salariale détenue par 80% des employés ayant les salaires les plus faibles dans l'entreprise. On donnera une valeur du résultat arrondie à l'unité.

2) On note A_f l'aire du domaine délimité par la droite D , la courbe C_f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. On appelle **indice de Gini** associé à la fonction f , le nombre réel noté I_f et défini par $I_f = 2 \times A_f$.

2-a) Montrer que $I_f = \frac{1}{e}$

2-b) On admet que, plus l'**indice de Gini** est petit, plus la répartition des salaires dans l'entreprise est égalitaire. Déterminer, en justifiant, l'entreprise pour laquelle la distribution des salaires est la plus égalitaire.

107 Problème 3

Une entreprise fabrique et vend aux écoles primaires des lots constitués de cahiers et de stylos.

Partie A : L'entreprise possède une machine qui peut fabriquer au maximum 1500 lots par semaine. Le coût total de fabrication hebdomadaire est modélisé par la fonction g définie sur $[0; 15]$ par $g(x) = 18x + e^{0,5x-1}$.

Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $g(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.

1) Calculer $g'(x)$.

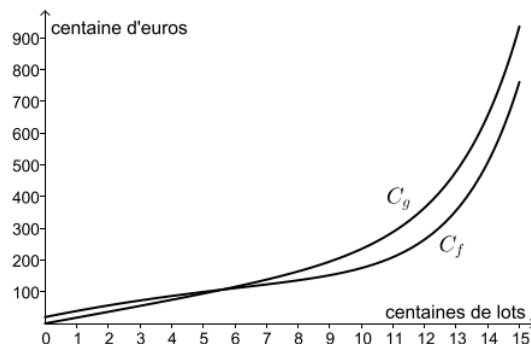
2) Justifier que g est strictement croissante sur $[0; 15]$.

Partie B :

L'entreprise acquiert une nouvelle machine qui permet d'obtenir un coût total de fabrication hebdomadaire modélisé par la fonction f définie sur $[0; 15]$ par $f(x) = e^{0,5x-1} - x^2 + 20x + 20$.

Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $f(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.

On note C_f et C_g les représentations graphiques respectives des fonctions f et g .



1) Par lecture graphique, donner un encadrement d'amplitude 100 du nombre k de lots à partir duquel cette nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production.

2) On cherche à préciser le résultat précédent par le calcul.

2-a) Montrer que la détermination de k conduit à résoudre l'inéquation $-x^2 + 2x + 20 \leq 0$

2-b) Résoudre cette inéquation sur l'intervalle $[0; 15]$.

2-c) En déduire le nombre entier de lots à partir duquel cette nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production.

3) On rappelle que le coût marginal obtenu avec cette nouvelle machine est donné par la fonction f' . Déterminer la valeur moyenne, arrondie à l'euro, du coût marginal lorsqu'on fabrique entre 5 centaines et 8 centaines de lots.

Équations différentielles

108 Intégrer les équations différentielles suivantes :

- 1) $y' - 5y = 0$; $2y' = \frac{-y}{2}$; $3y' + 5y = 0$; $9y^2 = (y')^2$; $(y')^2 - 2yy' = 0$
- 2) $2y'' - 14y' + 20y = 0$; $y'' + 8y' + 16y = 0$; $3y'' + 9y' - 12y = 0$
- 3) $y'' - 4y' + 13y = 0$; $y'' - 2y' + 5y = 0$; $y'' - 8y' + 25y = 0$
- 4) $y'' - 16y = 0$; $y'' + 25y = 0$; $9y'' + 64y = 0$; $9y'' - 36y = 0$ $y'' + \frac{1}{x^2} = 0$
- 5) $y'' + 9y = 0$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.
- 6) $4y'' + 49y = 0$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.
- 7) Trouver la solution f de chacune des équations différentielles, vérifiant les conditions de Cauchy ou condition initiale ci dessous :
 - a) $y'' + y' - 6y = 0$ sachant que $f(0) = 1$ $f'(0) = -8$.
 - b) $y'' + 6y' + 9y = 0$ sachant que $f(0) = 4$ $f'(0) = 1$.
 - c) $y'' - 6y' + 13y = 0$ sachant que $f(0) = 3$ $f'(0) = 5$.
 - d) $y'' - 3y' - 4y = 0$ sachant que $f(0) = 2$ $f'(0) = 4$.
 - e) $4y'' + 4y' + 65y = 0$ sachant que $f(\pi) = 2$ $f'(\pi) = 0$.

109 On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : y'' - 3y' + \frac{5}{2}y = 0; (E_2) : y'' - 3y' + \frac{5}{2}y = e^{3x}$$

1) Intégrer (E_1) .

2-a) Montrer que la fonction h définie par $h(x) = \frac{2}{5}e^{3x}$ est solution de (E_2) .

2-b) On admettra qu'une fonction f est solution de (E_2) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_1) . En déduire les solutions de (E_2) .

3) Déterminer les solutions f (respectivement g) de (E_2) dont la courbe intégrale C_f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passe par $A(0; \frac{2}{5})$ et dont la tangente en A à C_f est parallèle à la droite (L) d'équation $y = 2x + 3$ (respectivement perpendiculaire à la droite (D) d'équation $y = \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3}$).

110 Soit les équations différentielle :

$$(E) : y'' + 4y' + 4y = 4x + 12; (E_1) : y'' + 4y' + 4y = 0.$$

- 1) Trouver les réels a, b tels que la fonction g définie par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E) .
- 2) Pour toute fonction f solution de (E) , montrer que si $f + g$ est solution de (E) alors, g est solution de (E_1) .
- 3) Intégrer sur $\mathbb{R}$ l'équation (E_1) .
- 4) Déterminer la solution f de (E_1) vérifiant $f(0) = 2$ $f'(0) = 0$.
- 5) Étudier la fonction f et tracer sa courbe C_f .

111 Problème 1**Partie A**

On considère l'équation différentielle, $(E_1) : y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$.

- 1) Déterminer une fonction trinôme du second degré g solution de (E_1) .
- 2) On désigne par $(E_2) : y'' - 3y' + 2y = 0$ (**l'équation homogène associée** à (E_1)). Montrer que f est solution de (E_1) si et seulement si $f - g$ est solution de (E_2) .
- 3) Intégrer l'équation (E_2) , puis en déduire les solutions de l'équation différentielle (E_1) sur $\mathbb{R}$.
- 4) Déterminer la solution φ de (E_1) tel que : $\varphi(0) = 0$; $\varphi'(0) = 0$.

Partie B

On considère la fonction numérique φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = -4e^{2x} + 8e^x + 4x^2 - 4$$

- 1-a) Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.
- 1-b) Étudier les variations de φ' . On vérifiera que $\varphi''(x) = -8(2e^x + 1)(e^x - 1)$.
- 1-c) En déduire le signe de $\varphi'(x)$, puis le sens de variation de φ .
- 1-d) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. On pourra remarquer que

$$\varphi(x) = -4e^{2x} \left(1 - \frac{2}{e^x} - \frac{x^2}{e^{2x}} \right) - 4$$

- 2) Dresser le tableau de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 4x^2 - 4$$

- 3) On désigne respectivement par C_g et C_φ les courbes représentatives des fonctions g et φ dans le plan muni d'un repère orthonormé.
- 3-a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) - g(x) = -4e^x(e^x - 2)$
- 3-b) En déduire les positions relatives de C_g et C_φ .
- 3-c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) - g(x)$.
- 4) Tracer dans le même repère les courbes C_g et C_φ .

112 Problème 2**Partie A**

1) Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = \cos x$

1-a) déterminer a, b tels que la fonction définie par $g(x) = a \cos x + b \sin x$ soit solution de (E) .

1-b) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que : $f + g$ est solution de (E) si et seulement si f est solution de $(E_1) : y' + 2y = 0$

1-c) Intégrer (E_1) et en déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de (E)

2) Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(F) : y'' - 2y' + 5y = e^{-2x}$

2-a) Déterminer le nombre réel k tel que la fonction g définie par $g(x) = ke^{-2x}$ soit solution de (F)

2-b) Résoudre (F_1)

Partie B

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = (x - 3)e^{-x}$.

- 1) Résoudre l'équation $(E_1) : y' + 2y = 0$
- 2) Trouver a, b pour que $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit solution de (E) .
- 3) Démontrer que si h solution de (E) alors $h - f$ est solution de (E_1) .
- 4) En déduire toutes les solutions de (E) , puis trouver celle qui passe par le point $A(0; 1)$.

Suites numériques

113 Calculer les 5 premiers termes ainsi que les termes d'indice 5 et 6 des suites suivantes :

- 1) $u_n := 2n^2 - 3n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) $u_n := \frac{1}{n^2 + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) $u_0 := 1$ et $u_{n+1} := u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 4) $u_1 := -2$ et $u_{n+1} := \frac{1}{2}u_n$ un pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

114 Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_n = \frac{2}{3}u_{n-1} + 2$

- a) Calculer les cinq premiers termes de cette suite.
- b) Tracer les droites d'équation $y = \frac{2}{3}x + 2$ et $y = x$.
- c) Représenter graphiquement les termes de la suites (u_n) .
- d) Quel semble être le sens de variation de cette suite ? et sa limite ?

115 Soit (u_n) la suite de terme général $u_n := \frac{2n+1}{n+3}$.

- 1) Calculer u_n pour $0 \leq n \leq 5$.
- 2) Montrer que (u_n) est strictement croissante.
- 3) Montrer que (u_n) est majorée par 2.

116 (U_n) est la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n + 4}{U_n + 3} \end{cases} \quad (\forall n \geq 0)$$

1-a) Calculer U_1 ; U_2 et U_3 .

1-b) Que pouvez vous conjecturer sur le sens de variation de la suite numérique (U_n) .

2) On admet que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 2$.

2-a) Montrer que $U_{n+1} - U_n = \frac{4 - U_n^2}{3 + U_n}$

2-b) En déduire le sens de variation de la suite (U_n) .

117 On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = \frac{1}{2}$ et $w_{n+1} = w_n(1 - w_n)$.

- a) Calculer w_1, w_2 et w_3 .
- b) S'agit-il d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique ?
- c) Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation de cette suite ? Démontrer cette conjecture.

Suites arithmétiques

118 On considère la suite (u_n) définie par : $u_n := \frac{2n+1}{3}$.

- a) Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3 .
- b) Démontrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique.
- c) Calculer $S_{10} := u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

119 Une compagnie minière effectue un forage. Les crédits débloqués sont de 46 800 euros. L'étude du devis montre que le coût du premier mètre de forage est de 100 euros, que celui du second mètre est de 140 euros, celui du troisième mètre 180 euros etc.

Jusqu'à quelle profondeur peut-on creuser en utilisant les crédits alloués ?

120 On considère la suite (x_n) des entiers naturels dont le dernier chiffre est égal à 3 :

$x_0 = 3, x_1 = 13, x_2 = 23$, etc.

a) Quelle est la nature de cette suite ? Exprimer x_n en fonction de n .

b) Calculer la somme de tous les entiers naturels inférieurs à 1000 dont le chiffre des unités est 3.

121 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{7}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - 2u_n}$.

1) Calculer u_1 et u_2 . La suite (u_n) peut-elle être arithmétique ? géométrique ?

2) On définit la suite (v_n) par $v_n := \frac{1}{u_n}$. Calculer v_0, v_1 et v_2 .

3) Montrer que $v_{n+1} - v_n$ est une constante. En déduire que (v_n) est une suite arithmétique, puis donner une expression de v_n en fonction de n .

4) Calculer u_{50} .

122 La suite (d_n) est définie par :
$$\begin{cases} d_0 := 1 \\ d_{n+1} := \sqrt{1 + (d_n)^2} \end{cases}$$

1) Calculer les trois premiers termes de la suite.

2) Vérifier que tous les termes d_n sont positifs.

3) Vérifier que la suite (d_n) n'est ni géométrique ni arithmétique.

4) On pose $u_n := (d_n)^2$. Montrer que la suite (u_n) est arithmétique.

5) En déduire l'expression de d_n en fonction de n .

6) Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $\sqrt{n} \leq d_n \leq n$. En déduire la limite de la suite (d_n) .

Suites géométriques

123 La suite (v_n) est une suite géométrique de raison positive telle que $v_{10} = 384$ et $v_{14} = 6144$.

a) Déterminer la raison q de cette suite et son premier terme v_0 .

b) Calculer $S_7 = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_7$.

124 Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 4 \end{cases}$$

Le plan est muni du repère (O, I, J) .

1) Tracer les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $y = \frac{1}{2}x + 4$ et $y = x$.

2 Construire les 4 premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.

3) Utiliser la construction pour conjecturer le sens de variation de (U_n) .

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $V_n = U_n - 8, \forall n \in \mathbb{N}$.

4) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique.

5) Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n .

6) En déduire la limite de la suite (V_n) puis celle de (U_n) .

125 On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n $U_{n+1} = 0,5U_n + 0,25$.

1) Calculer U_1, U_2 et U_3 .

2) On définit la suite (W_n) par : $W_n = U_n - 0,5$.

2-a) Démontrer que (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2-b) En déduire en fonction de n les expressions de W_n puis de U_n .

3) Préciser le sens de variation des suites (W_n) et (U_n) .

4) On pose $S_n := \sum_{k=0}^n W_k = W_0 + W_1 + \dots + W_n$ Exprimer S_n en fonction de n .

126 Soient a, b et c trois nombres réels.

1) Traduis chacune des expressions suivantes ;

▲ a, b et c sont tous non nuls.

▲ a, b et c sont non tous nuls.

2) On suppose à présent que a, b et c sont non tous nuls.

Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites numériques définies par :

$$\begin{cases} U_0 := 1 \\ U_{n+1} := aU_n + b \end{cases} \quad (\forall n \geq 0) \text{ et } V_n := U_n - c. \quad \forall n \geq 0$$

3) Établir une relation entre a, b et c tel que (V_n) soit une suite géométrique.

4) En déduire un triplet $(a; b; c)$ de nombres entiers relatifs tous non nuls de sorte que (V_n) soit une suite géométrique.

127 Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 := 1 \\ U_{n+1} := \frac{5U_n + 3}{U_n + 3} \end{cases} \quad (\forall n \geq 0)$$

Et soit la suite (V_n) définie par $V_n := \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$.

1) Calculer U_1, U_2 .

2) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3) Exprimer V_n et U_n en fonction de n . quelle est la nature de la suite (U_n)

4) On pose $S_n := V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$. Exprimer S_n en fonction de n et en déduire la nature de la suite (S_n) .

128 On considère deux suites numériques (U_n) et (V_n) définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} U_1 := \frac{1}{3} \\ U_{n+1} := \frac{n+1}{3n} U_n \end{cases} \quad (\forall n \geq 1) \text{ et } V_n := \frac{U_n}{n} \quad (\forall n \geq 1)$$

1) Calculer U_2, U_3 et U_4 .

2) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

3) En déduire les expressions de V_n et U_n en fonction de n .

4) Calculer $S := \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{59049}$

129 On considère la suite numérique $(\pi_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$\pi_1 := 0, 3$; $\pi_2 := 0, 33$; $\pi_3 := 0, 333$; ... ; $\pi_n := 0, 333\dots 3$ (n fois le chiffre 3).

1-a) Calculer $\pi_2 - \pi_1$ et $\pi_3 - \pi_2$.

1-b) Montrer que la suite $(\pi_n)_{n \geq 1}$ est monotone et préciser sa monotonie.

2) Soit $(\delta_n)_{n \geq 1}$ la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} \delta_1 = \pi_1 \\ \delta_n = \pi_n - \pi_{n-1} \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

2-a) Montrer que $(\delta_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique.

2-b) On pose : $\tau_n := \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_n$. Exprimer τ_n en fonction de π_n .

En déduire la limite et la nature de la suite numérique $(\pi_n)_{n \geq 1}$.

130 (le nombre d'or)

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n} \end{cases}$$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x^2 = x + 1$

2) Soient α, β les racines de l'équation (E) tels $(\alpha > \beta)$.

On donne $T_n := \frac{U_n - \alpha}{U_n - \beta}$. Montrer que (T_n) est une suite géométrique à caractériser.

3) Exprimer T_n et U_n en fonction de n .

4) En déduire que (U_n) converge, puis déterminer sa limite l (l est le **nombre d'or**)

Suites arithmétiques et géométriques combinées

131 a) Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Calculer u_1, u_2 et u_{10} . puis $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

b) Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Calculer v_1, v_2 et v_{10} . puis $v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{10}$.

132 a) Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_4 = 35$ et $u_2 = 15$.

Calculer la raison r et le premier terme u_0 .

b) Soit (v_n) une suite géométrique telle que $v_2 = 5$ et $v_4 = 7, 2$.

Calculer $v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4$.

133 Une personne loue une maison à partir du 1^{er} janvier 2000. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Le loyer initial est de 1000 euros et le locataire s'engage à occuper la maison six années complètes.

Contrat 1 : Augmentation annuelle de 10%. On note u_0 le loyer annuel pour 2000, u_n le loyer annuel pour l'année $(2000 + n)$.

a) Calculer u_{n+1} en fonction de u_n .

b) En déduire u_n en fonction de n .

c) Calculer u_5 (arrondi au centième).

d) Calculer la somme payée à l'issue des six années.

Contrat 2 : Augmentation annuelle de 110 euros.

On note v_0 le loyer annuel pour 2000, v_n le loyer annuel pour l'année $(2000 + n)$.

a) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n .

b) En déduire v_n en fonction de n .

c) Calculer v_5 (arrondi au centième).

d) Calculer la somme payée à l'issue des six années.

Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire ?

134 Harpagon place un capital de 10 000 euros au taux annuel de 10% en intérêts simples. Oncle Picsou place aussi 10 000 euros à 10% mais avec intérêts composés et capitalisation annuelle. Soient h_n et p_n les avoirs respectifs d'Arpagon et d'oncle Picsou après n années d'épargne.

a) Calculer h_1, h_2, h_3 et p_1, p_2, p_3 .

b) Montrer que la suite (h_n) est arithmétique. En déduire h_n en fonction de n . Calculer h_{10} .

c) Montrer que la suite (p_n) est géométrique. En déduire p_n en fonction de n . Calculer h_{10} .

d) Comparer les deux systèmes d'épargne.

135 Suites mêlées

On considère les suites mêlées (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = -10, v_0 = 20 \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = 0,7u_n + 0,8v_n \\ v_{n+1} = 0,8u_n + 0,7v_n \end{cases} \quad (n \geq 0)$$

1-a) Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2 .

1-b) Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles arithmétiques ? géométriques ?

2-a) Montrer que la suite (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = u_n + v_n$ est géométrique.

2-b) En déduire le terme général de (a_n) puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

3-a) Montrer que la suite (b_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $b_n = u_n - v_n$ est géométrique.

3-b) En déduire le terme général de (b_n) puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

3-c) Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles convergentes ?

4) Déduire des questions précédentes les termes généraux de (u_n) et (v_n) .

5) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$.



Exercices de Mathématiques et applications fondamentales



Statistique

136 Pour les emplois analogues, plusieurs entreprises hôtelières proposent des salaires x_i . pour chaque salaire x_i le nombre de candidats qui se sont présentés est tels que consignés dans le tableau ci-dessus.

x_i	44000	45000	46000	47000	48000
y_i	10	13	17	19	21

a) Représentez graphiquement cette série par un nuage de points.

b) déterminez une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.

c) Estimez le nombre de candidat qui seraient présentés si on avait proposé le salaire de 50000 F

137 Une firme a relevé dans 8 pays :

X : le nombre de spot publicitaires hebdomadaire pour la promotion du dernier titre de leur chanteur vedette.

Y : le nombre de « singles » vendus.

Elle obtient la série double suivante :

X	5	12	14	16	20	22	25	30
Y	60000	210000	270000	340000	490000	520000	780000	1100000

a) Représentez graphiquement le nuage de points de la série $(X; Y)$

b) Déterminez les coordonnées du point moyen de ce nuage.

c) Calculez la Covariance de X et de Y .

d) Déterminez par la méthode des moindres carrés la droite de régression de y en x et la représenter.

138 Pour sept élèves d'une classe de terminale, on a durant une année, mesuré :

X : le nombre d'heures quotidiennes passées à regarder la télévision.

Y : La moyenne obtenue à l'examen.

On a obtenu :

X	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
Y	17,5	15	12,5	10,8	8,5	4,5	1,5

1) Établir une équation de la droite de régression de y en x .

2) Wifried a regardé la télévision durant 2h45.

Quelle moyenne pouvait-il espérer à l'examen.

139 Une entreprise envisage la fabrication d'un nouveau produit pour lequel une étude a permis d'établir le tableau suivant, où x_i désigne la quantité de produit (en milliers d'unités) qu la clientèle est disposée à payer, et y_i le prix de vente (en milliers de francs) d'une unité :

x_i	1,5	3	5	8	11	12
y_i	120	110	100	90	80	70

Ainsi, pour que la clientèle soit disposée à acheter 5000 unités, le prix de vente doit être fixé à 100000 francs.

1) Représenter le nuage de point associé à cette série statistique : *on prendra 1 cm pour 1 millier d'unités en abscisse et 1 cm pour 10000 francs en ordonnée.*

2) Dans la question suivante le résultat sera donnée à 10^{-2} près.

2-a) Donner une équation de la droite de régression de y en x , obtenue par la méthode des moindres carrés.

2-b) En utilisant ce modèle, quel doit être le prix de vente d'une unité si l'on veut pouvoir vendre un minimum de 6500 unités ?

140 Le prix de vente des terrains à bâtir dans une même commune est donné par le tableau suivant :

x_i = Rang, y_i = Prix du m^2 en milliers de francs.

Année	1990	1995	1997	2000	2005	2007	2010
x_i	0	5	7	10	15	17	20
y_i	58,8	60,9	62,1	67,5	71,7	73	73,8

1) Quelle en pourcentage, l'augmentation du prix du m^2 entre 1990 et 2010 ?

2) Représenter le nuage de point associé à cette série dans un repère orthogonal où 5 cm représente 10 ans en abscisse, 5 cm représente 10000 francs en ordonnées.

3) Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.

4) Écrire une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés.

5) Estimer à 1000000 de francs près le prix d'un terrain de 1500 m^2 en 2013.

141 Un relevé statistique des tailles X (en cm) et des poids Y (en kg) d'un échantillon de 100 élèves a permis de construire le tableau suivant :

$X \backslash Y$	45	50	55	60
155	18	10	2	0
160	3	16	5	1
165	0	5	13	5
170	0	2	6	14

- 1) Donner la distribution marginale de X et la distribution marginale de Y .
- 2) Calculer $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $V(X)$, $V(Y)$, $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$

142 On donne la série double suivante, relative aux voitures selon leur puissance Y et la durée des pneumatiques X (en milliers de Km).

$X \backslash Y$	2	3	4	Total
20	0	8	30	38
25	5	20	7	32
30	25	3	2	30
Total	30	31	39	100

- 1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire
- 2) Un ajustement par la méthode des moindres carrés est-il justifié?

143 L'indice moyen d'un salaire a évolué de la façon suivante :

	1	2	3	4	5	6	7
y_i	165	176	193	202	222	245	253

- a) Représenter cette série statistique par un nuage de points
- b) En utilisant la méthode des moindres carrés, écrire une équation de la droite représentant l'indice en fonction de l'année
- c) A combien pourrait-on prévoir l'indice à l'année numéroté 9 ?

144 On a étudié un échantillon de taille (100) sur lequel ont été mesurés deux caractères x et y , on a observé les résultats suivants :

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 800; \sum_{i=1}^{100} y_i = 1200; \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 7200; \sum_{i=1}^{100} y_i^2 = 16000; \sum_{i=1}^{100} x_i y_i = 10200.$$

- 1) Écrire une équation de la droite de régression linéaire de la variable y sur x .
- 2) Écrire une équation de la droite de régression linéaire de la variable x sur y .

145 A un poste de péage, on compte le nombre de voitures se présentant sur une période de 5 minutes.

Sur 100 observations de 5 minutes, on obtient les résultats suivants :

Nombre de voitures	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'observations	2	8	14	20	19	15	9	6	2	3	1	1

- 1) Construire le tableau des fréquences et le diagramme en bâtons en fréquence de la série du nombre de voitures.
- 2) Calculer la moyenne et l'écart type de cette série.
- 3) Déterminer la médiane.

146 Le tableau suivant donne le nombre d'adhérents fréquentant une salle de sport en 2001 :

Mois x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'adhérents y_i	1100	1160	1220	1370	1620	1550	1600	1500	1790	1940	2060	1980

1) Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal.

(Abscisse 1 cm pour 1 mois; ordonnée 1 cm pour 200 adhérents)

On partage l'ensemble des points du nuage en deux sous-ensemble correspondant chacun au 1^{er} et 2nd semestre.

a) Calculer les coordonnées des points G_1 et G_2 de chacun de ces sous-ensembles (Abscisse arrondies au dixième, ordonnées arrondies à l'unité).

b) Placer les points G_1 et G_2 dans le repère orthogonal.

2) Déterminer une équation de la droite d'ajustement passant par les points G_1 et G_2 (On écrira l'équation sous la forme $y = ax + b$ et on arrondira a et b au centième).

3) En déduire le nombre prévisible d'adhérents en :

a) Janvier 2002

b) Juin 2002.

147 Le Centre Textile de Conjoncture et d'Observation Économique (**CTCOE**) a étudié l'évolution des ventes de vêtements féminins entre 1991 et 2000. Pour des tee-shirt, on obtient les résultats suivants en milliers de pièces.

Années x_i	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Ventes y_i	100	102	124	147	197	226	250	305	334	330

1) Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal.

2) On partage des points du nuage en deux sous-ensemble de même effectif.

a) Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 de chacun de ces sous-ensembles.

b) Placer les points G_1 et G_2 dans le repère précédent.

3) Déterminer une équation de la droite d'ajustement passant par les points G_1 et G_2 .

4) On suppose que les ventes évoluent de la même façon qu'en 2001. Déterminer graphique le nombre, en milliers, de tee-shirts susceptibles d'être vendus en 2001. (Faire apparaître les traits permettant la lecture du résultat).

148 La société « LACREME » indique le nombre de crèmes vendues chaque mois pendant une année :

Mois x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de crèmes y_i	90	105	105	117	119	120	120	130	140	135	140	155

1) Construis le nuage de points associé à cette série dans un repère orthogonal.

2) On partage l'ensemble des points du nuage en deux sous-ensembles de même effectifs.

a) Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 de chacun de ces sous-ensembles.

b) Placer les points G_1 et G_2 dans le repère précédent.

3) Déterminer une équation de la droite d'ajustement passant par les points G_1 et G_2 .

4) On suppose que la tendance observée se prolonge pendant quelques mois.

a) A l'aide du graphique, donner une estimation du nombre de crèmes qui devraient être vendues au mois de février de l'année suivante.

b) Retrouver le résultat par calcul en admettant que la droite (G_1G_2) a pour équation : $y = 4,7x + 93$.

149 Le tableau suivant précise le nombre d'établissement de « soins de corps » s'ouvrant de 1999 à 2005.

Années	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Nombre d'établissements « soin corps »	170	190	207	200	180	250	225

1) Représenter par un nuage de points les établissements « soins de corps ».

(abscisse : 2 cm pour 1 an ; ordonnée 1 cm pour 25 établissements).

2) Déterminer les coordonnées du point moyen G .

3) Déterminer une équation de la droite de tendance passant par le point Moyen G et de coefficient directeur 7.

4) Tracer la droite de tendance passant par le point moyen G et par le point $P(2005; 225)$

5) déterminer graphiquement et par calcul la prévision du nombre d'établissements de soins corps s'ouvrant pour 2006.

150 Dans le tableau ci-dessous, on donne la pluviométrie moyenne mensuelle sur une région au cours des 12 derniers mois.

Mois	Janv	Fev	Mar	Avr	Mai	Juin	Juil	Aout	Sept	Oct	Nov	Dec
Pluviométrie (mm)	102	82	85	69	75	82	81	68	80	97	97	124

1) Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal en prenant comme unité :

✎ En abscisse : 1 cm pour un mois (numéroter les mois de 1 à 12).

✎ En ordonnée : 1 cm pour 10 mm de pluie

2) On se propose de tracer la droite d'ajustement de ce nuage de points.

a) Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 correspondant respectivement au premier et second semestre.

b) Tracer la droite d'ajustement passant par G_1 et G_2 .

3) déterminer l'équation de la droite d'ajustement.

151 Considérons la série statistique double suivante, donnant dans les mêmes conditions de charge et de temps la consommation d'essence y_i en litre d'une voiture de modèle déterminé suivant la vitesse x_i en $Km.h^{-1}$.

x_i en $Km.h^{-1}$	80	85	90	95	100	105	110
y_i en litres	4,8	5,4	6,2	6,6	7	7,8	8,2

1-a) Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal.

1-b) Calculer les coordonnées du point moyen G , puis le placer dans le repère.

2-a) Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y peut-on envisager un ajustement affine entre x et y ?

2-b) Déterminer une équation de la droite de régression de (D) de Y en X par la méthode des moindres carrés.

2-c) Tracer la droite (D) dans le même repère.

152 On se propose d'étudier l'influence de la température sur la durée d'incubation des œufs de grenouilles. On choisit 6 échantillons de 200 oeufs chacun. Le nombre x d'éclosions au 22-ème jour est le suivant :

 t_i = température d'incubation en degrés Celsius.

 x_i = nombre d'éclosions à la température t_i .

t_i	6	6,4	6,8	7,2	7,6	8
x_i	131	144	157	170	190	189

1) Construis le nuage des données et tracer à l'œil nu une droite (D) qui a l'air de bien approcher ce nuage

2) Calculer le coefficient de corrélation observé et écrire une équation de la droite de régression de x en t . Étudier la qualité de l'ajustement.

3) Calculer le nombre d'éclosions qu'on peut prévoir pour un échantillon 200 oeufs au 22-ème jour pour une température de 7,5 degré.

153 Les performances réalisées par 10 coureurs à pied sur un semi-marathon et un marathon (les temps sont données en minutes) sont données dans le tableau suivant :

 x_i = Temps au semi-marathon.

 y_i = Temps au marathon.

N° coureur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	68	70	76	80	90	96	104	110	125	138
y_i	145	150	170	185	200	220	250	285	320	345

1) Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal.

2) Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de la série des temps (x_i) réalisés au semi-marathon, puis de la série des temps (y_i) réalisés au marathon.

3) Calculer la covariance de x et y , et le coefficient de corrélation linéaire.

4) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. représenter cette droite sur le graphique de la question 1).

5) Estimer le temps mis sur un marathon par un coureur ayant réalisé 1h56 au semi-marathon.

154 Le tableau suivant donne l'âge X et la tension artérielle Y de 10 personnes.

X	58	40	74	34	65	49	53	51	36	40
Y	16,5	13,1	17,2	11,6	15,5	15,1	14,2	14,4	13,0	14,2

1) Construire le nuage de points de cette série statistique.

2) Déterminer la moyenne et la variance de chacune des variables X et Y .

3) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r des variables X et Y . Un ajustement linéaire

entre X et Y est-il justifié ?

4) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

5) Estimer la tension artérielle d'une personne âgée de 45 ans.

155 une banque a enregistré les nombres de retraits opérés dans un guichet automatique pendant une journée. le tableau suivant donne les montants (en milliers de francs) des retraits et leurs effectifs.

☞ x_i = Montant en milliers de francs.

☞ y_i = Effectifs de retrait.

x_i	40	35	30	25	20	15	10	5
y_i	19	20	17	11	13	6	7	2

1-a) Construire, dans un repère orthogonal le nuage des points représentant cette série statistique.

1-b) Quelle particularité peut-on remarquer au sujet de la forme du nuage ?

1-c) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Placer G .

2) On partage l'ensemble des points du nuage en deux parties. La première partie (P_1) correspond aux retraits inférieurs ou égaux à 25000 et la deuxième partie (P_2) correspond aux autres retraits.

2-a) Déterminer les coordonnées des points moyen G_1 et G_2 respectifs des parties (P_1) et (P_2). Placer G_1 et G_2 dans le même repère.

2-b) Donner une équation cartésienne de la droite (G_1G_2).

2-c) Vérifier que la droite (G_1G_2) passe par G .

3) Quel nombre de retrait de 50000 peut-on prévoir en une journée ?.



Problèmes

156 Problème 1

On s'intéresse à l'évolution du parc automobile d'un pays.

Années	Rang de l'année : x_i	Nombre de Voiture : y_i (en millions)
2008	1	11,8
2009	5	14,6
2010	11	18,4
2011	16	24,7
2012	21	26,7
2013	27	27,8
2014	28	25,5

1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$, associé à la série statistique double (x_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthogonal, où une année est représentée par 0,5 cm sur l'axe des abscisse ; un million de voitures est représenté par 1 cm sur l'axe des ordonnées (*en commençant la graduation à 10 millions*).

2-a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire à 10^{-3} près par défaut et justifier un ajustement

linéaire.

2-b) Par la méthode des moindres carrés, déterminer une équation de la droite de régression de y en x . On donnera les coefficients à 10^{-1} près par excès.

2-c) En supposant que ce modèle mathématique reste valable jusqu'en 2017, faire une estimation du nombre de voiture dans ce pays en 2017.

3) On considère un ajustement logarithmique par la courbe (C) de la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = a + b \ln x$. On impose à la courbe de passer par les points $A(1; 0,5)$ et $B(25; 25,5)$.

3-a) En déduire les valeurs exactes de a et b puis la valeur approchée de b à 10^{-1} près par défaut.

3-b) En déduire l'expression de $f(x)$ en prenant pour b la valeur approchée précédente.

3-c) Étudier les variations de f et tracer (C) sur $[1; 35]$ dans le graphique précédent.

3-d) Se servir de ce nouvel ajustement pour estimer le nombre de voiture dans ce pays.

157 Problème 2

Lors d'une épidémie, on a relevé, à intervalles de temps réguliers, le nombre de cas déclarés. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant.

Rang du relevé x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre de cas déclarés : y_i	600	690	794	913	1045	1205

1-a) On pose $Y_i = \log(y_i)$. Compléter après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3} .

x_i	0	1	2	3	4	5
$Y_i = \log(y_i)$	...	...	...	...	...	...

1-b) Construire le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthonormal. Prendre comme unité graphique : 2 cm

2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$. On note $(\bar{x}, \bar{y})$ les coordonnées du point G .

Donner la valeur exacte de $\bar{x}$ et la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $\bar{y}$.

3-a) On désigne par Δ la droite d'équation : $Y = 0,06x + 2,78$.

3-b) Le point de coordonnées $(2, 5; 2, 93)$ appartient-il à la droite Δ ?

4) On admet que la droite (Δ) constitue un bon ajustement affine du nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$. Déterminer une estimation du nombre de cas déclarés lors du sixième relevé.



Exercices de géométrie

Géométrie plane et géométrie de l'espace

158 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

On considère les droites (D) et (D') d'équation cartésienne respective : $y = x - 1$, $2x - 3y + 5 = 0$.

1) Justifier que les droites (D) et (D') sont sécantes, puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection L .

2) Montrer que l'ensemble des points équidistants de (D) et (D') est la réunion de deux droites perpendiculaires en L , dont on donnera les équations cartésiennes respectives.

159 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(Γ) est l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que : $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$.

1-a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (Γ) .

1-b) Déterminer une équation paramétrique de (Γ) .

2) Déterminer la position relative de la droite $(\Delta) : x - y + 1 = 0$ par rapport à l'ensemble (Γ) .

3) $(\mathcal{C})$ désigne le cercle du plan, de centre $\Omega_1(1; 0)$ et de rayon $r_1 = \sqrt{2}$.

Déterminer la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Γ) .

160 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1). Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C})$, ainsi qu'une représentation paramétrique.

1-a) $(\mathcal{C})$ a pour centre le point $\Omega(3; 4)$ et de rayon $r = 3\text{cm}$.

1-b) $(\mathcal{C})$ a pour diamètre $[AB]$, avec $A(-5; -1)$ et $B(2; -3)$.

1-c) $(\mathcal{C})$ passe par le point $A(2; -1)$ et a pour centre le point $I(-1; 2)$.

2-a) Montrer que l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 11 = 0$$

est un cercle $(\mathcal{C}_1)$ dont on déterminera les coordonnées du centre et le rayon.

2-b) Vérifie que le point $H(4; -1)$ appartient au cercle $(\mathcal{C}_1)$

2-c) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D_3) tangente en H au cercle $(\mathcal{C}_1)$.

2-d) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de $(\mathcal{C}_1)$ avec la droite $(L_3) : 2x + y - 3 = 0$.

3) On donne le cercle $(\mathcal{C}_2)$ d'équation : $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

3-a) Déterminer le centre et le rayon du cercle $(\mathcal{C}_2)$.

3-b) Donner une représentation paramétrique du cercle $(\mathcal{C}_2)$.

3-c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_2)$ avec l'axe des abscisses.

Écrire les équations cartésiennes des droites tangentes à $(\mathcal{C}_2)$ en chacun de ces points.

161 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) On considère l'ensemble $(\mathcal{C}_3)$ des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation :

$$x^2 + y^2 - 2(3m + 1)x - 2(1 - m)y + m + 3 = 0$$

où m est un paramètre réel.

1-a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E) : 10m^2 + 3m - 1 = 0$, où m est l'inconnu.

(b) En déduire le signe du polynôme $P(m) = 10m^2 + 3m - 1 = 0$ suivant les valeurs de m .

2-a) Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles l'équation de $\mathcal{C}_3$ est une équation cartésienne d'un cercle? Préciser dans ces cas ses éléments caractéristiques.

(b) Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles l'ensemble $\mathcal{C}_3$ est un singleton?

(c) Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles $(\mathcal{C}_3)$ est l'ensemble vide?

162 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

1). Déterminer une équation cartésienne du cercle (C_1) de centre $G(2; 1)$ et de rayon $r = \sqrt{5}$.

2) Donner une représentation paramétrique du cercle (C_1) .

3) On considère les points $E(7; 6)$ et $F(-3; 1)$.

(a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (EF) .

(b) Démontrer que la droite (EF) est tangente au cercle (C_1) en un point H dont on déterminera les coordonnées.

4-a) Vérifie que le point $N(1; -1)$ appartient au cercle (C_1) .

- b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (L_1) tangente au cercle (C_1) en N .
- c) Vérifier que le point F appartient à la droite (L_1) .
- 5-a) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C_2) de diamètre $[GE]$.
- 5-b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des cercles (C_1) et (C_2) .
- 5-c) En déduire une équation cartésienne de la droite (L_2) passant par E et tangente au cercle (C_1) , autre que la droite (EF) .
- 5-d) Déterminer les coordonnées du point d'intersection C des droites (L_1) et (L_2) .
- 5-e) Prouver que EFC est un triangle rectangle en C .
- 5-f) Déterminer le diamètre d , le rayon r et les coordonnées du centre J du cercle (C_3) circonscrit au triangle rectangle EFC .
- 5-g) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C_3) .
- 5-h) Donner une représentation paramétrique du cercle (C_3) .



163 On considère dans le plan P rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité de longueur est 6 cm, les points M_θ de coordonnées $(x; y)$ définies par :

$$\begin{cases} x = \frac{\cos\theta}{2 + \cos\theta} \\ y = \frac{\sin\theta}{2 + \cos\theta} \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in [0; 2\pi]$$

- 1) Calculer en fonction de θ la distance OM_θ et la distance de M_θ à la droite (D) d'équation $x = 1$.
- 2) En déduire que, pour tout réel $\theta \in [0; 2\pi]$, les points M_θ appartiennent à une même ellipse E dont on précisera l'excentricité le grand axe ainsi que les coordonnées des quatre sommets et des points d'intersection avec l'axe des ordonnées.
- 3) Tracer l'ellipse E .

164 A) On considère les équations suivantes, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) $x^2 + 4y^2 = 16$ 2) $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$ 3) $4x^2 - y^2 = 16$ 4) $4x - y^2 = 0$

Reconnaitre dans chaque cas la courbe (C) correspondante ; préciser ses éléments caractéristiques : axe focal ; foyers axe de symétrie, sommets, asymptotes éventuelles, et tracer (C) .

B) Déterminer une équation cartésienne réduite des coniques suivantes :

- ellipse de foyers $F(2, 0)$ et $F'(-2, 0)$, et de directrices $D : x = 3$ et $x = -3$.
- hyperbole de foyers $F(1, 0)$ et $F'(-1, 0)$ et d'excentricité 2.
- hyperbole d'asymptotes $D : y = \frac{1}{2}x$ et $D' : y = -\frac{1}{2}x$ de sommet $A\left(\frac{3}{2}; 0\right)$; $A'\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$

165 Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité de longueur est 2 cm :

1) Soient $\mathcal{H}$ et $\mathbb{E}$ les courbes définies respectivement par : $9x^2 - 36x - 4y^2 = 0$ et $9x^2 - 36x + 4y^2 = 0$.

a) Déterminer les équations réduites de $\mathcal{H}$ et $\mathbb{E}$.

b) En déduire la nature de chacune de ces courbes.

c) Préciser, pour chaque courbe, quand c'est possible, l'axe focal, les sommets, les asymptotes et l'excentricité.

2) Soit $\mathcal{T}$ la courbe d'équation $4y^2 = |9x^2 - 36x|$

Montrer que $\mathcal{T}$ est la réunion de deux coniques, puis tracer $\mathcal{T}$.

166 Le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, Γ est l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) tels que :

$$(2 - m)x^2 + m^2y^2 + 2(2 - m)x - (2 - m)(m^2 - 1) = 0$$

1) Déterminer les valeurs de m pour que Γ_m existe.

2) Dans la suite de l'exercice Γ_m existe.

2-a) Pour quelles valeurs de m Γ_m est-il un cercle ?

2-b) On suppose par la suite que Γ_m n'est pas un cercle. Donner l'équation réduite de Γ_m .

3) On suppose que Γ_m a pour équation réduite : $\frac{(x+1)^2}{m^2} + \frac{y^2}{2-m} = 1$.

3-a) Pour quelles valeurs de m , Γ_m est-elle :

i) Une parabole ? ii) Un ellipse ? iii) Une hyperbole ?

3-b) On pose $m = 3$. Déterminer pour Γ_3 :

i) L'excentricité ; ii) Les coordonnées de ses foyers F et F' ; iii) Construire Γ_3 et ses asymptotes.

167 Élimination du terme rectangle de l'équation d'une conique

On se propose d'étudier les courbes Γ représentées dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par une équation du type

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

où A, B, C, D, E, F , sont des réels fixés, non tous nuls (ie $(A, B, C, D, E, F) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$).



Si $B \neq 0$, il existe un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ tel que l'équation de Γ dans ce repère ne comporte pas de terme en XY (terme rectangle). Soit $\hat{\theta} := \widehat{(\vec{i}; \vec{u})} = \widehat{(\vec{j}; \vec{v})}$.

Pour tout point M du plan on désigne par $(x; y)$ et $(X; Y)$ respectivement ses coordonnées dans les

repères $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $(O; \vec{u}, \vec{v})$ respectivement. ie $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \overrightarrow{OM} = X\vec{u} + Y\vec{v} \end{cases}$

1) Démontrer que $\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases}$

2) Démontrer que le coefficient de XY est $(C - A)\sin 2\theta + 2B\cos 2\theta$.

3) Discuter suivant que $C = A$ ou $C \neq A$, les valeurs de θ pour lesquelles le terme XY disparaît.



On peut donc toujours supposer en générale que $B = 0$.

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des courbes suivantes :

$$(\Gamma_1) \ 5x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 4y + 8 = 0; \quad (\Gamma_2) \ 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 6x + 4y + 8 = 0$$

$$(\Gamma_3) \ 2x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + 6x + 4y + 8 = 0; \quad (\Gamma_4) \ 7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy = 64$$

Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques, car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer.

Francis Bacon.

14.2 Les 10 Anciens Baccalauréat

