Apprendre à raisonner

MATHS

3e

Mathieu Kieffer

ellipses

Apprendre à raisonner

MATHS

3e

Mathieu Kieffer

Professeur agrégé de mathématiques
au collège Hubert Curien (Cornimont)

Préface d'Éric Degorce

ellipses

Dans la même série :

Apprendre à raisonner - Mathématiques - Sixième, 216 p., 2022

Apprendre à raisonner - Mathématiques - Cinquième, 168 p., 2023

Apprendre à raisonner - Mathématiques - Quatrième, 208 p., 2023

ISBN 9782340-082311

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

www.editions-ellipses.fr

« Il n'y a de progrès, pour nul écolier au monde, ni en ce qu'il entend, ni en ce qu'il voit, mais seulement en ce qu'il fait. »

Émile-Auguste Chartier dit « Alain »

« Les mathématiques sont à la source d'un savoir profond et éternel, qui plonge au cœur de toute matière et nous unit par-delà les continents, les cultures et les siècles. Je rêve que chacun de nous puisse contempler et apprécier la beauté magique et l'harmonie délicate de ces idées, de ces formules et de ces équations, et que cet émerveillement donne plus de sens à notre amour pour le monde et pour autrui. »

Edward Frenkel

Préface

À quoi servent les mathématiques ? À quoi ça sert d'apprendre les maths ?

En réponse à ces questions récurrentes, certains font valoir que les mathématiques que l'on apprend en classe nous sont directement utiles dans la vie de tous les jours. Les mêmes recommandent de ne présenter les mathématiques qu'à travers des problèmes « issus de la vie réelle », et de ne surtout pas trop verser dans l'abstraction. Alors, voici une situation concrète : un fermier, ayant recueilli 63 œufs, souhaite les disposer dans des boites de douze. Combien de boites pourra-t-il remplir ?

Est-ce vraiment là un problème réel ? S'agit-il vraiment de résoudre une situation concrète ? La vérité nous oblige à avouer que le sort du fermier nous indiffère – indifférence sûrement réciproque, d'ailleurs - et que nous n'avons mis en scène cette histoire de boites de douze œufs que dans le but de faire ressortir une notion mathématique essentielle : la division euclidienne. Ainsi, nous n'avons pas utilisé les mathématiques pour résoudre une situation réelle, celle du fermier. Non, c'est l'inverse. Nous nous sommes appuyés sur une histoire ayant une apparence réelle pour en extraire (abstraire) un fait mathématique.

Car les mathématiques ont ceci de spécifique, qu'elles visent à l'étude d'objets qui sont de pures constructions théoriques, sans aucune existence réelle. Un nombre premier, une paire d'évènements incompatibles ou un polygone régulier n'ont aucune existence effective. Ce sont de pures abstractions. Et, comme il est difficilement tenable de demeurer longtemps dans l'abstraction, nous sommes en permanence conduits à invoquer, à évoquer, à convoquer des situations réelles, non pas tant dans le but de les résoudre, que dans le but de faire avancer notre questionnement mathématique. Quiconque fait des mathématiques est amené à les projeter dans le réel, et, en retour à voir, à travers une image, un mouvement, une situation, une sensation, un fait mathématique surgir du réel.

Ce sont des problèmes véritablement réels (problèmes d'astronomie, de commerce...) – pas des problèmes faussement réels comme celui du fermier - qui ont conduit l'être humain à faire des mathématiques. En retour les trouvailles des mathématiciens ont beaucoup œuvré à la transformation du véritable réel. Tout cela est indubitable. Il n'en reste pas moins que, lorsque l'on pratique *ordinairement* les mathématiques au collège ou au lycée, on demeure souvent éloigné du véritable réel. Le seul réel auquel on a accès, c'est celui du fermier, c'est-à-dire celui des images, des symboles, des contes. Il était une fois un roi qui, voulant récompenser son plus fidèle serviteur, voulut lui offrir un échiquier dont la première case comportait un grain de riz, la seconde, 2 grains de riz, la troisième 4 grains de riz, puis 8 puis 16, puis… Tel est le réel que l'on côtoie la plupart du temps lorsque l'on étudie les mathématiques en classe.

Dès lors, on peut raisonnablement douter de l'affirmation selon laquelle les mathématiques vues en classe sont utiles dans le véritable réel de tous les jours. En vérité, elles ne le sont que très marginalement. Peut-être serait-il alors plus honnête de concéder que les mathématiques étudiées en classe ne servent tout simplement *à rien*, au sens où elles ne nous permettent pas d'agir de façon directe et immédiate sur le véritable réel. Elles ne servent à rien, donc. Mais, après tout, dans la même veine, à quoi sert la musique ? Et la poésie, et la littérature, et la compréhension des rites religieux antiques et… ? À rien également !

À rien, certes, mais cela permet de réfléchir, de développer notre vie intérieure, d'imaginer, de faire des comparaisons, d'établir des liens entre des situations d'apparences dissemblables, de désemmêler le réel, et, même parfois, d'éprouver un certain contentement, celui que l'on ressent devant le beau, le juste, l'harmonieux. Car oui, on peut passer de bons moments à faire des mathématiques, à observer, contempler, mais aussi agir, perturber, transformer, perdre un équilibre, et en regagner un autre, plus abouti.

Oui, faire des mathématiques, c'est-à-dire, évoluer dans un univers purement abstrait, peut être agréable, captivant, et bénéfique. Mais, attention, cela est parfois dur, long, aride. Que nul n'entre ici, (dans la pièce des mathématiques), s'il n'est disposé à produire des efforts, c'est-à-dire à accepter la situation où l'on cherche sans trouver, où l'on doit creuser encore, où l'on croit avoir enfin aperçu la lumière, mais c'est une fausse piste, et où finalement, après mille péripéties, on trouve un filon dont on pressent qu'il nous conduira loin.

L'ouvrage de Mathieu Kieffer, *Apprendre à raisonner – Maths – 3e* s'inscrit, tout comme les trois précédents, dans cet esprit : faire entrer le lecteur dans la pièce des mathématiques. On y entre simplement, paisiblement. La porte est ouverte à tous. Cela commence doucement. Il était une fois… C'est-à-dire que l'on commence par la définition. On fait la connaissance des différents objets, de leurs noms, de leurs notations. Puis, on s'intéresse à leurs propriétés, aux relations qu'ils entretiennent les uns avec les autres. Puis, pas à pas, on s'élève. On se questionne. Et, en quelques pages, on atteint les cimes, avec vue sur des cimes encore plus hautes. C'est là tout le mérite de cet ouvrage : pour chacun des quinze chapitres, on atteint en quelques pages rédigées avec des mots simples, d'une précision cristalline, de très belles choses. En mathématiques, il suffit de trois fois rien, d'un énoncé subtil de quelques lignes, pour concevoir des problèmes beaux, intéressants, profonds.

L'ouvrage se rattache au programme de la classe de troisième, mais, et c'est là encore un autre de ses mérites, il ne s'y enferme pas. Il s'appuie sur le programme, mais il l'intègre et le dépasse. Il le dépasse, non pas par élitisme, mais par cohérence intellectuelle. Car, de même que pour aller de Perpignan à Marseille, le plus court chemin (à vol d'oiseau) est de quitter le territoire français et de couper par le Golfe du Lion, eh bien, de même, il est parfois plus court, plus efficace intellectuellement, de quitter temporairement le programme, de faire du « hors-piste » pour rejoindre telle ou telle notion mathématique. Comment par exemple, parler d'homothéties sans parler de vecteurs, ou de racine carrée sans valeur absolue ? Comment, de même, ne pas relier une implication à une situation d'inclusion, et, plus généralement, au nom de quoi s'interdirait-on d'évoquer les fondements logiques et de faire référence aux structures alors même que tout enseignant sait que cela est de nature à consolider la compréhension de l'élève. Mais, que le lecteur se rassure, ces quelques virées en dehors du programme se font en douceur, et ne sont là que pour apporter davantage de sens, et mieux faire ressortir les notions centrales du programme de troisième.

Le titre de l'ouvrage met en avant l'action de raisonner. Raisonner, signifie faire travailler sa raison, son jugement, ce qui implique de réfléchir, d'imaginer, d'élaborer. Le raisonnement est le *cœur* - au sens où il est le centre, mais aussi le moteur - de l'activité mathématique. En ce sens, cet ouvrage mérite son titre. Le raisonnement y est le cœur. On raisonne aussi bien dans le chapitre sur les nombres que dans celui sur les fonctions affines. Un autre immense mérite de cet ouvrage est d'accorder une belle et juste place à la géométrie pure, permettant au lecteur de pouvoir raisonner au milieu de droites, de cercles, de triangles, mais aussi de plans et de sphères.

Raisonner, c'est chercher du sens, de la cohérence, du lien. Une autre qualité de cet ouvrage est de tisser des ponts entre les différents chapitres. Attention cependant, les chapitres sont bien distincts, bien identifiés. Nous ne sommes pas dans une sorte de bouillie transversale. Non, tout est bien séparé. Et c'est précisément cette netteté, cette clarté, qui permet ensuite de croiser les notions. On fait ainsi de l'arithmétique dans le chapitre sur les équations, de la géométrie dans le chapitre sur les ensembles de nombres, du calcul dans celui sur la trigonométrie. C'est cela les mathématiques, cela est vivant, tout s'entrecroise, et, ce faisant, s'éclaire d'un jour nouveau.

La richesse de cet ouvrage est telle, que les personnes qui tireront profit à sa lecture sont nombreuses. Il y a naturellement les élèves. Ceux qui aiment les mathématiques bien-sûr, mais, plus généralement, tous ceux qui souhaitent être suffisamment armés pour intégrer le lycée. La précision mathématique exemplaire de cet ouvrage, la richesse des exercices proposés, des démonstrations, font que ce livre constitue une aide de premier choix pour les candidats aux concours de recrutement, qu'il s'agisse du CRPE et, surtout du CAPES (interne comme externe). Les professeurs de mathématiques qui liront cet ouvrage pourront, quant à eux, retourner à la source du savoir, savoir qui fonde leur autorité de professeur. Enfin et surtout, faire des mathématiques, c'est-à-dire s'accorder du temps pour soi, pour réfléchir, élaborer, creuser, n'est jamais du temps perdu. C'est sans doute la principale raison pour laquelle il faut lire ce bon et beau livre.

Éric DEGORCE, IA-IPR de mathématiques dans l'académie de Créteil.

Avant-propos

Ce livre est issu du cours dispensé quotidiennement à mes élèves de Troisième. Il aspire à donner des bases minimales mais solides à tout élève disposé à les recevoir en reprenant les thèmes essentiels évoqués au sein du programme officiel. Les objets mathématiques utilisés y sont toujours présentés via une définition claire, précise et adaptée au jeune âge du lectorat. Les quelques théorèmes et autres résultats mathématiques y sont démontrés dans la mesure du possible avec plus ou moins de détails. Les propositions laissées sans démonstration sont admises en raison de l'inexistence de preuve accessible à ce niveau ; une référence aux cours des classes ultérieures est alors requise. Chacun des quinze chapitres qui composent cet ouvrage se termine par une section proposant quelques exercices se voulant originaux et hétéroclites. Si ces exercices bénéficient tous d'un corrigé, ils ne porteront toutefois leurs fruits que si l'élève accepte de sécher plusieurs heures voire plusieurs jours sans aller y jeter un œil. Stylo en main, ce dernier doit en effet se frotter à cette réalité mathématique parfois impitoyable mais si belle lorsque l'on parvient à l'entrevoir par sa propre expérience, ses propres efforts.

Table des matières

1

Nombres réels

1.1 Petite synthèse des nombres déjà rencontrés

Depuis la classe de Sixième, nous avons rencontré plusieurs ensembles de nombres :

1. L'ensemble des NOMBRES ENTIERS NATURELS $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$.
2. L'ensemble des NOMBRES ENTIERS RELATIFS $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} = \{0; 1; -1; 2; -2; 3; -3; \ldots\}$.
3. L'ensemble des NOMBRES DÉCIMAUX $\mathbb{D}$. Il s'agit des nombres pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction où le numérateur est un nombre nombre entier relatif et où le dénominateur est une puissance de 10 (cf. cours de Quatrième). Autrement dit, il s'agit des nombres dont la représentation décimale comporte un nombre fini de chiffres à droite de la virgule.
   Exemple. $-3,675 \in \mathbb{D}$ car $-3,675 = \frac{-3\,675}{10^3} = \frac{-3\,675}{1\,000}$.
4. L'ensemble des NOMBRES RATIONNELS $\mathbb{Q}$. Il s'agit des nombres pouvant s'écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers relatifs.

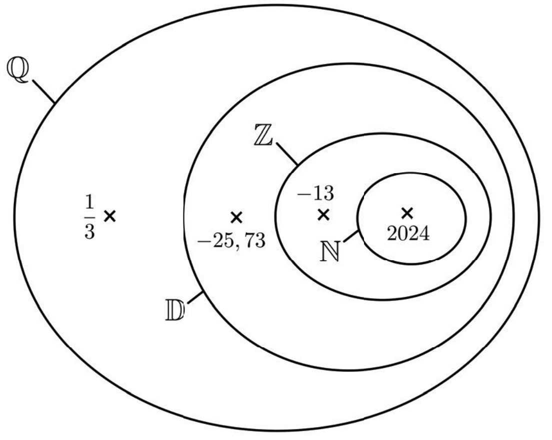
Proposition 1. *Ces ensembles de nombres sont des matriochkas (i.e. des poupées russes). Plus formellement,* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Démonstration. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$: cette inclusion est évidente d'après les définitions de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$: soit $a \in \mathbb{Z}$, alors $a = \frac{10a}{10}$ où $10a$ est nombre entier relatif. Donc, par définition, a est également un nombre décimal.
$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$: soit $a \in \mathbb{D}$, alors a possède un nombre fini n de chiffres derrière la virgule et peut donc se réécrire sous la forme suivante :

$$a = \frac{a \times \overbrace{10 \times \ldots \times 10}^{n \text{ facteurs}}}{\underbrace{10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}}}$$

Ainsi, par définition, a est un nombre rationnel. $\square$

Illustration :



Remarque. $2\,024 \in \mathbb{N}$ donc $2\,024 \in \mathbb{Z}$, $2\,024 \in \mathbb{D}$ et $2\,024 \in \mathbb{Q}$.

1.2 Focus sur les nombres rationnels

Exemple. Voyons deux exemples :

1. Le nombre rationnel $\frac{317}{125}$ est-il décimal ?
   On remarque que $125 \times 8 = 1\,000$. D'où $\frac{317}{125} = \frac{317\times 8}{125\times 8} = \frac{2\,536}{1\,000} = 2,536$. Ainsi, par définition, $\frac{317}{125}$ est un nombre décimal.
2. Le nombre rationnel $\frac{73}{22}$ est-il décimal ?
   Divisons 73 par 22, on obtient $3,31818181818\ldots$ Le quotient n'est pas exact, donc $\frac{73}{22}$ n'est pas décimal. En revanche, on remarque qu'aussi loin que l'on poursuive la division, le nombre « 18 » se répète à partir de la deuxième décimale et cela, indéfiniment. On dit alors que $3,31818181818\ldots$ est le développement décimal illimité périodique de $\frac{73}{22}$. De plus, $3,3$ est appelé la PARTIE IRRÉGULIÈRE du développement, et 18, la PARTIE PÉRIODIQUE du développement.

Remarque. Plus généralement, considérons un nombre rationnel représenté par la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ puis effectuons la division de a par b :

1. Si la division se termine, alors $\frac{a}{b}$ est un nombre décimal appelé fraction décimale.
2. Sinon, la division se poursuit indéfiniment. Toutefois, les restes successifs étant tous inférieurs à b, il en résulte qu'après au plus b divisions, nous retrouverons nécessairement un reste déjà obtenu. Ainsi, à partir de ce rang, les chiffres du quotient réapparaîtront dans le même ordre et, par conséquent, le développement décimal sera périodique. D'où le théorème suivant :

Théorème 2. *Le développement décimal d'un nombre rationnel est soit fini, soit illimité et périodique à partir d'un certain rang.*

Remarque. La question de la réciproque se pose naturellement : tout nombre dont le développement décimal illimité est périodique à partir d'un certain rang définit-il un nombre rationnel ?

Exemple. Étudions deux exemples :

1. Considérons $8,3864439439439439439439439\ldots$ et supposons que ce développement décimal définisse un nombre rationnel représenté par la fraction irréductible $\frac{a}{b}$. Alors :

$$10\,000 \times \frac{a}{b} = 83\,864,439439439439\ldots$$

d'où :

$$\left(10\,000 \times \frac{a}{b}\right) - 83\,864 = 0,439439439439\ldots$$

D'après le cours de Quatrième, $\left(10\,000 \times \frac{a}{b}\right) - 83\,864$ est une fraction. Notons-la $\frac{x}{y}$. On a alors :

$$1\,000 \times \frac{x}{y} - 439 = 0,439439439439\ldots$$

autrement dit :

$$1\,000 \times \frac{x}{y} - 439 = \frac{x}{y}$$

soit :

$$999 \times \frac{x}{y} = 439$$

et donc :

$$\frac{x}{y} = \frac{439}{999}$$

Finalement :

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{10\,000}\left(83\,864 + \frac{x}{y}\right) = \frac{3\,351\,223}{399\,600}$$

Par conséquent, $8,3864439439439439439439439\ldots$ est un nombre rationnel.

2. Considérons $4,289999999999\ldots$ et supposons que ce développement décimal définisse un nombre rationnel représenté par la fraction irréductible $\frac{a}{b}$. Alors :

$$100 \times \frac{a}{b} = 428,9999999\ldots$$

d'où :

$$\left(100 \times \frac{a}{b}\right) - 428 = 0,999999999\ldots$$

D'après le cours de Quatrième, $\left(100 \times \frac{a}{b}\right) - 428$ est une fraction. Notons-la $\frac{x}{y}$. Alors :

$$10 \times \frac{x}{y} - 9 = 0,99999999\ldots$$

autrement dit :

$$10 \times \frac{x}{y} - 9 = \frac{x}{y}$$

soit :

$$9 \times \frac{x}{y} = 9$$

et donc :

$$\frac{x}{y} = 1$$

Finalement :

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{100}\left(428 + \frac{x}{y}\right) = \frac{429}{100}$$

Par conséquent, $4,289999999999\ldots$ est un nombre rationnel. $4,28999999\ldots$ est ainsi appelé un développement décimal illimité IMPROPRE du nombre rationnel $4,29$. Ce dernier est quant à lui appelé le développement décimal limité PROPRE.

Remarque. Plus généralement, on admet le théorème suivant :

Théorème 3. *Étant donné un nombre rationnel.*

1. *S'il est décimal, alors il admet deux développements décimaux :*
   (a) *Un premier, limité, qualifié de propre ;*
   (b) *Un second, illimité avec une partie périodique valant « 9 », qualifié d'impropre.*
2. *S'il n'est pas décimal, il admet un unique développement décimal illimité, périodique, avec une période différente de « 9 ».*

   Réciproquement :
   (a) *À tout développement décimal qui est, soit limité, soit illimité avec une période de « 9 », correspond un unique nombre décimal.*
   (b) *À tout développement décimal illimité périodique, de période différente de « 9 », correspond un unique nombre rationnel non décimal.*

Démonstration. Le théorème est admis mais l'étude des deux exemples précédents nous donne une justification satisfaisante à notre niveau. □

1.3 Les nombres irrationnels

Définition 4. Un nombre est dit irrationnel s'il n'est pas rationnel. Autrement dit, un nombre est irrationnel s'il ne peut pas s'écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers relatifs.

Remarque. Nous pouvons effectuer deux remarques :

1. D'après le théorème 3, il est équivalent de dire qu'un nombre irrationnel est un nombre dont le développement décimal (s'il existe) est ILLIMITÉ ET NON PÉRIODIQUE.
2. Il est aisé d'imaginer un développement décimal illimité non périodique. Par exemple, le nombre $0,1234567891011121314151617\ldots$, appelé constante de Champernowne [1], admet un développement décimal illimité non périodique par construction.

1. David Gawen Champernowne est un mathématicien anglais né en 1912 et mort en 2000.

Exemple. Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = 1$. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 1^2 + 1^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

d'où :

$$BC = \sqrt{2} \text{ car } BC \geqslant 0$$

Proposition 5. *$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Plus formellement, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Alors il existe deux nombres entiers relatifs a et b, avec b non nul, tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $\frac{a}{b}$ fraction irréductible. Par définition de la racine carrée, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$, soit $\frac{a^2}{b^2} = 2$ et donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi 2 divise a^2. Si a était impair, alors a^2 le serait aussi. Or a^2 est pair. Donc a est également pair. Autrement dit, 2 divise a. Il existe donc un nombre entier relatif p tel que $a = 2p$. Mais alors $a^2 = (2p)^2 = 4p^2$. D'où $4p^2 = 2b^2$ et par suite $2p^2 = b^2$. On en déduit que 2 divise b^2 et donc b (même raisonnement que précédemment). Ainsi, a et b sont tous les deux pairs, ce qui contredit l'irréductibilité de la fraction $\frac{a}{b}$. Par conséquent, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. □

Remarque. Nous pouvons déterminer une valeur décimale approchée de $\sqrt{2}$:

1. $1^2 = 1$, $2^2 = 4$ et $1 \leqslant 2 \leqslant 4$ donc $1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 2$.
2. $1,4^2 = 1,96$, $1,5^2 = 2,25$ et $1,96 \leqslant 2 \leqslant 2,25$ donc $1,4 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,5$.
3. $1,41^2 = 1,9881$, $1,42^2 = 2,0164$ et $1,9881 \leqslant 2 \leqslant 2,0164$ donc $1,41 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,42$
4. $1,414^2 = 1,999396$, $1,415^2 = 2,002225$ et $1,999396 \leqslant 2 \leqslant 2,002225$ donc $1,414 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,415$

Ce processus d'approximation décimale pourrait se poursuivre indéfiniment. Donc $\sqrt{2}$ admet un développement décimal. Or, d'après la proposition 5, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Par conséquent, en vertu du théorème 3, le développement décimal de $\sqrt{2}$ ne peut être qu'illimité et non périodique.

Proposition 6. *Tout nombre irrationnel admet un développement décimal illimité non périodique.*

Démonstration. Soit x un nombre irrationnel. On admet l'existence d'un développement décimal pour x. D'après le théorème 3, si ce développement décimal est limité ou illimité et périodique, alors x est rationnel. Donc le développement décimal de x est nécessairement illimité et non périodique. □

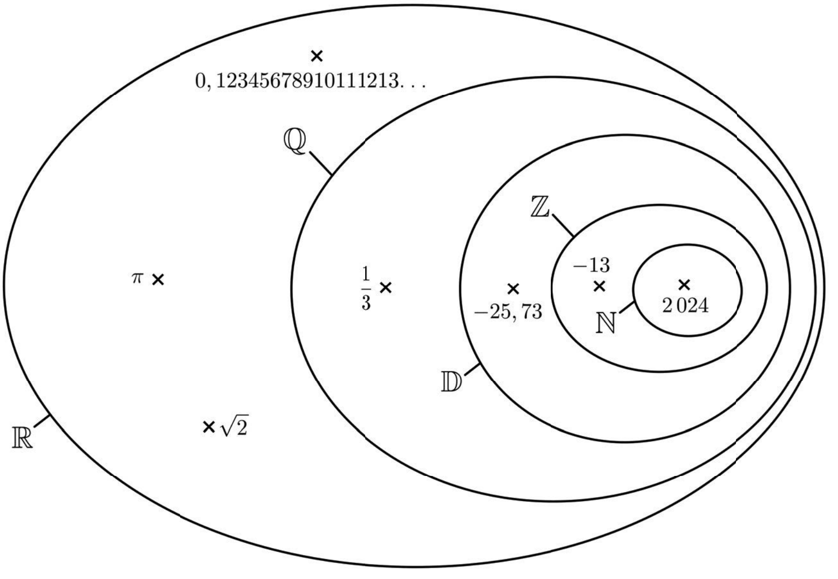
Remarque. Il existe d'autres nombres irrationnels très célèbres comme le nombre π, rapport entre la circonférence et le diamètre d'un cercle, ou encore le nombre d'or que nous rencontrerons en exercice.

1.4 Les nombres réels

Définition 7. On appelle nombre réel tout nombre admettant un développement décimal quelconque (limité, illimité périodique ou non) c'est-à-dire une suite de chiffres en nombre fini à gauche de la virgule et en nombre quelconque à droite de celle-ci, précédée du signe $+$ ou $-$. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Remarque. Par définition de $\mathbb{R}$, on a naturellement $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Illustration :



Proposition 8. *Pour tous nombres réels a, b et c, on a :*

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ *(associativité de l'addition).*
2. $a+b = b+a$ *(commutativité de l'addition).*
3. $a+0 = 0+a = a$ *(0 est élément neutre pour l'addition).*
4. $a+(-a) = (-a)+a = 0$ *(existence d'un opposé).*

Démonstration. La proposition est admise. L'idée est d'étendre aux nombres réels les propriétés de l'addition des nombres rationnels. □

Proposition 9. *Pour tous nombres réels a, b et c, on a :*

1. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ *(associativité de la multiplication).*
2. $a \times b = b \times a$ *(commutativité de la multiplication).*
3. $a \times 1 = 1 \times a = a$ *(1 est élément neutre pour la multiplication).*
4. $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ *($\times$est distributive par rapport à l'addition).*
5. *Si $a \neq 0$, alors $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$ (existence d'un inverse).*

Démonstration. La proposition est admise. L'idée est d'étendre aux nombres réels les propriétés de la multiplication des nombres rationnels. □

Proposition 10. *Pour tous nombres réels a, b et c, on a :*

1. $a = b$ *si, et seulement si,* $a + c = b + c$.
2. *Si* $c \neq 0$, *alors* $a = b$ *si, et seulement si,* $a \times c = b \times c$.

Démonstration. La proposition est admise. L'idée est d'étendre aux nombres réels la compatibilité de l'égalité avec l'addition et la multiplication. □

Proposition 11. *Pour tous nombres réels a et b, on a l'équivalence suivante :*

$$a \times b = 0 \textit{ si, et seulement si, } a = 0 \textit{ ou } b = 0$$

On dit que l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est intègre.

Démonstration. $\Rightarrow$: admise.
$\Leftarrow$: découle du fait que 0 est absorbant pour la multiplication. □

Remarque. Cette proposition permet de résoudre toute équation de la forme $A \times B = 0$, appelée équation produit nul et étudiée au chapitre 8. En effet, d'après la proposition 11, l'égalité $A \times B = 0$ est équivalente à $A = 0$ ou $B = 0$. De la sorte, dans l'optique de résoudre une telle équation, il peut être pertinent de factoriser l'un des deux membres et d'annuler l'autre.

1.5 Exercices

Exercice 1

Déterminer la nature des nombres suivants :

1. $A = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$
2. $B = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$
3. $C = 0,125^{-\frac{2}{3}}$
4. $D = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$
5. $E = \sqrt{90 + \frac{1}{4}} - \left(91 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

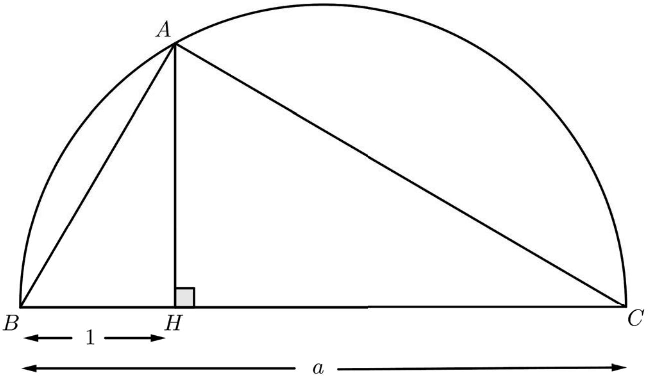
Exercice 2

Dans chaque cellule, insérer une croix si le nombre appartient à l'ensemble :

Nombres \ Ensembles	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-4					
10^{-4}					
$-8 \times 0,625$					
$\sqrt{2}$					
$-\frac{2}{3}$					
π					
$\frac{\sqrt{225}}{3}$					
10^7					
$\frac{0,121}{0,19}$					
$\sqrt{4}$					
$-0,3333$					
$\frac{19}{16}$					
$-\frac{54}{18}$					

Exercice 3

On considère un demi-cercle de diamètre $[BC]$ et un point A appartenant à ce demi-cercle tel que le projeté orthogonal H du point A sur la droite (BC) vérifie $BH = 1$. Par ailleurs, on pose $a := BC$.



1. Démontrer que $AB = \sqrt{a}$.
2. Construire un segment dont la longueur est égale au nombre d'or, $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

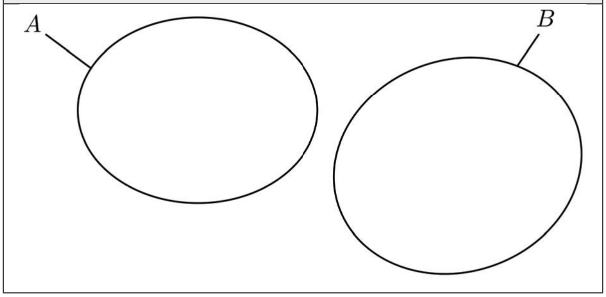
3. Vérifier que $\varphi^2 = \varphi + 1$.
4. Démontrer que $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$.
5. Démontrer que $\varphi^3 = 2\varphi + 1$.

Exercice 4

Étant donné deux ensembles, trois configurations sont possibles :

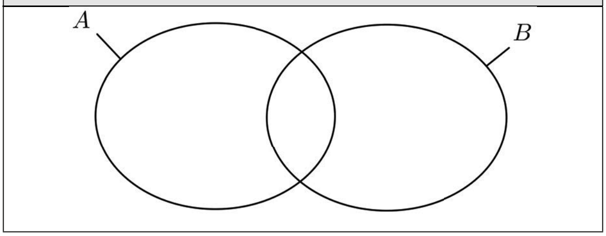
Configuration 1

A et B sont disjoints



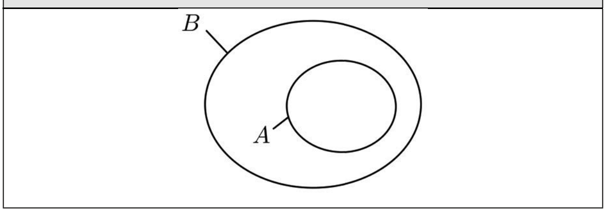
Configuration 2

A et B ont une intersection non vide



Configuration 3

A est inclus dans B



Pour chaque paire d'ensembles ci-dessous, donner la configuration ensembliste associée :

Ensemble A	Ensemble B	Configuration
Nombres entiers naturels multiples de 4	Nombres entiers naturels pairs	
Nombres entiers naturels multiples de 5	Nombres entiers naturels multiples de 7	
Nombres entiers naturels impairs	Nombres entiers naturels multiples de 6	
Nombres entiers naturels multiples de 10	Nombres entiers naturels multiples de 5	
Nombres réels supérieurs à $7,05$	Nombres réels inférieurs à $7,31$	
Nombres réels inférieurs à $42,09$	Nombres réels supérieurs à $\frac{1\,263}{2}$	
Nombres réels inférieurs à $\sqrt{2}$	Nombres réels supérieurs à $1,4$	
Nombres entiers inférieurs à $-\frac{15}{2}$	Nombres réels inférieurs à -10^2	
Nombres entiers naturels supérieurs à π	Nombres entiers naturels supérieurs à 3	
Nombres entiers inférieurs à $(-5)^{-3}$	Nombres réels inférieurs à $-\frac{1}{4} \div 0,25$	

Exercice 5

Calculer les expressions suivantes :

$$3^2 + 2$$

$$33^2 + 22$$

$$333^2 + 222$$

$$3\,333^2 + 2\,222$$

$$33\,333^2 + 22\,222$$

Que remarquez-vous ? Prouvez-le !

1.6 Corrigés

Exercice 1

1. Développons l'expression algébrique $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 &= \sqrt{2}^2+2\times\cancel{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\\ &= 2+2+\frac{1}{2}\\ &= 4,5\end{aligned}$$

Donc $A=\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\in\mathbb{D}$.

2. Développons l'expression algébrique $\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 &= \sqrt{3}^2-2\times\cancel{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\\ &= 3-2+\frac{1}{3}\\ &= 1+\frac{1}{3}\\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Donc $B=\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\in\mathbb{Q}$.

3. Calculons $0,125^{-\frac{2}{3}}$:

$$\begin{aligned}0,125^{-\frac{2}{3}} &= \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\\ &= \left(\frac{1}{2^3}\right)^{-\frac{2}{3}}\\ &= \left(2^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}\\ &= 2^{-3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}\\ &= 2^2\\ &= 4\end{aligned}$$

Donc $C=0,125^{-\frac{2}{3}}\in\mathbb{N}$.

CORRIGÉS

4. Élevons l'expression D au carré :

$$\begin{aligned}
D^2 &= \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}\right) \\
&= \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2 - 2 \times \sqrt{3-2\sqrt{2}} \times \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2 \\
&= 3+2\sqrt{2} - 2\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} + 3 - 2\sqrt{2} \\
&= 6 - 2\sqrt{3^2 + \cancel{6\sqrt{2}} - \cancel{6\sqrt{2}} - (2\sqrt{2})^2} \\
&= 6 - 2\sqrt{9-8} \\
&= 6 - 2\sqrt{1} \\
&= 6 - 2 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Or $D \geqslant 0$ pour des raisons évidentes. Donc $D = 2$ et par conséquent, $D \in \mathbb{N}$.

5. On a :

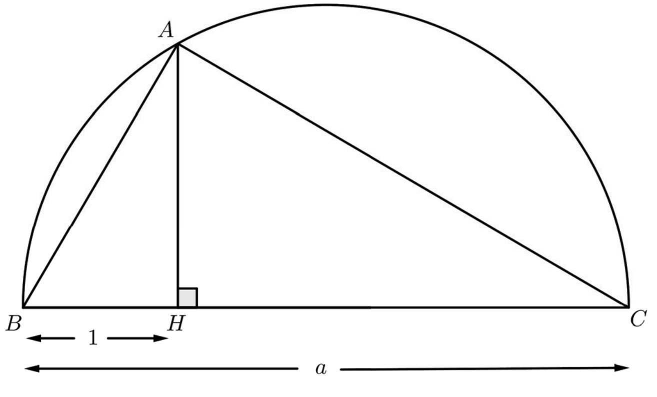
$$\begin{aligned}
E &= \sqrt{90 + \frac{1}{4}} - \left(91 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \sqrt{\frac{361}{4}} - \left(\frac{729}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{\sqrt{361}}{\sqrt{4}} - \frac{(9^3)^{\frac{1}{3}}}{(2^3)^{\frac{1}{3}}} \\
&= \frac{19}{2} - \frac{9}{2} \\
&= 5
\end{aligned}$$

Donc $E = \sqrt{90 + \frac{1}{4}} - \left(91 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Nombres \ Ensembles	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-4		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
10^{-4}			$\times$	$\times$	$\times$
$-8 \times 0,625$		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$\sqrt{2}$					$\times$
$-\frac{2}{3}$				$\times$	$\times$
π					$\times$
$\frac{\sqrt{225}}{3}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
10^7	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$\frac{0,121}{0,19}$				$\times$	$\times$
$\sqrt{4}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$-0,3333$			$\times$	$\times$	$\times$
$\frac{19}{16}$			$\times$	$\times$	$\times$
$-\frac{54}{18}$		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

Exercice 3



1. Dans le triangle AHB rectangle en H, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = BH^2 + AH^2$$

soit :

$$AB^2 = 1 + AH^2$$

CORRIGÉS

d'où :

$$AH^2 = AB^2 - 1 \quad (1)$$

Dans le triangle AHC rectangle en H, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

soit :

$$AC^2 = AH^2 + (a-1)^2$$

d'où :

$$AH^2 = AC^2 - (a-1)^2 \quad (2)$$

Des égalités (1) et (2), on déduit :

$$AB^2 - 1 = AC^2 - (a-1)^2 \quad (3)$$

Or, d'après le cours de Quatrième, le triangle BAC est rectangle en A. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

soit :

$$a^2 = AB^2 + AC^2$$

d'où :

$$AC^2 = a^2 - AB^2 \quad (4)$$

À présent, en injectant (4) dans (3), on obtient :

$$AB^2 - 1 = a^2 - AB^2 - (a-1)^2$$

d'où :

$$2AB^2 = 1 + a^2 - (a^2 - 2a + 1)$$

puis :

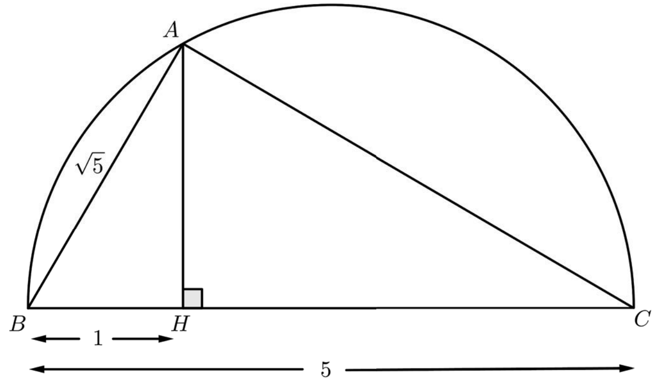
$$2AB^2 = \cancel{1} + \cancel{a^2} - \cancel{a^2} + 2a - \cancel{1}$$

et enfin :

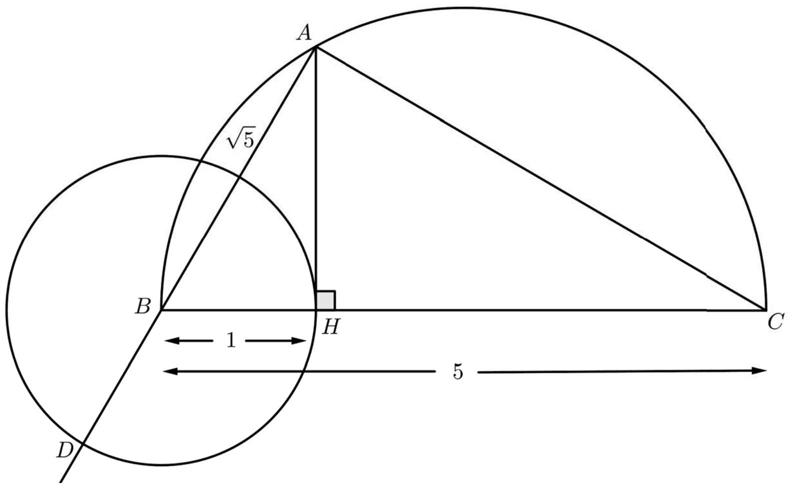
$$AB^2 = a$$

Finalement, AB étant positif en tant que longueur, on a nécessairement $AB = \sqrt{a}$.

2. Commençons par construire un segment dont la longueur est égale à $\sqrt{5}$. D'après la première question, la longueur AB sur la figure ci-dessous est égale à $\sqrt{5}$:

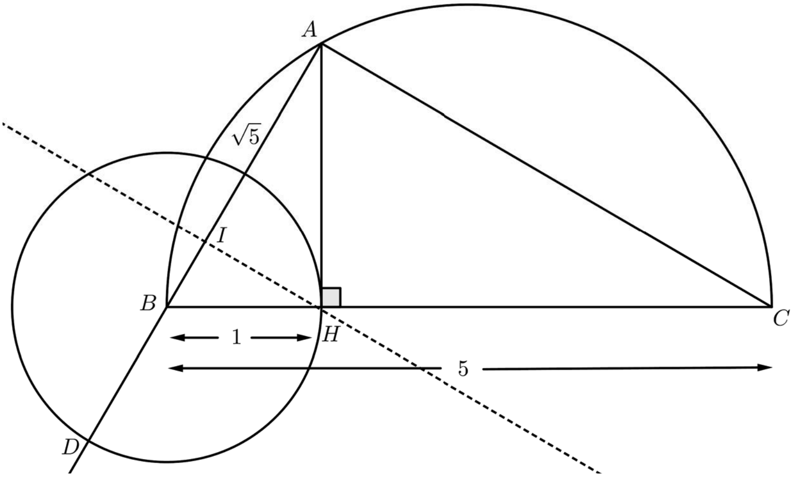


À présent, il suffit d'adjoindre un segment de longueur 1 au segment $[AB]$ afin d'obtenir un segment de longueur $1+\sqrt{5}$. Pour cela, traçons le cercle de centre B et passant par H, il coupe la demi-droite $[AB)$ en un point D. Nous avons alors $AD = 1+\sqrt{5}$:



Diviser cette longueur par 2 peut aisément s'effectuer en traçant la médiatrice du segment $[AD]$, elle coupe ce dernier en un point I et nous avons alors $AI = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

CORRIGÉS



3. D'une part $\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\times\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
   D'autre part $\varphi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
   Donc $\varphi^2 = \varphi + 1$.
4. D'après 3, $\varphi^2 = \varphi + 1$. Or $\varphi \neq 0$. Donc, d'après le cours de Quatrième, on peut diviser les deux membres de l'égalité par φ . D'où :

$$\frac{\varphi^{\cancel{2}}}{\cancel{\varphi}} = \frac{\varphi + 1}{\varphi}$$

   soit :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

   et donc :

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

5. D'après 3, $\varphi^2 = \varphi + 1$. Donc, d'après le cours de Quatrième, on peut multiplier les deux membres de l'égalité par φ. D'où :

$$\varphi^3 = \underbrace{\varphi^2} + \varphi$$

   Or $\varphi^2 = \varphi + 1$, on peut donc remplacer l'occurrence φ^2 par $2\varphi + 1$ et l'on obtient :

$$\varphi^3 = 2\varphi + 1$$

Exercice 4

Ensemble A	Ensemble B	Configuration
Nombres entiers naturels multiples de 4	Nombres entiers naturels pairs	3
Nombres entiers naturels multiples de 5	Nombres entiers naturels multiples de 7	2
Nombres entiers naturels impairs	Nombres entiers naturels multiples de 6	1
Nombres entiers naturels multiples de 10	Nombres entiers naturels multiples de 5	3
Nombres réels supérieurs à $7,05$	Nombres réels inférieurs à $7,31$	2
Nombres réels inférieurs à $42,09$	Nombres réels supérieurs à $\frac{1\,263}{2}$	1
Nombres réels inférieurs à $\sqrt{2}$	Nombres réels supérieurs à $1,4$	2
Nombres entiers inférieurs à $-\frac{15}{2}$	Nombres réels inférieurs à -10^2	2
Nombres entiers naturels supérieurs à π	Nombres entiers naturels supérieurs à 3	3
Nombres entiers inférieurs à $(-5)^{-3}$	Nombres réels inférieurs à $-\frac{1}{4} \div 0,25$	3

Exercice 5

$$3^2 + 2 = 11$$

$$33^2 + 22 = 1\,111$$

$$333^2 + 222 = 111\,111$$

$$3\,333^2 + 2\,222 = 11\,111\,111$$

$$33\,333^2 + 22\,222 = 1\,111\,111\,111$$

Conjecture : il semblerait que, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante soit vraie :

$$\underbrace{33\ldots3}_{n \text{ fois}}{}^2 + \underbrace{22\ldots2}_{n \text{ fois}} = \underbrace{11\ldots1}_{2n \text{ fois}}$$

CORRIGÉS

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
\underbrace{33\ldots3}_{n\text{ fois}}{}^2 + \underbrace{22\ldots2}_{n\text{ fois}} &= (3 \times \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ fois}})^2 + 2 \times \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ fois}} \\
&= 9 \times (\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ fois}})^2 + 2 \times \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ fois}} \\
&= \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ fois}}(9 \times \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ fois}} + 2) \\
&= \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ fois}}(\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ fois}} + 1 + 1) \\
&= \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ fois}}(1\,\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ fois}} + 1) \\
&= \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ fois}}\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ fois}} + \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ fois}} \\
&= \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ fois}}\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ fois}} \\
&= \underbrace{11\ldots1}_{2n\text{ fois}}
\end{aligned}$$

2

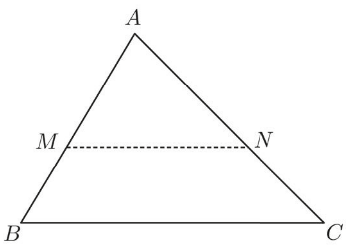
Théorème de Thalès

2.1 Le théorème de Thalès

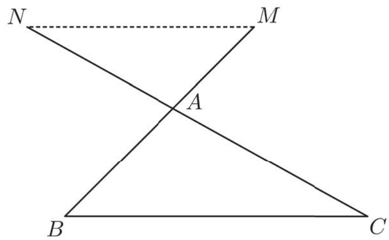
Théorème 12. *(Théorème de Thalès) Soit ABC un triangle. Soit M un point appartenant à la droite (AB). Soit N un point appartenant à la droite (AC). Si la droite (MN) est parallèle à la droite (BC), alors* $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Illustration : nous pouvons essentiellement distinguer deux configurations dites de Thalès :

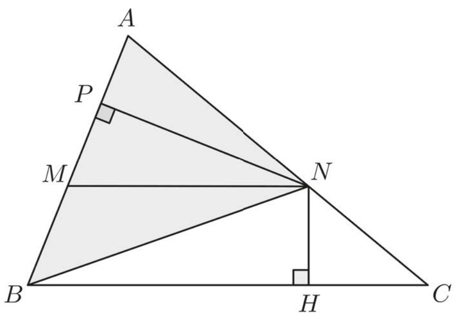
Configuration « classique »

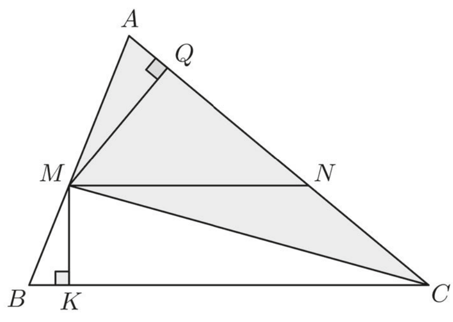


Configuration « papillon »



Démonstration. Premier cas : si $M \in [AB)$ et $N \in [AC)$.
Démontrons tout d'abord que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.





D'une part :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AM \times \frac{PN}{2}}{AB \times \frac{PN}{2}} = \frac{\mathscr{A}(AMN)}{\mathscr{A}(ABN)}$$

D'autre part :

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AN \times \frac{MQ}{2}}{AC \times \frac{MQ}{2}} = \frac{\mathscr{A}(AMN)}{\mathscr{A}(ACM)}$$

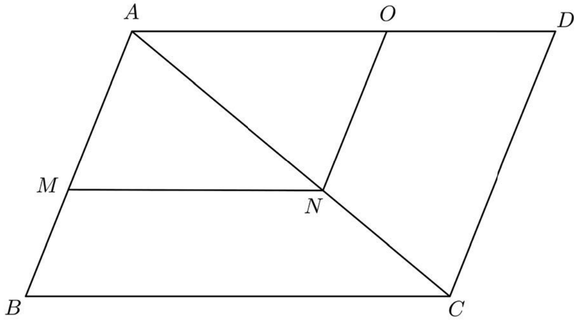
De plus :

$$\mathscr{A}(BNC) = \frac{BC \times NH}{2} = \frac{BC \times MK}{2} = \mathscr{A}(BMC)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABN) &= \mathscr{A}(ABC) - \mathscr{A}(BNC)\\ &= \mathscr{A}(ABC) - \mathscr{A}(BMC)\\ &= \mathscr{A}(ACM)\end{aligned}$$

Par conséquent, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.
À présent, démontrons que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. Traçons la droite parallèle à la droite (BC) passant par A puis la droite parallèle à la droite (AB) passant par C. Ces deux dernières sont sécantes en un point, désignons-le par la lettre D. Enfin, traçons la droite parallèle à la droite (CD) passant par le point N, elle coupe la droite (AD) en un point, désignons-le par O.



D'après ce qui précède, nous avons d'une part :

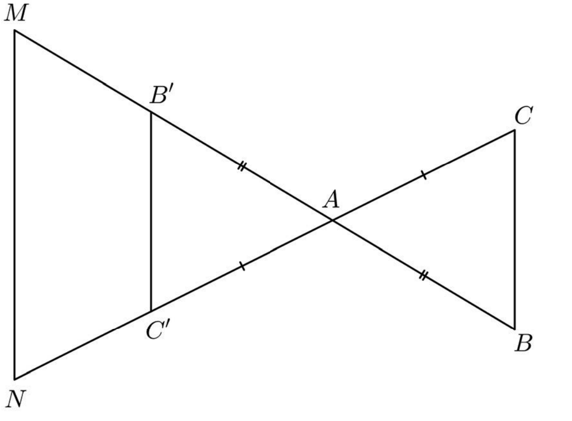
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \text{ dans le triangle } ABC$$

et d'autre part :

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AO}{AD} \text{ dans le triangle } ACD$$

Donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AO}{AD}$. Par ailleurs, le quadrilatère $AONM$ a ses côtés opposés parallèles par construction. Ainsi, par définition, $AONM$ est un parallélogramme. Par conséquent, d'après le cours de Cinquième, $AO = MN$. De la même façon, le quadrilatère $ABCD$ a ses côtés opposés parallèles par construction. Ainsi, par définition, $ABCD$ est un parallélogramme. Par conséquent, toujours d'après le cours de Cinquième, $AD = BC$. De la sorte, l'égalité $\frac{AM}{AB} = \frac{AO}{AD}$ devient $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$.

2. Second cas : si $M \notin [AB]$ et $N \notin [AC]$.



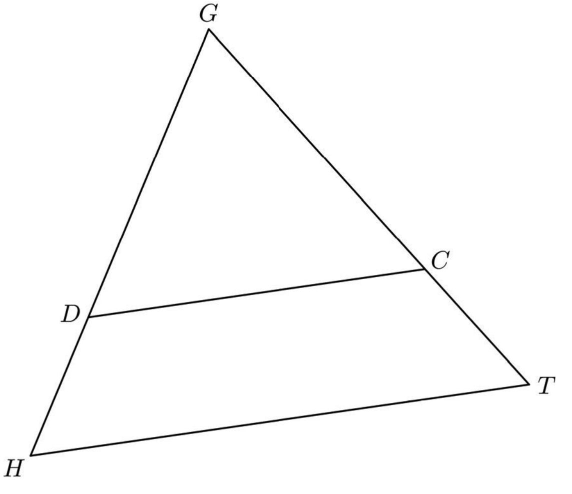
Soient B' et C' les symétriques respectifs de B et C par rapport au point A. Alors, par construction, $M \in [AB')$ et $N \in [AC')$. De plus, par propriété de la symétrie centrale, la droite $(B'C')$ est parallèle à la droite (BC). Or, par hypothèse, la droite (BC) est parallèle à la droite (MN). Donc la droite $(B'C')$ est parallèle à la droite (MN). Par conséquent, d'après le premier point, $\frac{AB'}{AM} = \frac{AC'}{AN} = \frac{B'C'}{MN}$. La symétrie centrale conservant les longueurs, $AB' = AB$, $AC' = AC$ et $B'C' = BC$. Par conséquent $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$ et enfin $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

$\square$

Remarque. Nous pouvons effectuer deux remarques :

1. Le théorème de Thalès permet de calculer une longueur dans un triangle.

   Exemple : sur la figure ci-dessous, les droites (CD) et (HT) sont parallèles, $GD = 25\,\text{mm}$, $GH = 45\,\text{mm}$, $GC = 20\,\text{mm}$ et $HT = 27\,\text{mm}$. Calculons les longueurs GT et CD :



D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{GD}{GH} = \frac{GC}{GT} = \frac{DC}{HT}$$

soit :

$$\frac{25}{45} = \frac{20}{GT} = \frac{DC}{27}$$

d'où :

$$\begin{cases} \frac{25}{45} = \frac{20}{GT} \\ \frac{25}{45} = \frac{DC}{27} \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} 25 \times GT = 20 \times 45 & \longleftarrow \text{produit en croix} \\ 45 \times DC = 25 \times 27 & \longleftarrow \text{produit en croix} \end{cases}$$

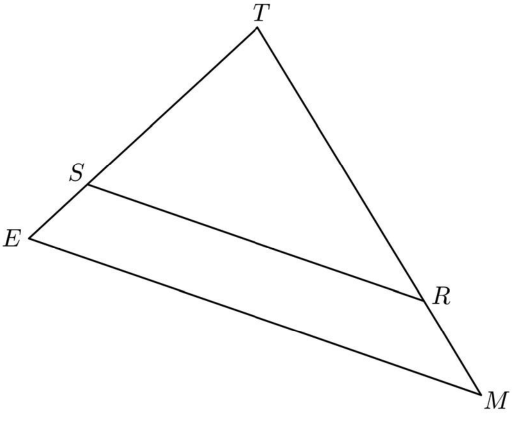
et :

$$\begin{cases} GT = 900 \div 25 \\ DC = 675 \div 45 \end{cases}$$

Finalement :

$$\begin{cases} GT = 36\,\text{mm} \\ DC = 15\,\text{mm} \end{cases}$$

2. Ce théorème permet également de démontrer que deux droites ne sont pas parallèles. En effet, la contraposée du théorème de Thalès affirme : « Si la triple égalité de Thalès est fausse, alors la droite n'est pas parallèle au côté. » (si elle l'était, alors la triple égalité serait vraie).
Exemple : sur la figure suivante, $TR = 11\,\text{cm}$, $TS = 8\,\text{cm}$, $TM = 15\,\text{cm}$ et $TE = 10\,\text{cm}$.



Les droites (SE) et (RM) sont sécantes en T. Comparons donc les rapports $\frac{TS}{TE}$ et $\frac{TR}{TM}$:

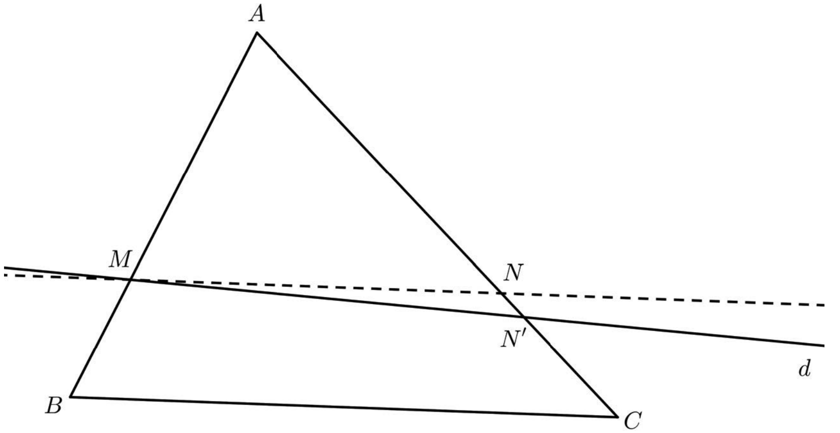
$$\begin{cases} \frac{TS}{TE} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \\ \frac{TR}{TM} = \frac{11}{15} \end{cases}$$

Or $\frac{4}{5} \neq \frac{11}{15}$. Donc, d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (SR) et (EM) ne sont pas parallèles.

2.2 Réciproque du théorème de Thalès

Théorème 13. *(Réciproque du théorème de Thalès) Soit ABC un triangle. Soient M un point appartenant à la droite (AB) et N un point appartenant à la droite (AC) tels que la position de M par rapport à A et B soit la même que celle de N par rapport à A et C. Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.*

Démonstration. Soit ABC un triangle. Soient M un point appartenant à la droite (AB) et N un point appartenant à la droite (AC) tels que la position de M par rapport à A et B soit la même que celle de N par rapport à A et C. Supposons en outre que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Démontrons que la droite (MN) est parallèle à la droite (BC). Soit d la droite parallèle à la droite (BC) passant par M. d coupe (AC) en un point N'.

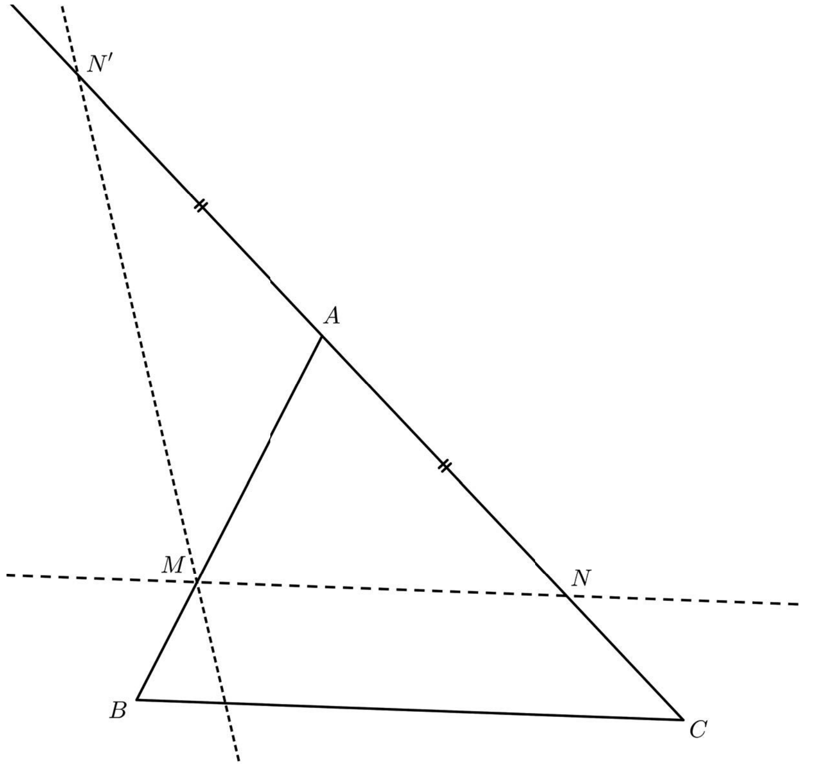


D'après le théorème de Thalès appliqué au triangle ABC, on a $\frac{AM}{AB} = \frac{AN'}{AC}$. On en déduit $\frac{AN'}{AC} = \frac{AN}{AC}$ puis $AN' = AN$. Donc les points N et N' sont confondus. Par conséquent, les droites d et (MN) sont également confondues. Finalement, (MN) est parallèle à (BC). $\square$

Remarque. Nous pouvons effectuer plusieurs remarques :

1. Si les points A, M et C d'une part et les points A, N et C d'autre part ne sont pas dans le même ordre, alors nous ne pouvons pas conclure au parallélisme des droites (MN) et (BC) comme le prouve le contre-exemple suivant.

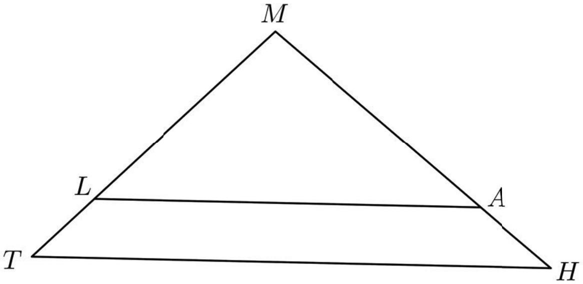
   Contre-exemple :

   Sur la figure ci-dessus, on a $\frac{AM}{AB} = \frac{AN'}{AC}$ mais les droites (MN') et (BC) ne sont pas parallèles. Cela s'explique par le fait que les points A, M et B d'une part et les points A, N et N' d'autre part ne sont pas dans le même ordre.

2. La réciproque du théorème de Thalès permet de démontrer que deux droites sont parallèles.

   Exemple : sur la figure ci-dessous, $ML = 6\,\text{cm}$, $MT = 8\,\text{cm}$, $MA = 3\,\text{cm}$ et $MH = 4\,\text{cm}$.

Les droites (TL) et (AH) sont sécantes en M. Comparons donc les rapports $\frac{ML}{MT}$ et $\frac{MA}{MH}$:

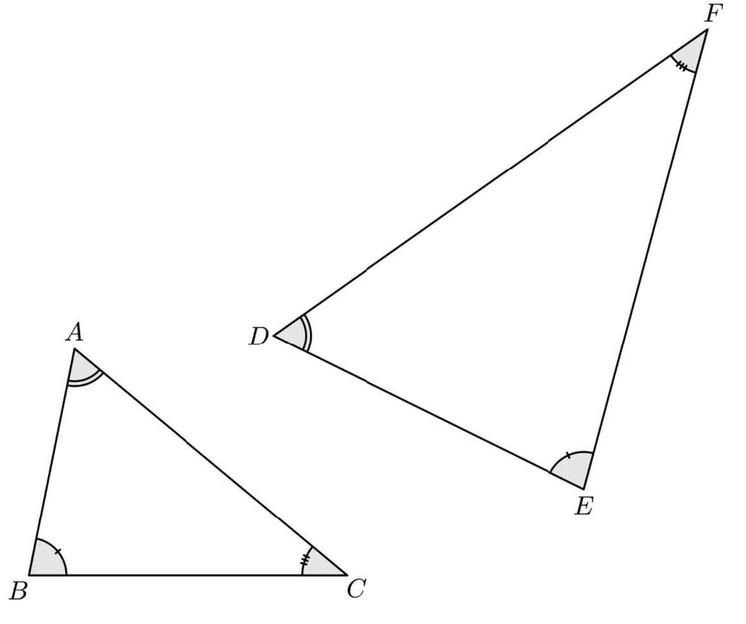
$$\begin{cases} \frac{ML}{MT} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \\ \frac{MA}{MH} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Donc $\frac{ML}{MT} = \frac{MA}{MH}$. De plus, les points M, L, T et M, A, H sont dans le même ordre. Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AL) et (TH) sont parallèles.

2.3 Triangles semblables

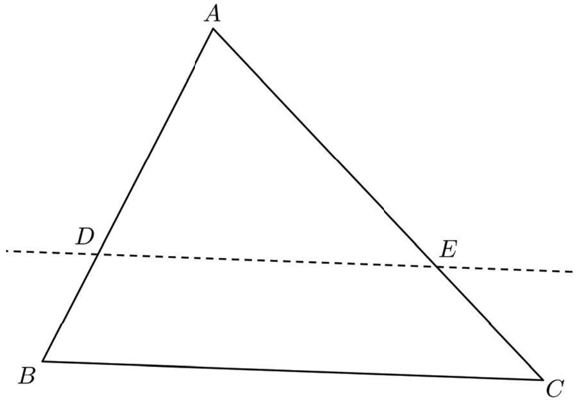
Définition 14. Deux triangles sont dits semblables s'ils ont les mêmes mesures d'angles.

Illustration : sur la figure ci-dessous, les triangles ABC et DEF sont semblables car $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$.



Théorème 15. *Toute droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine avec les deux autres côtés un triangle semblable au premier.*

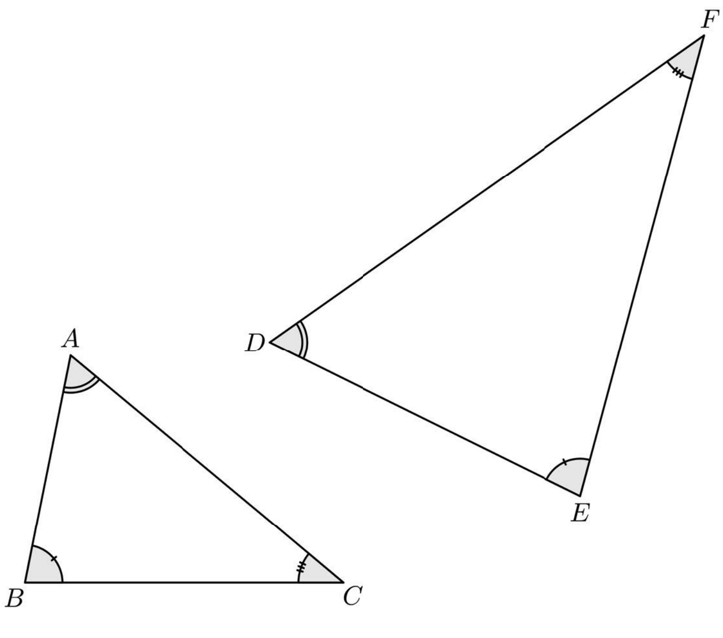
Démonstration. Soit ABC un triangle. Soit D un point appartenant au segment $[AB]$. Soit E le point d'intersection de la droite parallèle à (BC) passant par D et du segment $[AC]$.



Les angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{ABC}$ sont correspondants et les droites (DE) et (BC) sont parallèles. Donc, d'après le cours de Cinquième, $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$. De la même façon, on démontre que $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$. De plus, les triangles ABC et ADE ont l'angle $\widehat{BAC}$ en commun. Par conséquent, ces deux triangles ont les mêmes mesures d'angles et sont donc semblables par définition. □

Définition 16. Les éléments correspondants de deux triangles semblables sont dit homologues. On appelle rapport de similitude de deux triangles semblables le rapport des longueurs de deux côtés homologues.

Exemple. Reprenons nos deux triangles semblables précédents :



Nous pouvons formuler de multiples phrases parmi lesquelles :

1. Les points A et D sont homologues.
2. Les segments $[BC]$ et $[EF]$ sont homologues.
3. Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{DFE}$ sont homologues.
4. Le rapport de similitude des triangles ABC et DEF est égal à $\frac{DE}{AB}$ si l'on considère que l'on transforme le triangle ABC en le triangle DEF ou à $\frac{AB}{DE}$ si l'on considère au contraire que l'on transforme le triangle DEF en le triangle ABC.

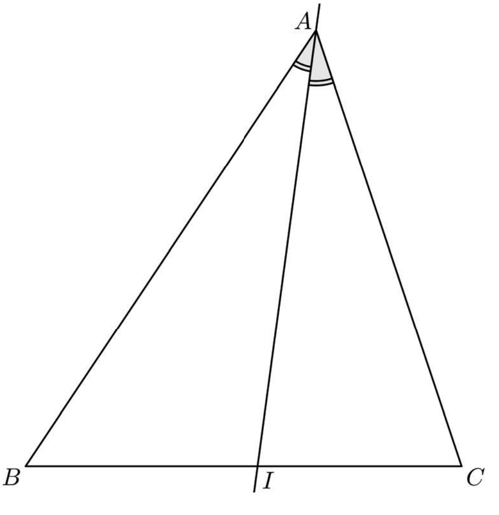
Remarque. Nous pouvons effectuer plusieurs remarques :

1. Le théorème 15 se généralise de la façon suivante : « Si deux paires de côtés homologues dans les triangles ABC et $A'B'C'$ sont de longueurs proportionnelles et si les angles entre ces deux paires de côtés ont la même mesure, alors les triangles sont semblables ».
2. Si le rapport de similitude est strictement inférieur à 1, alors on dit que le deuxième triangle se déduit du premier par une réduction.
3. Si le rapport de similitude est strictement supérieur à 1, alors on dit que le deuxième triangle se déduit du premier par un agrandissement.
4. Si le rapport de similitude est égal à 1, alors on dit que les deux triangles sont égaux.
5. Il est possible d'étendre la notion de similitude à d'autres objets que les triangles. Par exemple, deux quadrilatères sont semblables s'ils ont les mêmes mesures d'angles.

2.4 Exercices

Exercice 1

Soit ABC un triangle. Soit I le point d'intersection de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ avec le côté opposé $[BC]$. Démontrer que $\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IC}$.

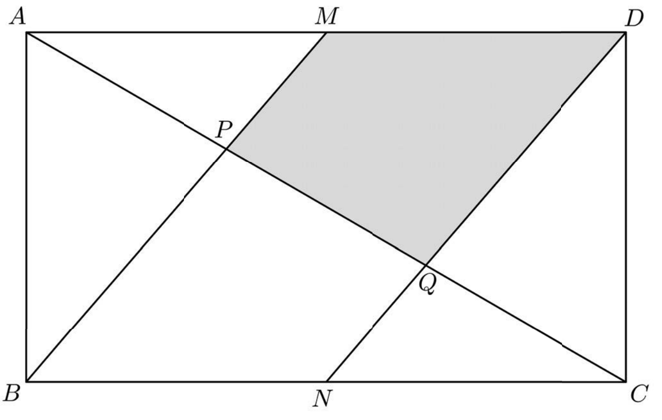


Exercice 2

Soit ABC un triangle. Soit D le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC. Soit E le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. Soit F le pied de la hauteur issue de D dans le triangle ADE. Soit G le pied de la hauteur issue de E dans le triangle ADE. Démontrer que les droites (FG) et (BC) sont parallèles.

Exercice 3

Sur la figure ci-dessous, le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle et les points M et N sont les milieux respectifs des côtés $[AD]$ et $[BC]$.



Quel est le rapport entre l'aire du quadrilatère $MPQD$ et celle du rectangle $ABCD$?

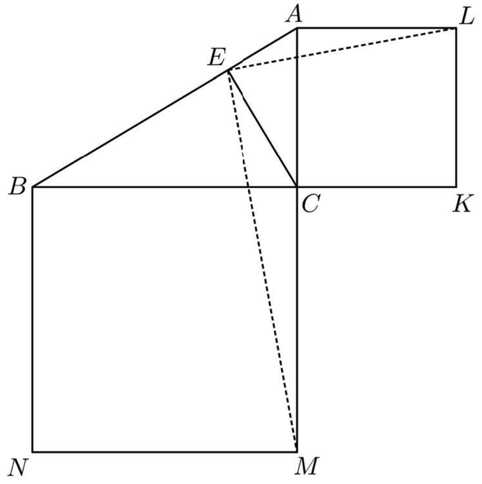
Exercice 4

Soit $ABCD$ un losange. Soit E le point appartenant au segment $[AD]$ tel que $AE = \frac{1}{3}AB$. Soit F le point appartenant au segment $[CD]$ tel que $CF = \frac{1}{3}CD$.

1. Démontrer que le centre I du losange $ABCD$ appartient à la droite (EF).
2. La droite (EF) coupe la droite (AD) en M et la droite (BC) en N. Démontrer que $ME = EF = FN$.
3. Démontrer que les droites (BM) et (BD) sont perpendiculaires.

Exercice 5

Sur la figure ci-dessous, le triangle ACB est rectangle en C, les quadrilatères $BCMN$ et $ALKC$ sont des carrés et le segment $[EC]$ est la hauteur issue de C dans le triangle ACB.

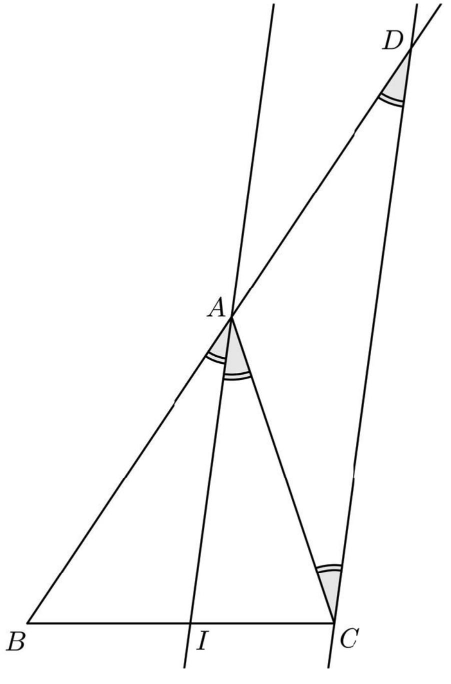


Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MEL}$.

2.5 Corrigés

Exercice 1

La droite parallèle à la droite (AI) passant par C coupe la droite (AB) en D.



Les angles $\widehat{BAI}$ et $\widehat{BDC}$ sont correspondants. De plus les droites (AI) et (CD) sont parallèles par construction. Donc, d'après le cours de Cinquième, $\widehat{BAI} = \widehat{BDC}$.

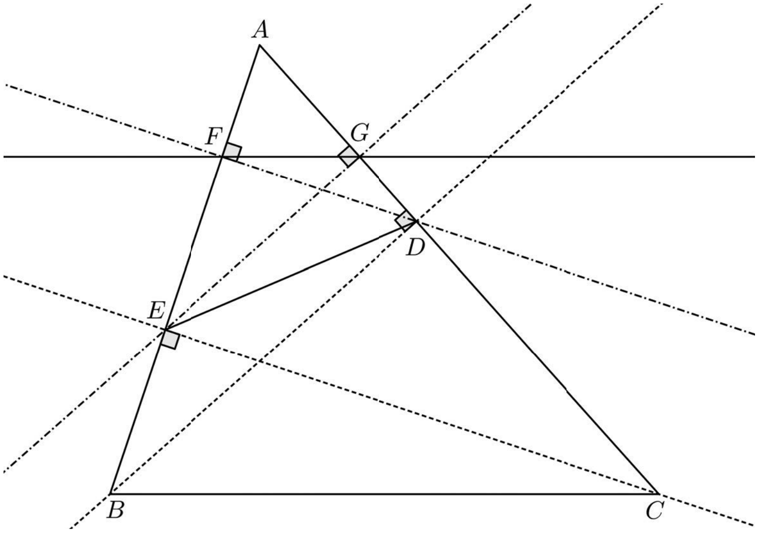
Pour la même raison, les angles alternes-internes $\widehat{IAC}$ et $\widehat{ACD}$ sont également égaux. Or, par définition, $\widehat{BAI} = \widehat{IAC}$. D'où $\widehat{ACD} = \widehat{ADC}$. Ainsi, d'après le cours de Sixième, le triangle DAC est isocèle en A. Par définition, on a donc $AC = AD$.
Les droites (AD) et (IC) sont sécantes en B. Les droites (AI) et (CD) sont parallèles. Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{IB}{IC}$$

soit :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IC}$$

Exercice 2



Les droites (EF) et (CD) sont sécantes en A. Les droites (FD) et (EC) sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à la droite (AB). Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AD}{AC}$$

d'où :

$$AF \times AC = AE \times AD$$

Les droites (EB) et (GD) sont sécantes en A. Les droites (EG) et (BD) sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à la droite (AC). Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AG}{AD} = \frac{AE}{AB}$$

d'où :

$$AG \times AB = AE \times AD$$

Par conséquent :

$$AF \times AC = AG \times AB$$

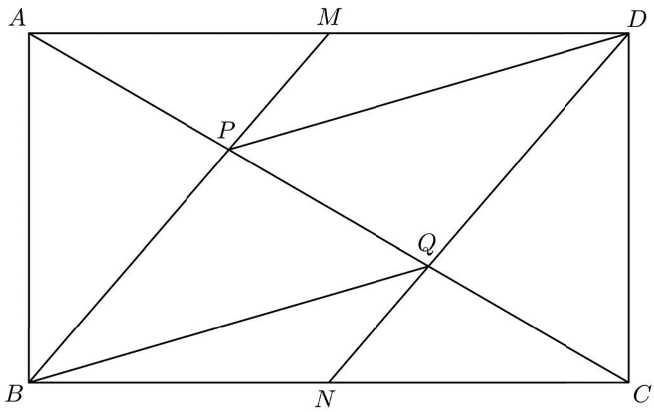
ou encore :

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC}$$

En outre, la position du point F par rapport aux points A et B est la même que celle du point G par rapport aux points A et C. Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (FG) et (BC) sont parallèles.

Exercice 3

Traçons les segments $[DP]$ et $[BQ]$. Le rectangle $ABCD$ est alors subdivisé en huit triangles.



Par construction, le quadrilatère $MDNB$ possède deux côtés opposés parallèles de même longueur, à savoir $[MD]$ et $[BN]$. Donc, d'après le cours de Cinquième, $MDNB$ est un parallélogramme. Par définition, les droites (MB) et (DN) sont donc parallèles. En outre, les droites (QP) et (NB) sont sécantes en C. Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{PC}{QC} = \frac{BC}{NC} = 2$$

d'où :

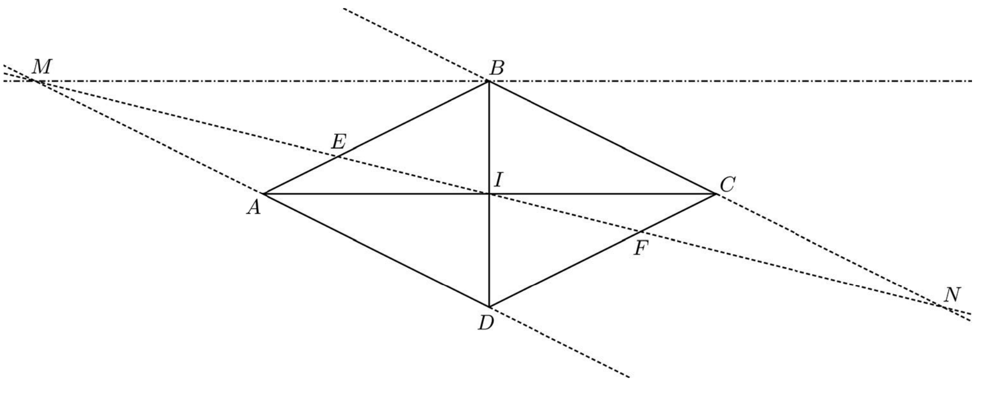
$$PC = 2QC$$

Les points P, Q et C étant alignés par construction, Q est donc le milieu du segment $[PC]$. Un raisonnement analogue nous permet de démontrer que le point P est le milieu du segment $[AQ]$. Par conséquent, $AP = QP = QC$.
Par ailleurs, d'après le cours de Sixième, $AD = BC$. Aussi, les angles $\widehat{DAP}$ et $\widehat{QCB}$ sont alternes-internes et les droites (AD) et (BC) sont parallèles. Donc, d'après le cours de Cinquième, $\widehat{DAP} = \widehat{QCB}$. Ainsi, d'après un cas d'égalité de triangles, les triangles DAP et QCB sont égaux. Nous en déduisons $\widehat{MDP} = \widehat{NBQ}$. Or $\widehat{NQB}$ et $\widehat{QBP}$ sont alternes-internes et les droites (MB) et (ND) sont parallèles. Donc $\widehat{NQB} = \widehat{QBP}$. D'où $\widehat{MDP} = \widehat{QBP}$. Ces deux angles étant correspondants, nous en déduisons que les droites (DP) et (BQ) sont parallèles. Par suite, le quadrilatère $PDQB$ ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux, est nécessairement un parallélogramme. Les cours de

Sixième et Cinquième nous permettent alors d'affirmer que les triangles QDP et QBP sont égaux. En particulier, ils ont la même aire.
$PQ = QC$ donc les triangles QDP et QDC ont la même base. En outre, ils ont la même hauteur relative puisqu'ils partagent le sommet D. Par conséquent, ces deux triangles ont la même aire. Un raisonnement similaire nous permet d'affirmer que les triangles QBP et ABP ont la même aire. Finalement, les triangles ABP, QBP, QDP et QDC ont la même aire. Notons-la $\mathscr{A}$.
$AP = QC$, $AM = NC$ et $\widehat{MAP} = \widehat{NCQ}$. Donc, d'après un cas d'égalité des triangles, les triangles APM et NCQ sont égaux. À fortiori, ils ont la même aire. Les triangles BNQ et NCQ ont la même base (la longueur BN) et la même hauteur puisqu'ils partagent le sommet Q. Par conséquent, ces deux triangles ont la même aire. Un raisonnement analogue nous permet d'affirmer que les triangles APM et MPD ont la même aire. Finalement, les triangles BNQ, NCQ, APM et MPD ont la même aire. Notons-la $\mathscr{A}'$.
Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\frac{\mathscr{A}(MPQD)}{\mathscr{A}(ABCD)} &= \frac{\mathscr{A} + \mathscr{A}'}{4\mathscr{A} + 4\mathscr{A}'} \\ &= \frac{\mathscr{A} + \mathscr{A}'}{4(\mathscr{A} + \mathscr{A}')} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Exercice 4



1. Soit I le point d'intersection des droites (EF) et (AC). D'après le cours de Sixième, $ABCD$ étant un losange, les droites (AE) et (CF) sont parallèles. Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AI}{CI} = \frac{AE}{CF}$$

soit :

$$\frac{AI}{CI} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{1}{3}CD}$$

d'où :

$$\frac{AI}{CI} = \frac{AB}{CD} = 1$$

et finalement :

$$AI = CI$$

Or les points A, I et C sont alignés par construction. Donc, par définition, le point I est le milieu du segment $[AC]$. Ce dernier étant une diagonale du losange $ABCD$, I est nécessairement le centre de $ABCD$.

2. Les droites (AD) et (EF) sont sécantes en M. Les droites (AE) et (DF) sont parallèles. Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{ME}{MF} = \frac{AE}{DF}$$

soit :

$$\frac{ME}{MF} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{2}{3}CD}$$

d'où :

$$\frac{ME}{MF} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{2}{3}AB} = \frac{1}{2}$$

et finalement :

$$MF = 2ME \quad (1)$$

Les droites (BC) et (EF) sont sécantes en N. Les droites (BE) et (CF) sont parallèles. Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{NF}{NE} = \frac{CF}{BE}$$

soit :

$$\frac{NF}{NE} = \frac{\frac{1}{3}CD}{\frac{2}{3}AB}$$

d'où :

$$\frac{NF}{NE} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{2}{3}AB} = \frac{1}{2}$$

et finalement :

$$NE = 2NF \quad (2)$$

Nous avons donc :

$$\begin{cases} MF = 2ME & (1) \\ NE = 2NF & (2) \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} ME + EF = 2ME \\ NF + FE = 2NF \end{cases}$$

CORRIGÉS

d'où :

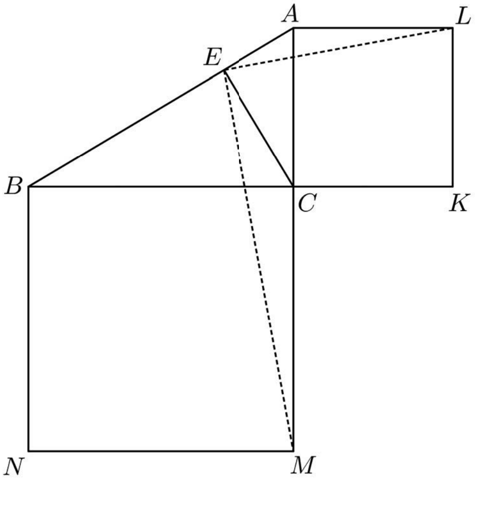
$$\begin{cases} EF = ME \\ FE = NF \end{cases}$$

3. D'après le cours de Cinquième, le point I est un centre de symétrie du losange $ABCD$. La symétrie centrale conservant les longueurs, l'image du point E par la symétrie de centre I est le point F. Donc, par définition de la symétrie centrale, $EI = \frac{1}{2}EF$.
Par ailleurs, les droites (MI) et (AB) sont sécantes en E et nous avons :

$$\begin{cases} \frac{EI}{EM} = \frac{\frac{1}{2}EF}{EM} = \frac{\frac{1}{2}EM}{EM} = \frac{1}{2} \\ \frac{EA}{EB} = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{2}{3}AB} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

De plus, la position du point B par rapport aux points A et E est identique à celle du point M par rapport aux points I et E. Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AI) et (MB) sont parallèles.
Or les diagonales d'un losange sont perpendiculaires. Donc la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (BD). Par conséquent, la droite (MB) est perpendiculaire à la droite (BD).

Exercice 5



On a :

$$\begin{aligned} \widehat{CAE} &= 90° - \widehat{ECA} \\ &= \widehat{ACB} - \widehat{ECA} \\ &= \widehat{BCE} \end{aligned}$$

Donc les triangles BCE et CAE ont deux angles de mêmes mesures. La somme des mesures des angles d'un triangle étant égale à 180°, les triangles BCE et CAE ont leurs trois angles de mêmes mesures. Par définition, ces deux triangles sont donc semblables. Il s'ensuit les égalités suivantes :

$$\frac{AE}{CE} = \frac{CA}{BC}$$

Or $\frac{CA}{BC} = \frac{AL}{CM}$. D'où :

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AL}{CM}$$

En outre, on a :

$$\begin{aligned}\widehat{LAE} &= \widehat{LAC} + \widehat{CAE} \\ &= 90° + \widehat{BCE} \\ &= \widehat{MCB} + \widehat{BCE} \\ &= \widehat{MCE}\end{aligned}$$

Ainsi les triangles AEL et MCE ont deux paires de côtés homologues de longueurs proportionnelles et les angles entre ces deux paires de côtés ont la même mesure. Par conséquent, d'après le théorème 15, les triangles AEL et MCE sont semblables. On en déduit $\widehat{LEA} = \widehat{MEC}$. D'où :

$$\begin{aligned}\widehat{MEL} &= \widehat{MEA} - \widehat{LEA} \\ &= \widehat{MEA} - \widehat{MEC} \\ &= \widehat{CEA} \\ &= 90°\end{aligned}$$

CORRIGÉS

3

Expressions algébriques

3.1 Réduire, développer et factoriser

Remarque. Trois savoir-faire fondamentaux sont à maîtriser en présence d'expressions algébriques : la RÉDUCTION, le DÉVELOPPEMENT et la FACTORISATION.

Définition 17. Réduire une expression algébrique consiste à effectuer toutes les additions et soustractions possibles présentes afin d'obtenir une expression plus « simple ».

Exemple. Voici quelques exemples de réductions :

$$\begin{aligned} A &= 3x - 5x^2 + 4x - 7x + 8x^2 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= -(-9x^3 + 4x^2 - 5) \\ &= 9x^3 - 4x^2 + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= -4 - (-b + a) \\ &= -4 + b - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 17 - (24a - 9) + (-12 + 5b) - (10b - 14a) \\ &= 17 - 24a + 9 - 12 + 5b - 10b + 14a \\ &= 14 - 10a - 5b \end{aligned}$$

Définition 18. Développer un produit consiste à transformer ce produit en une (ou plusieurs) somme(s) à l'aide de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Exemple. Voici quelques exemples de développements :

$$\begin{aligned} E &= -7(-2a+5) \\ &= -7\times(-2a) - 7\times 5 \\ &= 14a - 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= (4-6b)(3a+7) \\ &= 4\times 3a + 4\times 7 - 6b\times 3a - 6b\times 7 \\ &= 12a + 28 - 18ab - 42b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= 9x^2 - (3-2x)(4x+6) \\ &= 9x^2 - (3\times 4x + 3\times 6 - 2x\times 4x - 2x\times 6) \\ &= 9x^2 - (12x + 18 - 8x^2 - 12x) \\ &= 9x^2 - \cancel{12x} - 18 + 8x^2 + \cancel{12x} \\ &= 17x^2 - 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= 7 - 2\left[3a - 2(2a-5)\right] \\ &= 7 - 2\left(3a - 2\times 2a - 2\times(-5)\right) \\ &= 7 - 2(3a - 4a + 10) \\ &= 7 - 2\times 3a - 2\times(-4a) - 2\times 10 \\ &= 7 - 6a + 8a - 20 \\ &= 2a - 13 \end{aligned}$$

Définition 19. Factoriser une expression algébrique consiste à transformer cette expression en un produit d'un (ou plusieurs) facteur(s) à l'aide de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Exemple. Voici quelques exemples de factorisations :

$$\begin{aligned} I &= 2\underbrace{(7+2x)} - 5x\underbrace{(7+2x)} \\ &= \underbrace{(7+2x)}(2-5x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \underbrace{(3-4x)}(2x-5) - 7x\underbrace{(3-4x)} \\ &= \underbrace{(3-4x)}(2x-5-7x) \\ &= (3-4x)(-5x-5) \\ &= 5(3-4x)(-x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K &= \underbrace{(9x+5)}(7x+9) - (2x-1)\underbrace{(9x+5)} \\
&= \underbrace{(9x+5)}[(7x+9) - (2x-1)] \\
&= (9x+5)(7x+9-2x+1) \\
&= (9x+5)(5x+10) \\
&= 5(9x+5)(x+2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= 4(x-7)\underbrace{(x+1)} - 2\underbrace{(x+1)}(x-4) \\
&= \underbrace{(x+1)}[4(x-7) - 2(x-4)] \\
&= (x+1)(4x-28-2x+8) \\
&= (x+1)(2x-20) \\
&= 2(x+1)(x-10)
\end{aligned}$$

Remarque. Nous pouvons effectuer deux remarques :

1. La factorisation est la démarche inverse du développement.
2. La factorisation d'une expression algébrique s'effectue toujours par « le plus grand facteur commun » à tous les termes de la somme.
   Exemple : $8x + 64 = 2(4x + 32)$ est une factorisation non terminée. En effet, $4x + 32 = 4(x + 8)$ et donc $8x + 64 = 2 \times 4(x + 8) = 8(x + 8)$.

3.2 Les identités remarquables

Proposition 20. *Soient a et b deux nombres réels. On a les trois identités (ou égalités) remarquables suivantes :*

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Démonstration. Démonstrations algébriques :
Soient a et b deux nombres réels. On a :

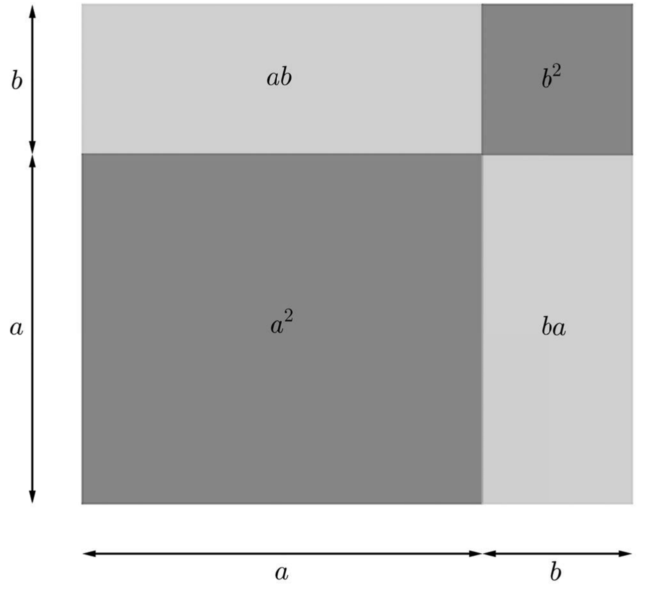
$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
&= a^2 + ab + ba + b^2 \\
&= a^2 + ab + ab + b^2 \quad \longleftarrow \text{ Commutativité de } \times \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a^2 - ab - ba + b^2\\ &= a^2 - ab - ab + b^2 \longleftarrow \text{ Commutativité de } \times\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ba - b^2\\ &= a^2 - ab + ab - b^2 \longleftarrow \text{ Commutativité de } \times\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

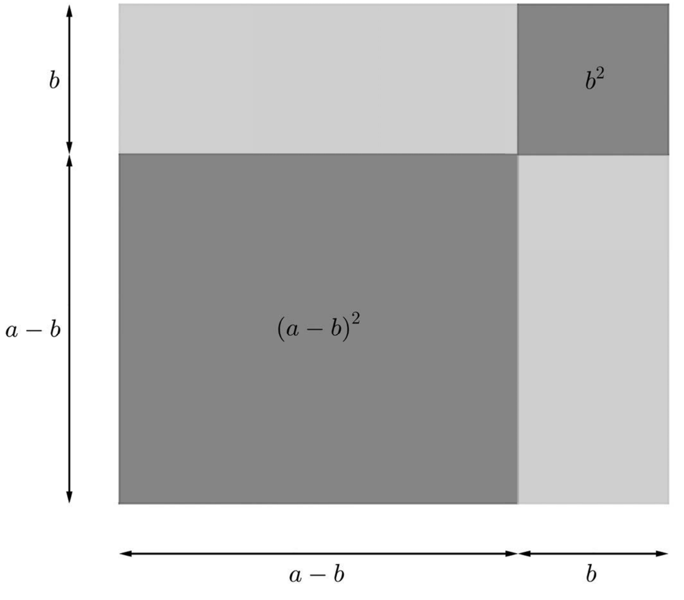
Démonstrations géométriques :

1. Soient a et b deux nombres réels positifs. On a :



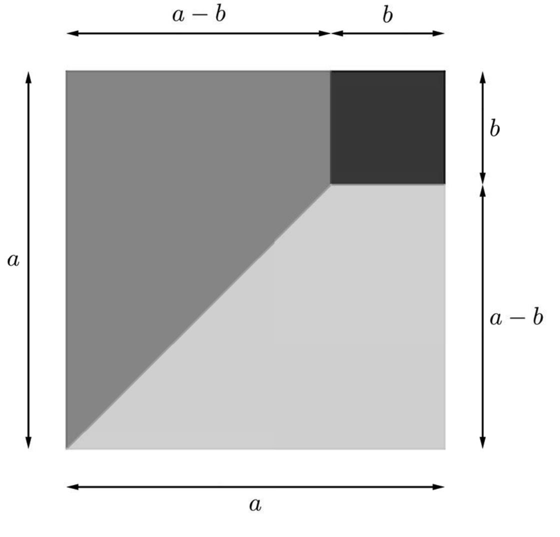
On lit $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

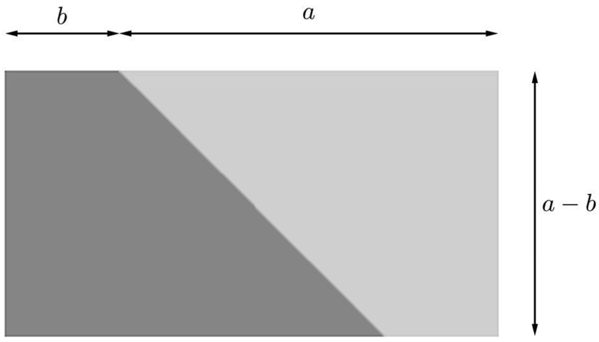
2. Soient a et b deux nombres réels avec $b \geqslant 0$ et $a - b \geqslant 0$. On a :



On lit $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

3. Soient a et b deux nombres réels tels que $b \geqslant 0$ et $a-b \geqslant 0$. On a :





On lit $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$\square$

Remarque. Nous pouvons effectuer quatre remarques :

1. D'une part ces trois identités permettent de développer une expression algébrique plus « rapidement » qu'à l'aide de la double distributivité.
   Exemple. Développons des deux façons l'expression algébrique $(3-7x)(3+7x)$:
   — À l'aide de la double distributivité :

$$\begin{aligned}(3-7x)(3+7x) &= 3\times 3 + 3\times 7x - 7x\times 3 - 7x\times 7x\\ &= 9 + \cancel{21x} - \cancel{21x} - 49x^2\\ &= -49x^2 + 9\end{aligned}$$

   — À l'aide de la troisième identité remarquable :

$$\begin{aligned}(3-7x)(3+7x) &= 3^2 - (7x)^2\\ &= 9 - 49x^2\\ &= -49x^2 + 9\end{aligned}$$

2. D'autre part, elles permettent de factoriser une expression algébrique en l'absence de facteur commun aux différents termes la composant.
   Exemple. L'expression algébrique $16x^2 - 40x + 25$ n'admet pas de facteur commun aux termes « $16x^2$ », « $-40x$ » et « 25 ». En revanche, elle a la structure de la deuxième identité remarquable. D'où :

$$\begin{aligned}16x^2 - 40x + 25 &= (4x)^2 - 2\times 4x\times 5 + 5^2\\ &= (4x-5)^2\end{aligned}$$

3. Ces identités remarquables peuvent faciliter certains calculs.
   Exemple. Voici trois exemples de calculs pouvant s'effectuer mentalement à l'aide des identités remarquables :

$$
\begin{aligned}
112^2 &= (100+12)^2 \\
&= 100^2 + 2 \times 100 \times 12 + 12^2 \\
&= 10\,000 + 2\,400 + 144 \\
&= 12\,544
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
97^2 &= (100-3)^2 \\
&= 100^2 - 2 \times 100 \times 3 + 3^2 \\
&= 10\,000 - 600 + 9 \\
&= 9\,409
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
33 \times 27 &= (30+3)(30-3) \\
&= 30^2 - 3^2 \\
&= 900 - 9 \\
&= 891
\end{aligned}
$$

4. Le lecteur curieux pourra développer $(a-b)^3$ et $(a+b)^3$ afin d'établir deux nouvelles identités remarquables.

Exemple. Voici quelques exemples de développements à l'aide de ces trois identités remarquables :

$$
\begin{aligned}
M &= (6+5x)^2 \\
&= 6^2 + 2 \times 6 \times 5x + (5x)^2 \\
&= 36 + 60x + 25x^2 \\
&= 25x^2 + 60x + 36
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N &= (3x-8)^2 \\
&= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 8 + 8^2 \\
&= 9x^2 - 48x + 64
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P &= (2-7x)(2+7x) \\
&= 2^2 - (7x)^2 \\
&= 4 - 49x
\end{aligned}
$$

Voici quelques exemples de factorisations à l'aide de ces trois identités remarquables :

$$\begin{aligned} Q &= 49 + 28x + 4x^2 \\ &= 7^2 + 2 \times 7 \times 2x + (2x)^2 \\ &= (7 + 2x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= 36 - 84x + 49x^2 \\ &= 6^2 - 2 \times 6 \times 7x + (7x)^2 \\ &= (6 - 7x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= 121 - 9x^2 \\ &= 11^2 - (3x)^2 \\ &= (11 - 3x)(11 + 3x) \end{aligned}$$

Exercice. Les expressions T, U et V sont à développer et les expressions W, X, Y et Z sont à factoriser :

$$T = 2 + (7 - 3x)(7 + 3x) - (x - 1)^2$$

$$U = 4x - (3 - x)^2 + (3 - x)(3 + x)$$

$$V = \left(\frac{3x}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2x}{3} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$W = (x - 2)(5x + 1) - (x^2 - 4x + 4)$$

$$X = 3(4x + 1)(3x - 1) - (16x^2 - 1)$$

$$Y = 49x^2 + 28x + 4 + (7x + 2)(x + 4)$$

$$Z = \frac{1}{4}(2x - 3)^2 - \left(4x - \frac{3}{2}\right)^2$$

Solution :

$$\begin{aligned} T &= 2 + (7 - 3x)(7 + 3x) - (x - 1)^2 \\ &= 2 + 7^2 - (3x)^2 - (x^2 - 2x + 1) \\ &= 2 + 49 - 9x^2 - x^2 + 2x - 1 \\ &= -10x^2 + 2x + 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U &= 4x - (3-x)^2 + (3-x)(3+x) \\
&= 4x - (3^2 - 2 \times 3 \times x + x^2) + 3^2 - x^2 \\
&= 4x - (9 - 6x + x^2) + 9 - x^2 \\
&= 4x - \cancel{9} + 6x - x^2 + \cancel{9} - x^2 \\
&= -2x^2 + 10x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= \left(\frac{3x}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2x}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{3x}{2}\right)^2 - \cancel{2} \times \frac{\cancel{3}x}{\cancel{2}} \times \frac{1}{\cancel{3}} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left[\left(\frac{2x}{3}\right)^2 - \cancel{2} \times \frac{\cancel{2}x}{3} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \\
&= \frac{9x^2}{4} - x + \frac{1}{9} - \left(\frac{4x^2}{9} - \frac{x}{6} + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{9x^2}{4} - x + \frac{1}{9} - \frac{4x^2}{9} + \frac{x}{6} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{5x^2}{4} - \frac{5x}{6} - \frac{5}{36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W &= (x-2)(5x+1) - (x^2 - 4x + 4) \\
&= (x-2)(5x+1) - (x-2)^2 \\
&= (x-2)\left[(5x-1) - (x-2)\right] \\
&= (x-2)(5x - 1 - x + 2) \\
&= (x-2)(4x+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X &= 3(4x+1)(3x-1) - (16x^2 - 1) \\
&= 3(4x+1)(3x-1) - (4x-1)(4x+1) \\
&= (4x+1)\left[3(3x-1) - (4x-1)\right] \\
&= (4x+1)(9x - 3 - 4x + 1) \\
&= (4x+1)(5x-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y &= 49x^2 + 28x + 4 + (7x+2)(x+4) \\
&= (7x+2)^2 + (7x+2)(x+4) \\
&= (7x+2)\left[(7x+2) + (x+4)\right] \\
&= (7x+2)(8x+6) \\
&= 2(7x+2)(4x+3)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{4}(2x-3)^2 - \left(4x - \frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \left[\frac{1}{2}(2x-3)\right]^2 - \left(4x - \frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \left[\frac{1}{2}(2x-3) - \left(4x - \frac{3}{2}\right)\right] \times \left[\frac{1}{2}(2x-3) + \left(4x - \frac{3}{2}\right)\right] \\
&= \left(x - \cancel{\frac{3}{2}} - 4x + \cancel{\frac{3}{2}}\right)\left(x - \frac{3}{2} + 4x - \frac{3}{2}\right) \\
&= -3x(5x-3)
\end{aligned}
$$

3.3 Exercices

Exercice 1

Combien de couples distincts d'entiers $(x;y)$ tels que $xy = 4(y^2 + x)$ existe-t-il ?

Exercice 2

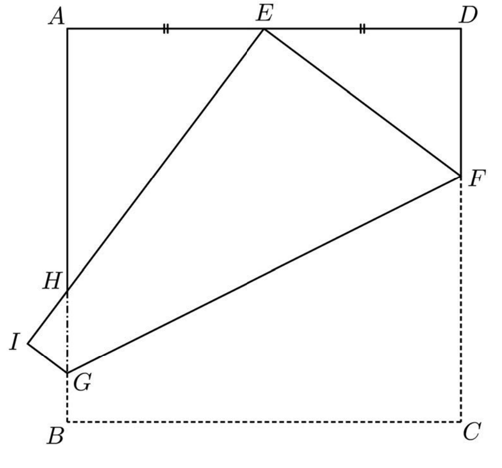
Clément a choisi deux nombres x et y tels que $(x+y+z)^2 = 3(xy+yz+xz)$. Sauras-tu déterminer la valeur de $x(y-z)$?

Exercice 3

Emma place mille nombres réels sur le contour d'un cercle et les peint alternativement en blanc et en noir. Chaque nombre noir est la somme de ses deux nombres voisins. Chaque nombre blanc est le produit de ses deux nombres voisins. Quelles sont les valeurs possibles de la somme de ces mille nombres ?

Exercice 4

On plie une feuille carrée de côté 1 de la façon suivante :

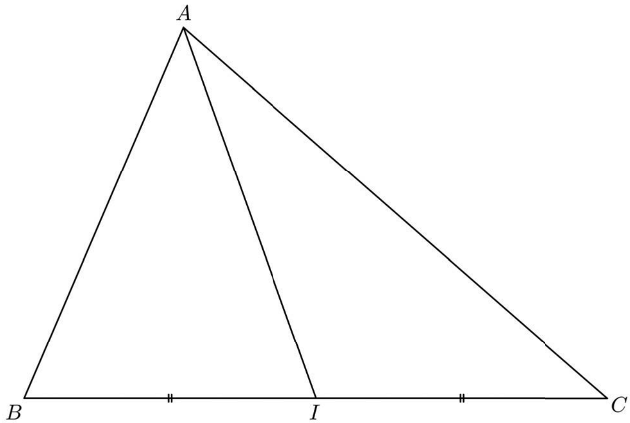


1. Calculer les longueurs DE, DF et EF.
2. Calculer la longueur AH.

Remarque. Ce pli est l'œuvre de Kazuo Haga, un professeur japonais de biologie né en 1934.

Exercice 5

1. Démontrer que tout nombre entier naturel impair peut s'écrire comme la différence des carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs.
2. Avec des jetons, je parviens à former un carré et il m'en reste douze. Lorsque j'essaye de former un carré avec un jeton de plus sur chaque côté, il m'en manque treize. Combien ai-je de jetons ?
3. Sans calculatrice mais avec astuce, calculer :
   (a) 898^2
   (b) $2\,815^2 - 2\,785^2$
   (c) $927^2 - 926^2 - 925^2 + 924^2$
   (d) $1\,299^2 + 1\,300^2 + 1\,301^2$
4. Soit $A = \left(\frac{1}{a}x + a\right)^2 - \left(ax + \frac{1}{a}\right)^2$.
   Démontrer que $A = \left(\frac{1}{a} - a\right)\left(\frac{1}{a} + a\right)(x-1)(x+1)$.
5. Soit ABC un triangle. Soit I le milieu du segment $[BC]$.



Démontrer que $AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$.
Remarque. C'est le théorème d'Apollonius de Perge, mathématicien grec né dans la seconde moitié du III^e siècle avant J.-C. et mort au début du II^e siècle avant J.-C.

3.4 Corrigés

Exercice 1

L'équation $xy = 4(y^2 + x)$ est équivalente à :

$$xy = 4y^2 + 4x$$

et donc à :

$$xy - 4x = 4y^2$$

puis à :

$$x(y-4) = 4y^2$$

Par conséquent, $y-4$ doit être un diviseur de $4y^2$. Donc il existe un nombre entier k tel que $4y^2 = k(y-4)$. De plus, il est possible de réécrire $4y^2$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 4y^2 &= 4(y^2-16)+64 \\ &= 4(y-4)(y+4)+64 \end{aligned}$$

d'où :

$$k(y-4) = 4(y-4)(y+4)+64$$

puis :

$$(y-4)\left(k-4(y+4)\right) = 64$$

Autrement dit, $y-4$ divise 64. Or $64 = 2^6$, donc 64 admet sept diviseurs positifs, $\{1; 2; 4; 8; 16; 32; 64\}$, et sept diviseurs négatifs, $\{-1; -2; -4; -8; -16; -32; -64\}$, c'est-à-dire quatorze diviseurs au total. Pour chacun de ces diviseur, il existe une unique valeur de y et pour chacune de ces valeurs de y, il existe une unique valeur de x. Par conséquent, il existe quatorze couples d'entiers $(x; y)$ tels que $xy = 4(y^2+x)$. Le lecteur curieux pourra dresser la liste de ces quatorze couples.

Exercice 2

Développons les deux membres de l'égalité $(x+y+z)^2 = 3(xy+yz+xz)$:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= 3(xy+yz+xz) \\ (x+y+z)(x+y+z) &= 3xy+3yz+3xz \\ x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz &= 3xy+3yz+3xz \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz &= 0 \\ 2(x^2+y^2+z^2)-2(xy-yz-xz) &= 0 \\ (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or, une somme de carrés est nulle si, et seulement si, chacun de ces carrés est nul. Donc :

$$\begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = y \\ y = z \\ z = x \end{cases}$$

Finalement :

$$x(y - z) = 0$$

Exercice 3

Simplifions le problème et choisissons dix nombres consécutifs autour du cercle. Soient a, b, c, d, e, f, g, h, i et j ces dix nombres consécutifs. Supposons a noir. Alors $b = ac$ et $c = \frac{b}{a}$. Comme $c = b + d$, on en déduit $d = c - b = \frac{b}{a} - b = \frac{b(1-a)}{a}$. Comme $d = ce$, on a $e = \frac{d}{c} = 1 - a$. En poursuivant ces calculs, on obtient :

$$\begin{cases} f = e - d = \frac{(1-a)(a-b)}{a} \\ g = \frac{f}{e} = \frac{a-b}{a} \\ h = g - f = a - b \\ i = \frac{h}{g} = a \\ j = i - h = b \end{cases}$$

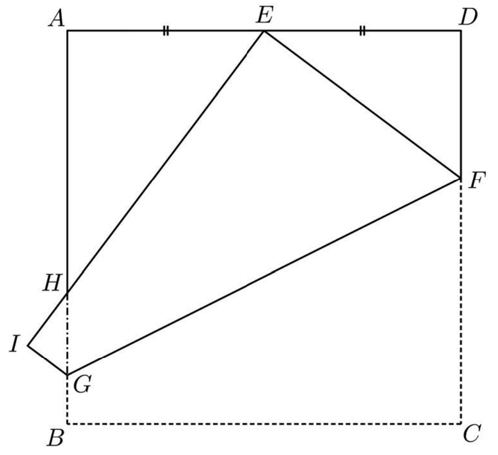
Il s'ensuit que le motif se répète tous les huit nombres. Soit S la somme des huit nombres, on a :

$$\begin{aligned} S &= \cancel{a} + \cancel{b} + \frac{b}{a} + \frac{b(1-a)}{a} + 1 - \cancel{a} + \frac{(1-a)(a-b)}{a} + \frac{a-b}{a} + a - \cancel{b} \\ &= \frac{\cancel{b} + \cancel{b} - \cancel{ba} + a - \cancel{b} - a^2 + \cancel{ab} + a - \cancel{b}}{a} + 1 + a \\ &= \frac{2a - a^2}{a} + 1 + a \\ &= 2 - \cancel{a} + 1 + \cancel{a} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Or $1\,000 = 8 \times 125$. Donc la somme des mille nombres est égale à $125 \times 3 = 375$.

CORRIGÉS

Exercice 4



1. Le point E est le milieu du segment $[AD]$. Donc, par définition, $DE = \frac{1}{2}$. Par ailleurs, le pliage selon la droite (FG) s'interprète géométriquement comme une symétrie axiale par rapport à la droite (FG). Or, d'après le cours de Sixième, la symétrie axiale conserve les longueurs. Donc $EF = FC$ et par suite, $EF = 1 - DF$. D'après le théorème de Pythagore dans triangle EDF rectangle en D, on a donc :

$$EF^2 = ED^2 + DF^2$$

soit :

$$(1 - DF)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + DF^2$$

d'où :

$$1 - 2DF + \cancel{DF^2} = \frac{1}{4} + \cancel{DF^2}$$

puis :

$$2DF = \frac{3}{4}$$

et enfin :

$$DF = \frac{3}{8}$$

On en déduit $EF = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

2. Le point E appartient au segment $[AD]$. D'où :

$$\widehat{AEH} + \widehat{HEF} + \widehat{FED} = 180°$$

soit :

$$\widehat{AEH} + 90° + \widehat{FED} = 180°$$

et donc :

$$\widehat{AEH} + \widehat{FED} = 90° \quad (1)$$

Or dans le triangle FED, on a $\widehat{FED} = 90° - \widehat{EFD}$. Donc, en substituant dans (1), on obtient :

$$\widehat{AEH} + 90° - \widehat{FED} = 90°$$

c'est-à-dire :

$$\widehat{AEH} = \widehat{FED}$$

En outre, $\widehat{EDF} = \widehat{HAE} = 90°$. Donc les triangles FED et HAE ont deux angles de mêmes mesures. D'après le cours de Cinquième, ils ont donc leurs trois angles de mêmes mesures. Par définition, ils sont donc semblables. Il s'ensuit l'égalité suivante :

$$\frac{AH}{AE} = \frac{ED}{DF}$$

et donc :

$$AH = \frac{ED \times AE}{DF} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$

Remarque. Le lecteur curieux pourra essayer de déterminer les longueurs EH, HI, IG et GF.

Exercice 5

1. Soit n un nombre entier naturel impair. Alors il existe un nombre entier naturel k tel que $n = 2k+1$. Or $(k+1)^2 = k^2+2k+1$. D'où $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1 = n$. Autrement dit, n s'écrit comme la différence des carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs.
2. Soit n le nombre de jetons en ma possession. Traduisons algébriquement l'énoncé. « Avec des jetons, je parviens à former un carré et il m'en reste douze. » : cela signifie qu'il existe un nombre entier naturel k tel que $n = k^2 + 12$.
   « Lorsque j'essaye de former un carré avec un jeton de plus sur chaque côté, il m'en manque treize. » : cela s'écrit formellement $n = (k+1)^2 - 13$.
   D'où l'équation suivante :

   $$(k+1)^2 - 13 = k^2 + 12$$

   soit :

   $$\cancel{k^2} + 2k + 1 - \cancel{k^2} = 25$$

puis :

$$k = \frac{25-1}{2} = 12$$

Ainsi, j'ai douze jetons en ma possession.

3. On a :

$$\begin{aligned} 898^2 &= (900-2)^2 \\ &= 900^2 - 2\times 900\times 2 + 2^2 \\ &= 810\,000 - 3\,600 + 4 \\ &= 806\,404 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\,815^2 - 2\,785^2 &= (2\,815 + 2\,785)(2\,815 - 2\,785) \\ &= 5\,600 \times 30 \\ &= 168\,000 \end{aligned}$$

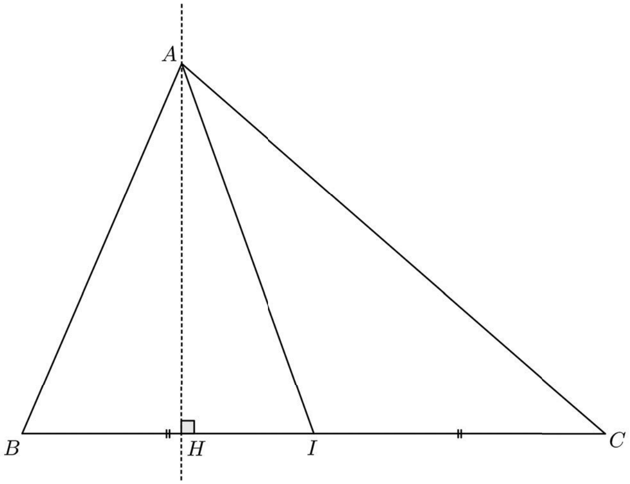
$$\begin{aligned} \underbrace{927^2 - 926^2}\underbrace{-925^2 + 924^2} &= (927-926)\times(927+926)+ \\ &\quad (924-925)\times(924+925) \\ &= 1\times 1\,853 - 1\times 1\,849 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1\,299^2 + 1\,300^2 + 1\,301^2 &= (1\,300-1)^2 + 1\,300^2 + (1\,300+1)^2 \\ &= 1\,300^2 \cancel{-2\,600} + 1 + 1\,300^2 + 1\,300^2 \cancel{+2\,600} + 1 \\ &= 3\times 1\,690\,000 + 2 \\ &= 5\,070\,002 \end{aligned}$$

4. Factorisons $A = \left(\frac{1}{a}x + a\right)^2 - \left(ax + \frac{1}{a}\right)^2$:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{a}x + a\right)^2 - \left(ax + \frac{1}{a}\right)^2 \\ &= \left[\left(\frac{1}{a}x + a\right) + \left(ax + \frac{1}{a}\right)\right] \times \left[\left(\frac{1}{a}x + a\right) - \left(ax + \frac{1}{a}\right)\right] \\ &= \left[x\left(\frac{1}{a} + a\right) + 1\times\left(\frac{1}{a} + a\right)\right] \times \left[x\left(\frac{1}{a} - a\right) - 1\times\left(\frac{1}{a} - a\right)\right] \\ &= (x+1)\left(\frac{1}{a} + a\right)(x-1)\left(\frac{1}{a} - a\right) \\ &= \left(\frac{1}{a} - a\right)\left(\frac{1}{a} + a\right)(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

5. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet A.



D'après le théorème de Pythagore dans les triangles AHB, AHC et AHI rectangles en H, on a :

$$\begin{cases} AB^2 = BH^2 + AH^2 \\ AC^2 = AH^2 + HC^2 \\ AI^2 = AH^2 + HI^2 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BH^2 + 2AH^2 + HC^2 \\ &= BH^2 + HC^2 + 2(AI^2 - HI^2) \quad (*) \end{aligned}$$

Quitte à échanger les sommets B et C, on peut toujours supposer que les points B et H sont du même côté du point I. Il s'ensuit :

$$\begin{cases} BH = BI - HI \\ HC = HI + IC \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} BH^2 + HC^2 &= (BI - HI)^2 + (HI + IC)^2 \\ &= BI^2 - \cancel{2 \times BI \times HI} + HI^2 + HI^2 + \cancel{2 \times HI \times IC} + IC^2 \\ &= 2HI^2 + 2BI^2 \end{aligned}$$

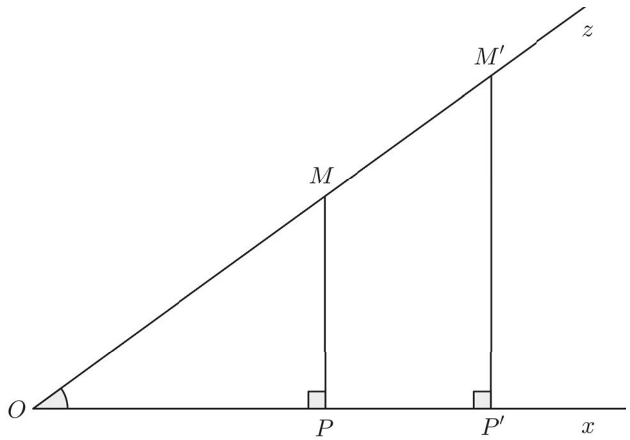
Par conséquent, en revenant à $(*)$:

$$\begin{aligned}
AB^2 + AC^2 &= 2HI^2 + 2BI^2 + 2(AI^2 - HI^2) \\
&= \cancel{2HI^2} + 2BI^2 + 2AI^2 - \cancel{2HI^2} \\
&= 2BI^2 + 2AI^2 \\
&= 2 \times \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + 2AI^2 \\
&= \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2
\end{aligned}$$

4 Trigonométrie

4.1 Rapports trigonométriques d'un angle

Remarque. Soit $\widehat{xOz}$ un angle aigu. Soient M et M' deux points appartenant à la demi-droite $[Oz)$. Soient P et P' leurs projetés orthogonaux respectifs sur la demi-droite $[Ox)$.



Les droites (MM') et (PP') sont sécantes en O. Les droites (MP) et $(M'P')$ sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à la demi-droite $[Ox)$. Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{OM}{OM'} = \frac{PM}{P'M'}$$

D'où les égalités suivantes :

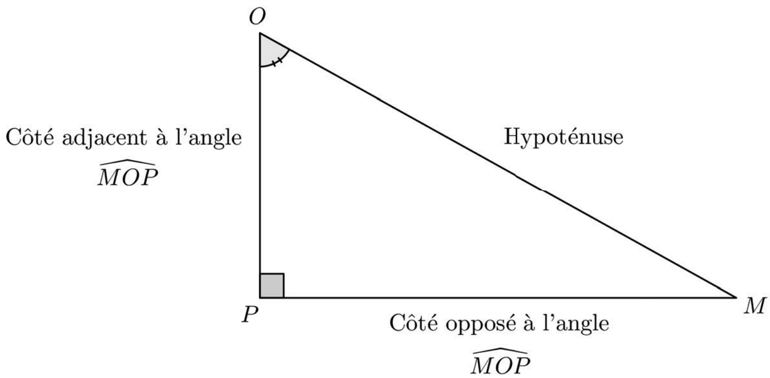
$$\frac{OP}{OM} = \frac{OP'}{OM'} \ ; \ \frac{PM}{OM} = \frac{P'M'}{OM'} \ ; \ \frac{PM}{OP} = \frac{P'M'}{OP'}$$

Ainsi, le rapport des longueurs de deux côtés quelconques du triangle OPM est indépendant de la position du point M sur la demi-droite $[Oz)$, il reste constant lorsque le point M parcourt la demi-droite $[Oz)$. Par conséquent, ce rapport ne dépend que de la mesure de l'angle $\widehat{xOz}$. D'où les définitions suivantes.

Définition 21. Soit $\widehat{xOz}$ un angle aigu. On appelle rapports trigonométriques de l'angle $\widehat{xOz}$ les nombres réels suivants :
- Cosinus de l'angle $\widehat{xOz}$, noté $\cos(\widehat{xOz})$, le rapport $\frac{OP}{OM}$. On écrit donc $\cos(\widehat{xOz}) = \frac{OP}{OM}$.
- Sinus de l'angle $\widehat{xOz}$, le rapport $\frac{PM}{OM}$. On écrit donc $\sin(\widehat{xOz}) = \frac{PM}{OM}$.
- Tangente de l'angle $\widehat{xOz}$, le rapport $\tan(\widehat{xOz}) = \frac{PM}{OP}$. On écrit donc $\tan(\widehat{xOz}) = \frac{PM}{OP}$.

Remarque. Nous pouvons effectuer plusieurs remarques :

1. Soit OPM un triangle rectangle en P. Considérons l'angle $\widehat{POM}$.



Nous pourrons retenir les formulations suivantes :

$$\begin{cases} \cos(\widehat{MOP}) = \frac{OP}{OM} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{MOP}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} \\ \sin(\widehat{MOP}) = \frac{OP}{OM} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{MOP}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} \\ \tan(\widehat{MOP}) = \frac{PM}{OP} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{MOP}}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{MOP}} \end{cases}$$

2. D'après le cours de Quatrième, on a :

$$0 \leqslant \text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{MOP} \leqslant \text{longueur de l'hypoténuse}$$
$$0 \leqslant \text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{MOP} \leqslant \text{longueur de l'hypoténuse}$$

d'où :

$$0 \leqslant \frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{MOP}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} \leqslant 1$$
$$0 \leqslant \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{MOP}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} \leqslant 1$$

puis :

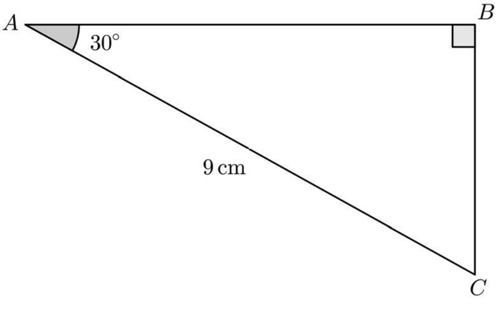
$$0 \leqslant \cos(\widehat{MOP}) \leqslant 1$$
$$0 \leqslant \sin(\widehat{MOP}) \leqslant 1$$

Par conséquent, le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont des nombres réels compris entre 0 et 1.

3. Dans un triangle rectangle, les rapports trigonométriques nous permettent de calculer la longueur d'un des trois côtés ainsi que de calculer la mesure d'un des trois angles.

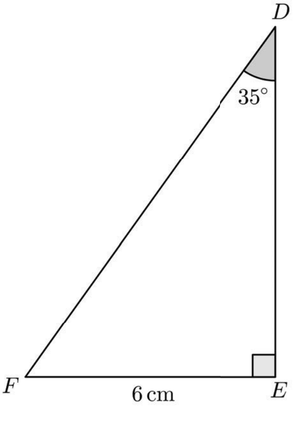
   (a) Calcul d'une longueur.

   Premier exemple : soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AC = 9\,\text{cm}$ et $\widehat{BAC} = 30°$. Calculons la longueur BC.



   On a :
$$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AC}$$
   soit :
$$\sin(30°) = \frac{BC}{9}$$
   d'où :
$$\begin{aligned} BC &= 9\sin(30°)\,\text{cm} \\ &= 4,5\,\text{cm} \end{aligned}$$

   Second exemple : soit DEF un triangle rectangle en E tel que $FE = 6\,\text{cm}$ et $\widehat{FDE} = 35°$. Calculons la longueur DE.



On a :

$$\tan(\widehat{FDE}) = \frac{FE}{DE}$$

soit :

$$\tan(35°) = \frac{6}{DE}$$

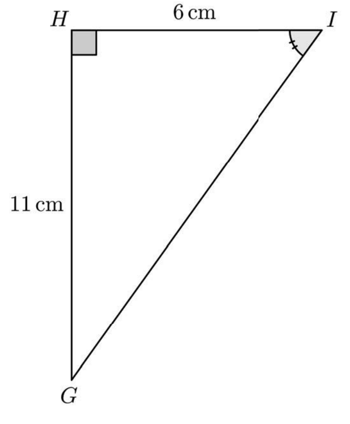
d'où :

$$DE \times \tan(35°) = 6$$

puis :

$$\begin{aligned} DE &= \frac{6}{\tan(35°)}\,\text{cm} \\ &\simeq 8,6\,\text{cm au millimètre près} \end{aligned}$$

4. Calcul d'une mesure d'angle.
Exemple : soit GHI un triangle rectangle en H tel que $HI = 6\,\text{cm}$ et $GH = 11\,\text{cm}$. Calculons la mesure de l'angle $\widehat{HIG}$.



On a :

$$\tan(\widehat{HIG}) = \frac{HG}{HI}$$

soit :

$$\tan(\widehat{HIG}) = \frac{11}{6}$$

La question est donc : quel est l'angle aigu dont la tangente est égale à $\frac{11}{6}$? Pour répondre à cette question, il nous faut utiliser la fonction inverse de la tangente. Au même titre que la soustraction est l'opération inverse de l'addition ou que la division est l'opération inverse de la multiplication, il existe une fonction inverse à la tangente : l'arctangente, notée arctan. Ainsi :

$$\widehat{HIG} = \arctan\left(\frac{11}{6}\right)$$

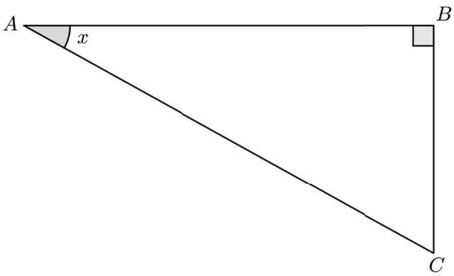
Afin de déterminer une valeur approchée de arctan $\left(\frac{11}{6}\right)$, il est possible d'utiliser la calculatrice et d'appuyer sur la touche « arctan », notée parfois « atan » ou encore « $\tan^{-1}$ ». Celle-ci nous renvoie alors :

$$\widehat{HIG} \simeq 61° \text{ à l'unité près}$$

Proposition 22. *Soit* $x \in [0°; 90°]$. *Alors :*

1. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
2. $\cos(x) = \sin(90° - x)$.
3. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *pour* $x \neq 90°$.

Démonstration. Soit ABC un triangle rectangle en B.



1. D'une part $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC}$. D'autre part $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AC}$. D'où :

$$\begin{aligned}
\cos^2(\widehat{BAC}) + \sin^2(\widehat{BAC}) &= \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 \\
&= \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} \\
&= \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} \\
&= \frac{AC^2}{AC^2} \longleftarrow \text{ théorème de Pythagore} \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. $\cos(x) = \cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC} = \sin(\widehat{ACB})$. Or, d'après le cours de Cinquième, $\widehat{ACB} = 90° - \widehat{BAC}$. D'où $\cos(x) = \sin(90° - x)$.
3. D'une part :

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{BC}{\cancel{AC}} \times \frac{\cancel{AC}}{AB} = \frac{BC}{AB}$$

D'autre part :

$$\tan(x) = \frac{BC}{AB}$$

Par conséquent :

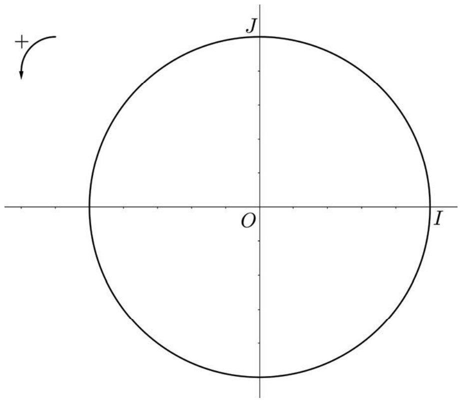
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

□

4.2 Quart de cercle trigonométrique

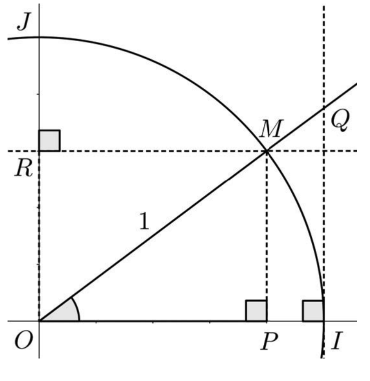
Définition 23. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1, sur lequel on choisit une orientation : le sens direct (positif ou encore trigonométrique) est contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre ; le sens indirect (négatif ou encore antitrigonométrique) est le sens de rotation des aiguilles d'une montre.

Illustration :



Remarque. Nous pouvons effectuer plusieurs remarques :

1. Nous nous intéresserons qu'au quart de cercle intercepté par l'angle $\widehat{IOJ}$.
2. Soit M un point appartenant au quart de cercle trigonométrique considéré. Soient P et R les projetés orthogonaux de M respectivement sur (OI) et (OJ).



On a :

$$\cos(\widehat{IOM}) = \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{1} = OP$$

$$\sin(\widehat{IOM}) = \frac{MP}{OM} = \frac{MP}{1} = MP = OR$$

$$\tan(\widehat{IOM}) = \frac{QI}{OI} = \frac{QI}{1} = QI$$

Ainsi $\cos(\widehat{IOM})$ se lit sur l'axe (OI), il est égal à la longueur OP, $\sin(\widehat{IOM})$ sur l'axe (OJ), c'est la longueur OR et $\tan(\widehat{IOM})$ se lit sur la droite tangente au cercle au point I, c'est la longueur QI.

3. Lorsque M se rapproche de I, la mesure de l'angle $\widehat{POM}$ décroît. La longueur OP croît, les longueurs OR et QI décroissent. Donc plus un angle aigu a une mesure petite, plus son cosinus est grand et se rapproche de 1, plus son sinus et sa tangente sont petits et se rapprochent de 0. À contrario, lorsque M se rapproche de J, la mesure de l'angle $\widehat{POM}$ croît. La longueur OP décroît, les longueurs OR et QI croissent. Donc plus un angle aigu a une mesure grande, plus son cosinus est petit et se rapproche de 0, plus son sinus et sa tangente sont grands, le premier se rapprochant de 1 et le second de l'infini. Entre ces deux bornes, certaines valeurs sont remarquables.

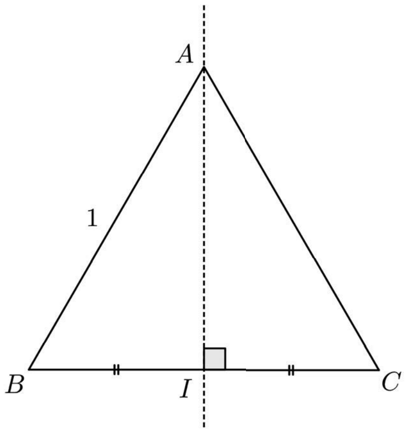
4.3 Angles remarquables

Remarque. Il est bon de connaître par cœur quelques valeurs usuelles du cosinus, du sinus et de la tangente.

Proposition 24. *On a :*

1. $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(30°) = \frac{1}{2}$ *et* $\tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
2. $\cos(45°) = \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\tan(45°) = 1$.
3. $\cos(60°) = \frac{1}{2}$, $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $\tan(60°) = \sqrt{3}$.

Démonstration. 1. Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1. Soit I le milieu du segment $[BC]$. D'après le cours de Sixième, la médiane (AI) est aussi la médiatrice du segment $[BC]$.



Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = AI^2 + BI^2$$

soit :

$$1^2 = AI^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

d'où :

$$AI^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

puis :

$$AI = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ car } AI \geqslant 0$$

Par ailleurs, le triangle ABC étant équilatéral, la médiane (AI) est également la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Donc, par définition, $\widehat{BAI} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 30°$. Ainsi :

$$\cos(\widehat{BAI}) = \frac{AI}{AB}$$

soit :

$$\cos(30°) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}$$

d'où :

$$\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

À présent, la proposition 22 nous permet d'écrire l'égalité suivante :

$$\cos^2(30°) + \sin^2(30°) = 1$$

soit :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sin^2(30°) = 1$$

d'où :

$$\frac{3}{4} + \sin^2(30°) = 1$$

puis :

$$\sin^2(30°) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

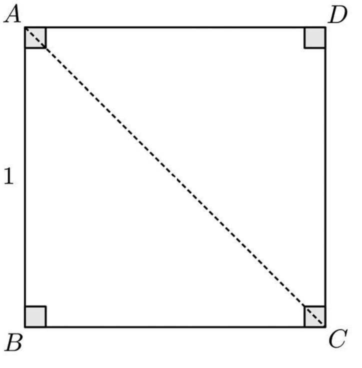
et enfin :

$$\sin(30°) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \text{ car } \sin(30°) \geqslant 0$$

Toujours d'après la proposition 22, on a :

$$\tan(30°) = \frac{\sin(30°)}{\cos(30°)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. Soit $ABCD$ un carré de côté 1.



Dans le triangle ABC rectangle en B, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

soit :

$$AC^2 = 1^2 + 1^2$$

d'où :

$$AC^2 = 2$$

puis :

$$AC = \sqrt{2} \text{ car } AC \geqslant 0$$

En outre, d'après le cours de Sixième, la diagonale (AC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$. Donc, par définition, $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAD} = 45°$. Ainsi, dans le triangle ABC rectangle en B, on a :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC}$$

soit :

$$\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

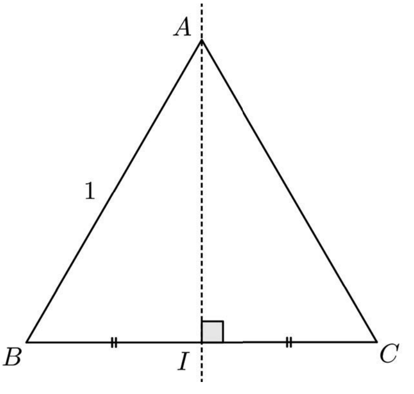
Dans ce même triangle ABC, on a également :

$$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Enfin, d'après la proposition 22, on a :

$$\tan(45°) = \frac{\sin(45°)}{\cos(45°)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

3. Reprenons le triangle équilatéral ABC de côté 1. Soit I le milieu du segment $[BC]$. D'après le cours de Sixième, la médiane (AI) est aussi la médiatrice du segment $[BC]$.



Par définition, le triangle AIB est donc rectangle en I. On a :

$$\cos(\widehat{ABI}) = \frac{BI}{BA}$$

soit :

$$\cos(60°) = \frac{\frac{1}{2}}{1}$$

d'où :

$$\cos(60°) = \frac{1}{2}$$

Dans ce même triangle AIB, on a également :

$$\sin(\widehat{ABI}) = \frac{AI}{AB}$$

soit :

$$\sin(60°) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Enfin, d'après la proposition 22, on a :

$$\tan(60°) = \frac{\sin(60°)}{\cos(60°)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{1} = \sqrt{3}$$

□

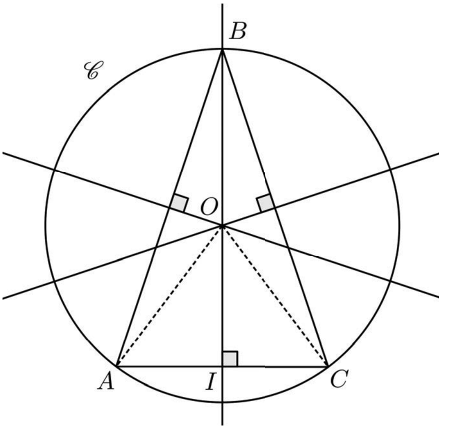
Remarque. Nous pouvons synthétiser ces résultats sous la forme d'un tableau :

Angle x / Rapports	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non défini

4.4 Exercices

Exercice 1

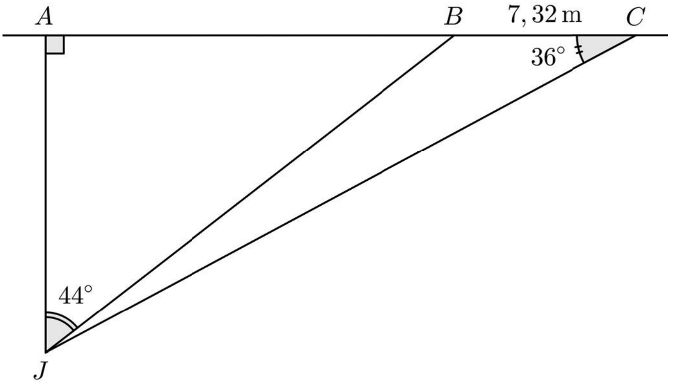
Soit ABC un triangle isocèle en B tel que l'angle $\widehat{ABC}$ est aigu. Soit $\mathscr{C}$ le centre circonscrit au triangle ABC. Soient O son centre et r son rayon. La droite (OB) coupe le côté $[AC]$ en un point I.



1. Démontrer que $\widehat{AOI} = \widehat{ABC}$.
2. Démontrer que $BI = r\left(1 + \cos(\widehat{ABC})\right)$.
3. Exprimer la longueur AC en fonction de r et $\sin(\widehat{ABC})$.
4. Démontrer que l'aire du triangle ABC est égale à $r^2 \sin(\widehat{ABC})\left(1 + \cos(\widehat{ABC})\right)$.

Exercice 2

Soit ACJ un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ACJ} = 46°$. Soit B un point appartenant au côté $[AC]$. On sait que $BC = 7,32\,\text{m}$ et que $\widehat{AJB} = 44°$.



1. Exprimer les longueurs AB et AC en fonction de la longueur AJ.
2. Calculer la valeur exacte de la longueur AJ.

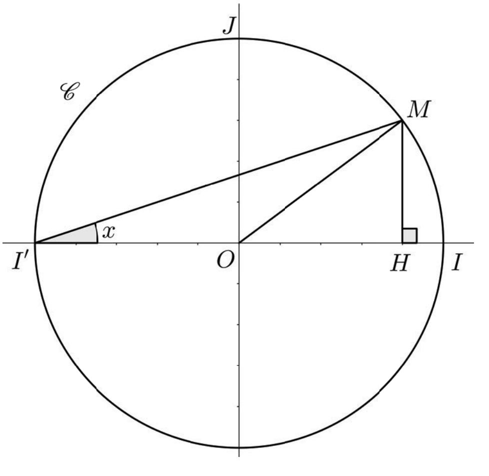
Exercice 3

Soit x une mesure d'un angle aigu différente de $0°$ et $90°$. Démontrer les égalités suivantes :

1. $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
2. $1 + \frac{1}{\tan^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)}$
3. $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$
4. $\sin^6(x) + \cos^6(x) + 3\sin^2(x)\cos^2(x) = 1$
5. $\tan(x) + \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$

Exercice 4

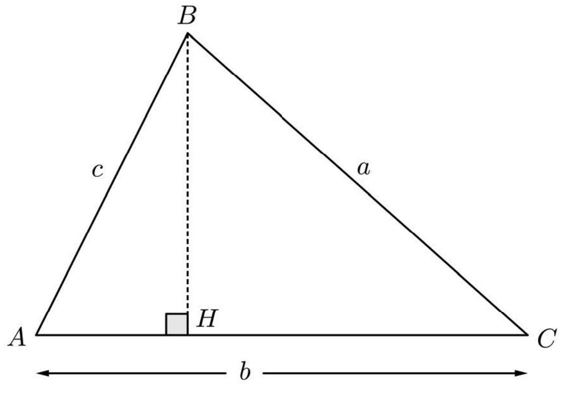
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon 1. Soit $[II']$ un diamètre de ce cercle. Soit M un point appartenant à l'arc $\overset{\frown}{IJ}$. Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (II'). Soit x la mesure de l'angle $\widehat{MI'I}$.



1. Exprimer la mesure de l'angle $\widehat{MOI}$ en fonction de x.
2. Exprimer la longueur $I'H$ en fonction de $\cos(2x)$.
3. Exprimer la longueur HM en fonction de $\sin(2x)$.
4. Exprimer la longueur $I'M$ en fonction $\cos(x)$ et $\cos(2x)$.
5. Démontrer que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.
6. Démontrer que $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$.
7. Démontrer que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
8. En appliquant ce qui précède à $x = 15°$, calculer $\cos(15°)$ et $\sin(15°)$.

Exercice 5

Soit ABC un triangle dont l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu. Soit H le pied de la hauteur issue de C. On pose $a \coloneqq BC$, $b \coloneqq AC$, $c \coloneqq AB$. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC et par p son demi-périmètre.



1. Démontrer que $\mathscr{A}^2 = \frac{1}{4}b^2c^2\left(1 - \cos^2(\widehat{BAC})\right)$.
2. En utilisant le théorème d'Al-Kashi démontré dans le cours Quatrième (chapitre 8), exprimer $\cos(\widehat{BAC})$ en fonction de a, b et c.
3. En déduire que :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2}$$

4. En déduire que :

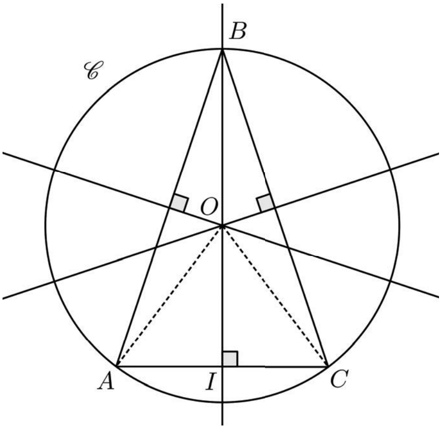
$$\mathscr{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

   Cette formule est appelée la formule de Héron d'Alexandrie[1].
5. Calculer l'aire d'un triangle de côtés 4, 5 et 6 et exprimer le résultat sous la forme $a\sqrt{7}$, où a est un nombre rationnel.
6. Calculer l'aire d'un triangle de côtés 3, 4 et 5. Pourquoi obtient-on un entier ?

1. Héron d'Alexandrie est un mathématicien grec du I^{er} siècle après J.-C.

4.5 Corrigés

Exercice 1



1. Par construction, on a :

$$\widehat{AOI} = \widehat{BOI} - \widehat{AOB} = 180^\circ - \widehat{AOB}$$

Or $\widehat{AOB} = 180^\circ - \widehat{BAO} - \widehat{ABO}$ et, comme le triangle AOB est isocèle en O, $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$. D'où $\widehat{AOB} = 180^\circ - 2\widehat{ABO}$ et par suite :

$$\begin{aligned}\widehat{AOI} &= 180^\circ - (180^\circ - 2\widehat{ABO})\\ &= 180^\circ - 180^\circ + 2\widehat{ABO}\\ &= 2\widehat{ABO}\end{aligned}$$

D'après le cours de Sixième, la médiatrice (BI) du triangle ABC est également la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Donc, par définition, $\widehat{ABC} = 2\widehat{ABO}$. Par conséquent, $\widehat{AOI} = \widehat{ABC}$.

2. Dans le triangle AIO rectangle en I, on a $\cos(\widehat{AOI}) = \frac{OI}{OA} = \frac{OI}{r}$.
Donc $OI = r\cos(\widehat{AOI})$. De plus, $BO = r$. D'où :

$$\begin{aligned}BI &= BO + OI\\ &= r + r\cos(\widehat{AOI})\\ &= r\left(1 + \cos(\widehat{AOI})\right)\\ &= r\left(1 + \cos(\widehat{ABC})\right) \longleftarrow \text{ question 1.}\end{aligned}$$

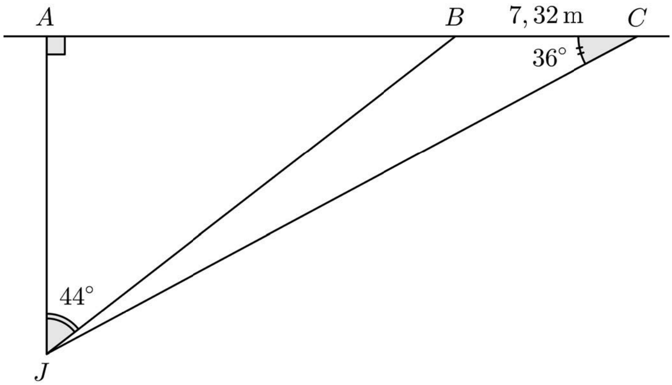
3. Dans le triangle AIO rectangle en I, on a $\sin(\widehat{AOI}) = \frac{AI}{OA} = \frac{AI}{r}$.
Donc $AI = r\sin(\widehat{AOI})$. D'où :

$$\begin{aligned} AC &= 2AI \\ &= 2r\sin(\widehat{AOI}) \\ &= 2r\sin(\widehat{ABC}) \end{aligned}$$

4. Soit $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC. On a :

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \frac{AC \times BI}{2} \\ &= \frac{\cancel{2}r\sin(\widehat{ABC}) \times r\left(1+\cos(\widehat{ABC})\right)}{\cancel{2}} \\ &= r^2\sin(\widehat{ABC})\left(1+\cos(\widehat{ABC})\right) \end{aligned}$$

Exercice 2



1. Dans le triangle JAB rectangle en A, on a :

$$\tan(\widehat{AJB}) = \frac{AB}{AJ}$$

d'où :

$$AB = AJ \times \tan(44°)$$

2. Dans le triangle JAC rectangle en A, on a :

$$\begin{aligned} \widehat{JAB} + \widehat{ACJ} + \widehat{CJA} &= 180° \\ 90° + 36° + \widehat{CJA} &= 180° \\ 126° + \widehat{CJA} &= 180° \\ \widehat{CJA} &= 180° - 126° \\ \widehat{CJA} &= 54° \end{aligned}$$

CORRIGÉS

Dans ce même triangle, on a également :

$$\tan(\widehat{CJA}) = \frac{AC}{AJ}$$

d'où :

$$AC = AJ \times \tan(54°)$$

3. D'après l'énoncé, $AC - AB = 7,32$. Donc, d'après les questions 1 et 2, on a :

$$\begin{aligned} AJ \times \tan(54°) - AJ \times \tan(44°) &= 7,32 \\ AJ\left(\tan(54°) - \tan(44°)\right) &= 7,32 \\ AJ &= \frac{7,32}{\tan(54°) - \tan(44°)} \\ AJ &\simeq 17,82\,\text{m au centimètre près} \end{aligned}$$

Exercice 3

1. D'après la proposition 22, on a :

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2(x) &= 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

2. D'après la proposition 22, on a :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\tan^2(x)} &= 1 + \frac{1}{\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} \\ &= 1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} \\ &= \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} \\ &= \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} \\ &= \frac{1}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

3. D'après la question 1 :

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

D'où :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}$$

puis :

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$$

4. D'une part :

$$\begin{aligned}
\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)^3 &= \left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)^2 \times \left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) \\
&= 1^2 \times 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)^3 = &\left(\cos^2(x)\right)^3 + 3\left(\cos^2(x)\right)^2 \sin^2(x) + \\
&3\cos^2(x)\left(\sin^2(x)\right)^2 + \left(\sin^2(x)\right)^3 \\
&= \cos^6(x) + 3\sin^2(x)\cos^2(x)\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) + \sin^6(x) \\
&= \cos^6(x) + \sin^6(x) + 3\sin^2(x)\cos^2(x)
\end{aligned}$$

D'où :

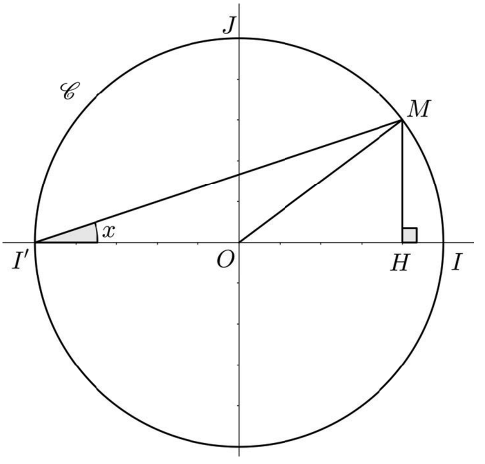
$$\sin^6(x) + \cos^6(x) + 3\sin^2(x)\cos^2(x) = 1$$

5. D'après la proposition 22, on a :

$$\begin{aligned}
\tan(x) + \frac{1}{\tan(x)} &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{1}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} \\
&= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\
&= \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos(x)\sin(x)} \\
&= \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}
\end{aligned}$$

CORRIGÉS

Exercice 4



1. Par construction $\widehat{MOH} = \widehat{I'OI} - \widehat{I'OM} = 180° - \widehat{I'OM}$. Or, le triangle $I'OM$ étant isocèle en M, on a également $\widehat{I'OM} = 180° - 2\widehat{OI'M}$. D'où

$$\begin{aligned}\widehat{MOH} &= 180° - \left(180° - 2\widehat{OI'M}\right)\\ &= 180° - 180° + 2\widehat{OI'M}\\ &= 2\widehat{OI'M}\\ &= 2x\end{aligned}$$

2. D'une part $I'H = I'O + OH = 1 + OH$. D'autre part, dans le triangle OHM rectangle en H, on a $\cos(2x) = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{1} = OH$. D'où $I'H = 1 + \cos(2x)$.
3. Dans le triangle OHM rectangle en H, on a $\sin(2x) = \frac{HM}{OM} = \frac{HM}{1} = HM$.
4. Dans le triangle $I'HM$ rectangle en H, on a $\cos(x) = \frac{I'H}{I'M} = \frac{1+OH}{I'M}$. D'où $I'M = \frac{1+OH}{\cos(x)} = \frac{1+\cos(2x)}{\cos(x)}$.
5. Dans le triangle $I'HM$ rectangle en H, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$I'M^2 = I'H^2 + HM^2$$

soit :

$$\left(\frac{1+\cos(2x)}{\cos(x)}\right)^2 = (1+\cos(2x))^2 + \sin^2(2x)$$

d'où :

$$\frac{(1+\cos(2x))^2}{\cos^2(x)} = 1 + 2\cos(2x) + \underbrace{\cos^2(2x) + \sin^2(2x)}$$

puis :

$$(1+\cos(2x))^2 = 2\,(1+\cos(2x))\cos^2(x)$$

Or $1+\cos(2x) \neq 0$. Par conséquent :

$$1+\cos(2x) = 2\cos^2(x)$$

et donc :

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

6. D'après la question 5, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. Or, d'après la proposition 22, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. D'où :

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= 2\left(1-\sin^2(x)\right) - 1\\ &= 2 - 2\sin^2(x) - 1\\ &= 1 - 2\sin^2(x)\end{aligned}$$

7. D'après la proposition 22, $\sin^2(2x) = 1 - \cos^2(2x)$. Or $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. D'où :

$$\begin{aligned}\sin^2(2x) &= 1 - \left(2\cos^2(x) - 1\right)^2\\ &= 1 - \left(4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1\right)\\ &= \cancel{1} - 4\cos^4(x) + 4\cos^2(x) - \cancel{1}\\ &= 4\cos^2(x)\left(1-\cos^2(x)\right)\\ &= 4\cos^2(x)\sin^2(x)\end{aligned}$$

x étant une mesure comprise strictement entre $0°$ et $90°$, en passant à la racine carrée les deux membres de l'égalité précédente, on obtient :

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

8. D'après la question 6, $\cos(15°) = \sqrt{\frac{\cos(30°)+1}{2}}$. Or, d'après la proposition 22, $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où :

$$
\begin{aligned}
\cos(15^\circ) &= \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}
\end{aligned}
$$

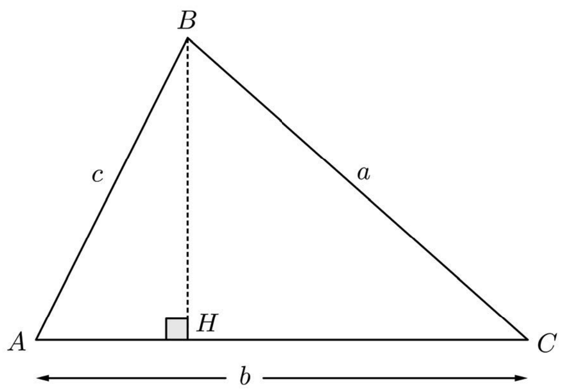
D'après la proposition 22, on a :

$$
\begin{aligned}
\sin^2(15^\circ) &= 1-\cos^2(15^\circ) \\
&= 1-\left(\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}\right)^2 \\
&= 1-\frac{\sqrt{3}+2}{4} \\
&= \frac{4-\sqrt{3}-2}{4} \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}
$$

Or $\sin(15^\circ) > 0$. D'où :

$$
\sin(15^\circ) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}
$$

Exercice 5



1. D'après le cours de Sixième, on a $\mathscr{A} = \frac{AC \times BH}{2} = \frac{b \times BH}{2}$. Dans le triangle AHB rectangle en H, on a par ailleurs $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BH}{BA} = \frac{BH}{c}$. D'où $BH = c\sin(\widehat{BAC})$. Par conséquent, $\mathscr{A} = \frac{b \times c\sin(\widehat{BAC})}{2} = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{BAC})$. En élevant cette égalité au carré, on en déduit $\mathscr{A}^2 = \frac{1}{4}b^2c^2\sin^2(\widehat{BAC})$ puis, en vertu de la proposition 22, $\mathscr{A}^2 = \frac{1}{4}b^2c^2\left(1 - \cos^2(\widehat{BAC})\right)$.
2. D'après le théorème d'Al-Kashi démontré dans le cours de Quatrième, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC})$$

d'où :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

3. Des questions 1 et 2, on déduit l'égalité suivante :

$$\mathscr{A}^2 = \frac{1}{4}b^2c^2\left[1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2\right]$$

puis :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^2 &= \frac{1}{4}b^2c^2 - \frac{1}{4}\cancel{b^2c^2} \times \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4\cancel{b^2c^2}} \\ &= \frac{1}{4}b^2c^2 - \frac{1}{16}(b^2 + c^2 - a^2)^2 \\ &= \frac{1}{16}\left(4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2\right)\end{aligned}$$

Or $(\underbrace{b^2 + c^2} - \underbrace{a^2})^2 = \left(a^2 - (b^2 + c^2)\right)^2 = (a^2 - b^2 - c^2)^2$, d'où :

$$\mathscr{A}^2 = \frac{1}{16}\left(4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2\right)$$

et finalement :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \sqrt{\frac{1}{16}\left(4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2\right)} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2}\end{aligned}$$

4. D'après la question 3, on a :

CORRIGÉS

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}\\
&= \sqrt{\frac{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}{16}}\\
&= \sqrt{\frac{-a^4+2a^2b^2+2a^2c^2-b^4+2b^2c^2-c^4}{16}} \quad \longleftarrow \text{ développement}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\\
&= \sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)\times\frac{1}{2}(b+c-a)\times\frac{1}{2}(a+c-b)\times\frac{1}{2}(a+b-c)}\\
&= \sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}\\
&= \sqrt{\frac{-a^4+2a^2b^2+2a^2c^2-b^4+2b^2c^2-c^4}{16}} \quad \longleftarrow \text{ développement}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathscr{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

5. D'après la question 4, l'aire d'un triangle de côtés 4, 5 et 6 est égale à :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-4\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-6\right)}\\
&= \sqrt{\frac{15}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}}\\
&= \sqrt{\frac{1\,575}{16}}\\
&= \frac{15\sqrt{7}}{4}\\
&= \frac{15}{4}\sqrt{7}
\end{aligned}$$

6. D'après la question 4, l'aire d'un triangle de côtés 3, 4 et 5 est égale à :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \sqrt{6\times(6-3)\times(6-4)\times(6-5)}\\
&= \sqrt{6\times 3\times 2\times 1}\\
&= \sqrt{36}\\
&= 6
\end{aligned}$$

Ce résultat n'est pas très surprenant. En effet, le triplet $(3;4;5)$ est un triplet pythagoricien d'après le cours de Quatrième. Autrement dit, le triangle de côtés 3, 4 et 5 est rectangle. Ses cathètes mesurent donc 3 et 4 et son aire est tout simplement égale à la moitié du produit des longueurs de ses cathètes, soit $\frac{3\times 4}{2} = 6$.

5 Arithmétique

Dans ce chapitre, nous ne considérerons que les nombres entiers naturels.

5.1 Nombres premiers

Définition 25. Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On dit que n est premier si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et n.

Exemple. 7 est un nombre premier car ses seuls diviseurs positifs sont 1 et 7. En revanche, 12 ne l'est pas car 3 divise 12.

Remarque. Nous pouvons effectuer deux remarques :

1. Par définition, 1 n'est pas premier.
2. 2 est l'unique nombre entier naturel pair premier. Autrement dit, tout nombre premier distinct de 2 est impair.

Théorème 26. *Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.*

Démonstration. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. De deux choses, l'une, soit n est premier, soit il ne l'est pas. Si n est premier, alors n admet un diviseur premier, à savoir lui-même. Si n n'est pas premier, alors, par définition, l'ensemble des diviseurs de n supérieurs ou égaux à 2 n'est pas vide. Donc cet ensemble admet un plus petit élément. Désignons par p ce plus petit élément. Si p n'était pas premier, alors il admettrait un diviseur d. Mais alors d diviserait n par transitivité de la relation de divisibilité. Ce qui contredirait la définition de p. Par conséquent, p est nécessairement premier. □

Théorème 27. *(Théorème d'Euclide) L'ensemble des nombres premiers est infini. Autrement dit, la suite des nombres premiers est illimitée.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un nombre fini n de nombres premiers. Désignons-les par p_1, p_2, ..., p_n. Posons alors $N := p_1 \times \ldots \times p_n + 1$. Par construction, $N \geqslant 2$, donc, d'après le théorème 26, N admet un diviseur premier. Par conséquent, celui-ci se trouve nécessairement parmi p_1, p_2, ..., p_n. Notons p_i le diviseur premier en question. Il est clair que la division euclidienne de N par p_i admet pour reste 1. Donc p_i ne divise pas N. D'où la contradiction. Ainsi, il ne peut exister un nombre fini de nombres premiers. □

Remarque. Nous pouvons formuler deux remarques :

1. Il existe un moyen pratique d'obtenir la liste de tous les nombres premiers inférieurs à un certain nombre entier naturel que l'on s'est fixé à l'avance, par exemple 100. Il s'agit du crible d'Ératosthène[1] dont voici la description :

   (a) On écrit tous les entiers de 1 à 100 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

   (b) On barre 1 qui n'est pas premier par définition puis tous les multiples de 2 sauf 2 qui est premier :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

1. Ératosthène est un mathématicien grec du III^{e} siècle avant J.-C.

(c) On barre tous les multiples de 3 sauf 3 qui est premier :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

(d) Les multiples de 4 ont déjà été barrés. En effet, si un nombre est un multiple de 4, alors il est un multiple de 2.

Démonstration. Soit n un nombre entier naturel multiple de 4. Alors, par définition, il existe un nombre entier naturel k tel $n = 4 \times k$. Mais alors $n = 2 \times 2 \times k = 2 \times 2k$. Or $2k$ est un nombre entier naturel. Donc, par définition, n est également un multiple de 2. □

(e) On barre les multiples de 5 sauf 5 qui est premier :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

(f) Les multiples de 6 ont déjà été barrés. En effet, si un nombre est un multiple de 6, alors il est multiple de 2.

Démonstration. Soit n un nombre entier naturel multiple de 6. Alors, par définition, il existe un nombre entier naturel k tel $n = 6 \times k$. Mais alors

$n = 2 \times 3 \times k = 2 \times 3k$. Or $3k$ est un nombre entier naturel. Donc, par définition, n est également un multiple de 2. $\square$

(g) On barre les multiples de 7 sauf 7 qui est-il premier :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

(h) Les multiples de 8 ont déjà été barrés. En effet, si un nombre est un multiple de 8, alors il est un multiple de 2.

Démonstration. Soit n un nombre entier naturel multiple de 8. Alors, par définition, il existe un nombre entier naturel k tel $n = 8 \times k$. Mais alors $n = 2 \times 4 \times k = 2 \times 4k$. Or $4k$ est un nombre entier naturel. Donc, par définition, n est également un multiple de 2. $\square$

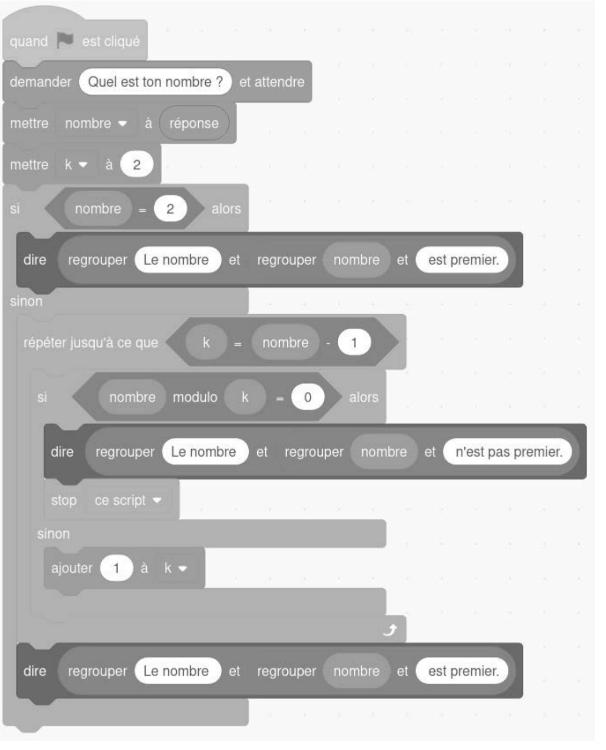
(i) Les multiples de 9 ont déjà été barrés. En effet, si un nombre est un multiple de 9, alors il est un multiple de 3.

Démonstration. Soit n un nombre entier naturel multiple de 9. Alors, par définition, il existe un nombre entier naturel k tel $n = 9 \times k$. Mais alors $n = 3 \times 3 \times k = 3 \times 3k$. Or $3k$ est un nombre entier naturel. Donc, par définition, n est également un multiple de 3. $\square$

(j) Il est inutile de poursuivre. En effet, si un nombre supérieur ou égal à 10 divisait l'un des nombres restants, alors le quotient de la division serait inférieur à 10 et on l'aurait déjà détecté préalablement en tant que diviseur. Il s'ensuit que les nombres non barrés sont les nombres premiers compris entre 1 et 100 :

$$\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47;\\ 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97\}$$

2. Voici un algorithme naïf permettant de déterminer si un nombre entier naturel est premier ou non.



5.2 Décomposition d'un nombre entier naturel en produit de facteurs premiers

Théorème 28. *(Théorème fondamental de l'arithmétique) Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 peut se décomposer en un produit de facteurs premiers. De plus, cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.*

Démonstration. 1. EXISTENCE : soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si n est premier, alors c'est évident. Sinon, d'après le théorème 26, n admet un diviseur premier p_1 tel que $p_1 < n$. Ainsi, il existe un entier naturel q_1 tel que $q_1 < n$ et $n = p_1 q_1$. Si q_1 est premier, alors $n = p_1 \times q_1$ avec p_1 et q_1 premiers. Sinon, d'après le théorème 26, q_1 admet un diviseur premier p_2 tel que $p_2 < q_1$. Ainsi, il existe un entier naturel q_2 tel que $q_2 < q_1$ et $q_1 = p_2 q_2$. Si q_2 est premier, alors $n = p_1 \times p_2 \times q_2$ avec p_1, p_2 et q_2 premiers. Sinon, on poursuit le processus, obtenant q_3, q_4, ..., q_n tels que $q_3 > q_4 > \ldots > q_n \geqslant 2$ avec q_n nécessairement premier. De la sorte, $n = p_1 \times \ldots \times p_n \times q_n$ avec p_1, ..., p_n, q_n premiers.
2. UNICITÉ : admise. □

Exemple. Décomposons 315 et 1 400 en produit de facteurs premiers. Pour cela, on s'inspire de la méthode utilisée pour le crible d'Ératosthène, en testant d'abord la divisibilité par 2, puis par 3, puis par 5, etc.

315	3
105	3
35	5
7	

1 400	2
700	2
350	2
175	5
35	5
7	

D'où $315 = 3^2 \times 5 \times 7$ et $1\,400 = 2^3 \times 5^2 \times 7$.

Remarque. Le théorème fondamental de l'arithmétique nous permet l'analogie suivante. En chimie, tout molécule est composée d'atomes, plus petites parties d'un corps simple. En arithmétique, tout nombre entier naturel est composé de nombres premiers. Les nombres premiers sont donc les « atomes » de l'arithmétique puisqu'ils permettent de reconstituer, via la multiplication, toutes les « molécules » de l'arithmétique, à savoir les nombres entiers naturels.

Proposition 29. *Soient a et b deux nombres entiers naturels. b divise a si, et seulement si, la décomposition en facteurs premiers de a contient tous les facteurs de la décomposition en facteurs premiers de b avec des exposants respectifs au moins égaux à ceux de b.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème fondamental de l'arithmétique. □

Exemple. Expliquons pourquoi 21 divise 315 à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers.
$21 = 3 \times 7$ et $215 = 3^2 \times 5 \times 7$. Les facteurs 3 et 7 présents dans la décomposition de 21 sont présents dans la décomposition de 315 avec des exposants respectifs inférieurs ou égaux. Donc, d'après la proposition 29, 21 divise 315.

Remarque. La décomposition d'un nombre entier naturel en produit de facteurs premiers connaît au moins deux applications :

1. Réduire une fraction.
   Exemple. Déterminons la fraction irréductible égale à $\frac{8\,613}{9\,009}$.

8 613	3
2 871	3
957	3
319	11
29	

9 009	3
3 003	3
1 001	7
143	11
13	

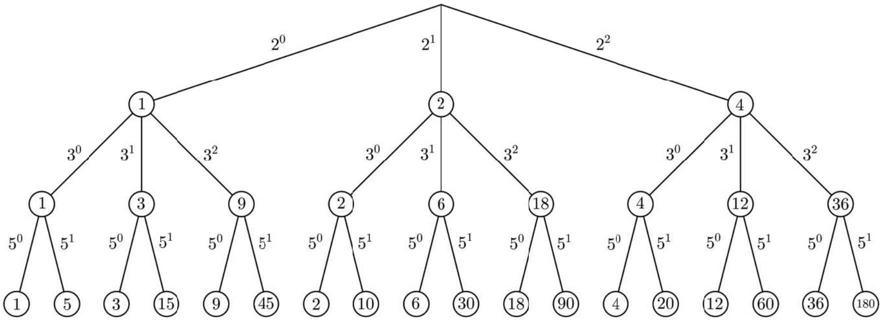
Donc $8\,613 = 3^3 \times 11 \times 29$ et $9\,009 = 3^2 \times 7 \times 11 \times 13$. Ainsi :

$$\frac{8\,613}{9\,009} = \frac{3^{\cancel{3}} \times \cancel{11} \times 29}{\cancel{3^2} \times 7 \times \cancel{11} \times 13} = \frac{3 \times 29}{7 \times 13} = \frac{87}{91}$$

2. Déterminer l'ensemble des diviseurs de cet entier naturel via deux représentation graphiques :

   (a) L'ARBRE.

   Exemple. Déterminons l'ensemble des diviseurs de 180. La décomposition en produit de facteurs premiers nous donne $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$. D'où l'arbre des diviseurs de 180 :

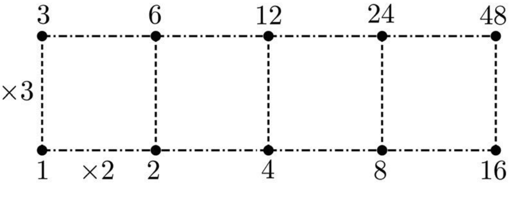


   180 possède $3 \times 3 \times 2 = 18$ diviseurs :

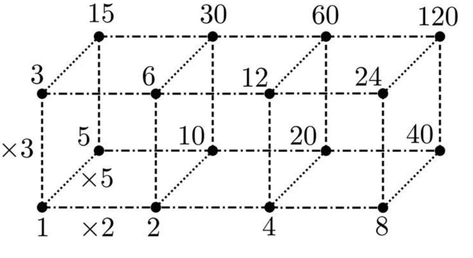
$$\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10; 12; 15; 18; 20; 30; 36; 45; 60; 90; 180\}$$

   (b) LE TREILLIS. L'idée consiste à partir du nombre entier naturel 1, qui divise tout nombre entier naturel, puis à créer une direction pour chaque diviseur premier. Poursuivre dans une direction revient alors à multiplier par ledit diviseur. Un graphe appelé « treillis des diviseurs » se créé alors sous nos yeux.

   Exemples. Voici le treillis des diviseurs de 48 :



   Voici le treillis des diviseurs de 120 :



Exercice. Écrire un algorithme renvoyant la décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre entier naturel.

5.3 Plus grand commun diviseur

Remarque. Soit n un nombre entier naturel. Si k est un diviseur de n, alors, par définition, il existe un entier naturel q tel que $n = k \times q$. Par conséquent, q est également un diviseur de n. Autrement dit, déterminer un diviseur de n revient généralement à en déterminer deux. Par conséquent, afin de déterminer l'ensemble des diviseurs de n, il suffit de tester sa divisibilité par 1, puis par 2, etc. jusqu'à $\sqrt{n}$. En effet, si n admet un diviseur supérieur à $\sqrt{n}$, alors il admet également un diviseur inférieur à $\sqrt{n}$, diviseur qui serait déjà détecté. L'ensemble des diviseurs de n est généralement noté $\mathscr{D}(n)$.

Exemple. Déterminons les diviseurs de 45 :

$$\begin{aligned} 45 &= 1 \times 45 \\ &= 3 \times 15 \\ &= 5 \times 9 \end{aligned}$$

D'où $\mathscr{D}(45) = \{1; 3; 5; 9; 15; 45\}$.

Définition 30. On appelle diviseur commun à deux ou plusieurs nombres entiers naturels tout nombre entier naturel qui divise chacun d'eux.

Remarque. Pour déterminer l'ensemble des diviseurs qui sont communs à plusieurs nombres, on prend l'intersection des ensembles des diviseurs de chaque nombre.

Exemple. On a $\mathscr{D}(30) = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$, $\mathscr{D}(45) = \{1; 3; 5; 9; 15; 45\}$ et $\mathscr{D}(75) = \{1; 3; 5; 15; 25; 75\}$. D'où l'ensemble des diviseurs communs à 30, 45 et 75 :

$$\mathscr{D}_{30;45;75} = \mathscr{D}(30) \cap \mathscr{D}(45) \cap \mathscr{D}(75) = \{1; 3; 5; 15\}$$

Définition 31. On appelle plus grand commun diviseur à plusieurs nombres entiers naturels le plus grand des diviseurs communs à ces nombres.

Exemple. D'après l'exemple précédent, le plus grand commun diviseur à 30, 45 et 75 est 15. On note $\text{PGCD}(30; 45; 75) = 15$.

Définition 32. Si le PGCD de deux nombres entiers naturels non nuls est égal à 1, alors ces deux nombres sont dits premiers entre eux.

Exemple. $\mathscr{D}(36) = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$ et $\mathscr{D}(125) = \{1; 5; 25; 125\}$. Donc $\text{PGCD}(36; 125) = 1$. D'après la définition 32, les nombres 36 et 125 sont donc premiers entre eux.

Proposition 33. *Soient a et b deux nombres entiers naturels. Un nombre entier naturel divise a et b si, sa décomposition en produit de facteurs premiers ne contient que des facteurs premiers communs à a et b, chacun d'eux affecté d'un exposant inférieur ou égal à son plus petit exposant dans la décomposition de a et b.*

Démonstration. Découle du théorème 28 et de la proposition 29. □

Remarque. D'après le théorème 28 et la définition 31, le PGCD de deux nombres entiers naturels a et b décomposés en produits de facteurs premiers s'obtient en faisant le produit des facteurs premiers communs à a et b, chaque facteur premier étant affecté du minimum des deux exposants dont il est affecté dans a et b.

Exemple. Calculons le PGCD de 720 et 1 512 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{PGCD}(720; 1\,512) &= \mathrm{PGCD}\left(2^4 \times 3^2 \times 5; 2^3 \times 3^3 \times 7\right) \\
&= 2^{\min(4;3)} \times 3^{\min(2;3)} \times 5^{\min(1;0)} \times 7^{\min(1;0)} \\
&= 2^3 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^0 \\
&= 72
\end{aligned}$$

Théorème 34. *Les diviseurs communs à deux nombres entiers naturels sont les diviseurs de leur PGCD. Plus formellement, pour tous nombres entiers naturels a et b, $\mathscr{D}(a; b) = \mathscr{D}\left(PGCD(a; b)\right)$.*

Démonstration. Découle directement de la remarque précédente. □

Proposition 35. *Deux nombres entiers naturels sont premiers entre eux si, et seulement si, leurs décompositions en produits de facteurs premiers n'admettent pas de facteur commun.*

Démonstration. Découle directement du théorème 34. □

Proposition 36. *Si l'on divise deux nombres entiers naturels par leur PGCD, alors les quotients obtenus sont premiers entre eux.*

Démonstration. Découle directement de la définition du PGCD et de la définition de deux nombres premiers entre eux. □

Exemple. Le PGCD de 720 et 1 512 est 72. Or $\frac{720}{72} = 10$ et $\frac{1\,512}{72} = 21$. Donc 10 et 21 sont premiers entre eux.

5.4 L'algorithme d'Euclide

Proposition 37. *Pour tous nombres entiers naturels a et b :*

$$PGCD(a; b) = PGCD(b; a)$$

Démonstration. Évidente d'après la définition du PGCD. □

Remarque. Quitte à échanger a et b, nous pouvons donc désormais supposer $a \geqslant b$.

Proposition 38. *Soient a et b deux nombres entiers naturels. Si $a \geqslant b$, alors $PGCD(a;b) = PGCD(a-b;b)$.*

Démonstration. Démontrons plus fortement que l'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs à $a-b$ et b.
$\subset$: soit n un diviseur commun à a et b. Alors il existe des nombres entiers k et l tels que $a = k \times n$ et $b = l \times n$. D'où $a - b = (k-l) \times n$. Ainsi, n divise $a-b$. Or n divise b, donc n est un diviseur commun à $a-b$ et b.
$\supset$: soit n un diviseur commun à $a-b$ et b. Alors il existe des nombres entiers k et l tels que $a-b = k \times n$ et $b = l \times n$. D'où $a = (a-b)+b = (k+l) \times n$. Ainsi, n divise a. Or n divise b, donc n est un diviseur commun à a et b. □

Proposition 39. *Soient a et b deux nombres entiers naturels. Soit r le reste de la division euclidienne de a par b. Alors :*

$$PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$$

Démonstration. Soient q le quotient et r le reste de la division euclidienne de a par b. D'après la proposition précédente, on a :

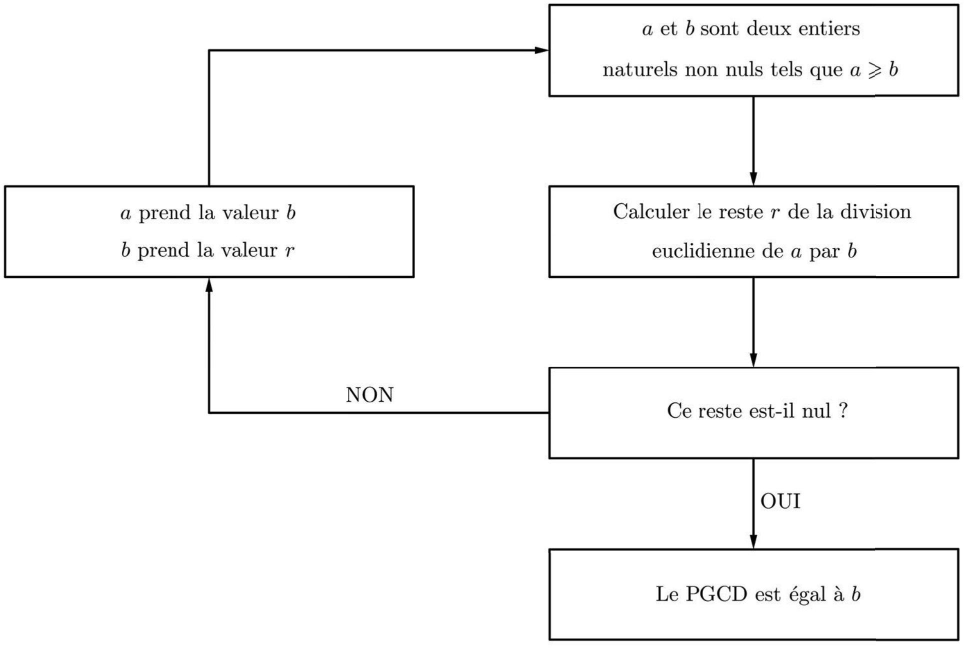
$$\begin{aligned}
\text{PGCD}(a;b) &= \text{PGCD}(a-b;b) \\
&= \text{PGCD}(a-2b;b) \\
&\vdots \\
&= \text{PGCD}(a-qb;b) \\
&= \text{PGCD}(r;b) \\
&= \text{PGCD}(b;r) \longleftarrow \text{ proposition 37}
\end{aligned}$$

□

Proposition 40. *Pour tout nombre entier naturel a non nul, $PGCD(a;0) = a$.*

Démonstration. Tout nombre entier naturel divisant 0, l'ensemble des diviseurs communs à a et 0 est l'ensemble des diviseurs de a. Or le plus grand entier divisant a n'est autre que a lui-même. □

Remarque. La proposition 39 nous invite à réitérer le processus en remplaçant b par r et r par le reste de la division euclidienne de b par r, etc. Au bout d'un nombre fini d'itérations, on tombe sur un reste nul. La proposition 40 permet alors d'affirmer que le dernier reste non nul dans cette succession de divisions euclidiennes est égal au PGCD de a et b. Cette méthode, connue d'Euclide au IV$^{\text{e}}$ siècle avant J.-C., est appelée « l'algorithme d'Euclide ». Nous pouvons la représenter par l'organigramme ci-dessous :



Exemple. Déterminons le PGCD de 9 100 et 1 848.

$$\begin{aligned} 9\,100 &= 1\,848 \times 4 + 1\,708 \\ 1\,848 &= 1\,708 \times 1 + 140 \\ 1708 &= 140 \times 12 + \underbrace{28} \\ 140 &= 28 \times 5 + 0 \end{aligned}$$

Donc PGCD$(9\,100; 1\,848) = 28$.

Remarque. Le PGCD peut s'interpréter géométriquement.
Exemple. Dans une salle de bains, on souhaite recouvrir le mur situé au-dessus de la baignoire avec un nombre entier de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier de centimètres, le plus grand possible.

1. Déterminons la longueur, en centimètres, du côté d'un carreau, sachant que le mur mesure 210 cm de hauteur et 135 cm de largeur.

   Les découpes n'étant pas autorisées, le nombre de carreaux doit un être diviseur commun à 210 et 135. De plus, le carreau devant être le plus grand possible, il s'agit de déterminer le plus grand diviseur commun à 210 et 135. Appliquons l'algorithme d'Euclide à ces deux nombres :

$$\begin{aligned} 210 &= 135 \times 1 + 75 \\ 135 &= 75 \times 1 + 60 \\ 75 &= 60 \times 1 + \underbrace{15} \\ 60 &= 15 \times 4 + 0 \end{aligned}$$

Donc PGCD(210; 135) = 15. Ainsi la taille maximale du carreau est de 15 cm.

2. Combien faudra-t-il alors de carreaux ?
   $210 \div 15 = 14$ donc il y a 14 carreaux sur une longueur.
   $135 \div 15 = 9$ donc il y a 9 carreaux sur une largeur.
   Par conséquent, il y a 9×14, soit 126 carreaux sur la totalité du mur.

5.5 Plus petit commun multiple

Remarque. On note $\mathscr{M}(n)$ l'ensemble des multiples de l'entier naturel n. Ainsi, $\mathscr{M}(n) = \{n; 2n; 3n; 4n; \ldots\}$. Cet ensemble est évidemment infini contrairement à $\mathscr{D}(n)$ qui est nécessairement fini.

Exemple. $\mathscr{M}(7) = \{7; 14; 21; 28; 35; \ldots\}$

Définition 41. On appelle multiple commun à deux ou plusieurs nombres entiers naturels tout nombre multiple de chacun d'eux.

Exemple. 180 et 300 sont des multiples communs à 6, 10 et 15.

Définition 42. Le plus petit des multiples communs à plusieurs nombres s'appelle leur plus petit commun multiple.

Exemple. Le plus petit multiple commune à 6, 10 et 15 est égal à 30. On note PPCM(6; 10; 15) = 30.

Proposition 43. *Soient a et b deux nombres entiers naturels. Un nombre entier est un multiple commun à a et b si, et seulement si, sa décomposition en facteurs premiers contient au moins tous les facteurs premiers contenus dans a et b, chacun d'eux étant affecté d'un exposant supérieur ou égal à son plus grand exposant dans la décomposition de a et b.*

Démonstration. Découle de la proposition 29. □

Exemple. Déterminons quelques multiples communs à 360 et 500. On a :

$$\begin{cases} 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \\ 500 = 2^2 \times 5^3 \end{cases}$$

Les nombres suivants sont donc des multiples communs à 360 et 500 :

$$2^3 \times 3^2 \times 5^3 = 9\,000$$
$$2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 42 = 378\,000$$
$$\vdots$$

Remarque. Le PPCM de deux nombres entiers naturels a et b décomposés en produits de facteurs premiers s'obtient en faisant le produit des facteurs premiers communs à a et b, chaque facteur premier étant affecté du maximum des deux exposants dont il est affecté dans a et b.

Exemple. On a :

$$\begin{aligned}
\text{PPCM}(360;500) &= \text{PPCM}(2^3 \times 3^2 \times 5; 2^2 \times 5^3) \\
&= 2^{\max(3;2)} \times 3^{\max(2;0)} \times 5^{\max(1;3)} \\
&= 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \\
&= 9\,000
\end{aligned}$$

Théorème 44. *Les multiples communs à deux nombres entiers naturels sont les multiples de leur PPCM. Plus formellement, pour tous nombres entiers naturels a et b, $\mathscr{M}(a;b) = \mathscr{M}\,(PPCM(a;b))$.*

Démonstration. Découle directement du théorème 28 et de la définition 42. □

5.6 Exercices

Exercice 1

Une roue de loterie est partagée en douze cases numérotées de 0 à 11. Une puce très savante part de la case 0 et avance en sautant.

1. Déterminer les cases que la puce peut atteindre si celle-ci avance de deux cases à chaque saut.
2. Déterminer les cases que la puce peut atteindre si celle-ci avance de trois cases à chaque saut.
3. Déterminer les cases que la puce peut atteindre si celle-ci avance de cinq cases à chaque saut.
4. Déterminer les cases que la puce peut atteindre si celle-ci avance de huit cases à chaque saut.
5. Émettre une conjecture quant à la condition nécessaire et suffisante sur la taille du saut afin que la puce atteigne toutes les cases.

Exercice 2

1. Démontrer que si n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à trois, alors $n^2 + 4n - 5$ n'est jamais premier.
2. Les nombres $n^2 + n + 41$, où n est nombre un entier naturel, sont-ils tous premiers ?
3. Déterminer le plus petit nombre entier naturel par lequel on puisse diviser 108 675 pour que le quotient soit le carré d'un nombre entier naturel.
4. Déterminer tous les triplets de nombres premiers $(p;q;r)$ tels que :

$$15p + 7pq + qr = pqr$$

Exercice 3

Le papa de Clément dispose de quatre cartons. Sur chacun d'entre eux, il écrit un chiffre différent de 0 puis confie les cartons à Clément. Son papa lui demande alors de former un nombre à quatre chiffres puis d'échanger deux des cartons pour former un nouveau nombre à quatre chiffres. Clément peut-il former deux nombres non premiers entre eux quels que soient les chiffres de départ choisis par son papa ?

Exercice 4

On règle deux montres à la bonne heure au même moment. La première avance de 8 minutes toutes les 12 heures, la seconde retarde de 6 minutes toutes les 24 heures. Au bout de combien de temps marqueront-elles pour la première fois l'heure exacte en même temps ?

Exercice 5

Emma pense à un nombre entier naturel inférieur à 60. Ce nombre donne un reste de 1 si elle le divise par 2, un reste de 2 si elle le divise par 3, un reste de 3 si elle le divise par 4 et un reste de 4 si elle le divise par 5. Quel est le nombre auquel pense Emma ?

5.7 Corrigés

Exercice 1

1. Si la puce avance de deux cases à chaque saut, alors son parcours sera :

   $$0; 2; 4; 6; 8; 10; 0; 2; 4; 6; \ldots$$

   et elle n'atteindra que les cases 0, 2, 4, 6, 8 et 10.
2. Si la puce avance de trois cases à chaque saut, alors son parcours sera :

   $$0; 3; 6; 9; 0; 3; 6; 9; 0; 3 \ldots$$

   et elle n'atteindra que les cases 0, 3, 6 et 9.
3. Si la puce avance de cinq cases à chaque saut, alors son parcours sera :

   $$0; 5; 10; 3; 8; 1; 6; 11; 4; 9; 2; 7; 0; 5; 10 \ldots$$

   et elle atteindra toutes les cases.
4. Si la puce avance de huit cases à chaque saut, alors son parcours sera :

   $$0; 8; 4; 0; 8; 4; 0; 8; 4; 0 \ldots$$

   et elle n'atteindra que les cases 0, 4 et 8.
5. *Conjecture* : la puce atteindra toutes les cases de la roue si, et seulement si, le PGCD de la taille du saut et de douze est égal à 1. Autrement dit, la puce atteindra toutes les cases de la roue si, et seulement si, la taille du saut et douze sont premiers entre eux.

Exercice 2

1. Pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à trois, on a :

$$\begin{aligned} n^2+4n-5 &= n^2+4n+4-9 \\ &= (n+2)^2-9 \\ &= (n+2)^2-3^2 \\ &= (n+2-3)(n+2+3) \\ &= (n-1)(n+5) \end{aligned}$$

   Par conséquent, $n-1$ et $n+5$ divisent tous deux n^2+4n-5 et aucun des deux facteurs n'est inférieur ou égal à un. Autrement dit, n^2+4n-5 est premier.

2. Pour n allant de 0 à 39, le nombre n^2+n+41 est premier. En revanche, pour $n=40$, on a :

$$\begin{aligned} n^2+n+41 &= 40^2+40+41 \\ &= 40\times(40+1)+41 \\ &= 40\times 41+41 \\ &= 41\times 41 \end{aligned}$$

   Et par conséquent n^2+n+41 est divisible par 41. Il n'est donc pas premier.

3. Décomposons 108 675 en produit de facteurs premiers :

$$108\,675 = 3^3\times 5^2\times 7\times 23$$

   Or dans la décomposition en nombre premiers du carré d'un nombre entier naturel, tous les exposants sont pairs. Donc le quotient que nous recherchons est $3^2\times 5^2$. Ainsi, il nous faut diviser 108 675 par $3\times 7\times 23$, c'est-à-dire par 483.

4. L'égalité est équivalente à :

$$qr = pqr-15p-7pq = p(qr-15-7q)$$

   Ainsi p divise qr. Or p, q et r sont premiers. Donc $p=q$ ou $p=r$.
   Premier cas - $p=q$:
   L'égalité devient alors $qr=q^2r-15q-7q^2$ puis, q étant non nul, $r=qr-15-7q$.
   On en déduit :

$$\begin{aligned} 15 &= qr-7q-r \\ 22 &= qr-7q-r+7 \\ 22 &= (q-1)(r-7) \end{aligned}$$

   Or 22 est un nombre pair non multiple de quatre. Donc l'un des deux facteurs est impair et par suite, soit q est pair, soit r est pair. Le seul cas possible est $q=2$ et par conséquent, $r=29$.

CORRIGÉS

Second cas - $p = r$:
L'égalité devient alors $qr = qr^2 - 15r - 7rq$ puis, r étant non nul, $q = qr - 15 - 7q$. On en déduit :

$$15 = qr - 8q$$
$$15 = q(r - 8)$$

Ainsi q est un nombre premier divisant 15. Cela ne peut être que 3 ou 5. Si $q = 3$, alors $r = 13$ et si $q = 5$, alors $r = 11$.
En résumé, les triplets vérifiant l'égalité initiale sont :

$$\{(2;2;29);\ (13;3;13);\ (11;5;11)\}$$

Exercice 3

Si l'un des chiffres écrits par le papa est pair, alors Clément pourra former deux nombres pairs en plaçant ce chiffre pair au rang des unités de chaque nombre.
Si l'un des chiffres écrits par le papa est égal à 5, alors Clément pourra former deux nombres divisibles par 5 en plaçant ce chiffre 5 au rang des unités de chaque nombre.
Si deux des quatre chiffres sont identiques, alors Clément pourra échanger les deux cartons comportant ces deux chiffres identiques et obtenir de la sorte deux nombres égaux non premiers entre eux.
Par conséquent, le seul cas restant est celui où les quatre chiffres sont impairs, différents deux à deux et différents de 5, c'est-à-dire le quadruplet $(1;3;7;9)$. Dans ce cas, Clément peut former les nombres 1 397 et 1 793 dont le PGCD est 11.
Finalement, Clément pourra toujours former deux nombres non premiers entre eux.

Exercice 4

Si la première montre avance de 8 minutes toutes les 12 heures et la seconde retarde de 6 minutes toutes les 24 heures, alors l'écart entre les deux montres augmente de 22 minutes toutes les 24 heures. Or, si les montres comportent toutes les deux douze graduations (comme c'est le cas pour la plupart des montres), alors le plus petit écart entre les deux montres qui ne pourra se distinguer est de 12 heures. Puisque $12\,\text{h} = 720\,\text{min}$ et que $720 = 22 \times 32 + 16$, les deux montres afficheront à nouveau la même heure dans après 32 jours mais avant 33 jours. Par proportionnalité les seize dernières minutes d'écart se résorberont en $24 \div 22 \times 16 = 17{,}4545454\ldots$ h soit environ 17 heures et 27 secondes. Finalement, les deux montres afficheront à nouveau la même heure après environ 32 jours, 17 heures et 27 secondes.

Exercice 5

Soit n le nombre auquel pense Emma. Si le reste de la division euclidienne de n par 2 est égal à 1, alors $n + 1$ est divisible par 2. De la même façon, si le reste de la division euclidienne de n par 3 est égal à 2, alors $n + 1$ est divisible par 3. Un raisonnement similaire nous apprend que n est également divisible par 4 et 5. Or le PPCM de 2, 3, 4 et 5 est 60. Donc n est un multiple de 60. D'après l'énoncé, $n \leqslant 60$. Par conséquent, $n = 60$.

6 Racines carrées

6.1 Définition et premières propriétés

Définition 45. Soit a un nombre réel positif. Alors il existe un unique nombre réel positif x tel que $x^2 = a$. Ce nombre est appelé la racine carrée de a, elle est notée $\sqrt{a}$. Plus formellement, pour tout nombre réel a positif, on a l'équivalence suivante :

$$(x = \sqrt{a}) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 = a \\ x \geqslant 0 \end{cases} \right)$$

Exemple. Voici quelques exemples de racines carrées :
$\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{\frac{36}{64}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.
Notons toutefois que :
$(-1)^2 = 1$, $(-2)^2 = 4$, $(-3)^2 = 9$, $(-4)^2 = 16$, $(-5)^2 = 25$ et $\left(-\frac{6}{8}\right)^2 = \frac{36}{64}$.

Remarque. Nous pouvons formuler quatre remarques :

1. La racine carrée d'un nombre réel est toujours positive.
2. Lorsque la racine carrée d'un nombre réel est entière, on dit que ce nombre est un carré parfait. Voici la liste des premiers carrés parfaits et de leur racine carrée :

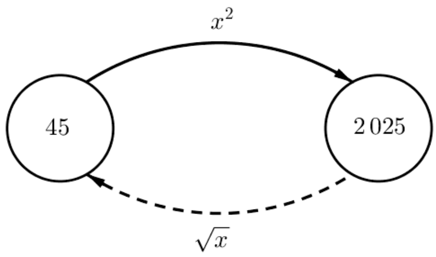
Carré parfait	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Racine carrée	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Carré parfait	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
Racine carrée	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

3. Nous ne pouvons pas extraire la racine carrée d'un nombre réel négatif. En effet, quel serait ce nombre réel qui, multiplié par lui-même, est égal à un nombre

négatif ? Le cours de Quatrième nous fait perdre tout espoir quant à l'existence de ce nombre réel.

4. Dans une première approximation, nous pourrons retenir que le passage à la racine carrée est « l'opération » inverse de l'élévation au carré :



Proposition 46. *Les carrés de deux nombres réels sont égaux si, et seulement si, ces deux nombres réels sont égaux ou opposés. Plus formellement, on a :*

$$\left(x^2 = y^2\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = y \\ ou \\ x = -y \end{cases}\right)$$

Démonstration. $\Rightarrow$: supposons que $x^2 = y^2$. Alors $x^2 - y^2 = 0$ et, d'après la troisième identité remarquable, $(x - y)(x + y) = 0$. D'après la proposition 11, un produit de deux facteurs ne peut être nul que si l'un au moins des deux facteurs est nul. Par conséquent $x - y = 0$ ou $x + y = 0$, c'est-à-dire $x = y$ ou $x = -y$.
$\Leftarrow$: si $x = y$ ou $x = -y$, alors il est clair que $x^2 = y^2$.

$\square$

Exemple. Il existe deux nombres réels dont le carré est égal à 16 : 4 (la racine carrée de 16) et -4 (l'opposé de la racine carrée de 16). Ainsi nous pouvons écrire $4^2 = (-4)^2 = 16$ mais aussi $\sqrt{16} = 4$ et $-\sqrt{16} = -4$.

Proposition 47. *Soit a un nombre réel quelconque. Soit (E) l'équation $x^2 = a$.*

1. *Si $a < 0$, alors (E) n'admet pas de solution réelle.*
2. *Si $a = 0$, alors (E) admet une unique solution réelle : 0.*
3. *Si $a > 0$, alors (E) admet deux solutions réelles distinctes : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.*

Démonstration. 1. Si $a < 0$, alors aucun nombre réel x ne verra son carré égal à a en vertu du tableau de signes suivant :

$\times$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

2. Si $a = 0$, alors il n'existe qu'un seul nombre réel dont le carré est nul, c'est 0.
3. Si $a > 0$, alors a admet une racine carrée $\sqrt{a}$ et l'équation (E) est équivalente à :

$$x^2 - a = 0$$

et donc à :

$$x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$$

puis, d'après la troisième identité remarquable, à :

$$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$$

et enfin, d'après la proposition 11, à :

$$\begin{cases} x - \sqrt{a} = 0 \\ \text{ou} \\ x + \sqrt{a} = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire à :

$$\begin{cases} x = \sqrt{a} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{a} \end{cases}$$

□

Proposition 48. *Soit x un nombre réel quelconque. Alors :*

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Démonstration. Soit x un nombre réel.
PREMIÈRE DÉMONSTRATION :
Si $x \geqslant 0$, alors, d'après la définition de la racine carrée, $\sqrt{x^2} = x$ et, d'après la définition de la valeur absolue, $|x| = x$. Donc $\sqrt{x^2} = |x|$. Si $x < 0$, alors, d'après la définition de la racine carrée, $\sqrt{x^2} = -x$ et, d'après la définition de la valeur absolue, $|x| = -x$. Donc $\sqrt{x^2} = |x|$.
SECONDE DÉMONSTRATION :
$|x| \geqslant 0$ et $|x|^2 = x^2$ donc, d'après la définition de la racine carrée, $\sqrt{x^2} = |x|$. □

Exemple. Voici deux exemples illustrant cette dernière proposition :

1. $\sqrt{3^2} = 3$
2. $\sqrt{(-5)^2} = 5$

6.2 Propriétés algébriques de la racine carrée

Proposition 49. *La racine carrée d'un produit de facteurs positifs est égale au produit des racines carrées de chaque facteur. On dit que la racine carrée est compatible avec la multiplication. Plus formellement, pour tous nombres réels positifs a et b, on a :*

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Démonstration. D'une part :

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 \\ = & \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right) \times \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right) \\ = & \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \\ = & \underbrace{\sqrt{a} \times \sqrt{a}} \times \underbrace{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} \longleftarrow \text{ commutativité de } \times \\ = & ab \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} \geqslant 0$$

Donc, par définition de la racine carrée, $\sqrt{ab} = \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. □

Remarque. Cette proposition peut s'avérer utile à différents égards :

1. Calculer une racine carrée sans calculatrice :

$$\begin{aligned} \sqrt{324} &= \sqrt{4 \times 81} \\ &= \sqrt{4} \times \sqrt{81} \\ &= 2 \times 9 \\ &= 18 \end{aligned}$$

2. Écrire une racine carrée sous une une forme dite « simplifiée » :

$$\begin{aligned} \sqrt{43\,200} &= \sqrt{9 \times 16 \times 100 \times 3} \\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{16} \times \sqrt{100} \times \sqrt{3} \\ &= 3 \times 4 \times 10 \times \sqrt{3} \\ &= 120\sqrt{3} \end{aligned}$$

3. Calculer un produit de racines carrées :

$$\begin{aligned}\sqrt{90} \times \sqrt{18} &= \sqrt{90 \times 18} \\ &= \sqrt{9 \times 2 \times 5 \times 9 \times 2} \\ &= \sqrt{2 \times 2 \times 9 \times 9 \times 5} \\ &= \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{9 \times 9} \times \sqrt{5} \\ &= 2 \times 9 \times \sqrt{5} \\ &= 18\sqrt{5}\end{aligned}$$

4. Factoriser une expression algébrique comportant des racines carrées :

$$\begin{aligned}\sqrt{98} + 2\sqrt{50} - 3\sqrt{8} &= \sqrt{49 \times 2} + 2\sqrt{25 \times 2} - 3\sqrt{4 \times 2} \\ &= \sqrt{49} \times \sqrt{2} + 2\sqrt{25} \times \sqrt{2} - 3\sqrt{4} \times \sqrt{2} \\ &= 7\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\ &= 11\sqrt{2}\end{aligned}$$

Proposition 50. *La racine carrée d'un quotient de nombres réels positifs est égale au quotient des racines carrées de chaque nombre. On dit que la racine carrée est compatible avec la division. Plus formellement, pour tous nombres réels positifs a et b avec $b \neq 0$, on a :*

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Démonstration. D'une part :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 \\ =&\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right) \times \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right) \\ =&\frac{\underbrace{\sqrt{a} \times \sqrt{a}}}{\underbrace{\sqrt{b} \times \sqrt{b}}} \\ =&\frac{a}{b}\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geqslant 0$$

Donc, par définition de la racine carrée, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. □

Remarque. Nous pouvons effectuer deux remarques :

1. Cette proposition peut être mise en œuvre dans certains calculs :
   (a) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{4\times 7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{4}\times\cancel{\sqrt{7}}}{\cancel{\sqrt{7}}} = 2$
   (b) $\frac{\sqrt{198}}{\sqrt{22}} = \sqrt{\frac{198}{22}} = \sqrt{9} = 3$
   (c) $\frac{2\sqrt{98}}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{49\times 2}}{\sqrt{9\times 2}} = \frac{2\times\sqrt{49}\times\sqrt{2}}{\sqrt{9}\times\sqrt{2}} = \frac{14\cancel{\sqrt{2}}}{3\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{14}{3}$
   (d) $\frac{\sqrt{108}}{2\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{36\times 3}}{2\sqrt{9\times 3}} = \frac{\sqrt{36}\times\sqrt{3}}{2\times\sqrt{9}\times\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = 1$
2. Attention, la racine carrée n'est pas compatible avec l'addition et la soustraction. En général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$. Le lecteur curieux pourra aisément trouver des contre-exemples à cette compatibilité.

Définition 51. On appelle expression conjuguée de la somme $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ la différence $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. Réciproquement, on appelle expression conjuguée de la différence $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ la somme $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Remarque. L'expression conjuguée permet de simplifier des expressions algébriques comportant des racines carrées au dénominateur.

Exemple. Voici quelques utilisations de l'expression conjuguée :

1. $\frac{1}{3-\sqrt{5}} = \frac{1\times(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{3+\sqrt{5}}{9-5} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$
2. $\frac{3}{5-\sqrt{2}} = \frac{3(5+\sqrt{2})}{(5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})} = \frac{15+3\sqrt{2}}{5^2-\sqrt{2}^2} = \frac{15+3\sqrt{2}}{23}$
3. $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{2}+\sqrt{6})}{(2\sqrt{2}-\sqrt{6})(2\sqrt{2}+\sqrt{6})} = \frac{2\sqrt{6}+\sqrt{18}}{(2\sqrt{2})^2-\sqrt{6}^2} = \frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{8-6} = \frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$
4. $\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}(3\sqrt{5}-\sqrt{10})}{(3\sqrt{5})^2-\sqrt{10}^2} = \frac{3\times\sqrt{5}^2-\sqrt{50}}{45-10} = \frac{15-5\sqrt{2}}{35} = \frac{3-\sqrt{2}}{7}$

6.3 Racines carrées et inégalités

Proposition 52. *Soient x et y deux nombres réels positifs. On a l'équivalence suivante :*

$$\left(x^2 < y^2\right) \Leftrightarrow (x < y)$$

Démonstration. Soient x et y deux nombres réels positifs. Alors, d'après la troisième identité remarquable, $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$. Or $x+y$ est positif, donc, d'après la « règle des signes » vue dans le cours de Quatrième, les nombres $y^2 - x^2$ et $y - x$ sont de même signe. Par conséquent, si $x^2 < y^2$ alors $x < y$ et réciproquement, si $x < y$, alors $x^2 < y^2$. □

Proposition 53. *Soient x et y deux nombres réels positifs. On a l'équivalence suivante :*

$$(x < y) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} < \sqrt{y}\right)$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 52 aux nombres réels positifs $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$. $\square$

Remarque. Cette proposition permet d'encadrer une racine carrée méconnue comme nous l'avons déjà effectué au chapitre 1.

Exemple. Encadrons $\sqrt{17}$ avec une amplitude d'un centième. Tout d'abord $16 < 17 < 25$, donc, en vertu de la proposition 53, $\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}$, c'est-à-dire $4 < \sqrt{17} < 5$. Ensuite, $4,1^2 = 16,81 < 17 < 4,2^2 = 17,64$. Donc, en vertu de la proposition 53, $4,1 < \sqrt{17} < 4,2$. Enfin, $4,12^2 = 16,9744 < 17 < 4,13^2 = 17,0569$. Donc, en vertu de la proposition 53, $4,12 < \sqrt{17} < 4,13$.

6.4 Valeur approchée d'une racine carrée

Définition 54. On appelle racine carrée à l'unité près par défaut d'un nombre positif le plus grand entier naturel dont le carré est inférieur ou égal à ce nombre.

Exemple. 4 est la racine carrée à l'unité près de 17.

Remarque. Pour calculer la racine carrée à l'unité près, on utilise un algorithme d'extraction de la racine carrée.

Exemple. Extrayons la racine carrée à une unité près de 56 239 :

1. On pose l'extraction en regroupant les chiffres par deux de la façon suivante :

$$\begin{array}{r|l} 5\,62\,39 & \ldots \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

2. On cherche le plus grand nombre entier dont le carré soit plus petit que 5. C'est 2. On soustrait alors 4 à 5 pour obtenir :

$$\begin{array}{r|l} 5\,62\,39 & 2\ldots \\ \cline{2-2} -4 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

3. On abaisse les deux chiffres suivants, on double la racine précédente (on obtient 4), et l'on cherche le plus grand nombre entier ? tel que $4?\times? \leqslant 162$:

$$\begin{array}{r|l} 5\,62\,39 & 2\ldots \\ \cline{2-2} -4 & \\ \hline 1\,62 & 4?\times? \end{array}$$

4. $? = 3$ et l'on écrit :

$$\begin{array}{r|l}
5\,62\,39 & 23\ldots \\ \cline{2-2}
-4 & \\ \hline
162 & 43 \times 3 \\
-129 & \\ \hline
33 &
\end{array}$$

5. On continue en doublant la racine 23, en abaissant les deux chiffres suivants et en résolvant $46? \times ? \leqslant 3\,339$:

$$\begin{array}{r|l}
5\,62\,39 & 23\ldots \\ \cline{2-2}
-4 & \\ \hline
162 & 43 \times 3 \\
-129 & \\ \hline
33\,39 & 46? \times ?
\end{array}$$

6. On obtient $? = 7$. D'où :

$$\begin{array}{r|l}
5\,62\,39 & 237 \\ \cline{2-2}
-4 & \\ \hline
162 & 47 \times 7 \\
-129 & \\ \hline
33\,39 & 467 \times 7 \\
-3\,269 & \\ \hline
70 &
\end{array}$$

7. On trouve finalement que 237 est la racine carrée de 56 239 à l'unité près. Plus précisément, $56\,239 = 237^2 + 70$.

Remarque. Nous pouvons formuler trois remarques :

1. Le reste obtenu à chaque étape doit être inférieur au double de la racine carrée augmenté de un. En effet, si n désigne un nombre entier naturel, alors l'écart entre n^2 et $(n+1)^2$ vaut :

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 - n^2 &= n^2 + 2n + 1 - n^2 \\
&= 2n + 1
\end{aligned}$$

2. Il est possible de justifier cet algorithme d'extraction de la racine carrée. En effet, si a désigne la racine carrée à une étape donnée, alors il existe un entier naturel b tel que $10a+b$ soit la racine carrée à l'étape suivante. Calculons l'écart entre les carrés respectifs de ces deux racines carrées :

$$\begin{aligned}(10a+b)^2-(10a)^2 &= 100a^2+20ab+b^2-100a^2\\ &= b(20a+b)\end{aligned}$$

Or $20a+b$ est le nombre obtenu en doublant la racine et en l'accolant au chiffre cherché, ce qui explique les étapes contenant des « ? ».

3. L'algorithme demeure valable pour extraire des racines carrées au dixième, au centième ou au millième près.

6.5 Exercices

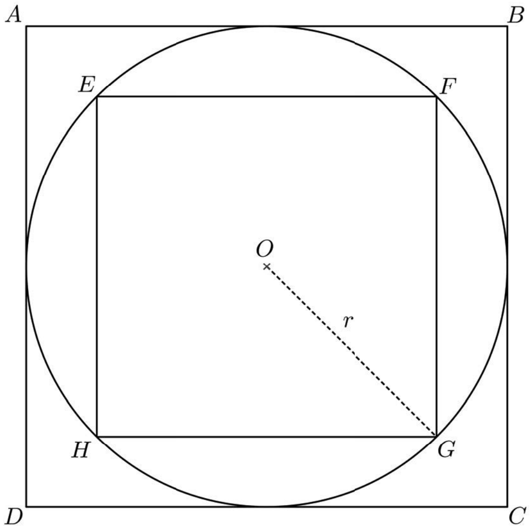
Exercice 1

Calculer les expressions suivantes :

1. $A=\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$
2. $B=9^{18}-\sqrt{4\times 9^{18}+(9^{18}-1)^2}$
3. $C=\sqrt{\frac{6^{24}-3^{24}}{3^{20}(2^{12}-1)(2^{12}+1)}}$
4. $D=\left(\sqrt{9-\sqrt{17}}-\sqrt{9+\sqrt{17}}\right)^2$
5. $E=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
6. $F=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}$
7. $G=\frac{7(\sqrt{19}+\sqrt{6})(\sqrt{19}-\sqrt{6})}{8\sqrt{169}}$
8. $H=\frac{10^{-2}\sqrt{3}}{\sqrt{27}+\sqrt{48}+\sqrt{507}}$
9. $I=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2}$
10. $J=\sqrt{1+501\sqrt{1+500\sqrt{1+499\sqrt{1+498\sqrt{1+497\times 495}}}}}$

Exercice 2

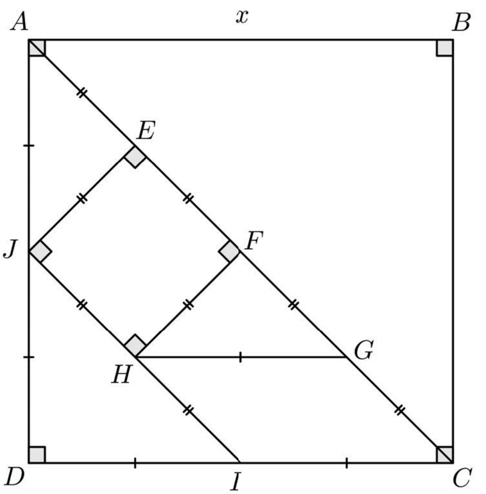
Sur la figure ci-dessous $ABCD$ est un carré et $\mathscr{C}$ est le cercle inscrit au carré $ABCD$ et circonscrit au carré $EFGH$.



1. Calculer le rapport entre les périmètres des carrés $ABCD$ et $EFGH$.
2. Calculer le rapport entre les aires des carrés $ABCD$ et $EFGH$.

Exercice 3

Voici un tangram :



Exprimer l'aire de chacune des pièces en fonction de x.

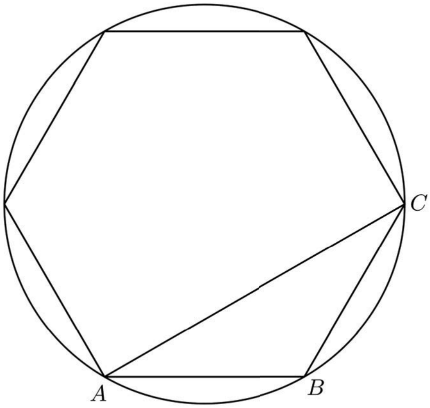
Exercice 4

Déterminer toutes les solutions réelles de l'équation suivante :

$$(E)\ :\ 2x^2 - 2x = 2x\sqrt{x^2 - 2x} + 1$$

Exercice 5

Un hexagone régulier a été inscrit dans un disque d'aire 1.



Déterminer l'aire du triangle ABC.

6.6 Corrigés

Exercice 1

$$
\begin{aligned}
A &= \sqrt{(3-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} \\
&= 3 - \cancel{\sqrt{3}} + \cancel{\sqrt{3}} - \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} \longleftarrow \text{ car } 3 > \sqrt{3},\ \sqrt{3} > \sqrt{2} \text{ et } 2 > \sqrt{2} \\
&= 5 - 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= 9^{18} - \sqrt{4 \times 9^{18} + (9^{18}-1)^2} \\
&= 9^{18} - \sqrt{4 \times 9^{18} + 9^{36} - 2 \times 9^{18} + 1} \\
&= 9^{18} - \sqrt{(9^{18})^2 + 2 \times 9^{18} + 1} \\
&= 9^{18} - \sqrt{(9^{18}+1)^2} \\
&= 9^{18} - (9^{18}+1) \longleftarrow \text{ car } 9^{18} + 1 \geqslant 0 \\
&= \cancel{9^{18}} - \cancel{9^{18}} - 1 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
C &= \sqrt{\frac{6^{24}-3^{24}}{3^{20}(2^{12}-1)(2^{12}+1)}}\\
&= \sqrt{\frac{3^{24}(2^{24}-1)}{3^{20}(2^{12}-1)(2^{12}+1)}}\\
&= \sqrt{3^{24-20}\times\frac{(2^{12})^2-1^2}{(2^{12}-1)(2^{12}+1)}}\\
&= \sqrt{3^4\times\frac{\cancel{(2^{12}-1)}\cancel{(2^{12}+1)}}{\cancel{(2^{12}-1)}\cancel{(2^{12}+1)}}} \longleftarrow\ 2^{12}-1\neq 0 \text{ et } 2^{12}+1\neq 0\\
&= \sqrt{3^4}\\
&= 3^2\\
&= 9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= \left(\sqrt{9-\sqrt{17}}-\sqrt{9+\sqrt{17}}\right)^2\\
&= 9-\cancel{\sqrt{17}}-2\sqrt{9-\sqrt{17}}\times\sqrt{9+\sqrt{17}}+9+\cancel{\sqrt{17}}\\
&= 18-2\sqrt{(9-\sqrt{17})(9+\sqrt{17})}\\
&= 18-2\sqrt{9^2-\sqrt{17}^2}\\
&= 18-2\sqrt{81-17}\\
&= 18-2\sqrt{64}\\
&= 18-16\\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\\
&= \sqrt{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}\\
&= \sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2}\\
&= \sqrt{4-(2+\sqrt{2})}\\
&= \sqrt{2-\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \\
&= E \times \sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \\
&= \sqrt{2-\sqrt{2}} \times \sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \\
&= \sqrt{2^2-\sqrt{2}^2} \times \sqrt{2} \\
&= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G &= \frac{7(\sqrt{19}+\sqrt{6})(\sqrt{19}-\sqrt{6})}{8\sqrt{169}} \\
&= \frac{7(19-6)}{8\times 13} \\
&= \frac{7\times \cancel{13}}{8\times \cancel{13}} \\
&= \frac{7}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{10^{-2}\sqrt{3}}{\sqrt{27}+\sqrt{48}+\sqrt{507}} \\
&= \frac{10^{-2}\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+4\sqrt{3}+13\sqrt{3}} \\
&= \frac{10^{-2}\cancel{\sqrt{3}}}{20\cancel{\sqrt{3}}} \\
&= 5\times 10^{-4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{25}{36}+\frac{4}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{36}} \\
&= \sqrt{\frac{24}{36}+\frac{12}{36}} \\
&= \sqrt{1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

CORRIGÉS

$$J = \sqrt{1+501\sqrt{1+500\sqrt{1+499\sqrt{1+498\sqrt{1+497\times 495}}}}}$$

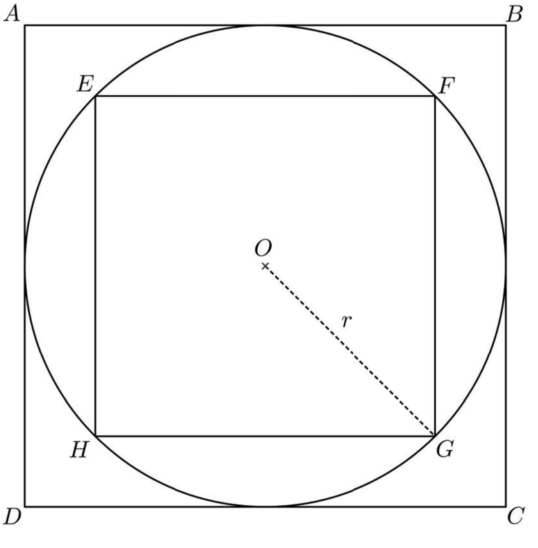
Soit n un nombre entier naturel. On a :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+(n-1)(n+1)} &= \sqrt{1+n^2-1}\\ &= \sqrt{n^2}\\ &= n\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}J &= \sqrt{1+501\sqrt{1+500\sqrt{1+499\sqrt{1+498\sqrt{1+497\times 495}}}}}\\ &= \sqrt{1+501\sqrt{1+500\sqrt{1+499\sqrt{1+498\times 496}}}}\\ &= \sqrt{1+501\sqrt{1+500\sqrt{1+499\times 497}}}\\ &= \sqrt{1+501\sqrt{1+500\times 498}}\\ &= \sqrt{1+501\times 499}\\ &= 500\end{aligned}$$

Exercice 2



1. Dans le triangle HOG rectangle en O, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$HG^2 = HO^2 + OG^2$$

soit :

$$HG^2 = r^2 + r^2$$

d'où :

$$HG = r\sqrt{2} \text{ car } HG \geqslant 0$$

Par conséquent, le périmètre du carré $EFGH$ est égal à :

$$\mathscr{P}(EFGH) = 4r\sqrt{2}$$

En outre, $AB = 2r$. Donc le périmètre du carré $ABCD$ est égal à :

$$\mathscr{P}(ABCD) = 4 \times 2r = 8r$$

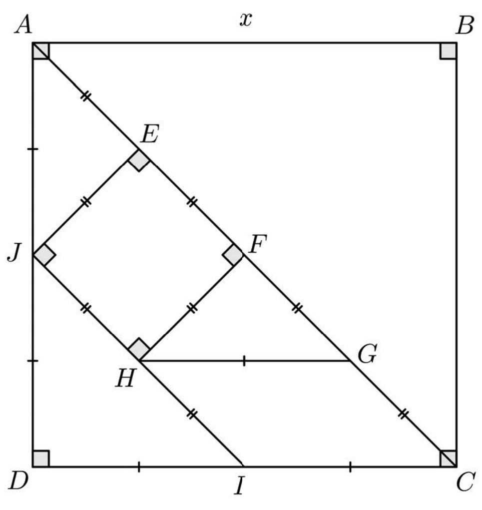
On en déduit le rapport entre les deux périmètres :

$$\frac{\mathscr{P}(EFGH)}{\mathscr{P}(ABCD)} = \frac{4\cancel{r}\sqrt{2}}{8\cancel{r}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. L'aire du carré $EFGH$ est égale à $\mathscr{A}(EFGH) = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2$.
L'aire du carré $ABCD$ est égale à $\mathscr{A}(ABCD) = (2r)^2 = 4r^2$.
D'où le rapport entre les deux aires :

$$\frac{\mathscr{A}(EFGH)}{\mathscr{A}(ABCD)} = \frac{2\cancel{r^2}}{4\cancel{r^2}} = \frac{1}{2}$$

Exercice 3



CORRIGÉS

1. Aire du triangle ABC rectangle en B :

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{x^2}{2}$$

2. Aire des triangles AEJ rectangle en E et HFG rectangle en F :

$$\mathscr{A}(AEJ) = \frac{AE \times EJ}{2}$$

Calculons la longueur AE. Par construction, $AE = \frac{1}{4}AC$. Calculons donc la longueur AC. Dans le triangle ABC rectangle en B, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

soit :

$$AC^2 = x^2 + x^2$$

d'où :

$$AC = x\sqrt{2} \text{ car } AC \geqslant 0$$

Par conséquent, $AE = \frac{x\sqrt{2}}{4}$ et l'on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AEJ) &= \frac{\frac{x\sqrt{2}}{4} \times \frac{x\sqrt{2}}{4}}{2} \\ &= \frac{x^2}{16}\end{aligned}$$

3. Aire du carré $EFHJ$:

$$\mathscr{A}(EFHJ) = EF^2 = \left(\frac{x\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{8}$$

4. Aire du triangle IDJ rectangle en D :

$$\mathscr{A}(IDJ) = \frac{ID \times DJ}{2} = \frac{\frac{x}{2} \times \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{8}$$

5. Aire du parallélogramme $CIHG$:

$$\mathscr{A}(CIHG) = GC \times HF = \frac{x\sqrt{2}}{4} \times \frac{x\sqrt{2}}{4} = \frac{x^2}{8}$$

Exercice 4

L'équation (E) est équivalente à :

$$2x^2 - 2x - 2x\sqrt{x^2 - 2x} = 1$$

Posons $y \coloneqq \sqrt{x^2 - 2x}$. L'équation (E) devient alors :

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x - 2x\sqrt{x^2 - 2x} &= 1 \\ x^2 + \underbrace{x^2 - 2x} - 2xy &= 1 \\ x^2 + y^2 - 2xy &= 1 \\ (x-y)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Donc $x - y = 1$ ou $x - y = -1$ et par suite, $y = x - 1$ ou $y = x + 1$. D'où :

$$\begin{cases} (x-1)^2 = x^2 - 2x \\ \text{ou} \\ (x+1)^2 = x^2 - 2x \end{cases}$$

puis :

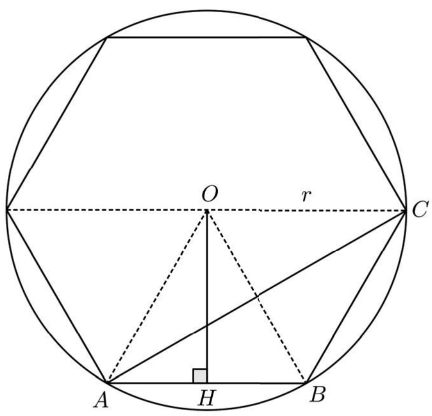
$$\begin{cases} \cancel{x^2} - \cancel{2x} + 1 = \cancel{x^2} - \cancel{2x} \\ \text{ou} \\ \cancel{x^2} + 2x + 1 = \cancel{x^2} - 2x \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{cases} 1 = 0 \qquad \text{impossible} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Finalement, l'équation (E) admet une unique solution : $-\frac{1}{4}$.

Exercice 5



CORRIGÉS

Tout d'abord, l'aire du disque étant égale à 1, nous avons l'égalité $\pi r^2 = 1$ et donc $r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ (r étant une longueur). Ensuite, remarquons que les triangles ABO et ABC ont la même base, AB, et la même hauteur, OH. Or AOB est équilatéral, donc $AB = r$ et, d'après le cours de Sixième, $AH = \frac{r}{2}$. Ainsi, dans le triangle AHB rectangle en H, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$AO^2 = AH^2 + HO^2$$

soit :

$$r^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + OH^2$$

d'où :

$$OH^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$$

et enfin :

$$OH = \frac{r\sqrt{3}}{2} \text{ car } OH \geqslant 0$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(ABC) &= \mathscr{A}(ABO) \\
&= \frac{AB \times OH}{2} \\
&= \frac{r \times \frac{r\sqrt{3}}{2}}{2} \\
&= \frac{r^2\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4\pi}
\end{aligned}$$

7

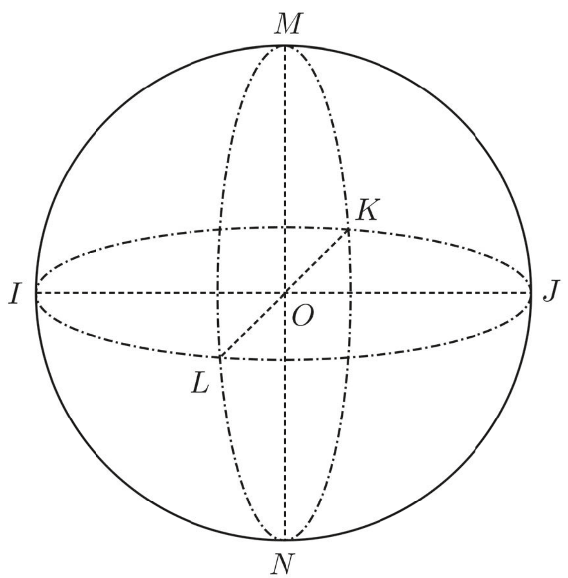
Sphère et boule

Dans ce chapitre, nous nous placerons dans l'espace usuel à trois dimensions.

7.1 Sphère

Définition 55. Soit O un point de l'espace. Soit r un nombre réel positif. On appelle sphère de centre O et de rayon r l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = r$.

Illustration :



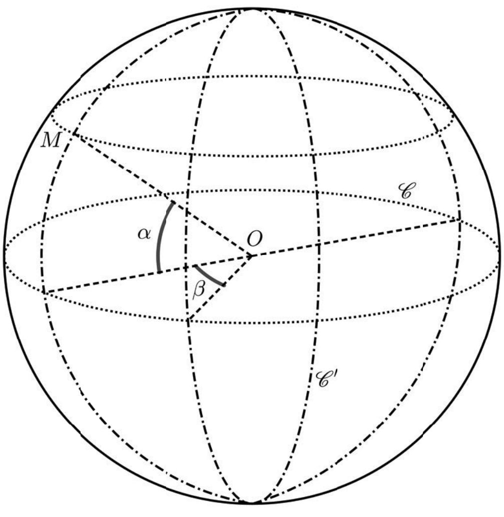
Vocabulaire : plusieurs notions relatives à la sphère sont à connaître :

1. Le point O et le centre de la sphère.
2. Les segments $[OI]$, $[OJ]$, $[OK]$, $[OL]$, $[OM]$ et $[ON]$ sont des rayons de la sphère. Attention, la longueur commune à ces rayons est également appelée « rayon » de la sphère.
3. Les segments $[IJ]$, $[KL]$ et $[MN]$ sont des diamètres de la sphère.
4. Les trois cercles de diamètres respectifs $[IJ]$, $[KL]$ et $[MN]$ sont appelés des grands cercles.

Remarque. Nous pouvons faire l'analogie avec la définition du cercle de centre O et de rayon r dans le plan. En effet, cercle et sphère répondent à la même définition : l'ensemble des points équidistants d'un point fixe. Simplement pour le cercle, cet ensemble se cherche dans le plan (dimension 2) alors que pour la sphère, il se cherche dans l'espace (dimension 3).

Définition 56. Soit $\mathscr{S}$ une sphère. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux grands cercles de la sphère situés dans des plans orthogonaux (cf. chapitre 15). Alors, à tout point de la sphère on peut associer deux nombres réels : sa latitude et sa longitude. Réciproquement, à tout couple de nombres réels, on peut alors associer un point sur la sphère. Le couple (latitude ; longitude) associé à un point de la sphère constitue les coordonnées sphériques (ou géographiques) du point.

Illustration :



Vocabulaire : plusieurs notions sont à connaître :

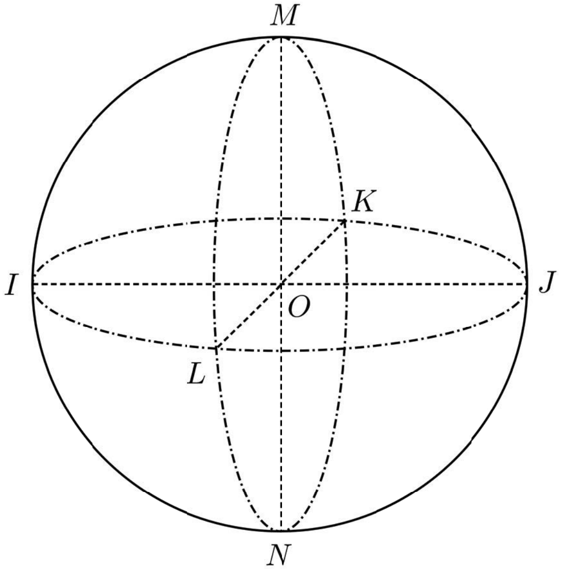
1. Lorsque la sphère modélise la planète Terre, le grand cercle $\mathscr{C}$ qui définit la latitude $0°$ est appelé l'équateur et le grand cercle $\mathscr{C}'$ qui définit la longitude $0°$ est appelé le méridien de Greenwich.
2. L'angle α désigne la latitude du point M et l'angle β désigne la longitude du point M. Dans le cas présent, on note $M(\alpha°\,\text{Nord}\,;\,\beta°\,\text{Est})$.

3. Tout cercle intersection de la sphère et d'un plan parallèle au plan contenant l'équateur est appelé un parallèle. En géographie, le cercle polaire Arctique (environ 66° Nord), le tropique du Cancer (environ 23° Nord), le tropique du Capricorne (environ 23° Sud) et le cercle polaire Antarctique (environ 66° Sud) sont les principaux parallèles.

4. Tout grand cercle intersection de la sphère et d'un plan orthogonal au plan contenant l'Équateur est appelé méridien.

Définition 57. Soit O un point de l'espace. Soit r un nombre réel positif. On appelle boule de centre O et de rayon r l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leqslant r$.

Illustration :



Remarque. Nous pouvons effectuer deux remarques :

1. L'analogie avec la définition du disque de centre O et de rayon r dans le plan est pertinente. En effet, disque et boule répondent à la même définition : l'ensemble des points situés à une distance inférieure ou égale à r d'un point fixe. Simplement pour le disque, cet ensemble se cherche dans le plan (dimension 2) alors que pour la boule, il se cherche dans l'espace (dimension 3).

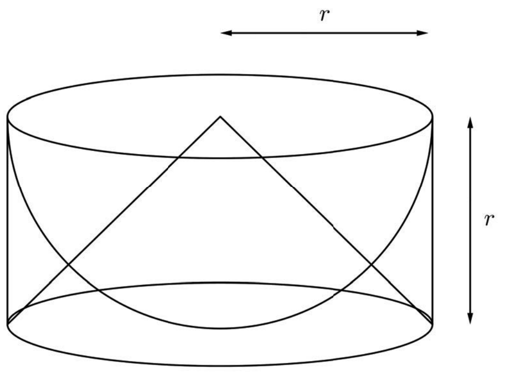
2. Une approximation grossière consiste à voir la sphère comme étant vide et la boule comme étant pleine. En termes plus précis, la sphère est un objet de dimension deux alors que la boule est un objet de dimension trois. En effet, pour repérer un point appartenant à une boule, latitude et longitude ne suffisent plus, il faut y ajouter l'altitude, c'est-à-dire la distance qui sépare ce point du centre de la boule.

7.2 Aire d'une sphère et volume d'une boule

Proposition 58. *Le volume d'une boule de rayon r s'exprime selon la formule :*

$$\mathscr{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Démonstration. Cette démonstration est l'œuvre du mathématicien italien Luca Valerio (1553-1618). On considère une demi-boule de rayon r, un cylindre circonscrit à la demi-boule et un cône de révolution inscrit au cylindre.



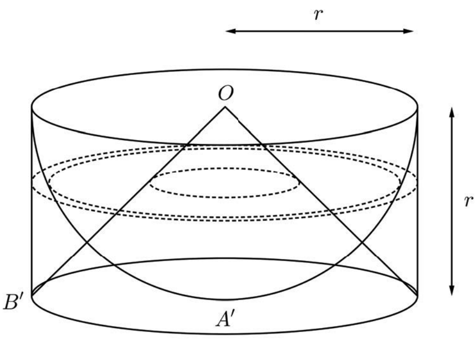
Le cylindre a le même rayon que la demi-boule et une hauteur égale à ce rayon donc, d'après le cours de Cinquième, son volume $\mathscr{V}$(cylindre) s'exprime selon la formule :

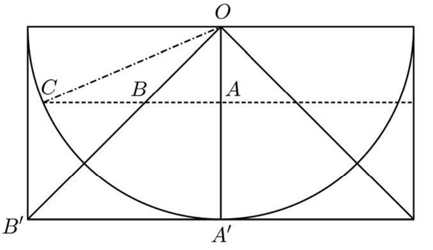
$$\mathscr{V}(\text{cylindre}) = \pi r^2 \times r = \pi r^3$$

Le cône a également le même rayon que la demi-boule et une hauteur égale à ce rayon donc, d'après le cours de Quatrième, son volume $\mathscr{V}$(cône) s'exprime selon la formule :

$$\mathscr{V}(\text{cône}) = \frac{1}{3}\pi r^2 \times r = \frac{1}{3}\pi r^3$$

À présent, afin de comparer le volume de la demi-boule aux volumes connus du cylindre et du cône, comparons les aires des sections planes de ces trois solides par des plans parallèles aux bases. Considérons les sections obtenues dans le cylindre, le cône et la demi-boule par l'un de ces plans. Ce sont des disques de rayons différents. Prenons une vue de face afin de déterminer les rayons de ces disques :





Le rayon r_{Cy} de la section du cylindre est indépendant de la hauteur, il est toujours égal à r. Calculons les rayons $r_{Co} = AB$ et $r_H = AC$ des sections du cône et de la demi-boule. Par construction, les triangles OAB et $OA'B'$ sont semblables. Or $OA' = A'B' = r$, donc $OA = AB = r_{Co}$. Par ailleurs, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OAC rectangle en A, on a :

$$OC^2 = OA^2 + AC^2$$

d'où :

$$OC^2 = AB^2 + AC^2$$

soit :

$$r_{Cy}^2 = r_{Co}^2 + r_H^2$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par π, nous obtenons une relation entre les aires des trois sections :

$$\pi r_{Cy}^2 = \pi r_{Co}^2 + \pi r_H^2$$

Donc, d'après le principe de Cavalieri [1] qui dit que si les sections de deux solides par n'importe quel plan parallèle au plan des bases ont des aires dans un même rapport, alors les volumes des deux solides sont aussi dans ce même rapport :

$$\mathscr{V}(\text{cylindre}) = \mathscr{V}(\text{cône}) + \mathscr{V}(\text{demi-boule})$$

d'où :

$$\mathscr{V}(\text{demi-boule}) = \mathscr{V}(\text{cylindre}) - \mathscr{V}(\text{cône})$$

soit :

$$\mathscr{V}(\text{demi-boule}) = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Par conséquent, le volume de la boule vaut :

$$\mathscr{V}(\text{boule}) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

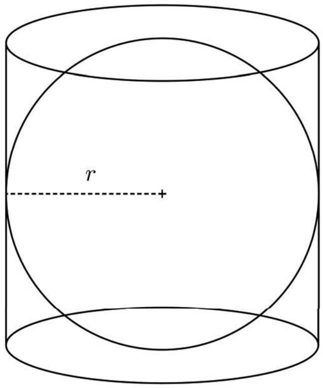
□

1. Bonaventura Cavalieri est un mathématicien italien né en 1598 et mort en 1647.

Proposition 59. *L'aire d'une sphère de rayon r s'exprime selon la formule :*

$$\mathscr{A} = 4\pi r^2$$

Démonstration. Archimède[2] a démontré que l'aire de la sphère de rayon r est égale à l'aire de la surface latérale du cylindre de révolution circonscrit à cette sphère.



Or, d'après le cours de Cinquième, l'aire de la surface latérale d'un tel cylindre de révolution est égale à :

$$2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$$

□

7.3 Exercices

Exercice 1

Un gâteau est formé d'une boule de meringue de $2,5$ cm de rayon enrobée d'une couche de chocolat ayant une épaisseur de 4 mm. Le volume de chocolat est-il supérieur ou inférieur au tiers du volume total ?

Exercice 2

Un verre a la forme d'un cylindre de rayon 3 cm de rayon et de 10 cm de hauteur. Clément le remplit d'eau jusqu'à une hauteur de $6,5$ cm puis y plonge une boule de 3 cm de rayon. L'eau va-t-elle déborder ?

Exercice 3

Un cube de 6 cm d'arête est inscrit dans une sphère. Calculer l'aire de la sphère.

2. Archimède de Syracuse est un mathématicien grec né vers 287 avant J.-C. et mort vers 212 avant J.-C.

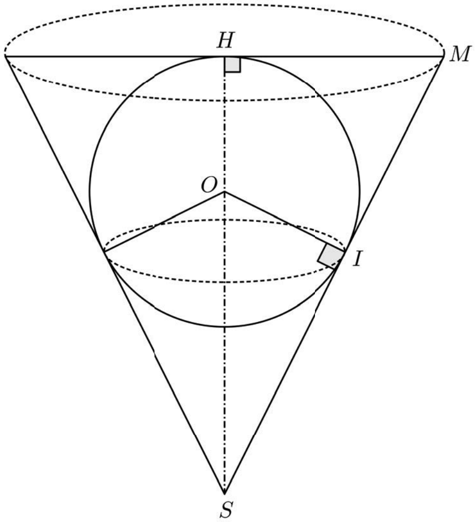
Exercice 4

On assimile la Terre à une boule de rayon 6 370 km.

1. Calculer la superficie de la Terre.
2. Sachant que les mers et les océans représentent environ 71 % de la superficie de la Terre, calculer l'aire de la surface des terres émergées.
3. Calculer la longueur du parallèle terrestre situé à 49° de latitude Nord.
4. Les villes de Stockholm (59° Nord ; 18° Est) et de Le Cap (33° Sud ; 18° Est) sont situées sur un même méridien. Calculer la distance Le Cap-Stockholm.

Exercice 5

Une boule de rayon r est placée dans un vase conique plein d'eau. La boule est tangente à la surface de l'eau et le vase a une profondeur de $4r$.



Comparer le volume de la boule et le volume de l'eau.

7.4 Corrigés

Exercice 1

Calculons le volume total du gâteau :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(\text{gâteau}) &= \frac{4}{3}\pi \times (2,5+0,4)^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \times 24,389 \\ &= \frac{24\,389}{750}\pi \text{ cm}^3 \\ &\simeq 102,2 \text{ cm}^3 \text{ au dixième près}\end{aligned}$$

CORRIGÉS

Calculons le volume de chocolat :

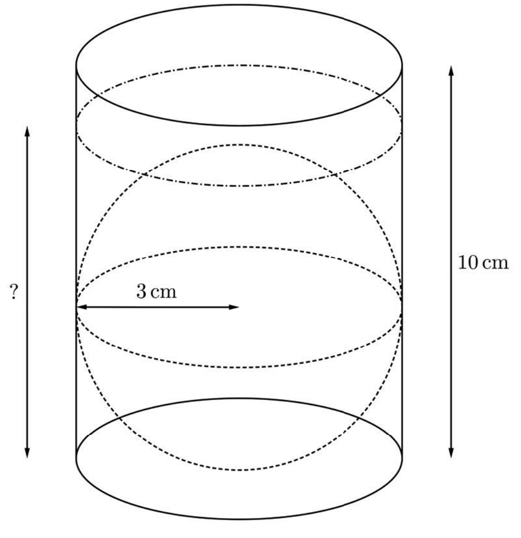
$$\begin{aligned}
\mathscr{V}(\text{chocolat}) &= \frac{4}{3}\pi \times (2,5+0,4)^3 - \frac{4}{3}\pi \times 2,5^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi \times (2,9^3 - 2,5^3) \\
&= \frac{4}{3}\pi \times 8,764 \\
&= \frac{4\,382}{375}\pi \text{ cm}^3 \\
&\simeq 36,7 \text{ cm}^3 \text{ au dixième près}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathscr{V}(\text{gâteau})}{\mathscr{V}(\text{chocolat})} &= \frac{\frac{24\,389}{750}\cancel{\pi}}{\frac{4\,382}{375}\cancel{\pi}} \\
&= \frac{24\,389}{750} \times \frac{375}{4\,382} \\
&= \frac{24\,389}{8\,764} \\
&\simeq 2,78 \text{ au centième près}
\end{aligned}$$

Donc le volume de chocolat est supérieur au tiers du volume total du gâteau.

Exercice 2



Calculons tout d'abord le volume d'eau contenu dans le verre :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(\text{eau}) &= \pi \times 3^2 \times 6,5 \\ &= 58,5\pi \text{ cm}^3\end{aligned}$$

La hauteur d'eau dans le verre étant supérieure au diamètre de la boule, celle-ci sera complètement immergée. Calculons donc le volume de cette boule :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(\text{boule}) &= \frac{4}{3}\pi \times 3^3 \\ &= 36\pi \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Par conséquent, le volume occupé par l'eau et la boule après son immersion est égal à :

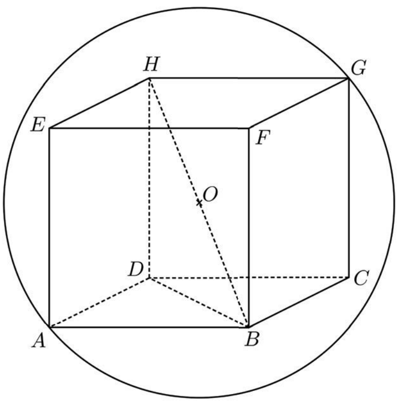
$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= \mathscr{V}(\text{eau}) + \mathscr{V}(\text{boule}) \\ &= 58,5\pi + 36\pi \\ &= 94,5\pi \text{ cm}^3\end{aligned}$$

À présent, calculons le volume total du verre :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(\text{verre}) &= \pi \times 3^2 \times 10 \\ &= 90\pi \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\mathscr{V}(\text{verre}) < \mathscr{V}$ et donc que l'eau débordera.

Exercice 3



Soit O le centre de la sphère circonscrite au cube $ABCDEFGH$. L'aire de la sphère s'exprime suivant la formule :

$$\mathscr{A} = 4\pi r^2 = 4\pi OB^2$$

Calculons donc la longueur OB. Dans le triangle BAD rectangle en A, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$BD^2 = BA^2 + AD^2$$

soit :

$$BD^2 = 6^2 + 6^2$$

d'où :

$$BD = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}\,\text{cm car } BD \geqslant 0$$

Dans le triangle BDH rectangle en D, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$HB^2 = HD^2 + DB^2$$

soit :

$$HB^2 = 6^2 + 72$$

d'où :

$$HB^2 = 108$$

puis :

$$HB = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$$

Or les points H et B sont diamétralement opposés sur la sphère circonscrite au cube $ABCDEFGH$. Donc O est le milieu du segment $[HB]$ et par suite :

$$OB = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\,\text{cm}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= 4\pi OB^2 \\ &= 4\pi(3\sqrt{3})^2 \\ &= 4\pi \times 27 \\ &= 108\pi\ \text{cm}^2 \\ &\simeq 339{,}3\ \text{cm}^2 \text{ au dixième près}\end{aligned}$$

Exercice 4

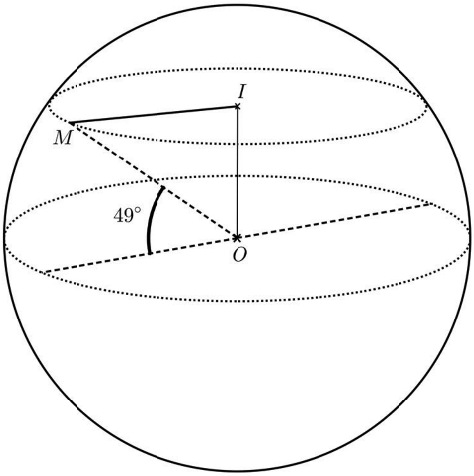
1. Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la surface de la Terre. On a :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= 4\pi \times 6\,370^2 \\ &= 162\,307\,600\pi\ \text{km}^2 \\ &\simeq 509\,904\,364\ \text{km}^2 \text{ à l'unité près}\end{aligned}$$

2. Soit $\mathscr{A}'$ l'aire de la surface des terres émergées. On a :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}' &= \frac{29}{100}\mathscr{A}\\ &= \frac{29}{100} \times 162\,307\,600\pi\\ &= 47\,069\,204\pi \text{ km}^2\\ &\simeq 147\,872\,266 \text{ km}^2 \text{ à l'unité près}\end{aligned}$$

3. Calculons la longueur du parallèle terrestre situé à 49° de latitude Nord.



$\widehat{IOM} = 90° - 49° = 41°$. Donc, dans le triangle MIO rectangle en I, on a :

$$\sin(\widehat{MOI}) = \frac{MI}{MO}$$

soit :

$$\sin(41°) = \frac{MI}{6\,370}$$

d'où :

$$\begin{aligned}MI &= 6\,370\sin(41°) \text{ km}\\ &\simeq 4\,179,1 \text{ km à l'unité près}\end{aligned}$$

Par conséquent, la longueur du parallèle terrestre situé à 49° de latitude Nord est égale à :

CORRIGÉS

$$\begin{aligned}\mathscr{P} &= 2\pi MI \\ &= 2\pi \times 6\,370 \sin(41^\circ) \\ &= 12\,740\pi \sin(41^\circ) \text{ km} \\ &\simeq 26\,258 \text{ km à l'unité près}\end{aligned}$$

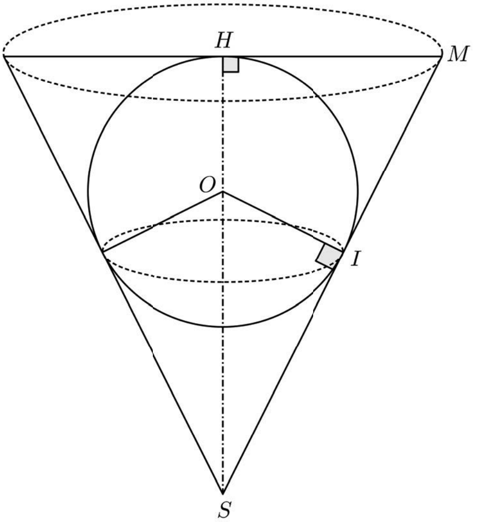
4. Calculons la longueur d'un méridien terrestre :

$$\begin{aligned}\mathscr{P}' &= 2\pi \times 6\,370 \\ &= 12\,740\pi \text{ km} \\ &\simeq 40\,024 \text{ km à l'unité près}\end{aligned}$$

Or l'angle formé par les villes de Stockholm et de Le Cap le long de leur méridien est égal à $33^\circ + 59^\circ = 92^\circ$. D'où la longueur de l'arc de méridien les séparant :

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \frac{92}{360}\mathscr{P}' \\ &= \frac{23}{90} \times 12\,740\pi \\ &= \frac{29\,302}{9}\pi \text{ km} \\ &\simeq 10\,228 \text{ km à l'unité près}\end{aligned}$$

Exercice 5



Calculons le volume du cône :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(\text{cône}) &= \pi \times HM^2 \times HS \\ &= \pi \times HM^2 \times 4r\end{aligned}$$

Exprimons la longueur HM en fonction de r. Dans le triangle OIS rectangle en I, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$OS^2 = OI^2 + IS^2$$

soit :

$$(4r - r)^2 = r^2 + IS^2$$

d'où :

$$IS^2 = 9r^2 - r^2 = 8r^2$$

et donc :

$$IS = 2r\sqrt{2} \text{ car } IS \geqslant 0$$

Dans ce même triangle, on a également :

$$\begin{aligned}\tan(\widehat{ISO}) &= \frac{OI}{IS} \\ &= \frac{\cancel{r}}{2\cancel{r}\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

À présent, dans le triangle MHS rectangle en H, on a :

$$\tan(\widehat{MSH}) = \frac{HM}{HS}$$

soit :

$$\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{HM}{4r}$$

d'où :

$$HM = r\sqrt{2}$$

Revenons alors au volume du cône :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(\text{cône}) &= \pi \times HM^2 \times 4r \\ &= \pi \times (r\sqrt{2})^2 \times 4r \\ &= 8\pi r^3\end{aligned}$$

CORRIGÉS

Calculons le volume de la boule :

$$\mathscr{V}(\text{boule}) = \frac{4}{3}\pi OI^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Calculons le volume d'eau :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(\text{eau}) &= \mathscr{V}(\text{cône}) - \mathscr{V}(\text{boule})\\ &= 8\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3\\ &= \frac{20}{3}\pi r^3\end{aligned}$$

Par conséquent, le volume de l'eau est égal au quintuple du volume de la boule.

8

Équations

8.1 Rappels

Définition 60. Toute égalité faisant intervenir une ou plusieurs quantités inconnues est appelée une équation. Les quantités inconnues sont traditionnellement désignées par des lettres minuscules (x, y, z, t, etc.). L'objectif est de résoudre l'équation, c'est-à-dire trouver toutes les valeurs que peuvent prendre les inconnues afin d'obtenir une égalité vraie.

Exemple. $6x + 3 = 21$ est une équation (du premier degré) d'inconnue x. Si l'on remplace x par 5, on obtient $6 \times 5 + 3 = 21$, soit $33 = 21$ qui est une égalité fausse. Par conséquent, 5 n'est pas solution de cette équation. En revanche, si l'on remplace x par 3, on obtient $6 \times 3 + 3 = 21$, soit $21 = 21$ qui est une égalité vraie. Par conséquent, 3 est une solution de cette équation. Des questions demeurent cependant :

1. Existe-t-il d'autres solutions que 3 ?
2. Existe-t-il un moyen mécanique de déterminer toutes les solutions d'une équation donnée ?

Proposition 61. *Si l'on ajoute ou l'on soustrait un même nombre aux deux membres d'une égalité, alors on obtient une nouvelle égalité. On dit que l'addition et la soustraction sont compatibles avec l'égalité.*

Démonstration. Voir le cours de Quatrième. □

Exemple. Voici deux exemples :

1. Si $a = b$, alors $a - 5 = b - 5$.
2. Si $a = b$, alors $a + 9 = b + 9$.

Proposition 62. *Si l'on multiplie ou l'on divise les deux membres d'une égalité par un même nombre (non nul dans le cas de la division), alors on obtient une nouvelle égalité. On dit que la multiplication et la division sont compatibles avec l'égalité.*

Démonstration. Voir le cours de Quatrième. □

Exemple. Voici deux exemples :

1. Si $a = b$, alors $4 \times a = 4 \times b$.
2. Si $a = b$, alors $\frac{a}{3} = \frac{b}{3}$.

8.2 Équations avec fractions rationnelles

Remarque. Certaines équations comportent un ou plusieurs termes sous forme de fractions rationnelles. Pour les résoudre, voici une méthode en deux temps :

1. L'équation présentant des fractions, il est nécessaire que les dénominateurs soient tous non nuls. Il est donc primordial de déterminer avant toute manipulation algébrique ce que l'on appelle le domaine de résolution (ou de validité) de l'équation, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels ayant une chance d'être solutions de l'équation.
   Exemple : considérons l'équation (E) : $\frac{5}{x-3} = \frac{1}{4}$. Il est impératif que $x-3 \neq 0$. Autrement dit, 3 est une « valeur interdite » et n'appartient pas au domaine de résolution de l'équation. Si $\mathscr{D}_{(E)}$ désigne le domaine de résolution de l'équation (E), alors nous écrivons $\mathscr{D}_{(E)} = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ (cf. chapitre 10, section 2).
2. Une fois le domaine de résolution déterminé, il est pertinent de réduire les fractions au même dénominateur. En effet, deux fractions égales ayant le même dénominateur ont nécessairement le même numérateur, ce qui nous permet d'obtenir une équation équivalente à l'équation initiale mais dépourvue de fractions.
   Exemple : sur l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ l'équation (E) : $\frac{5}{x-3} = \frac{1}{4}$ est équivalente à (E) : $\frac{20}{4(x-3)} = \frac{x-3}{4(x-3)}$ et donc à (E) : $20 = x - 3$, équation que l'on a appris à résoudre dans le cours de Quatrième.

Exemple. Résolvons l'équation (E) : $\frac{x+1}{3} - \frac{x+2}{6} = \frac{3(2x-1)}{6}$. Tout d'abord, il clair que $\mathscr{D}_{(E)} = \mathbb{R}$. Réduisons à présent les trois fractions au même dénominateur, l'équation devient alors :

$$\frac{2(x+1)}{6} - \frac{x+2}{6} = \frac{3(2x-1)}{6}$$

d'où :

$$\frac{2x + \cancel{2} - x - \cancel{2}}{6} = \frac{6x-3}{6}$$

Or deux fractions égales ayant le même dénominateur ont nécessairement le même numérateur. Par conséquent :

$$x = 6x - 3$$

puis :

$$5x = 3 \longleftarrow \text{proposition 61}$$

et enfin :

$$x = \frac{3}{5} \longleftarrow \text{proposition 62}$$

Remarque. Tout d'abord $\frac{3}{5}$ appartient bien au domaine de résolution $\mathscr{D}_{(E)}$. Toutefois, comme nous venons de raisonner par implications et non par équivalences, il nous faut vérifier si $\frac{3}{5}$ est bien solution de l'équation (E). Pour cela, nous remplaçons chaque occurrence de x par $\frac{3}{5}$ et nous testons l'égalité.
D'une part :

$$\frac{2\left(\frac{3}{5}+1\right)}{6}-\frac{\frac{3}{5}+2}{6}=\frac{\frac{6}{5}+\cancel{\frac{10}{5}}-\frac{3}{5}-\cancel{\frac{10}{5}}}{6}=\frac{\frac{3}{5}}{6}=\frac{1}{10}$$

D'autre part :

$$\frac{3\times\left(2\times\frac{3}{5}-1\right)}{6}=\frac{3\times\left(\frac{6}{5}-\frac{5}{5}\right)}{6}=\frac{\frac{3}{5}}{6}=\frac{1}{10}$$

Ainsi, $\frac{3}{5}$ est bien l'unique solution de l'équation (E). On écrit généralement :

$$\mathscr{S}_{(E)}=\left\{\frac{3}{5}\right\}$$

Exercice. Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1)\ :\ \frac{5}{2}x+3-\frac{7x}{4}=x+\frac{9}{4}$$

$$(E_2)\ :\ \frac{x}{4}+\frac{3}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x}{6}-1$$

$$(E_3)\ :\ \frac{5x-3}{4}-\frac{3x-5}{8}=6$$

$$(E_4)\ :\ \frac{7x-3}{2}-\frac{3x+4}{4}=\frac{8x-5}{3}$$

$$(E_5)\ :\ \frac{x-5}{x-1}=\frac{x+3}{x+4}$$

Solution :

$$\begin{aligned}
(E_1)\ &:\ \frac{5}{2}x+3-\frac{7x}{4}=x+\frac{9}{4}\\
(E_1)\ &:\ \frac{10x}{4}+\frac{12}{4}-\frac{7x}{4}=\frac{4x}{4}+\frac{9}{4}\\
(E_1)\ &:\ \frac{3x+12}{4}=\frac{4x+9}{4}\\
(E_1)\ &:\ 3x+12=4x+9\\
(E_1)\ &:\ x=3\\
&3\in\mathscr{D}_{(E_1)}=\mathbb{R}\text{ donc }\mathscr{S}_{(E_1)}=\{3\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(E_2)\ :\ \frac{x}{4}+\frac{3}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x}{6}-1\\
&(E_2)\ :\ \frac{3x}{12}+\frac{18}{12}-\frac{4x}{12}=\frac{2x}{12}-\frac{12}{12}\\
&(E_2)\ :\ \frac{-x+18}{12}=\frac{2x-12}{12}\\
&(E_2)\ :\ -x+18=2x-12\\
&(E_2)\ :\ 3x=30\\
&(E_2)\ :\ x=10\\
&10\in\mathscr{D}_{(E_2)}=\mathbb{R}\text{ donc }\mathscr{S}_{(E_2)}=\{10\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(E_3)\ :\ \frac{5x-3}{4}-\frac{3x-5}{8}=6\\
&(E_3)\ :\ \frac{2(5x-3)}{8}-\frac{3x-5}{8}=\frac{48}{8}\\
&(E_3)\ :\ \frac{10x-6-3x+5}{8}=\frac{48}{8}\\
&(E_3)\ :\ 7x-1=48\\
&(E_3)\ :\ 7x=49\\
&(E_3)\ :\ x=7
\end{aligned}
$$

$$7\in\mathscr{D}_{(E_3)}=\mathbb{R}\text{ donc }\mathscr{S}_{(E_3)}=\{7\}$$

$$
\begin{aligned}
&(E_4)\ :\ \frac{7x-3}{2}-\frac{3x+4}{4}=\frac{8x-5}{3}\\
&(E_4)\ :\ \frac{6(7x-3)}{12}-\frac{3(3x+4)}{12}=\frac{4(8x-5)}{12}\\
&(E_4)\ :\ \frac{42x-18-9x-12}{12}=\frac{40x-20}{12}\\
&(E_4)\ :\ 33x-30=40x-20\\
&(E_4)\ :\ 7x=-10\\
&(E_4)\ :\ x=-\frac{10}{7}\\
&-\frac{10}{7}\in\mathscr{D}_{(E_4)}=\mathbb{R}\text{ donc }\mathscr{S}_{(E_4)}=\left\{-\frac{10}{7}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(E_5)\ :\ \frac{x-5}{x-1}=\frac{x+3}{x+4}\\
&(E_5)\ :\ \frac{(x-5)(x+4)}{(x-1)(x+4)}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+4)(x-1)}\\
&(E_5)\ :\ (x-5)(x+4)=(x+3)(x-1)\\
&(E_5)\ :\ \cancel{x^2}-x-20=\cancel{x^2}+2x-3\\
&(E_5)\ :\ 3x=-17\\
&(E_5)\ :\ x=-\frac{17}{3}\\
&-\frac{17}{3}\in\mathscr{D}_{(E_5)}=\mathbb{R}\backslash\{1;-4\}\text{ donc }\mathscr{S}_{(E_5)}=\left\{-\frac{17}{3}\right\}
\end{aligned}
$$

8.3 Équations produit nul

Définition 63. On appelle équation produit nul toute équation de la forme $A\times B=0$ où A et B sont des expressions algébriques.

Remarque. Nous pouvons formuler deux remarques :

1. La proposition 11 formulée au chapitre 1 nous permet de résoudre des équations produit nul dans le cas où A et B sont de degré 1.
2. Il peut donc être pertinent de factoriser un membre d'une équation et d'annuler l'autre membre afin d'obtenir une équation produit nul.

Exemple. Résolvons l'équation $(E)\ :\ (2x+1)(3x-2)=0$. D'après la proposition 11, on a :

$$
\begin{aligned}
(2x+1)(3x-2)&=0\\
2x+1=0 &\text{ ou } 3x-2=0\\
2x=-1 &\text{ ou } 3x=2\\
x=-\frac{1}{2} &\text{ ou } x=\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Par conséquent, $\mathscr{S}_{(E)}=\left\{-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right\}$.

Exercice. Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1)\ :\ (2x+5)(x-3)(4x-7)=0$$

$$(E_2)\ :\ x(x+3)=x+3$$

$$(E_3)\ :\ (3x-7)(4x-1)=(4x-1)(x+5)$$

$$(E_4)\ :\ 25x^2-49=0$$

$$(E_5)\ :\ 4(x-1)^2 = (3x+2)^2$$

Solution :

$$\begin{aligned}
(E_1)\ &:\ (2x+5)(x-3)(4x-7) = 0\\
(E_1)\ &:\ 2x+5 = 0 \text{ ou } x-3 = 0 \text{ ou } 4x-7 = 0\\
(E_1)\ &:\ 2x = -5 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } 4x = 7\\
(E_1)\ &:\ x = -\frac{5}{2} \text{ ou } x = 3 \text{ ou } x = \frac{7}{4}\\
\mathscr{S}_{(E_1)} &= \left\{-\frac{5}{2}; 3; \frac{7}{4}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E_2)\ &:\ x(x+3) = x+3\\
(E_2)\ &:\ x(x+3) = 1 \times (x+3)\\
(E_2)\ &:\ x(x+3) - 1 \times (x+3) = 0\\
(E_2)\ &:\ (x+3)(x-1) = 0\\
(E_2)\ &:\ x+3 = 0 \text{ ou } x-1 = 0\\
(E_2)\ &:\ x = -3 \text{ ou } x = 1\\
\mathscr{S}_{(E_2)} &= \{-3; 1\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E_3)\ &:\ (3x-7)(4x-1) = (4x-1)(x+5)\\
(E_3)\ &:\ (3x-7)(4x-1) - (4x-1)(x+5) = 0\\
(E_3)\ &:\ (4x-1)\left(3x-7-(x+5)\right) = 0\\
(E_3)\ &:\ (4x-1)(3x-7-x-5) = 0\\
(E_3)\ &:\ (4x-1)(2x-12) = 0\\
(E_3)\ &:\ 4x-1 = 0 \text{ ou } 2x-12 = 0\\
(E_3)\ &:\ x = \frac{1}{4} \text{ ou } x = 6\\
\mathscr{S}_{(E_3)} &= \left\{\frac{1}{4}; 6\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E_4)\ &:\ 25x^2 - 49 = 0\\
(E_4)\ &:\ (5x)^2 - 7^2 = 0\\
(E_4)\ &:\ (5x-7)(5x+7) = 0\\
(E_4)\ &:\ 5x-7 = 0 \text{ ou } 5x+7 = 0\\
(E_4)\ &:\ x = \frac{7}{5} \text{ ou } x = -\frac{7}{5}\\
\mathscr{S}_{(E_4)} &= \left\{-\frac{7}{5}; \frac{7}{5}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(E_5)\ :\ 4(x-1)^2 = (3x+2)^2 \\
&(E_5)\ :\ (2(x-1))^2 - (3x+2)^2 = 0 \\
&(E_5)\ :\ [(2x-2)+(3x+2)]\,[(2x-2)-(3x+2)] = 0 \\
&(E_5)\ :\ 5x(-x-4) = 0 \\
&(E_5)\ :\ 5x = 0 \text{ ou } -x-4 = 0 \\
&(E_5)\ :\ x = 0 \text{ ou } x = -4 \\
&\mathscr{S}_{(E_5)} = \{-4; 0\}
\end{aligned}
$$

8.4 Exercices

Exercice 1

L'hypoténuse d'un triangle rectangle mesure 17 cm et son périmètre est égal à 40 cm. Quelle est son aire ?

Exercice 2

Soient x et y deux nombres réels tels que $x + \frac{2}{y} = \frac{8}{3}$ et $y + \frac{2}{x} = 3$. Quelle est la valeur de xy ?

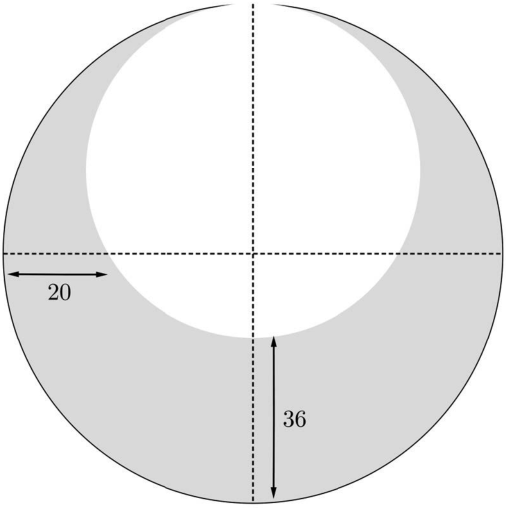
Exercice 3

Résoudre les problèmes suivants :

1. Lors d'un entraînement de tennis, Emma a ramassé deux fois plus de balles que Clément et cinq de plus que Nicolas. S'ils ont ramassé 70 balles à eux trois. Combien de balles Emma a-t-elle ramassées ?
2. Emma a acheté une certaine quantité de haricots. Ces légumes sont constitués de 90 % d'eau. Lors du processus de déshydratation de ces légumes, le pourcentage d'eau dans les haricots était encore de 60 % après que 15 litres d'eau se sont évaporés. Quelle est la quantité de haricots (en kilogrammes) qu'Emma a achetée ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) du nombre entier naturel n le nombre $n^5 - 5n^3 + 4n$ est-il divisible par 120 ?
4. Une classe est composée de 40 élèves. À l'examen de mathématiques, la moyenne de la classe est de 66 points. Les filles ont une moyenne de 70 points et les garçons ont une moyenne de 60 points. Combien y a-t-il de garçons dans cette classe ?
5. Emma et Clément marchent sur un escalator en fonctionnement. Emma marche trois fois plus vite que Clément. Lors de la montée, Emma compte 75 marches alors que Clément n'en compte que 50. Combien de marches de l'escalator faudrait-il monter s'il était à l'arrêt ?

Exercice 4

Quelle est l'aire de la surface grisée ?



Exercice 5

Soient a et b deux entiers tels que $a^3 + 2b^3 = ba^2 + 2ab^2$. Déterminer $a - b$.

8.5 Corrigés

Exercice 1

Soient a et b les mesures en centimètres des deux cathètes du triangle. D'après la théorème de Pythagore, on a $a^2 + b^2 = 17^2$. Par ailleurs, le périmètre étant égal à 40 cm, on a également $a + b + 17 = 40$ soit $a + b = 23$. D'où :

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= 23^2 \\
a^2 + 2ab + b^2 &= 23^2 \\
2ab + 17^2 &= 23^2 \\
ab &= \frac{23^2 - 17^2}{2} \\
ab &= \frac{(23-17)(23+17)}{2} \\
ab &= 120
\end{aligned}$$

Or l'aire du triangle rectangle s'exprime suivant la formule $\frac{ab}{2}$. Donc cette aire est égale à $60\,\text{cm}^2$.

Exercice 2

L'idée est de multiplier les deux égalités membre à membre :

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{2}{x}\right) &= \frac{8}{3}\times 3 \\
xy+2+2+\frac{4}{xy} &= 8 \\
(xy)^2+4xy+4 &= 8xy \longleftarrow \text{ multiplication par } xy \\
(xy)^2-4xy+4 &= 0 \\
(xy-2)^2 &= 0 \\
xy-2 &= 0 \\
xy &= 2
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. Soit x le nombre de balles ramassées par Clément. Emma a alors ramassé $2x$ balles et Nicolas $2x-5$ balles. De plus, ils ont tous les trois ramassé 70 balles. D'où l'équation $x+2x+2x-5=70$, soit $5x-5=70$, puis $5x=75$ et donc $x=15$.
2. Soit x la quantité (en kilogrammes) de haricots achetée par Emma. L'eau représente 90 % de cette quantité, soit $\frac{9}{10}x$. Lors de la déshydratation, la masse des haricots atteint $x-15$ kilogrammes dont $\frac{9}{10}x-15$ kilogrammes d'eau. Or cette dernière représente 60 % de la masse des haricots. D'où l'équation suivante :

$$\frac{9}{10}x-15=\frac{60}{100}(x-15)=\frac{3}{5}(x-15)$$

   Laquelle est équivalente aux égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
5\left(\frac{9}{10}x-15\right) &= 3(x-15) \\
\frac{9}{2}x-75 &= 3x-45 \\
\frac{3}{2}x &= 30 \\
x &= 30\times\frac{2}{3} \\
x &= 20
\end{aligned}$$

3. Remarquons tout d'abord que $120=3\times5\times8$ et que $\mathrm{PPCM}(3;5;8)=120$. Il s'ensuit que n^5-5n^3+4n est un multiple de 120 si, et seulement si, il est un multiple de 3, 5 et 8. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} n^5 - 5n^3 + 4n &= n(n^4 - 5n^2 + 4) \\ &= n(n^2 - 4)(n^2 - 1) \\ &= n(n-2)(n+2)(n-1)(n+1) \end{aligned}$$

Donc $n^5 - 5n^3 + 4n$ est le produit de cinq nombres entiers naturels consécutifs. Or, parmi cinq nombres entiers naturels consécutifs, il y a nécessairement un entier multiple de 3 et un entier multiple de 5. Par conséquent, $n^5 - 5n^3 + 4n$ est divisible par 3 et par 5. De la même façon, parmi cinq nombres entiers naturels consécutifs, au moins l'un d'entre eux doit être multiple de 4 et deux d'entre eux doivent être multiples de 2. Ainsi, sur les cinq, un est multiple de 2 et un autre est multiple de 4. Donc leur produit est multiple de 8. Finalement, pour toute valeur de l'entier naturel n, le nombre $n^5 - 5n^3 + 4n$ est divisible par 120.

4. Soit x le nombre de garçons dans la classe. Le nombre de filles est donc égal à $40 - x$. La somme des points obtenus par les filles est égale à $70(40 - x)$ et la somme des points obtenus par les garçons est égale à $60x$. D'où l'équation suivante :

$$70(40 - x) + 60x = 66 \times 40$$

Laquelle est équivalente aux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} 2\,800 - 70x + 60x &= 2\,640 \\ -10x &= -160 \\ x &= 16 \end{aligned}$$

5. Soit v la vitesse de l'escalator. Soit c la vitesse de Clément par rapport à l'escalator. Alors la vitesse d'Emma par rapport à l'escalator est égale à $3c$. Soit x le nombre de marches qu'il faudrait monter si l'escalator était à l'arrêt. Emma compte 75 marches et la vitesse v de l'escalator lui a permis de ne pas parcourir les $x - 75$ marches restantes. Autrement dit, dans le temps nécessaire à une personne de vitesse $3c$ pour franchir 75 marches, l'escalator a absorbé $x - 75$ marches. D'où l'égalité suivante :

$$\frac{x - 75}{v} = \frac{75}{3c}$$

puis :

$$\frac{3c}{v} = \frac{75}{x - 75} \qquad (1)$$

De la même manière, la vitesse de marche de Clément nous fournit l'égalité suivante :

$$\frac{x - 50}{v} = \frac{50}{c}$$

puis :

$$\frac{c}{v} = \frac{50}{x - 50} \quad (2)$$

Des égalités (1) et (2), on en déduit :

$$\frac{75}{x - 75} = 3 \times \frac{50}{x - 50}$$

puis :

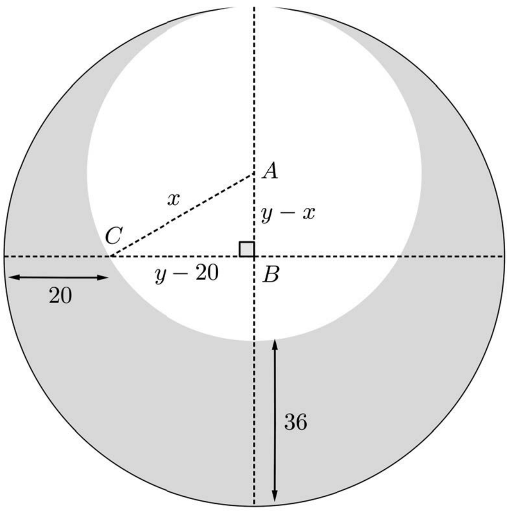
$$75(x - 50) = 150(x - 75)$$

et donc :

$$x = 100$$

Exercice 4

Soit A le centre du « petit » disque. Soit B le centre du « grand » disque. Soit x le rayon du « petit » disque. Soit y le rayon du « grand » disque. On a :



Dans le triangle ABC rectangle en B, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

soit :

$$x^2 = (y - x)^2 + (y - 20)^2$$

puis :

$$\cancel{x^2} = y^2 - 2xy + \cancel{x^2} + y^2 - 40y + 400$$

CORRIGÉS

et finalement :

$$0 = y^2 - xy - 20y + 200 \quad (1)$$

Par ailleurs, tous les diamètres du « grand » disque ayant la même longueur, on a :

$$2y = 36 + 2x$$

d'où :

$$x = y - 18 \quad (2)$$

Injectons (2) dans (1) :

$$0 = y^2 - (y - 18)y - 20y + 200$$

soit :

$$0 = \cancel{y^2} - \cancel{y^2} + 18y - 20y + 200$$

et donc :

$$y = 100$$

Par suite $x = 82$, l'aire du « petit » disque égale $82^2\pi$ et celle du « grand » disque égale $100^2\pi$. Par conséquent, l'aire de la surface grisée est égale à :

$$100^2\pi - 82^2\pi = 3\,276\pi$$

Exercice 5

On a :

$$\begin{aligned} a^3 + 2b^3 &= ba^2 + 2ab^2 \\ a^3 - ba^2 + 2b^3 - 2ab^2 &= 0 \\ a^2(a-b) + 2b^2(b-a) &= 0 \\ (a-b)(a^2 - 2b^2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc, d'après la proposition 11, $a - b = 0$ ou $a^2 - 2b^2 = 0$. Or $a^2 - 2b^2 = 0$ est équivalente à $a^2 = 2b^2$. Si $b = 0$, alors $a = 0$ et $a - b = 0$. Sinon, d'après la proposition 5, $a^2 = 2b^2$ n'admet pas de solution entière. Par conséquent, nous avons nécessairement $a - b = 0$.

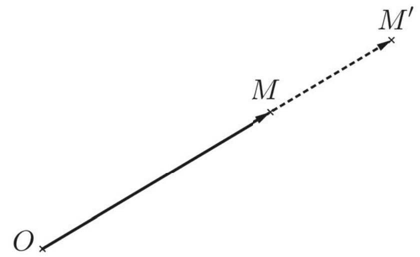
9

Homothétie

9.1 Définition d'une homothétie

Définition 64. Soit O un point du plan. Soit k un nombre réel. On appelle homothétie de centre O et de rapport k la transformation du plan qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Notation : Cette transformation du plan se note en général : $h_{O;k} \; : \; M \longmapsto M'$.
Illustration :



Remarque. Nous pouvons d'ores et déjà formuler plusieurs observations :

1. Si $k = 0$, alors $\overrightarrow{OM'} = 0\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{0}$ et donc M' est confondu avec O. Autrement dit, lorsque $k = 0$, l'homothétie de centre O et de rapport k envoie tout point M sur le point O.
2. Puisque $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ ont nécessairement la même direction (cf. cours de Quatrième). Par conséquent, un point M, son image M' et le centre de l'homothétie sont toujours alignés.
3. De l'égalité $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, on déduit que la norme du vecteur $\overrightarrow{OM'}$ est égale à k fois la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$. D'où les assertions suivantes :
   (a) Si $k \neq 1$, alors $h_{O;k}$ ne conserve pas les longueurs.
   (b) Si $k > 1$ ou $k < -1$, alors $h_{O;k}$ est un agrandissement.

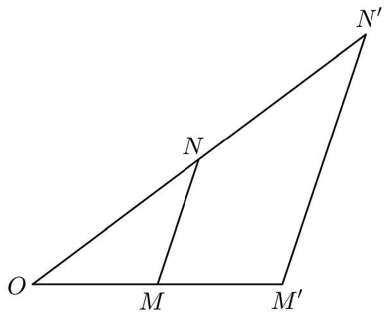
(c) Si $k = 1$, alors $h_{O;k}$ est l'application identité puisqu'elle envoie tout point du plan sur lui-même.
(d) Si $k = -1$, alors $h_{O;k}$ est une symétrie centrale.
(e) Si $-1 < k < 1$, alors $h_{O;k}$ est une réduction.

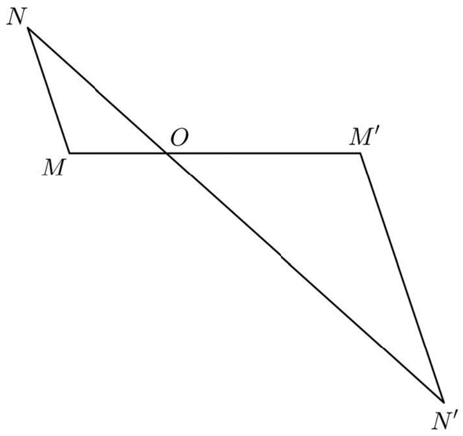
4. Si $k \neq 0$ et $M' = h_{O;k}(M)$, alors $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ et, par conséquent, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$. D'où $M = h_{O;\frac{1}{k}}(M')$. On dit que $h_{O;\frac{1}{k}}$ est la transformation inverse de $h_{O;k}$.

9.2 Propriétés d'une homothétie

Proposition 65. *(Propriété fondamentale de l'homothétie) Soit k un nombre réel. Soient M et N deux points du plan d'images respectives M' et N' par h. Alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.*

Démonstration. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k. Soient M et N deux points quelconques du plan et M' et N' leurs images respectives par h.





D'après la définition 64, on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON} \end{cases}$$

d'où :

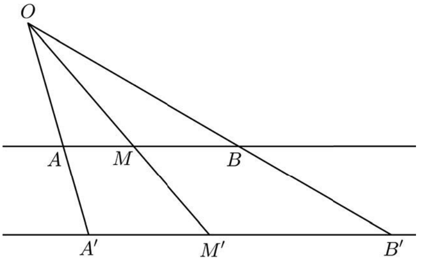
$$\begin{aligned} \overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'} \\ &= k\overrightarrow{MO} + k\overrightarrow{ON} \\ &= k(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}) \\ &= k\overrightarrow{MN} \end{aligned}$$

□

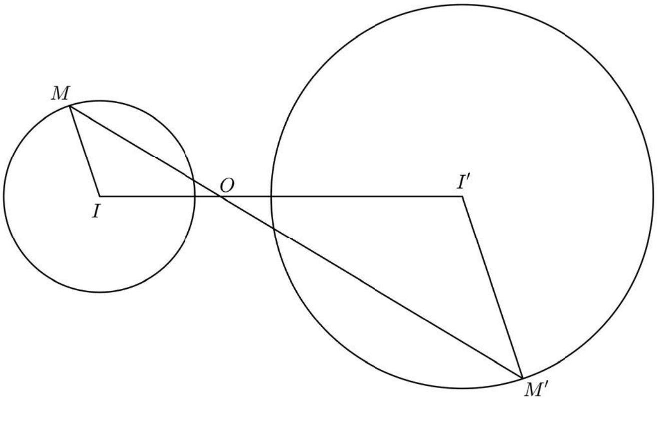
Proposition 66. *Soit k un nombre réel non nul. Soit h une homothétie de rapport k. Soient A, B et I trois points du plan avec A et B distincts. Soient A', B' et I' les images respectives de A, B et I par h.*

1. *L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$ et les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.*
2. *L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.*
3. *L'image de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.*
4. *L'image du cercle de centre I et de rayon r est le cercle de centre I' et de rayon $|k|\,r$.*

Démonstration. 1. D'après la propriété fondamentale d'une homothétie, $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Par définition d'un vecteur, il s'ensuit que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.



Soit $M \in (AB)$. Alors il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. Soit M' l'image de M par h. Alors, d'après la propriété fondamentale, $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{A'B'}$. Autrement dit, le point M' appartient à la droite $(A'B')$.
Soit $N' \in (A'B')$. Alors il existe un nombre réel k' tel que $\overrightarrow{A'N'} = k'\overrightarrow{A'B'}$. Soit N l'antécédent de N' par h. Alors, d'après la propriété fondamentale, $\overrightarrow{AN} = k'\overrightarrow{AB}$. Autrement dit, le point N appartient à la droite (AB).
2. et 3. Laissées en exercices au lecteur qui pourra s'inspirer de 1.
4. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre I et de rayon r. Posons $I' \coloneqq h_{O;k}(I)$. Soit $M \in \mathscr{C}$. Posons $M' \coloneqq h_{O;k}(M)$.



D'après la propriété fondamentale, $\overrightarrow{I'M'} = k\overrightarrow{IM}$, d'où $I'M' = |k|\,IM$. Ainsi l'égalité $IM = r$ est équivalente à l'égalité $I'M' = |k|\,r$. Autrement dit, lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$, M' décrit le cercle de centre I' et de rayon $|k|\,r$ et réciproquement, lorsque M' décrit le cercle de centre I' et de rayon $|k|\,r$, M décrit le cercle $\mathscr{C}$. Par conséquent, l'image du cercle de centre I et de rayon r est le cercle de centre I' et de rayon $|k|\,r$. $\square$

Proposition 67. *Toute homothétie envoie :*

1. *deux droites parallèles sur deux deux droites parallèles ;*
2. *deux droites perpendiculaires sur deux droites perpendiculaires ;*
3. *le milieu d'un segment sur le milieu du segment image ;*
4. *un angle sur un angle de même mesure.*

Démonstration. 1. Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles. D'après la proposition 66, l'image d_1' de d_1 par h est parallèle à d_1 et l'image d_2' de d_2 par h est parallèle à d_2. Comme d_1 et d_2 sont parallèles, d_1' et d_2' le sont également d'après le cours de Sixième.
2. Laissée en exercice au lecteur qui pourra s'inspirer de 1.
3. Soit $[AB]$ un segment de milieu I. Soient A', B' et I' les images respectives de A, B et I par une homothétie de rapport k. D'après la propriété fondamentale :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{I'A'} + \overrightarrow{I'B'} &= k\overrightarrow{IA} + k\overrightarrow{IB} \\ &= k(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \\ &= \overrightarrow{0} \longleftarrow \text{ car } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Par conséquent I' est le milieu du segment $[A'B']$ d'après le cours de Quatrième.
4. Admise. $\square$

Proposition 68. *Soit k un nombre réel. Soit h une homothétie de rapport k.*

1. *L'image d'un segment de longueur l est un segment de longueur $|k|\,l$.*
2. *L'image d'une figure d'aire $\mathscr{A}$ est une figure d'aire $k^2\mathscr{A}$.*

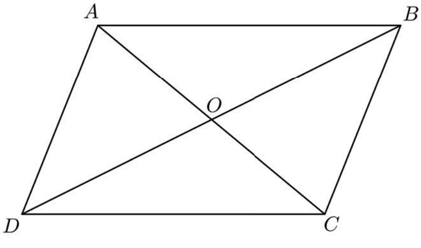
Démonstration. 1. C'est une conséquence immédiate de la propriété fondamentale.
2. Admise. Toutefois, nous avons observé dans le cours de Sixième que si l'on doublait la longueur du côté d'un carré, alors son aire était multipliée par 2^2. $\square$

9.3 Caractérisation d'une homothétie

Proposition 69. *(Caractérisation par le centre, un point et son image) Soient O, A et A' trois points alignés deux à deux distincts. Il existe une unique homothétie de centre O qui envoie A en A'.*

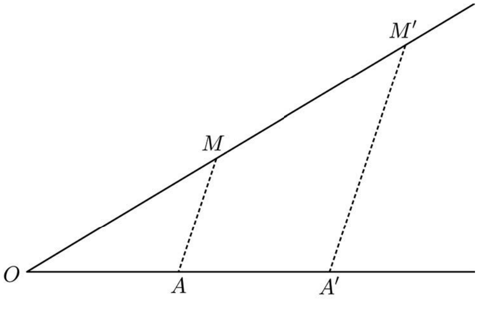
Démonstration. Les trois points O, A et A' étant alignés, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires (cf. cours de Quatrième). Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ étant non nul, il existe un unique nombre réel k tel que $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ et $k \neq 0$, sinon A' serait confondu avec O. Donc A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport k. Notons au passage que $k = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$. □

Exemple. Dans le parallélogramme $ABCD$ de centre O ci-dessous, C peut être considéré comme l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -1, O peut être considéré comme l'image de A par l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$ et D peut être considéré comme l'image de O par l'homothétie de centre B et de rapport 2.



Exercice. Soit h l'homothétie de centre O envoyant A en A'. Construisons l'image par h d'un point M distinct de O et A.
Il nous faut pour cela distinguer deux cas.
Premier cas - $M \notin (OA)$:

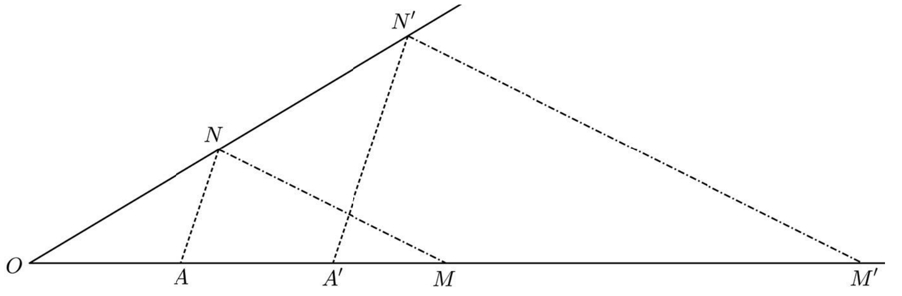
1. On construit la droite parallèle à la droite (AM) et passant par A'.
2. On marque le point d'intersection M' de cette droite avec la droite (OM). Notons que les droites (OM) et $(A'M')$ sont sécantes car les droites (OM) et (AM) le sont par hypothèse.



3. L'image de M appartient à la droite (OM) ainsi qu'à l'image de la droite (AM) qui n'est autre que la droite parallèle à (AM) passant par A'. Donc $h(M) = M'$.

Second cas - $M \in (OA)$:

1. On construit l'image N' d'un point N n'appartenant pas à la droite (OA) via la construction précédente.
2. On construit ensuite le point d'intersection M' de la droite (OA) avec la droite parallèle à (MN) passant par N'.



3. En suivant deux fois de suite le raisonnement précédent, on démontre que $h(M) = M'$.

Proposition 70. *(Caractérisation par son rapport, un point et son image) Soit k un nombre réel différent de 0 et 1. Soient A et A' deux points du plan. Il existe une unique homothétie de rapport k qui transforme A en A'.*

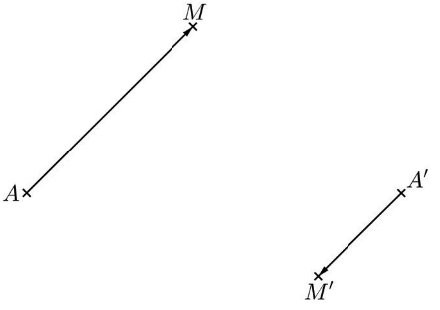
Démonstration. Soit O un point du plan. L'égalité $A' = h_{O;k}(A)$ est équivalente à $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ laquelle est équivalente à $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} = -k\overrightarrow{AO}$ et donc à $(1-k)\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AA'}$ et enfin à $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AA'}$ car $k \neq 1$. Ainsi, pour A, A' et k donnés (avec $k \notin \{0; 1\}$), il existe un unique point O tel que $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AA'}$. Par conséquent, il n'existe qu'une seule homothétie de rapport k envoyant A sur A'. □

Exercice. Soit h l'homothétie de rapport k envoyant A en A'. Construisons l'image par h d'un point M distinct de O et A.

Première méthode :

On construit le point M' tel que $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$.

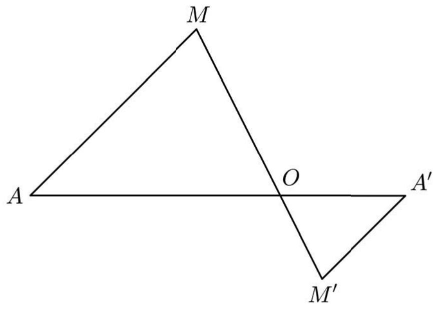
Voici une figure pour $k = -\frac{1}{2}$:



Seconde méthode :

On construit le centre O défini par $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AA'}$. Puis on construit le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Voici une figure pour $k = -\frac{1}{2}$:



Proposition 71. *(Caractérisation par deux points et leurs images) Soient A, B, A' et B' quatre points du plan tels que les droites $(A'B')$ et (AB) soient parallèles et $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$. Il existe une unique homothétie qui transforme A en A' et B en B'.*

Démonstration. Unicité sous réserve d'existence :
Si une telle homothétie existe, alors, d'après la propriété fondamentale, son rapport ne peut être que le nombre réel k tel que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k \notin \{0;1\}$. Mais alors l'homothétie recherchée ne peut être que l'homothétie h de rapport k et envoyant A en A'.
Existence :
Démontrons que l'homothétie h de rapport k envoyant A en A' envoie bien B en B'. Soit O le centre de h. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB'} &= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'}\\ &= k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB}\\ &= k(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB})\\ &= k\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

Ainsi h envoie bien B en B'.

□

Exercice. Soient A, A', B et B' quatre points tels que $(AB)//(A'B')$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$. Soit h l'homothétie envoyant A en A' et B en B'. Soit M un point distinct de O et A. Construisons l'image M' de M par h. Il nous faut pour cela distinguer deux cas.
Premier cas - $M \notin (AB)$:
Si k désigne le rapport de l'homothétie h, alors, d'après la proposition 65, on a $\overrightarrow{M'A'} = k\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{M'B'} = k\overrightarrow{MB}$. Donc la droite $(M'A')$ est parallèle à la droite (MA) et la droite $(M'B')$ est parallèle à la droite (MB). Ainsi, il nous suffit de construire la droite parallèle à (MA) passant par A' et la droite parallèle à (MB) passant par B'. Ces deux droites s'intersectent car $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$. Le point d'intersection n'est autre que le point M' recherché.
Second cas - $M \in (AB)$:
On choisit un point C n'appartenant pas à la droite (AB) et l'on construit son image C' par h à l'aide du premier cas. Alors h peut être vue comme l'homothétie envoyant

A en A' et C et C'. Si le point M appartenait à la droite (AC), alors il serait confondu avec le point A, ce qui est exclu. Donc $M \notin (AC)$ et l'on construit son image M' en s'appuyant désormais sur le premier cas.

Remarque. Nous pouvons formuler plusieurs remarques :

1. Lorsque les droites (AB) et $(A'B')$ sont distinctes, le centre de l'homothétie envoyant la droite (AB) sur la droite $(A'B')$ est le point d'intersection des droites (AA') et (BB').
2. Si $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, alors l'homothétie transformant A en A' et B en B' a pour rapport 1 et est donc égale à l'application identité. Si les points A et A' sont confondus, alors l'application identité convient, sinon, il n'existe aucune homothétie répondant à la question.

Proposition 72. *(Caractérisation par deux points et leurs images) Soit f une transformation du plan. Soit k un nombre réel différent de 0 et 1. f est une homothétie de de rapport k si, et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.*

Démonstration. $\Rightarrow$: si f est une homothétie de rapport k, alors, d'après la propriété fondamentale, pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.
$\Leftarrow$: supposons que pour tous points M et N du plan $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$. Soient A et B deux points distincts du plan. Posons $A' := f(A)$ et $B' := f(B)$. Alors, d'après la propriété fondamentale, $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. D'après la proposition 71, il existe une homothétie h de rapport k telle que $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$. Soit M un point du plan. Posons $M' := f(M)$ et $M_1 := h(M)$. $M' = f(M)$ donc $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$. $M_1 = h(M)$ donc $\overrightarrow{A'M_1} = k\overrightarrow{AM}$. Ainsi $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{A'M_1}$ et par suite $M' = M_1$. Autrement dit, la transformation f n'est rien d'autre que l'homothétie h. □

9.4 Groupe des homothéties-translations

Proposition 73. *(Composée de deux homothéties) Soient O et O' deux point du plan. Soient k et k' deux nombres réels. Soient $h = h_{O;k}$ et $h' = h_{O';k'}$.*

1. *Si $O = O'$, alors la composée $h' \circ h$ de h suivie de h' est l'homothétie de centre O et de rapport $k'k$.*
2. *Si $O \neq O'$:*
   (a) *Si $k'k \neq 1$, alors la composée $h' \circ h$ de h suivie de h' est une homothétie de rapport $k'k$.*
   (b) *Si $k'k' = 1$, alors la composée $h' \circ h$ de h suivie de h' est une translation.*

Démonstration. 1. Si $O = O'$:
Soit M un point du plan. Soient M_1 son image par h et M' l'image de M_1 par h'. Par définition, on a $\overrightarrow{OM'} = k'\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$. D'où $\overrightarrow{OM'} = k'k\overrightarrow{OM}$. Ainsi, par définition, $h' \circ h = h_{O;k'k}$.

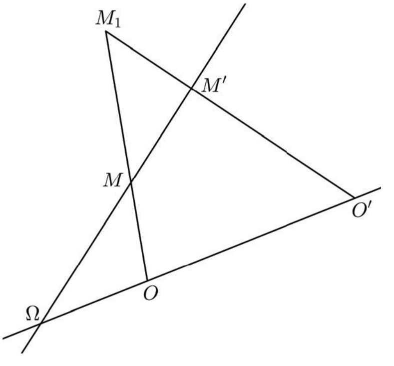
2. Si $O \neq O'$:
Soient M et N deux points distincts du plan. Posons $M_1 := h(M)$, $N_1 := h(N)$, $M' := h'(M_1)$ et $N' := h'(N_1)$. Par définition, on a $\overrightarrow{M'N'} = k'\overrightarrow{M_1N_1}$ et $\overrightarrow{M_1N_1} = k\overrightarrow{MN}$. D'où $\overrightarrow{M'N'} = k'k\overrightarrow{MN}$. De deux choses, l'une :

1. Soit $k'k = 1$ et l'on a $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$. Autrement dit, $h' \circ h$ est une translation d'après le cours de Quatrième.
2. Soit $k'k \neq 1$ et l'on reconnaît une homothétie d'après la proposition 72.

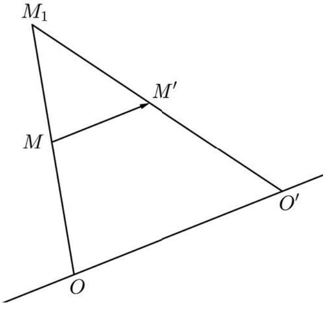
□

Remarque. Nous pouvons effectuer plusieurs remarques :

1. La droite (OO') est globalement invariante par les homothéties h et h', elle est donc globalement invariante par la composée $h' \circ h$. Par conséquent, si $h' \circ h$ est une homothétie de centre Ω, alors $\Omega \in (OO')$ et si $h' \circ h$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, alors $\overrightarrow{u}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OO'}$. Toutefois, cela ne suffit pas à déterminer le centre de l'homothétie (ou le vecteur de la translation) $h' \circ h$.
   (a) Construction du centre Ω de l'homothétie $h' \circ h$ (si $k'k' \neq 1$) :
   On choisit un point M n'appartenant pas à la droite (OO') et l'on construit le point M_1, image de M par h, et le point M', image de M_1 par h'.



   M' est l'image de M par l'homothétie $h' \circ h$, donc le centre Ω de cette homothétie appartient à la droite (MM'). De plus, $\Omega \in (OO')$. Donc Ω est le point d'intersection des droites (OO') et (MM').
   (b) Construction du vecteur $\overrightarrow{u}$ de la translation $h' \circ h$ (si $k'k = 1$) :
   Pour déterminer le vecteur $\overrightarrow{u}$ de la translation $h' \circ h$, il suffit de construire l'image M' d'un point M par $h' \circ h$. On a alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MM'}$.



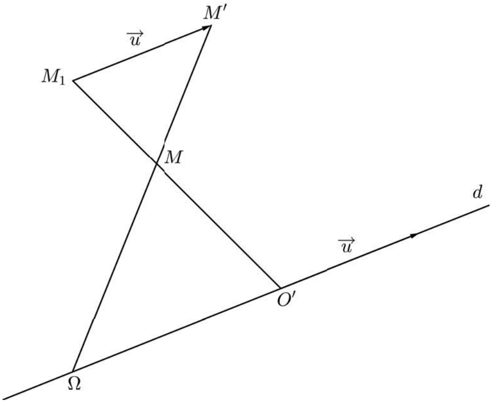
2. Dans le cas où $O = O'$:
   (a) Si $k'k = 1$, alors la composée est l'application identité qui envoie tout point du plan sur lui-même.
   (b) Si $k'k = -1$, alors la composée est la symétrie centrale de centre O.
   (c) $k'k = kk'$ donc $h' \circ h = h \circ h'$. Autrement dit, la composée de deux homothéties de même centre est commutative.

Proposition 74. *(Composée d'une homothétie et d'une translation) Soit k un nombre réel différent de 1. Soit h une homothétie de rapport k. Soit t une translation. Les composées $h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties de rapport k.*

Démonstration. Soient M et N deux points distincts du plan. Posons $M_1 := t(M)$, $N_1 := t(N)$, $M' := h(M_1)$ et $N' := h(N_1)$. D'après le cours de Quatrième, $\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{MN}$ et, d'après la propriété fondamentale, $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{M_1N_1}$. Donc $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$. Ainsi, d'après la proposition 72, $h \circ t$ est une homothétie de rapport k. On démontre de la même façon que $t \circ h$ est également une homothétie de rapport k. □

Remarque. Nous pouvons effectuer plusieurs remarques :

1. La droite d passant par le centre de l'homothétie h et dirigée par le vecteur de la translation t est globalement invariante par h et t. Par conséquent, les centres des homothéties $h \circ t$ et $t \circ h$ appartiennent à la droite d. Toutefois, cela ne suffit pas à déterminer les centres des homothéties $h \circ t$ et $t \circ h$.
   (a) Construction du centre de l'homothétie $t \circ h$:



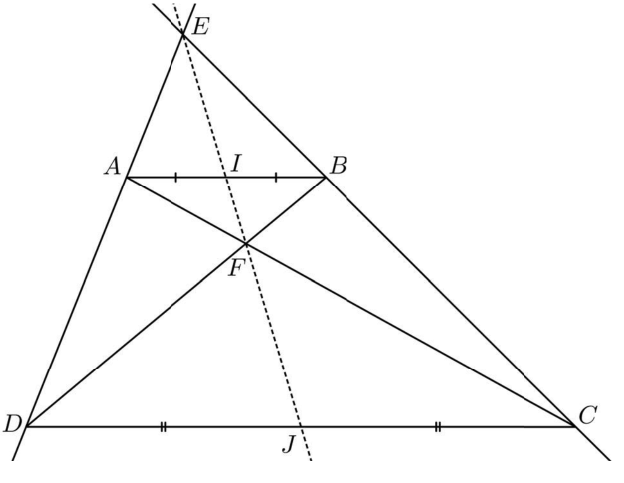
   On choisit un point M n'appartenant pas à la droite d et l'on construit le point M_1, image de M par h, et le point M', image de M_1 par t.
   M' est l'image de M par l'homothétie $t \circ h$, donc le centre Ω de cette homothétie appartient à la droite (MM'). De plus, $\Omega \in d$. Donc Ω est le point d'intersection des droites d et (MM').
   (b) Construction du centre de l'homothétie $h \circ t$:
   La construction est analogue à la précédente. Elle est laissée en exercice au lecteur.

2. Si l'on adjoint aux propositions 73 et 74 la proposition du cours de Quatrième stipulant que la composée de deux translations est une translation, alors nous constatons que l'ensemble des homothétie-translations est fermé pour la loi de composition $\circ$. Autrement dit, si l'on compose deux transformations quelconques de cet ensemble, on retrouve une transformation de cet ensemble.
   (a) L'application identité appartient à l'ensemble des homothéties-translations.
   (b) La composée de deux transformations quelconques de l'ensemble des homothéties-translations appartient à l'ensemble des homothéties-translations.
   (c) Pour toute transformation f appartenant à l'ensemble des homothéties-translations, il existe une transformation inverse f' appartenant à l'ensemble des homothéties-translations. On a alors $f \circ f' = f' \circ f = id$.
   (d) Soient f, f' et f'' trois transformations appartenant à l'ensemble des homothéties-translations. Alors $(f \circ f') \circ f'' = f \circ (f' \circ f'')$. Autrement dit, la composition de transformations appartenant à l'ensemble des homothéties-translations est associative.
   (e) Des quatre premiers points, il résulte que l'ensemble des homothéties-translations muni de la loi de composition forme un groupe, appelé groupe des homothéties-translations.

9.5 Exercices

Exercice 1

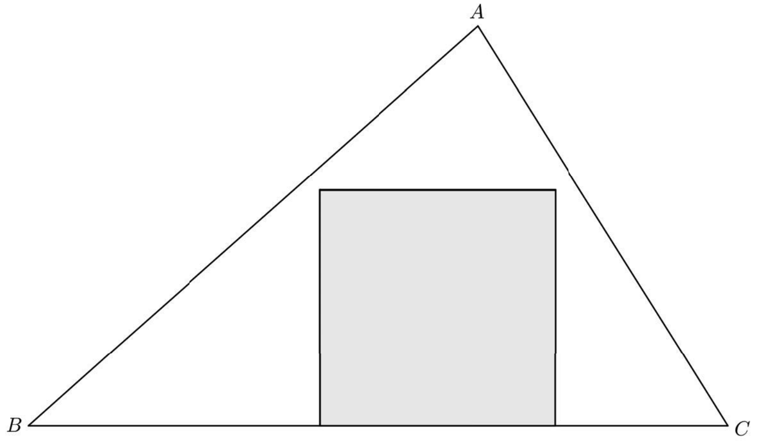
Soit $ABCD$ un trapèze non parallélogramme de bases $[AB]$ et $[CD]$ (i.e. un quadrilatère tel que les côtés $[AB]$ et $[CD]$ soient parallèles). Soit F le point d'intersection de ses diagonales. Soient I et J les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[CD]$. Soit E le point d'intersection des droites (AD) et (BC).



Démontrer que les points E, I, F et J sont alignés.

Exercice 2

Soit ABC un triangle quelconque. Comment tracer un carré dont les quatre sommets appartiennent aux côtés du triangle ?



Exercice 3

Soient A, B et C trois points du plan non alignés. Soient A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. On note h l'homothétie de centre G et de rapport -2.

1. Déterminer les images de A', B' et C' par h.
2. Déterminer l'image de chacune des médiatrices du triangle ABC par h.
3. Démontrer que H est l'image de O par h. En déduire que les points O, G et H sont alignés.

Remarque. La droite (OG) est appelée la droite d'Euler du triangle ABC.

Exercice 4

Soient A, B et C trois points du plan non alignés. Soient A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit M un point distinct de tous les précédents points. Soit d_1 la droite parallèle à (MA') passant par A. Soit d_2 la droite parallèle à (MB') passant par B. Soit d_3 la droite parallèle à (MC') passant par C. Démontrer que les droites d_1, d_2 et d_3 sont concourantes.

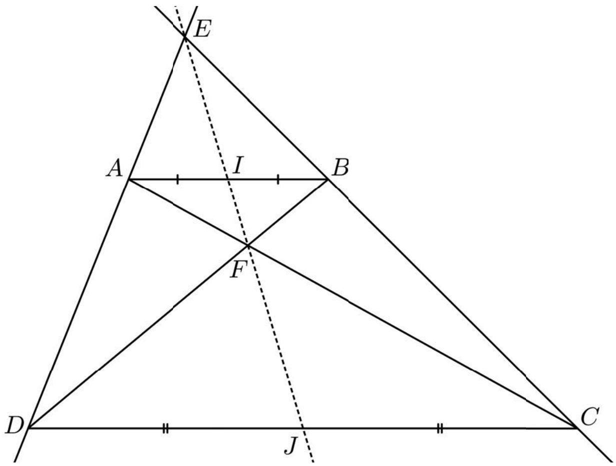
Exercice 5

Soient A, B et C trois points du plan distincts deux à deux. Déterminer dans chacun des cas suivants le rapport de l'homothétie de centre A transformant B en C :

1. $\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$
2. $\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$
3. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA}$

9.6 Corrigés

Exercice 1

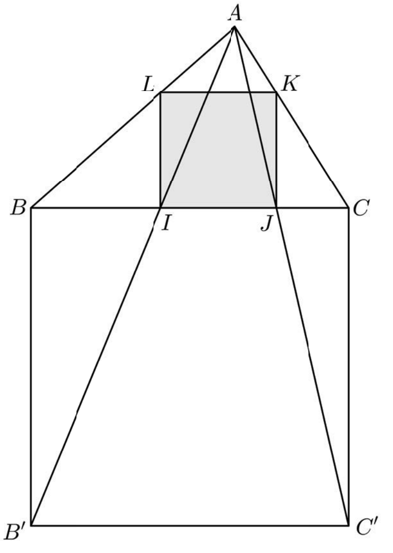


Les segments $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles mais de longueur différente. Donc, d'après la proposition 71, il existe une homothétie de centre E qui envoie le segment $[CD]$ sur le segment $[AB]$. Par cette homothétie, l'image du milieu J du segment $[DC]$ est le milieu I du segment $[AB]$ d'après la proposition 67. Donc, par définition, les points E, I et J sont alignés. Les segments $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles mais de longueur différente. Donc, d'après la proposition 71, il existe une homothétie de centre de centre F qui envoie le segment $[AB]$ sur le segment $[CD]$. Par cette homothétie, l'image du milieu I du segment $[AB]$ est le milieu J du segment $[DC]$ d'après la proposition 67. Donc, par définition, les points F, I et J sont alignés. Finalement, les points E, I, F et J sont alignés.

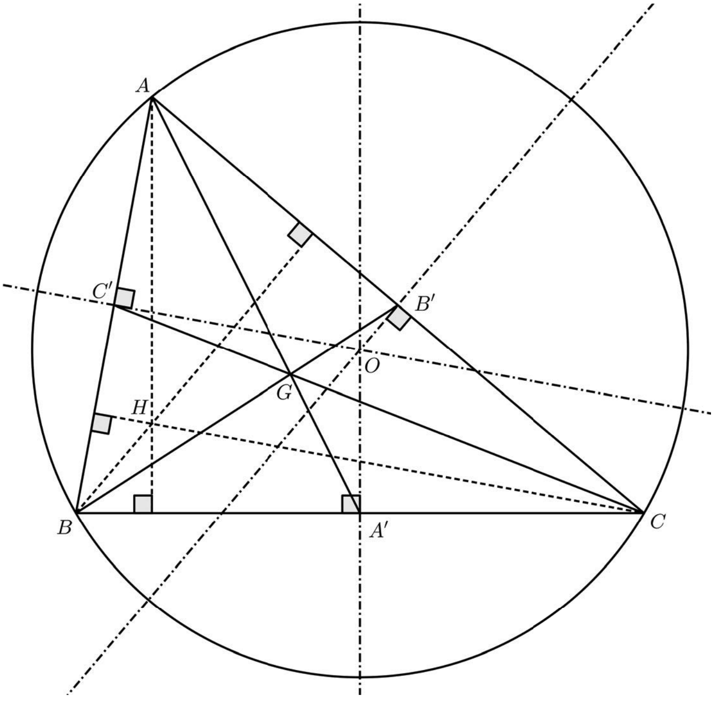
Exercice 2

Une bonne idée consiste à tracer un carré $BCC'B'$ à l'extérieur du triangle ABC. Soit I le point d'intersection des segments $[AB']$ et $[BC]$. Soit J le point d'intersection des segments $[AC']$ et $[BC]$. Soit h l'homothétie de centre A qui transforme B' en I. D'après le cours, h transforme le carré $BCC'B'$ en un carré $IJKL$. Démontrons que $J \in [BC]$, $K \in [AC]$ et $L \in [AB]$. L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle à celle-ci. Donc l'image de la droite $(B'C')$ par h est la droite parallèle à $(B'C')$ passant par le point I. Par construction, il s'agit de la droite (BC). Le point J, image du point C' par h, appartient donc à la droite (BC). L'image par une homothétie d'une droite passant par le centre de cette homothétie est cette droite. Le point L, image du point B par h, appartient donc à la droite (AB). De la même façon, le point K appartient à la droite (AC). Le carré $IJKL$ voit donc bien ses quatre sommets appartenir aux côtés du triangle ABC.

CORRIGÉS



Exercice 3



1. D'après le cours de Quatrième, le centre de gravité d'un triangle est situé sur chaque médiane à deux tiers du sommet et un tiers du milieu du côté opposé. Donc on a les égalités vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} \overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'} \\ \overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GB'} \\ \overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC'} \end{cases}$$

Ainsi, par définition de l'homothétie, on en déduit :

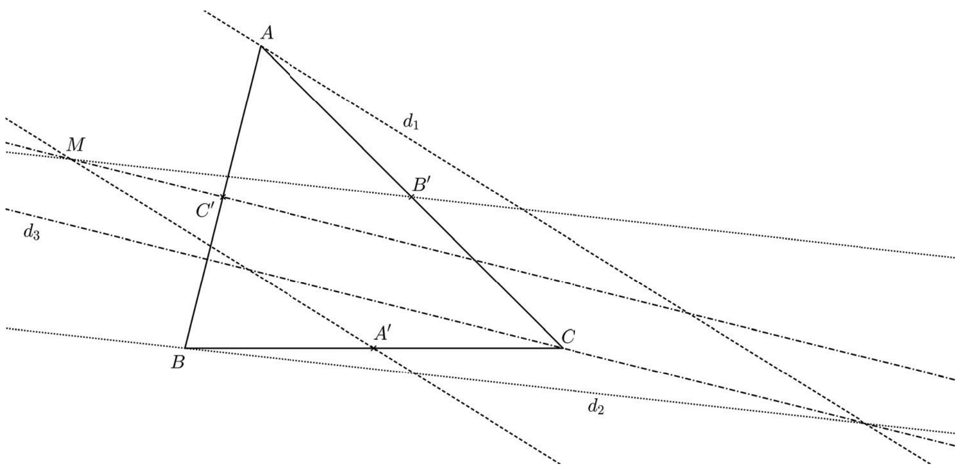
$$\begin{cases} A = h(A') \\ B = h(B') \\ C = h(C') \end{cases}$$

2. D'une part $h(A') = A$. D'autre part, l'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle à celle-ci. Donc l'image de la médiatrice relative à $[BC]$ est la droite parallèle à cette médiatrice et passant par A. D'après le cours de Sixième, il s'agit de la hauteur du triangle ABC issue de A. De la même façon, l'image par h de la médiatrice de $[AC]$ est la hauteur issue de B et l'image par h de la médiatrice de $[BC]$ est la hauteur issue de C.
3. D'après 2. et, l'homothétie conservant la concourance, l'image du point de concours des médiatrices du triangle ABC est le point de concours des hauteurs du triangle ABC. Plus formellement, $h(O) = H$. D'où l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$$

Il s'ensuit que les points O, G et H sont alignés.

Exercice 4



Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Soit h l'homothétie de centre G et de rapport -2. Alors $h(A') = A$, $h(B') = B$ et $h(C') = C$. Par ailleurs, l'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle à celle-ci. Donc $h\left((MA')\right) = d_1$, $h\left((MB')\right) = d_2$ et $h\left((MC')\right) = d_3$. Comme les droites (MA'), (MB') et (MC') sont concourantes par construction et que l'homothétie conserve la concourance, les droites d_1, d_2 et d_3 sont également concourantes.

CORRIGÉS

Exercice 5

1. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{AC} &= -3\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Donc l'homothétie de centre A et de rapport -3 envoie B en C.

2. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{AC} &= -3\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Donc l'homothétie de centre A et de rapport -3 envoie B en C.

3. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= 2\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} &= 2\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{AC} &= -\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Donc l'homothétie de centre A et de rapport -1 envoie B en C.

Bonus. *Déterminer ce que renvoie l'algorithme suivant avant de l'implémenter :*

10 Inéquations

10.1 Ordre sur les nombres

Définition 75. Soient a et b deux nombres réels.

1. On dit que a est inférieur à b, et l'on note $a \leqslant b$, si la différence $b - a$ est positive. On dit que a est supérieur à b, et l'on note $a \geqslant b$, si la différence $b - a$ est négative.
2. On dit que a est strictement inférieur à b, et l'on note $a < b$, si la différence $b - a$ est strictement positive. On dit que a est strictement supérieur à b, et l'on note $a > b$, si la différence $b - a$ est strictement négative.

Remarque. Pour comparer deux nombres, il peut être pertinent d'étudier le signe de leur différence.

Exemple. Comparons $\frac{17}{13}$ et $\frac{26}{19}$. Pour cela, calculons la différence $\frac{17}{13} - \frac{26}{19}$:

$$\frac{17}{13} - \frac{26}{19} = \frac{323}{247} - \frac{338}{247} = -\frac{15}{247} < 0$$

Proposition 76. *La relation « $\leqslant$ » est une relation d'ordre, c'est-à-dire qu'elle est :*

1. Réflexive. *Pour tout nombre réel a, $a \leqslant a$.*
2. Antisymétrique. *Pour tous nombres réels a et b, si $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$ alors $a = b$.*
3. Transitive. *Pour tous nombres réels a, b et c, si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$ alors $a \leqslant c$.*

Démonstration. 1. Soit a un nombre réel. Alors $a - a = 0$. Or 0 est positif. Donc $a \leqslant a$.
2. Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$. Alors $a - b$ est positif et négatif. Ceci n'est possible que si $a - b = 0$, autrement dit si $a = b$.
3. Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$. Alors $b - a$ est positif et $c - b$ est positif. Donc $(c - b) + (b - a)$ est positif, et par conséquent $c - a$ est positif. Autrement dit, $a \leqslant c$. $\square$

Proposition 77. *Pour tous nombres réels a, b et c, on a l'équivalence suivante :*

$$a \leqslant b \text{ si, et seulement si, } a + c \leqslant b + c.$$

Démonstration. $\Rightarrow$: soient a, b et c trois nombres réels. Supposons $a \leqslant b$. Alors :

$$(b + c) - (a + c) = b + \cancel{c} - a - \cancel{c} = b - a$$

Or $b - a$ est positif. Donc $(b + c) - (a + c)$ est positif. Autrement dit, $a + c \leqslant b + c$.
$\Leftarrow$: soient a, b et c trois nombres réels. Supposons $a + c \leqslant b + c$. Alors, d'après l'implication précédente :

$$\begin{aligned} a + c + \underbrace{(-c)} &\leqslant b + c + \underbrace{(-c)} \\ a + \cancel{c} - \cancel{c} &\leqslant b + \cancel{c} - \cancel{c} \\ a &\leqslant b \end{aligned}$$

□

Remarque. Conséquemment à la proposition 77, il est désormais possible dans une inégalité de « faire passer » un terme d'un membre à l'autre à condition de changer son signe. Plus formellement :

$$\begin{aligned} a \underbrace{+c} &\leqslant b \\ a + c + (-c) &\leqslant b + (-c) \\ a + \cancel{c} + (\cancel{-c}) &\leqslant b + (-c) \\ a &\leqslant b \underbrace{-c} \end{aligned}$$

Proposition 78. *Soient a, b, c et d quatre nombres réels. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a + c \leqslant b + d$. On dit que l'addition est compatible avec la relation d'ordre « $\leqslant$ ».*

Démonstration. Soient a, b, c et d quatre nombres réels . Supposons $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$. Alors $b - a$ et $d - c$ sont positifs. Donc $(b - a) + (d - c)$ est positif. Autrement dit, $(b + d) - (a + c)$ est positif. C'est-à-dire $a + c \leqslant b + d$. □

Remarque. Cette proposition nous permet d'additionner deux inégalités membre à membre.

Exemple. Si $11 \leqslant l$ et $15 \leqslant L$, alors $11 + 15 \leqslant l + L$, c'est-à-dire $26 \leqslant l + L$.

Proposition 79. *Soient a et b deux nombres réels.*

1. *Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, alors $ab \geqslant 0$.*
2. *Si $a \geqslant 0$ et $b \leqslant 0$, alors $ab \leqslant 0$.*
3. *Si $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$, alors $ab \geqslant 0$.*

Démonstration. C'est la « règle des signes » découverte dans le cours de Quatrième et que nous pouvons synthétiser via le tableau suivant :

$\times$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

□

Proposition 80. *Soient a, b et c trois nombres réels.*

1. *Si $c \geqslant 0$, alors $a \leqslant b$ équivaut à $ac \leqslant bc$.*
2. *Si $c \leqslant 0$, alors $a \leqslant b$ équivaut à $ac \geqslant bc$.*

Démonstration. Démontrons le point 2. Soit $c \leqslant 0$.
$\Rightarrow$: supposons $a \leqslant b$. Alors $ac - bc = (a-b)c$. Or $a - b \leqslant 0$ et $c \leqslant 0$. Donc, d'après la « règle des signes », $(a-b)c \geqslant 0$. Autrement dit, $ac - bc \geqslant 0$ et par suite $ac \geqslant bc$.
$\Leftarrow$: supposons $ac \geqslant bc$. Raisonnons par l'absurde et supposons $a > b$. Alors $a - b > 0$. Or $c < 0$. Donc, d'après la « règle des signes », $ac - bc = (a-b)c < 0$. Autrement dit, $ac < bc$. Ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ. Donc $a \leqslant b$. □

Remarque. Nous pouvons effectuer deux remarques :

1. On ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant (resp. en divisant) chaque membre par un nombre positif (resp. strictement positif).
   Exemple : si $x \leqslant y$ alors $2\,024x \leqslant 2\,024y$ et $\frac{x}{2\,024} \leqslant \frac{y}{2\,024}$.
2. On change le sens d'une inégalité en multipliant (resp. en divisant) chaque membre par un nombre négatif (resp. strictement négatif).
   Exemple : si $x \leqslant y$ alors $-42x \geqslant -42y$ et $\frac{x}{-7} \geqslant \frac{y}{-7}$.

10.2 Les intervalles de $\mathbb{R}$

Remarque. Commençons par un rappel du cours de Cinquième.

Définition 81. Soit x un nombre réel. On appelle valeur absolue de x, notée $|x|$, le nombre :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple. $|2\,024| = 2\,024$ et $|-42| = 42$.

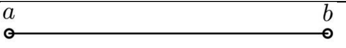
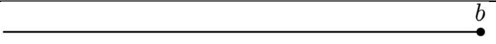
Remarque. Nous pouvons effectuer deux remarques :

1. La valeur absolue d'un nombre est toujours positive.
2. La valeur absolue d'un nombre x est le plus grand des deux nombres x et $-x$.

Proposition 82. *(Inégalité triangulaire) Pour tous les nombres réels x et y, $||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$.*

Démonstration. Soient x et y deux nombres réels. Alors $x \leqslant |x|$ et $y \leqslant |y|$ donc, d'après la proposition 78, $x + y \leqslant |x| + |y|$. Aussi, $-x \leqslant |x|$ et $-y \leqslant |y|$ donc, d'après la proposition 78, $-x - y \leqslant |x| + |y|$. Par conséquent, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. L'autre inégalité est laissée en exercice au lecteur. □

Définition 83. Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$. Il existe huit types d'intervalles de $\mathbb{R}$. Plus précisément, on a :

Notation	Inégalité(s)	Représentation géométrique
$[a; b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$[a; b[$	$a \leqslant x < b$	
$]a; b]$	$a < x \leqslant b$	
$]a; b[$	$a < x < b$	
$[a; +\infty[$	$a \leqslant x$	
$]a; +\infty[$	$a < x$	
$]-\infty; b]$	$x \leqslant b$	
$]-\infty; b[$	$x < b$	

Remarque. Nous pouvons formuler plusieurs remarques :

1. Ces intervalles se lisent de la manière suivante :

Notation	Lecture
$[a; b]$	Intervalle a, b fermé
$[a; b[$	Intervalle a, b fermé en a, ouvert en b
$]a; b]$	Intervalle a, b ouvert en a, fermé en b
$]a; b[$	Intervalle a, b ouvert
$[a; +\infty[$	Intervalle a, $+\infty$ fermé en a
$]a; +\infty[$	Intervalle a, $+\infty$ ouvert en a
$]-\infty; b]$	Intervalle $-\infty$, b fermé en b
$]-\infty; b[$	Intervalle $-\infty$, b ouvert en b

2. a et b sont appelées les bornes (ou les extrémités) de l'intervalle $[a; b[$.

3. $b - a$ est appelé la longueur (ou l'amplitude) de l'intervalle $]a; b]$.
4. $[a; a] = \{a\}$. L'ensemble $\{a\}$ ne contient que l'élément a, c'est ce que nous appelons un « singleton ».
5. $]a; a[= \emptyset$. La notation $\emptyset$ désigne l'ensemble vide, c'est-à-dire l'ensemble ne contenant aucun élément.
6. $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.
7. $\mathbb{R}_+ := [0; +\infty[$ et $\mathbb{R}_- :=]-\infty; 0]$.
8. $\mathbb{R}_+^* :=]0; +\infty[$ et $\mathbb{R}_-^* :=]-\infty; 0[$.

10.3 Résolution d'une inéquation

Définition 84. Toute inégalité faisant intervenir une ou plusieurs quantités inconnues est appelée une inéquation. Les quantités inconnues sont traditionnellement désignées par des lettres minuscules (x, y, z, t, etc.). L'objectif est de résoudre l'inéquation, c'est-à-dire trouver toutes les valeurs que peuvent prendre les inconnues afin d'obtenir une inégalité vraie.

Exemple. (I) : $2x - 5 < 7x + 1$ est une inéquation (du premier degré) d'inconnue x. Si l'on remplace x par -4, alors on obtient $-13 < -27$ qui est une inégalité fausse. Donc -4 n'est pas solution de (I). À contrario, si l'on remplace x par 5, alors on obtient $5 < 36$ qui est une inégalité vraie, donc 5 est solution de (I). Des questions demeurent cependant :

1. Existe-t-il d'autres solutions que 5 ?
2. Existe-t-il un moyen mécanique de déterminer toutes les solutions d'une inéquation donnée ?

Remarque. Face à une inéquation du premier degré à une inconnue (i.e. absence de termes en « x^2 », « x^3 », etc.), il peut être judicieux d'« isoler » l'inconnue x en s'appuyant sur les propositions de la section précédente :

$$\begin{aligned}
2x - 5 &< 7x + 1 \\
2x - 5 \underbrace{-2x} &< 7x + 1 \underbrace{-2x} \longleftarrow \text{proposition 77} \\
-5 &< 5x + 1 \longleftarrow \text{réduction} \\
-5 \underbrace{-1} &< 5x + 1 \underbrace{-1} \longleftarrow \text{proposition 77} \\
-6 &< 5x \longleftarrow \text{réduction} \\
-6 \div 5 &< 5x \div 5 \longleftarrow \text{proposition 80} \\
-\frac{6}{5} &< x
\end{aligned}$$

Si l'on désigne par $\mathscr{S}_{(I)}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation (I), alors nous pouvons écrire :

$$\mathscr{S}_{(I)} = \left]-\frac{6}{5}; +\infty\right[$$

Exercice. Résoudre les inéquations suivantes :

$$(I_1)\ :\ 12 < 3 - 3x$$

$$(I_2)\ :\ 9 - (3 + 7x) \geqslant 2x + 3(x - 4)$$

$$(I_3)\ :\ \frac{3}{2}x + 5 \leqslant \frac{1}{3}x + 2$$

$$(I_4)\ :\ 3x - \frac{2}{3} > 2 - \frac{x + 1}{3}$$

$$(I_5)\ :\ \sqrt{3}(x - 2\sqrt{3}) < \sqrt{12}$$

Solution :

$$\begin{aligned}
&(I_1)\ :\ 12 < 3 - 3x\\
&(I_1)\ :\ 12 + 3x < 3\\
&(I_1)\ :\ 3x < 3 - 12\\
&(I_1)\ :\ 3x < -9\\
&(I_1)\ :\ x < -\frac{9}{3}\\
&(I_1)\ :\ x < -3\\
&\mathscr{S}_{(I_1)} =]-\infty; -3[
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(I_2)\ :\ 9 - (3 + 7x) \geqslant 2x + 3(x - 4)\\
&(I_2)\ :\ 9 - 3 - 7x \geqslant 2x + 3x - 12\\
&(I_2)\ :\ 6 - 7x \geqslant 5x - 12\\
&(I_2)\ :\ 6 + 12 \geqslant 5x + 7x\\
&(I_2)\ :\ 18 \geqslant 12x\\
&(I_2)\ :\ \frac{18}{12} \geqslant x\\
&(I_2)\ :\ \frac{3}{2} \geqslant x\\
&\mathscr{S}_{(I_2)} = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(I_3)\ :\ \frac{3}{2}x+5 \leqslant \frac{1}{3}x+2\\
&(I_3)\ :\ \frac{3}{2}x-\frac{1}{3}x \leqslant 2-5\\
&(I_3)\ :\ \frac{7}{6}x \leqslant -3\\
&(I_3)\ :\ x \leqslant -3 \div \frac{7}{6}\\
&(I_3)\ :\ x \leqslant -\frac{18}{7}\\
&\mathscr{S}_{(I_3)} = \left]-\infty;\frac{-18}{7}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(I_4)\ :\ 3x-\frac{2}{3} > 2-\frac{x+1}{3}\\
&(I_4)\ :\ \frac{9x-2}{3} > \frac{6}{3}-\frac{x+1}{3}\\
&(I_4)\ :\ \frac{9x-2}{3} > \frac{6-x-1}{3}\\
&(I_4)\ :\ 9x-2 > 5-x\\
&(I_4)\ :\ 10x > 7\\
&(I_4)\ :\ x > \frac{7}{10}\\
&\mathscr{S}_{(I_4)} = \left]\frac{7}{10};+\infty\right[
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(I_5)\ :\ \sqrt{3}(x-2\sqrt{3}) < \sqrt{12}\\
&(I_5)\ :\ \sqrt{3}(x-2\sqrt{3}) < 2\sqrt{3}\\
&(I_5)\ :\ x-2\sqrt{3} < 2\sqrt{3} \div \sqrt{3}\\
&(I_5)\ :\ x < 2+2\sqrt{3}\\
&\mathscr{S}_{(I_5)} = \left]-\infty;2+2\sqrt{3}\right[
\end{aligned}$$

10.4 Inéquations produit nul

Remarque. La perspective d'isoler l'inconnue x n'est pas toujours réalisable. Prenons par exemple l'inéquation $(I)\ :\ (2x+1)(-3x+4) \geqslant 0$. Développer le membre de gauche donnerait $-6x^2+5x+4 \geqslant 0$ et nous aurions alors des difficultés à isoler l'inconnue x. Un recours à la section 10.1 peut alors être salutaire.

Définition 85. On appelle inéquation produit nul toute inéquation ayant l'une des quatre formes suivantes :

1. $A \times B \geqslant 0$
2. $A \times B \leqslant 0$
3. $A \times B > 0$
4. $A \times B < 0$

où A et B sont des expressions algébriques.

Remarque. D'après la proposition 79, la résolution d'une telle inéquation se ramène à une étude des signes respectifs des expressions algébriques A et B.

Exemple. Considérons l'inéquation produit nul (I) : $(3x-5)(2x+6) > 0$. Il s'agit de déterminer les valeurs de x pour lesquelles le produit $(3x-5)(2x+6)$ est strictement positif. D'après la section 10.1, soit les deux facteurs $3x-5$ et $2x-6$ sont strictement négatifs, soit ils sont strictement positifs. Par conséquent, il nous faut déterminer le signe de chacun des facteurs en fonction de la valeur prise par x. Autrement dit, nous sommes ramenés à résoudre les inéquations $3x-5 > 0$ et $2x+6 > 0$.

1. Résolution de $3x - 5 > 0$:

$$\begin{aligned} 3x - 5 &> 0 \\ 3x &> 5 \\ x &> \frac{5}{3} \end{aligned}$$

2. Résolution de $2x + 6 > 0$:

$$\begin{aligned} 2x + 6 &> 0 \\ 2x &> -6 \\ x &> -3 \end{aligned}$$

3. Nous pouvons alors synthétiser cette étude via un tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$			$-$		0	$+$	
$2x+6$		$-$	0		$+$		
$(3x-5)(2x+6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tableau qui nous permet de conclure :

$$\mathscr{S}_{(I)} =]-\infty; -3[\cup \left]\frac{5}{3}; +\infty\right[$$

Exercice. Résoudre les inéquations suivantes :

$$(I_1)\ :\ (1-5x)(4x-1) > 0$$

$$(I_2)\ :\ (2x+5)^2 - (3-x)^2 \geqslant 0$$

$$(I_3)\ :\ (5-7x)(8-6x)(5-3x) < 0$$

$$(I_4)\ :\ (5+x)^2 - (3x-4)(5+x) \leqslant 0$$

$$(I_5)\ :\ \frac{2x-5}{x-1} < 0$$

Solution :

$$(I_1)\ :\ (1-5x)(4x-1) > 0$$

Résolution de $1-5x>0$:

$$\begin{aligned} 1-5x &> 0 \\ 1 &> 5x \\ x &< \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Résolution de $4x-1>0$:

$$\begin{aligned} 4x-1 &> 0 \\ 4x &> 1 \\ x &> \frac{1}{4} \end{aligned}$$

D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$1-5x$		$+$	0		$-$		
$4x-1$			$-$		0	$+$	
$(1-5x)(4x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Lequel nous permet de conclure :

$$\mathscr{S}_{(I_1)} = \left]\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right[$$

$$\begin{aligned}
(I_2)\ &:\ (2x+5)^2-(3-x)^2 \geqslant 0\\
(I_2)\ &:\ [(2x+5)+(3-x)]\,[(2x+5)-(3-x)] \geqslant 0\\
(I_2)\ &:\ (2x+5+3-x)(2x+5-3+x) \geqslant 0\\
(I_2)\ &:\ (x+8)(3x+2) \geqslant 0
\end{aligned}$$

Résolution de $x+8 \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
x+8 &\geqslant 0\\
x &\geqslant -8
\end{aligned}$$

Résolution de $3x+2 \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
3x+2 &\geqslant 0\\
3x &\geqslant -2\\
x &\geqslant -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-8		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$x+8$			$-$		0	$+$	
$3x+2$		$-$	0		$+$		
$(x+8)(3x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Lequel nous permet de conclure :

$$\mathscr{S}_{(I_2)} =]-\infty;-8] \cup \left[-\frac{2}{3};+\infty\right[$$

$$(I_3)\ :\ (5-7x)(8-6x)(5-3x) < 0$$

Résolution de $5-7x<0$:

$$\begin{aligned}
5-7x &< 0\\
5 &< 7x\\
\frac{5}{7} &< x
\end{aligned}$$

Résolution de $8-6x<0$:

$$\begin{aligned}
8-6x &< 0\\
8 &< 6x\\
\frac{4}{3} &< x
\end{aligned}$$

Résolution de $5 - 3x < 0$:

$$\begin{aligned} 5 - 3x &< 0 \\ 5 &< 3x \\ \frac{3}{5} &< x \end{aligned}$$

D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{7}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$5-7x$		$+$	0			$-$			
$8-6x$		$+$			0			$-$	
$5-3x$			$+$				0	$-$	
$(5-7x)(8-6x)(5-3x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Lequel nous permet de conclure :

$$\mathscr{S}_{(I_3)} = \left]\frac{5}{7};\frac{4}{3}\right[\cup \left]\frac{5}{3};+\infty\right[$$

$$\begin{aligned} (I_4)\ &:\ (5+x)^2 - (3x-4)(5+x) \leqslant 0 \\ (I_4)\ &:\ (5+x)\left[(5+x) - (3x-4)\right] \leqslant 0 \\ (I_4)\ &:\ (5+x)(5+x-3x+4) \leqslant 0 \\ (I_4)\ &:\ (5+x)(9-2x) \leqslant 0 \end{aligned}$$

Résolution de $5 + x \leqslant 0$:

$$\begin{aligned} 5 + x &\leqslant 0 \\ x &\leqslant -5 \end{aligned}$$

Résolution de $9 - 2x \leqslant 0$:

$$\begin{aligned} 9 - 2x &\leqslant 0 \\ 9 &\leqslant 2x \\ \frac{9}{2} &\leqslant x \end{aligned}$$

D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-5		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$5+x$		$-$	0		$+$		
$9-2x$			$+$		0	$-$	
$(5+x)(9-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Lequel nous permet de conclure :

$$\mathscr{S}_{(I_4)} =]-\infty; -5] \cup \left[\frac{9}{2}; +\infty\right[$$

$$(I_5)\ :\ \frac{2x-5}{x-1} < 0$$

(I_5) n'est pas une inéquation produit nul mais une inéquation de la forme $\frac{A}{B} < 0$ que nous pourrions qualifiée d'inéquation quotient nul. Or, d'après la section 10.1, déterminer le signe du quotient $\frac{A}{B}$ revient à étudier le signe de A et celui de B. Toutefois, il faut veiller au fait que le dénominateur ne peut pas s'annuler. Voici donc le tableau de signes associé à cette inéquation :

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$			$-$		0	$+$	
$x-1$		$-$	0		$+$		
$\frac{2x-5}{x-1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Tableau qui nous permet de conclure :

$$\mathscr{S}_{(I_5)} = \left]1; \frac{5}{2}\right[$$

10.5 Exercices

Exercice 1

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs tels que $x < y$. Posons $a \coloneqq \frac{x+y}{2}$, $g \coloneqq \sqrt{xy}$ et $h \coloneqq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$.

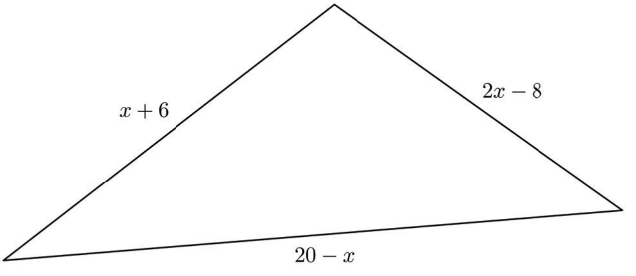
1. Démontrer que $x < h$ et $a < y$.
2. Démontrer que $g < a$.
3. Démontrer que $g^2 = ah$. En déduire que $h < g$.
4. Ranger par ordre croissant les nombres x, y, a, g et h.

Exercice 2

Sans utiliser de machine, déterminer lequel des deux nombres $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}$ et $\frac{3}{10}$ est le plus grand.

Exercice 3

1. Pour quelles valeurs du nombre réel x le triangle suivant est-il constructible ?



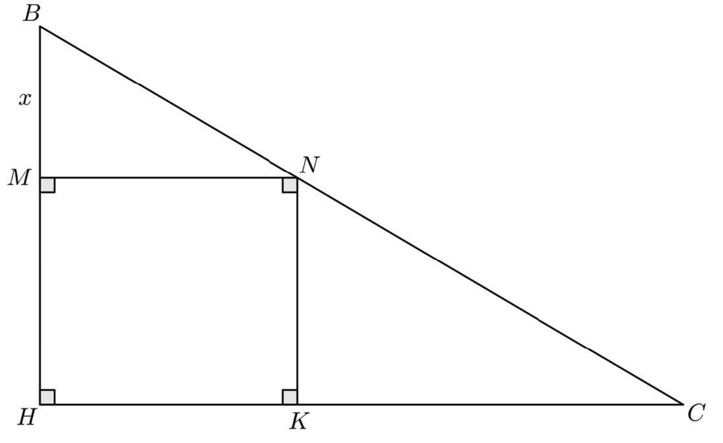
2. Résoudre les inéquations suivantes :
   (a) Quels sont les nombres x qui vérifient $x \in \mathbb{Z}^+$ et $x \leqslant 5$?
   (b) Quels sont les nombres x qui vérifient $x \in \mathbb{Z}^-$ et $x \geqslant -7$?
   (c) Quels sont les nombres x qui vérifient $x \in \mathbb{Z}$ et $-4 \leqslant x \leqslant 5$?
   (d) Quels sont les nombres x qui vérifient $x \in \mathbb{Z}$ et $-3 \leqslant x < 7$?
   (e) Quels sont les nombres x qui vérifient $x \in \mathbb{Z}$ et $2 \leqslant |x| < 7$?
3. Emma possède six fois de plus de timbres français que de timbres italiens. Si elle donnait 140 timbres français à son frère, Clément, alors elle aurait plus de timbres italiens que de timbres français. Sachant qu'Emma dispose d'au moins 140 timbres français, combien a-t-elle de timbres de chaque type ?
4. Soient a, b, c et d quatre nombres entiers naturels non nuls tels que $2a < b$, $3b < c$ et $4c < d$. Quelle est la plus petite valeur possible pour d ?
5. Le produit de trois nombres entiers naturels non nuls est égal au triple de la somme de ces entiers. Combien de triplets de tels nombres vérifient cette propriété ?
6. Clément a obtenu les notes suivantes (sur 20) aux cinq premiers devoirs du trimestre :

$$10,5 \; ; \; 14 \; ; \; 9 \; ; \; 7 \; ; \; 12$$

   À quelle condition Clément aura-t-il une moyenne supérieure ou égale à 11 avec un sixième et dernier devoir ?

Exercice 4

Soit BHC un triangle rectangle en H tel que $HB = 12\,\text{cm}$ et $HC = 24\,\text{cm}$. Soient M un point appartenant au segment $[HB]$, N un point appartenant au segment $[BC]$ et K un point appartenant au segment $[HC]$ tels que $MNKH$ est un rectangle. On pose $x \coloneqq BM$.



1. Exprimer MN en fonction de x.
2. Exprimer le périmètre de $MNKH$ en fonction de x.
3. Déterminer les valeurs minimale et maximale du périmètre de $MNKH$.
4. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles le périmètre de $MNKH$ est supérieur à $36\,\text{cm}$.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de x, $MNKH$ est-il un carré ?

Exercice 5

En des temps anciens, le souverain d'un royaume proposait à ses sujets de choisir l'une des trois façons suivantes de payer l'impôt :

1. Première façon : donner la moitié de leur récolte (exprimée en sacs de mil) ;
2. Deuxième façon : donner le tiers de leur récolte (exprimée en sacs de mil) et un mouton (un mouton valent trois sacs de mil) ;
3. Troisième façon : donner le sixième de leur récolte (exprimée en sacs de mil), un bœuf (un bœuf valant cinq moutons) et un mouton.

Déterminer, suivant la récolte, la façon la plus avantageuse de payer l'impôt.

10.6 Corrigés

Exercice 1

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs tels que $x < y$. Posons $a \coloneqq \frac{x+y}{2}$, $g \coloneqq \sqrt{xy}$ et $h \coloneqq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$.

1. On a :

$$\begin{aligned} h &= \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \\ &= \frac{2}{\frac{y+x}{xy}} \\ &= \frac{2xy}{x+y} \end{aligned}$$

Or $0 < x < y$. Donc $x+y < 2y$ et $\frac{1}{x+y} > \frac{1}{2y}$. Par ailleurs $2xy > 0$. Donc $\frac{2xy}{x+y} > \frac{\cancel{2}x\cancel{y}}{\cancel{2y}} = x$, autrement dit $x < h$.
En outre :

$$\begin{aligned} a &= \frac{x+y}{2} \\ &< \frac{y+y}{2} \\ &< \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}} \\ &< y \end{aligned}$$

2. Calculons $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} &= \frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{x}\sqrt{y}-\sqrt{x}\sqrt{y}+\sqrt{y}^2}{2} \\ &= \frac{x-2\sqrt{xy}+y}{2} \\ &= \frac{x+y}{2}-\sqrt{xy} \\ &= a-g \end{aligned}$$

Or $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} > 0$. Donc $g < a$.

3. D'une part, on a :

$$\begin{aligned} g^2 &= \sqrt{xy}^2 \\ &= xy \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

CORRIGÉS

$$\begin{aligned}
ah &= \frac{x+y}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \\
&= \frac{x+y}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \\
&= \frac{x+y}{\frac{y+x}{xy}} \\
&= \frac{x+y}{x+y} \times xy \\
&= xy
\end{aligned}$$

D'où $g^2 = ah$. Or, d'après la question 3, $g < a$, donc $g^2 < ag$. Par conséquent, $ah < ag$ et, a étant strictement positif, $h < g$.

4. En résumé nous avons :

$$x < h < g < a < y$$

Remarque. a, g et h sont respectivement appelées les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique de x et y.

Exercice 2

Considérons l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \,\square\, \frac{3}{10}$$

dans laquelle $\square$ désigne $<$ ou $>$. Conformément à la section 10.1, effectuons des opérations à chaque membre de l'inégalité de manière à ce que le sens de $\square$ soit conservé :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \,\square\, \frac{3}{10} \\
&10(\sqrt{3}-1) \,\square\, 3\sqrt{6} \longleftarrow \text{ multiplication par } 10\sqrt{6} \\
&10\sqrt{3}\square 3\sqrt{6}+10 \longleftarrow \text{ addition de } 10 \\
&300\square 154+60\sqrt{6} \longleftarrow \text{ élévation au carré} \\
&146\square 60\sqrt{6} \longleftarrow \text{ soustraction de } 154 \\
&21\,316\square 21\,600 \longleftarrow \text{ élévation au carré}
\end{aligned}$$

Ainsi $\square$ désigne nécessairement $<$ et par suite $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} < \frac{3}{10}$.

Exercice 3

1. D'après l'inégalité triangulaire, le triangle existe si, et seulement si :

$$\begin{cases} x+6 \leqslant 2x-8+20-x \\ 2x-8 \leqslant x+6+20-x \\ 20-x \leqslant x+6+2x-8 \end{cases}$$

Or ce système d'inéquations est équivalent à :

$$\begin{cases} 6 \leqslant 12 \\ 2x \leqslant 34 \\ 22 \leqslant 4x \end{cases}$$

et donc à :

$$\begin{cases} 6 \leqslant 12 \\ x \leqslant 17 \\ \frac{11}{2} \leqslant x \end{cases}$$

Par conséquent, le triangle est constructible si, et seulement si, $x \in \left[\frac{11}{2}; 17\right]$.

2. On a :
   (a) $\mathscr{S} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$
   (b) $\mathscr{S} = \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$
   (c) $\mathscr{S} = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$
   (d) $\mathscr{S} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
   (e) $\mathscr{S} = \{-6; -5; -4; -3; -2; 2; 3; 4; 5; 6\}$
3. Soit x le nombre de timbre français que possède Emma. Traduisons algébriquement l'énoncé.
   « Emma possède six fois de plus de timbre français que de timbres italiens » : le nombre de timbres italiens est égal à $\frac{x}{6}$.
   « Si elle donnait 140 timbres français à son frère, Clément, alors elle aurait plus de timbres italiens que de timbres français. » : $\frac{x}{6} \geqslant x - 140$.
   « Emma dispose d'au moins 140 timbres français. » : $x \geqslant 140$.
   Résolvons l'inéquation $\frac{x}{6} \geqslant x - 140$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{6} &\geqslant x - 140 \\ 140 &\geqslant x - \frac{x}{6} \\ 140 &\geqslant \frac{5x}{6} \\ 140 \times \frac{6}{5} &\geqslant x \\ 168 &\geqslant x \end{aligned}$$

   À priori Emma a donc en sa possession entre 140 et 168 timbres français. Mais n'oublions pas que ce nombre doit être un multiple de 6. Par conséquent, les seules solutions possibles sont 144, 150, 156, 162 et 168. Le nombre de timbres italiens est donc égal à 24, 25, 26, 27 ou 28.

CORRIGÉS

4. Puisque a, b, c et d sont quatre nombres entiers naturels non nuls, les inégalités peuvent se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} b \geqslant 2a + 1 \\ c \geqslant 3b + 1 \\ d \geqslant 4c + 1 \end{cases}$$

Or $a \geqslant 1$, donc $b \geqslant 3$ puis $c \geqslant 10$ et enfin $d \geqslant 41$. Par conséquent, la plus petite valeur possible pour d est 41, elle est atteinte lorsque $a = 1$, $b = 3$ et $c = 10$.

5. Soient a, b et c les trois nombres entiers naturels non nuls. Supposons, pour fixer les idées, $a \leqslant b \leqslant c$. La propriété qu'ils doivent vérifier s'écrit $abc = 3(a+b+c)$. D'où $ab = 3\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1\right)$. Or $\frac{a}{c} \leqslant 1$ et $\frac{b}{c} \leqslant 1$. Donc $ab \leqslant 3(1+1+1) = 9$. Les couples d'entiers naturels non nuls $(a;b)$ tels que $1 \leqslant a \leqslant b$ et $ab \leqslant 9$ sont :

$$\{(1;1);(1;2);(1;3);(1;4);(1;5);(1;6);(1;7);$$
$$(1;8);(1;9);(2;2);(2;3);(2;4);(3;3)\}$$

Comme $abc = 3(a+b+c)$, alors $c(ab-3) = 3a+3b$ et donc $c = \frac{3a+3b}{ab-3}$. Calculons donc la valeur de c pour chaque couple $(a;b)$:

a	b	c
1	1	-3
1	2	-9
1	3	Impossible
1	4	15
1	5	9
1	6	7

a	b	c	
1	7	6	Impossible
1	8	$\frac{27}{5}$	Impossible
1	9	5	Impossible
2	2	12	
2	3	5	
2	4	$\frac{18}{5}$	Impossible
3	3	3	

Ainsi, les seules solutions possibles sont :

$$\{(1;4;15);(1;5;9);(1;6;7);(2;2;12);(2;3;5);(3;3;3)\}$$

6. Soit x la note obtenue par Clément au sixième et dernier devoir. Obtenir une moyenne supérieure ou égale à 11 se traduit par l'inéquation suivante :

$$\frac{10,5 + 14 + 9 + 7 + 12 + x}{6} \geqslant 11$$

Laquelle est équivalente à :

$$52,5 + x \geqslant 66$$

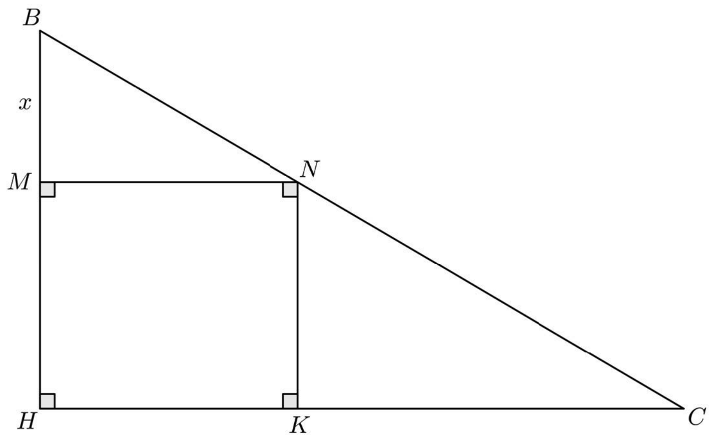
et donc à :

$$x \geqslant 13,5$$

Clément doit donc obtenir une note supérieure ou égale à 13, 5 pour atteindre une moyenne supérieure ou égale à 11.

Exercice 4

Soit BHC un triangle rectangle en H tel que $HB = 12\,\text{cm}$ et $HC = 24\,\text{cm}$. Soient M un point du segment $[HB]$, N un point du segment $[BC]$ et K un point du segment $[HC]$ tels que $MNKH$ est un rectangle. On pose $x := BM$.



1. Les droites (MH) et (NC) sont sécantes en B. Les droites (MN) et (HC) sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à la droite (BH). Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{BM}{BH} = \frac{MN}{HC}$$

soit :

$$\frac{x}{12} = \frac{MN}{24}$$

d'où :

$$MN = 2x$$

2. Le quadrilatère $MNKH$ étant un rectangle, on a :

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(MNKH) &= 2MH + 2MN \\ &= 2(12 - x) + 2 \times 2x \\ &= 24 - 2x + 4x \\ &= 2x + 24 \end{aligned}$$

CORRIGÉS

3. Par construction, $0 \leqslant x \leqslant 12$. Donc $0 \leqslant 2x \leqslant 24$ et $24 \leqslant 2x+24 \leqslant 48$. Ainsi, $24 \leqslant \mathscr{P}(MNKH) \leqslant 48$.
4. On a :

$$\begin{aligned} 36 &\leqslant \mathscr{P}(MNKH) \\ 36 &\leqslant 2x+24 \\ 12 &\leqslant 2x \\ 6 &\leqslant x \end{aligned}$$

Autrement dit, le périmètre du rectangle $MNKH$ est supérieur ou égal à 36 cm si, et seulement si, x est supérieur ou égal à 6 cm.
5. Le quadrilatère $MNKH$ est un carré si, et seulement si, $MN = MH$. Or $MN = MH$ est équivalent à $2x = 12 - x$, c'est-à-dire à $x = 4$. Par conséquent, $MNKH$ est un carré si, et seulement si, $x = 4$ cm.

Exercice 5

Soit x la récolte exprimée en sac de mil. Traduisons algébriquement chaque façon de payer l'impôt.

1. Première façon : $\frac{x}{2}$
2. Deuxième façon : $\frac{x}{3}+3$
3. Troisième façon : $\frac{x}{6}+18$

Comparons désormais ces trois façons de payer l'impôt.

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &\leqslant \frac{x}{3}+3 \\ \frac{3x}{6}-\frac{2x}{6} &\leqslant 3 \\ \frac{x}{6} &\leqslant 3 \\ x &\leqslant 18 \end{aligned}$$

Donc la première façon est plus intéressante que la deuxième si, et seulement si, la récolte est inférieure ou égale à 18 sacs de mil.

$$\begin{aligned} \frac{x}{3}+3 &\leqslant \frac{x}{6}+18 \\ \frac{2x}{6}-\frac{x}{6} &\leqslant 15 \\ \frac{x}{6} &\leqslant 15 \\ x &\leqslant 90 \end{aligned}$$

Donc la deuxième façon est plus intéressante que la troisième si, et seulement si, la récolte est inférieure ou égale à 90 sacs de mil.

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &\leqslant \frac{x}{6} + 18 \\ \frac{3x}{6} - \frac{x}{6} &\leqslant 18 \\ \frac{x}{3} &\leqslant 18 \\ x &\leqslant 54 \end{aligned}$$

Donc la première façon est plus intéressante que la troisième si, et seulement si, la récolte est inférieure ou égale à 54 sacs de mil. D'où la synthèse suivante :

Valeur de x	$0 \leqslant x \leqslant 18$	$18 \leqslant x \leqslant 54$	$54 \leqslant x \leqslant 90$	$90 \leqslant x$
Façon la plus avantageuse	1	2	2	3
Façon intermédiaire	2	1	3	2
Façon la moins avantageuse	3	3	1	1

CORRIGÉS

11
Probabilités

11.1 Rappels

Définition 86. On appelle expérience aléatoire une expérience dont les résultats possibles sont connus sans que l'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Remarque. L'objectif de ce chapitre est de mathématiser les expériences aléatoires, autrement dit de quantifier les résultats possibles.

Définition 87. On appelle univers d'une expérience aléatoire l'ensemble des issues possibles appelées également éventualités ou événements élémentaires. On le note en général Ω.

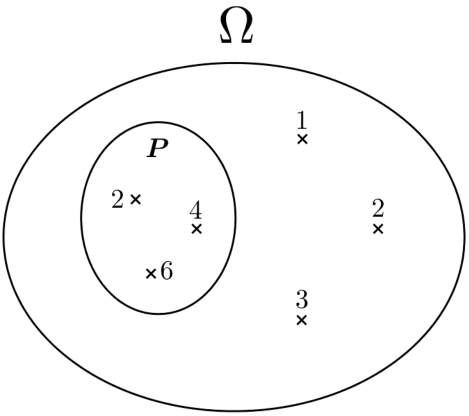
Exemple. Voici quelques exemples d'expériences aléatoires et d'univers associés :

1. Le jet d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{\text{Pile, Face}\}$.
2. Le lancer d'un dé cubique classique équilibré : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
3. Le tirage d'une carte dans un jeu classique de 32 cartes :

$$\begin{aligned}\Omega = \Big\{&\text{7 de pique}, \ldots, \text{valet de pique, dame de pique, roi de pique,}\\ &\text{7 de trèfle, ..., roi de trèfle, 7 de coeur, ..., roi de cœur,}\\ &\text{7 de carreau, ..., roi de carreau}\}\end{aligned}$$

Définition 88. On appelle événement tout sous-ensemble de l'univers. Il peut toujours se décrire à l'aide d'issues.

Exemple. Si l'expérience aléatoire est le lancer d'un dé classique équilibré, alors l'événement P : « Obtenir un nombre pair » est la réunion des issues : « Obtenir 2 », « Obtenir 4 » et « Obtenir 6 ».



Définition 89. On appelle probabilité d'une issue d'une expérience aléatoire la « chance » qu'elle a de se réaliser. Cette « chance » est égale au quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas total. On appelle probabilité d'un événement la somme des probabilités des événements le constituant. Si A désigne un tel événement, alors on note $p(A)$ la probabilité de l'événement A.

Remarque. On a évidemment : $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

Vocabulaire :

1. Un événement dont la probabilité est nulle est dit impossible.
2. Un événement dont la probabilité est égale à 1 est dit certain.

Définition 90. Lors d'une expérience aléatoire, on dit qu'il y a situation d'équiprobabilité si chaque issue a la même probabilité, celle-ci valant :

$$\frac{1}{\text{Nombre d'issues possibles}}$$

Remarque. C'est le choix de l'univers qui engendre ou non une situation d'équiprobabilité.

Définition 91. On appelle loi de probabilité sur un univers la donnée de chaque issue accompagnée de sa probabilité.

Exemple. Voici la loi de probabilité relative au lancer d'un dé classique équilibré :

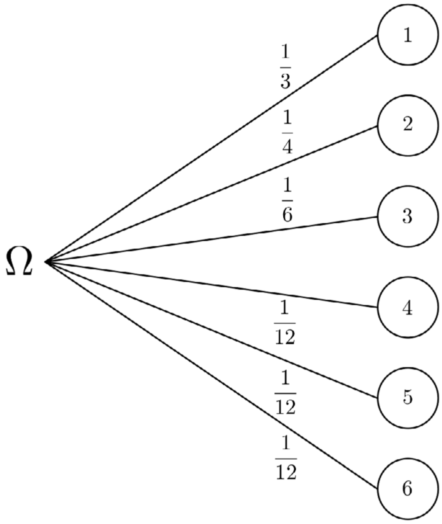
x_i	1	2	3	4	5	6
$p(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Et voici la loi de probabilité relative au lancer d'un dé légèrement pipé :

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Remarque. Nous pouvons formuler deux remarques :

1. La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1. Face à une situation d'équiprobabilité, pour déterminer la probabilité d'un événement, il suffit de compter les issues constituant cet événement puis de diviser par le nombre total d'issues.
2. Il est possible de visualiser une loi de probabilité à l'aide d'un arbre probabiliste.
   Exemple : voici l'arbre probabiliste associé au lancer du dé pipé de l'exemple précédent :



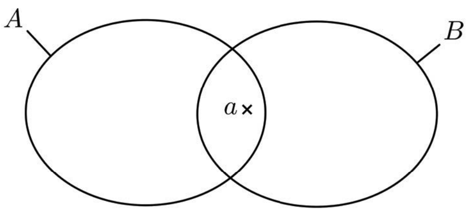
11.2 Réunion et intersection de deux événements

Définition 92. Soient A et B deux événements.

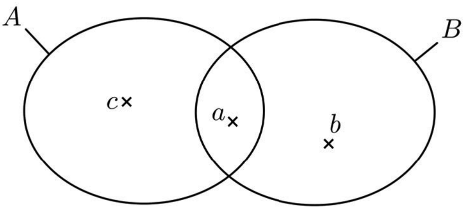
1. On appelle intersection de A et B l'événement noté $A \cap B$ (se lisant « A inter B ») contenant les issues appartenant à la fois à l'événement A et à l'événement B. Autrement dit, l'événement $A \cap B$ se réalise si, et seulement si, les événements A et B se réalisent.
2. On appelle réunion de A et B l'événement noté $A \cup B$ (se lisant « A union B ») contenant les issues appartenant à l'événement A ou à l'événement B. Autrement dit, l'événement $A \cup B$ se réalise si, et seulement si, au moins l'un des deux événements se réalise.

Exemple. Si l'expérience aléatoire est le lancer d'un dé classique équilibré, si A désigne l'événement : « Obtenir un nombre pair » et B désigne l'événement : « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 », alors l'événement $A \cup B$ est : « Obtenir 2, 4, 5 ou 6 » et l'événement $A \cap B$ est : « Obtenir 6 ».

Illustration :



$a \in A \cap B$

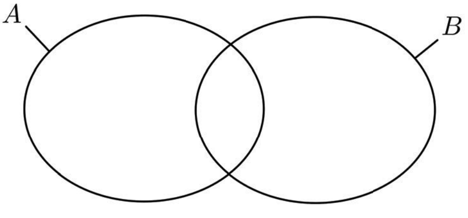


$a \in A \cup B$
$b \in A \cup B$
$c \in A \cup B$

Proposition 93. *Soient A et B deux événements. Alors :*

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Démonstration. Considérons le diagramme de Venn ci-dessous :



Il est clair que si nous réunissons les événements A et B, alors nous comptons les issues appartenant à l'intersection $A \cap B$ deux fois : une première fois en tant qu'éléments de A et une seconde fois en tant qu'éléments de B. Par conséquent, il nous faut les retrancher une fois. D'où l'égalité suivante :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

□

Exemple. On tire une carte au hasard dans un jeu classique de 32 cartes. Soit A l'événement « Obtenir une carte de carreau » et B l'événement « Obtenir un roi ». Alors :

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} \\ &= \frac{11}{32} \end{aligned}$$

Définition 94. Si A et B sont deux événements disjoints, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$, alors $p(A \cap B) = 0$ et l'on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

On dit alors que A et B sont des événements incompatibles.

Exemple. On lance un dé classique équilibré. Les événements A : « Obtenir un nombre pair » et B : « Obtenir un nombre impair » sont incompatibles. En effet, l'intersection $A \cap B$ est vide puisqu'il n'existe aucun nombre à la fois pair et impair.

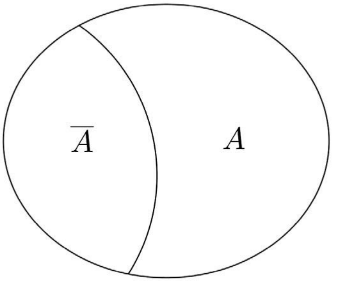
Définition 95. Soit A un événement. On appelle événement contraire de A, noté $\overline{A}$, l'événement constitué des issues de l'univers n'appartenant pas à A.

Exemple. On lance un dé classique équilibré. Soit A l'événement : « Obtenir 1 ». Alors $\overline{A}$ est l'événement : « Ne pas obtenir 1 ».

Remarque. D'après la définition de l'événement contraire, l'intersection $A \cap \overline{A}$ est vide. Par conséquent les événements A et $\overline{A}$ sont incompatibles.

Proposition 96. *Soit A un événement. Alors $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.*

Démonstration. Par définition de l'événement contraire, on a : $A \cup \overline{A} = \Omega$.



D'où $p(A \cup \overline{A}) = p(\Omega)$ puis, d'après la proposition 93, $p(A) + p(\overline{A}) - p(A \cap \overline{A}) = 1$. Or $A \cap \overline{A} = \emptyset$, donc $p(A \cap \overline{A}) = 0$. Par conséquent, $p(A) + p(\overline{A}) = 1$ et $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$. $\square$

Exemple. Dans l'exemple précédent, on a $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

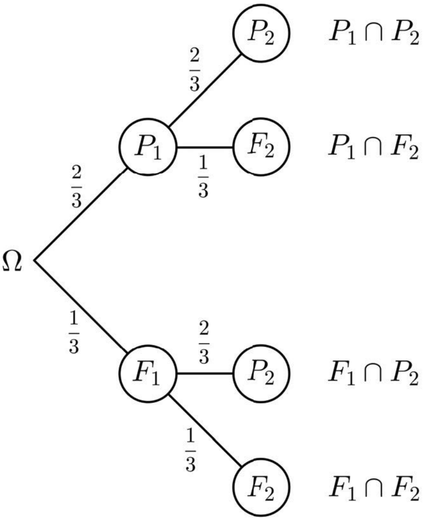
11.3 Succession de deux expériences aléatoires

Remarque. Il est possible d'enchaîner deux expériences aléatoires : lancer deux fois un même dé, prélever une boule dans une urne puis en prélever une seconde, lancer une pièce de monnaie deux fois de suite, tirer une carte dans un jeu de 32 cartes deux fois de suite, etc. Il est pertinent de représenter une telle situation par un arbre probabiliste. En effet, les « feuilles » situées au bout de ses « branches » illustrent les différents événements disjoints possibles lors de cette succession d'expériences aléatoires.

Exemple. Voici différents exemples de successions d'expériences aléatoires :

1. Lancers d'une pièce :

   On lance deux fois de suite une pièce légèrement truquée dont la probabilité de tomber sur « Pile » est deux fois plus grande que celle de tomber sur « Face ». On désigne par P_i l'événement : « Obtenir Pile au $i^{ème}$ lancer » et par F_i l'événement : « Obtenir Face au $i^{ème}$ lancer ». Voici l'arbre probabiliste associé à cette succession d'expériences aléatoires :



   Il est possible de calculer la probabilité d'obtenir deux fois Face :

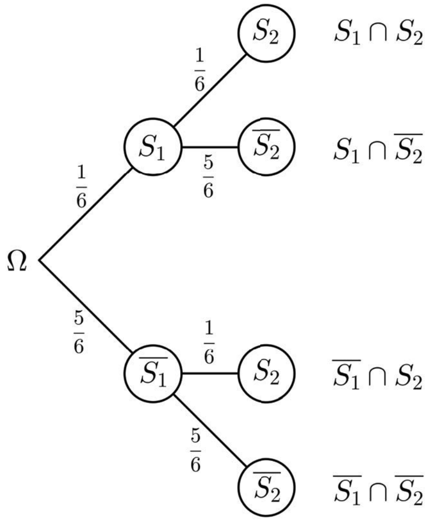
$$\begin{aligned} p(F_1 \cap F_2) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

   D'où la probabilité d'obtenir au moins un Pile, événement contraire à « Obtenir deux fois Face » :

$$\begin{aligned} p\left((P_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cup P_2)\right) &= 1 - p(F_1 \cap F_2) \\ &= 1 - \frac{1}{9} \\ &= \frac{8}{9} \end{aligned}$$

2. Lancers d'un dé :

   On lance un dé classique équilibré deux fois de suite. On désigne par S_i l'événement : « Obtenir 6 au $i^{ème}$ lancer ». Voici l'arbre probabiliste associé à cette succession d'expériences aléatoires :



Il est possible de calculer la probabilité de n'obtenir aucun 6 :

$$\begin{aligned} p(\overline{S_1} \cap \overline{S_2}) &= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \\ &= \frac{25}{36} \end{aligned}$$

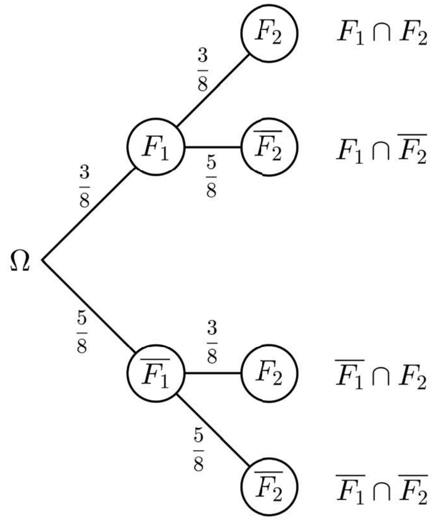
D'où la probabilité d'obtenir au moins un 6, événement contraire à « N'obtenir aucun 6 » :

$$\begin{aligned} p\left((S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap \overline{S_2}) \cup (\overline{S_1} \cap S_2)\right) &= 1 - p(\overline{S_1} \cap \overline{S_2}) \\ &= 1 - \frac{25}{36} \\ &= \frac{11}{36} \end{aligned}$$

3. Tirages d'une carte :

   (a) Avec remise :

   On tire une carte au hasard dans un jeu classique de 32 cartes. On note la carte prélevée puis on l'insère à nouveau dans le jeu que l'on mélange avant d'y tirer une seconde carte au hasard. Désignons par F_i l'événement : « Obtenir une figure au $i^{ème}$ tirage ». Voici l'arbre probabiliste associé à cette succession d'expériences aléatoires :



Il est possible de calculer la probabilité de n'obtenir aucune figure :

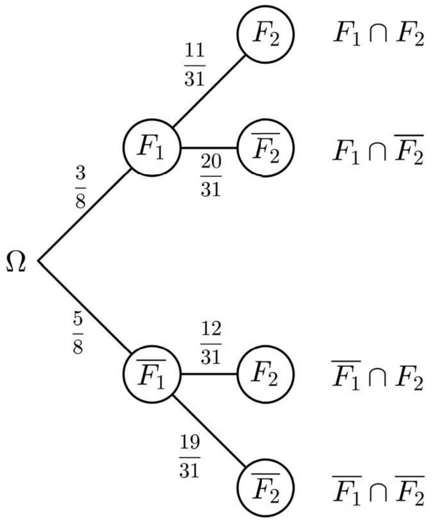
$$\begin{aligned} p(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) &= \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \\ &= \frac{25}{64} \end{aligned}$$

D'où la probabilité d'obtenir au moins une figure, événement contraire à « N'obtenir aucune figure » :

$$\begin{aligned} p\left((F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap \overline{F_2}) \cup (\overline{F_1} \cap F_2)\right) &= 1 - p(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) \\ &= 1 - \frac{25}{64} \\ &= \frac{39}{64} \end{aligned}$$

(b) SANS REMISE :

On tire une carte au hasard dans un jeu classique de 32 cartes. On note la carte prélevée puis on la met de côté avant de tirer une seconde carte au hasard dans le jeu. Désignons par F_i l'événement : « Obtenir une figure au $i^{ème}$ tirage ». Voici l'arbre probabiliste associé à cette succession d'expériences aléatoires :



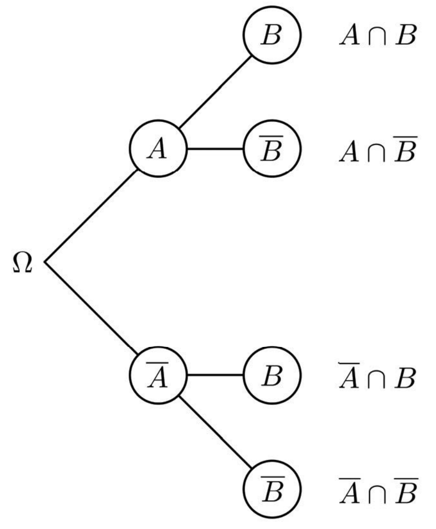
Il est possible de calculer la probabilité de n'obtenir aucune figure :

$$\begin{aligned} p(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) &= \frac{5}{8} \times \frac{19}{31} \\ &= \frac{95}{248} \end{aligned}$$

D'où la probabilité d'obtenir au moins une figure, événement contraire à « N'obtenir aucune figure » :

$$\begin{aligned} p\left((F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap \overline{F_2}) \cup (\overline{F_1} \cap F_2)\right) &= 1 - p(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) \\ &= 1 - \frac{95}{248} \\ &= \frac{153}{248} \end{aligned}$$

Remarque. Si nous nous intéressons à un certain événement A lors de la première expérience aléatoire et à un certain événement B lors de la seconde expérience aléatoire, alors nous pouvons construire l'arbre probabiliste générique suivant sur lequel nous reviendrons longuement au lycée :



11.4 Exercices

Exercice 1

Une première urne contient quatre boules vertes et six boules bleues. Une deuxième urne contient seize boules vertes et n boules bleues. On prélève une boule de chaque urne au hasard. La probabilité que les deux boules tirées soient de la même couleur est de $\frac{29}{50}$. Déterminer n.

Exercice 2

Une urne contient sept boules indiscernables au toucher : quatre boules bleues et trois boules rouges.

1. On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.
   (a) Calculer la probabilité que la première boule soit bleue et la seconde soit rouge.
   (b) Calculer la probabilité que les deux boules soient de même couleur.
2. Répondre aux questions 1.(a) et 1.(b) si le tirage s'effectue désormais sans remise.

Exercice 3

Emma et Clément disposent de trois dés cubiques équilibrés à six faces :

1. Un dé bleu comportant deux « 2 », deux « 4 » et deux « 9 » ;
2. Un dé rouge comportant deux « 1 », deux « 6 » et deux « 8 » ;
3. Un dé vert comportant deux « 3 », deux « 5 » et deux « 7 ».

Emma choisit un dé, Clément choisit l'un des dés restants. Ils lancent simultanément leur dé et celui qui tire le plus grand nombre gagne la partie. Quel dé doit choisir Clément s'il désire maximiser ses chances de victoire ?

Exercice 4

Clément cherche le code à trois chiffres du coffre de sa sœur. Il se souvient que :

1. le premier chiffre est « 4 » ;
2. le dernier n'est pas « 9 » ;
3. les trois chiffres qui composent le code sont différents les uns des autres.

Quelle est la probabilité qu'il retrouve le code à son premier essai ?

Exercice 5

Au XVII^e^ siècle, un jeu à la cour du Grand Duc de Toscane consistait à lancer trois dés classiques équilibrés et à additionner les points obtenus. Grand joueur de dés, le Grand Duc avait observé que la somme 10 était la somme obtenue le plus souvent. Pouvez-vous démontrer le constat expérimental du Grand Duc ?

11.5 Corrigés

Exercice 1

La probabilité que les deux boules soient vertes est égale à $\frac{4}{10} \times \frac{16}{16+n}$. La probabilité que les deux boules soient bleues est égale à $\frac{6}{10} \times \frac{n}{16+n}$. Ainsi, la probabilité de prélever deux boules de même couleur est égale à :

$$\frac{4}{10} \times \frac{16}{16+n} + \frac{6}{10} \times \frac{n}{16+n}$$

D'où l'équation suivante :

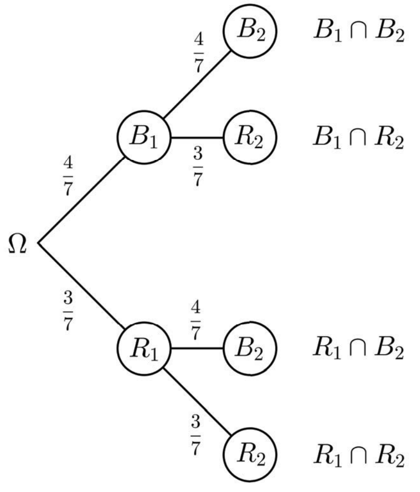
$$\frac{4}{10} \times \frac{16}{16+n} + \frac{6}{10} \times \frac{n}{16+n} = \frac{29}{50}$$

Laquelle est équivalente aux égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{64+6n}{10(16+n)} &= \frac{29}{50} \\
5(64+6n) &= 29(16+n) \longleftarrow \text{ multiplication par } 50 \\
320+30n &= 464+29n \\
n &= 144
\end{aligned}$$

CORRIGÉS

Exercice 2

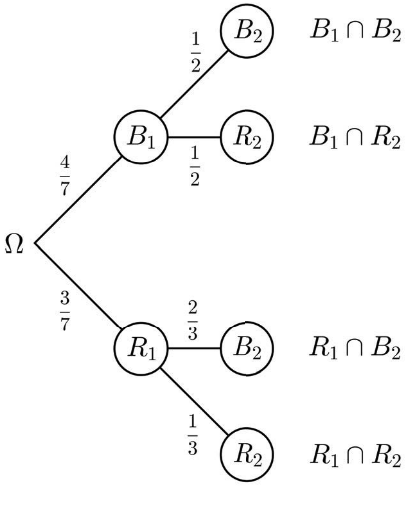


1. (a) La probabilité que la première boule soit bleue et la seconde soit rouge est égale à :

$$p(B_1 \cap R_2) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$$

(b) La probabilité que les deux boules soient de même couleur est égale à :

$$p\left((B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap R_2)\right) = \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{16}{49} + \frac{9}{49} = \frac{25}{49}$$



2. (a) La probabilité que la première boule soit bleue et la seconde soit rouge est égale à :

$$p(B_1 \cap R_2) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$$

(b) La probabilité que les deux boules soient de même couleur est égale à :

$$p\left((B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap R_2)\right) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

Exercice 3

Dressons un tableau relatant le combat du dé bleu contre le dé rouge :

Dé rouge \ Dé bleu	2	4	9
1	2	4	9
6	6	6	9
8	8	8	9

Donc le dé bleu l'emporte sur le dé rouge avec une probabilité de $\frac{5}{9}$. Par conséquent, si Emma choisit le dé rouge, Clément choisit le dé bleu.
Dressons un tableau relatant le combat du dé bleu contre le dé vert :

Dé vert \ Dé bleu	2	4	9
3	3	4	9
5	5	5	9
7	7	7	9

Donc le dé vert l'emporte sur le dé bleu avec une probabilité de $\frac{5}{9}$. Par conséquent, si Emma choisit le dé bleu, Clément choisit le dé vert.
Dressons un tableau relatant le combat du dé rouge contre le dé vert :

Dé vert \ Dé rouge	1	6	8
3	3	6	8
5	5	6	8
7	7	7	8

Donc le dé rouge l'emporte sur le dé vert avec une probabilité de $\frac{5}{9}$. Par conséquent, si Emma choisit le dé vert, Clément choisit le dé rouge.

Exercice 4

Le dernier chiffre n'est pas un « 4 » ni un « 9 ». Donc la probabilité qu'il choisisse le bon dernier chiffre est égale à $\frac{1}{8}$. Pour le chiffre du milieu, il lui reste à nouveau huit possibilités puisque le dernier chiffre ainsi que le « 4 » sont déjà utilisés. Par conséquent, la probabilité que Clément retrouve le code du coffre de sa sœur est égale à $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$.

Exercice 5

La somme de trois dés classiques est comprise entre 3 et 18. Étudions donc le nombre de décompositions différentes en sommes de trois entiers de chaque entier naturel compris entre 3 et 18. Attention, certaines décompositions peuvent s'obtenir de plusieurs façons avec les trois dés.

Somme	Décompositions	Nombre de façons	Total
3	$1+1+1$	1	1
4	$2+1+1$	3	3
5	$3+1+1$	3	3
6	$2+2+2$	1	10
	$4+1+1$	3	
	$3+2+1$	6	
7	$5+1+1$	3	15
	$4+2+1$	6	
	$3+3+1$	3	
	$3+2+2$	3	
8	$6+1+1$	3	21
	$5+2+1$	6	
	$4+3+1$	6	
	$4+2+2$	3	
	$3+3+2$	3	
9	$6+2+1$	6	25
	$5+3+1$	6	
	$5+2+2$	3	
	$4+4+1$	3	
	$4+3+2$	6	
	$3+3+3$	1	

Somme	Décompositions	Nombre de façons	Total
10	$6+3+1$	6	27
	$6+2+2$	3	
	$5+4+1$	6	
	$5+3+2$	6	
	$4+4+2$	3	
	$4+3+3$	3	
11	$6+4+1$	6	27
	$6+3+2$	6	
	$5+5+1$	3	
	$5+4+2$	6	
	$5+3+3$	3	
	$4+4+3$	3	
12	$6+5+1$	6	25
	$6+4+2$	6	
	$6+3+3$	3	
	$5+5+2$	3	
	$5+4+3$	6	
	$4+4+4$	1	
13	$6+6+1$	3	21
	$6+5+2$	6	
	$6+4+3$	6	
	$5+5+3$	3	
	$5+4+4$	3	
14	$6+6+2$	3	15
	$6+5+3$	6	
	$6+4+4$	3	
	$5+5+4$	3	

CORRIGÉS

Somme	Décompositions	Nombre de façons	Total
15	$6+6+3$	3	10
	$6+5+4$	6	
	$5+5+5$	1	
16	$6+6+4$	3	6
	$6+5+5$	3	
17	$6+6+5$	3	3
18	$6+6+6$	1	1

Par conséquent, les deux sommes les plus probables sont 10 et 11.

Remarque. L'élève curieux pourra essayer d'écrire un algorithme permettant de simuler le lancer de trois dés classiques équilibrés afin de tester empiriquement ce qui vient d'être démontré.

12

Fonctions linéaires

12.1 Point de vue algébrique

Définition 97. Soit a un nombre réel. On appelle fonction linéaire f de coefficient a la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = a \times x = ax$.

Exemple. Voici quelques exemples de fonctions linéaires :

1. $f : x \longmapsto 3x$ est une fonction linéaire de coefficient 3.
2. $g : \longmapsto \pi x$ est une fonction linéaire de coefficient π.
3. $h : x \longmapsto -x$ est une fonction linéaire de coefficient -1.
4. $i : \longmapsto -\frac{5}{7}x$ est une fonction linéaire de coefficient $-\frac{5}{7}$.

Remarque. Attention, une fonction linéaire ne se détecte pas toujours du premier coup d'œil.

Exemple. La fonction $j : x \longmapsto (3x-1)^2 - 9x^2 - 1$ est une fonction linéaire. En effet, pour tout nombre réel x, on a :

$$\begin{aligned} j(x) = (3x-1)^2 - 9x^2 - 1 &= \cancel{9x^2} - 6x + \cancel{1} - \cancel{9x^2} - \cancel{1} \\ &= -6x \end{aligned}$$

Proposition 98. *Soit f une fonction linéaire. Soient x, y et k trois nombres réels. Alors :*

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $f(k \times x) = k \times f(x)$

Démonstration. Soit a le coefficient de la fonction linéaire f. Soient x, y et k trois nombres réels. Alors :

1. $f(x+y) = a \times (x+y) = \underbrace{a \times x} + \underbrace{a \times y} = f(x) + f(y)$

2. $f(k \times x) = a \times (k \times x) = (a \times k) \times x = (k \times a) \times x = k \times (a \times x) = k \times f(x)$

$\square$

Remarque. Nous avons les deux réciproques suivantes :

Proposition 99. *Soit f une fonction. Si, pour tous nombres réels k et x, $f(kx) = kf(x)$, alors f est linéaire.*

Démonstration. Posons $a \coloneqq f(1)$. Soit x un nombre réel. Alors :

$$f(x) = f(x \times 1) = x \times f(1) = x \times a = ax$$

$\square$

Proposition 100. *Soit f une fonction. Si, pour tous nombres réels x et y, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, alors f est linéaire.*

Démonstration. Soient x et y deux nombres réels. Si x est un nombre entier naturel, alors :

$$f(x \times y) = f(\underbrace{y + \ldots + y}_{x \text{ termes } y}) = \underbrace{f(y) + \ldots + f(y)}_{x \text{ termes } f(y)} = x \times f(y)$$

Le cas où x n'est pas un nombre entier naturel est admis. La proposition 99 permet de conclure que f est une fonction linéaire. $\square$

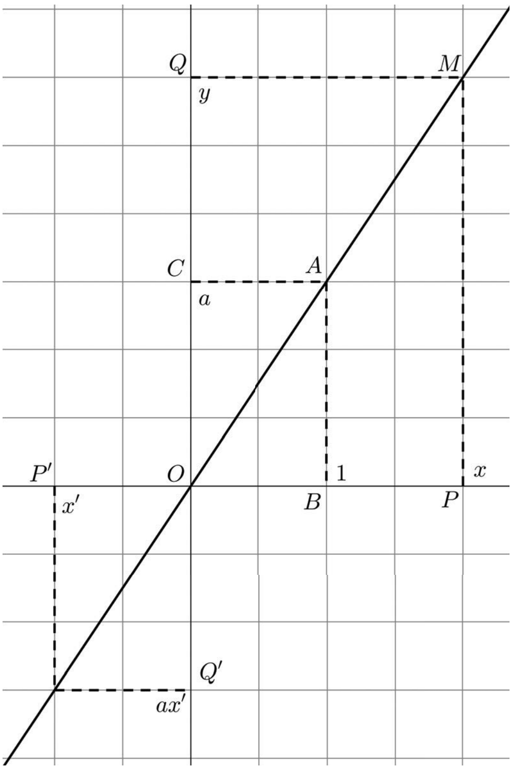
Remarque. Nous pouvons effectuer deux remarques :

1. Tout nombre réel admet une unique image par une fonction linéaire.
2. L'équation $f(x) = ax = b$ admet une unique solution : $-\frac{b}{a}$. Autrement dit, tout nombre réel b admet un unique antécédent $-\frac{b}{a}$ par la fonction linéaire $f : x \longmapsto ax$.

12.2 Point de vue géométrique

Théorème 101. *Soit f une fonction. Si f est linéaire, alors sa courbe représentative dans un repère du plan est une droite passant par l'origine de ce repère.*

Démonstration. Soit f une fonction linéaire de coefficient a. Alors la courbe représentative de f dans un repère du plan est par définition l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ vérifiant l'égalité $y = f(x) = a \times x$.
Soit A le point de coordonnées $(1; a)$. Soit B le point d'intersection de la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A avec l'axe des abscisses. Soit C le point d'intersection de la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par A avec l'axe des ordonnées. Par construction, $\overline{OB} = 1$ et $\overline{OC} = a$. Démontrons que tout point de la droite (OA) appartient à la courbe représentative de f et réciproquement.



$\Rightarrow$: soit M un point de la droite (OA). Soit P le point d'intersection de la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par M avec l'axe des abscisses. Soit Q le point d'intersection de la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par M avec l'axe des ordonnées. Les coordonnées de M sont alors $x = \overline{OP}$ et $y = \overline{OQ}$. Démontrons que ces coordonnées x et y vérifient la relation $y = ax$.
Les droites (AM) et (BP) sont sécantes en O. De plus, les droites (AB) et (MP) sont parallèles. Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP}}$$

Les droites (AM) et (QC) sont sécantes en O. De plus, les droites (CA) et (QM) sont parallèles. Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OQ}}$$

D'où :

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OQ}}$$

soit :

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{y}$$

et donc, d'après le produit en croix, $y = ax$.

$\Leftarrow$: soit x' un nombre réel. Soit M' le point de coordonnées $(x'; ax')$. Démontrons que M' appartient à (OA). Soit P' le point de l'axe des abscisses tel que $\overline{OP} = x'$. La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par P' coupe (OA) en M'. Donc, d'après ce qui précède, $M' \in (OA)$ et a pour ordonnée ax'. Ainsi, le point de coordonnées $(x'; ax')$ est le point M' et il appartient à la droite (OA).

□

Remarque. Le nombre réel a est appelé le coefficient directeur de la droite (OA). En physique, il est appelé la « pente » de la droite.

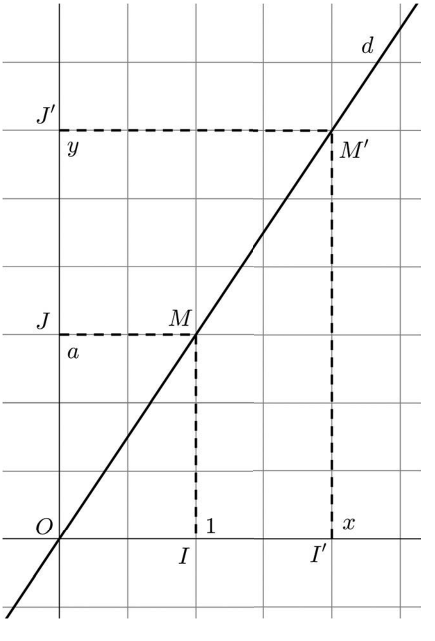
1. Si $a > 0$, alors la droite (OA) « monte » si on la lit de gauche à droite.
2. Si $a = 0$, alors la droite (OA) est confondue avec l'axe des abscisses.
3. Si $a < 0$, alors la droite (OA) « descend » si on la lit de gauche à droite.

Proposition 102. *Avec les notations de la démonstration précédente, si l'on suppose le repère orthonormé, alors* $\tan(\widehat{BOA}) = |a|$.

Démonstration. Dans le triangle OBA rectangle en B, on a d'après le chapitre 4 : $\tan(\widehat{BOA}) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{|a|}{1} = |a|$. □

Proposition 103. *Soit d une droite non parallèle à l'axe des ordonnées du repère du plan. Alors d est la courbe représentative d'une fonction linéaire.*

Démonstration. Soit d une droite non parallèle à l'axe des ordonnées du repère du plan. Soit M le point d'abscisse 1 appartenant à cette droite. Soit a l'ordonnée de M. Soit M' un second point appartenant à la droite d. Notons $(x; y)$ ses coordonnées.



Les droites (II') et (MM') sont sécantes en O. Les droites (MI) et $(M'I')$ sont parallèles. Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}} = \frac{\overline{OI'}}{\overline{OI}}$$

Les droites (JJ') et (MM') sont sécantes en O. Les droites (MJ) et $(M'J')$ sont parallèles. Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}} = \frac{\overline{OJ'}}{\overline{OJ}}$$

D'où :

$$\frac{\overline{OI'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{OJ'}}{\overline{OJ}}$$

soit :

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a}$$

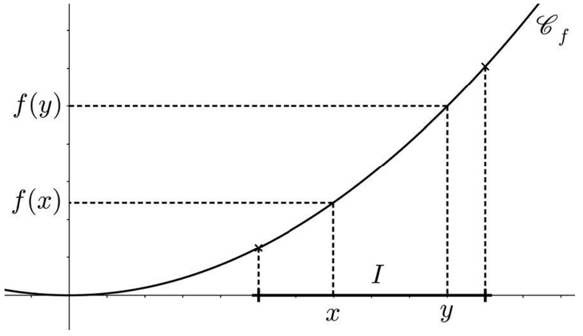
et donc, d'après le produit en croix, $y = ax$.
Par conséquent, tout point appartenant à la droite d voit son ordonnée égale à son abscisse multipliée par a. Plus formellement, pour tout point $M(x;y)$ appartenant à la droite d, on a $y = ax$. Ainsi, la droite d n'est autre que la représentation graphique de la fonction linéaire $f : x \longmapsto ax$. $\square$

12.3 Sens de variation d'une fonction linéaire

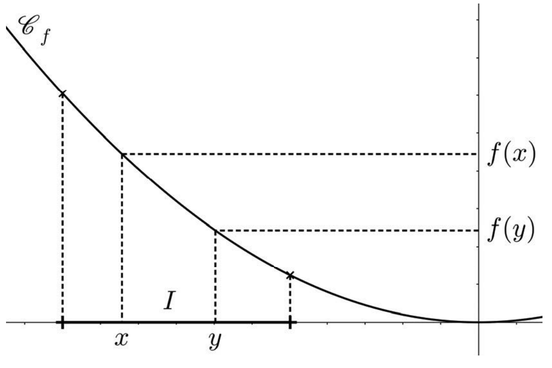
Définition 104. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I.

1. f est dite constante sur I si, pour tous nombres x et y de l'intervalle I, $f(x) = f(y)$.
2. f est dite croissante sur I si, pour tous nombres x et y de l'intervalle I, si $x < y$, alors $f(x) \leqslant f(y)$.
3. f est dite strictement croissante sur I si, pour tous nombres x et y de l'intervalle I, si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$.
4. f est dite décroissante sur I si, pour tous nombres x et y de l'intervalle I, si $x < y$, alors $f(x) \geqslant f(y)$.
5. f est dite strictement décroissante sur I si, pour tous nombres x et y de l'intervalle I, si $x < y$, alors $f(x) > f(y)$.
6. f est dite monotone sur I si f est croissante ou décroissante sur I.
7. f est dite strictement monotone sur I si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

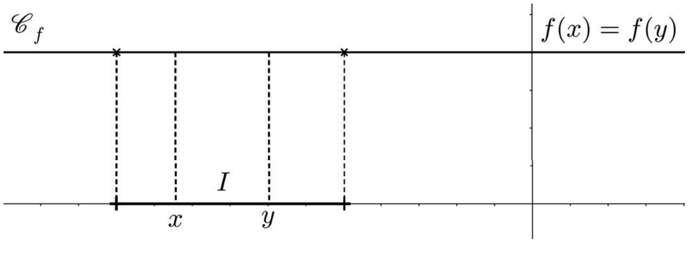
Illustration : Voici les illustration de ces définitions :



f est strictement croissante sur I.



f est strictement décroissante sur I.



f est constante sur I.

Remarque. Les variations d'une fonction sont traditionnellement résumées en un tableau dit « de variations ». **Exemple** : si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, croissante sur l'intervalle $]-\infty; -2]$ et décroissante sur l'intervalle $[-2; +\infty[$, alors le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f		$\nearrow$	10	$\searrow$	

Proposition 105. *Soit a un nombre réel. Soit f la fonction linéaire de coefficient a. On a :*

$a > 0$	x	$-\infty$	$+\infty$
	f	$\nearrow$	
$a < 0$	x	$-\infty$	$+\infty$
	f	$\searrow$	
$a = 0$	x	$-\infty$	$+\infty$
	f	$\rightarrow$	

Démonstration. Cas où $a > 0$: soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 < x_2$. Alors, d'après la proposition 79, $ax_1 < ax_2$. Autrement dit, $f(x_1) < f(x_2)$. Par définition, f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Cas où $a < 0$: soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 < x_2$. Alors, d'après la proposition 79, $ax_1 > ax_2$. Autrement dit, $f(x_1) > f(x_2)$. Par définition, f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Cas où $a = 0$: soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 < x_2$. Alors $ax_1 = ax_2 = 0$. Autrement dit, $f(x_1) = f(x_2)$. Par définition, f est donc constante sur $\mathbb{R}$.

□

Exemple. Soit f la fonction linéaire par $f(x) = -\frac{3}{2}x$. Le coefficient de f est strictement négatif, d'où son tableau de variations :

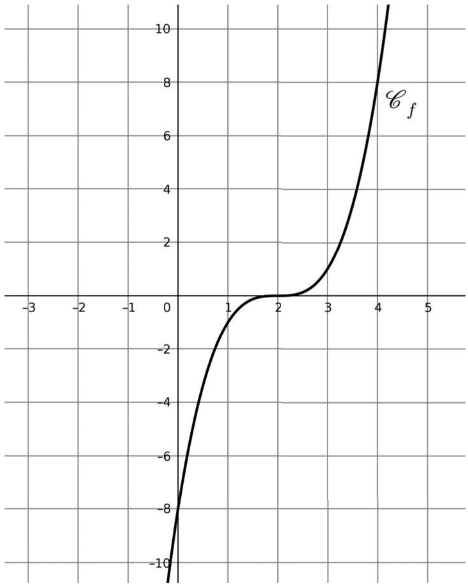
x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\searrow$	

12.4 Signe d'une fonction linéaire

Définition 106. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I.

1. f est dite strictement positive sur I si, pour tout nombre réel x de I, $f(x) > 0$.
2. f est dite nulle sur I si, pour tout nombre réel x de I, $f(x) = 0$.
3. f est dite strictement négative sur I si, pour tout nombre réel x de I, $f(x) < 0$.

Exemple. Voici la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto (x-2)^3$.



Graphiquement, il semblerait que f soit strictement négative sur l'intervalle $]-\infty; 2[$ et strictement positive sur l'intervalle $]2; +\infty[$. De plus, $f(2) = 0$. Traditionnellement, cette étude de signes se résume en un tableau dit « de signes » que voici :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Proposition 107. *Soit f une fonction linéaire de coefficient a. On a :*

	x	$-\infty$		0		$+\infty$
$a > 0$	$f(x)$		$-$	0	$+$	
	x	$-\infty$		0		$+\infty$
$a < 0$	$f(x)$		$+$	0	$-$	
	x	$-\infty$				$+\infty$
$a = 0$	$f(x)$			0		

Démonstration. Cas où $a > 0$:
Si $x < 0$, alors, d'après la proposition 79, $ax < 0$. Autrement dit $f(x) < 0$.
Si $x > 0$, alors, d'après la proposition 79, $ax > 0$. Autrement dit, $f(x) > 0$.
Si $x = 0$, alors $f(x) = f(0) = a \times 0 = 0$.
Les deux autres cas sont laissés en exercices au lecteur.

□

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{3}{2}x$. Le coefficient de f est strictement négatif, d'où son tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

12.5 Exercices

Exercice 1

1. Soit f une fonction linéaire telle que $f(-3) = 2$. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-2	$-\frac{1}{3}$	0			
$f(x)$				$-\frac{5}{4}$	-1	$\frac{3}{5}$

2. Soit g une fonction linéaire. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-2		$1+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$
$g(x)$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$			

3. Soit h une fonction linéaire. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant sans calculer le coefficient de h.

x	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$1+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	$1-\sqrt{6}$	$\frac{1}{1-\sqrt{3}}$
$h(x)$	$-\sqrt{3}$	-3	$-\sqrt{6}$				

Exercice 2

Dans un magasin, un article est vendu p euros. La semaine suivante, le prix de vente de cet article augmente de $5\,\%$. On note alors q ce nouveau prix de vente. La semaine suivante, q baisse de $5\,\%$. On note enfin r ce nouveau prix de vente.

1. Exprimer q en fonction de p, puis r en fonction de q et enfin r en fonction de p.
2. La baisse de $5\,\%$ compense-t-elle la hausse de $5\,\%$?
3. Sachant que $r = 500$, calculer p.

Exercice 3

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC = 9\,\text{cm}$. Soit O le pied de la hauteur issue de A. On suppose que $AO = 6\,\text{cm}$. Soit M un point quelconque du segment $[AO]$. On pose $x := OM$.

1. Donner un encadrement de x.
2. Calculer l'aire $\mathscr{A}(x)$ du triangle BMC en fonction de x.
3. En utilisant le graphe de la fonction $\mathscr{A}$, déterminer la position du point M pour que l'aire du triangle BMC soit égale à $18\,\text{cm}^2$.

4. Vérifier algébriquement le résultat obtenu à la question 3.
5. Calculer l'aire du triangle BMC lorsque M est le milieu du segment $[AO]$. Retrouver ce résultat graphiquement.

Exercice 4

Déterminer le coefficient directeur de chacune des fonctions f, g, h et i sachant que :

1. $f(2) + f(3) = -5$.
2. $2g(1) = 0,5$.
3. $h(2) - h\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{4}$.
4. $2i(-1) + \frac{1}{2}i(1) = \sqrt{2}$.

Exercice 5

Dans un repère $(O; I, J)$ du plan, on place le point $A(72; 48)$. Combien de points à coordonnées entières appartiennent au segment $[OA]$?

12.6 Corrigés

Exercice 1

1. Soit a le coefficient de la fonction f. Comme $f(-3) = 2$, $-3a = 2$ et donc $a = -\frac{2}{3}$. D'où :

$$f(-2) = -\frac{2}{3} \times (-2) = \frac{4}{3}$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

$$f(0) = -\frac{2}{3} \times 0 = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{5}{4} \\ -\frac{2}{3}x &= -\frac{5}{4} \\ x &= -\frac{5}{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ x &= \frac{15}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -1 \\ -\frac{2}{3}x &= -1 \\ x &= -1 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{3}x &= \frac{3}{5} \\ x &= \frac{3}{5} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ x &= -\frac{9}{10} \end{aligned}$$

Par conséquent :

x	-2	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{15}{8}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{10}$
$f(x)$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{5}{4}$	-1	$\frac{3}{5}$

2. Soit a le coefficient de la fonction g. Comme $g(-2) = -\sqrt{2}$, $-2a = -\sqrt{2}$ et donc $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D'où :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x &= \sqrt{3} \\ x &= \sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{2}} \\ x &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ x &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(1+\sqrt{3}) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

CORRIGÉS

$$\begin{aligned} g(\sqrt{2}) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(1-\sqrt{2}) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{2}-2}{2} \end{aligned}$$

Par conséquent :

x	-2	$\sqrt{6}$	$1+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$
$g(x)$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}-2}{2}$

3. D'après la proposition 98, on a :

$$\begin{aligned} h(1+\sqrt{3}) &= h(1) + h(\sqrt{3}) \\ &= -\sqrt{3} - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\sqrt{6}) &= \sqrt{3} \times h(\sqrt{2}) \\ &= \sqrt{3} \times (-\sqrt{6}) \\ &= -\sqrt{18} \\ &= -3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(1-\sqrt{6}) &= h(1) - h(\sqrt{6}) \\ &= -\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}}\right) &= \frac{h(1)}{1-\sqrt{3}} \\ &= \frac{-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \\ &= \frac{-\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{1^2-\sqrt{3}^2} \\ &= \frac{-\sqrt{3}-3}{-2} \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Par conséquent :

x	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$1+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	$1-\sqrt{6}$	$\frac{1}{1-\sqrt{3}}$
$h(x)$	$-\sqrt{3}$	-3	$-\sqrt{6}$	$-\sqrt{3}-3$	$-3\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}+3\sqrt{2}$	$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

Exercice 2

1. $q = p + \frac{5}{100}p = p\left(1+\frac{5}{100}\right) = 1,05p$
   $r = q - \frac{5}{100}q = q\left(1-\frac{5}{100}\right) = 0,95q$
   D'où :

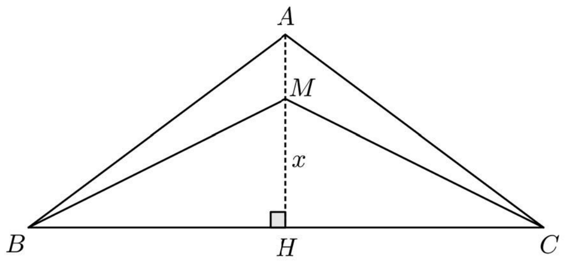
$$\begin{aligned} r &= 0,95q \\ &= 0,95 \times 1,05p \\ &= 0,9975p \end{aligned}$$

2. Globalement, le prix a été multiplié par $0,9975$. Par conséquent, le prix a globalement baissé de $0,25\,\%$. Autrement dit, la baisse se révèle supérieure, en valeur absolue, à la hausse. Ceci s'explique aisément par le fait que les $5\,\%$ de baisse sont calculés sur un montant supérieur aux $5\,\%$ de hausse.
3. Si $r = 500$, alors on a :

$$\begin{aligned} 500 &= 0,9975p \\ p &= \frac{500}{0,9975} \\ p &\simeq 501,25 \text{ au centième près} \end{aligned}$$

Exercice 3

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC = 9\,\text{cm}$. Soit H le pied de la hauteur issue de A. On suppose que $AH = 6\,\text{cm}$. Soit M un point quelconque du segment $[AH]$. On pose $x \coloneqq HM$.



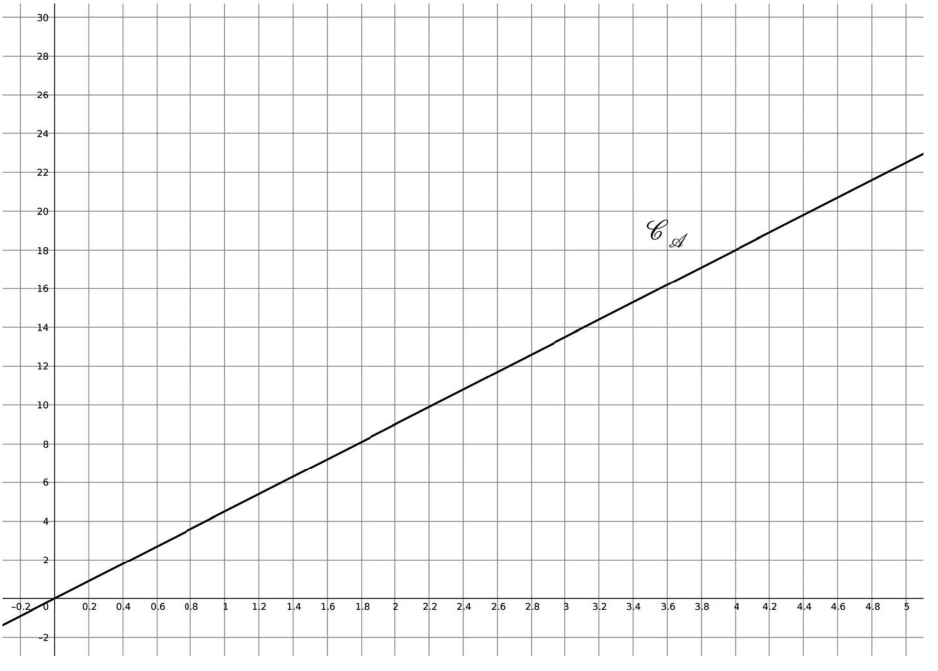
1. Par construction, $0 \leqslant HM \leqslant HA$. Donc $0 \leqslant x \leqslant 6$.

CORRIGÉS

2. On a :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(x) &= \frac{BC \times HM}{2} \\ &= \frac{9x}{2}\end{aligned}$$

3. Voici le graphe de la fonction $\mathscr{A}$:



Graphiquement, il semblerait que l'aire triangle BMC soit égale à $18\,\text{cm}^2$ si, et seulement si, $x = 4\,\text{cm}$.

4. Il s'agit de résoudre l'équation $\mathscr{A}(x) = 18$ sur l'intervalle $[0; 6]$.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(x) &= 18 \\ \frac{9}{2}x &= 18 \\ x &= 18 \times \frac{2}{9} \\ x &= 4\end{aligned}$$

Par conséquent, la conjecture graphique émise à la question 3 se vérifie. L'aire du triangle BMC est égale à $18\,\text{cm}^2$ si, et seulement si, $x = 4\,\text{cm}$.

5. Si M est le milieu du segment $[AH]$, alors $HM = 3\,\text{cm}$. Calculons donc $\mathscr{A}(3)$:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(3) &= \frac{9}{2} \times 3 \\ &= \frac{27}{2}\,\text{cm}^2\end{aligned}$$

Graphiquement, on lit effectivement $\mathscr{A}(3) = 13,5\,\text{cm}^2$.

Exercice 4

1. Soit a le coefficient de la fonction f. On a :

$$\begin{aligned}f(2) + f(3) &= -5 \\ 2a + 3a &= -5 \\ 5a &= -5 \\ a &= -5 \div 5 \\ a &= -1\end{aligned}$$

D'où $f\,:\,x \longmapsto -x$.

2. Soit a le coefficient de la fonction g. On a :

$$\begin{aligned}2g(1) &= 0,5 \\ 2 \times a \times 1 &= 0,5 \\ a &= 0,5 \div 2 \\ a &= 0,25\end{aligned}$$

D'où $g\,:\,x \longmapsto 0,25x$.

3. Soit a le coefficient de la fonction h. On a :

$$\begin{aligned}h(2) - h\left(\frac{2}{3}\right) &= \frac{3}{4} \\ 2a - \frac{2}{3}a &= \frac{3}{4} \\ \frac{4}{3}a &= \frac{3}{4} \\ a &= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \\ a &= \frac{9}{16}\end{aligned}$$

D'où $h\,:\,x \longmapsto \frac{9}{16}x$.

CORRIGÉS

4. Soit a le coefficient de la fonction i. On a :

$$\begin{aligned}
2i(-1) + \frac{1}{2}i(1) &= \sqrt{2} \\
2 \times a \times (-1) + \frac{1}{2} \times a \times 1 &= \sqrt{2} \\
-2a + \frac{1}{2}a &= \sqrt{2} \\
-\frac{3}{2}a &= \sqrt{2} \\
a &= \sqrt{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \\
a &= -\frac{2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

D'où $i\,:\,x \longmapsto -\frac{2\sqrt{2}}{3}x$.

Exercice 5

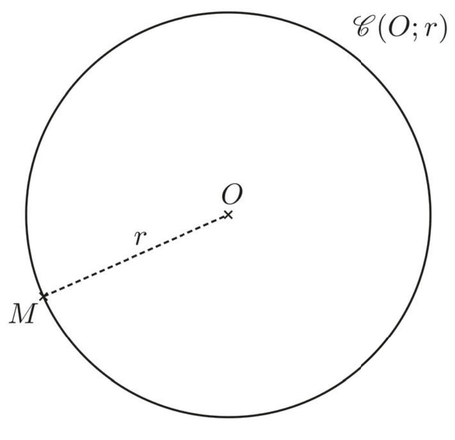
Soit f la fonction affine de coefficient a dont le graphe dans le repère $(O; I, J)$ passe par le point $A(72; 48)$. Alors on a $f(72) = 48$, c'est-à-dire $72a = 48$ et donc $a = \frac{2}{3}$. La recherche du nombre de points à coordonnées entières appartenant au segment $[OA]$ est équivalente à la recherche du nombre d'entiers naturels compris entre 0 et 72 tels que leur produit par $\frac{2}{3}$ est un entier naturel. Or un tel produit est un entier naturel si, et seulement si, le second facteur est un multiple de 3. Comme il existe 25 multiples de 3 entre 0 et 72, le segment $[OA]$ compte 25 points à coordonnées entières.

13 Autour du cercle

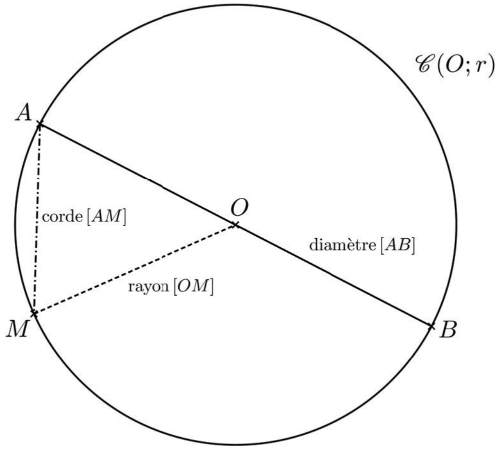
13.1 Détermination d'un cercle

Définition 108. Soit O un point du plan. Soit r un nombre réel positif. On appelle cercle de centre O et de rayon r, noté $\mathscr{C}(O;r)$, l'ensemble des points M du plan situés à une distance r de O. Plus formellement, $\mathscr{C}(O;r) = \{M \in \mathscr{P},\ OM = r\}$.

Illustration :



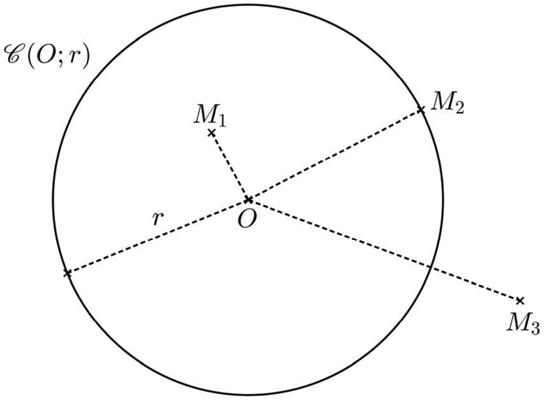
Vocabulaire : On appelle corde tout segment ayant pour extrémités deux points distincts du cercle. On appelle diamètre toute corde passant par le centre du cercle. On dit que deux points du cercle sont diamétralement opposés s'ils sont les extrémités d'un diamètre.



Définition 109. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon r. Soit M un point du plan. On dit que :

1. M est intérieur à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $OM < r$.
2. M appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $OM = r$.
3. M est extérieur à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $OM > r$.

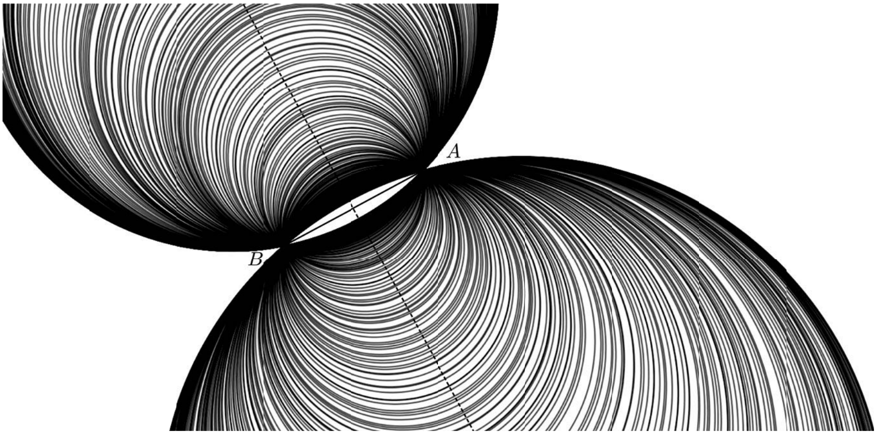
Illustration : $OM_1 < r$ donc M_1 est intérieur à $\mathscr{C}$. $OM_2 = r$ donc M_2 appartient à $\mathscr{C}$. $OM_3 > r$ donc M_3 est extérieur à $\mathscr{C}$.



Proposition 110. *Il existe une infinité de cercles passants par deux points distincts du plan.*

Démonstration. Soient A et B deux points distincts du plan. Si $\mathscr{C}(O;r)$ passe par A et B, alors $OA = OB = r$ et par conséquent, O est équidistant de A et B. Autrement dit, O appartient à la médiatrice de $[AB]$. Réciproquement, soit O un point appartenant à la médiatrice de $[AB]$, alors, d'après le cours de Sixième, $OA = OB$. Donc $\mathscr{C}(O;OA)$ passe par A et B. □

Illustration :

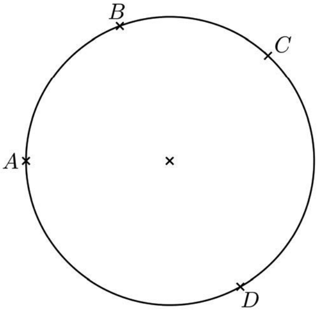


Proposition 111. *Par trois points non alignés, il passe un unique cercle.*

Démonstration. Soient A, B et C trois points du plan non alignés. Si O est le centre d'un cercle passant par A, B et C, alors, par définition, $OA = OB = OC$. Donc O n'est autre que le point de concours des médiatrices du triangle ABC. Réciproquement, le cercle circonscrit au triangle ABC convient. □

Définition 112. Quatre points du plan sont dits cocycliques s'ils appartiennent à un même cercle.

Illustration : sur la figure ci-dessous, les points A, B, C et D sont cocycliques.

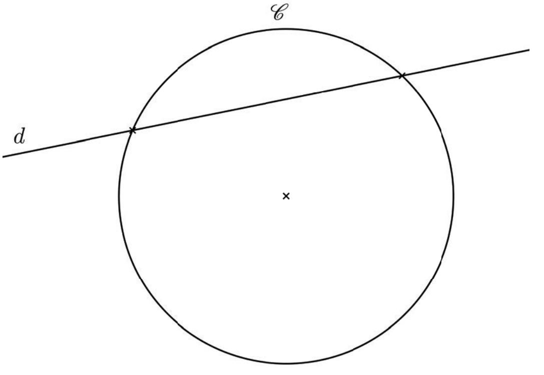


13.2 Positions relatives d'une droite et d'un cercle

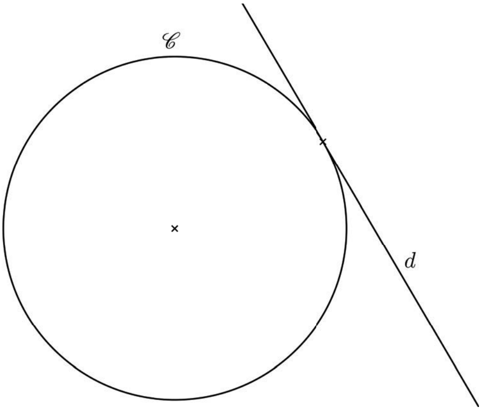
Définition 113. On dit que :

1. Une droite est sécante à un cercle si elle le coupe en deux points distincts.
2. Une droite est tangente à un cercle si elle a un unique point commun avec le cercle.
3. Une droite est extérieure à un cercle si elle n'a aucun point commun avec le cercle.

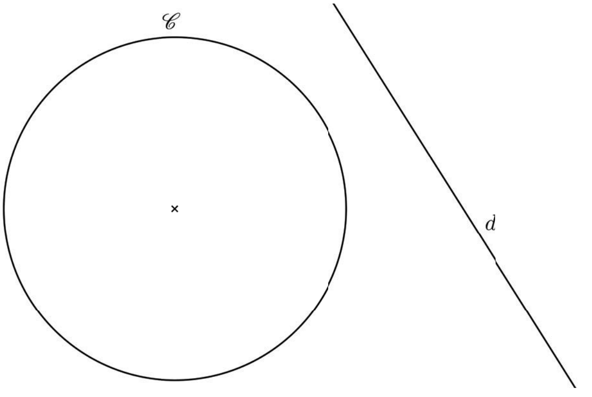
Illustration :



d est sécante à $\mathscr{C}$.



d est tangente à $\mathscr{C}$.



d est extérieure à $\mathscr{C}$.

Proposition 114. *Soit Δ une droite. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon r. Alors on a les implications suivantes :*

1. *Si $d(O;\Delta) < r$, alors Δ est sécante à $\mathscr{C}$.*
2. *Si $d(O;\Delta) = r$, alors Δ est tangente à $\mathscr{C}$.*
3. *Si $d(O;\Delta) > r$, alors Δ est extérieure à $\mathscr{C}$.*

Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de O sur Δ. Alors la distance $d(O;\Delta)$ du point O à la droite Δ est égale à la longueur OH.
1. Si $OH < r$, alors lorsque M parcourt la droite Δ, en partant de H, la distance OM augmente et tend vers l'infini. Donc il existe nécessairement un point A tel que $OA = r$. Ainsi, $A \in \mathscr{C}$. On trouve un autre point $B \in \mathscr{C}$ en parcourant la droite Δ dans l'autre sens. D'où le résultat.
2. Si $OH = r$, alors pour tout point M de Δ, on a, d'après le théorème de Pythagore : $OM^2 = OH^2 + HM^2 = r^2 + HM^2 \geqslant r^2$ avec égalité si, et seulement si, les points H et M sont confondus. Donc la droite Δ a un unique point commun avec $\mathscr{C}$. Ainsi, par définition, la droite Δ est tangente à $\mathscr{C}$.
3. Si $OH > r$, alors pour tout point M de la droite Δ, on a d'après le théorème de Pythagore : $OM^2 = OH^2 + HM^2 > r^2 + HM^2 > r^2$. Donc la droite Δ et le cercle $\mathscr{C}$ n'ont aucun point commun. Ainsi, par définition, la droite Δ est extérieure à $\mathscr{C}$. □

Remarque. Nous en déduisons une caractérisation des tangentes à un cercle.

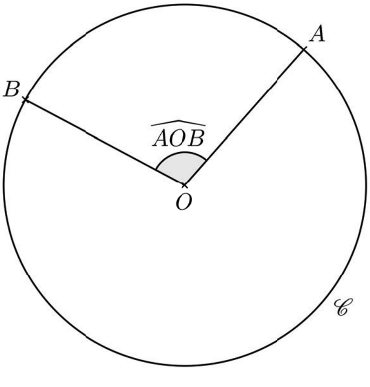
Proposition 115. *Une droite est tangente à un cercle si, et seulement, si elle est perpendiculaire à un rayon de ce cercle en son extrémité.*

Démonstration. Découle de la démonstration de la proposition 114. □

13.3 Angle au centre et angle inscrit

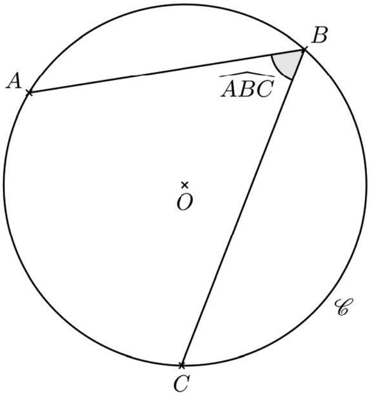
Définition 116. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. On appelle angle au centre tout angle dont le sommet est le centre O du cercle $\mathscr{C}$.

Illustration : sur la figure ci-dessous, l'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre.



Définition 117. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. On appelle angle inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ tout angle dont le sommet appartient au cercle $\mathscr{C}$ et dont les côtés interceptent un arc de celui-ci.

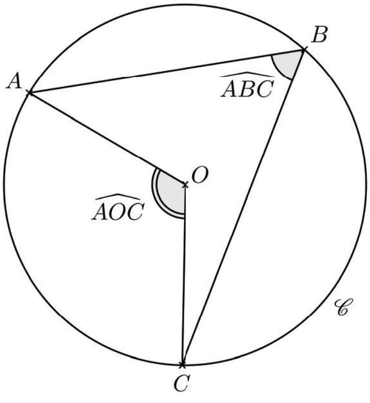
Illustration : sur la figure ci-dessous, l'angle $\widehat{ABC}$ est un angle inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$.



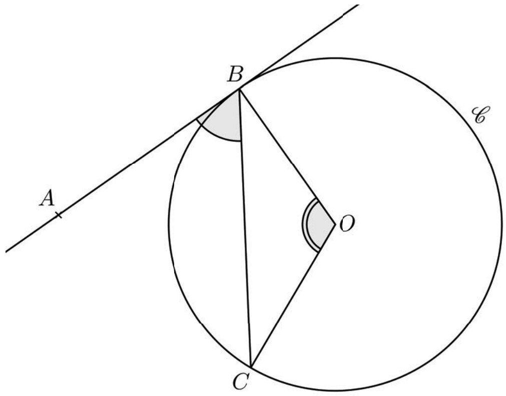
Définition 118. Étant donné un angle inscrit :

1. On appelle arc intercepté par l'angle inscrit, l'arc compris entre les côtés de l'angle inscrit.
2. On appelle angle au centre correspondant à l'angle inscrit, l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit.

Illustration : sur la figure ci-dessous, l'angle $\widehat{ABC}$ est un angle inscrit au cercle $\mathscr{C}$ et l'angle $\widehat{AOC}$ est l'angle au centre associé à cet angle inscrit.



Remarque. Les définitions précédentes demeurent sensées lorsque l'un des côtés de l'angle inscrit est tangent au cercle $\mathscr{C}$.

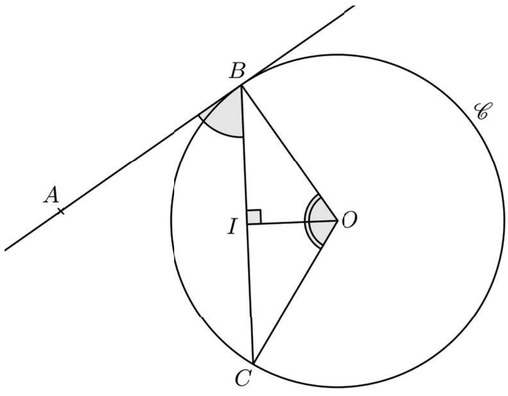


13.4 Théorèmes

Théorème 119. *Tout angle inscrit dans un cercle a sa mesure égale à la moitié de celle de l'angle au centre correspondant.*

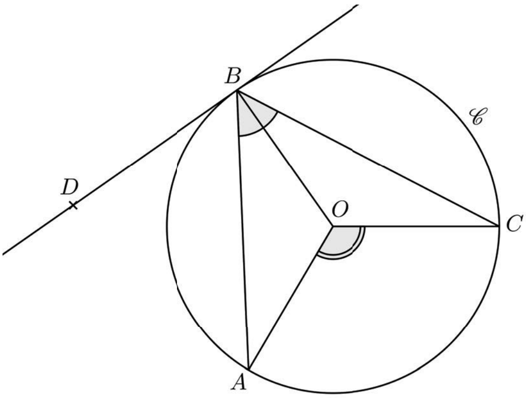
Démonstration. Soit $\widehat{ABC}$ un angle inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

1. Premier cas : l'un des côtés de l'angle inscrit est une tangente au cercle $\mathscr{C}$.



Soit I le milieu du segment $[BC]$. Dans le triangle OBC isocèle en O, la droite (OI) est à la fois hauteur issue de O et bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$. Donc $(OI) \perp (BC)$. Or (AB) est tangente à $\mathscr{C}$ au point B, donc $(AB) \perp (OB)$ d'après la proposition 115. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BOI}$ ont donc leurs côtés respectivement perpendiculaires. Par conséquent, d'après le cours de Cinquième, $\widehat{BOI} = \widehat{ABC}$. Or $\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BOI}$. D'où $\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{ABC}$.

2. Second cas : les deux côtés de l'angle inscrit sont des cordes du cercle.
   On trace la tangente (DB) au cercle $\mathscr{C}$.



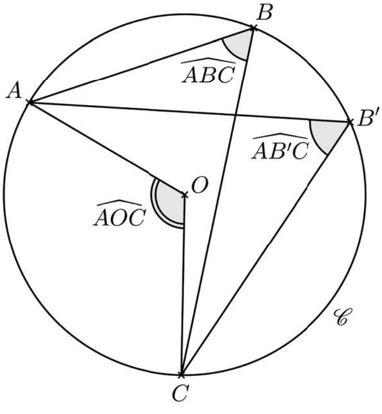
D'après le premier cas, $\widehat{BOA} = 2 \times \widehat{DBA}$ et $360° - \widehat{BOC} = 2 \times \widehat{DBC}$. D'où :

$$\begin{aligned}\widehat{AOC} &= 360° - \widehat{BOC} - \widehat{BOA} \\ &= 2\widehat{DBC} - 2\widehat{DBA} \\ &= 2(\widehat{DBC} - \widehat{DBA}) \\ &= 2\widehat{ABC}\end{aligned}$$

□

Corollaire 120. *Si, dans un même cercle, deux angles inscrits interceptent deux arcs de même longueur (a fortiori le même arc), alors ils sont égaux.*

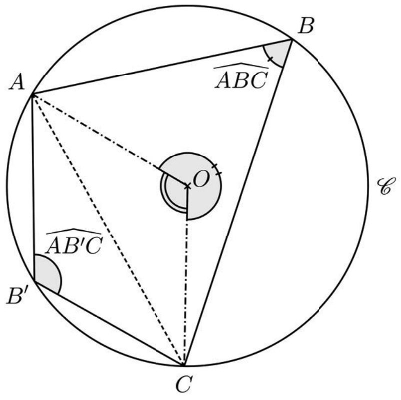
Démonstration. Soient $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AB'C}$ deux angles inscrits interceptant le même arc de cercle.



D'après le théorème 119, $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ et $\widehat{AB'C} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$. Donc $\widehat{ABC} = \widehat{AB'C'}$. □

Corollaire 121. *Si, dans un même cercle, deux angles inscrits interceptent les deux arcs sous-tendus par une même corde, alors ces deux angles sont supplémentaires.*

Démonstration. Soient $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AB'C}$ deux angles inscrits d'un même cercle interceptant les deux arcs sous-tendus par la corde $[AC]$.



On a :

$$\begin{aligned}\widehat{ABC}+\widehat{AB'C} &= \frac{1}{2}\widehat{AOC}+\frac{1}{2}(360° - \widehat{AOC})\\ &= \frac{1}{2}\widehat{AOC}+180° - \frac{1}{2}\widehat{AOC}\\ &= 180°\end{aligned}$$

□

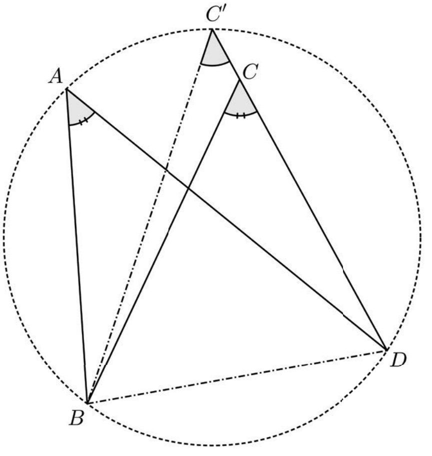
13.5 Polygones réguliers

Définition 122. On dit qu'un polygone est inscriptible s'il existe un cercle auquel appartiennent tous ses sommets. On dit alors que les sommets de ce polygone sont cocycliques. On dit également que le cercle est circonscrit au polygone et que le polygone et inscrit dans le cercle.

Remarque. Un triangle non plat est toujours inscriptible dans un cercle d'après le cours de Sixième. La question de l'inscriptibilité ne se pose réellement qu'à partir de quatre sommets.

Proposition 123. *Si un quadrilatère croisé a deux angles opposés égaux, alors il est inscriptible.*

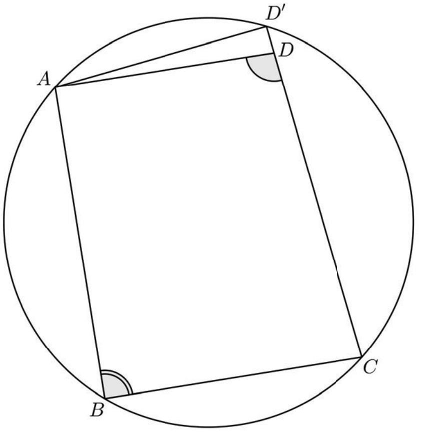
Démonstration. Soit $ABCD$ un quadrilatère croisé tel que $\widehat{BAD}=\widehat{BCD}$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABD.



Ce cercle coupe la droite (CD) en un point C'. Démontrons que les points C et C' sont confondus. D'après le corollaire 120, $\widehat{BC'D} = \widehat{BAD}$ car ils interceptent le même arc. Or $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$. Donc $\widehat{BC'D} = \widehat{BCD}$. Par conséquent, d'après le cours de Cinquième, les droites (BC) et (BC') sont parallèles. Un axiome d'Euclide nous permet alors d'affirmer que ces deux droites sont nécessairement confondues et par suite que les points C et C' sont confondus. Ainsi, le cercle circonscrit au triangle ABD passe également par le point C. □

Proposition 124. *Si un quadrilatère convexe a deux angles opposés supplémentaires, alors il est inscriptible.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180°$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.



Ce cercle coupe la droite (CD) en un point D'. Démontrons que les points D et D' sont confondus. D'après le corollaire 121, $\widehat{ABC} + \widehat{AD'C} = 180°$. Or $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180°$. D'où $\widehat{AD'C} = \widehat{ADC}$. Par conséquent, d'après le cours de Cinquième, les droites (BD)

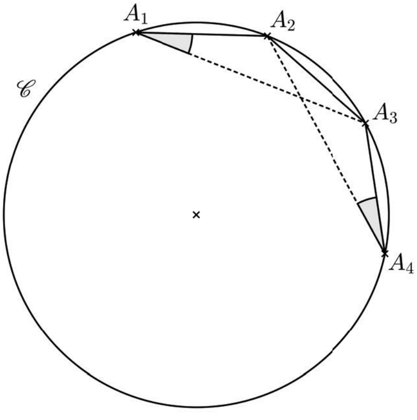
et (BD') sont parallèles. Un axiome d'Euclide nous permet alors d'affirmer que ces deux droites sont nécessairement confondues et par suite que les points D et D' sont confondus. Finalement, le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$. □

Définition 125. On appelle polygone régulier tout polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les angles ont la même mesure.

Remarque. Un polygone ayant ses côtés de même longueur n'est pas nécessairement régulier. **Exemple** : un losange non carré (cf. cours de Sixième).

Proposition 126. *Tout polygone régulier convexe est inscriptible.*

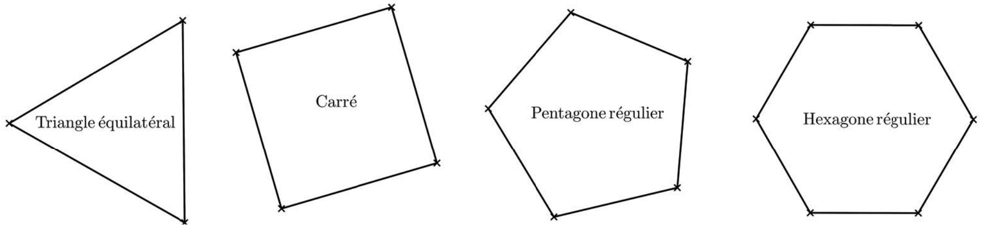
Démonstration. Soit $A_1A_2A_3\dots A_n$ un polygone régulier convexe. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$.



Pour les triangles $A_1A_2A_3$ et $A_4A_3A_2$, on a : $\begin{cases} A_1A_2 = A_4A_3 \\ A_2A_3 = A_3A_2 \\ \widehat{A_1A_2A_3} = \widehat{A_4A_3A_2} \end{cases}$. Donc, d'après le deuxième cas d'égalité des triangles, les triangles $A_1A_2A_3$ et $A_4A_3A_2$ sont égaux. En particulier, $\widehat{A_3A_1A_2} = \widehat{A_2A_4A_3}$. Donc, d'après la proposition 123, le quadrilatère croisé $A_1A_3A_4A_2$ est inscriptible. Autrement dit, A_4 appartient au cercle $\mathscr{C}$. On démontre de manière identique, de proche en proche, que les points $A_5, \dots, A_n$ appartiennent également au cercle $\mathscr{C}$.

□

Exemple. Voici quelques polygones réguliers :



13.6 Exercices

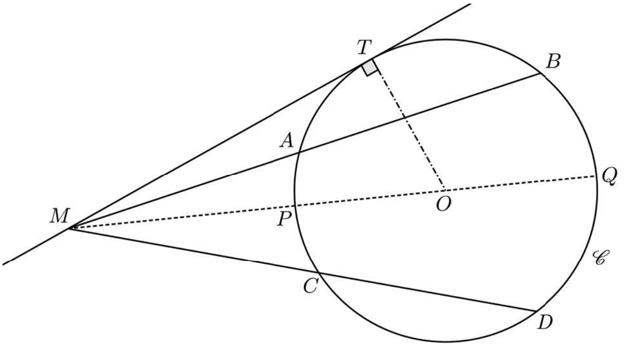
Exercice 1

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. Soit $[AB]$ un diamètre de $\mathscr{C}$. Soit M un point appartenant au cercle $\mathscr{C}$ et distinct de A et B. La droite tangente à $\mathscr{C}$ en M coupe les droites tangentes à $\mathscr{C}$ en A et B en deux points, désignons-les par C et D.

1. Démontrer que $CD = AC + BD$.
2. Démontrer que le triangle COD est rectangle.
3. Démontrer que $OM^2 = MC \times MD$.

Exercice 2

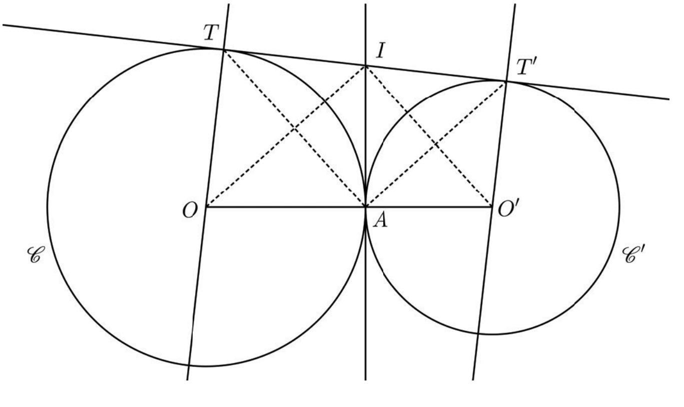
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon r. Soit M un point situé à « l'extérieur » du cercle $\mathscr{C}$. La droite (MO) couple le cercle $\mathscr{C}$ en P et Q. Deux autres droites passant par M coupe le cercle $\mathscr{C}$ en A et B et en C et D. Soit T le point de tangence entre le cercle $\mathscr{C}$ et l'une de ses tangentes passant par M. On pose $d := MT$.



Démontrer que $MA \times MB = MC \times MD = MP \times MQ = d^2 - r^2$.

Exercice 3

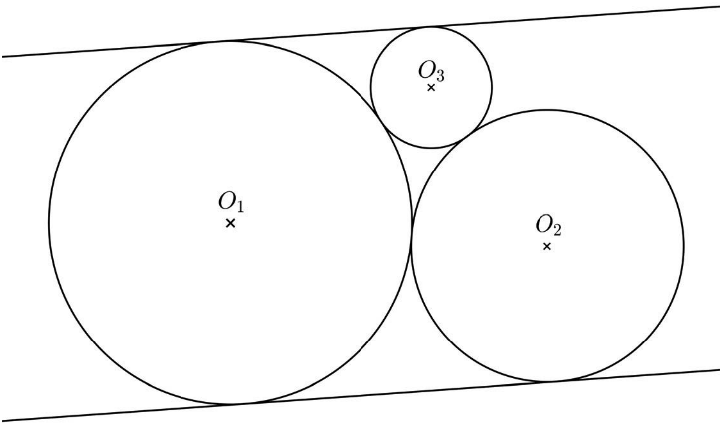
Sur la figure ci-dessous, les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centres respectifs O et O' sont tangents extérieurement en A. La droite (TT') est l'une de leurs tangentes extérieures communes.



1. Démontrer que les angles $\widehat{TAT'}$ et $\widehat{OIO'}$ sont droits.
2. Soit J le milieu du segment $[OO']$. Démontrer que le cercle de diamètre $[IJ]$ est tangent à la droite (TT') en I.

Exercice 4

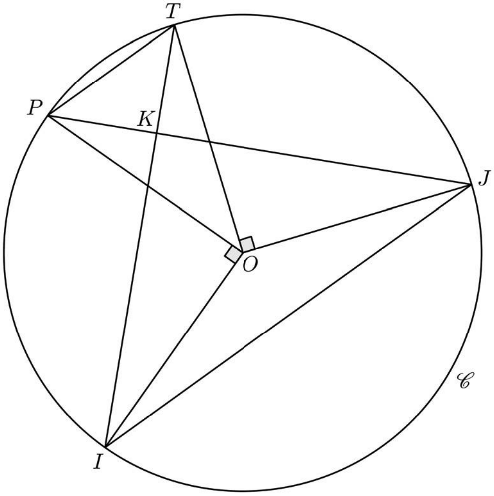
Ce problème est un *sangaku*. Il a été relevé sur une tablette de la province d'Ibaragi (Honshu) et date de 1881. Trois cercles sont tangents extérieurement deux à deux et compris entre deux droites parallèles. Soient r_1, r_2 et r_3 les rayons respectifs des cercles de centres O_1, O_2 et O_3.



Démontrer que $r_1^2 = 4r_2r_3$.

Exercice 5

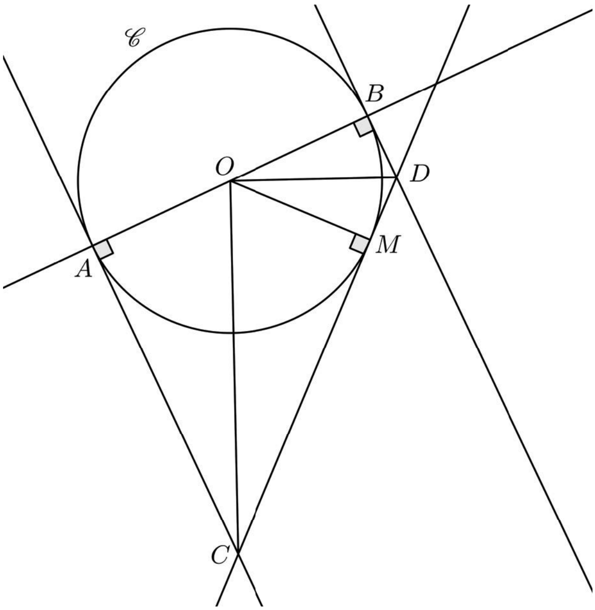
On considère la figure suivante :



Démontrer que $PJ = TI$.

13.7 Corrigés

Exercice 1



1. $OA = OM$ et $OC = OC$. Donc les deux triangles rectangles AOC et OMC ont deux côtés égaux. D'après le théorème de Pythagore, ils ont donc leur troisième côté égal et par conséquent, d'après un cas d'égalité de triangles (cf. cours de Sixième), ces deux triangles sont égaux. Il s'ensuit que $CM = CA$.
   $OM = OB$ et $OD = OD$. Donc les deux triangles rectangles OMD et OBD ont deux côtés égaux. D'après le théorème de Pythagore, ils ont donc leur troisième côté égal et par conséquent, d'après un cas d'égalité de triangles (cf. cours de Sixième), ces deux triangles sont égaux. Il s'ensuit que $MD = BD$.
   D'où :
$$\begin{aligned} CD &= CM + MD \\ &= CA + BD \end{aligned}$$

2. $\widehat{AOC} = \widehat{COM}$ donc la droite (OC) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{AOM}$. De la même façon, $\widehat{BOD} = \widehat{DOM}$, donc la droite (OD) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BOM}$. D'où :

$$\begin{aligned}\widehat{COD} &= \widehat{COM} + \widehat{MOD}\\ &= \frac{1}{2}\widehat{AOM} + \frac{1}{2}\widehat{MOB}\\ &= \frac{1}{2}(\widehat{AOM} + \widehat{MOB})\\ &= \frac{1}{2}\widehat{AOB}\\ &= \frac{1}{2} \times 180^\circ\\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

Donc, par définition, le triangle COD est rectangle en O.

3. Dans le triangle ODM, on a $\widehat{ODM} = 90^\circ - \widehat{DOM}$.
Dans le triangle COD, on a $\widehat{ODM} = 90^\circ - \widehat{OCD}$.
Donc $\widehat{DOM} = \widehat{OCD}$. Ainsi, les triangles ODM et COD ont les mêmes mesures d'angles. Donc, d'après la définition 14, ils sont semblables. Par conséquent :

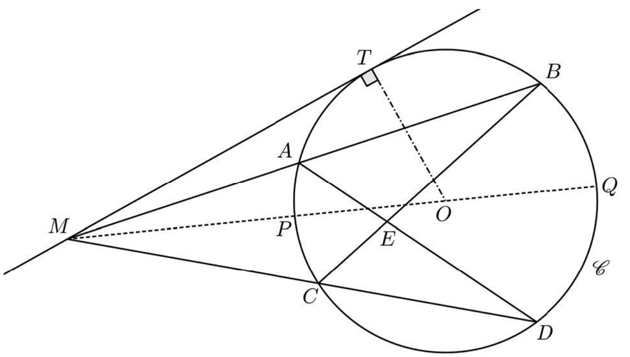
$$\frac{OM}{MD} = \frac{MC}{OM}$$

d'où :

$$OM^2 = MC \times MD$$

Exercice 2

Soit E le point d'intersection des segments $[AD]$ et $[BC]$.



Les angles $\widehat{ADM}$ et $\widehat{MBC}$ interceptent le même arc de cercle. Donc, d'après le corollaire 120, $\widehat{ADM} = \widehat{MBC}$. Par conséquent, les triangles MBC et MAD ont deux angles égaux. D'après le cours de Cinquième, ces deux triangles ont donc leurs trois angles égaux et par suite, ils sont semblables. D'où :

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$$

CORRIGÉS

soit :

$$MA \times MB = MC \times MD$$

Autrement dit, le produit des segments interceptés par le cercle $\mathscr{C}$ est constant, il ne dépend pas de la droite sécante passant par M. Par suite :

$$MA \times MB = MC \times MD = MP \times MQ = MT \times MT = MT^2$$

Or d'après le théorème de Pythagore dans le triangle MTO rectangle en T, on a :

$$MT^2 + TO^2 = MO^2$$

soit :

$$MT^2 + r^2 = d^2$$

d'où :

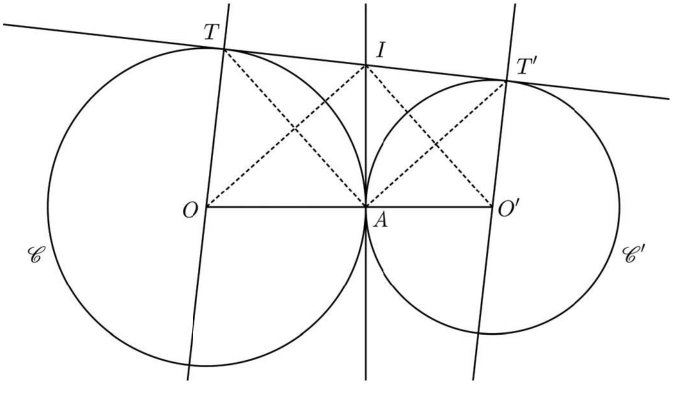
$$MT^2 = d^2 - r^2$$

Ainsi :

$$MA \times MB = MC \times MD = MP \times MQ = MT^2 = d^2 - r^2$$

Remarque. Cette quantité ne dépend donc que de la distance du point M au centre du cercle $\mathscr{C}$ ainsi que du rayon de ce cercle. Elle est appelée la puissance du point M par rapport au cercle $\mathscr{C}$.

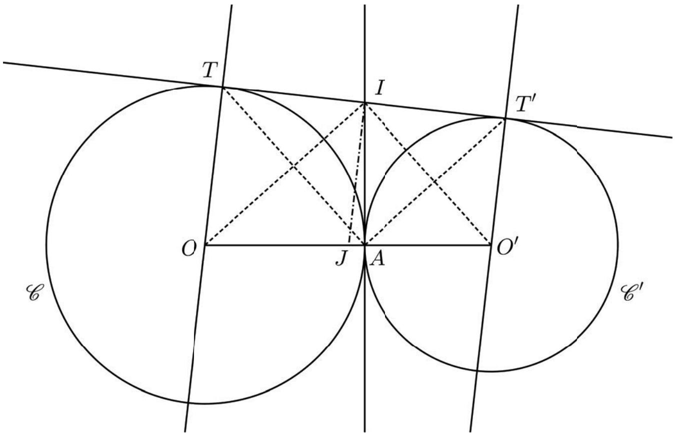
Exercice 3



1. Les droites (IT) et (IA) sont tangentes au cercle $\mathscr{C}$ donc les triangles ITO et IAO sont égaux et par suite, $IT = IA$. Par ailleurs, les droites (IT') et (IA) sont tangentes au cercle $\mathscr{C}'$, donc $IA = IT'$. Dans le triangle TAT', le point I est donc le milieu du segment $[TT']$ et comme $IA = IT = IT'$, d'après le cours de Quatrième, le triangle TAT' est rectangle en A. Autrement dit, l'angle $\widehat{TAT'}$ est droit.

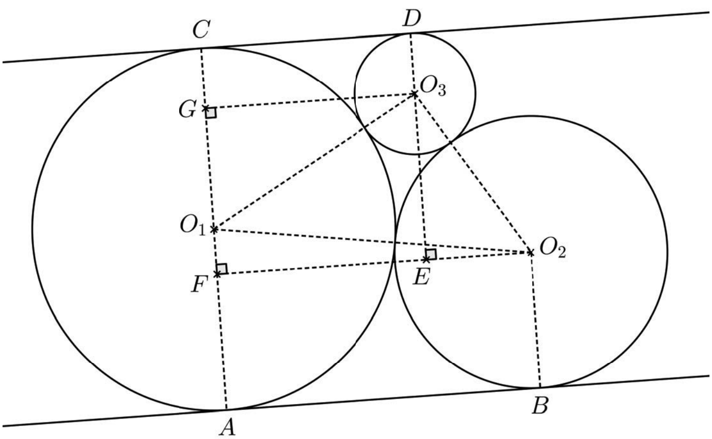
$IT = IA$ et $OT = OA$ donc, d'après le cours de Sixième, la droite (OI) est la médiatrice du segment $[TA]$. En particulier, $(OI) \perp (AT)$. Comme $(AT) \perp (AT')$, nécessairement, $(OI)//(AT')$.
$IT' = IA$ et $O'A = O'T'$ donc, d'après le cours de Sixième, la droite $(O'I)$ est la médiatrice du segment $[AT']$. En particulier, $(O'I) \perp (AT')$.
Par conséquent, $(OI) \perp (O'I)$. Autrement dit, l'angle $\widehat{OIO'}$ est droit.

2. D'après le cours de Quatrième, la droite (IJ) est parallèle à la droite (OT). Or cette dernière est perpendiculaire à la droite (TT'). Donc la droite (IJ) est également perpendiculaire à la droite (TT').



Par conséquent, le cercle de diamètre $[IJ]$ est tangent à la droite (TT') en I.

Exercice 4



Dans le triangle O_2FO_1 rectangle en F, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$O_2F^2 + O_1F^2 = O_1O_2^2$$

soit :

$$AB^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$$

d'où :

$$\begin{aligned} AB^2 &= r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - (r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2) \\ AB^2 &= \cancel{r_1^2} + 2r_1r_2 + \cancel{r_2^2} - \cancel{r_1^2} + 2r_1r_2 - \cancel{r_2^2} \\ AB^2 &= 4r_1r_2 \end{aligned}$$

et donc :

$$AB = 2\sqrt{r_1r_2} \text{ car } AB \geqslant 0$$

Dans le triangle O_3GO_1 rectangle en G, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$O_3G^2 + O_1G^2 = O_1O_3^2$$

soit :

$$CD^2 + (r_1 - r_3)^2 = (r_1 + r_3)^2$$

d'où :

$$\begin{aligned} CD^2 &= r_1^2 + 2r_1r_3 + r_3^2 - (r_1^2 - 2r_1r_3 + r_3^2) \\ CD^2 &= \cancel{r_1^2} + 2r_1r_3 + \cancel{r_3^2} - \cancel{r_1^2} + 2r_1r_3 - \cancel{r_3^2} \\ CD^2 &= 4r_1r_3 \end{aligned}$$

et donc :

$$CD = 2\sqrt{r_1r_3} \text{ car } CD \geqslant 0$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} EO_2 &= FO_2 - FE \\ &= AB - CD \\ &= 2\sqrt{r_1r_2} - 2\sqrt{r_1r_3} \end{aligned}$$

En outre $EO_3 = 2r_1 - (r_2 + r_3)$ et $O_2O_3 = r_2 + r_3$. Donc, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle O_2EO_3 rectangle en E, on a :

$$O_2O_3^2 = O_2E^2 + EO_3^2$$

soit :

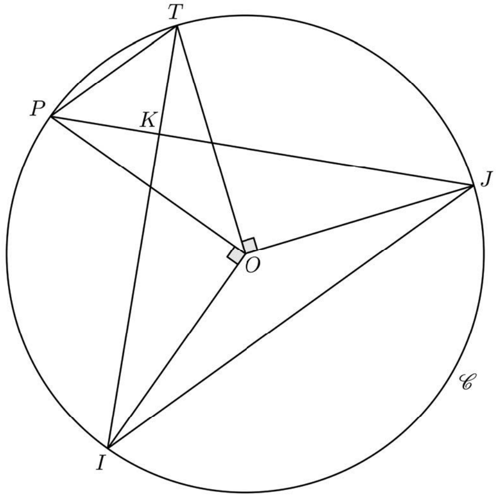
$$(r_2 + r_3)^2 = \left(2(\sqrt{r_1r_2} - \sqrt{r_1r_3})\right)^2 + \left(2r_1 - (r_2 + r_3)\right)^2$$

d'où :

$$r_2^2 + 2r_2r_3 + r_3^2 = 4r_1r_2 - 8\sqrt{r_1r_2r_1r_3} + 4r_1r_3 + 4r_1^2 - 4r_1(r_2+r_3) + (r_2+r_3)^2$$
$$\cancel{r_2^2} + \cancel{2r_2r_3} + \cancel{r_3^2} = \cancel{4r_1r_2} - 8\sqrt{r_1r_2r_1r_3} + \cancel{4r_1r_3} + 4r_1^2 - \cancel{4r_1r_2} - \cancel{4r_1r_3} + \cancel{r_2^2} + \cancel{2r_2r_3} + \cancel{r_3^2}$$
$$8\sqrt{r_1^2r_2r_3} = 4r_1^2$$
$$2r_1\sqrt{r_2r_3} = r_1^2$$
$$2\sqrt{r_2r_3} = r_1$$

En élevant au carré cette dernière égalité, on obtient bien $r_1^2 = 4r_2r_3$.

Exercice 5



L'angle inscrit $\widehat{PJI}$ et l'angle au centre $\widehat{POI}$ interceptent le même arc de cercle. Donc, d'après le théorème 119, $\widehat{PJI} = \frac{1}{2}\widehat{POI} = 90° \div 2 = 45°$. L'angle $\widehat{TIJ}$ et l'angle au centre $\widehat{TOI}$ interceptent le même arc de cercle. Donc, d'après le théorème 119, $\widehat{TIJ} = \frac{1}{2}\widehat{TOI} = 90° \div 2 = 45°$. Par conséquent, d'après le cours de Sixième, le triangle KIJ est isocèle en K. On démontre de manière analogue que le triangle PKT est isocèle en K. D'où :

$$\begin{aligned} PJ &= PK + KJ \\ &= TK + KI \\ &= TI \end{aligned}$$

CORRIGÉS

14

Fonctions affines

14.1 Point de vue algébrique

Définition 127. Soient a et b deux nombres réels. On appelle fonction affine associée au couple $(a;b)$ la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = ax + b$.

Exemple. Voici quelques exemples de fonctions affines :

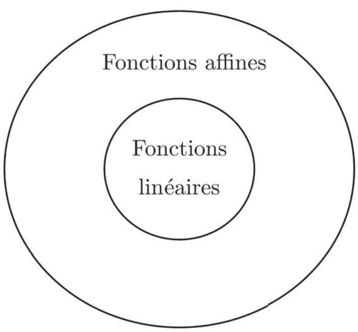
1. $f : x \longmapsto -6x + 11$ est une fonction affine. En effet, $a = -6$ et $b = 11$.
2. $g : x \longmapsto \frac{3}{4}x - \sqrt{2}$ est une fonction affine. En effet, $a = \frac{3}{4}$ et $b = -\sqrt{2}$.
3. $i : x \longmapsto -\pi x + 10^4$ est une fonction affine. En effet, $a = -\pi$ et $b = 10^4$.

Remarque. Nous pouvons effectuer trois remarques :

1. Attention, une fonction affine ne se détecte pas toujours du premier coup d'œil.
   Exemple. La fonction $k : x \longmapsto (5-4x)^2 - 16x^2$ est une fonction affine. En effet, pour tout nombre réel x, on a :

$$\begin{aligned} k(x) = (5-4x)^2 - 16x^2 &= 25 - 40x + \cancel{16x^2} - \cancel{16x^2} \\ &= -40x + 25 \end{aligned}$$

2. Si $b = 0$, alors la fonction affine est à fortiori linéaire. Par conséquent, toute fonction linéaire est également affine. D'où le diagramme de Venn suivant :



3. Si $a = 0$, alors la fonction affine est constante puisque tout nombre réel est envoyé sur b.

Proposition 128. *Soit f une fonction affine associée au couple de nombres réels $(a; b)$. Alors les accroissements de la variable x et de l'image $f(x)$ sont proportionnels. Plus formellement, pour tous nombres réels x_1 et x_2, on a :*

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

Démonstration. Soient x_1 et x_2 deux nombres réels. On a :

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = ax_2 + \cancel{b} - ax_1 - \cancel{b} = a(x_2 - x_1)$$

□

Remarque. Cela signifie en particulier que si l'écart entre les antécédents double, alors l'écart entre les images double également. Lorsque la fonction est linéaire, ce sont les images qui sont proportionnelles aux antécédents.

Proposition 129. *Soit f une fonction affine associée au couple de nombres réels $(a; b)$ avec $a \neq 0$. Soit y un nombre réel. Alors y admet un unique antécédent par f, à savoir le nombre réel $x = \frac{y-b}{a}$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un nombre réel x tel que $f(x) = y$. Alors $y = ax + b$, et donc $x = \frac{y-b}{a}$.
Réciproquement, si $x = \frac{y-b}{a}$, alors $f(x) = a \times \frac{y-b}{a} + b = y - b + b = y$. □

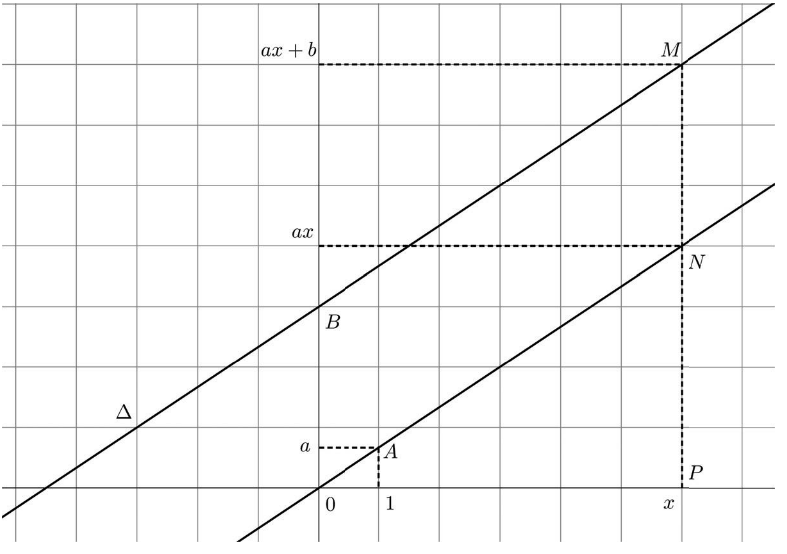
Remarque. Si $a = 0$, alors pour tout nombre réel x, $f(x) = b$. Par conséquent b admet une infinité d'antécédents par f et tout nombre différent b n'admet aucun antécédent par f.

14.2 Point de vue géométrique

Théorème 130. *Si f est une fonction affine associée au couple de nombres réels $(a; b)$, alors la courbe représentative de f dans un repère du plan est une droite. Plus précisément, cette droite passe par le point de coordonnées $(0; b)$ et est parallèle à la droite qui représente la fonction linéaire g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \longmapsto ax$.*

Démonstration. PREMIÈRE DÉMONSTRATION :
Soit $(a; b)$ un couple de nombres réels. Soit f la fonction affine associée au couple $(a; b)$. Soient $A(1; a)$ et $B(0; b)$ deux points du plan muni d'un repère. D'après le chapitre 12, la fonction linéaire $g : x \longmapsto ax$ admet pour courbe représentative la droite (OA), où O est l'origine du repère. Soit Δ la droite parallèle à la droite (OA) passant par B. Démontrons que Δ est la courbe représentative de f.
$\supset$: soit $M(x; y)$ un point de la courbe représentative de f. Alors, par définition, $y = f(x)$, soit $y = ax + b$. La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par M coupe l'axe des abscisses en P et la droite (OA) en N. Par définition de l'abscisse,

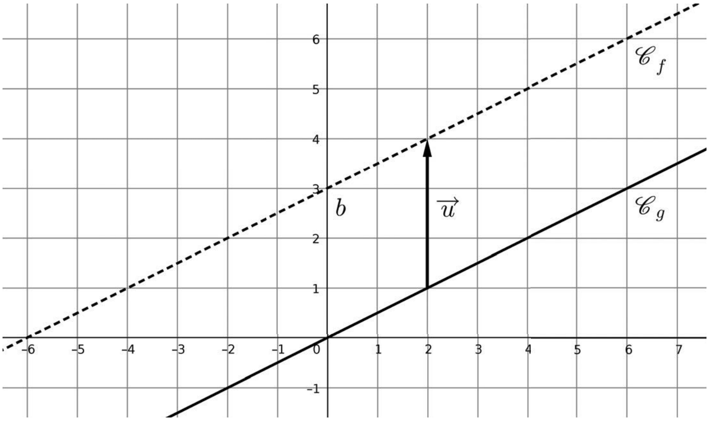
les points M, N et P ont la même abscisse x. Or N appartient à la courbe représentative de g, donc N a pour ordonnée ax. Ainsi, d'après la relation de Chasles, on a $\overline{PM} = \overline{PN} + \overline{NM}$, soit $\overline{NM} = \overline{PM} - \overline{PN} = (ax+b) - ax = b$. Or $\overline{OB} = b$, donc les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont égaux. Ainsi, d'après le cours de Quatrième, le quadrilatère $OBMN$ est un parallélogramme. Par conséquent, M appartient à la droite parallèle à (OA) passant par B, c'est-à-dire à Δ.



$\subset$: laissée en exercice, le lecteur pourra s'inspirer de la démonstration rédigée pour les fonctions linéaires au chapitre 12.

Seconde démonstration :

Soient $f : x \longmapsto ax + b$ et $g : x \longmapsto ax$. Pour tout nombre réel x, on constate que $f(x) = ax + b = g(x) + b$. Autrement dit, l'appartenance du point $M(x; y)$ à la courbe représentative de g est équivalente à l'appartenance du point $N(x; y + b)$ à la courbe représentative de f. Par conséquent, la courbe représentative de f est l'image de la courbe représentative de g par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ comme l'illustre la figure ci-dessous :



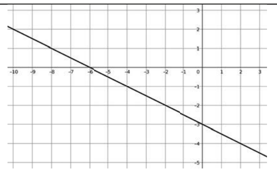
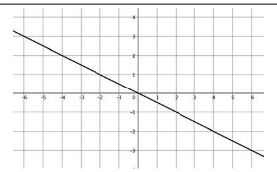
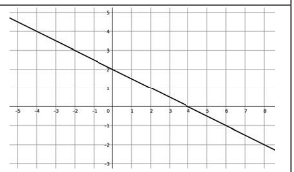
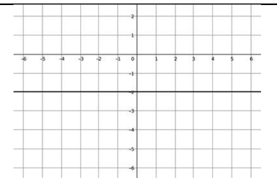
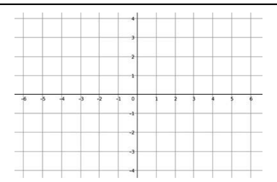
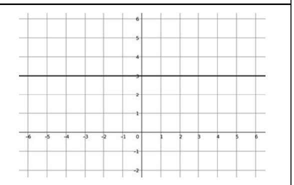
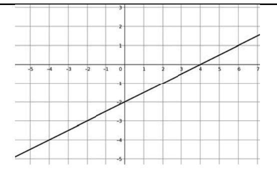
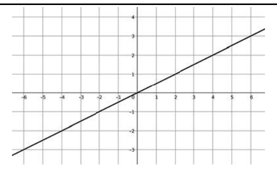
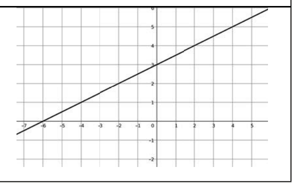
Or, d'après le cours de Quatrième, la translation envoie une droite sur une droite qui lui est parallèle. Donc la courbe représentative de f est la droite parallèle à la droite représentant la fonction g et passant le point de coordonnées $(0; b)$. $\square$

Proposition 131. *Si une droite du plan n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors elle est la courbe représentative d'une fonction affine.*

Démonstration. Laissée en exercice au lecteur qui pourra là encore s'inspirer de la démonstration rédigée pour les fonctions linéaires au chapitre 12. $\square$

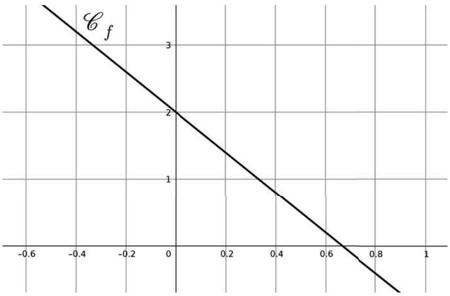
Définition 132. On dit qu'une droite a pour équation $y = ax + b$ lorsqu'elle est la courbe représentative de la fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$. Le nombre réel a est appelé le coefficient directeur de la droite et le nombre réel b est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite.

Remarque. Voici les différentes situations possibles selon les signes des coefficients a et b :

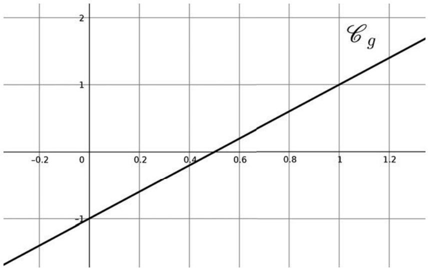
	$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$
$a < 0$			
$a = 0$			
$a > 0$			

Exemple. Voici deux exemples de courbes représentatives de fonctions affines :

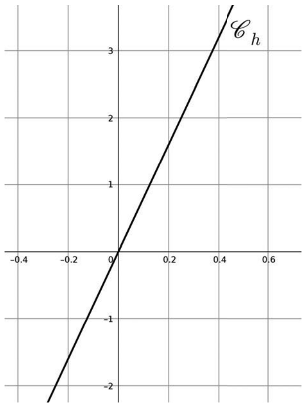
1. $f : x \longmapsto -3x + 2$:



2. $g : x \longmapsto 2x - 1$:



3. $h : x \longmapsto 8x$:



14.3 Sens de variation d'une fonction affine

Proposition 133. *Soient a et b deux nombres réels. Soit f fonction affine associée au couple $(a; b)$. On a :*

$a > 0$	x	$-\infty$	$+\infty$
	f	$\nearrow$	
$a < 0$	x	$-\infty$	$+\infty$
	f	$\searrow$	
$a = 0$	x	$-\infty$	$+\infty$
	f	$\rightarrow$	

Démonstration. Cas où $a > 0$: soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 < x_2$. Alors $ax_1 < ax_2$ car $a > 0$. D'où $ax_1 + b < ax_2 + b$, c'est-à-dire $f(x_1) < f(x_2)$.

Par définition, f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Les deux autres cas sont laissés en exercices au lecteur. $\square$

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$. Le coefficient a de f est strictement négatif, d'où son tableau de variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
f		$\searrow$	

14.4 Signe d'une fonction affine

Proposition 134. *Soient a et b deux nombres réels. Soit f la fonction affine associée au couple $(a;b)$. On a :*

$a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$a = 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de b	

Démonstration. Cas où $a > 0$:
Si $x < -\frac{b}{a}$, alors $ax < -b$ car $a > 0$. On en déduit $ax + b < 0$, c'est-à-dire $f(x) < 0$.
Si $x > -\frac{b}{a}$, alors $ax > -b$ car $a > 0$. On en déduit $ax + b > 0$, c'est-à-dire $f(x) > 0$.
Si $x = -\frac{b}{a}$, alors $ax + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$. Les deux autres cas sont laissés en exercices au lecteur.

$\square$

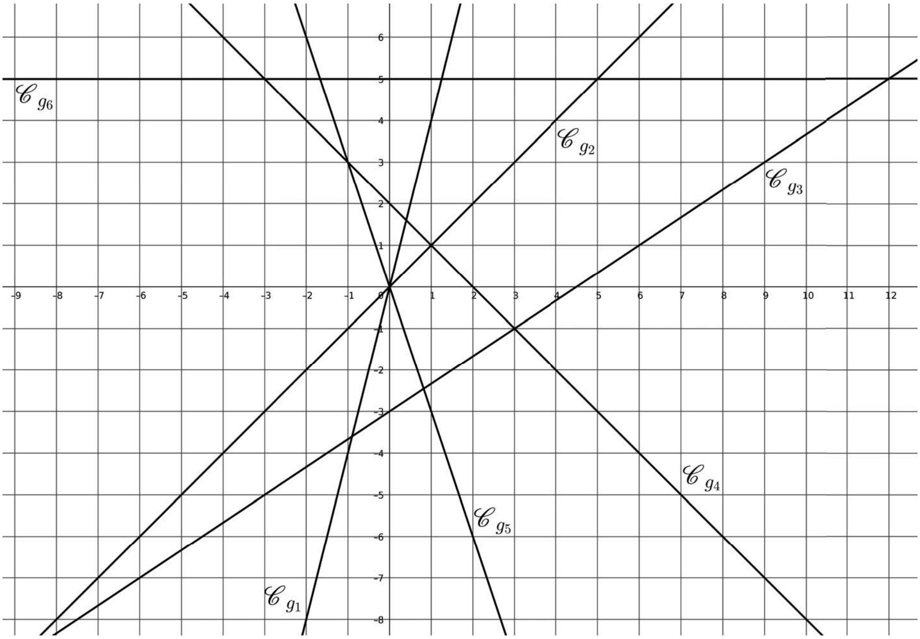
Exercice. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$.
D'une part, $-\frac{b}{a} = -\frac{1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ et d'autre part, le coefficient a est strictement négatif. Donc le tableau de signes de f est le suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

14.5 Exercices

Exercice 1

1. Soit f une fonction affine telle que $f(7) = -3$ et $f(-8) = 7$.
   (a) Calculer $f(3)$.
   (b) Déterminer les antécédents de 13 par f.
2. Déterminer la fonction sous-jacente à chacune des courbes tracées dans le repère ci-dessous :



3. Dans un repère du plan, tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

$h_1 : x \longmapsto 2x+1$	$h_2 : x \longmapsto -2x+1$	$h_3 : x \longmapsto 3x-4$
$h_4 : x \longmapsto -x-1$	$h_5 : x \longmapsto \frac{1}{3}x$	$h_6 : x \longmapsto -\frac{1}{2}x-2$

Exercice 2

Un club de poterie propose trois tarifs mensuels :
— Premier tarif : un prix fixe par heure de cours, 15 euros.
— Deuxième tarif : une carte d'adhérent à 40 euros et un prix fixe de 5 euros par heure de cours.
— Troisième tarif : un forfait illimité de 80 euros.

1. Calculer, dans chaque cas, le prix à payer pour 4 heures, 7 heures et 9 heures de cours dans un mois.

2. Soit x le nombre d'heures de cours prises à ce club en un mois par Emma. Exprimer le prix de ces cours en fonction de x pour chaque tarif.
3. Dans un même repère du plan, tracer les courbes représentatives des fonctions obtenues en 2.
4. Déterminer graphiquement, selon le nombre d'heures de cours prises en un mois, le tarif le plus avantageux.
5. Retrouver algébriquement les résultats obtenus à la question 4.

Exercice 3

Soit ABC un triangle. Soit E un point appartenant au segment $[AB]$. La droite parallèle à (BC) et passant par E coupe le segment $[AC]$ en F. En outre, $AE = 3\,\text{cm}$, $AF = 5\,\text{cm}$ et $EF = 4\,\text{cm}$. Enfin, on pose $x \coloneqq EB$.

1. Exprimer AB, AC et BC en fonction de x.
2. Dans un même repère du plan, tracer les courbes représentatives des fonctions f, g et h définies par $f(x) = x + 3$, $g(x) = \frac{5}{3}x + 5$ et $h(x) = \frac{4}{3}x + 4$.
3. Déterminer graphiquement les longueurs AB, AC et BC lorsque $x = 9\,\text{cm}$. Vérifier algébriquement.
4. Déterminer graphiquement les longueurs x, AB et AC lorsque $BC = 14\,\text{cm}$. Vérifier algébriquement.
5. Exprimer le périmètre du triangle ABC en fonction de x et représenter graphiquement ce périmètre dans un repère du plan.
6. Déterminer graphiquement le périmètre du triangle ABC lorsque $x = 2\,\text{cm}$. Vérifier algébriquement.
7. Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle le périmètre de ABC est égal à $40\,\text{cm}$. Vérifier algébriquement.

Exercice 4

Les villes de Saulxures-sur-Moselotte et de Thiéfosse sont distantes de $4\,\text{km}$. Mathieu part de Saulxures-sur-Moselotte à $8\,\text{h}$ et se dirige vers Thiéfosse à la vitesse de $6\,\text{km/h}$. À la même heure, Emelyne part de Thiéfosse en courant pour se rendre à Saulxures-sur-Moselotte à la vitesse de $10\,\text{km/h}$. Soit $M(t)$ la distance séparant Mathieu de la ville de Saulxures-sur-Moselotte au bout de t heures. Soit $E(t)$ la distance séparant Emelyne de la ville de Saulxures-sur-Moselotte au bout de t heures.

1. Déterminer les fonctions $t \longmapsto M(t)$ et $t \longmapsto E(t)$.
2. Calculer l'heure du croisement de Mathieu et Emelyne.
3. Calculer l'heure d'arrivée de Mathieu à Thiéfosse et d'Emelyne à Saulxures-sur-Moselotte.

Exercice 5

Soit f une fonction linéaire. Soit g une fonction affine. On sait que $f(2) = g(2) = 4$ et $f(3) = -g(3)$. Que vaut $g(1)$?

14.6 Corrigés

Exercice 1

1. Soient a le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine de la fonction f. On a :

$$\begin{cases} f(7) = -3 \\ f(-8) = 7 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} 7a + b = -3 \\ -8a + b = 7 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} b = -3 - 7a \\ b = 7 + 8a \qquad (*) \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{aligned} -3 - 7a &= 7 + 8a \\ -10 &= 15a \\ a &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

On en déduit b d'après $(*)$:

$$\begin{aligned} b &= 7 + 8 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \\ &= 7 - \frac{16}{3} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

(a) Calculons $f(3)$:

$$\begin{aligned} f(3) &= -\frac{2}{3} \times 3 + \frac{5}{3} \\ &= -2 + \frac{5}{3} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

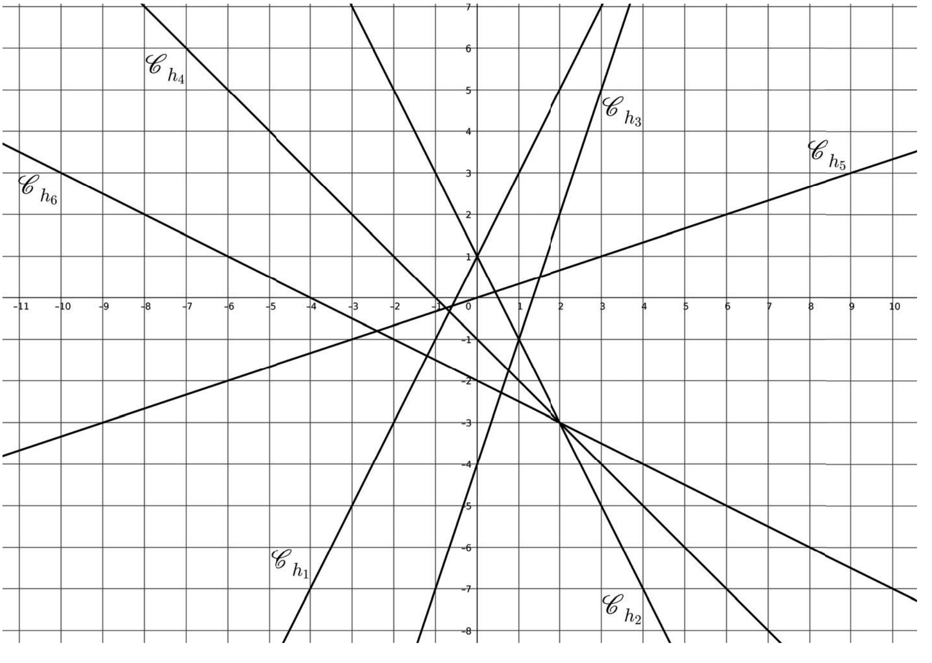
(b) Déterminons les antécédents de 13 par f :

$$\begin{aligned} f(x) &= 13 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} &= 13 \\ -\frac{2}{3}x &= \frac{39}{3} - \frac{5}{3} \\ x &= \frac{34}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ x &= -17 \end{aligned}$$

2. On a :

$g_1 : x \longmapsto 4x$	$g_2 : x \longmapsto x$	$g_3 : x \longmapsto \frac{2}{3}x - 3$
$g_4 : x \longmapsto -x + 2$	$g_5 : x \longmapsto -3x$	$g_6 : x \longmapsto 5$

3. On a :

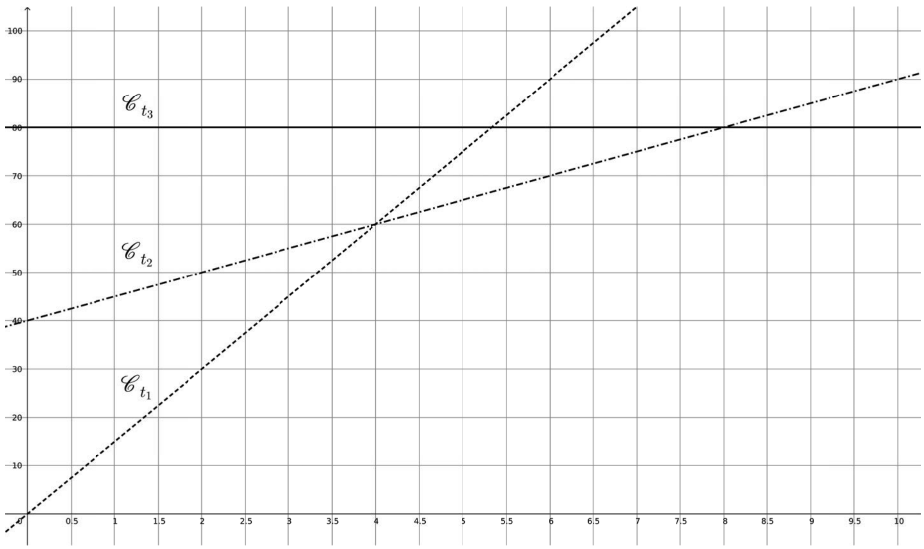


Exercice 2

1. Voici les résultats résumés dans un tableau :

Nombre d'heures	Premier Tarif	Deuxième Tarif	Troisième Tarif
4	60	60	80
7	105	75	80
9	135	85	80

2. Soit x le nombre d'heures de cours prises à ce club en un mois par Emma.
   Premier tarif : $t_1(x) = 15x$
   Deuxième tarif : $t_2(x) = 5x + 40$
   Troisième tarif : $t_3(x) = 80$
3. Voici les graphes des fonctions t_1, t_2 et t_3 :



4. Graphiquement, il semblerait que le premier tarif soit le plus avantageux pour un nombre d'heures compris entre 0 et 4, que le deuxième tarif soit le plus avantageux pour un nombre d'heures compris entre 4 et 8 et enfin que le troisième tarif soit le plus avantageux pour un nombre d'heures supérieur à 8.
5. Résolvons $t_1(x) \leqslant t_2(x)$:

$$\begin{aligned} t_1(x) &\leqslant t_2(x) \\ 15x &\leqslant 5x + 40 \\ 10x &\leqslant 40 \\ x &\leqslant 4 \end{aligned}$$

   Résolvons $t_2(x) \leqslant t_3(x)$:

CORRIGÉS

$$\begin{aligned} t_2(x) &\leqslant t_3(x) \\ 5x + 40 &\leqslant 80 \\ 5x &\leqslant 40 \\ x &\leqslant 8 \end{aligned}$$

Résolvons $t_1(x) \leqslant t_3(x)$:

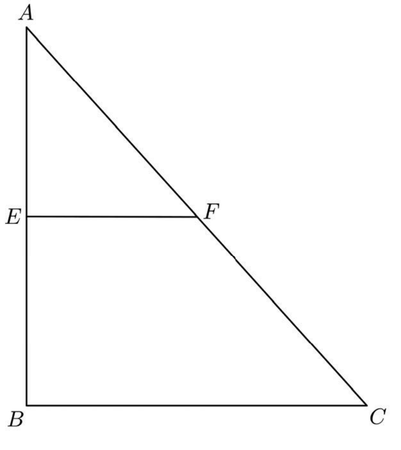
$$\begin{aligned} t_1(x) &\leqslant t_3(x) \\ 15x &\leqslant 80 \\ x &\leqslant \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Or $4 < \frac{16}{3} < 8$. D'où le tableau suivant :

Nombre d'heures	$0 \leqslant x \leqslant 4$	$4 \leqslant x \leqslant \frac{16}{3}$	$\frac{16}{3} \leqslant x \leqslant 8$	$8 \leqslant x$
Tarif le plus avantageux	Premier	Deuxième	Deuxième	Troisième
Tarif intermédiaire	Deuxième	Premier	Troisième	Deuxième
Tarif le plus onéreux	Troisième	Troisième	Premier	Premier

Exercice 3

Soit ABC un triangle. Soit E un point appartenant au segment $[AB]$. La droite parallèle à (BC) et passant par E coupe le segment $[AC]$ en F. En outre, $AE = 3\,\text{cm}$, $AF = 5\,\text{cm}$ et $EF = 4\,\text{cm}$. Enfin, on pose $x := EB$.



1. $E \in [AB]$ donc $AB = AE + EB = 3 + x$. Les droites (EB) et (FC) sont sécantes en A. Les droites (EF) et (BC) sont parallèles. Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

soit :

$$\frac{3}{3+x} = \frac{5}{AC} = \frac{4}{BC}$$

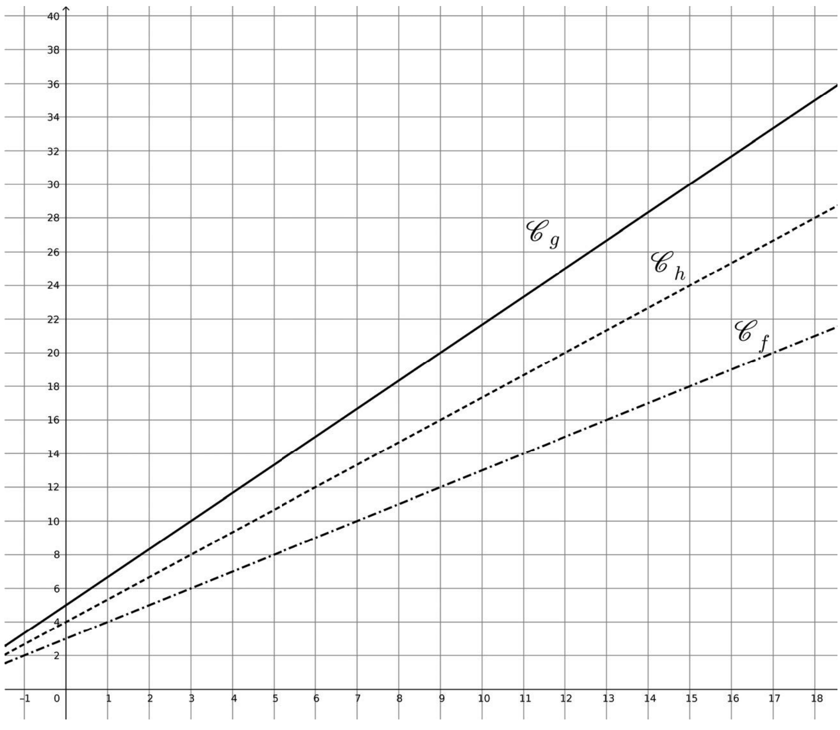
d'où :

$$\begin{cases} 3AC = 5(3+x) \\ 3BC = 4(3+x) \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} AC = \frac{15+5x}{3} = \frac{5}{3}x + 5 \\ BC = \frac{12+4x}{3} = \frac{4}{3}x + 4 \end{cases}$$

2. Voici les graphes des fonctions f, g et h définies par $f(x) = x+3$, $g(x) = \frac{5}{3}x+5$ et $h(x) = \frac{4}{3}x + 4$:



CORRIGÉS

3. Si $x = 9\,\text{cm}$, alors il semblerait que $AB = 12\,\text{cm}$, $AC = 20\,\text{cm}$ et $BC = 16\,\text{cm}$. Vérifions algébriquement :

$$\begin{aligned}
f(9) &= 9 + 3 = 12 \\
g(9) &= \frac{5}{3} \times 9 + 5 = 20 \\
h(9) &= \frac{4}{3} \times 9 + 4 = 16
\end{aligned}$$

4. Si $BC = 14\,\text{cm}$, alors il semblerait que $x = 7,5\,\text{cm}$, $AB = 10,5\,\text{cm}$ et $AC = 17,5\,\text{cm}$. Vérifions algébriquement :

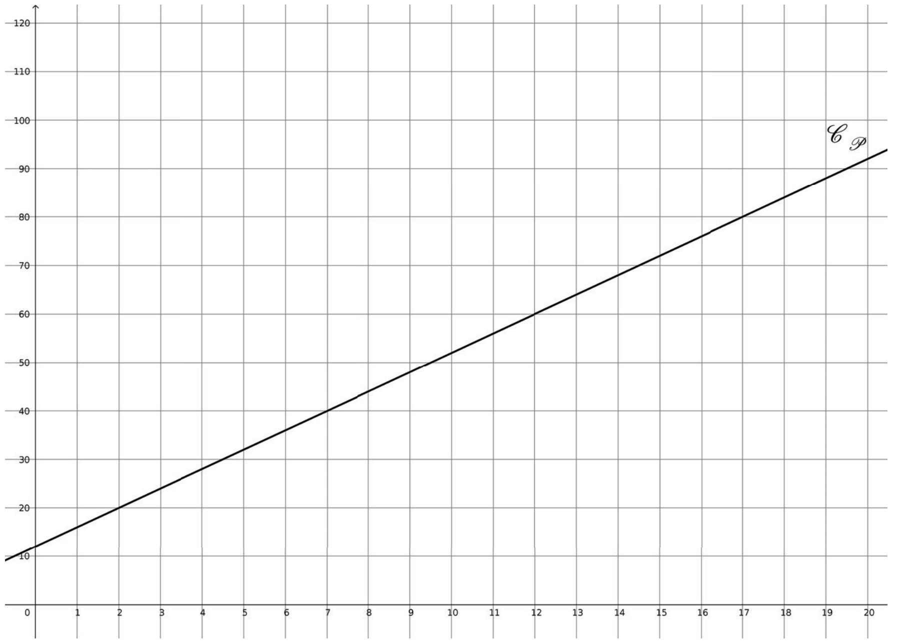
$$\begin{aligned}
h(x) &= 14 \\
\frac{4}{3}x + 4 &= 14 \\
\frac{4}{3}x &= 10 \\
x &= \frac{15}{2} \\
x &= 7,5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(7,5) &= 7,5 + 3 = 10,5 \\
g(7,5) &= \frac{5}{3} \times 7,5 + 5 = 17,5
\end{aligned}$$

5. On a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}(x) &= AB + BC + CA \\
&= x + 3 + \frac{4}{3}x + 4 + \frac{5}{3}x + 5 \\
&= 4x + 12
\end{aligned}$$

Voici le graphe de la fonction $\mathscr{P}$:



6. Si $x = 2\,\text{cm}$, alors il semblerait que le périmètre du triangle ABC soit égal à $20\,\text{cm}$. Vérifions algébriquement :

$$\mathscr{P}(2) = 4 \times 2 + 12 = 20$$

7. Graphiquement, si le périmètre de ABC est égal $40\,\text{cm}$, alors il semblerait que la longueur x soit égale à $7\,\text{cm}$. Vérifions algébriquement :

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(x) &= 40 \\ 4x + 12 &= 40 \\ 4x &= 28 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Exercice 4

1. On a $M(t) = 6t$ et $E(t) = 4 - 10t$.
2. Résolvons l'équation $M(t) = E(t)$:

$$\begin{aligned} M(t) &= E(t) \\ 6t &= 4 - 10t \\ 16t &= 4 \\ t &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{4}$h $= 15$min. Donc Mathieu et Emelyne se croisent à 8h15min.

CORRIGÉS

3. Résolvons $M(t) = 4$:

$$\begin{aligned} M(t) &= 4 \\ 6t &= 4 \\ t &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{3}$h $= 20$min. Donc Mathieu atteint Thiéfosse à 8h40min.
Résolvons $E(t) = 0$:

$$\begin{aligned} E(t) &= 0 \\ 4 - 10t &= 0 \\ 4 &= 10t \\ \frac{2}{5} &= t \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{5}$h $= 12$min. Donc Emelyne atteint Saulxures-sur-Moselotte à 8h24min.

Exercice 5

f est une fonction linéaire, donc il existe un nombre réel a tel que, pour tout nombre réel x, $f(x) = ax$. Or $f(2) = 4$, donc $2a = 4$ et par suite $a = 2$. On en déduit $g(3) = -f(3) = -6$. Par ailleurs, g est une fonction affine, donc il existe deux nombres réels b et c tels que, pour tout nombre réel x, $g(x) = bx + c$. Comme $g(2) = 4$, on a le système de deux équations suivant :

$$\begin{cases} 3b + c = -6 \\ 2b + c = 4 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} c = -3b - 6 \\ c = -2b + 4 \quad (*) \end{cases}$$

puis :

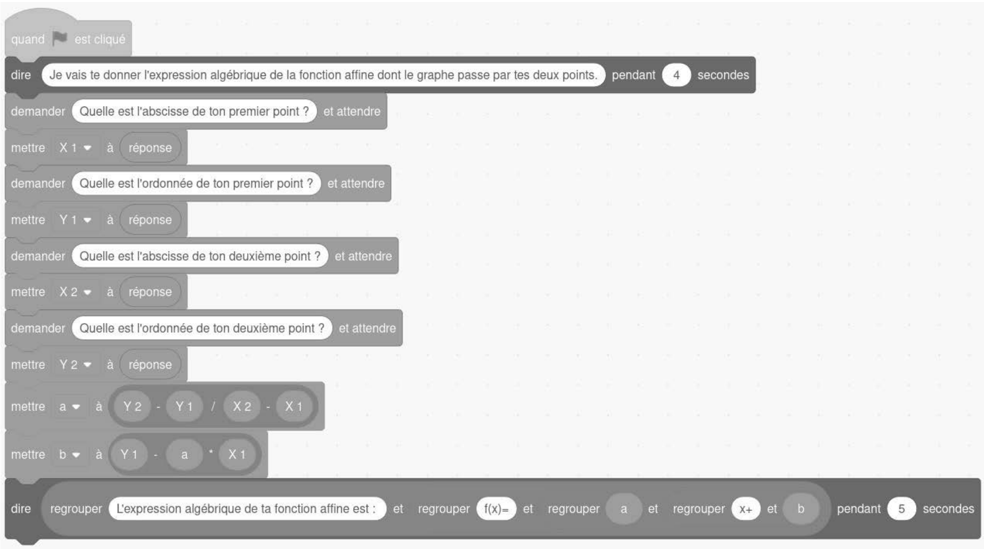
$$\begin{aligned} -3b - 6 &= -2b + 4 \\ -10 &= b \end{aligned}$$

D'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} c &= -2 \times (-10) + 4 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout nombre réel x, on a $g(x) = -10x + 24$.
En particulier, $g(1) = -10 + 24 = 14$.

Remarque. Voici un algorithme permettant de déterminer la fonction affine dont le graphe passe par deux points de coordonnées données :



15

Droites et plans dans l'espace

15.1 Positions relatives de droites et de plans dans l'espace

Ce chapitre se fonde sur les axiomes suivants :

Axiomes. *Voici les axiomes sur lesquels reposera ce chapitre :*

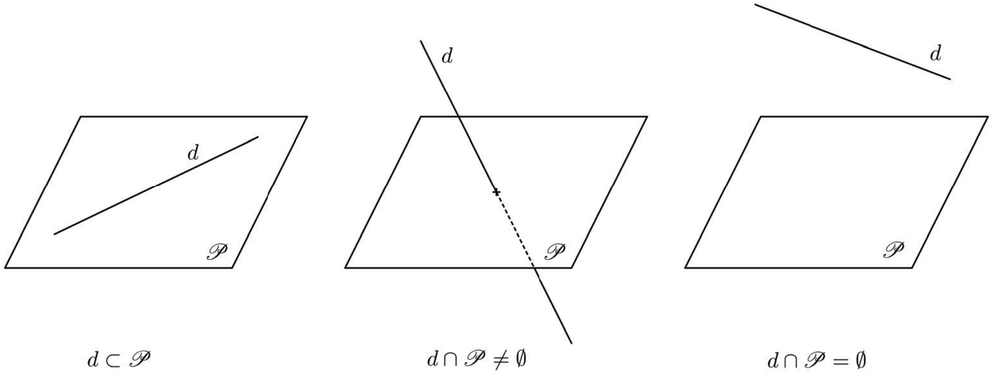
1. *Par deux points distincts A et B de l'espace, il passe une unique droite notée (AB).*
2. *Par trois points non alignés A, B et C de l'espace, il passe un unique plan noté (ABC).*
3. *Si A et B sont deux points distincts d'un plan, alors ce plan contient la droite (AB).*
4. *Tout plan $\mathscr{P}$ partage l'espace en deux demi-espaces $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ non vides tels que :*
   (a) *$\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ et $\mathscr{P}$ sont deux à deux disjoints ;*
   (b) *L'espace est la réunion de $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ et $\mathscr{P}$;*
   (c) *Si A et B sont deux points appartenant à $\mathscr{E}_1$, alors $[AB]$ est inclus dans $\mathscr{E}_1$;*
   (d) *Si A et B sont deux points appartenant à $\mathscr{E}_2$, alors $[AB]$ est inclus dans $\mathscr{E}_2$;*
   (e) *Si A et B sont deux points appartenant respectivement à $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$, alors $[AB]$ et $\mathscr{P}$ ont un unique point d'intersection.*
5. *Les grands théorèmes de géométrie plane sont vrais dans tout plan de l'espace.*

Proposition 135. *Soit d une droite et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. Les différentes positions relatives de d et $\mathscr{P}$ sont :*

1. *d est incluse dans $\mathscr{P}$.*
2. *L'intersection de d et $\mathscr{P}$ est réduite à un point.*
3. *d et $\mathscr{P}$ sont disjoints.*

Démonstration. Supposons 2. et 3. non réalisés. Alors d et $\mathscr{P}$ ont en commun deux points distincts A et B. D'après l'axiome 1, les droites d et (AB) sont confondues et, d'après l'axiome 3, d est incluse dans $\mathscr{P}$. □

Illustration :



$d \subset \mathscr{P}$ $\qquad$ $d \cap \mathscr{P} \neq \emptyset$ $\qquad$ $d \cap \mathscr{P} = \emptyset$

Définition 136. Voici deux définitions :

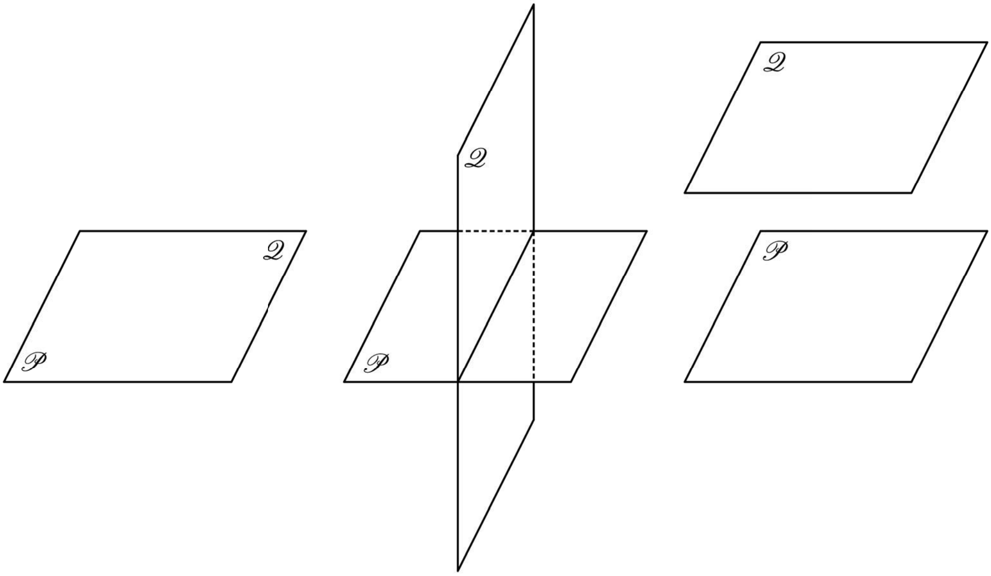
1. Une droite est dite parallèle à un plan lorsque celle-ci est incluse dans ce plan ou lorsque cette droite et ce plan sont disjoints.
2. Une droite est dite sécante à un plan en un point I lorsque l'intersection de cette droite et de ce plan est réduite au point I.

Proposition 137. *Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux plans de l'espace. Les différentes positions relatives de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont :*

1. *$\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont confondus.*
2. *L'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est une droite.*
3. *$\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont disjoints.*

Démonstration. Admise. □

Illustration :



$\mathscr{P} = \mathscr{Q}$ $\qquad$ $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q} \neq \emptyset$ $\qquad$ $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q} = \emptyset$

Définition 138. Deux plans sont dits parallèles s'ils sont confondus ou disjoints. Deux plans non parallèles sont dits sécants, leur intersection est alors une droite.

Proposition 139. *Deux droites non coplanaires (i.e. non incluses dans un même plan) sont disjointes.*

Démonstration. Soient d et d' deux droites non coplanaires. Démontrons que d et d' sont disjointes. Raisonnons par l'absurde et supposons que d et d' ont au moins un point commun I.
Premier cas : si d et d' ont un deuxième point commun J distinct de I, alors d et d' sont confondues d'après l'axiome 1 et sont à fortiori coplanaires. D'où la contradiction.
Deuxième cas : si I est l'unique point commun à d et d'. Soient J et K deux points distincts de I appartenant respectivement à d et d'. D'après l'axiome 1, les points I, J et K ne sont pas alignés. D'après l'axiome 2, les points I, J et K définissent un plan. D'après l'axiome 3, les droites d et d' sont incluses dans le plan (IJK) et sont donc coplanaires. D'où la contradiction. $\square$

Définition 140. Deux droites sont dites parallèles lorsqu'elles sont confondues ou lorsqu'elles sont coplanaires disjointes. Deux droites sont dites sécantes lorsque leur intersection est réduite à un point.

Proposition 141. *Voici quatre manières de déterminer un plan :*

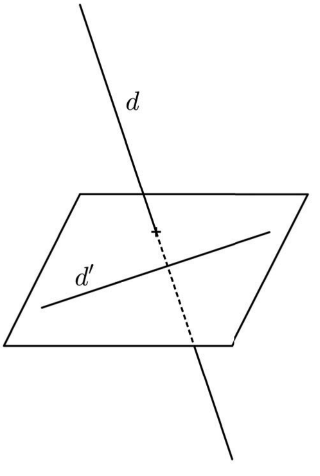
1. *Il existe un unique plan contenant trois points non alignés.*
2. *Il existe un unique plan contenant une droite et un point extérieur à cette droite.*
3. *Il existe un unique plan contenant deux droites sécantes.*
4. *Il existe un unique plan contenant deux droites strictement parallèles.*

Démonstration. 1. C'est l'axiome 2.
2. Deux points distincts de la droite et le point extérieur définissent un unique plan d'après l'axiome 2. Ce plan contient bien la droite d'après l'axiome 3.
3. On se ramène au cas précédent en choisissant sur l'une des droites un point extérieur à l'autre.
4. Résulte de la définition du parallélisme de deux droites et de 2. □

Remarque. Voici un résumé des différentes positions relatives entre droites et plans dans l'espace :

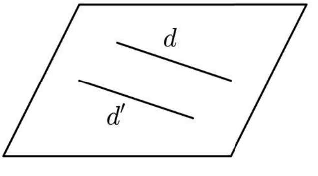
1. Soient d et d' deux droites de l'espace. Voici les trois situations possibles :

   (a) d et d' sont non coplanaires :

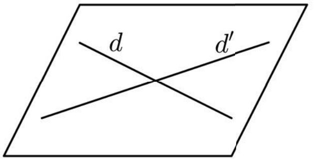


   (b) d et d' sont coplanaires :

      i. d et d' sont parallèles (on note $d//d'$) :

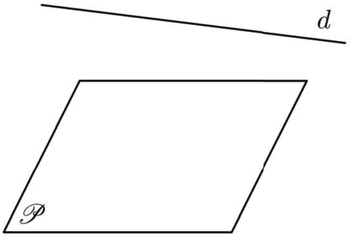


ii. d et d' sont sécantes (on note $d \cap d' \neq \emptyset$) :



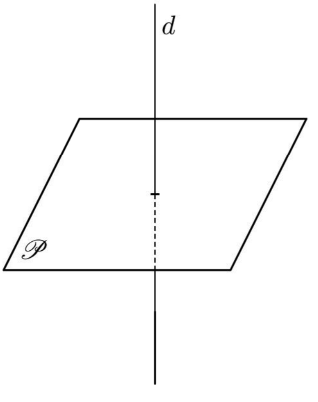
2. Soient d une droite et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. Voici les trois situations possibles :

   (a) d et $\mathscr{P}$ sont parallèles (on note $d//\mathscr{P}$) :

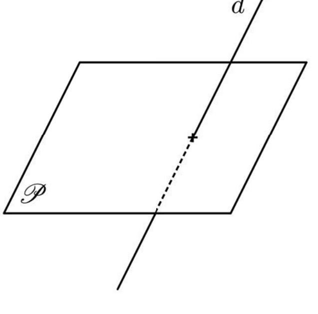


   (b) d et $\mathscr{P}$ ne sont pas parallèles (on note $d \cap \mathscr{P} \neq \emptyset$) :

      i. d et $\mathscr{P}$ sont orthogonaux :

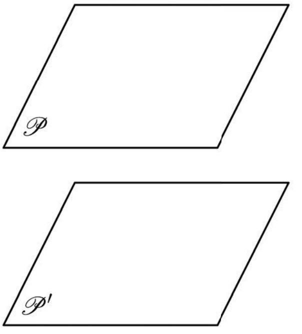


      ii. d et $\mathscr{P}$ ne sont pas orthogonaux :



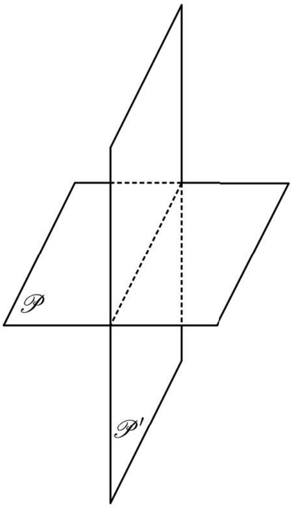
3. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de l'espace. Voici les trois situations possibles :

(a) $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}$ sont parallèles (on note $\mathscr{P}//\mathscr{P}'$) :

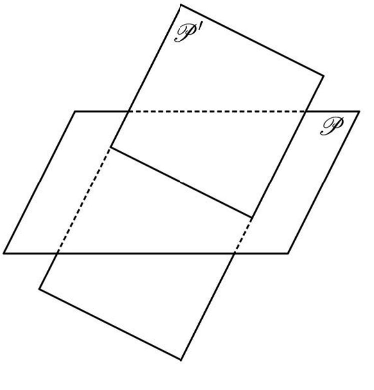


(b) $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}$ ne sont pas parallèles (on note $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' \neq \emptyset$) :

i. $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}$ sont perpendiculaires :



ii. $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}$ ne sont pas perpendiculaires :



15.2 Étude du parallélisme

15.2.1 Parallélisme de deux droites

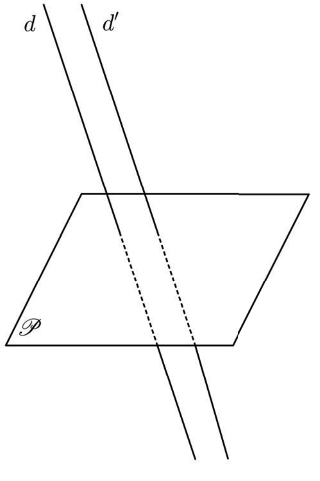
Proposition 142. *Par un point donné de l'espace, il passe une unique droite parallèle à une droite donnée.*

Démonstration. Soient A un point et d une droite de l'espace. Par définition, deux droites parallèles qui ont un point commun sont confondues, donc si $A \in d$, alors d est l'unique droite de l'espace passant par A et parallèle à d. Si $A \notin d$, alors il existe un unique plan $\mathscr{P}$ contenant A et d. Toute droite passant par A et parallèle à d sera contenue dans $\mathscr{P}$. Dans le plan $\mathscr{P}$, d'après l'axiome 5, on peut appliquer la propriété suivante : il existe une unique droite passant par A et parallèle à d. □

Proposition 143. *Si deux droites sont parallèles, alors tout plan coupant l'une coupe l'autre.*

Démonstration. Admise. □

Illustration :



Proposition 144. *Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles.*

Démonstration. Soient d_1, d_2 et d_3 trois droites de l'espace telles que $d_1 \mathbin{/\!/} d_3$ et $d_2 \mathbin{/\!/} d_3$. Démontrons que $d_1 \mathbin{/\!/} d_3$. Si deux des trois droites sont confondues, alors le résultat est évident. Supposons à présent d_1, d_2 et d_3 deux à deux distinctes. Soit A un point quelconque de d_2. Soit $\mathscr{P}$ l'unique plan contenant A et d_1.D'après la proposition précédente, si $\mathscr{P}$ coupe d_2 alors $\mathscr{P}$ coupe d_3 et d_1. Ainsi, on en déduit que d_1 et d_2 sont coplanaires. Enfin, si d_1 et d_2 étaient sécantes dans $\mathscr{P}$, alors on n'aurait pas unicité de la parallèle à une droite donnée passant par un point donné. □

15.2.2 Parallélisme d'une droite et d'un plan

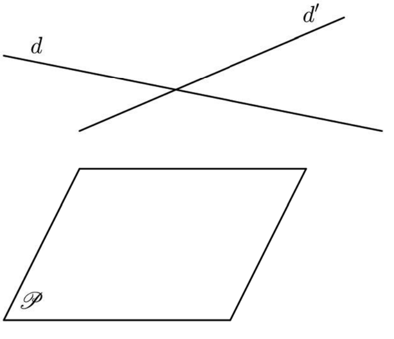
Proposition 145. *Soient d une droite et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. d et $\mathscr{P}$ sont parallèles si, et seulement si, il existe dans $\mathscr{P}$ une droite parallèle à d.*

Démonstration. Si d est incluse dans $\mathscr{P}$, alors c'est évident. Supposons à présent que d ne soit pas incluse dans $\mathscr{P}$.
$\Leftarrow$: supposons que $\mathscr{P}$ contient une droite Δ parallèle à d. Démontrons que d est parallèle à $\mathscr{P}$. Le plan $\mathscr{P}'$ contenant d et Δ est sécant à $\mathscr{P}$ et l'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ est la droite Δ. Ainsi, si d et $\mathscr{P}$ avaient un point commun, alors celui-ci appartiendrait à Δ. Mais alors d et Δ ne seraient pas parallèles.
$\Rightarrow$: supposons d parallèle à $\mathscr{P}$. Démontrons que $\mathscr{P}$ contient une droite Δ parallèle à d. Soit A un point quelconque de $\mathscr{P}$. Soit $\mathscr{P}'$ le plan contenant d et A. Alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants. Soit Δ leur droite d'intersection. On démontre alors aisément que d et Δ sont disjointes. $\square$

Proposition 146. *Soient d une droite et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. Si d est parallèle à $\mathscr{P}$, alors toute droite parallèle à d est parallèle à $\mathscr{P}$.*

Démonstration. Soit d' une droite parallèle à d. D'après la proposition précédente, le plan $\mathscr{P}$ contient une droite Δ parallèle à d. D'après la proposition 144, Δ est parallèle à d'. Enfin, d'après la proposition précédente, d' est parallèle à $\mathscr{P}$. $\square$

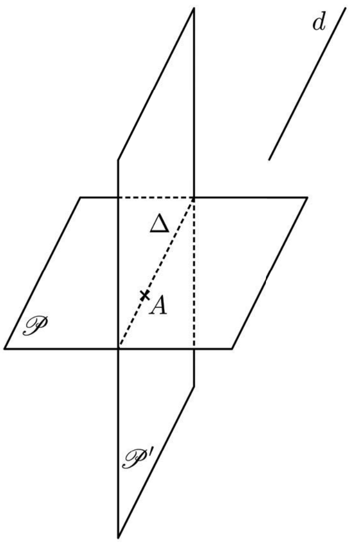
Remarque. La réciproque est fausse. Deux droites parallèles à un plan ne sont pas nécessairement parallèles.
Exemple : sur la figure ci-dessous, les droites d et d' sont parallèles au plan $\mathscr{P}$ mais d n'est pas parallèle à d'.



Proposition 147. *Une droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur droite d'intersection.*

Démonstration. Soit d une droite parallèle à deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sécants selon la droite Δ. Démontrons que d est parallèle à Δ. Soit $A \in \Delta$. La droite parallèle à d passant par A est incluse dans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. Il s'agit donc de Δ. Ainsi, d est parallèle à Δ. $\square$

Illustration :



15.2.3 Parallélisme de deux plans

Proposition 148. *Deux plans sont parallèles si, et seulement si, l'un contient deux droites parallèles à l'autre et sécantes entre elles.*

Démonstration. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans. Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus, alors c'est évident. Supposons dorénavant $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ distincts.
$\Rightarrow$: si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles, alors on démontre aisément que deux droites sécantes quelconques de $\mathscr{P}$ sont parallèles à $\mathscr{P}'$.
$\Leftarrow$: si $\mathscr{P}$ contient deux droites sécantes entre elles et parallèles à $\mathscr{P}'$, alors on raisonne par l'absurde en supposant $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sécants suivant une droite d' puis l'on démontre que les deux droites sécantes sont parallèles à d'. $\square$

Proposition 149. *Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.*

Démonstration. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans parallèles à un plan $\mathscr{P}''$. Soient d et Δ deux droites sécantes incluses dans $\mathscr{P}''$. Démontrons que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles. Raisonnons par l'absurde. Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ étaient sécants, alors les droites d et Δ seraient parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans et donc parallèles entre elles d'après la proposition 144. D'où la contradiction avec le fait qu'elles sont sécantes. $\square$

Proposition 150. *Par un point donné de l'espace, il passe un unique plan parallèle à un plan donné.*

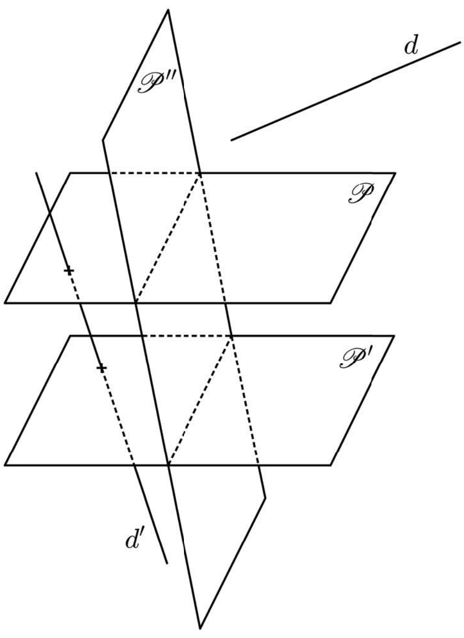
Démonstration. Soient $\mathscr{P}$ un plan et A un point de l'espace. Soient d et Δ deux droites incluses dans $\mathscr{P}$. Soient d' et Δ' les droites respectivement parallèles à d et Δ et passant par A. d' et Δ' sont sécantes en A. Le plan $\mathscr{P}'$ déterminé par les droites d' et Δ' contient A et deux droites sécantes parallèles à $\mathscr{P}$. Donc $\mathscr{P}'$ est parallèle à $\mathscr{P}$. Il reste à démontrer que $\mathscr{P}'$ est unique. Soit $\mathscr{P}''$ un plan passant par A et parallèle à $\mathscr{P}$. $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}''$ sont parallèles d'après la proposition précédente. Ayant le point A en commun, ils sont confondus. Ainsi $\mathscr{P}'$ est unique. □

Proposition 151. *Si deux plans sont parallèles, alors :*

1. *tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles ;*
2. *toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre ;*
3. *toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.*

Démonstration. Laissée en exercice au lecteur. □

Illustration :

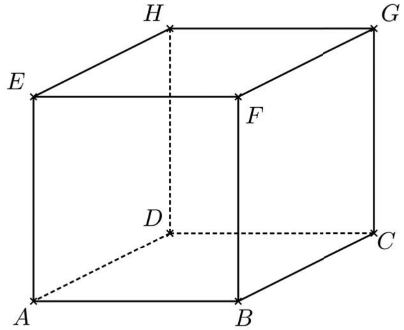


15.3 Étude de l'orthogonalité

15.3.1 Orthogonalité de deux droites

Définition 152. Deux droites sont dites orthogonales lorsque, un point de l'espace étant choisi, les parallèles à ces droites passant par ce point sont perpendiculaires. Si les droites d et d' sont orthogonales, alors on note $d \perp d'$.

Exemple. Considérons le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous :



Les droites (EF) et (GC) sont orthogonales car elles sont respectivement parallèles aux droites (AB) et (FB), lesquelles sont perpendiculaires car le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

Remarque. Deux droites perpendiculaires sont orthogonales ET sécantes.

Proposition 153. *Voici deux résultats qui généralisent ceux vus dans le plan :*

1. *Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre. Plus formellement :*

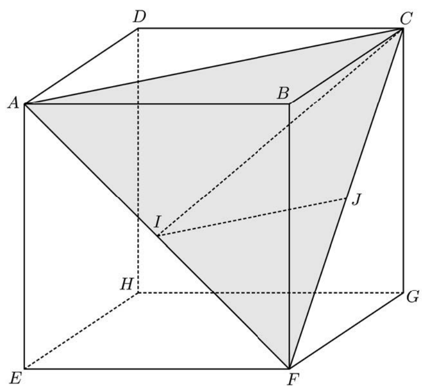
$$\begin{cases} d \perp d' \\ d''//d \end{cases} \Rightarrow d'' \perp d'$$

2. *Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre. Plus formellement :*

$$\begin{cases} d//d' \\ d'' \perp d \end{cases} \Rightarrow d'' \perp d'$$

Démonstration. Ces deux résultats découlent directement de la définition 152. □

Exemple. Soit $ABCDEFGH$ un cube. Soient I et J les milieux respectifs des segments $[AF]$ et $[CF]$.



La droite (CI) est une médiane du triangle équilatéral ACF donc $(CI) \perp (AF)$. La droite (IJ) est une droite des milieux donc, d'après le cours de Quatrième, $(IJ)//(AC)$. D'où les implications suivantes :

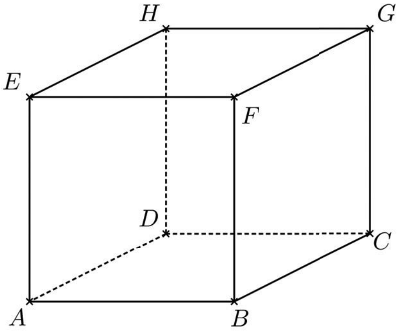
$$\begin{cases} (CI) \perp (AF) \\ (AF)//(DG) \text{ (à démontrer)} \end{cases} \Rightarrow (CI) \perp (DG)$$

$$\begin{cases} (AC) \perp (BD) \\ (IJ)//(AC) \text{ (à démontrer)} \end{cases} \Rightarrow (IJ) \perp (BD)$$

Remarque. Attention, deux droites peuvent être orthogonales à une même troisième sans être parallèles. Plus formellement :

$$\begin{cases} d \perp d'' \\ d' \perp d'' \end{cases} \not\Rightarrow \quad d//d'$$

Exemple : considérons le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous :



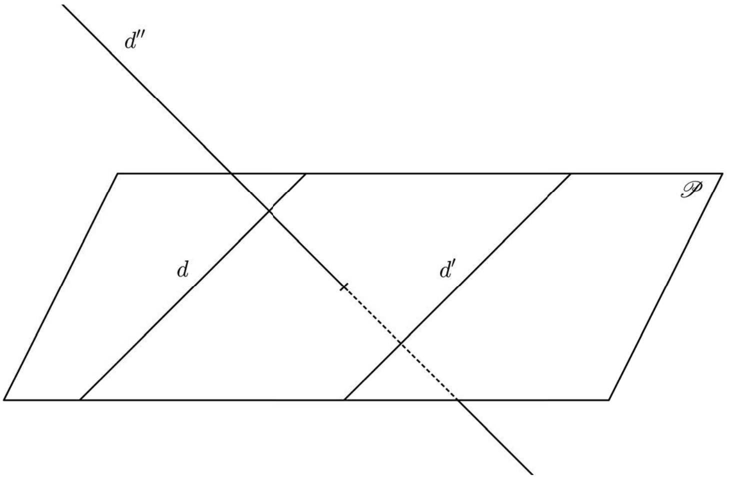
Les droites (FB) et (HG) sont toutes les deux orthogonales à la droite (EH) et pourtant elles ne sont pas parallèles.

15.3.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition 154. Une droite et un plan sont dits orthogonaux si la droite est orthogonale à deux droites sécantes incluses dans le plan. Si la droite d est orthogonale au plan $\mathscr{P}$, alors on note $d \perp \mathscr{P}$.

Remarque. Attention, une droite peut être orthogonale à deux droites parallèles incluses dans un plan sans être orthogonale à ce plan.

Exemple : sur la figure ci-dessous, $d'' \perp d$, $d'' \perp d'$, $d//d'$ mais la droite d'' n'est pas orthogonale au plan $\mathscr{P}$.



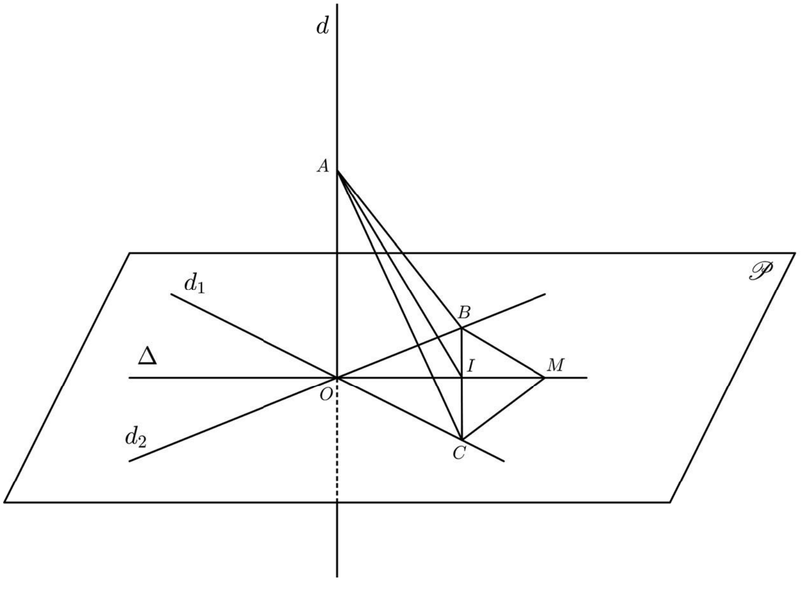
Proposition 155. *Voici deux résultats qui généralisent ceux vus dans le plan :*

1. *Étant donné un point A et un plan $\mathscr{P}$, il existe une unique droite passant par A et orthogonale à $\mathscr{P}$.*
2. *Étant donné un point A et un droite d, il existe un plan passant par A et orthogonal à d.*

Démonstration. Admise. □

Proposition 156. *Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite incluse dans ce plan.*

Démonstration. Soit d une droite orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ en un point O.



La droite d est donc orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 incluses dans $\mathscr{P}$. Supposons, sans perdre en généralité, que ces deux droites passent par O. En effet, si elles sont sécantes en un point distinct de O, les parallèles à ces droites passant par O sont également incluses dans le plan $\mathscr{P}$. Afin de démontrer que d est orthogonale à toute droite incluse dans $\mathscr{P}$, il suffit de démontrer que d est perpendiculaire à toute droite Δ incluse dans $\mathscr{P}$ et passant par O.
Soit Δ une droite incluse dans $\mathscr{P}$, passant par O et distincte de d_1 et d_2. Soit M un point appartenant à la droite Δ distinct de O. Soit A un point appartenant à la droite d distinct de O. Soient B et C les points appartenant respectivement à d_1 et d_2 tels que le quadrilatère $OBMC$ est un parallélogramme. Soit I le centre de ce parallélogramme. D'après le théorème de la médiane (démontré dans l'exercice 5 du chapitre 3) dans le triangle ABC, on a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

D'après le théorème de Pythagore dans les rectangles OAB et OAC rectangles en O, on a :

$$\begin{cases} AB^2 = OA^2 + OB^2 \\ AC^2 = OA^2 + OC^2 \end{cases}$$

d'où :

$$OA^2 + OB^2 + OA^2 + OC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

soit :

$$2OA^2 + OB^2 + OC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

Or, d'après le théorème de la médiane dans le triangle OBC, on a :

$$OB^2 + OC^2 = 2OI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

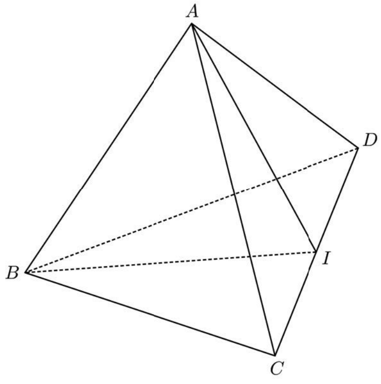
Par conséquent :

$$\begin{aligned} 2OA^2 + 2OI^2 + \cancel{\frac{1}{2}BC^2} &= 2AI^2 + \cancel{\frac{1}{2}BC^2} \\ 2OA^2 + 2OI^2 &= 2AI^2 \\ OA^2 + OI^2 &= AI^2 \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAM est rectangle en O. Autrement dit, la droite d est perpendiculaire à la droite Δ.

□

Exemple. Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier. Démontrons que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.



Soit I le milieu du segment $[CD]$. Les droites (AI) et (BI) sont perpendiculaires à la droite (CD) car elles sont des médianes respectives des triangles équilatéraux ACD et BCD. D'après la définition 154, la droite (CD) est donc orthogonale au plan (ABI). Par conséquent, d'après la proposition 156, la droite (CD) est orthogonale à toute droite incluse dans le plan (ABI), en particulier à la droite (AB).

Proposition 157. *Voici quelques propriétés de l'orthogonalité d'une droite et d'un plan :*

1. *Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre. Plus formellement :*

$$\begin{cases} d \perp \mathscr{P} \\ d // d' \end{cases} \Rightarrow \mathscr{P} \perp d'$$

2. *Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre. Plus formellement :*

$$\begin{cases} d \perp \mathscr{P} \\ \mathscr{P} // \mathscr{P}' \end{cases} \Rightarrow d \perp \mathscr{P}'$$

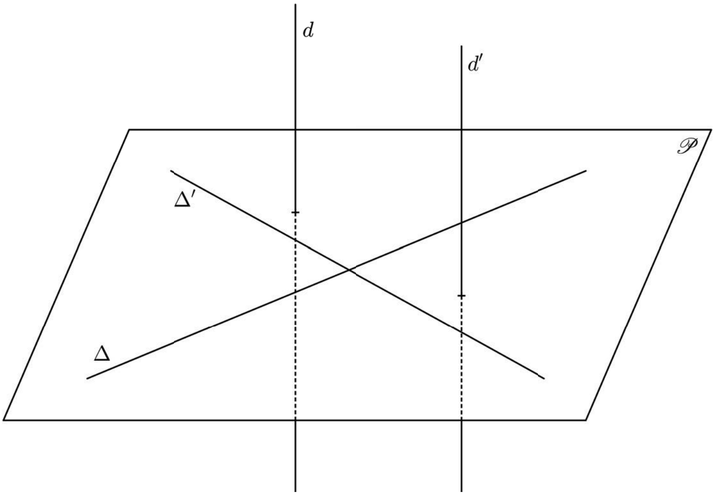
3. *Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles. Plus formellement :*

$$\begin{cases} d \perp \mathscr{P} \\ d' \perp \mathscr{P} \end{cases} \Rightarrow d // d'$$

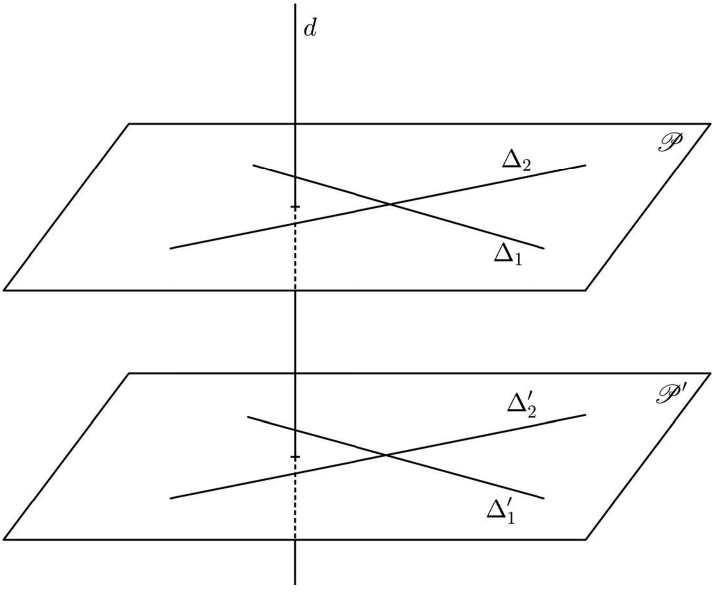
4. *Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles. Plus formellement :*

$$\begin{cases} d \perp \mathscr{P} \\ d \perp \mathscr{P}' \end{cases} \Rightarrow \mathscr{P} // \mathscr{P}'$$

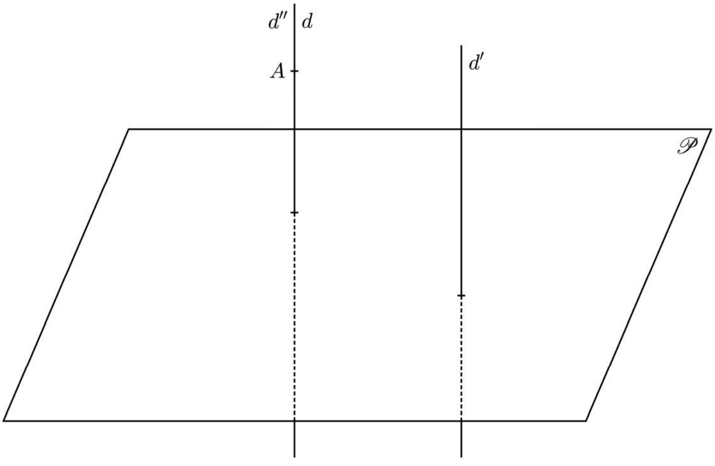
Démonstration. 1. Soit d une droite orthogonale au plan $\mathscr{P}$. Soit d' une droite parallèle à la droite d.



Par définition, la droite d est orthogonale à deux droites sécantes Δ et Δ' incluses dans $\mathscr{P}$. Comme d' est parallèle à d, d'après la proposition 153, elle est aussi orthogonale à Δ et Δ'. Par définition, d' est donc orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
2. Soit d une droite orthogonale au plan $\mathscr{P}$. Par définition, elle est orthogonale à deux droites sécantes Δ_1 et Δ_2 incluses dans le plan $\mathscr{P}$.

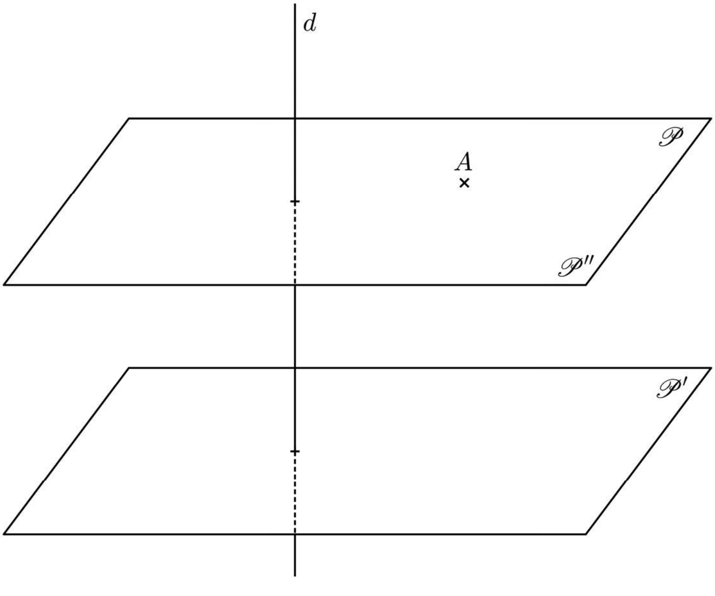


Soit $\mathscr{P}'$ un plan parallèle au plan $\mathscr{P}$. Alors il existe deux droites Δ'_1 et Δ'_2 incluses dans le plan $\mathscr{P}'$ et respectivement parallèles à Δ_1 et Δ_2. Par conséquent, d'après la proposition 156, la droite d est orthogonale aux droites Δ'_1 et Δ'_2. Par définition, la droite d est donc orthogonale au plan $\mathscr{P}'$.
3. Soient d et d' deux droites orthogonales à un plan $\mathscr{P}$. Soit A un point appartenant à la droite d. Soit d'' la droite passant par A et parallèle à d'.



D'après le premier point, la droite d'' est orthogonale au plan $\mathscr{P}$. Or, d'après la proposition 155, il existe une unique droite passant par A et orthogonale au plan $\mathscr{P}$. Par conséquent, les droites d et d'' sont confondues et par suite, la droite d est parallèle à la droite d'.

4. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans orthogonaux à une même droite d. Soit A un point appartenant au plan $\mathscr{P}$. Soit $\mathscr{P}''$ le plan passant par A et parallèle au plan $\mathscr{P}'$.



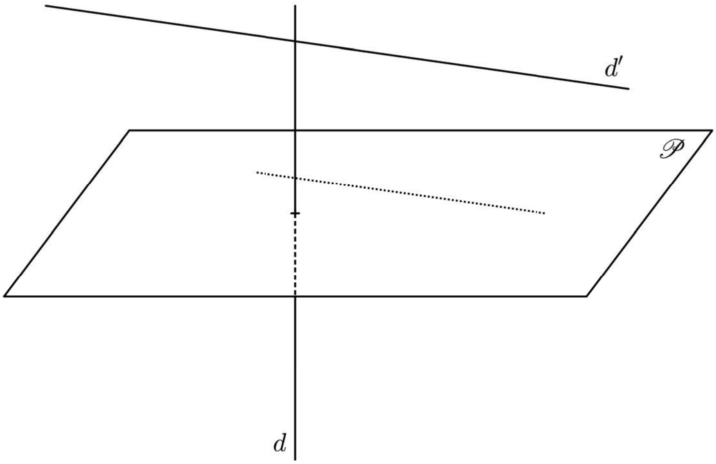
D'après le deuxième point, le plan $\mathscr{P}''$ est orthogonal à la droite d. Or, d'après la proposition 155, il existe un unique plan passant par A et orthogonal à la droite d. Par conséquent, les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus et par suite, le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}'$. $\square$

Proposition 158. *Si une droite est orthogonale à un plan, alors toute orthogonale à la première est parallèle au plan. Plus formellement :*

$$\begin{cases} d \perp \mathscr{P} \\ d' \perp d \end{cases} \Rightarrow d'//\mathscr{P}$$

Démonstration. Admise. □

Illustration :



Remarque. Nous pouvons formuler trois remarques :

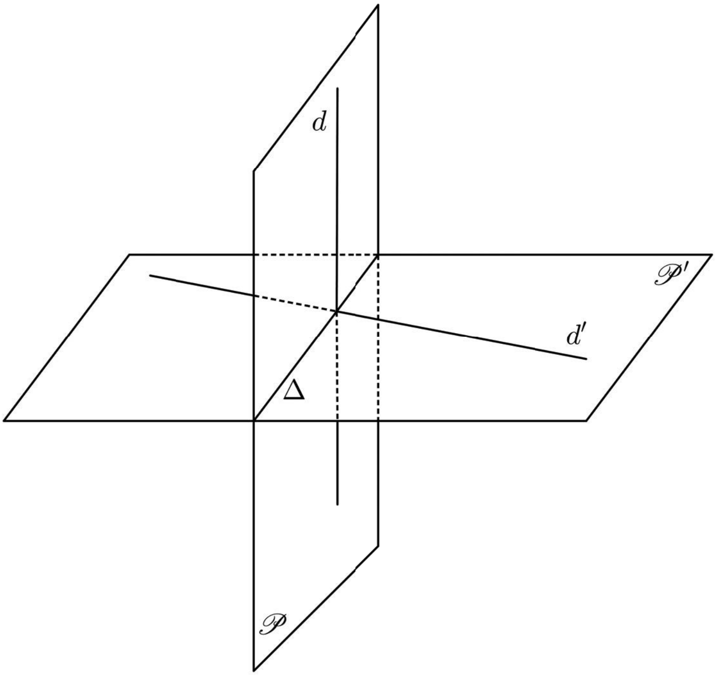
1. Pour démontrer que deux droites sont orthogonales, il suffit de démontrer que l'une d'elles est orthogonale à un plan contenant l'autre.
2. Pour démontrer que deux droites sont parallèles, il suffit de démontrer qu'elles sont orthogonales à un même plan.
3. Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de démontrer qu'ils sont orthogonaux à une même droite.

15.3.3 Orthogonalité de deux plans

Définition 159. Deux plans sont dits perpendiculaires si l'un d'entre eux contient une droite orthogonale à l'autre. Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ désignent deux plans perpendiculaires, alors on note $\mathscr{P} \perp \mathscr{P}'$.

Remarque. Deux plans perpendiculaires sont nécessairement sécants.

Illustration :



Proposition 160. *Si une droite d est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$, alors tout plan parallèle à d est perpendiculaire à $\mathscr{P}$. Plus formellement :*

$$\begin{cases} d \perp \mathscr{P} \\ \mathscr{P}''//d \end{cases} \Rightarrow \mathscr{P}' \perp \mathscr{P}$$

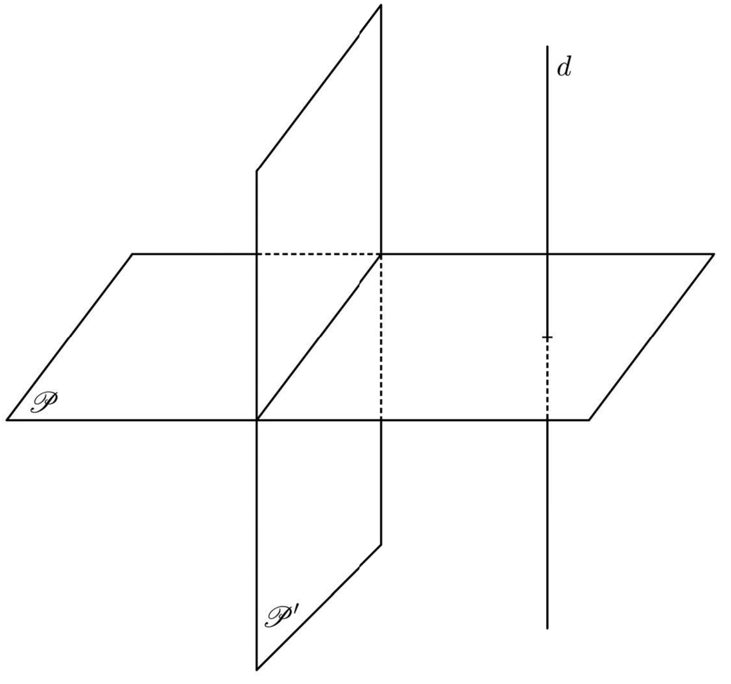
Démonstration. Ce résultat découle directement de la définition 157. □

Proposition 161. *Si deux plans sont perpendiculaires, alors toute droite orthogonale à l'un est parallèle à l'autre. Plus formellement :*

$$\begin{cases} \mathscr{P} \perp \mathscr{P}' \\ d \perp \mathscr{P} \end{cases} \Rightarrow d//\mathscr{P}'$$

Démonstration. Ce résultat découle directement de la définition 157. □

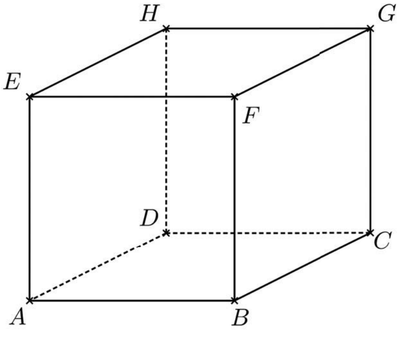
Illustration :



Remarque. Attention, si deux plans sont perpendiculaires, une droite parallèle à l'un n'est pas nécessairement orthogonale à l'autre. Plus formellement :

$$\begin{cases} \mathscr{P} \perp \mathscr{P}' \\ d // \mathscr{P} \end{cases} \quad \not\Rightarrow \quad d \perp \mathscr{P}'$$

Exemple : considérons le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous :

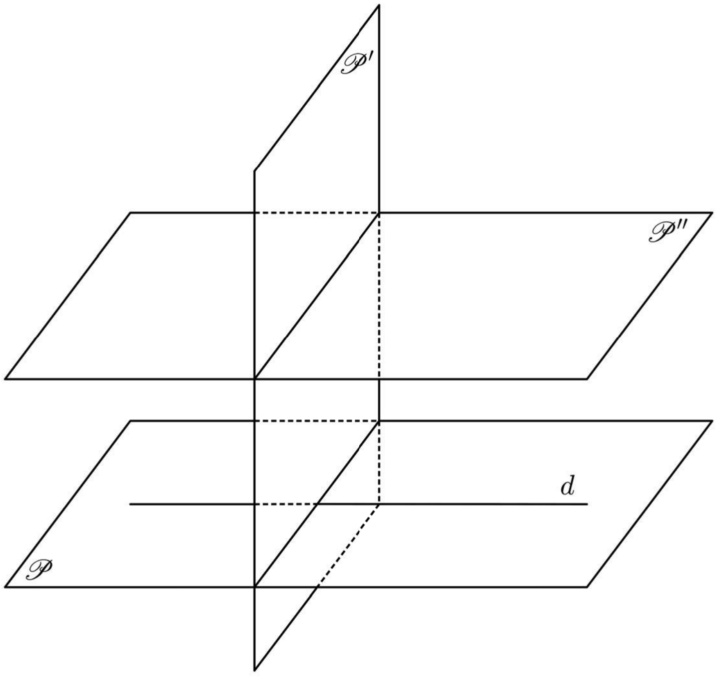


Les plans (HEF) et (HED) sont perpendiculaires. La droite (BC) est parallèle au plan (HEF) mais elle n'est pas orthogonale au plan (HED).

Proposition 162. *Si deux plans sont perpendiculaires, alors tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre. Plus formellement :*

$$\begin{cases} \mathscr{P} \perp \mathscr{P}' \\ \mathscr{P}''//\mathscr{P} \end{cases} \Rightarrow \mathscr{P}'' \perp \mathscr{P}'$$

Démonstration. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans perpendiculaires. Soit $\mathscr{P}''$ un plan parallèle à $\mathscr{P}$.



Alors $\mathscr{P}$ contient une droite d orthogonale à $\mathscr{P}'$. Le plan $\mathscr{P}''$, parallèle à $\mathscr{P}$, est donc parallèle à d. Ainsi, d'après la proposition 160, $\mathscr{P}''$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}'$.

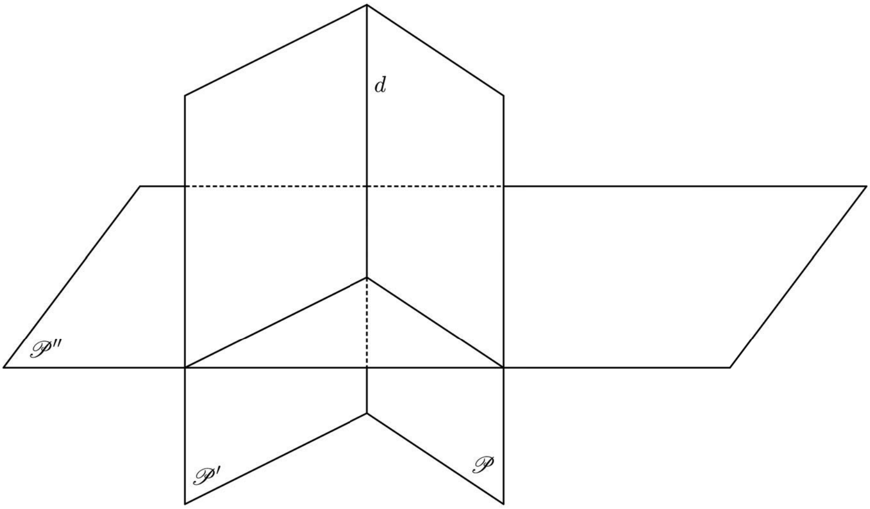
□

Remarque. Nous pouvons effectuer trois remarques :

1. La proposition précédente peut également s'énoncer de la façon suivante : « Si deux plans sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre. ».
2. Attention, deux plans perpendiculaires à un même plan ne sont pas nécessairement parallèles entre eux.
3. Pour démontrer que deux plans sont perpendiculaires, on peut :
   (a) trouver une droite incluse dans l'un qui est orthogonale à l'autre ;
   (b) trouver une droite parallèle à l'un qui est orthogonale à l'autre ;
   (c) trouver un plan parallèle à l'un qui est perpendiculaire à l'autre.

Proposition 163. *Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si, et seulement si, il est orthogonal à leur droite d'intersection.*

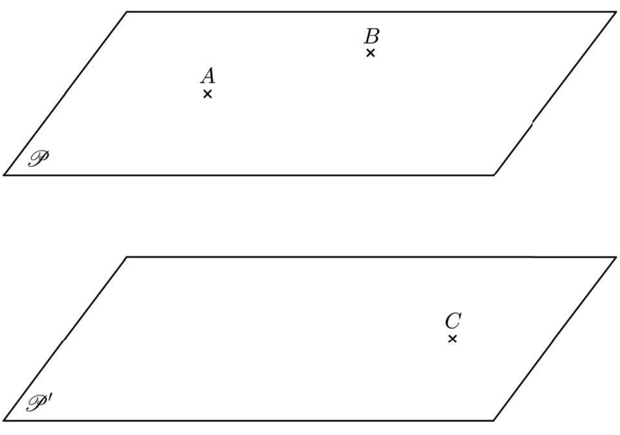
Démonstration. $\Rightarrow$: soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans sécants selon la droite d.



Soit $\mathscr{P}''$ un plan orthogonal à la droite d. Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite d orthogonale à $\mathscr{P}''$. Donc, par définition, le plan $\mathscr{P}''$ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. De la même façon, on démontre que le plan $\mathscr{P}''$ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}'$.
$\Leftarrow$: soit $\mathscr{P}''$ un plan perpendiculaire aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. Alors, d'après la proposition 161, toute droite orthogonale à $\mathscr{P}''$ est parallèle aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, donc à leur droite d'intersection d d'après la proposition 147. □

15.4 Exercices

Exercice 1

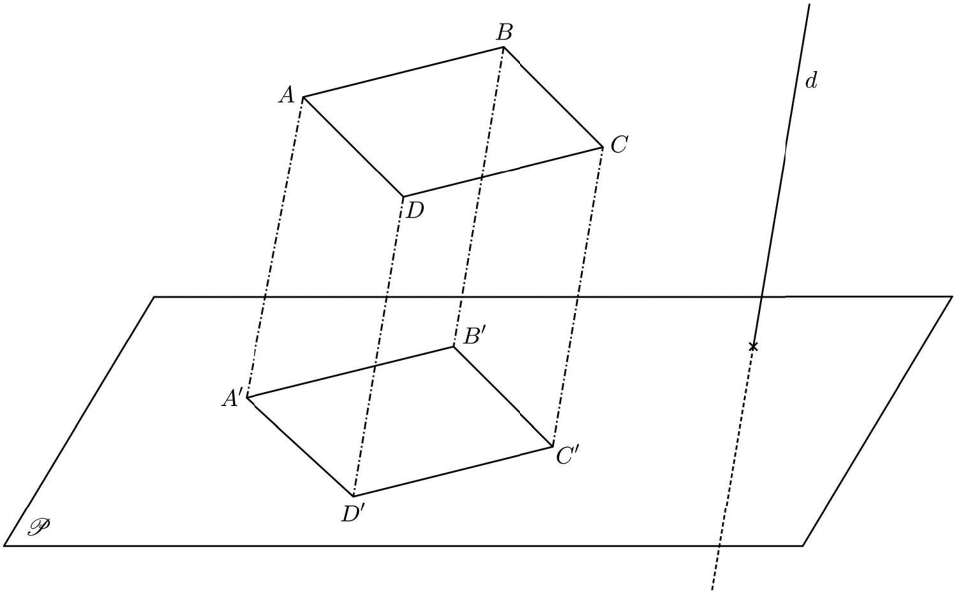


Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans strictement parallèles. Soient A et B deux points distincts appartenant au plan $\mathscr{P}$. Soit C un point appartenant au plan $\mathscr{P}'$.

1. Démontrer que les plans (ABC) et $\mathscr{P}$' sont sécants et déterminer leur droite d'intersection Δ.
2. Soit D un point appartenant à la droite Δ distinct de C et tel que les droites (BD) et (AC) sont sécantes en un point H. Soit K un appartenant au plan $\mathscr{P}'$ mais n'appartenant pas à la droite Δ. Démontrer que la droite (HK) est sécante au plan $\mathscr{P}$ en un point I n'appartenant pas à la droite (AB).
3. Démontrer que les droites (AI) et (KC) d'une part, (KD) et (BI) d'autre part, sont parallèles.

Exercice 2

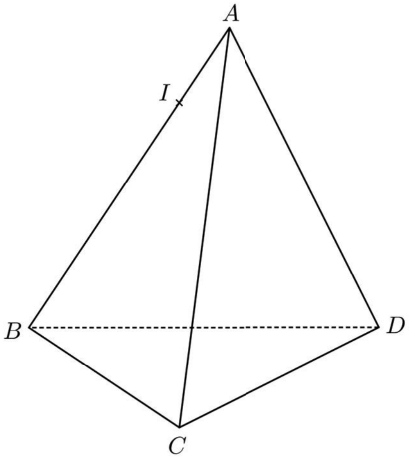
Soient $\mathscr{P}$ un plan, d une droite sécante à $\mathscr{P}$ et $ABCD$ un parallélogramme dont les sommets n'appartiennent pas à $\mathscr{P}$ et tel que la droite d soit sécante au plan (ABC). Les droites parallèles à d passant par A, B, C et D coupent le plan $\mathscr{P}$ respectivement en A', B', C' et D'.



1. Démontrer que les points A', B', C' et D' ne sont pas alignés.
2. Étudier la position relative des plans (ABA') et (CDC') puis celle des plans (ADA') et (BCB').
3. En déduire que le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

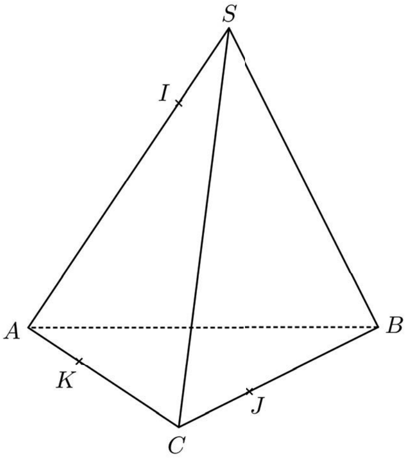
Exercice 3

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Soit I un point appartenant à l'arête $[AB]$, distinct de A et B.



1. Démontrer qu'il existe un unique plan $\mathscr{P}$ passant par I et parallèle aux droites (BD) et (AC).
2. Construire les points d'intersection respectifs J, K et L du plan $\mathscr{P}$ avec les droites (AD), (BC) et (CD).
3. Démontrer que le quadrilatère $IJLK$ est un parallélogramme.

Exercice 4

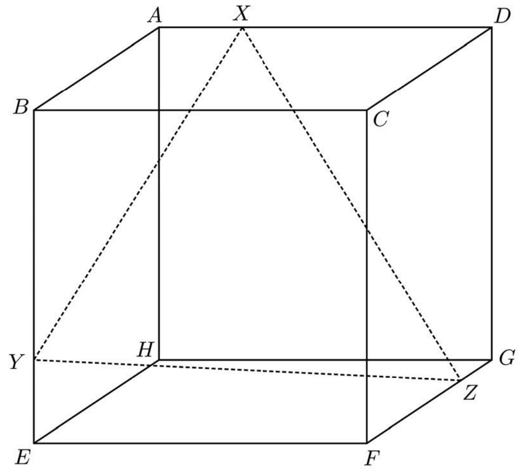


Soit $SABC$ un tétraèdre. Soient I, J et K trois points appartenant respectivement aux arêtes $[SA]$, $[BC]$ et $[AC]$ tels que la droite (JK) n'est pas parallèle à la droite (AB).

1. Démontrer que les points I, J et K définissent un plan $\mathscr{P}$ sécant aux plans contenant les faces du tétraèdre.
2. Construire sur la perspective cavalière ci-dessus la section plane du tétraèdre par le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 5

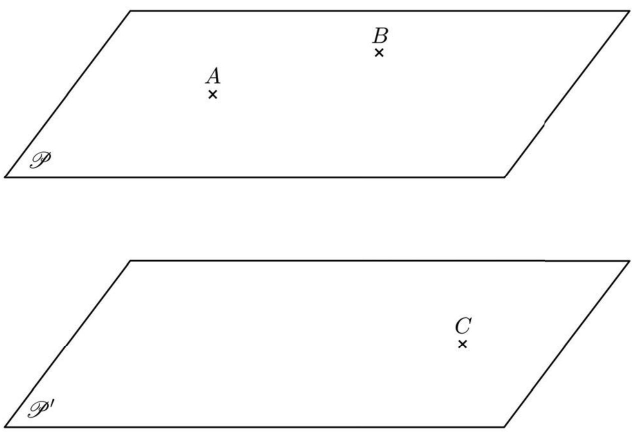
Soit $ABCD$ un cube d'arête 3 cm. Soit X un point appartenant à l'arête $[AD]$ tel que $AX = 1$ cm. Soit Y un point appartenant à l'arête $[BE]$ tel que $EY = 1$ cm. Soit Z un point appartenant à l'arête $[FG]$ tel que $GZ = 1$ cm.



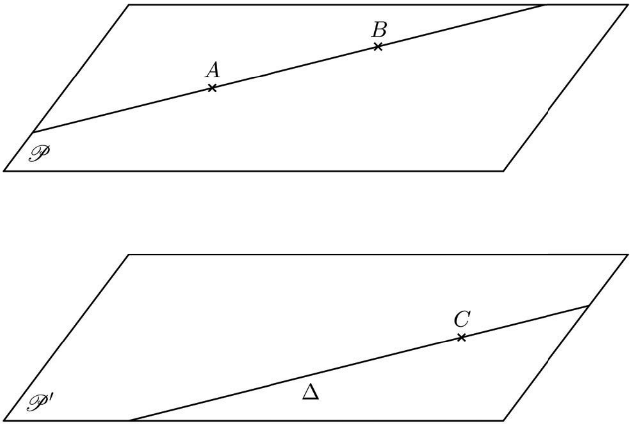
Déterminer l'aire du triangle XYZ.

15.5 Corrigés

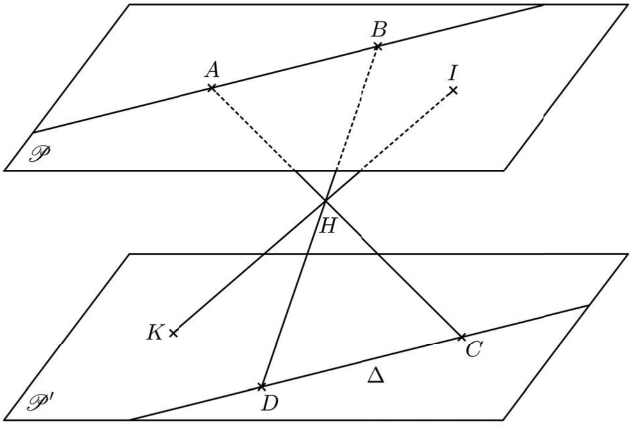
Exercice 1



1. Le point C appartient aux plans (ABC) et $\mathscr{P}$'. Or ces deux plans ne sont pas confondus, sinon les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ le seraient. Par conséquent, les plans (ABC) et $\mathscr{P}$' sont sécants selon une droite passant par C. En outre, d'après la proposition 151, cette droite passant par C est parallèle à la droite (AB).



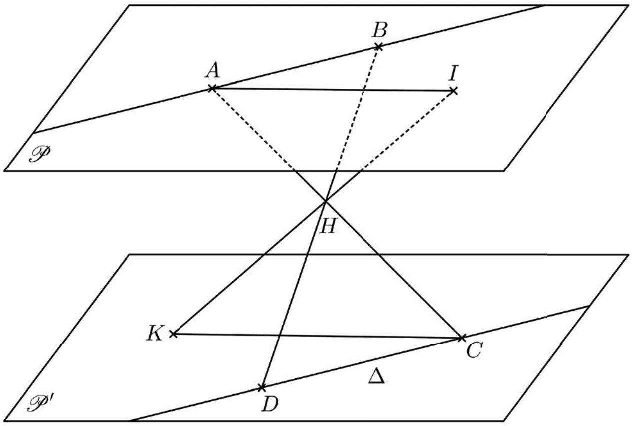
2. Soit D un point appartenant à la droite Δ distinct de C et tel que les droites (BD) et (AC) soient sécantes en un point H. Soit K un appartenant au plan $\mathscr{P}'$ mais n'appartenant pas à la droite Δ.



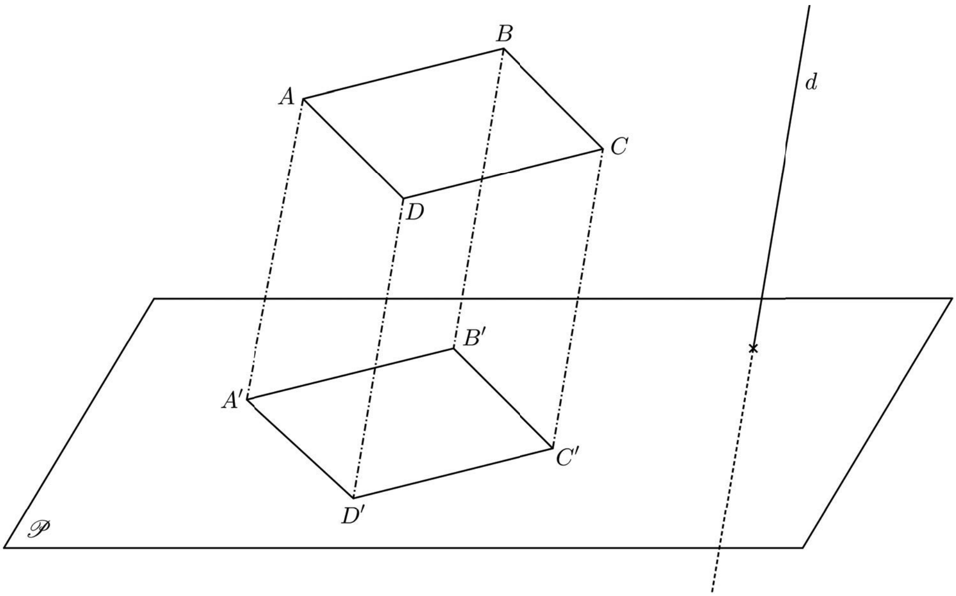
Le point H n'appartient ni au plan $\mathscr{P}$, ni au plan $\mathscr{P}'$. En effet, si tel était le cas, les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ seraient confondus. Par conséquent, la droite (HK) est sécante aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. Soit I le point d'intersection de la droite (HK) et du plan $\mathscr{P}$. Par ailleurs, le point H appartient au plan (ABC) et le point K n'appartient pas au plan (ABC) (sinon il appartiendrait à la droite Δ). Donc la droite (HK) est sécante au plan (ABC) en H. Par conséquent, le point I ne peut appartenir à la droite (AB). En effet, si tel était le cas, la droite (KH) serait incluse dans le plan (ABC), ce qui n'est pas le cas.

3. Les plans (ACK) et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon la droite (KC). Donc, d'après la proposition 151, les plans (ACK) et $\mathscr{P}$ sont sécants selon une droite parallèle à la droite (KC) et passant par A. Or le point I appartient à la droite (KH) qui est elle-même incluse dans le plan (ACK). Donc le point I appartient au plan (ACK). En outre, le point I appartient au plan $\mathscr{P}$. Par conséquent, la droite (AI) est la droite d'intersection des plans (ACK) et $\mathscr{P}$. Il s'ensuit que les droites (KC) et (AI) sont parallèles.

Le lecteur suivra un raisonnement analogue afin de démontrer que les droites (KD) et (BI) sont parallèles.



Exercice 2



1. Par construction les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles. Donc, si les points A', B' et C' étaient alignés, les droites (AA'), (BB') et (CC') seraient toutes les trois incluses dans le plan (ABC) et les points A, B, C, A', B' et C' appartiendraient tous au plan (ABC). Par suite, la droite d serait parallèle au plan (ABC), ce qui est exclu. Par conséquent, les points A', B' et C', et à fortiori les points A', B', C' et D', ne sont pas alignés.
2. La quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. Donc, par définition, $(AB)//(CD)$. De plus, par construction, les droites (AA') et (DD') sont toutes

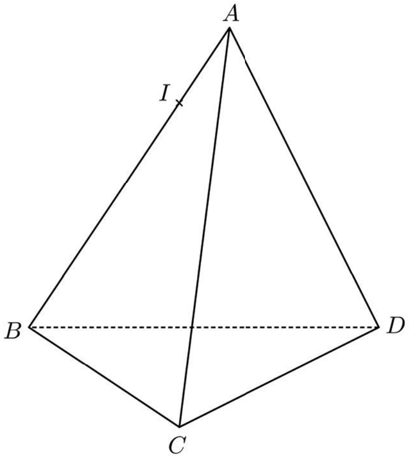
les deux parallèles à la droite d. Donc elles sont parallèles. Or les droites (AB) et (AA') sont sécantes en A et les droites (CD) et (DD') sont sécantes en D. Par conséquent, d'après la proposition 148, les plans (ABA') et (CDC') sont parallèles.

Un raisonnement analogue nous permet de démontrer que les plans (ADA') et (BCB') sont également parallèles.

3. Les deux plans (ABA') et (CDC') sont parallèles. Donc, d'après la proposition 151, ils coupent le plan $\mathscr{P}$ selon deux droites parallèles. Ainsi, les droites $(A'B')$ et $(C'D')$ sont strictement parallèles. De la même façon, les deux plans (ADA') et (BCB') sont parallèles. Donc, d'après la proposition 151, ils coupent le plan $\mathscr{P}$ selon deux droites parallèles. Ainsi, les droites $(A'D')$ et $(B'C')$ sont strictement parallèles.

   Par définition, le quadrilatère $A'B'C'D'$ est donc un parallélogramme.

Exercice 3

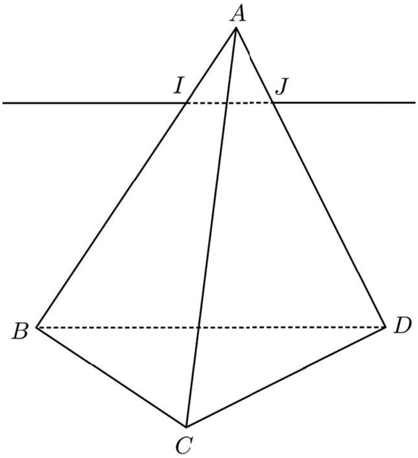


1. Analyse : si le plan $\mathscr{P}$ existe, alors, d'après la proposition 145, il existe une droite d_1 incluse dans $\mathscr{P}$ et parallèle à la droite (BD). Soit d_1' la droite parallèle à d_1 passant par I. On a $d_1'//(BD)$ et d_1' incluse dans $\mathscr{P}$. De la même façon, si le plan $\mathscr{P}$ existe, alors, d'après la proposition 145, il existe une droite d_2 incluse dans $\mathscr{P}$ et parallèle à la droite (AC). Soit d_2' la droite parallèle à d_2 passant par I. On a $d_2'//(AC)$ et d_2' incluse dans $\mathscr{P}$. Par conséquent, si le plan $\mathscr{P}$ existe, alors il contient les droites parallèles à (BD) et (AC) passant par I.

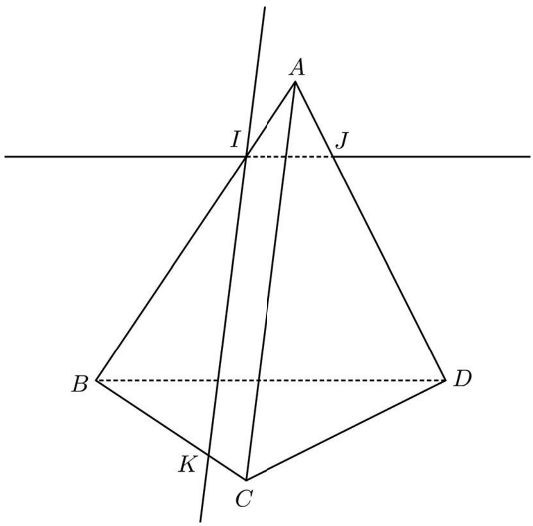
   Synthèse : soient d et d' les droites respectivement parallèles à (BD) et (AC) passant par I. N'étant pas confondues, elles définissent un plan $\mathscr{P}$ d'après la proposition 141. En outre $d//(BD)$ et d est incluse dans $\mathscr{P}$, donc d'après la proposition 145, $\mathscr{P}$ est parallèle à (BD). De la même façon, $\mathscr{P}$ est parallèle à (AC).

2. Le point I appartient au plan $\mathscr{P}$ et au plan (ABD). Or ces deux plans ne sont pas parallèles. Donc ils sont sécants selon une droite passant par I. Par ailleurs, la droite (BD) est parallèle au plan (ABD) puisque incluse dans ce plan, et

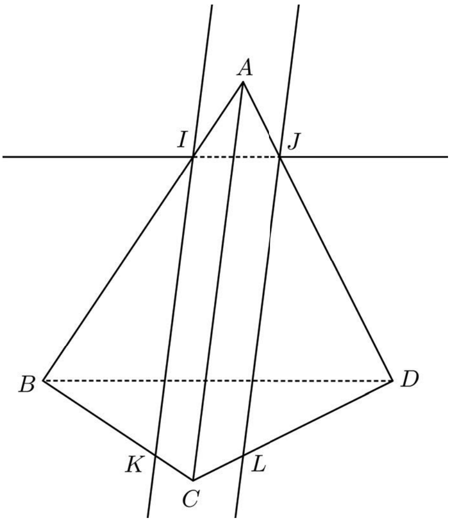
parallèle au plan $\mathscr{P}$ d'après la question 1. Donc, d'après la proposition 147, (BD) est parallèle à la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ABD). Autrement dit, ces deux plans sont sécants selon la droite parallèle à (BD) et passant par I. Celle-ci coupe l'arête $[AD]$ en J.



Un raisonnement similaire nous apprend que les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont sécants selon la droite parallèle à (AC) passant par I. Celle-ci coupe l'arête $[BC]$ en K.



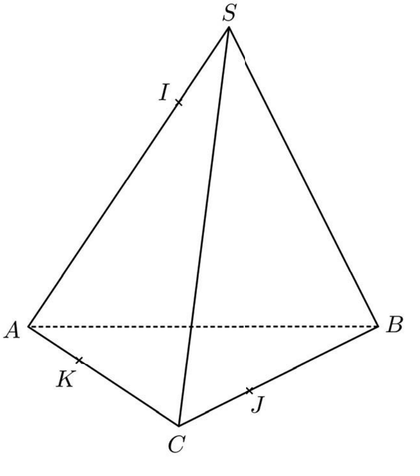
Le point J appartient au plan $\mathscr{P}$ et au plan (ACD). Or ces deux plans ne sont pas parallèles. Donc ils sont sécants selon une droite passant par J. Par ailleurs, la droite (AC) est parallèle au plan (ACD) puisque incluse dans ce plan, et parallèle au plan $\mathscr{P}$ d'après la question 1. Donc, d'après la proposition 147, (AC) est parallèle à la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ACD). Autrement dit, ces deux plans sont sécants selon la droite parallèle à (AC) et passant par J. Celle-ci coupe l'arête $[CD]$ en L.



3. D'après la question 2, les droites (IK) et (JL) sont toutes les deux parallèles à la droite (AC). Elles sont donc parallèles. Par ailleurs, la droite (BD) est trivialement parallèle au plan (BCD) et parallèle au plan $\mathscr{P}$ d'après l'énoncé. Donc, d'après la proposition 147, la droite (BD) est parallèle à la droite d'intersection des plans (BCD) et $\mathscr{P}$, c'est-à-dire à la droite (KL). De plus, d'après la question 2, la droite (IJ) est également parallèle à la droite (BD). Par conséquent, d'après la proposition 146, les droites (KL) et (IJ) sont parallèles.

   Finalement, le quadrilatère $IJLK$ a ses côtés opposés parallèles. Par définition, il s'agit donc d'un parallélogramme.

Exercice 4

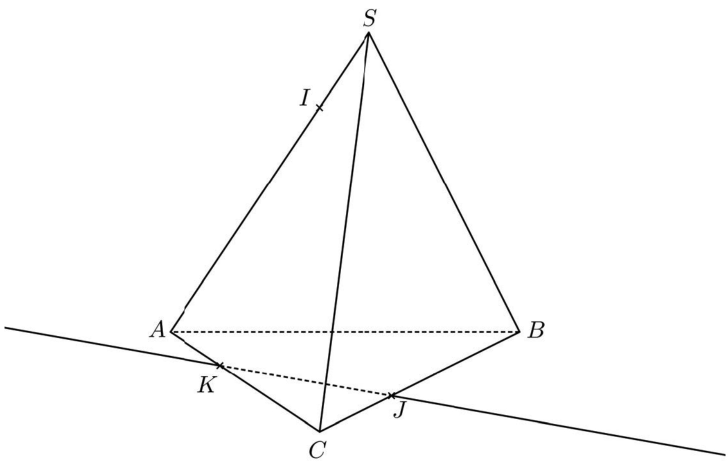


1. Si les points I, J et K étaient alignés, alors I appartiendrait à la droite (KJ) et donc au plan (ABC). Par suite, le point S, appartenant à la droite (AI), appartiendrait au plan (ABC), ce qui est exclu puisque $SABC$ est un tétraèdre.

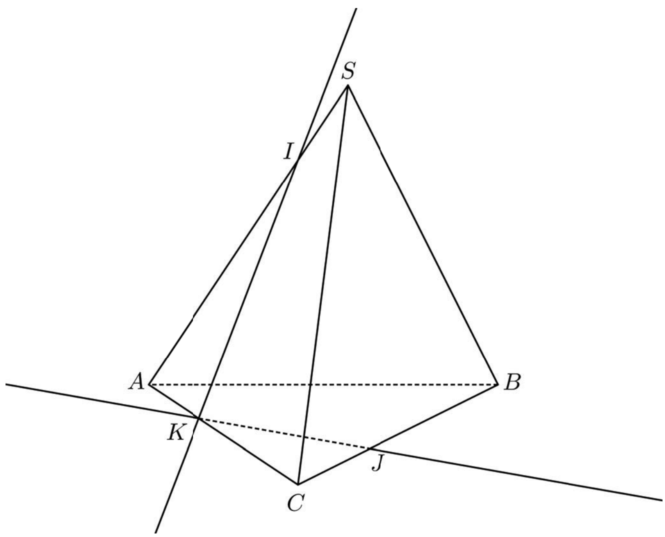
Par conséquent, les points I, J et K définissent un plan $\mathscr{P}$.
Le point J appartient au plan $\mathscr{P}$ et au plan (ABC). Le point I appartient au plan $\mathscr{P}$ mais pas au plan (ABC). Donc le plan $\mathscr{P}$ et le plan (ABC) sont sécants. On démontre de manière analogue que le plan $\mathscr{P}$ est sécant aux plans (SAB), (SAC) et (SBC).

2. On sait que deux plans sécants se coupent selon une droite. Donc les intersections du plan $\mathscr{P}$ avec les faces du tétraèdre sont, au plus, quatre segments.

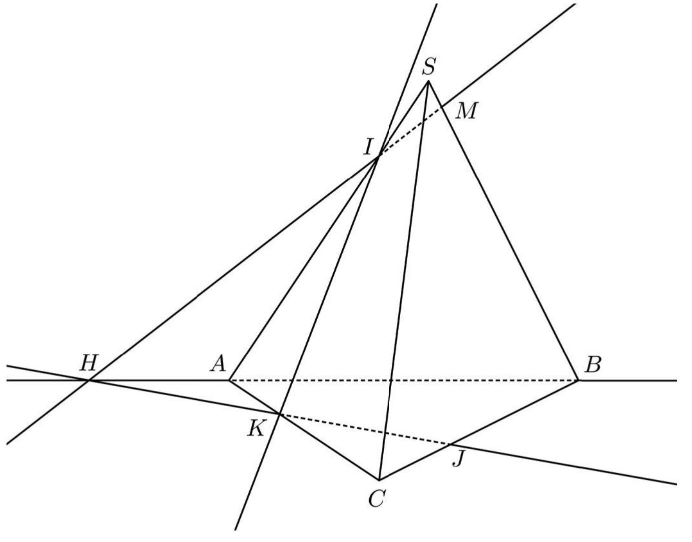
   (a) Le plan (ABC) contient les points A, B, C, J et K. Le plan $\mathscr{P}$ contient les points I, J et K. Donc le plan (ABC) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants suivant la droite (KJ).



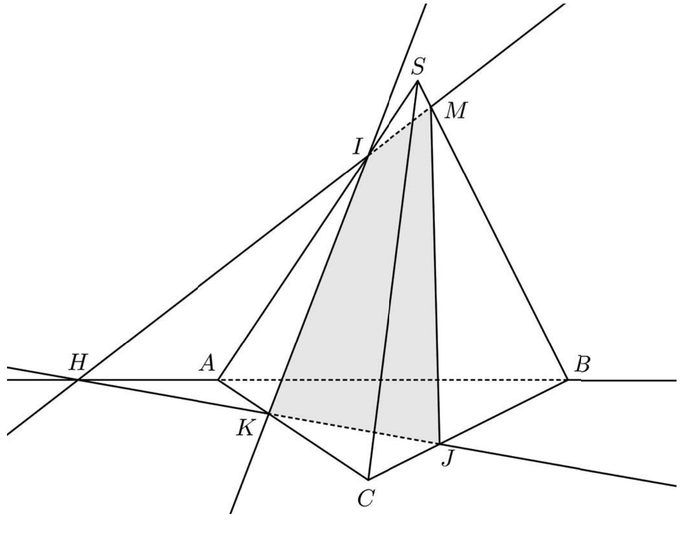
   (b) Le plan (SAC) contient les points S, A, C, I et K. Le plan $\mathscr{P}$ contient les points I, J et K. Donc le plan (SAC) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants suivant la droite (KI).



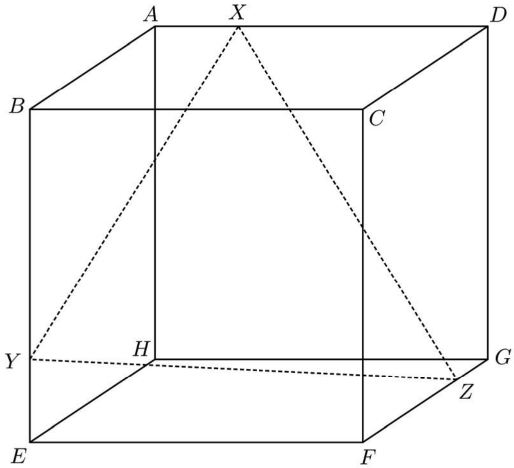
(c) Le plan (SAB) contient les points S, A, B et I. Le plan $\mathscr{P}$ contient les points I, J et K. Donc la droite d'intersection des plans (SAB) et $\mathscr{P}$ passe par le point I. Cherchons un deuxième point appartenant à ces deux plans. Les droites (JK) et (AB), toutes deux incluses dans le plan (ABC) ne sont pas parallèles. Soit H leur point d'intersection. Par construction, le point H appartient aux plans (SAB) et $\mathscr{P}$. Finalement, ces deux plans se coupent selon la droite (IH). Dans le plan (SAB), la droite (IH) coupe le segment $[SB]$ en un point M qui appartient donc aux plans $\mathscr{P}$ et (SBC).



(d) Le plan (SBC) contient les points S, B, C, J et M. Le plan $\mathscr{P}$ contient les points I, J, K, H et M. Donc le plan (SBC) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants suivant la droite (MJ). Par conséquent, la section plan du tétraèdre par le plan $\mathscr{P}$ est le quadrilatère $MIKJ$.



Exercice 5



La rotation d'un tiers de tour autour de l'axe (HC) laisse le triangle XYZ globalement invariant. Il s'ensuit que triangle XYZ est équilatéral. Dans le triangle XDG rectangle en D, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$XG^2 = XD^2 + DG^2$$

soit :

$$XG^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

d'où :

$$XG = \sqrt{13}\,\text{cm car } XG \geqslant 0$$

La droite (XG) est incluse dans le plan (ADG). Or, par définition d'un cube, la droite (FG) est orthogonale au plan (ADG). Donc, d'après la proposition 156, (FG) est perpendiculaire à (XG). Ainsi, dans le triangle XZG rectangle en G, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$XZ^2 = XG^2 + GZ^2$$

soit :

$$XZ^2 = 13 + 1^2 = 14$$

d'où :

$$XZ = \sqrt{14}\,\text{cm car } XZ \geqslant 0$$

Le triangle équilatéral XYZ a un côté de longueur $\sqrt{14}$ cm. Donc, d'après le cours de Quatrième, sa hauteur est égale à :

$$\frac{\sqrt{14} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{42}}{2}\,\text{cm}$$

CORRIGÉS

Par conséquent, l'aire du triangle XYZ est égale à :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(XYZ) &= \frac{\sqrt{14} \times \frac{\sqrt{42}}{2}}{2} \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm}^2 \\ &\simeq 6,1\,\mathrm{cm}^2 \text{ au dixième près}\end{aligned}$$

Index

Apprendre
à raisonner

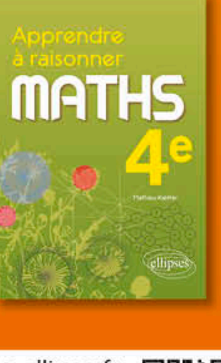
MATHS

3^{e}

Avec pour objectif d'apprendre à raisonner dès le plus jeune âge, cet ouvrage de mathématiques destiné à des élèves en classe de Troisième est découpé en 15 chapitres constituant un ensemble cohérent et structuré. Il présente avec soin et précision des notions élémentaires et essentielles :

- Les définitions sont clairement explicitées, illustrées et triturées afin de faciliter leur appropriation.
- Les propositions et les théorèmes sont justifiés voire démontrés lorsque cela est possible.
- Les liens entre les différents chapitres sont indiqués afin de saisir la cohérence de l'ensemble.
- De nombreuses figures aident à la visualisation des notions et donc à la compréhension.
- Des exercices entièrement corrigés entraînent le lecteur au raisonnement mathématique en lui apportant le plaisir de la réflexion.

Du même auteur :



www.editions-ellipses.fr

9 782340 082311