

Objectif CRPE

Concours de recrutement de professeurs des écoles

Admissibilité

Écrit

Entraînement

Maths

**Un entraînement à chacune
des 3 parties de l'épreuve :**

- Problème portant sur un ou plusieurs domaines des programmes
- Résolution d'exercices indépendants
- Analyse d'un dossier composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement

hachette
ÉDUCATION

Objectif CRPE

Admissibilité

Écrit

Concours de recrutement de professeurs des écoles

Entraînement

Maths

Alain Descaves

hachette
ÉDUCATION

L'auteur :

Alain Descaves a longtemps été formateur d'enseignants. Il est également auteur de manuels scolaires et d'ouvrages de pédagogie.

Il poursuit ses recherches sur l'apprentissage du sens et le sens de l'apprentissage.

© HACHETTE LIVRE 2016, 58, rue Jean Bleuzen, CS70007, 92178 Vanves Cedex

www.hachette-education.com

ISBN 978-2-01-400519-6

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L. 122-4 et L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

P Présentation

Cet ouvrage comporte de nombreux exercices et problèmes pour s'entraîner de manière efficace à la seconde épreuve écrite d'admissibilité au CRPE portant sur les mathématiques.

Tous issus d'annales du CRPE, ces exercices sont conformes à la lettre et à l'esprit du concours fixé par l'arrêté du 19 avril 2013 modifié et constituent une base d'entraînement incomparable pour le candidat qui souhaite aborder sereinement cette épreuve. Les corrigés tiennent compte du niveau de rédaction exigé : 9 problèmes d'entraînement à la partie 1, 66 exercices d'entraînement à la partie 2 (exercices testant les connaissances et les compétences dans le domaine des mathématiques), 25 exercices d'entraînement à la partie 3 (analyse de supports d'enseignement et de travaux d'élèves).

Concernant les parties 2 et 3, ces exercices sont classés selon leur champ mathématique dominant :

- Nombres, numération, opérations, arithmétique
- Géométrie
- Organisation de données, proportionnalité
- Mesure des grandeurs

Mais, conformément à l'esprit des sujets de ce concours, la plupart d'entre eux réfèrent à plusieurs domaines.

Les programmes de référence sont ceux de l'école primaire et du collège.

La résolution des exercices et problèmes permet au candidat d'avoir une idée précise du niveau exigé.

Une préparation complète et sérieuse à l'épreuve nécessite l'acquisition d'un ouvrage de préparation au concours. Un mémento récapitulant les savoirs et savoir-faire mathématiques fondamentaux, ainsi que les principaux savoirs et savoir-faire didactiques peut également être très utile à l'approche du concours.

Une bonne préparation à l'épreuve nécessite également de la part du candidat un entraînement à la gestion du temps imparti à l'épreuve (4 heures). C'est pourquoi nous lui conseillons vivement de réaliser en temps réel un minimum de trois sujets de concours en les composant de la manière suivante :

- pour la partie 1 : 1 problème ;
- pour la partie 2 : 3 exercices indépendants dans différents domaines et un exercice du type affirmations vrai-faux ;
- pour la partie 3 : 2 ou 3 exercices indépendants.

Extraits du descriptif des épreuves du concours externe de recrutement de professeurs des écoles (CRPE externe)

L'ensemble des épreuves du concours vise à **évaluer les capacités des candidats au regard des dimensions disciplinaires, scientifiques et professionnelles** de l'acte d'enseigner et des situations d'enseignement.

Épreuves d'admissibilité

Le cadre de référence des épreuves est celui des programmes pour l'école primaire. Les connaissances attendues des candidats sont celles que nécessite un enseignement maîtrisé de ces programmes. **Le niveau attendu** correspond à celui exigé par la maîtrise des programmes de collège.

Les épreuves d'admissibilité portent sur le français et les mathématiques.

Certaines questions portent sur le programme et le contexte de l'école primaire et nécessitent une connaissance approfondie des cycles d'enseignement de l'école primaire, des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture et des contextes de l'école maternelle et de l'école élémentaire. [...]

Épreuve écrite de mathématiques

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'épreuve vise à **évaluer la maîtrise des savoirs disciplinaires nécessaires à l'enseignement des mathématiques** à l'école primaire et la capacité à prendre du recul par rapport aux différentes notions. Dans le traitement de chacune des questions, le candidat est amené à s'engager dans un raisonnement, à le conduire et à l'exposer de manière claire et rigoureuse.

L'épreuve comporte **trois parties** :

- Une première partie constituée d'un **problème portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège**, ou sur des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture, permettant d'apprécier particulièrement la capacité du candidat à rechercher, extraire et organiser l'information utile.
- Une deuxième partie composée d'**exercices indépendants, complémentaires à la première partie**, permettant de vérifier les connaissances et compétences du candidat dans différents domaines des programmes de l'école ou du collège. Ces exercices pourront être proposés sous forme de questions à choix multiples, de questions à réponse construite ou bien d'analyses d'erreurs-types dans des productions d'élèves, en formulant des hypothèses sur leurs origines.
- Une **analyse d'un dossier composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement des mathématiques**, choisis dans le cadre des programmes de l'école primaire qu'ils soient destinés aux élèves ou aux enseignants (manuels scolaires, documents à caractère pédagogique), **et productions d'élèves** de tous types, permettant d'apprécier la capacité du candidat à maîtriser les notions présentes dans les situations d'enseignement.

L'épreuve est **notée sur 40 points** :

- 13 pour la première partie,
- 13 pour la deuxième,
- 14 pour la troisième.

5 points au maximum peuvent être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat. **Une note globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire.**

Sommaire

à la partie 1
de l'épreuve
Problèmes

Entraînement à la partie 1 de l'épreuve : Problèmes 7

Entraînement à la partie 2 de l'épreuve : Exercices 19

Nombres – Numération – Arithmétique 20

Géométrie 28

Organisation de données 39

Mesure des grandeurs 48

Affirmations Vraies/Faussees 55

**Entraînement à la partie 3 de l'épreuve :
Analyse de supports d'enseignement** 61

Nombres – Numération 62

Opérations 73

Organisation de données – Résolution de problèmes 79

Géométrie 92

Mesure et grandeurs 104

Corrigés 113

Partie 1 : Problèmes 114

Partie 2 : Exercices 126

Partie 3 : Analyse de supports d'enseignement 192

Entraînement à la partie 1 de l'épreuve Problèmes

Problèmes portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège, ou sur des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture, permettant d'apprécier particulièrement la capacité du candidat à rechercher, extraire et organiser l'information utile.

● Exercice 1 : Échelle de température

Corrigé, p. 114

Deux échelles de repérage de la température sont principalement utilisées : l'échelle Celsius et l'échelle Fahrenheit.

La température de la glace fondante correspond à 0 degré Celsius ($^{\circ}\text{C}$) et à 32 degrés Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$).

La température d'ébullition de l'eau correspond à 100 $^{\circ}\text{C}$ et à 212 $^{\circ}\text{F}$.

Les deux échelles sont régulières.

1. Reproduire sur la copie sous forme d'un schéma le tube de thermomètre figurant en **annexe**.

Sur la partie gauche sont indiquées les graduations de l'échelle Celsius de 10 en 10, entre - 50 $^{\circ}\text{C}$ et 100 $^{\circ}\text{C}$.

a) Indiquer, à droite du tube, les valeurs correspondantes de l'échelle Fahrenheit. Expliciter votre démarche.

b) Existe-t-il une relation de proportionnalité entre les deux suites de nombres figurant sur votre dessin (échelle Fahrenheit et échelle Celsius) ? Justifier.

2. Soit t la valeur en $^{\circ}\text{C}$ d'une température, et T la valeur en $^{\circ}\text{F}$ de la même température. On admet qu'il existe entre T et t une relation de la forme $T = at + b$
Montrer que : $T = 1,8t + 32$.

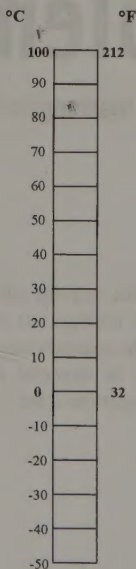
3. Le thermomètre indique 25 $^{\circ}\text{C}$.

a) Calculer la valeur correspondante en $^{\circ}\text{F}$.

b) Expliquez comment vous pouvez vérifier ce résultat sur votre dessin.

4. Calculer la température à laquelle les deux échelles donnent la même valeur. Vérifier ce résultat sur le dessin.

Annexe

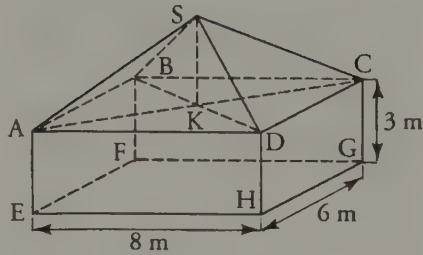


● Exercice 2 : Serre

Corrigé, p. 115

Un horticulteur envisage la construction d'une serre ayant la forme d'un parallélépipède rectangle surmonté d'une pyramide comme l'indique la figure ci-contre.

On désigne par x la mesure de la hauteur SK (exprimée en mètres) de la pyramide $SABCD$.



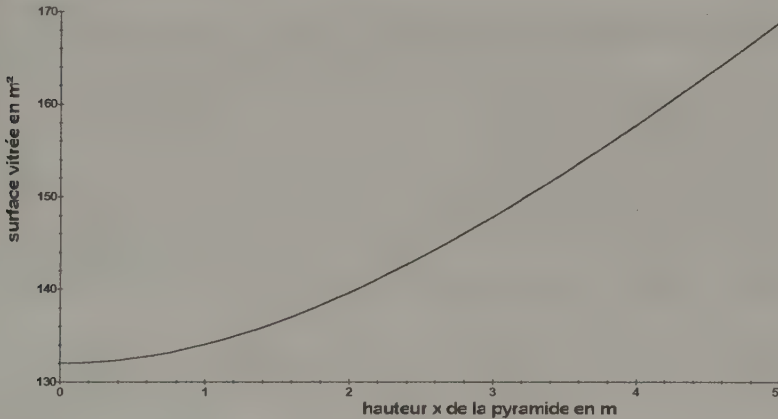
1. Montrer que la mesure V du volume (en m^3) de la serre est donnée par la formule $V = 144 + 16x$.

2. Calculer ce volume pour $x = 1,5$.

3. Pour quelle valeur de x la serre a-t-elle un volume de 200 m^3 ?

On s'intéresse maintenant à la surface vitrée de la serre (surface constituée des quatre faces latérales et du toit).

Le graphique ci-après donne l'aire de la surface vitrée en fonction de la hauteur x de la pyramide.



4. Par lecture graphique, donner l'aire de la surface vitrée correspondant à $x = 4,20$.

5. Pour des raisons de coût, l'horticulteur souhaite limiter l'aire de la surface vitrée à 150 m^2 .

Quelle est, dans ce cas, la hauteur maximum de la pyramide indiquée par le graphique ?

6. Dans le cas où $x = 0$, préciser la forme de la serre. Quelle aire de la surface vitrée le graphique indique-t-il ? Retrouver ce résultat par le calcul.

Pour toutes les questions suivantes, on prendra $SK = 3 \text{ m}$ (c'est-à-dire $x = 3$).

7. Calculer la hauteur issue de S du triangle SDC .

8. a) En utilisant le quadrillage de la feuille de copie, reproduire le triangle SDC à l'échelle $1/200$.

b) En utilisant le côté $[SD]$ de la figure précédente, construire à la règle et au compas une reproduction à l'échelle $1/200$ du triangle SAD . Laisser apparents les traits de construction.

● Exercice 3 : La croix des mélanges

Corrigé, p. 116

Dans des manuels de mathématiques du début du xx^e siècle, on enseignait une méthode appelée « la croix des mélanges ». Il s'agissait d'un algorithme, appuyé sur un schéma, pour déterminer les proportions d'un mélange comme l'illustre l'exemple qui suit.

« On a du vin à 75 centimes (de franc !) le litre et du vin à 60 centimes le litre. Dans quelles proportions faut-il les mélanger pour avoir du vin qui revienne à 70 centimes le litre ? »

On dispose généralement de la manière suivante les éléments du problème et sa résolution :

Étape 1 : les données	Étape 2 : calcul (par différence sur l'axe indiqué en gras)	Étape 3 : calcul (par différence sur l'autre axe)	Étape 4 : obtention de la réponse On obtient alors 15 litres de vin à 70 centimes le litre "On devra donc mélanger les vins dans la proportion de 10 à 5 ou de 2 à 1."

Source : *Cours d'arithmétique théorique et pratique*, Jacquet et Laclef, Éditeur Nathan, 1904, cité par Pierre Collaudin dans le Bulletin 439 (2002) de l'APMEP.

1. Dans l'exemple ci-dessus :

- a) Vérifier par le calcul que les 15 litres de vin obtenu selon le mélange proposé à la fin de l'étape 4 reviennent bien à 70 centimes le litre.
- b) Dans un litre de ce vin à 70 centimes le litre, donner sous forme de fraction la proportion de chaque type de vin composant le mélange.

2. Appliquer l'algorithme ci-dessus pour obtenir un vin à 66 centimes le litre à partir d'un vin à 80 centimes le litre et d'un vin à 60 centimes le litre. Construire le schéma associé à ces nouvelles données et donner la proportion du mélange final.

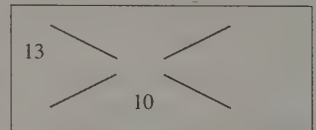
3. Un problème plus contemporain

« Une enseignante achète 15 albums de littérature de jeunesse pour sa classe. Elle choisit des albums à 8 € et d'autres à 13 € pour une dépense totale de 150 €. Combien a-t-elle acheté d'albums de chaque type ? »

Dans les questions qui suivent, on propose plusieurs méthodes de résolution que l'on mettra en œuvre de manière indépendante.

a) Méthode n° 1 utilisant l'algorithme de la croix des mélanges.

Reproduire le schéma ci-contre sur votre feuille, le compléter puis donner une solution au problème.



b) Méthode n° 2 résolution algébrique

On note x et y les nombres respectifs d'albums à 13 € et à 8 €.

Résoudre le problème de façon algébrique.

c) Méthode n° 3 utilisant un tableur

Le tableau ci-après correspond à une feuille de tableur donnant la somme payée selon le nombre d'albums à 8 € et le nombre d'albums à 13 € achetés.

- Proposer une formule entrée dans le tableur pour calculer le nombre de la case grisée (ligne 4, colonne M).

- Pourquoi n'est-il pas utile d'aller au-delà de la colonne V ou de la ligne 14 ?
- Utiliser cette feuille de calcul pour résoudre le problème.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
	Nombre d'albums à 13€	Nombre d'albums à 9€	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1																						
2	0	somme payée (en €)	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152
3	1		13	21	29	37	45	53	61	69	77	85	93	101	109	117	125	133	141	149	157	165
4	2		26	34	42	50	58	66	74	82	90	98	106	114	122	130	138	146	154	162	170	178
5	3		39	47	55	63	71	79	87	95	103	111	119	127	135	143	151	159	167	175	183	191
6	4		52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	164	172	180	188	196	204
7	5		65	73	81	89	97	105	113	121	129	137	145	153	161	169	177	185	193	201	209	217
8	6		78	86	94	102	110	118	126	134	142	150	158	166	174	182	190	198	206	214	222	230
9	7		91	99	107	115	123	131	139	147	155	163	171	179	187	195	203	211	219	227	235	243
10	8		104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184	192	200	208	216	224	232	240	248	256
11	9		117	125	133	141	149	157	165	173	181	189	197	205	213	221	229	237	245	253	261	269
12	10		130	138	146	154	162	170	178	186	194	202	210	218	226	234	242	250	258	266	274	282
13	11		143	151	159	167	175	183	191	199	207	215	223	231	239	247	255	263	271	279	287	295
14	12		156	164	172	180	188	196	204	212	220	228	236	244	252	260	268	276	284	292	300	308

• Exercice 4 : Aquariums

Corrigé, p. 117

Dans cet exercice, tous les aquariums considérés sont des parallélépipèdes rectangles et sont remplis à ras bord.

Pour trouver le volume d'eau dans un aquarium, il faut tenir compte du volume occupé par les poissons et les accessoires : on retranche ainsi 20 % au volume total de l'aquarium pour obtenir le volume d'eau.

Partie A

Le propriétaire d'un aquarium constate que les poissons sont malades. Renseignements pris, il achète un médicament pour un traitement de trois jours. Sur la boîte, il peut consulter le tableau suivant :

	Dose pour 20 litres
1 ^{er} jour	10 gouttes
2 ^e jour	5 gouttes
3 ^e jour	5 gouttes

Dimensions de l'aquarium :

- Longueur : 1 mètre ;
- Largeur : 0,30 mètre ;
- Hauteur : 0,45 mètre.

1. Montrer, par calcul, que le volume d'eau contenu dans l'aquarium est de 108 litres.

2. a) Quel nombre de gouttes faut-il verser le premier jour ?
 b) Quel nombre de gouttes aura-t-on versé en tout à la fin du traitement ?

Partie B

Dans cette partie, la hauteur de l'aquarium reste fixée à 0,45 mètre.

1. Prouver que le nombre N de gouttes versées le premier jour est donné par la formule suivante :

$N = L \times l \times 1,8$ (L et l représentent respectivement la longueur et la largeur de l'aquarium exprimées en décimètres).

2. Pour aider ses clients, un commerçant a commencé à remplir un tableau indiquant le nombre de gouttes à verser le premier jour dans divers aquariums (selon la longueur et la largeur, la hauteur restant fixée à 0,45 mètre).

Reproduire ce tableau sur la copie et le compléter, sans oublier les opérateurs manquants. En cas de besoin, les résultats seront arrondis au nombre de gouttes le plus proche.

longueur \ largeur	50 cm	75 cm	100 cm	150 cm
30 cm			54 gouttes	
40 cm				

Partie C

Dans cette partie, la hauteur de l'aquarium est encore fixée à 0,45 mètre.

1. Construire les représentations graphiques qui permettent de lire le nombre de gouttes à verser le premier jour en fonction de la longueur, pour des aquariums de largeur 30 cm ou 40 cm. Les deux représentations sont à faire sur un même graphique (sur l'axe des abscisses, 1 centimètre représentera une longueur de 10 centimètres et sur l'axe des ordonnées, 1 centimètre représentera 10 gouttes).

2. a) Donner, par lecture sur le graphique, le nombre de gouttes à verser le premier jour dans un aquarium de longueur 120 cm et de largeur 40 cm.

b) Donner, par lecture sur le graphique, le nombre de gouttes à verser le premier jour dans un aquarium de longueur 90 cm et de largeur 30 cm.

● Exercice 5 : Immatriculations

Corrigé, p. 119

En 2009, de nouvelles plaques d'immatriculation ont été mises en circulation.

Chaque véhicule immatriculé possède désormais un numéro « à vie ».

Ce numéro est constitué de sept caractères, répartis en trois blocs :

- 1^{er} bloc : deux lettres ;
- 2^e bloc : trois chiffres ;
- 3^e bloc : deux lettres.

La numérotation des véhicules se fait de manière chronologique et au niveau national (de AA-001-AA ZZ-999-ZZ), les numéros se succédant de la manière suivante :

- de AA-001-AA à AA-999-AA ;
- puis de AA-001-AB à AA-999-AB et ainsi de suite jusqu'à AA-999-AZ ;
- puis de AA-001-BA à AA-999-ZZ ;
- puis de AB-001-AA à AZ-999-ZZ ;
- puis de BA-001-AA à ZZ-999-ZZ.

Dans cet exercice, les lettres utilisées dans la numérotation des véhicules sont les 26 lettres de l'alphabet.

1. Combien de véhicules devront être immatriculés pour atteindre le numéro AA-999-AZ ?
2. Montrer qu'il faut immatriculer 28 982 véhicules pour atteindre le numéro AA-011-BD.
3. Montrer que le nombre de véhicules immatriculés avant d'arriver au numéro AB-001-AA est de 675 324.
4. Au bout de combien d'années pourrait être épuisé ce système de numérotation si 7 millions de véhicules sont immatriculés chaque année ?

● Exercice 6 : Impôts

Corrigé, p. 120

M. et Mme Durand sont mariés et sans enfant. Leur revenu imposable, pour l'année étudiée dans cet exercice, est de 50 000 €.

1. Sachant que ce revenu imposable a été calculé en opérant sur le revenu annuel du couple une réduction de 10 %, calculer le revenu annuel du couple avant cette réduction (on arrondira le résultat à l'unité).

2. Le revenu annuel de Mme Durand représente 85 % du revenu annuel de M. Durand. Quel est le revenu annuel de M. Durand ?

3. Pour les couples mariés sans enfant, le nombre de parts N est égal à 2. Calculer le montant de l'impôt à payer pour ce couple en utilisant le barème donné ci-dessous.



4 CALCULEZ LE QUOTIENT FAMILIAL CORRESPONDANT À VOTRE NOMBRE DE PARTS

Ce quotient « QF » est égal à : $\frac{R \text{ (revenu imposable)}}{N \text{ (nombre de parts)}} =$

Recherchez ci-dessous la tranche dans laquelle est situé votre quotient familial « QF » (et non pas votre revenu).

5 CALCULEZ VOTRE IMPÔT « I » À L'AIDE DU BARÈME SUIVANT :

Si	n'exécède pas	5 687 €	et inférieur ou égal à	11 344 €	vosre impôt sera égal à :	0
« QF »	est supérieur à	5 687 €	et inférieur ou égal à	11 344 €	vosre impôt sera égal à :	$(R \times 0,05) - (312,79 \text{ €} \times N)$
$\left(\frac{R}{N}\right)$	est supérieur à	11 344 €	et inférieur ou égal à	25 195 €	vosre impôt sera égal à :	$(R \times 0,14) - (1 277,03 \text{ €} \times N)$
	est supérieur à	25 195 €	et inférieur ou égal à	67 546 €	vosre impôt sera égal à :	$(R \times 0,30) - (5 308,23 \text{ €} \times N)$
	est supérieur à	67 546 €			vosre impôt sera égal à :	$(R \times 0,40) - (12 062,83 \text{ €} \times N)$

4. On avait proposé à Mme Durand un autre poste lui offrant une augmentation de son revenu annuel de 1 000 €.

Son mari l'en avait dissuadée en lui disant : « Tu n'y songes pas ! Avec ce nouveau poste, nous allons changer de tranche et toute ton augmentation va être absorbée par les impôts. »

Son argument était-il valable ? Expliquer la réponse.

● Exercice 7 : Emballages

Corrigé, p. 121

On justifiera toutes les réponses.

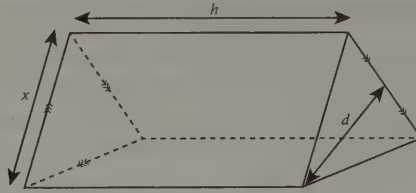
Un fabricant vend de la pâte d'amande dans un emballage cartonné ayant la forme d'un prisme droit dont la base est un triangle équilatéral (voir la figure ci-après).

x est la longueur d'un côté de la base triangulaire.

d est la hauteur de cette base triangulaire.

h est la hauteur du prisme droit.

Dans tout l'exercice, on exprime les longueurs en cm, les aires en cm^2 et les volumes en cm^3 .



Questions préalables

1. Représenter sur la copie un patron de l'emballage pour les valeurs $x = 3 \text{ cm}$ et $h = 6 \text{ cm}$.
2. On désigne par A l'aire du triangle équilatéral de base. Montrer que $A = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$.

Dans la suite du problème, les emballages ont un volume égal à 100 cm^3 .

3. a) Donner l'expression de h en fonction de x .
- b) En déduire que l'aire S du patron de cet emballage, exprimée en cm^2 , est donnée par la formule $S = \frac{400\sqrt{3}}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} x^2$.

4. On a construit une feuille de calcul, reproduite ci-après, donnant les valeurs de S en fonction des valeurs de x , ainsi que la représentation graphique de S en fonction de x .

a) Donner une méthode permettant de remplir la colonne A (de la ligne 2 à 35) en utilisant la fonction de « recopie vers le bas ».

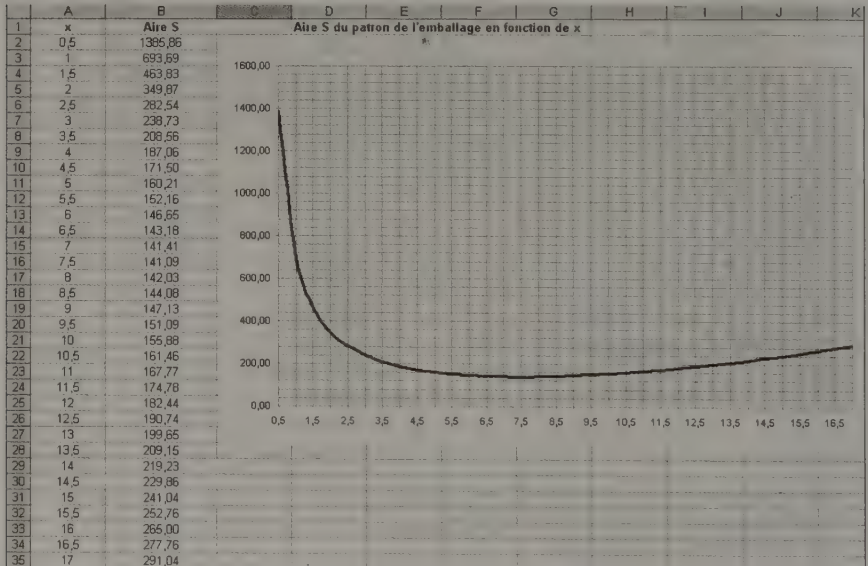
b) Donner une formule qui, entrée dans la cellule B2, puis recopiée vers le bas, permet de compléter la colonne B (de B3 à B35).

Indication : pour calculer $\sqrt{3}$ dans le tableur, on fait appel à la commande : « racine(3) ».

Le fabricant souhaite minimiser la quantité de carton utilisée.

c) En utilisant les résultats de la feuille de calcul reproduite ci-dessous, donner à 0,5 cm près la valeur de x qui minimise la quantité de carton utilisée pour l'emballage.

d) Calculer la hauteur de l'emballage pour cette valeur approchée de x .



● Exercice 8 : Aire d'un quadrilatère

Corrigé, p. 122

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6,5$ et $AD = 4$, l'unité de mesure étant le centimètre. M, N, P et Q sont des points respectivement sur les segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[AD]$, et tels que $AM = BN = CP = DQ$.

On s'intéresse dans cet exercice à la variation de l'aire du quadrilatère $MNPQ$ en fonction de la position du point M .

Toute réponse devra être justifiée.

On pose $AM = x$.

1. Construire la figure dans le cas $x = 4$. Démontrer que $MNPQ$ est un parallélogramme. Calculer son aire.
2. Choisir une valeur de x dans l'intervalle $]0, 4[$ et construire la figure correspondante. Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$?
3. a) On suppose que $0 < x < 4$. Exprimer l'aire de $MNPQ$ en fonction de x .
b) La formule obtenue en a) fournit-elle le bon résultat si on l'applique à $x = 0$? à $x = 4$?
4. L'une des quatre courbes ci-dessous représente la variation de l'aire de $MNPQ$ en fonction de x . Laquelle ?

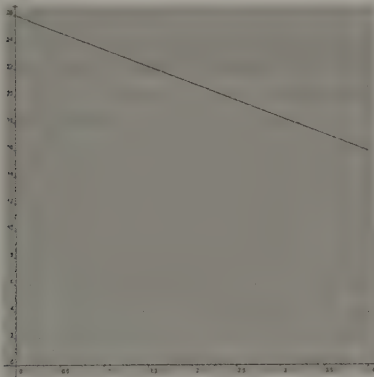


Figure 1

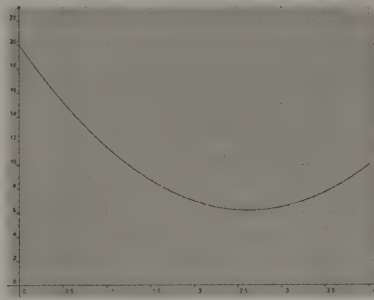


Figure 2

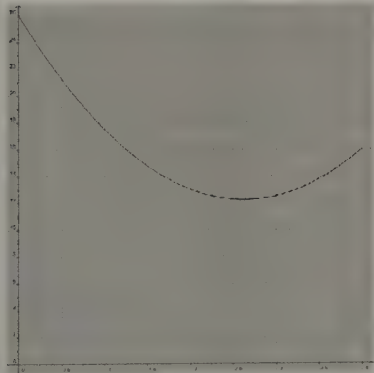


Figure 3

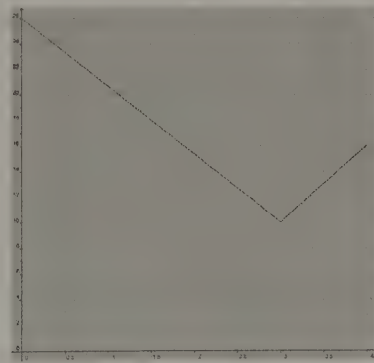


Figure 4

5. Déterminer par lecture graphique sur cette courbe :

- au demi-centimètre près, la valeur de x pour laquelle l'aire de $MNPQ$ est minimale.
- au centimètre carré près, la valeur de l'aire minimale.

6. Dans cette question on utilise un tableur pour étudier l'aire du quadrilatère $MNPQ$ en fonction de x . Différentes valeurs de x sont inscrites sur la ligne 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	x	0	0,1	...	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3	...	3,8	3,9	4	
2	Aire MNPQ	26	24,97	...	12,77	12,58	12,43	12,32	12,25	12,22	12,23	12,28	12,37	12,5	...	14,98	15,47	16	
3																			
4																			

- Donner une formule qui, entrée dans la cellule B2, puis recopiée vers la droite, a pu permettre de compléter la ligne 2.
- Expliquer pourquoi on ne peut pas conclure de façon certaine que $12,22 \text{ cm}^2$ est une valeur approchée de l'aire minimale à $0,1 \text{ cm}^2$ près.

7. Montrer que l'on peut exprimer l'aire de $MNPQ$ trouvée à la question 3. sous la forme :
 Aire ($MNPQ$) = $2 \left(x - \frac{21}{8} \right)^2 + \frac{391}{32}$

En déduire la valeur de l'aire minimale de $MNPQ$ et la valeur de x à laquelle elle correspond.

● Exercice 9 : Aire maximale

Corrigé, p. 124

Soit ABC un triangle isocèle, rectangle en A , tel que $AB = 1 \text{ m}$.

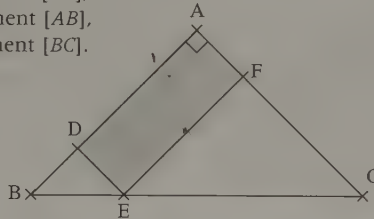
On cherche à inscrire dans ce triangle un rectangle ayant une aire maximale.

Dans tout ce problème, l'unité de longueur est le mètre.

Partie A

Dans cette partie, on inscrit le rectangle $AFED$ comme sur la figure ci-dessous.

- F est un point du segment $[AC]$,
- D est un point du segment $[AB]$,
- E est un point du segment $[BC]$.



On pose $AD = x$ et on considère la fonction f qui, à tout nombre x compris entre 0 et 1, associe l'aire du rectangle $ADEF$.

- Montrer que : $f(x) = -x^2 + x$.
- À l'aide d'une feuille de calcul, on a construit un tableau de valeurs de la fonction f .

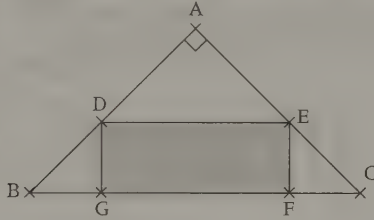
	A	B
1	x	$f(x)$
2	0	0
3	0,1	0,09
4	0,2	0,16
5	0,3	0,21
6	0,4	0,24
7	0,5	0,25
8	0,6	0,24
9	0,7	0,21
10	0,8	0,16
11	0,9	0,09
12	1	0

- a) Quelle formule a-t-on pu entrer dans la cellule B2, puis recopier jusqu'en B12, pour générer les images par f ?
- b) Dans cette question, on admet l'existence d'un maximum pour la fonction f . Peut-on affirmer, à l'aide du tableau, que le maximum de la fonction f est atteint en $\frac{1}{2}$?

3. a) Démontrer que : $f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$.
- b) En déduire l'aire maximale recherchée.
- c) Le rectangle d'aire maximale est-il un carré ?

Partie B

Dans cette partie, on inscrit le rectangle $DEFG$ comme sur la figure ci-dessous.



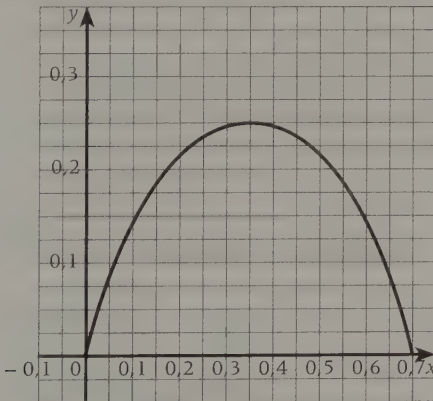
- D est un point du segment $[AB]$,
 - E est un point du segment $[AC]$,
 - G et F sont deux points du segment $[BC]$.
- On pose $BG = x$.

1. Dans quel intervalle I se trouve le nombre x ?

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction g qui, à tout nombre x dans l'intervalle I , associe l'aire du rectangle $DEFG$.

2. Exprimer $g(x)$ en fonction de x .

3. La représentation graphique de g est donnée ci-dessous :



- a) D'après le graphique, où placer le point G pour inscrire un rectangle d'aire $0,2 \text{ m}^2$?
- b) Par lecture graphique, déterminer l'aire maximale recherchée au centième près.
- c) Pour cette aire, le quadrilatère $DEFG$ est-il un carré ?

Entraînement à la partie 2 de l'épreuve Exercices

Exercices indépendants permettant de vérifier les connaissances et compétences du candidat dans différents domaines des programmes de l'école et du collège.

Nombres – Numération – Arithmétique	20
Géométrie	28
Organisation de données	39
Mesure des grandeurs	48
Affirmations Vraies/Faussees	55

■ Nombres – Numération – Arithmétique

● Exercice 10

Corrigé, p. 126

1. On appelle triplet pythagorien, tout triplet (a, b, c) formé de trois entiers positifs non nuls tels que : $a^2 + b^2 = c^2$

a) Vérifier que le triplet $(3, 4, 5)$ est un triplet pythagorien.

b) Vérifier que, quel que soit l'entier positif n non nul, on a : $(3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$

c) En déduire un autre triplet pythagorien composé d'entiers tous supérieurs à 1 000.

2. On s'intéresse maintenant à des triplets (a, b, c) tels que :

$$a = 2xy ; b = y^2 - x^2 ; c = y^2 + x^2$$

Où x et y sont deux nombres entiers positifs non nuls, $x < y$.
À l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul reproduite ci-contre.

	A	B	C	D	E	F	G
1	valeur de x	valeur de y	a	b	c	$a^2 + b^2$	c^2
2	1	2	4	3	5	25	25
3	1	3	6	8	10	100	100
4	3	6	36	27	45	2025	2025
5	4	15	120	209	241	58081	58081
6	8	12	192	80	208	43264	43264
7	12	15	360	81	369	136161	136161
8	7	8	112	15	113	12769	12769
9	2	3	12	5	13	169	169
10	11	13	286	48	290	84100	84100
11	7	8	112	15	113	12769	12769
12	4	5					

a) Donner une formule qui, entrée dans la cellule D2 puis recopiée vers le bas, permet de compléter la colonne D.

b) Recopier et compléter la ligne 12.

c) Au vu de cette feuille de calcul, quelle conjecture peut-on faire quant à la nature des triplets (a, b, c) ainsi définis ? Prouver cette conjecture.

3. Le triplet pythagorien $(3 ; 4 ; 5)$ a la particularité d'être constitué de trois nombres entiers consécutifs. Existe-t-il d'autres triplets pythagoriens ayant cette particularité ? Justifier.

● Exercice 11

Corrigé, p. 127

Soit n un nombre entier naturel non nul et A_n le nombre entier naturel dont l'écriture décimale ne contient que le chiffre 1 répété n fois : $A_n = \underbrace{111\dots1}_{n \text{ fois}}$

1. Pour quelles valeurs de n le nombre A_n est-il divisible par 11 ? Justifier.

2. Pour quelles valeurs de n le nombre A_n est-il divisible par 33 ? Justifier.

● Exercice 12

Corrigé, p. 127

On rappelle la propriété P suivante :

« Un nombre entier naturel et la somme de ses chiffres ont le même reste dans la division euclidienne par 9. »

1. Quel est le reste de la division de 164 330 258 647 par 9 ?

2. L'objet de cette question est de démontrer la propriété P pour un nombre entier naturel strictement inférieur à 10 000.

On considère un nombre entier naturel strictement inférieur à 10 000 et on note \overline{abcd} son écriture en base dix.

- a) Montrer qu'il existe un nombre entier naturel k tel que $\overline{abcd} = a + b + c + d + 9k$.
 b) On note r le reste de la division euclidienne de \overline{abcd} par 9, et r' le reste de la division euclidienne de $a + b + c + d$ par 9.
 Montrer que $r = r'$.

3. a) Dédurre de la propriété P un critère de divisibilité par 9 d'un nombre entier naturel, utilisant la somme de ses chiffres.
 b) Déterminer le plus grand diviseur commun de 18 et 164 330 258 643.

● Exercice 13

Corrigé, p. 128

L'écriture en base 3 d'un nombre n positif est de la forme $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$ où :

- k est un entier naturel ;
- les termes $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$ sont des entiers compris entre 0 et 2 ;
- $a_k > 0$ sauf si $n = 0$ (auquel cas $k = 0$ et $a_0 = 0$) ;
- $n = a_k 3^k + a_{k-1} 3^{k-1} + \dots + a_1 3 + a_0$.

Les termes $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$ sont alors appelés les chiffres de l'écriture en base 3 de n .

Toutes les réponses devront être justifiées.

1. a) Vérifier que l'écriture en base 3 du nombre 11 est $\overline{102}$.
 b) Quelle est l'écriture en base 3 du nombre 74 ?
 c) Que peut-on dire d'un nombre dont l'écriture en base 3 se termine par le chiffre « 0 » ?
 On s'intéresse aux nombres entiers n dont aucun chiffre de l'écriture en base 3 ne prend la valeur 2. On appellera ces nombres des entiers 2-lacunaires.
 Par exemple, $12 = \overline{110}$ est 2-lacunaire alors que $19 = \overline{201}$ ne l'est pas.

2. a) Déterminer le nombre d'entiers 2-lacunaires compris entre 0 et 100.
 b) À quelle condition nécessaire et suffisante un nombre 2-lacunaire possédant 4 chiffres en base 3 est-il divisible par 2 ?

3. On appelle nombres 1-lacunaires les nombres entiers n dont aucun chiffre de l'écriture en base 3 ne prend la valeur 1.

- a) Montrer que tout entier 1-lacunaire est le double d'un entier 2-lacunaire.
 b) Montrer que tout entier peut se décomposer comme la somme d'un entier 2-lacunaire et d'un entier 1-lacunaire.
 c) Montrer que cette décomposition n'est pas toujours unique.

● Exercice 14

Corrigé, p. 130

Un critère de divisibilité par 4 est le suivant : « Soit n un nombre entier naturel ayant au moins deux chiffres. n est divisible par 4 si, et seulement si, le nombre composé de ses deux derniers chiffres est divisible par 4. »

1. Le nombre 123 412 893 135 552 est-il divisible par 4 ?
 2. L'objet de cette question est de démontrer le critère.
 On considère un nombre entier naturel n ayant au moins deux chiffres.
 a) Justifier que l'on peut écrire n sous la forme $n = 100q + r$, où q et r sont des nombres entiers naturels et $0 \leq r < 100$.
 b) Démontrer que si r est divisible par 4, alors n est divisible par 4.
 c) Démontrer que si n est divisible par 4, alors r est divisible par 4.
 d) En déduire une démonstration du critère de divisibilité par 4.
 3. a) Quel peut être un critère de divisibilité par 8 pour les nombres entiers naturels ayant au moins trois chiffres ? Justifier brièvement.

b) Le nombre 123 412 893 135 552 est-il divisible par 8 ?

4. a) En généralisant, quel critère de divisibilité concernant les nombres entiers naturels ayant au moins p chiffres ($p \geq 1$) peut-on formuler ? Démontrer.

b) Quelle est la plus grande puissance de 2 qui divise le nombre 123 412 893 135 552 ?

● Exercice 15

Corrigé, p. 131

Dans cet exercice, a , b et c sont des chiffres compris entre 1 et 9.

On considère des nombres écrits en base dix avec ces chiffres et on note, par exemple, \overline{bac} le nombre dont b est le chiffre des centaines, a celui des dizaines et c celui des unités.

Les questions sont indépendantes.

1. Voici quatre nombres : 7, 13, 57 et 61. Parmi ces nombres, lequel n'est pas un nombre premier ? Justifier.

2. a) Le nombre 3 737 est-il un nombre premier ? Justifier.

b) Un nombre de la forme \overline{abab} peut-il être un nombre premier ? Justifier.

3. a) On considère les trois nombres \overline{abc} , \overline{abb} et \overline{acc} . Montrer que la somme de ces trois nombres est un nombre divisible par 3.

b) On considère les deux nombres \overline{cba} et \overline{bba} . Proposer un troisième nombre de trois chiffres, uniquement formé avec des chiffres choisis parmi les chiffres a , b et c , pour que la somme des trois nombres soit divisible par 3. Justifier.

● Exercice 16

Corrigé, p. 131

1. On décompte de 4 en 4 à partir de 61 tant qu'on obtient un entier naturel : « 61, 57, 53... ».

a) Quel nombre termine cette liste ?

On décompte maintenant de 4 en 4 tant qu'on obtient un entier naturel, mais à partir de 9 843.

b) Quel nombre termine cette nouvelle liste ? Justifier la réponse.

c) Combien comporte-t-elle de termes ?

d) Quel est le 100^e terme ?

2. En utilisant uniquement l'information $16\ 135\ 407 = (4\ 548 \times 3\ 547) + 3\ 651$:

a) Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de 16 135 407 par 4 548.

b) Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de 16 135 407 par 3 547.

3. On sait que $1\ 000\ 000 = (1\ 996 \times 501) + 4$

$100\ 000 = (1\ 996 \times 50) + 200$

$10\ 000 = (1\ 996 \times 5) + 20$

Utiliser ces relations pour déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 8 640 219 par 1 996.

● Exercice 17

Corrigé, p. 132

Jacques est confiseur et veut réaliser des assortiments de lirettes au chocolat et de contettes au praliné.

Il a fabriqué 1 386 lirectes et 308 contettes.

Il veut faire des sachets de la manière suivante :

- chaque sachet contient le même nombre de lirectes ;
- chaque sachet contient le même nombre de contettes ;
- toutes les confiseries doivent être contenues dans les sachets.

1. Combien de sachets peut-il réaliser au plus ?
2. Quel sera alors le nombre de lrelettes et de contettes dans chaque sachet ?
3. Si toutes les lrelettes et toutes les contettes étaient dans un même récipient, sans regarder, combien Jacques devrait-il prendre au minimum de confiseries pour être sûr d'avoir au moins une lrelette et au moins une contette ?

● Exercice 18

Corrigé, p. 132

1. a) Déterminer les restes des divisions euclidiennes par 7 de 1, de 10 puis de 100. Écrire les trois égalités caractéristiques correspondantes.
- b) En utilisant l'égalité $10^3 = 10 \times 10^2$, montrer que le reste de la division euclidienne de 10^3 par 7 se déduit, sans poser de divisions, des résultats précédents.
- c) Soit r_n le reste de la division euclidienne de 10_n par 7 et r_{n+1} le reste de la division euclidienne de 10_{n+1} par 7. Donner une méthode permettant d'obtenir r_{n+1} à partir de r_n .
- d) Reproduire et compléter alors le tableau ci-dessous.

10^n	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
Reste de la division euclidienne de 10^n par 7										

2. Déterminer à l'aide du tableau de la question 1. d) si le nombre 6 000 000 006 est divisible par 7. Indiquer les étapes de votre raisonnement.

● Exercice 19

Corrigé, p. 133

1. Dans cette question, aucune division n'est à poser. Les réponses doivent être justifiées.
 - a) Sachant que $57\,148\,468 = 3\,361\,674 \times 17 + 10$, donner le quotient et le reste de la division euclidienne de 57 148 468 par 17.
 - b) Sachant que $84\,279\,733 = 4\,957\,630 \times 17 + 23$, donner le quotient et le reste de la division euclidienne de 84 279 733 par 17.
 - c) En déduire le quotient et le reste de la division euclidienne de $57\,148\,468 + 84\,279\,733$ par 17, puis le quotient et le reste de la division euclidienne de $57\,148\,468 \times 2$ par 17.
2. Dans la division euclidienne d'un nombre a par 17, on note q le quotient et r le reste. Dans la division euclidienne d'un nombre a' par 17, on note q' le quotient et r' le reste. Déterminer, en justifiant votre réponse, le quotient et le reste :
 - a) dans la division euclidienne de $a + a'$ par 17 ;
 - b) dans la division euclidienne de $2a$ par 17.

● Exercice 20

Corrigé, p. 134

1. Voici un problème donné à des élèves du cycle des approfondissements : Dans la cour des maternelles, il y a des bicyclettes et des tricycles.

J'ai remarqué :

- qu'il y a au moins trois bicyclettes et trois tricycles ;
 - qu'il n'y a pas plus de dix bicyclettes, ni plus de dix tricycles ;
 - qu'il y a en tout 31 roues.
- Avec ces renseignements, combien peut-il y avoir de bicyclettes et de tricycles ?

Démontrer qu'il existe exactement deux réponses possibles à ce problème.

2. Une boîte de chocolats contient moins de 100 chocolats. En répartissant les chocolats en tas de deux, ou en tas de trois, ou en tas de quatre, il en reste un à chaque fois, mais en les répartissant en tas de cinq, il n'en reste pas.

Combien peut-il y avoir de chocolats dans la boîte ? Justifier en explicitant la démarche utilisée.

● Exercice 21

Corrigé, p. 135

1. Un nombre de trois chiffres est tel que :

- la somme de ses trois chiffres est égale à 14 ;
- ce nombre est plus grand que son nombre « retourné » (exemple : si le nombre est 651, son nombre « retourné » est 156) ;
- la différence entre ce nombre et son nombre « retourné » est 99 ;
- la différence entre le double du chiffre des dizaines et le triple du chiffre des centaines est égale à 2.

Trouver ce nombre en expliquant votre démarche.

2. En observant les nombres 297, 880 et 242, un élève a formulé la conjecture « tout nombre à trois chiffres dans lequel le chiffre des dizaines est la somme du chiffre des centaines et du chiffre des unités est divisible par 11 ».

- a) Cette conjecture s'applique-t-elle au nombre trouvé à la question 1 ?
- b) La conjecture de l'élève est-elle effectivement vraie ? Justifier la réponse.
- c) Trouver un nombre de 3 chiffres qui soit divisible par 11 et dans lequel le chiffre des dizaines n'est pas la somme du chiffre des centaines et de celui des unités.

● Exercice 22

Corrigé, p. 136

On cherche tous les nombres entiers naturels de cinq chiffres vérifiant les deux conditions suivantes :

- i) leur écriture décimale n'utilise que deux chiffres différents,
- ii) la somme de leurs cinq chiffres est égale à 11.

1. Les chiffres 1 et 3 permettent d'écrire de tels nombres : en donner la liste complète.
2. Trouver toutes les autres paires de chiffres possibles pour écrire les nombres cherchés.
3. Combien y a-t-il de nombres entiers de cinq chiffres vérifiant les conditions **i)** et **ii)** ?

● Exercice 23

Corrigé, p. 137

On se propose de calculer $A = 50\,000\,006 \times 70\,000\,008$

1. En tapant ce produit sur une calculatrice scientifique, on peut voir apparaître sur l'écran :

$$3,50000082 \times 10^{15}$$

Justifier, sans calculer A , que cette valeur affichée n'est pas la valeur exacte de A .

2. Toujours sans calculer A , démontrer que $35 \times 10^{14} < A < 48 \times 10^{14}$. En déduire le nombre de chiffres de A .
3. Le nombre A peut aussi s'écrire $(5 \times 10^7 + 6) \times (7 \times 10^7 + 8)$. En utilisant les produits 5×7 , 5×8 , 6×7 et 6×8 , déterminer la valeur exacte de A .
4. Soit $B = 48\,506\,557 \times 505\,149$. Calculer en utilisant une calculatrice : $48\,506 \times 505$; 557×505 ; $48\,506 \times 149$; 557×149 . En déduire, sans nouvelle utilisation de la calculatrice, en écrivant les calculs, la valeur exacte de B .

● Exercice 24

Corrigé, p. 138

1. Parmi les nombres rationnels suivants, quels sont ceux qui sont décimaux ? Justifier la réponse.

$$\frac{1}{7}; \frac{27}{8}; \frac{91}{7}; \frac{42}{17}$$

2. Le but de cette question est d'étudier l'écriture décimale périodique de $\frac{1}{7}$.

a) Poser la division de 1 par 7. En déduire l'écriture décimale périodique de $\frac{1}{7}$.

b) Donner, en justifiant succinctement, la 32^e décimale du développement périodique de $\frac{1}{7}$.

	A	B
1	42	17
2	8	2
3	12	4
4	1	7
5	10	0
6	15	5
7	14	8
8	4	8
9	6	2
10	9	3
11	5	5
12	16	2
13	7	9
14	2	4
15	3	1
16	13	1
17	11	7
18	8	6
19	12	4
20	1	7
21	10	0
22	15	5
23	14	8
24	4	8

Tableau A

3. Le but de cette question est de produire l'écriture décimale périodique de $\frac{42}{17}$. En utilisant un tableur pour effectuer la division de 42 par 17 on obtient le tableau A. À partir de la cellule A2, la colonne A donne les restes successifs de la division de 42 par 17. À partir de la cellule B2, la colonne B donne les quotients successifs.

a) Donner sans justification la 20^e décimale de l'écriture décimale de $\frac{42}{17}$.

b) À partir du tableau A, donner l'écriture décimale périodique de $\frac{42}{17}$.

c) Expliquer pourquoi on est sûr de retrouver dans la cellule A18 un reste déjà obtenu.

4. On se propose maintenant de retrouver l'écriture fractionnaire du rationnel $a = 1,2\overline{3}$ (c'est-à-dire le nombre dont l'écriture décimale périodique est 1,2323232323...). Pour cela, calculer $100a - a$ et en déduire l'écriture de a sous forme fractionnaire.

● Exercice 25

Corrigé, p. 139

On justifiera toutes les réponses.

1. Peut-on trouver trois nombres entiers naturels consécutifs dont la somme est 207 ? Si oui, lesquels ?
2. Peut-on trouver trois nombres entiers naturels consécutifs dont la somme est 329 ? Si oui, lesquels ?
3. Caractériser les entiers naturels qui sont la somme de trois entiers consécutifs.
4. Déterminer toutes les valeurs possibles de d (avec $0 \leq d \leq 9$) pour que le nombre dont l'écriture est $47d5$, en base 10, soit la somme de trois entiers naturels consécutifs.

● Exercice 26

Corrigé, p. 139

Pour la fête de l'école, des parents d'élèves ont confectionné des flans pâtisseries et des tartes aux pommes.

1. Une part de flan pâtisseries est vendue 1,50 € et une part de tarte aux pommes 2,00 €. Dans l'après-midi, 72 parts de gâteaux ont été vendues pour une recette totale de 122,00 €. Déterminer le nombre de parts de chaque sorte qui ont été vendues :

- a) par une méthode algébrique ;
- b) par un raisonnement de type arithmétique.

2. À la fin de l'après-midi, il reste une tarte aux pommes entière. Quatre enfants se partagent ce gâteau de la façon suivante : Jean-Marc se sert en premier et en prend un tiers ; Sophie prend trois huitièmes de ce qu'a laissé Jean-Marc ; enfin, Antoine et Rémi se partagent le reste de façon équitable. À quelle fraction de tarte correspond la portion de chaque enfant ?

● Exercice 27

Corrigé, p. 140

Toutes les réponses seront justifiées.

1. Donner les restes des divisions par 6 et par 3 de chacune des trois sommes suivantes :
 $5 + 7 + 9$ $15 + 17 + 19$ $1\ 527 + 1\ 529 + 1\ 531$
2. Plus généralement :
 - a) Donner le reste de la division par 6 de la somme de trois nombres impairs consécutifs.
 - b) Donner le reste de la division par 3 de la somme de trois nombres impairs consécutifs.
3. Trouver trois nombres impairs consécutifs dont la somme est 12 027.
4. On cherche un nombre p tel que la somme de p nombres entiers impairs consécutifs soit toujours un multiple de 5. Déterminer la plus petite valeur possible de p .

● Exercice 28

Corrigé, p. 141

Un nombre entier naturel N est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs autres que lui-même.

Par exemple, 28 est un nombre parfait. En effet les diviseurs de 28 sont 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28 et $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

1. Montrer que 6 et 496 sont des nombres parfaits.
2. 120 est-il un nombre parfait ? Justifier votre réponse.

3. On admet qu'un nombre entier pair N est parfait si, et seulement si, il est de la forme : $N = 2^n (2^{n+1} - 1)$, n étant un entier supérieur ou égal à 1 tel que $(2^{n+1} - 1)$ soit un nombre premier.

a) Appliquer la formule pour n compris entre 1 et 4. Quels résultats retrouve-t-on ?

b) On donne ci-dessous la liste des nombres premiers compris entre 100 et 150.

En utilisant la propriété ci-dessus, déterminer le plus petit nombre parfait pair supérieur au nombre 496.

Nombres premiers compris entre 100 et 150 :

101 ; 103 ; 107 ; 109 ; 113 ; 127 ; 131 ; 137 ; 139 ; 149.

● Exercice 29

Corrigé, p. 141

a, b, c désignent trois chiffres distincts et différents de 0.

À cet ensemble de trois chiffres, on associe la famille des six nombres à trois chiffres qui s'écrivent en utilisant une fois le chiffre a , une fois le chiffre b et une fois le chiffre c .

Par exemple, aux trois chiffres 2, 5 et 7, on associe la famille constituée des six nombres suivants : 257, 275, 527, 572, 725 et 752.

On appelle S la somme des six nombres de la famille et M leur moyenne.

1. Calculer S et M correspondant à la famille donnée dans l'exemple ci-dessus.

2. Montrer que dans le cas général on a : $M = 37(a + b + c)$.

3. Trouver tous les ensembles de trois chiffres distincts et différents de 0 qui permettent de former une famille dont la moyenne M des six nombres vaut 370.

● Exercice 30

Corrigé, p. 142

1. La lettre x désigne un nombre.

Dire, en justifiant, si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

– Énoncé 1 : « Si $2x$ est un nombre entier naturel, alors x est un nombre entier naturel. »

– Énoncé 2 : « Si $\frac{x}{2}$ est un nombre entier naturel, alors x est un nombre entier naturel. »

– Énoncé 3 : « Si $x + 1$ est un nombre entier naturel, alors x est un nombre entier naturel. »

2. Étant donné trois nombres, en les additionnant deux à deux, on obtient trois sommes.

Si les sommes obtenues sont 78, 59 et 43, retrouver les trois nombres choisis.

● Exercice 31

Corrigé, p. 142

1. Écrire l'égalité caractéristique traduisant la division euclidienne de 1 001 par 11.

2. Soit $\overline{mcd u}$ un nombre à 4 chiffres écrit en base dix.

Vérifier que $\overline{mcd u} = 1\,001 \times m + 99 \times c + 11 \times d - m + c - d + u$.

3. a) À partir de la question précédente, énoncer et démontrer un critère de divisibilité par 11 pour les nombres inférieurs à 9 999 (condition nécessaire et suffisante).

b) Utiliser ce critère pour trouver trois nombres de quatre chiffres multiples de 11 ayant 38 centaines.

4. a) Montrer que le critère de la question précédente s'applique aussi aux nombres à 6 chiffres qu'on notera $\overline{abmcd u}$.

b) Utiliser alors ce critère pour déterminer si le nombre $1,2452 \times 10^{11}$ est divisible par 11. Justifier la réponse.

■ Géométrie

● Exercice 32

Corrigé, p. 144

ABC est un triangle tel que : $AB = 14$, $AC = 13$ et $BC = 15$.

Soit H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de C .

À tout point K du segment $[AH]$, on associe le rectangle $KLMN$ inscrit dans le triangle ABC , tel que les points L et M appartiennent respectivement aux segments $[AC]$ et $[BC]$ (figure 1).

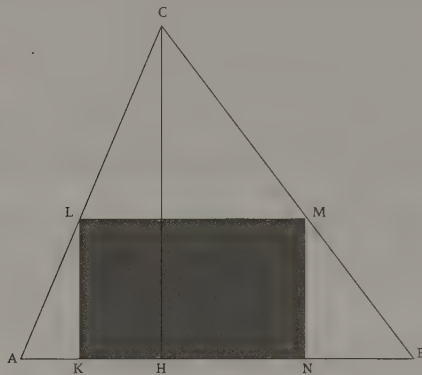


figure 1

On cherche la position du point K sur le segment $[AH]$ pour laquelle $KLMN$ est un carré. On admet que cette position existe et est unique.

1. Montrer que $AH = 5$ et $CH = 12$.

2. On construit la figure avec un logiciel de géométrie dynamique, le point K étant mobile sur $[AH]$.

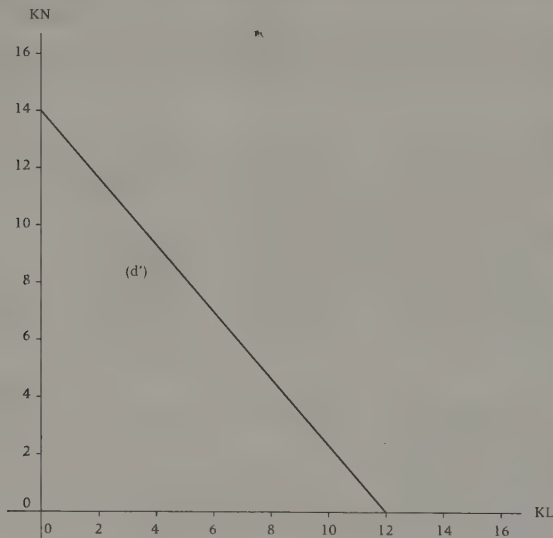


figure 2

Le logiciel permet un relevé des valeurs de KL et de KN lorsque K varie sur $[AH]$ et fournit une représentation graphique des variations de KN en fonction de KL (figure 2).

a) On peut constater que cette représentation graphique est limitée par les points de coordonnées $(12, 0)$ et $(0, 14)$. Pourquoi était-ce prévisible ?

b) À l'aide du graphique (figure 2), déterminer un encadrement par deux entiers consécutifs de la longueur KN pour laquelle $KLMN$ est un carré. Justifier.

3. a) Exprimer AK et BN en fonction de KL .

b) En déduire que $KN = 14 - \frac{7}{6}KL$.

4. Quelle est la position exacte du point K sur le segment $[AH]$ pour laquelle $KLMN$ est un carré ?

● Exercice 33

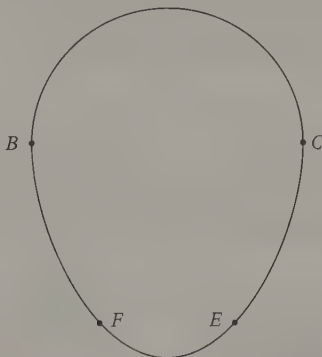
Corrigé, p. 145

L'ove est une figure géométrique, constituée de quatre arcs de cercle, dont la forme fait penser à un œuf.

On a représenté ci-dessous un ove $BCEF$ (la figure n'est pas en vraie grandeur).

Pour cet ove, on sait que :

- La partie supérieure de l'ove est un demi-cercle de diamètre $[BC]$ avec $BC = 10$ cm et le reste de la figure est dans le demi-plan de frontière (BC) ne contenant pas ce demi-cercle.
- D est le point de ce demi-plan tel que le triangle BCD soit isocèle et rectangle en D .
- L'arc de cercle \widehat{CE} a pour centre B avec BDE alignés.
- L'arc de cercle \widehat{FB} a pour centre C avec CDF alignés.
- L'arc de cercle \widehat{EF} a pour centre D .



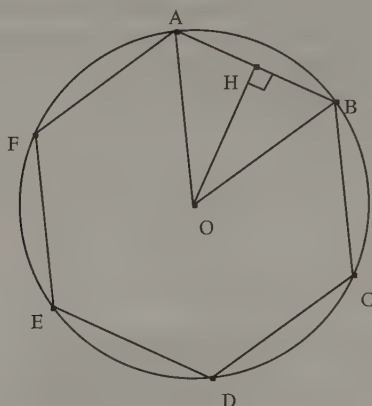
1. Construire en vraie grandeur l'ove ainsi définie.

2. Calculer le périmètre de l'ove construit à la question précédente (on donnera le résultat arrondi au millimètre).

● Exercice 34

Corrigé, p. 146

Un polygone régulier est un polygone convexe inscrit dans un cercle et dont tous les côtés ont la même longueur.



Partie A

On considère un hexagone régulier $ABCDEF$ inscrit dans un cercle de centre O et de rayon r (voir figure ci-dessus).

H est le pied de la hauteur issue de O , dans le triangle AOB .

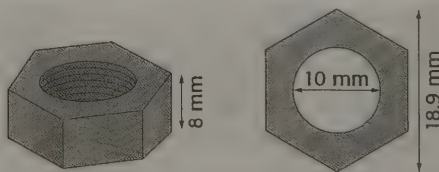
Montrer que l'aire de l'hexagone $ABCDEF$ est égale à $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser le résultat de la partie A.

On considère un écrou hexagonal en laiton référencé M10. Cette référence signifie que le diamètre de la base du cylindre central est de 10 mm.

La hauteur de l'écrou est égale à 8 mm et la distance entre deux sommets diamétralement opposés de l'hexagone est égale à 18,9 mm (voir schémas ci-dessous).



Les représentations ne sont pas à l'échelle. L'hexagone est régulier.

On ne prendra pas en compte l'épaisseur du filetage.

1. Déterminer le volume exact de l'écrou, et en donner l'arrondi au millimètre-cube.
2. Sachant que la masse volumique du laiton est $8\,400 \text{ kg/m}^3$, calculer la masse de l'écrou, arrondie au gramme.

Partie C

$RSTUV$ est un pentagone régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon r .

1. H est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle ROS . Déterminer la longueur OH en fonction de r .

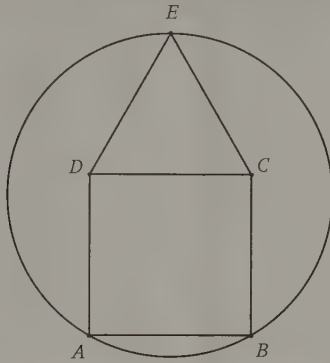
2. Calculer l'aire du pentagone $RSTUV$ en fonction de r .

● Exercice 35

Corrigé, p. 148

On considère la figure ci-contre constituée d'un cercle Γ passant par les sommets A et B d'un carré $ABCD$ de côté a et par le sommet E d'un triangle équilatéral EDC extérieur au carré.

L'objectif de cet exercice est de déterminer le rayon et le centre O du cercle Γ .



1. Soit A' le point d'intersection, autre que A , du cercle et de la droite (AD) . Démontrer que les points A' , O et B sont alignés.

2. Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$.

a) Démontrer que le point E appartient à la droite Δ .

b) Proposer une méthode de construction de la droite Δ utilisant uniquement la règle non graduée.

c) Démontrer que le point O appartient à la droite Δ .

d) Proposer une méthode de construction du point O utilisant uniquement la règle non graduée.

3. Quelle est la nature des triangles EDA et EOA ? En déduire que $\widehat{DAO} = 30^\circ$.

4. Quelle est la nature du triangle AOB ? En déduire la longueur du rayon du cercle.

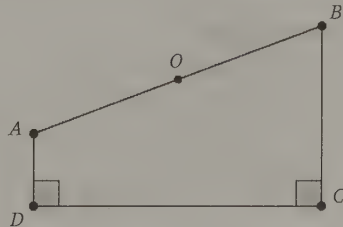
● Exercice 36

Corrigé, p. 149

$ABCD$ est un trapèze rectangle (en C et D), tel que $AD = 2$ cm, $DC = 8$ cm et $BC = 5$ cm. On appelle O le milieu du segment $[AB]$.

La figure ci-contre ne respecte pas les dimensions.

On construira la figure en vraie grandeur sur la copie.



1. On admet qu'il existe deux points M et M' du segment $[DC]$ tels que les triangles ABM et ABM' sont rectangles respectivement en M et M' . Construire, à la règle et au compas, les points M et M' (sachant que $DM < DM'$). On laissera apparents les traits de construction.

2. a) Calculer AB .

b) On appelle a la mesure de DM , l'unité étant le centimètre. Exprimer AM^2 et BM^2 en fonction de a .

c) Démontrer que a est solution de l'équation : $x^2 - 8x + 10 = 0$.

3. Pour approcher les deux solutions de cette équation, on a utilisé un tableur dont voici une copie d'écran :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	valeur de x	valeur de $x^2 - 8x + 10$		valeur de x	valeur de $x^2 - 8x + 10$		valeur de x	valeur de $x^2 - 8x + 10$		valeur de x	valeur de $x^2 - 8x + 10$	
2	0	10		1	3		1,50	0,25		1,550	0,0025	
3	1	3		1,1	2,41		1,51	0,2001		1,551	-0,002399	
4	2	-2		1,2	1,84		1,52	0,1504		1,552	-0,007296	
5	3	-5		1,3	1,29		1,53	0,1009		1,553	-0,012191	
6	4	-6		1,4	0,76		1,54	0,0516		1,554	-0,017084	
7	5	-5		1,5	0,25		1,55	0,0025		1,555	-0,021975	
8	6	-2		1,6	-0,24		1,56	-0,0464		1,556	-0,026864	
9	7	3		1,7	-0,71		1,57	-0,0951		1,557	-0,031751	
10	8	10		1,8	-1,16		1,58	-0,1436		1,558	-0,036636	
11				1,9	-1,59		1,59	-0,1919		1,559	-0,041519	
12				2	-2		1,60	-0,24		1,560	-0,0464	
13				6	-2		6,40	-0,24		6,440	-0,0464	
14				6,1	-1,59		6,41	-0,1919		6,441	-0,041519	
15				6,2	-1,16		6,42	-0,1436		6,442	-0,036636	
16				6,3	-0,71		6,43	-0,0951		6,443	-0,031751	
17				6,4	-0,24		6,44	-0,0464		6,444	-0,026864	
18				6,5	0,25		6,45	0,0025		6,445	-0,021975	
19				6,6	0,76		6,46	0,0516		6,446	-0,017084	
20				6,7	1,29		6,47	0,1009		6,447	-0,012191	
21				6,8	1,84		6,48	0,1504		6,448	-0,007296	
22				6,9	2,41		6,49	0,2001		6,449	-0,002399	
23				7	3		6,50	0,25		6,450	0,0025	
24												

a) En observant les colonnes A et B, l'utilisateur du tableur a décidé d'explorer les valeurs de x entre 1 et 2, puis entre 6 et 7. Expliquer ce choix.

Descrirc précisément ce que fait l'utilisateur dans les colonnes D et E.

b) Donner un encadrement d'amplitude un millièmc de chacune des deux solutions de l'équation :

$$x^2 - 8x + 10 = 0.$$

4. Donner une valeur approchée de DM et DM' au millimètre près par défaut.

● Exercice 37

Corrigé, p. 150

ABC est un triangle dans lequel l'angle de sommet A est aigu.

On considère le cercle de diamètre $[BC]$. Il coupe les droites (AB) et (AC) respectivement en D et E . Les droites (BE) et (CD) se coupent en H .

1. Faire une figure.

2. Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

3. Construire sur votre figure, avec la règle non graduée et le compas, le point M , quatrième sommet du parallélogramme $BCMA$ et le point N , quatrième sommet du parallélogramme $BCAN$. On laissera les traits de construction apparents.

4. Démontrer que le point A est le milieu de $[MN]$.

● Exercice 38

Corrigé, p. 151

1. On considère une pyramide $SABCD$ (figure 1) telle que :
 – sa base $ABCD$ est un carré de côté 4 cm et de centre O ,
 – son sommet S est sur la perpendiculaire en O au plan (ABC) et la distance SO est égale à 2 cm.

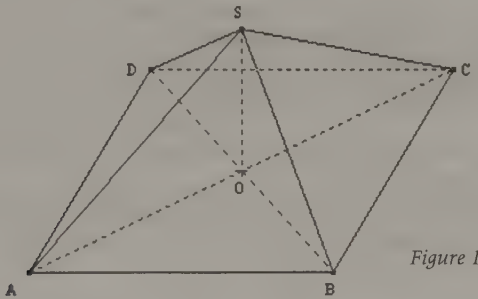


Figure 1

a) Calculer la valeur exacte de la longueur de l'arête $[SA]$ et préciser la nature du triangle SAB .

b) En utilisant le quadrillage de la copie (de dimensions données 0,5 cm \times 0,5 cm), construire, à la règle et au compas, un segment de longueur SA .

2. On considère le solide obtenu en accolant par leur base carrée deux pyramides identiques à la pyramide $SABCD$ (figure 2). Construire sur votre copie un patron de ce solide.

3. Soit un cube $ABCDEFGH$ d'arête 4 cm. Sur chaque face du cube on construit une pyramide identique à la pyramide $SABCD$ de la question 1.

a) Calculer le volume du solide ainsi obtenu.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule : $V = \frac{1}{3} \times B \times h$, où B désigne l'aire de sa base, et h la hauteur de la pyramide.

b) Dans cette question, on s'intéresse aux deux pyramides construites sur les faces $ABCD$ et $FBCG$ et de sommets respectifs S et S' (figure 3).

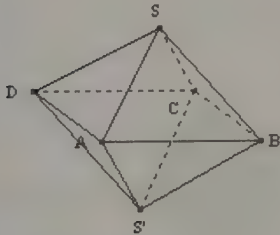


Figure 2

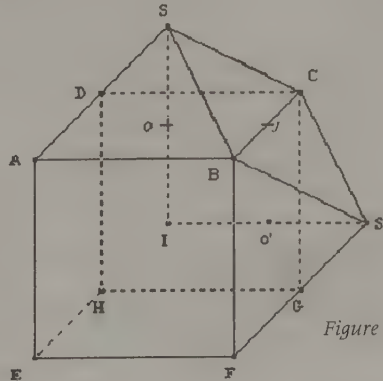


Figure 3

On note I le centre du cube, J le milieu de $[BC]$ et O et O' les centres des faces $ABCD$ et $FBCG$ respectivement.

i) On considère le plan (SIS') auquel appartiennent aussi les points O , J et O' (on ne demande pas de le démontrer). Montrer que l'angle $\widehat{SJS'}$ est plat.

ii) Quelle est la nature du quadrilatère $SBS'C$? Justifier votre réponse.

● Exercice 39

Corrigé, p. 153

1. $ABCD$ est un quadrilatère convexe quelconque. I , J , K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$? Justifier votre réponse.

2. Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $ABCD$ est un carré.

a) Préciser la nature de $IJKL$. Justifier votre réponse.

b) Quelle est l'image de I par la symétrie d'axe (AC) ?

c) P est le point d'intersection des droites (LB) et (AC) . Montrer que les points D , P et I sont alignés.

d) Donner la valeur du rapport $\frac{DP}{DI}$. Justifier votre réponse (on pourra considérer des droites remarquables du triangle ABD).

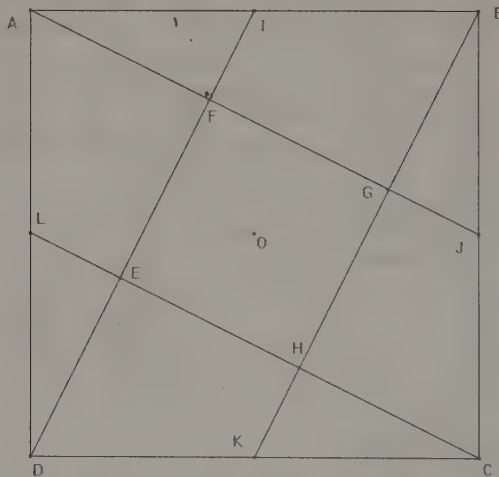
e) Soit R le point d'intersection des droites (AC) et (DJ) . Exprimer la distance PR en fonction de AC . Justifier votre réponse.

● Exercice 40

Corrigé, p. 154

$ABCD$ est un carré de centre O , et I , J , K et L sont les milieux de chacun de ses côtés. Le segment $[AJ]$ coupe les segments $[DI]$ et $[BK]$ en F et G respectivement; le segment $[CL]$ coupe les segments $[BK]$ et $[DI]$ en H et E respectivement.

On désigne par a la longueur des côtés du carré $ABCD$.



1. Démontrer que le quadrilatère $BKDI$ est un parallélogramme. Calculer en fonction de a la longueur de ses côtés.

2. On admet que le quadrilatère $EFGH$ est un carré (on ne demande pas de le démontrer).

a) Montrer que $AJ = \frac{5}{2} FG$

b) En déduire le rapport $\frac{FG}{AB}$, puis le rapport des aires des deux carrés.

3. a) On appelle M le milieu du segment $[FG]$. Démontrer que les trois points E , M et B sont alignés.

b) On veut construire un carré $PQRS$ à l'intérieur du carré $EFGH$, par le même procédé qui a permis de construire le carré $EFGH$ à l'intérieur du carré $ABCD$.

Expliquer pourquoi cette construction peut être réalisée à l'aide uniquement d'une règle non graduée (sans compas ni équerre...).

c) Calculer en fonction de a la longueur du côté du carré $PQRS$.

● Exercice 41

Corrigé, p. 156

Soit $ABCD$ un carré de centre O et de côté 9 cm.

On note I et J les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[BC]$, puis E et F les points d'intersection de la droite (AC) avec respectivement les droites (DI) et (DJ) . La perpendiculaire en E à la droite (AC) coupe (AB) en H ; la perpendiculaire en F à la droite (AC) coupe (BC) en G . On considère alors le quadrilatère $EFGH$.

1. Construction

Tracer le carré $ABCD$ et les points I et J en s'aidant du quadrillage de la copie (un carreau de la copie correspond à une longueur de 5 mm).

Compléter la figure par une construction à la règle et au compas. On laissera apparents les traits de construction.

2. L'objectif de cette question est de prouver que $EFGH$ est un carré.

a) Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABD .

En déduire la valeur du rapport $\frac{AE}{AO}$, puis prouver que $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$.

b) Montrer que $AE = 3\sqrt{2}$ cm.

c) Quelle est la nature du triangle AEH ? Justifier la réponse.

En déduire que $EH = 3\sqrt{2}$ cm.

d) On rappelle qu'une diagonale d'un carré est un axe de symétrie de ce carré.

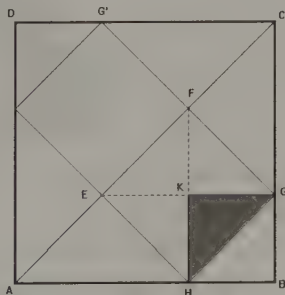
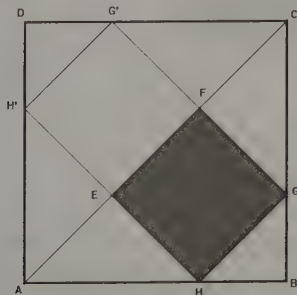
Indiquer sans justification les symétriques respectifs des points E et H par rapport à l'axe (DB) . En déduire les longueurs FG , FC puis la longueur EF .

e) Conclure sur la nature du quadrilatère $EFGH$. Justifier la réponse.

3. Recherche d'un pavage commun aux carrés $ABCD$ et $EFGH$

On rappelle que le pavage d'une surface est l'action de couverture totale et sans superposition de cette surface par un nombre entier de « pièces » isométriques.

Les figures ci-dessous correspondent aux carrés $ABCD$ et $EFGH$ construits dans la question 1.



a) Peut-on paver le carré $ABCD$ à l'aide de carrés isométriques au carré $EFGH$? Justifier la réponse.

b) Peut-on paver les carrés $EFGH$ et $ABCD$ à l'aide de triangles isométriques au triangle GHK où K désigne le centre du carré $EFGH$? Justifier la réponse.

● Exercice 42

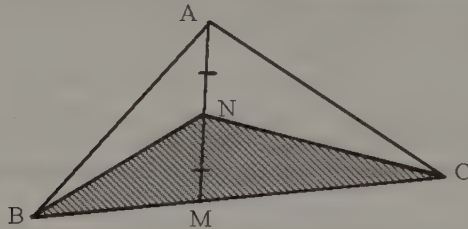
Corrigé, p. 157

Partie A

1. Démontrer qu'une médiane d'un triangle partage celui-ci en deux triangles de même aire.

2. On considère le triangle ABC ci-dessous.

Le point M est un point du segment $[BC]$ et le point N est le milieu du segment $[AM]$. Comparer l'aire de la surface hachurée et l'aire de la surface blanche. Justifier.



Partie B

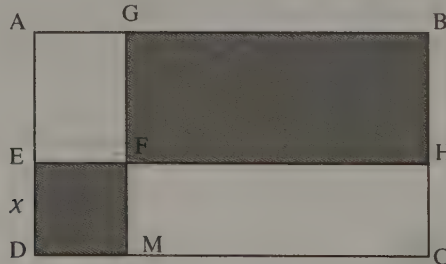
On considère un rectangle $ABCD$ (représenté ci-dessous sans respect des dimensions) tel que : $AB = 20$ cm et $AD = 8$ cm.

Les points E, F, G, H et M sont tels que :

- E appartient à $[AD]$,
- M appartient à $[DC]$,
- le quadrilatère $EDMF$ est un carré,
- G appartient à $[AB]$,
- le quadrilatère $GFHB$ est un rectangle.

On admettra que G, F et M sont alignés et que E, F et H le sont également.

On note : $DE = x$, avec $0 \leq x \leq 8$, l'unité choisie étant le centimètre.



1. Démontrer que l'aire de la partie grisée est égale à : $2x^2 - 28x + 160$.

2. Établir l'égalité : $2x^2 - 28x + 160 = 2(x - 7)^2 + 62$.

3. Pour quelle valeur de x l'aire de la partie grisée est-elle minimale ?

4. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire de la partie grisée est-elle égale à 112 cm^2 ?

● Exercice 43

Corrigé, p. 159

La figure 1 ci-contre représente un cube en bois $ABCDHEFG$ dont les faces opposées sont décorées avec le même motif : hachures, points ou uni.

Le volume de ce cube est 216 cm^3 .

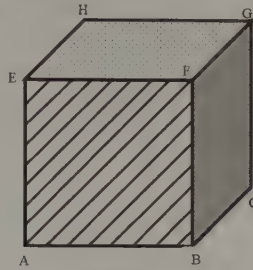


figure 1

1. Nommer chaque face cachée de ce cube et indiquer son motif.
2. Parmi les patrons suivants quels sont ceux qui correspondent au cube $ABCDHEFG$? Justifier la réponse.



patron n° 1



patron n° 2



patron n° 3



patron n° 4

3. Le cube $ABCDHEFG$ est scié en petits cubes identiques dont les arêtes sont 3 fois plus petites que celles du cube $ABCDHEFG$ (cf. figure 2).

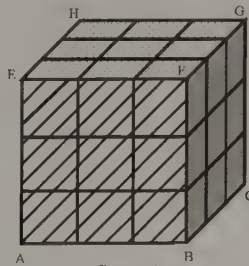


figure 2

- a) Combien de petits cubes obtient-on ?
- b) Déterminer le volume d'un petit cube.
- c) En déduire la longueur des arêtes d'un petit cube et du grand cube $ABCDHEFG$.

d) Ces petits cubes n'ont pas tous le même nombre de faces décorées. Reproduire et compléter le tableau suivant qui compte les cubes ayant le même nombre de faces décorées.

Nombre de faces décorées	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de petits cubes							

e) Quel est le nombre total de petites faces décorées ?

4. Par assemblage et collage, on reconstitue le gros cube initial auquel on retire un petit cube à chacun de ses 8 sommets ; on obtient ainsi un nouveau solide.

a) Calculer le volume de ce solide.

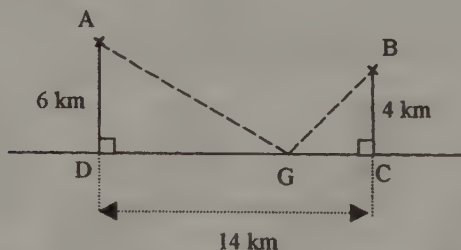
b) Calculer son aire.

● Exercice 44

Corrigé, p. 160

Deux villes A et B se situent du même côté d'une voie ferrée rectiligne (CD), comme l'indique le schéma ci-dessous.

On cherche où construire une gare G pour que le trajet de la ville A à la ville B en passant par la gare G soit le plus court possible.



1. Représenter les points A , B , C et D sur une figure pour laquelle 1 cm correspond à 1 km. Quelle est l'échelle de cette représentation ? Justifier la réponse.

2. Construire le point E symétrique du point B par rapport à la droite (CD).

3. On appelle F le point d'intersection des droites (AE) et (CD).

Soit M un point quelconque du segment $[DC]$ distinct du point F .

Démontrer que $AM + MB > AF + FB$.

4. En déduire l'endroit où l'on doit construire la gare G .

5. Démontrer que : $FD = \frac{3}{2} FC$.

6. En déduire que $FC = 5,6$ km.

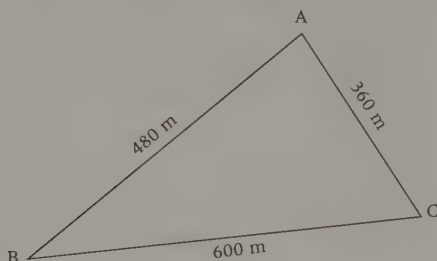
7. Calculer, au mètre près, la longueur du trajet de la ville A à la ville B en passant par la gare G .

■ Organisation de données

● Exercice 45

Corrigé, p. 162

On délimite, sur un terrain plat, un parcours de cross avec 3 jalons, représentés par les points A , B et C comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



Le départ et l'arrivée de la course se font au point A .

Partie A

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .
2. a) Calculer l'aire du triangle ABC .
- b) En déduire la distance du point A à la droite (BC) .

Partie B

1. José a fait deux tours de ce parcours à la vitesse moyenne de 8 km/h. Combien de temps lui a-t-il fallu ? Donner la réponse exacte, en heure, minute, seconde.
2. Pour calculer la vitesse moyenne en m/min de chaque élève durant la course, on construit une feuille de calcul comme ci-dessous :

SOMME					
	A	B	C	D	
1	Distance totale parcourue (en m) :				2880
2	Elève	Classe	Durée		Vitesse moyenne (en m/min)
3			Minutes	Secondes	
4	Armand	5e A	25	15	=E\$1/(C4+D4/100)
5	Bakhali	5e B	25	26	
6	Clotilde	5e A	26	24	
7	Florent	5e C	26	30	
8	Julie	5e B	25	20	

Ce tableau nous indique que l'élève Armand a mis 25 minutes et 15 secondes pour faire les deux tours de parcours.

- a) La formule « =E\$1/(C4+D4/100) » entrée dans la cellule E4 donne-t-elle le résultat souhaité ? Sinon la corriger.
- b) On envisage de recopier vers le bas la formule correcte entrée dans E4 pour calculer la vitesse moyenne (en m/min) des élèves de 5^e du collège. Pourquoi le symbole « \$ » devant « 1 » est-il nécessaire ?

Partie C

1. Pour surveiller la course, on place un enseignant au point J , situé à égale distance des points A , B et C .

a) Préciser la position du point J . Justifier.

b) Construire, à la règle et au compas, le triangle ABC à l'échelle 1/5 000 et le point J . (On laissera les traces de construction.)

On pourra compléter la figure au fur et à mesure des questions.

Les questions 2. et 3. sont indépendantes.

2. On place deux autres enseignants sur le parcours :

– l'un au point K , milieu de $[AB]$;

– l'autre au point L , milieu de $[AC]$.

Montrer que $AKLJ$ est un rectangle.

3. On appelle H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC . Deux postes de secours sont installés en A et H . Montrer que si l'infirmière du collège se déplace sur le segment $[KJ]$, elle reste à égale distance de ces deux postes.

● Exercice 46

Corrigé, p. 164

On étudie la fonction f qui, à la vitesse v d'un véhicule (exprimée en mètre par seconde) associe la distance de freinage (exprimée en mètre).

Cette fonction est définie par $f: v \mapsto k \times v^2$, où k est un coefficient qui dépend notamment de l'état de la route.

Partie 1

Dans des conditions « normales », lorsque la route est sèche, le coefficient k est égal à 0,08.

1. On utilise un tableur pour créer le tableau de valeurs ci-après :

	B2		f	0								
	A	B	C	D	E	F	G	H				
1	Vitesse (en m/s)	0	5	10	15	20	25	30				
2	Distance de freinage	<input type="text" value="0"/>										
3	coefficient k	0,08										

a) Donner une formule qui, entrée dans la cellule B2 (puis recopiée vers la droite), permet de compléter la ligne 2.

b) On veut qu'en modifiant la valeur de k en B3, les distances soient recalculées automatiquement. La formule proposée au a) satisfait-elle cette nouvelle contrainte ?

Si oui, pourquoi ? Si non, en proposer une autre qui convient.

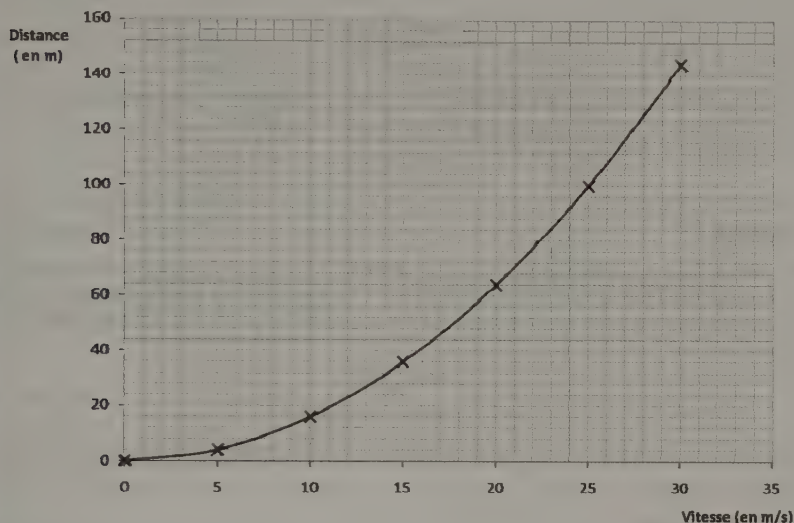
2. a) Calculer la distance de freinage sur route sèche pour une vitesse de 72 km/h.

b) À partir de quelle vitesse (arrondie à l'unité, en km/h), la distance de freinage sur route sèche est-elle supérieure à 45 mètres ?

Partie 2

Sur une route mouillée, le coefficient k est différent de 0,08.

Après avoir modifié la valeur de k dans la feuille de calcul précédente, on a construit la représentation graphique qui donne la distance de freinage sur route mouillée en fonction de la vitesse.



1. En utilisant cette représentation graphique, estimer la valeur du coefficient k sur route mouillée.
2. Où se situerait la représentation graphique donnant la distance de freinage sur route sèche en fonction de la vitesse, par rapport à la représentation graphique tracée ? Justifier la réponse par le calcul.

● Exercice 47

Corrigé, p. 165

Cet exercice comporte deux questions indépendantes.

1. Des petites briques de jus d'orange d'une contenance de 20 cL ont la forme de pavés droits dont la base a pour dimensions 4 cm et 6 cm.

a) Calculer la hauteur h d'une de ces briques. On donnera une valeur approchée de h à 1 mm près par excès.

b) Un magasin propose ces briques au prix de 2,89 € le lot de six. Calculer le prix d'un litre de jus d'orange, arrondi au centime.

c) Lors d'une opération promotionnelle, le magasin propose deux options :

- option A : une remise de 30 % sur le prix d'un lot ;
- option B : prix du lot inchangé mais avec deux briques « gratuites » en plus.

Quelle option donne le prix au litre le moins élevé ? Justifier la réponse.

2. Dans un autre magasin, une offre promotionnelle consiste à « rembourser » la TVA sur tous les produits. Ainsi le client voit affiché le prix toutes taxes comprises (TTC) mais ne paie en caisse que le prix hors taxes.

a) Quel est le prix payé en caisse (arrondi au centime) si le prix affiché est 42,55 € et le taux de TVA est 5,5 % ?

b) Pour pouvoir retrouver les prix promotionnels des objets qu'il achète dans ce magasin, un client prépare, à l'aide d'un tableur, la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E
1	Produits	prix affichés (TTC)	Taux de TVA	prix promotionnels	
2	produits alimentaires		5,5 %		
3	produits à taux normal		19,6 %		
4					
5					

Quelle formule peut-il taper dans la case D2 pour que s'affiche le prix promotionnel d'un produit alimentaire dès que l'on entre son prix affiché en B2 ?

Quelle formule peut-il taper en D3 ?

● Exercice 48

Corrigé, p. 165

Une marque de peintures murales propose des pots de peinture au prix de vente de 39 € l'un. On appellera par la suite ces pots, des pots « hors promotion ». Cette marque propose aussi, en promotion, pour le même prix de 39 € le pot, des pots de 3 litres sur lesquels un bandeau indique :

+ 20 % gratuit
Ce pot permet de couvrir 48 m²

On notera qu'il est sous-entendu que les 20 % gratuits portent sur la contenance des pots « hors promotion ».

1. Quel est le volume d'un pot de peinture « hors promotion » ?
2. À quel prix revient, pour le client, un litre de peinture prélevé dans un pot « hors promotion » ?
3. Finalement, de combien en pourcentage le prix au litre a-t-il baissé ? (On donnera un arrondi de cette valeur au dixième.)
4. On doit peindre les quatre parois et le fond d'une piscine parallépipédique de longueur 6 mètres, de largeur 5 mètres et de profondeur 2,25 mètres avec 3 couches de peinture. Quelle est l'économie en euros réalisée grâce à la promotion ?

● Exercice 49

Corrigé, p. 166

L'indice de masse corporelle – *IMC* – d'un individu est égal au quotient du poids (en kg) par le carré de la taille (en m) de cette personne.

1. Entre les mois d'avril et de septembre, Antoine a fait un régime et a perdu 12 % de son poids initial. Sachant qu'en septembre il pèse 64 kg et qu'il mesure 1,60 m, calculer :
 - a) Son *IMC* en septembre.
 - b) Son poids en avril (on donnera l'arrondi au dixième de kilogramme).
2. Encouragé par ce premier résultat, Antoine a poursuivi son régime et perdu encore 8 % de son poids entre septembre et décembre. Calculer le pourcentage de la perte de poids d'Antoine entre avril et décembre. On donnera le résultat arrondi à 1 % près.

● Exercice 50

Corrigé, p. 166

Lucie et Marc participent à une compétition de tir à l'arc. Dans le tableau ci-dessous, on trouve les scores partiels des 8 tours de volées de 3 flèches (10 est le score parfait pour une flèche).

	Tour 1	Tour 2	Tour 3	Tour 4	Tour 5	Tour 6	Tour 7	Tour 8	Moyenne
Lucie	x	y	29	12	26	27	17	25	23
Marc	18	28		12	29	26	19	22	

1. Calculer la moyenne des scores de Marc si le score obtenu au tour 3 est égal à la moyenne des sept tours déjà notés dans le tableau.
2. Une performance meilleure au tour 3 lui aurait-elle permis d'obtenir une moyenne supérieure ou égale à celle de Lucie ? Justifier.
3. Le score x obtenu par Lucie au premier tour est supérieur de 40 % au score y qu'elle a obtenu au second tour.
Après avoir exprimé x en fonction de y , calculer x et y .

● Exercice 51

Corrigé, p. 167

Deux robots, Arthur et Boz, sont placés aux deux extrémités d'une piste rectiligne de 300 mètres de long qui relie un point A à un point B . Arthur est placé au point A et Boz au point B . On les fait partir l'un vers l'autre à 9 heures précises.

Arthur se déplace à la vitesse constante de 6 km/h et Boz à la vitesse constante de 24 km/h.

1. Exprimer ces deux vitesses en mètre par minute.
2. On veut déterminer l'heure de rencontre des deux robots.
 - a) Représenter dans un même repère les déplacements des deux robots.
 - b) Par lecture graphique, estimer l'heure de la rencontre.
3. Déterminer par le calcul, l'heure de rencontre des deux robots.

● Exercice 52

Corrigé, p. 168

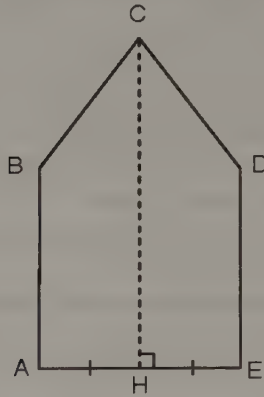
La table traçante automatisée d'un architecte réalise un tracé rectiligne de 10 centimètres de longueur en 2,8 secondes, quelle que soit la direction.

Dans les quatre premières questions, on négligera le temps nécessaire à un changement de direction.

1. Quelle est la durée nécessaire à l'impression d'un segment de droite de 28 centimètres de longueur ?
2. Quelle est la longueur d'un segment de droite imprimé en 3,5 secondes ?
3. La durée d'impression des quatre côtés d'un rectangle est 6,3 secondes. Quelles peuvent être les dimensions de ce rectangle ? Proposer deux réponses possibles. Justifier.
4. Calculer la durée nécessaire à l'impression d'un carré dont la diagonale a pour longueur 6 centimètres. On donnera une valeur approchée au dixième de seconde près.

5. En réalité, le temps nécessaire à un changement de direction est d'un dixième de seconde.

Calculer la durée nécessaire à la réalisation du tracé $ABCDEA$ de la figure ci-dessous.



$$AB = AE = DE = 6 \text{ cm}$$

$$CH = 10 \text{ cm}$$

H est le milieu du segment $[AE]$

Les droites (AB) et (ED) sont perpendiculaires à la droite (AE) .

● Exercice 53

Corrigé, p. 169

Dans la figure ci-après se trouvent deux graduations régulières d'une même droite, l'une au-dessus (appelée ici graduation supérieure), l'autre en dessous (appelée ici graduation inférieure). Par exemple, le nombre 2 de la graduation supérieure correspond au nombre 14 de la graduation inférieure.



1. Quel est le nombre de la graduation inférieure correspondant au nombre 12 sur la graduation supérieure ?

Pour les questions suivantes, les réponses seront **justifiées**.

2. Quel est le nombre de la graduation inférieure correspondant au nombre 2007 sur la graduation supérieure ?

3. Quel est le nombre de la graduation supérieure correspondant au nombre 0 sur la graduation inférieure ?

4. On appelle x un nombre de la graduation supérieure et y le nombre correspondant sur la graduation inférieure. La correspondance entre x et y est donnée par l'égalité $x = ay + b$. Déterminer a et b .

● Exercice 54

Corrigé, p. 170

Un groupe de vingt-sept personnes va au théâtre. Les adultes paient 45 € et les enfants paient moitié prix. Leur dépense totale s'élève à 877,50 €.

On veut connaître le nombre d'adultes et le nombre d'enfants de ce groupe.

1. Utilisation d'un tableau

- En observant la feuille de calcul en annexe, donner la solution du problème.
- Recopier et compléter la ligne 21.
- Sachant que la formule entrée dans la cellule B4 est : = $\boxed{27 - A4}$, quelles formules ont pu être écrites dans les cellules C4, D4 et E4 afin d'obtenir les valeurs de la feuille de calcul de l'annexe ?

2. Résoudre ce problème :

- en utilisant une méthode algébrique.
- en faisant appel à une démarche arithmétique.

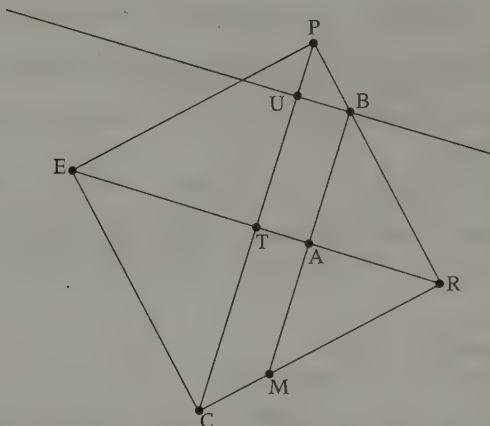
	A	B	C	D	E
1	prix d'une place adulte	45			
2					
3	Nombre d'adultes	Nombre d'enfants	Prix payé par les adultes	Prix payé par les enfants	Somme totale dépensée
4	0	27	0	607,50	607,50
5	1	26	45	585	630
6	2	25	90	562,50	662,50
7	3	24	135	540	675
8	4	23	180	517,50	697,50
9	5	22	225	495	720
10	6	21	270	472,50	742,50
11	7	20	315	450	765
12	8	19	360	427,50	787,50
13	9	18	405	405	810
14	10	17	450	382,50	832,50
15	11	16	495	360	855
16	12	15	540	337,50	877,50
17	13	14	585	315	900
18	14	13	630	292,50	922,50
19	15	12	675	270	945
20	16	11	720	247,50	967,50
21	17				
22		9			
23	19	8	855	180	1035
24	20	7	900	157,50	1057,50
25	21	6	945	135	1080
26	22	5	990	112,50	1102,50
27	23	4	1035	90	1125
28					
29	25	2	1125	45	1170
30	26	1	1170	22,50	1192,50
31	27	0	1215	0	1215

● Exercice 55

Corrigé, p. 171

On considère la figure ci-après, dans laquelle :

- $EPRC$ est un carré de centre T ;
- M est un point du segment $[CR]$, distinct de C et de R ;
- B est le point du segment $[PR]$ tel que $CM = PB$;
- A est le point d'intersection des droites (MB) et (ER) ;
- U est le point d'intersection de la droite parallèle à la droite (ER) passant par B et de la droite (PC) .



L'objectif de l'exercice est de déterminer la position du point M permettant d'obtenir le quadrilatère $BATU$ d'aire maximale.

1. Montrer que le quadrilatère $BATU$ est un rectangle.

Dans la suite du problème, on donne $CR = 40$. On pose $CM = x$.

2. a) Dans quel intervalle x varie-t-il ?

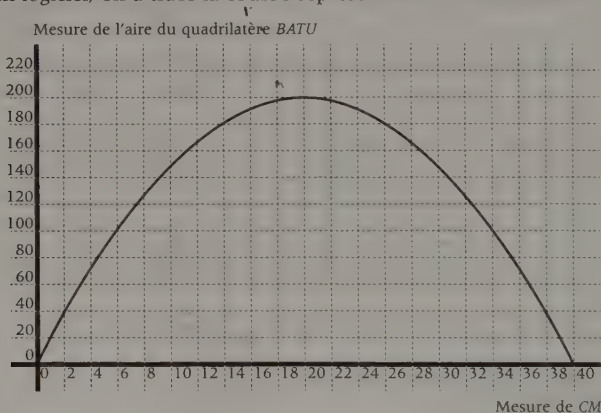
b) Exprimer UB en fonction de x .

c) Exprimer TU en fonction de x .

d) Montrer que la mesure de l'aire du rectangle $BATU$ s'exprime en fonction de x

par $A(x) = \frac{x(40-x)}{2}$.

3. À l'aide d'un logiciel, on a tracé la courbe représentative de la fonction A :



Lire sur le graphique la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle est maximale. Quelle est la mesure de cette aire ?

4. Résolution algébrique

a) Montrer que $A(x) = \frac{-(x-20)^2}{2} + 200$.

b) En déduire que l'aire maximale est atteinte pour $x = 20$.

c) Montrer que, lorsque l'aire est maximale, le quadrilatère $BATU$ est un carré.

● Exercice 56

Corrigé, p. 172

1. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AC = 3,5$ cm et $BC = 12,5$ cm.

Calculer la longueur AB .

2. a et b étant deux nombres entiers, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 36 \\ a - b = 4 \end{cases}$$

Calculer $a^2 - b^2$ puis $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Déduire des réponses obtenues les dimensions d'un triangle ABC , rectangle en A , tel que $AB = 12$ cm et tel que AC et BC s'expriment à l'aide de nombres entiers. Justifier.

3. a) Donner toutes les décompositions possibles de 144 sous la forme d'un produit de deux entiers naturels.

b) En déduire quatre couples d'entiers naturels non nuls, solutions de l'équation $a^2 - b^2 = 144$. Justifier.

■ Mesure des grandeurs

● Exercice 57

Corrigé, p. 173

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

1. Soit $ABCD$ un carré de centre M . On admet l'existence des points E, F, G et H tels que :
 E est le point de la demi-droite $[MC)$ tel que BDE est un triangle équilatéral ;
 F est le point symétrique du point M par rapport au point C ;
 G est le point tel que $MDGE$ est un rectangle ;
 H est le point tel que $MDHF$ est un rectangle.
Faire une figure avec $AB = 6$ cm.

Dans la suite de l'exercice, la longueur AB est quelconque.

2. a) Justifier que l'aire du rectangle $MDGE$ est égale à l'aire du triangle BDE .
b) Justifier que l'aire du rectangle $MDHF$ est égale à l'aire du carré $ABCD$.
c) En déduire que l'aire du carré $ABCD$ est supérieure à l'aire du triangle BDE .
3. On pose $AB = c$.
a) Exprimer l'aire du triangle BDE en fonction de c .
b) Retrouver le résultat de la question 2. c).
4. Déterminer le point P de la demi-droite $[MC)$ tel que l'aire du triangle BDP soit égale à l'aire du carré $ABCD$.

● Exercice 58

Corrigé, p. 174

On a représenté ci-contre un tube creux en aluminium en perspective.

Son diamètre intérieur est 8 cm, son diamètre extérieur est 12 cm.

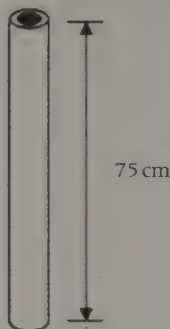
L'aluminium a une masse volumique de $2,7 \text{ g/cm}^3$.

On veut transporter un certain nombre de ces tubes dans un camion dont la charge utile ne peut dépasser 14 tonnes.

En supposant que le volume du camion est suffisant, combien peut-on transporter de tubes au maximum ?

On utilisera 3,14 comme valeur approchée de π .

On rappelle que le volume d'un cylindre est donné par :
 $V = \pi \times r^2 \times h$, où r désigne le rayon de la base et h la hauteur du cylindre.



● Exercice 59

Corrigé, p. 175

Pour carreler une pièce rectangulaire mesurant 4,18 m sur 5,67 m, un carreleur propose à des propriétaires le choix entre deux modèles de dalles carrées :

1. Le premier modèle a 29 cm de côté et coûte 2,30 € l'unité.
Avec ce modèle, il n'utilise que des dalles entières et il complète avec du joint autour de chaque dalle.
a) Calculer le nombre maximal de dalles que l'on peut poser dans la largeur de la pièce.
b) Calculer le nombre maximal de dalles que l'on peut poser dans la longueur de la pièce.
c) Les joints autour des dalles auront-ils tous la même largeur ?
Si oui, quelle est cette largeur ?

2. Le deuxième modèle a 36 cm de côté et coûte 3,10 € l'unité. Avec ce modèle-là, il est préconisé des joints de 0,6 cm et le carreleur est alors dans l'obligation de couper des dalles et les découpes ne sont pas réutilisées. Calculer le nombre de dalles nécessaires.
3. Quel sera le choix le moins coûteux pour l'achat des dalles ?

● Exercice 60

Corrigé, p. 175

On considère une toile rectangulaire $ABCD$, de longueur 1,20 m et de largeur 0,84 m, sur laquelle on a tracé une croix à l'aide de deux bandes rectangulaires de largeurs respectives x et y .

Ces bandes sont disposées perpendiculairement aux côtés du rectangle, la bande de largeur x est celle qui est perpendiculaire au segment $[AB]$.

La croix est hachurée et la surface restante S est peinte à l'aide de trois couleurs : vert, jaune et rouge. Cette situation est illustrée par la *figure 1* qui ne respecte pas les proportions.

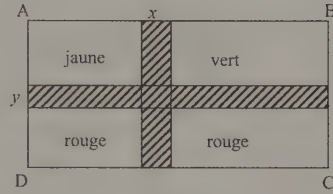


figure 1

1. Dans cette question, l'aire de la surface peinte en vert représente 35 % de l'aire de la surface peinte S , l'aire de la surface peinte en jaune représente 25 % de l'aire de la surface peinte S et le rouge recouvre une surface dont l'aire est $2\,688\text{ cm}^2$.

- a) Déterminer l'aire de la surface peinte S , en centimètre carré.
 b) Quel pourcentage de l'aire de la surface totale de la toile représente l'aire de la surface peinte S ? (On donnera une valeur approchée au dixième.)
 c) On sait que la largeur x est égale à $\frac{1}{8}$ de la longueur AB . Déterminer x et en déduire y .

2. Dans cette question, la largeur x est égale à 12 cm. On souhaite que l'aire de la surface de la croix représente entre 20 % et 22 % de l'aire de la surface totale de la toile, et que y s'exprime comme un nombre entier de centimètres. Déterminer les valeurs possibles de y .

● Exercice 61

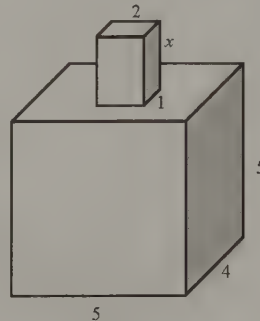
Corrigé, p. 176

Un fabricant de parfum veut fabriquer deux flacons de même contenance, suivant les schémas ci-dessous. L'unité de longueur est le centimètre.

1. Le flacon 1 est constitué de deux pavés droits. x désigne la mesure de la hauteur du pavé droit supérieur.

Montrer que la mesure V_1 du volume du flacon 1 s'exprime en fonction de x sous la forme :

$$V_1(x) = 2x + 100.$$



flacon 1

2. Le flacon 2 est constitué :

- d'une pyramide tronquée à base rectangulaire identique au solide $ABCDEFGH$ de la figure 1. La droite (SO) est la hauteur de la pyramide ; elle perce le rectangle $EFGH$ en O' . On donne : $SO = 11$ cm ; $SO' = 5,5$ cm ; $AB = 6$ cm ; $BC = 4$ cm ; $EF = 3$ cm ; $FG = 2$ cm ;
- et d'un pavé droit de dimensions 2, 3 et x comme indiqué ci-dessous.

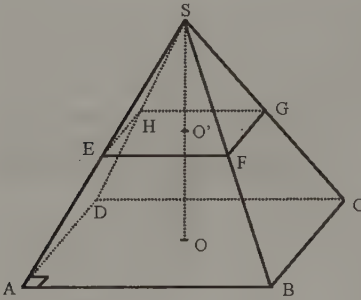
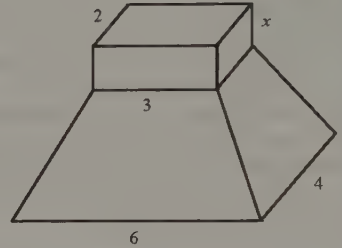


figure 1



flacon 2

Montrer que la mesure V_2 du volume du flacon 2 s'exprime en fonction de x sous la forme : $V_2(x) = 6x + 77$.

On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule :

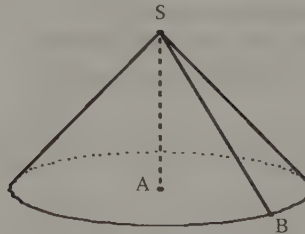
$$V = \frac{1}{3} (\text{aire de la base} \times \text{hauteur de la pyramide}).$$

3. Dans un repère orthogonal du plan :

- sur l'axe des abscisses, un centimètre représente une longueur de 1 cm,
 - sur l'axe des ordonnées, un millimètre représente un volume de 1 cm^3 .
- Représenter graphiquement, dans ce repère, les fonctions V_1 et V_2 pour des valeurs de x comprises entre 0 et 10.
 - Déterminer graphiquement une valeur approchée de x au dixième près pour laquelle $V_1(x) = V_2(x)$.
 - Résoudre l'équation $V_1(x) = V_2(x)$ par le calcul.
 - Calculer le volume correspondant à la valeur x trouvée précédemment et l'exprimer en centilitre.

● Exercice 62

Corrigé, p. 177



Une bougie a la forme d'un cône de révolution de sommet S .

Sa base est un disque de centre A et de rayon 14 cm.

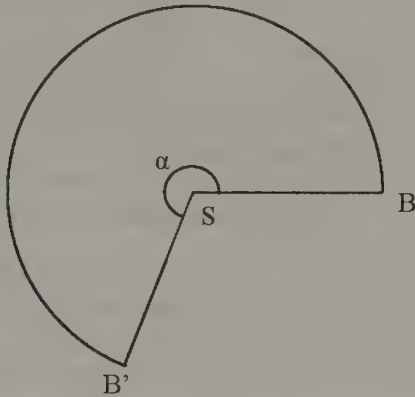
On donne $SB = 21$ cm.

1. On rappelle la formule permettant de calculer le volume V d'un cône :

$$V = \frac{B \times h}{3}, \text{ où } B \text{ désigne l'aire de la base du cône et } h \text{ la hauteur du cône.}$$

- Calculer la valeur exacte de la hauteur de la bougie. En donner une valeur approchée au mm près.
- Calculer en cm^3 le volume exact de la bougie et en donner une valeur approchée au mm^3 près.
- Combien de bougies de ce type peut-on fabriquer avec 20 litres de cire ?

2. Pour fabriquer ces bougies, on construit un moule en papier qui est un cône de mêmes dimensions que les bougies. La figure ci-dessous représente un patron de ce moule. (La figure n'est pas à l'échelle.)



- Calculer la longueur exacte de l'arc de cercle BB' .
- Calculer l'angle α , en degré.

3. En utilisant le même moule en papier, on décide de fabriquer des bougies bicolores rouges et blanches. On procède de la manière suivante :

- on remplit le moule (pointe en bas) de cire blanche jusqu'à mi-hauteur,
- on complète avec de la cire rouge.

Quelle est la proportion de cire blanche dans le volume total de la bougie ?

● Exercice 63

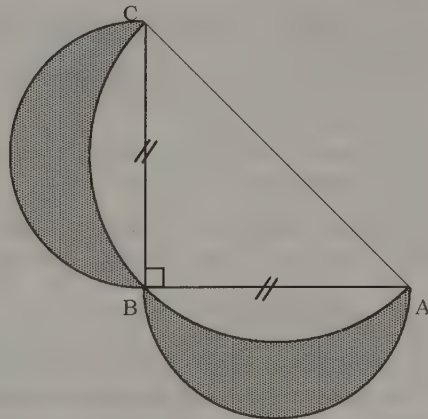
Corrigé, p. 178

La figure ci-contre est composée :

- d'un triangle isocèle ABC , rectangle en B ,
- et de trois demi-cercles ayant ses côtés pour diamètres.

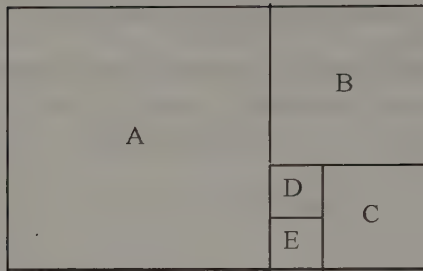
1. À l'aide de la règle et du compas, reproduire cette figure (laisser apparents les traits de construction).

2. Sachant que $AC = 7$ cm, calculer l'aire totale des surfaces grisées (au mm^2 près).



● Exercice 64

Corrigé, p. 179



La figure ci-dessus est un rectangle découpé en cinq carrés A , B , C , D , E .

1. On appelle a , b , c , d , e les longueurs respectives des côtés de ces carrés. Exprimer a , b , d , e en fonction de c .
2. On suppose que le rectangle représente une feuille de papier de $3\,610\text{ cm}^2$. Calculer c puis trouver les dimensions de la feuille.
3. On suppose que le rectangle représente une plaque métallique homogène. La masse de la pièce B est 100 grammes. Calculer la masse de la pièce A à un décigramme près.
4. On suppose que le rectangle représente la vue de dessus d'un assemblage de cinq cubes. Le volume du cube A est 2 m^3 . Calculer le volume du cube C . Donner la réponse en dm^3 .

● Exercice 65

Corrigé, p. 180

1. Convertir les durées suivantes en secondes :
 - a) deux tiers d'heure.
 - b) 1,2 heure.
2. Convertir les durées suivantes en heures, minutes et secondes :
 - a) 5 532 secondes.
 - b) 1,87 heure.
3. Quelle durée faut-il à la grande aiguille d'une montre pour parcourir un angle de 54° ?
4. Depuis sa position initiale à midi pile, la petite aiguille d'une montre a parcouru un angle de 68° . Quelle est la nouvelle heure indiquée ?
5. Arnaud part de Paris à 23 h 00 pour Rio de Janeiro. Son avion se pose à Houston à 03 h 00 (heure locale) pour une escale d'une heure. Le vol entre Houston et Rio de Janeiro dure 10 heures.
Houston est à l'ouest de Paris et il y a 7 heures de décalage horaire entre ces deux villes.
Rio de Janeiro est à l'est de Houston et il y a 3 heures de décalage horaire entre ces deux villes.
 - a) Quelle est la durée du vol entre Paris et Houston ?
 - b) À quelle heure (heure locale) Arnaud arrive-t-il à Rio de Janeiro ?

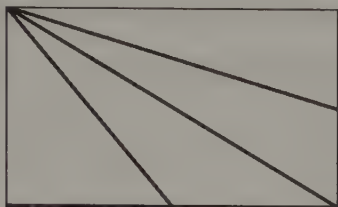
● Exercice 66

Corrigé, p. 181

Dans cet exercice, on dira que deux parts sont « égales » lorsqu'elles ont la même aire.

1. On partage un gâteau rectangulaire par ses diagonales. Les parts sont-elles « égales » ? Justifier.

2. On partage un gâteau rectangulaire en traçant trois segments à partir d'un même sommet : un segment vers le sommet opposé et deux segments vers les milieux des côtés opposés.

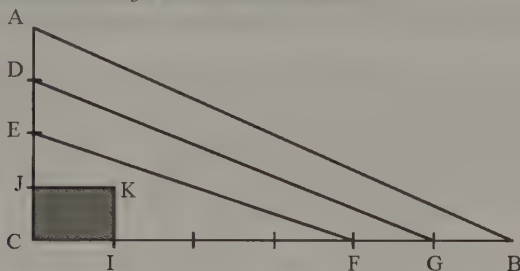


Les parts sont-elles « égales » ? Justifier.

3. ABC est un triangle rectangle en C .

$[AC]$ est partagé en quatre segments de même longueur CJ , et $[CB]$ en six segments de même longueur CI . Les polygones EFC , $DGFE$ et $ABGD$ ont-ils la même aire ? Justifier.

On pourra utiliser l'aire du rectangle $CIKJ$ comme unité d'aire.



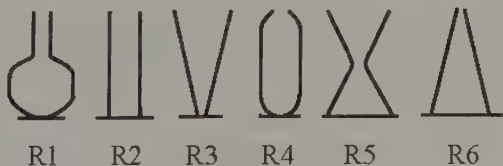
● Exercice 67

Corrigé, p. 182

Vu à la Cité des Sciences et de l'industrie à Paris.

« Six réservoirs de formes différentes, de même volume, de même hauteur se remplissent dans le même temps. Il s'agit d'associer à une forme de récipient une jauge et une courbe indiquant la hauteur du liquide en fonction du temps. »

Les graduations des six jauges A, B, C, etc., indiquent les hauteurs de liquide correspondant à 1 litre, 2 litres, etc., pour les six réservoirs. Les courbes 1, 2, 3, etc., indiquent la hauteur atteinte par le liquide en fonction du temps lorsque les six réservoirs se remplissent.



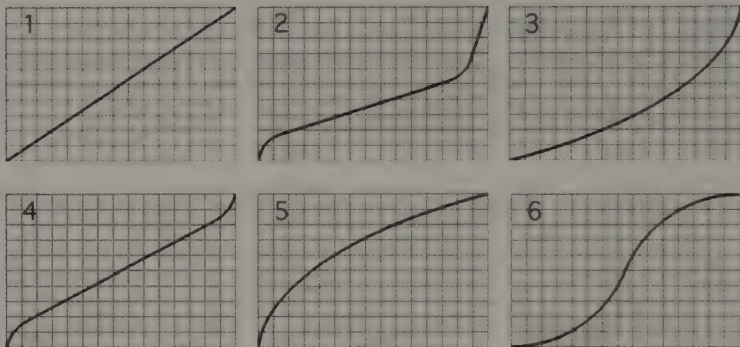
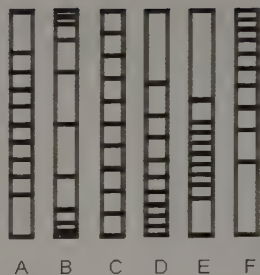
Les récipients ont tous le même volume 10 litres et la même hauteur. Leurs formes sont représentées grossièrement par les dessins ci-dessus. Pendant le remplissage, le débit de l'eau est constant et identique d'un récipient à l'autre. Ainsi, à un instant donné, le volume d'eau contenu dans chaque récipient est le même mais la hauteur d'eau n'est pas nécessairement la même.

1. Associer à chaque récipient $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$:

a) la jauge qui lui correspond (parmi les jauges reproduites ci-contre) ;

b) la courbe qui lui correspond (parmi les courbes 1, 2, 3, 4, 5, 6 reproduites ci-après).

Présenter les résultats dans un tableau, sans justification.



2. Sachant que le diamètre du récipient cylindrique R_2 est de 16 cm, calculer la hauteur de ce récipient (arrondie au centimètre).

3. À un instant t , le récipient cylindrique R_2 est rempli aux $2/3$ de sa hauteur. Calculer, au dixième de litre près, le volume d'eau V' contenu dans le cylindre à cet instant précis.

4. On observe la hauteur d'eau dans le récipient R_6 au moment où le récipient cylindrique R_2 est rempli aux $2/3$ de sa hauteur. Est-elle plus ou moins haute que dans R_2 ? Justifier la réponse en utilisant les courbes ci-dessus.

■ Affirmations Vraies/Faussees

Dans ces exercices, des affirmations sont proposées. Pour chacune, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point ; une réponse fausse n'enlève pas de point.

● Exercice 68

Corrigé, p. 183

1. Un cycliste parcourt 100 km. Pendant les premiers 50 kilomètres, il roule à 25 km/h de moyenne puis, fatigué, à 15 km/h pendant les 50 derniers kilomètres.

Affirmation 1 : « Sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours est 20 km/h. »

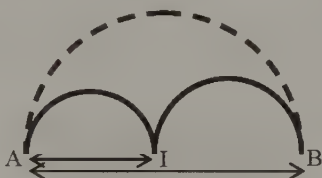
2. **Affirmation 2 :** « Tout nombre entier de trois chiffres dont les chiffres des centaines, dizaines et unités sont les mêmes est divisible par 37. »

3. **Affirmation 3 :** « Deux nombres entiers impairs sont premiers entre eux. »

4. **Affirmation 4 :** « L'inverse de $(9 - 4\sqrt{5})$ est $(9 + 4\sqrt{5})$. »

5. La figure ci-dessous est composée de trois demi-cercles.

Affirmation 5 : « La longueur du chemin en trait plein est égale à celle du chemin en pointillés. »



6. Dans un laboratoire, on cultive des bactéries.

La population de bactéries augmente de 20 % par heure.

Affirmation 6 : « La population de bactéries sera multipliée par 2 au bout de 5 heures. »

● Exercice 69

Corrigé, p. 184

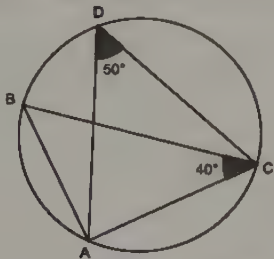
1. Dans une salle, 9 personnes sont assises, leur moyenne d'âge est de 25 ans. Dans une autre salle, 11 personnes sont réunies, leur moyenne d'âge est de 45 ans. On rassemble les deux groupes de personnes.

Affirmation 1 : « La moyenne d'âge du groupe ainsi constitué est de 35 ans. »

2. Maxime possède 3 pantalons (un rouge, un bleu et un noir) et 4 tee-shirts (un rouge, un bleu, un jaune et un vert). Il choisit au hasard un pantalon puis un tee-shirt. (On admet que les choix sont équiprobables.)

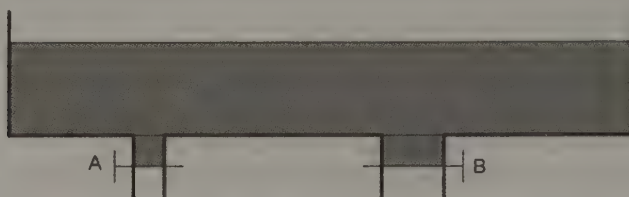
Affirmation 2 : « La probabilité qu'il soit habillé d'une seule couleur est $\frac{1}{6}$. »

3. **Affirmation 3 :** « Le triangle ABC représenté ci-dessous est rectangle en A. »



4. **Affirmation 4** : « La section d'un cylindre de rayon 5 cm et de hauteur 8 cm par un plan parallèle à son axe peut être un carré. »

5. Une cuve a deux robinets de vidange A et B .



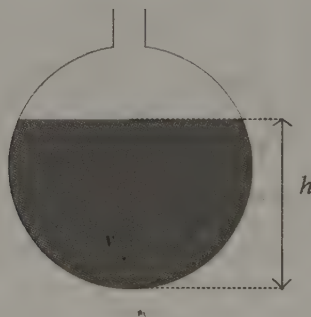
Si on ouvre seulement le robinet A , la cuve pleine se vide en 7 heures.

Si on ouvre seulement le robinet B , la cuve pleine se vide en 3 heures.

On ouvre les deux robinets A et B en même temps.

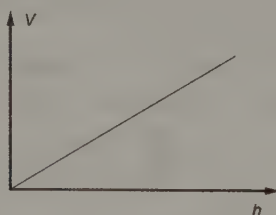
Affirmation 5 : « La cuve pleine se vide en 2 heures et 6 minutes. »

6. On considère la carafe sphérique représentée ci-dessous.



On s'intéresse au volume de liquide V contenu dans la carafe pour une hauteur h de remplissage.

Affirmation 6 : « le graphique ci-dessous représente V en fonction de h . »



● Exercice 70

Corrigé, p. 186

- Affirmation 1** : Un nombre positif est toujours supérieur ou égal à sa racine carrée.
- Affirmation 2** : La fraction $\frac{201134546112}{145261781121}$ est irréductible.
- Dans un sachet opaque, on a mélangé 35 chocolats noirs et 20 chocolats blancs. On suppose que les chocolats sont indiscernables au toucher. On prend au hasard un chocolat dans le sachet.
Affirmation 3 : La probabilité que le chocolat extrait du sachet soit blanc est de $\frac{4}{7}$.
- Dans *Le Monde* du 27 mars 2010, on pouvait lire : « Dans l'ensemble des aéroports du monde, en 2009, environ 25 millions de bagages ont été perdus, provisoirement ou définitivement. [...] L'étude note cependant une amélioration puisqu'en 2008, ce sont 32,8 millions de bagages qui avaient été égarés, soit 23,8 % de plus qu'en 2009. ».
Affirmation 4 : L'extrait souligné est exact.
- Affirmation 5** : Il existe au moins un nombre entier compris entre 11 000 et 12 000, dont le plus grand diviseur commun avec 2 180 est 545.
- Une enseigne est formée de deux boules pleines, de rayons différents, constituées du même bois. L'une pèse 24 kg et l'autre pèse 3 kg. La quantité de peinture pour les recouvrir est proportionnelle à la surface à peindre. Il faut 900 g de peinture pour recouvrir la grosse boule.
Affirmation 6 : Il faut 112,5 g de peinture pour recouvrir la petite boule.

● Exercice 71

Corrigé, p. 187

- Soit a et b deux nombres strictement positifs.
Affirmation 1 : $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$.
- Soit a un nombre strictement supérieur à 1.
Affirmation 2 : Si les longueurs des côtés d'un triangle sont a , $\frac{1}{2}(a^2 - 1)$ et $\frac{1}{2}(a^2 + 1)$, alors ce triangle est rectangle.
- On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.
Affirmation 3 : La probabilité d'obtenir Pile à l'un des deux lancers et Face à l'autre est $\frac{1}{3}$.
- Un article a le même prix dans deux magasins A et B.
Dans le magasin A, le prix de l'article subit successivement une baisse de 20 % puis une hausse de 20 %.
Dans le magasin B, le prix de l'article subit successivement une hausse de 20 % puis une baisse de 20 %.
Affirmation 4 : À la suite de ces modifications de prix, il est plus rentable d'acheter alors l'article dans le magasin A que dans le magasin B.
- La longueur du côté d'un carré augmente de 5 %.
Affirmation 5 : Le périmètre du carré augmente de 20 %.

● Exercice 72

Corrigé, p. 188

1. Depuis 5 ans, les prix augmentent de 10 % par an.

Affirmation 1 : En 5 ans, les prix ont augmenté de 50 %.

2. **Affirmation 2** : En versant 5 volumes de sirop de fraise dans 9 volumes d'eau, on aura une boisson plus sucrée que si l'on verse 4 volumes du même sirop dans 7 volumes d'eau.

3. On utilise une roulette (de type casino) avec 5 cases numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. Cette roulette est truquée. Le tableau ci-dessous précise la probabilité d'obtenir chacun des numéros (où p est un nombre positif).

Nombre obtenu	1	2	3	4	5
Probabilité	$\frac{1}{4}$	p	p	$\frac{3}{8}$	p

Affirmation 3 : On a autant de chances d'obtenir un nombre pair qu'un nombre impair.

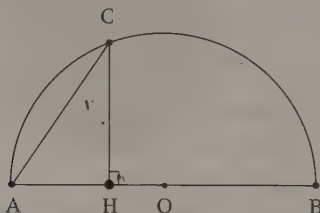
4. **Affirmation 4** : La différence entre les carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs est égale à la somme de ces deux nombres entiers.

5. **Affirmation 5** : Si on augmente l'arête d'un cube de 10 %, alors le volume de ce cube augmente de 33,1 %.

6. En position dite de « l'œuf », un skieur augmente de 50 % sa vitesse moyenne et descend ainsi la piste à 120 km/h.

Affirmation 6 : Sans cette technique, sa vitesse moyenne n'est donc que de 60 km/h.

7. Sur la figure ci-dessous, C est un point du demi-cercle de diamètre $[AB]$.

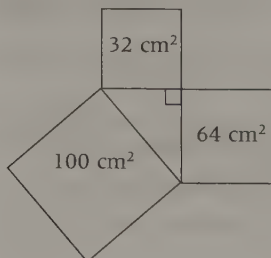


Affirmation 7 : Si $AB = n$ et $AH = 1$, alors $AC = \sqrt{n}$.

● Exercice 73

Corrigé, p. 189

1. La figure ci-dessous représente trois carrés construits sur les trois côtés d'un triangle rectangle. Dans chacun des carrés est indiquée son aire.



Affirmation 1 : La construction à l'échelle de cette figure est possible.

2. Affirmation 2 : Si un nombre est multiple de 6 et de 9, alors il est aussi multiple de 54.

3. On considère deux nombres dont la somme est 400.

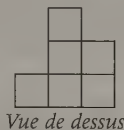
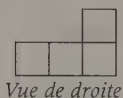
Affirmation 3 : Si l'on augmente de 3 chacun de ces deux nombres alors leur produit augmente de 1 209.

4. En période de sécheresse, un agriculteur a des réserves pour alimenter ses 8 vaches pendant 20 jours. Il accepte de prendre en charge 2 vaches de plus pour rendre service à son voisin.

Affirmation 4 : Avec ces mêmes réserves, il pourra nourrir toutes les vaches pendant 18 jours.

5. On considère un solide constitué d'un empilement de cubes identiques.

On voit ci-dessous les vues de droite, de face et de dessus.



Affirmation 5 : On peut construire un tel solide à l'aide d'un empilement de 7 cubes.

6. Affirmation 6 : En insérant de différentes manières exactement deux parenthèses (une ouvrante et une fermante) dans l'écriture $8 \times 7 + 3 \times 5$, on peut obtenir tous les nombres de la liste suivante :

71 ; 176 ; 283 ; 295 ; 400.

● Exercice 74

Corrigé, p. 190

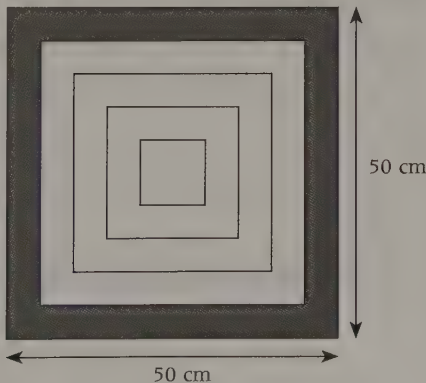
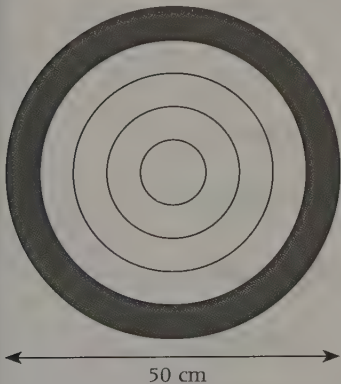
1. Affirmation 1 : Pour tout nombre entier naturel n , le nombre $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

2. Aujourd'hui, Martin n'a pas appris sa leçon. Le professeur donne un contrôle dans lequel figure une QCM qui comporte 3 questions. À chacune des questions, il y a 3 choix possibles dont une seule bonne réponse. Martin répond au hasard à chaque question.

Affirmation 2 : La probabilité que toutes les réponses soient justes est $\frac{1}{27}$.

Affirmation 3 : La probabilité que toutes les réponses soient fausses est $\frac{1}{3}$.

3. On considère les 2 figures suivantes :



La première est constituée de cinq disques concentriques de rayons respectifs 5 cm, 10 cm, 15 cm, 20 cm et 25 cm. La seconde est constituée de cinq carrés concentriques à bords parallèles de côtés respectifs 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm et 50 cm.

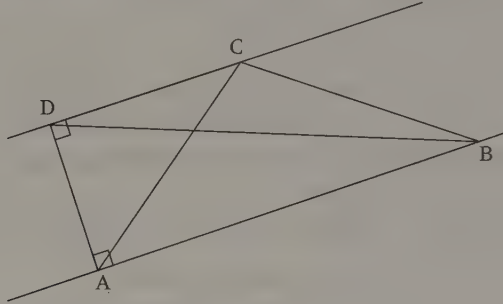
Affirmation 4 : Le rapport entre l'aire du disque central et l'aire grisée dans la figure de gauche est égal au rapport entre l'aire du carré central et l'aire grisée dans la figure de droite.

● Exercice 75

Corrigé, p. 191

1. Affirmation 1 : Tout prisme droit a deux fois plus d'arêtes que de faces.

2. On considère la figure ci-dessous dans laquelle le quadrilatère $BADC$ est un trapèze rectangle :



Affirmation 2 : Le triangle ABD a la même aire que le triangle ABC .

3. On augmente de 50 % la longueur L d'un pavé droit, on double sa hauteur h et on conserve sa largeur l .

Affirmation 3 : Le volume V de ce pavé droit est multiplié par 4.

4. Une classe de 24 élèves est composée de 14 filles et 10 garçons. La taille moyenne des garçons est 174 cm et celle des filles 162 cm.

Affirmation 4 : La taille moyenne des élèves de la classe est 167 cm.

5. Affirmation 5 : Le produit de deux nombres pairs consécutifs est divisible par 8.

Entraînement à la partie 3 de l'épreuve : Analyse de supports d'enseignement

Nombres – Numération	62
Opérations	73
Organisation de données – Résolution de problèmes	79
Géométrie	92
Mesure et grandeurs	104

■ Nombres – Numération

● Exercice 76

Corrigé, p. 192

Un exercice, extrait du fichier de mathématiques *J'apprends les maths avec Picbille* (éditions Retz, février 2008), est distribué dans une classe de l'école élémentaire.

Les productions de quatre élèves sont fournies en annexe.

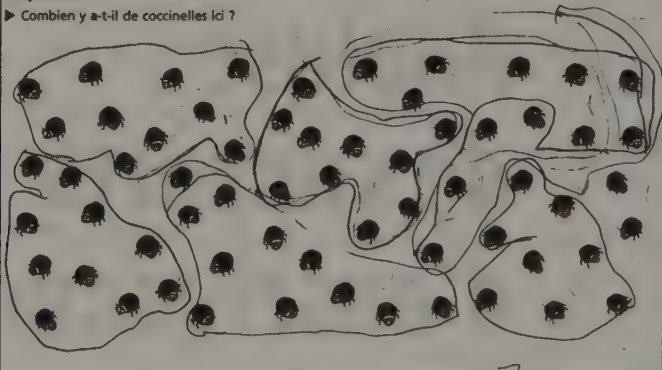
1. À quel niveau de scolarité cet exercice peut-il avoir été donné ? Justifier la réponse.
2. Présenter dans un tableau l'analyse des productions de ces quatre élèves en caractérisant les procédures mises en œuvre, en décrivant les erreurs commises et en émettant une hypothèse sur l'origine de ces erreurs.
3. L'enseignant propose à Maxime une fiche sur laquelle figurent 28 coccinelles.
« Voici une autre feuille avec des coccinelles. Il va falloir que tu colles une gommette verte sur chaque coccinelle. Ces gommettes seront distribuées par une marionnette qui ne sait compter que jusqu'à 9. Quelle commande orale peux-tu passer à la marionnette ? »
a) En quoi cette situation peut-elle conduire Maxime à changer de procédure ?
b) Décrire une procédure correcte.

Annexe

Exercice extrait du fichier *J'apprends les maths avec Picbille*, éditions Retz, février 2008.
Productions de quatre élèves.

Théo

Réponds.
► Combien y a-t-il de coccinelles ici ?



Ici, il y a 7 coccinelles. **A**

Maxime

Réponds.
 ► Combien y a-t-il de coccinelles ici ?

Ici, il y a 200 coccinelles.

Hugo

Réponds.
 ► Combien y a-t-il de coccinelles ici ?

Ici, il y a 63 coccinelles.

Andréa

Réponds.
 ► Combien y a-t-il de coccinelles ici ?

Ici, il y a 64 coccinelles.

● Exercice 77

Corrigé, p. 193

Un jeu (voir ci-dessous) est proposé à des élèves.

1. Dans quel(s) cycle(s) peut-on proposer ce jeu ?
2. Quelles compétences du programme sont mobilisées chez les élèves lors de ce jeu ?
3. Déterminer plus précisément pour chaque carte les connaissances nécessaires pour trouver le nombre inscrit au dos de la carte.
4. Quel est l'objectif principal d'apprentissage ?

Le jeu des cartes d'identité (3 à 5 joueurs)

1) Matériel

- 12 cartes de trois couleurs différentes, chaque carte d'une même couleur portant un numéro de 1 à 4.

Cartes bleues (B)

1	2	3	4
C'est un nombre à trois chiffres. Son chiffre des unités est 0. Il est compris entre 738 et 742.	C'est un nombre à deux chiffres. On peut l'écrire $60 + 13$.	C'est un nombre à trois chiffres. Il est composé de 2 dizaines, 7 unités et 1 centaine.	C'est un nombre à trois chiffres. Il est égal à 6×20 .

Cartes vertes (V)

1	2	3	4
C'est un nombre à trois chiffres. Il est composé de 80 dizaines.	C'est un nombre à trois chiffres. Son chiffre des unités est 4. Il a 90 dizaines.	C'est le plus grand des nombres à deux chiffres.	C'est un nombre à trois chiffres. Il a 3 unités et 20 dizaines.

Cartes rouges (R)

1	2	3	4
C'est un nombre à trois chiffres. Il est juste avant 360.	C'est un nombre à trois chiffres. Il a 2 centaines, 2 unités et 9 dizaines.	C'est un nombre à deux chiffres. On peut l'écrire $10 + 20 + 20 + 20$.	C'est un nombre à trois chiffres. On peut l'écrire $(2 \times 100) + (8 \times 10) + 3$.

Les nombres ainsi définis sont écrits en chiffres au dos des cartes.

- 2 dés : l'un des dés a deux faces vertes, 2 faces bleues et 2 faces rouges. L'autre dé porte les nombres 1 à 4 et a deux faces blanches.

2) But du jeu

Obtenir le plus grand nombre en totalisant les points gagnés.

3) Règle du jeu

Le meneur de jeu a les 12 cartes en main.

À tour de rôle, chaque joueur lance les 2 dés et obtient un résultat (par exemple, « rouge et 2 »).

Le meneur de jeu recherche la carte correspondante repérée par la couleur et le numéro. Il lit au joueur les informations écrites sur la carte.

Le joueur doit, à partir de ces informations, écrire en chiffres, sur une feuille, le nombre dont il s'agit. Le meneur de jeu vérifie en retournant la carte.

Si la réponse est bonne, le joueur gagne le nombre de points égal au nombre découvert (par exemple, 292 pour « rouge et 2 »). Il note ce nombre sur sa feuille.

Si la réponse est fausse, le joueur ne gagne rien.

Si le dé des nombres tombe sur une face blanche, le joueur passe son tour.

Le jeu se joue en 4 tours.

À la fin du jeu, chaque joueur additionne ses points. Le vainqueur est celui qui a le plus grand nombre de points.

● Exercice 78

Corrigé, p. 194

Compte rendu de séance :

(inspiré d'une séance décrite dans les ressources pédagogiques de l'IUFM de Bretagne)

Le professeur distribue un puzzle (partie supérieure de l'annexe 1) à chaque élève qui découpe les 7 pièces.

À l'issue du découpage, le professeur propose d'observer les pièces et note au tableau les différentes remarques des élèves. Le professeur dit ensuite : « Nous allons choisir la pièce U comme unité d'aire et déterminer l'aire de chacune des autres pièces. »

Il distribue la fiche de travail (Annexe 2) aux élèves et leur propose de travailler par deux. Une mise en commun autour des travaux de chaque groupe et une validation clôtureront la séance.

1. Citer trois compétences mises en jeu dans cette activité. On pourra se référer à l'annexe 3 comportant un extrait de la liste des compétences devant être acquises en fin de cycle 3.

2. La séance se compose de quatre phases principales. Caractériser chacune d'elles et en dégager l'intérêt pédagogique.

3. À partir de la pièce U, quelles manipulations permettent aux élèves de déterminer l'aire de :

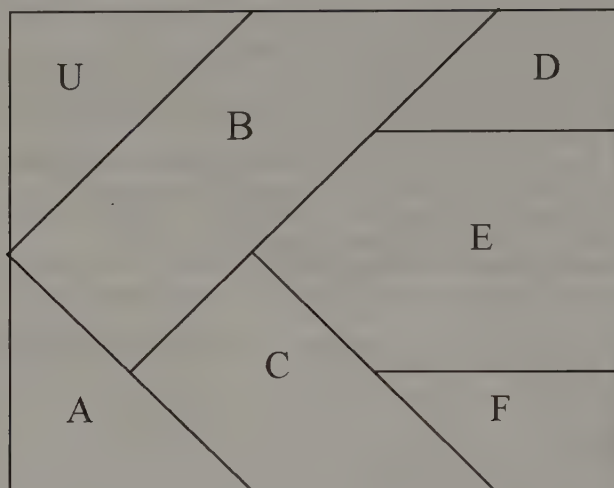
- la pièce A ?
- la pièce B ?
- la pièce D ?

4. Que peut faire constater l'enseignant à ses élèves au sujet des pièces B et E ?

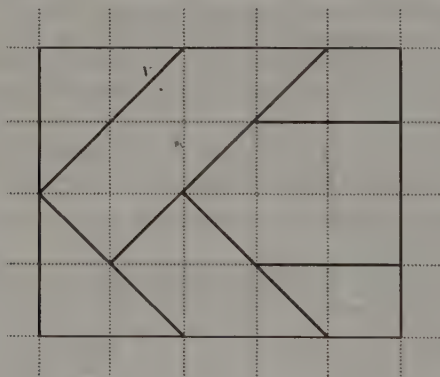
5. Proposer une manipulation qui permettrait de faire constater aux élèves que les pièces B et E n'ont pas le même périmètre.

Annexe 1

Puzzle distribué aux élèves :



Plan de construction du puzzle (sur un quadrillage à mailles carrées) destiné uniquement au professeur.



Annexe 2

Fiche de travail

Noms du groupe :

1- En prenant la pièce U comme unité d'aire, déterminer l'aire de chacune des autres pièces.

2- Ranger les pièces de la plus petite à la plus grande.

3- En prenant la pièce U comme unité d'aire, déterminer l'aire totale du puzzle.

Annexe 3

Extrait de la liste des compétences devant être acquises en fin de cycle 3 (programme 2002)

3 – CONNAISSANCE DES FRACTIONS SIMPLES ET DES NOMBRES DÉCIMAUX

3.1 Fractions

- utiliser, dans des cas simples, des fractions ou des sommes d'entiers et de fractions pour coder des mesures de longueurs ou d'aires, une unité étant choisie, ou pour construire un segment (ou une surface) de longueur (ou d'aire) donnée;
- nommer les fractions en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième...;
- encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs;
- écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

3.2 Désignations orales et écrites des nombres décimaux

- déterminer la valeur de chacun des chiffres composant une écriture à virgule, en fonction de sa position;
- passer, pour un nombre décimal, d'une écriture fractionnaire (fractions décimales) à une écriture à virgule (et réciproquement);
- utiliser les nombres décimaux pour exprimer la mesure de la longueur d'un segment, celle de l'aire d'une surface (une unité étant donnée), ou pour repérer un point sur une droite graduée régulièrement de 1 en 1;
- écrire et interpréter sous forme décimale une mesure donnée avec plusieurs unités (et réciproquement);
- produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10; 100; 1000... et 0,1; 0,01; 0,001...;
- produire des suites écrites ou orales de 0,1 en 0,1, de 0,01 en 0,01...;
- associer les désignations orales et l'écriture chiffrée d'un nombre décimal.

3.3 Ordre sur les nombres décimaux

- comparer deux nombres décimaux donnés par leurs écritures à virgule;
- encadrer un nombre décimal par deux entiers consécutifs ou par deux nombres décimaux;

- intercaler des nombres décimaux entre deux nombres entiers consécutifs ou entre deux nombres décimaux ;
- utiliser les signes < et > pour exprimer le résultat de la comparaison de deux nombres ou d'un encadrement ;
- donner une valeur approchée d'un nombre décimal à l'unité près, au dixième ou au centième près ;
- situer exactement ou approximativement des nombres décimaux sur une droite graduée de 1 en 1, de 0,1 en 0,1.

3.4 Relations entre certains nombres décimaux

- connaître et utiliser des écritures fractionnaires et décimales de certains nombres : 0,1 et $\frac{1}{10}$; 0,01 et $\frac{1}{100}$; 0,5 et $\frac{1}{2}$; 0,25 et $\frac{1}{4}$, 0,75 et $\frac{3}{4}$;
- connaître et utiliser les relations entre $\frac{1}{4}$ (ou 0,25) et $\frac{1}{2}$ (ou 0,5), entre $\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{10}$; entre $\frac{1}{1000}$ et $\frac{1}{100}$.

6 - GRANDEURS ET MESURE

6.1 Longueurs, masses, volumes (contenances), repérage du temps, durées

- utiliser des instruments pour mesurer des objets physiques ou géométriques ;
- exprimer le résultat d'un mesurage par un nombre ou un encadrement, l'unité (ou les unités) étant imposée(s) ou choisie(s) de façon appropriée ;
- lire l'heure sur une montre à aiguilles ou une horloge ;
- connaître les unités de mesure des durées (année, mois, semaine, jour, heure, minute, seconde) et leurs relations ;
- estimer une mesure (ordre de grandeur) ;
- construire ou réaliser un objet dont des mesures sont données ;
- connaître les unités légales du système métrique pour les longueurs (mètre, ses multiples et ses sous-multiples usités), les masses (gramme, ses multiples et ses sous-multiples usités) et les contenances (litre, ses multiples et ses sous-multiples usités) ;
- utiliser les équivalences entre les unités usuelles de longueur, de masse, de contenance, et effectuer des calculs simples sur les mesures, en tenant compte des relations entre les diverses unités correspondant à une même grandeur ;
- utiliser le calcul pour obtenir la mesure d'une grandeur, en particulier : calculer le périmètre d'un polygone, calculer une durée à partir de la donnée de l'instant initial et de l'instant final.

6.2 Aires

- classer et ranger des surfaces (figures) selon leur aire (par superposition, découpage et recollement ou pavage par une surface de référence) ;
- construire une surface qui a même aire qu'une surface donnée (et qui ne lui est pas superposable) ;
- différencier aire et périmètre d'une surface, en particulier savoir que deux surfaces peuvent avoir la même aire sans avoir nécessairement le même périmètre et qu'elles peuvent avoir le même périmètre sans avoir nécessairement la même aire ;
- mesurer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence (dont l'aire est prise pour unité) ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé (le résultat étant une mesure exacte ou un encadrement) ;
- calculer l'aire d'un rectangle dont les côtés au moins sont de dimensions entières ;
- connaître et utiliser les unités usuelles (cm^2 , dm^2 , m^2 et km^2) ainsi que quelques équivalences ($1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$, $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$, $1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$).

● Exercice 79

Corrigé, p. 195

Cette question s'appuie sur les documents proposés en annexes 1 et 2 (l'annexe 2 est sur deux pages).

Annexe 1 : Les réponses d'un élève à quatre exercices extraits de l'évaluation nationale à l'entrée en 6^e de 2006 (Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance, ministère de l'Éducation nationale).

Annexe 2 : Extrait des programmes de mathématiques 2007 – cycle 3.

1. Pour chacun des trois exercices 13, 15 et 26 (Annexe 1), identifier de façon précise la capacité qu'il permet d'évaluer.
2. Identifier le type d'erreur effectué par cet élève (Annexe 1) en analysant ses réponses. Formuler deux hypothèses sur le mode opératoire utilisé par l'élève dans l'exercice 15.
3. Il est fréquent d'utiliser un tableau de numération (exemple ci-dessous) pour aider les élèves à effectuer des exercices tels que les exercices 13, 15 et 26.

100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes

Donner un avantage et un inconvénient liés à l'utilisation d'un tel tableau.

4. Un maître de CM2 a proposé l'exercice suivant à ses élèves. Le segment $[AB]$ tracé sur papier millimétré a pour longueur 1 dm :

En prenant la longueur du segment $[AB]$ comme unité, trace un segment dont la mesure de la longueur est $\frac{1}{4}$.

Écris cette mesure sous la forme d'un nombre à virgule.

- a) En s'appuyant sur les programmes de cycle 3, identifier la connaissance relative à cet exercice.
- b) Décrire une procédure qu'un élève de cycle 3 peut mettre en œuvre pour :
 - tracer le segment attendu,
 - écrire sa mesure sous forme décimale.

Annexe 1

Exercice 13

Entoure la fraction égale à 80,4.

$$\frac{804}{100}$$

$$\frac{80}{4}$$

$$\frac{84}{10}$$

$$\frac{804}{10}$$

$$\frac{804}{1000}$$

Exercice 15

Parmi les écritures ci-dessous, entoure celle qui est égale à $96 + \frac{2}{100}$.

96,200

962,100

296

96,02

98,100

Exercice 26

Entoure le nombre égal à la fraction $\frac{724}{100}$.

0,724

7,24

72,4

724,100

72 400

Exercice 35

Parmi ces quatre nombres, deux sont égaux. Entoure-les.

0,25

0,4

1,4

$\frac{1}{4}$

Annexe 2

Extrait des programmes de mathématiques 2007 – cycle 3

Connaissances, capacités et attitudes travaillées et attendues en fin de cycle 3	
Connaissances	Capacités
3.1 Fractions – nommer les fractions en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième...	– utiliser, dans des cas simples, des fractions ou des sommes d'entiers et de fractions pour coder des mesures de longueurs ou d'aires, une unité étant choisie, ou pour construire un segment (ou une surface) de longueur (ou d'aire) donnée; – encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs; – <i>écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.</i>
3.2 Désignations orales et écrites des nombres décimaux – connaître la valeur de chacun des chiffres composant une écriture à virgule, en fonction de sa position.	– produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10; 100; 1 000... et 0,1; 0,01; 0,001...; – utiliser les nombres décimaux pour exprimer la mesure de la longueur d'un segment, celle de l'aire d'une surface (une unité étant donnée), ou pour repérer un point sur une droite graduée régulièrement de 1 en 1; – associer les désignations orales et l'écriture chiffrée d'un nombre décimal dont la partie décimale ne va pas au-delà du millièmè; – produire des suites écrites ou orales de 0,1 en 0,1; – <i>produire des suites écrites ou orales de 0,01 en 0,01, de 0,001 en 0,001;</i> – écrire et interpréter sous forme décimale une mesure donnée avec plusieurs unités et réciproquement dans des cas simples (par exemple 1 m et 10 cm; 1,5 kg); – savoir passer, dans des cas simples, pour un nombre décimal, d'une écriture à virgule à une écriture fractionnaire (fractions décimales) et réciproquement.

Connaissances, capacités et attitudes travaillées et attendues en fin de cycle 3	
Connaissances	Capacités
<p>3.3 Ordre sur les nombres décimaux</p>	<ul style="list-style-type: none"> - comparer deux nombres décimaux donnés par leurs écritures à virgule, lorsque leurs parties décimales sont de même longueur; - <i>comparer deux nombres décimaux donnés par leurs écritures à virgule lorsque leurs parties décimales sont de longueurs différentes;</i> - encadrer un nombre décimal par deux entiers consécutifs; - <i>encadrer un nombre décimal par deux nombres décimaux;</i> - intercaler des nombres décimaux entre deux nombres entiers consécutifs; - <i>intercaler des nombres décimaux entre deux nombres décimaux;</i> - utiliser les signes < et > pour exprimer le résultat de la comparaison de deux nombres ou d'un encadrement; - <i>donner une valeur approchée d'un nombre décimal à l'unité près, au dixième ou au centième près;</i> - situer exactement ou approximativement des nombres décimaux sur une droite graduée de 1 en 1, de 0,1 en 0,1.
<p>3.4 Relations entre certains nombres décimaux</p> <ul style="list-style-type: none"> - connaître et savoir utiliser dans des situations concrètes (contenance, masse, longueur, monnaie, durée) les écritures fractionnaires et décimales de certains nombres : 0,1 et $\frac{1}{10}$; 0,01 et $\frac{1}{100}$; 0,5 et $\frac{1}{2}$; 0,25 et $\frac{1}{4}$; 0,75 et $\frac{3}{4}$; - <i>connaître et savoir utiliser dans des situations concrètes ou non les écritures fractionnaires et décimales des nombres ci-dessus.</i> 	<ul style="list-style-type: none"> - connaître et savoir utiliser dans des situations concrètes les relations entre $\frac{1}{4}$ (ou 0,25) et $\frac{1}{2}$ (ou 0,5), entre $\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{10}$; - <i>connaître et savoir utiliser dans des situations concrètes ou non les relations entre $\frac{1}{4}$ (ou 0,25) et $\frac{1}{2}$ (ou 0,5), entre $\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{10}$ entre $\frac{1}{1000}$ et $\frac{1}{100}$.</i>

■ Opérations

● Exercice 80

Corrigé, p. 197

Cette question s'appuie sur des documents extraits du manuel de l'élève et du livre du maître *Euromaths* CE1 (Peltier & al., Hatier, 2004).

Annexe 1 : un extrait du manuel de l'élève correspondant au début de la « leçon 54 », page 88.

Annexe 2 : un extrait du livre du maître correspondant à la « leçon 54 », pages 124 et 125.

Annexe 3 : la feuille de calculs utilisée lors de l'activité préparatoire de la « leçon 54 » (fiche photocopiable page 255).

La « leçon 54 » du manuel de l'élève est située en fin de période 3, la progression du livre étant prévue sur 5 périodes.

Le signe « \times » a été introduit à la fin de la « leçon 53 » pour coder de façon économique des additions répétées.

En amont, deux « leçons » ont été consacrées à l'utilisation de la calculatrice :

- l'une en période 2 / Objectifs annoncés : « Se familiariser avec la calculatrice – Résoudre des problèmes additifs et soustractifs liés à la numération »,

- l'autre en début de période 3 / Objectif annoncé : « Utiliser les acquis de la numération pour répondre à des contraintes de calculs. »

1. On s'intéresse au « jeu du Supercalculateur » proposé lors de l'activité préparatoire décrite dans le livre du maître puis dans l'application présentée dans le manuel de l'élève.

a) Donner les deux procédures mobilisables par les élèves et attendues par le maître dans ce jeu. Pour chacune de ces procédures, indiquer une difficulté et un avantage qu'apporte l'utilisation de la calculatrice.

b) En quoi le fait d'imposer l'utilisation d'une calculatrice dans la règle du jeu semble pertinent pour atteindre l'objectif : « comprendre l'intérêt de transformer une addition répétée en une multiplication » ?

2. On s'intéresse aux deux premiers calculs de l'exercice 1 de la page 88 (en bas de l'Annexe 1). Donner pour chacun une procédure de calcul possible n'utilisant pas la calculatrice et préciser les connaissances qu'elle met en jeu.

3. Un peu plus tard dans la « leçon », le maître choisit de proposer l'exercice suivant :

Au CP, il y a 21 élèves. La maîtresse donne 3 cahiers à chaque élève. Combien de cahiers a-t-elle donnés ?

Donner quatre écritures symboliques que le maître peut accepter comme réponses valides. Expliquer comment elles peuvent être obtenues à partir de la situation décrite (vous pouvez présenter vos réponses dans un tableau).

54

Multiplication (2)

Date :

◆ Activité préparatoire : Jeu du Supercalculateur.

Application

Tu as 5 minutes pour effectuer les calculs suivants.



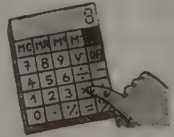
Règle du jeu du Supercalculateur
 Les joueurs doivent calculer le plus vite possible avec une calculatrice sans faire d'erreur. Le gagnant est celui qui fait le plus grand nombre de calculs corrects dans le temps donné.

- 12 + 12 + 12 + 12 =
- 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 =
- 23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23 =
- 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 =
- 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 =
- 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 =

Combien de calculs corrects as-tu effectués en 5 minutes?



Audrey, José, Nicolas et Thomas ont calculé $8+8+8+8+8$.



José a tapé $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 =$

Audrey a tapé

$8 + 6 =$

Nicolas a tapé

$7 \times 8 =$

Thomas a tapé

$6 \times 8 =$

Quels enfants ont trouvé la bonne réponse?

Qui a donné le plus rapidement la bonne réponse?

Exercices

1 Trouve, le plus vite possible, avec ou sans ta calculatrice, le bon résultat et colorie-le.

- 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 = 200 225 215
- 38 + 38 + 38 + 38 + 38 + 38 + 38 + 38 + 38 + 38 = 342 360 380
- 147 + 147 + 147 = 441 521 428
- 57 + 57 + 57 + 57 + 57 + 57 + 57 + 57 + 57 + 57 = 570 507 650

◆ Objectifs • Comprendre l'intérêt de transformer une addition répétée en une multiplication. • Utiliser la calculatrice pour calculer les produits.

◆ Mise en route • Lire l'heure. • Jeu du furet : les enfants comptent de 4 en 4 à partir de 0 en croissant et à partir de 40 en décroissant. Reprendre plusieurs fois, toujours dans le même champ numérique.

88 quatre-vingt-huit

Annexe 2

Extrait du livre du maître *Euromaths CE1* (Peltier & al., Hatier, 2004).

ÉTAPE 54 - PÉRIODE 3

Multiplication (2)

OBJECTIFS

Comprendre l'intérêt de transformer une addition répétée en une multiplication.

Utiliser la calculatrice pour calculer les produits.

DOMAINES DE COMPÉTENCES

Cette nouvelle étape, dans le prolongement de l'étape précédente, a pour objet d'amener les élèves à coder les additions répétées par des produits, en jouant sur la variable « calculer vite », et en les autorisant à utiliser la calculatrice, à ne plus revenir à l'addition pour calculer.

De plus, ils vont rencontrer plusieurs produits par 10, donc commencer à en percevoir l'impact sur le calcul. Nous institutionnaliserons la règle du produit par 10 à l'étape 59.

ORGANISATION DE L'ÉTAPE

2 séances :

- 1^{re} séance : activité préparatoire, application et exercice 1 ;
- 2^e séance : exercices 2 à 7.

MATÉRIEL

Une feuille de calculs (cf. fiche photocopiable page 255).

Une calculatrice par enfant (chacun apporte une calculatrice, le maître complète s'il en manque).

Le fichier de l'élève pages 88 et 89.

Mise en route

Lire l'heure.

Jeu du furet : les enfants comptent de 4 en 4 à partir de 0 en croissant et à partir de 40 en décroissant. Reprendre plusieurs fois, toujours dans le même champ numérique.

Activité préparatoire

PRÉSENTATION DU JEU ET DE LA RÈGLE

Afficher la règle du jeu et distribuer la feuille de calculs (fiche photocopiable page 255). Faire reformuler la règle du supercalculateur. Puis inviter les élèves à commenter la feuille de calcul : ils observent les quatre séries de calculs proposées. Pour chaque calcul, ils constatent que c'est toujours le même nombre qui est répété plusieurs fois. Il y a des nombres avec lesquels ils ont déjà fait ce type de calcul au cours du jeu des carreaux colorés (4, 5 ou 6) mais il y a aussi d'autres nombres.

Le maître précise que c'est lui qui donne le départ et le stop final

pour tout le monde et pour chaque série. Il peut aussi ajouter un enjeu (exemple : on gagne 1 point par calcul correct).

JEU INDIVIDUEL

Durée : 5 minutes par série de calculs.

MISE EN COMMUN

Confronter les résultats et les procédures utilisées :

- certains ont tapé des additions ;
- d'autres ont compté le nombre de termes et ont tapé des multiplications.

Déterminer les points gagnés par chaque enfant. Les élèves qui ont utilisé la multiplication ont très certainement gagné le plus de points au jeu.

Application

LECTURE DE LA 1^{RE} PARTIE

Les élèves observent qu'il s'agit d'une nouvelle partie du jeu du supercalculateur. Le maître donne le signal du départ.

JEU INDIVIDUEL

MISE EN COMMUN

Confronter les résultats et les procédures utilisées :

- certains enfants continuent à taper des additions ;
 - la majorité des enfants comptent le nombre de termes et tapent des multiplications ;
 - certains ont peut-être calculé mentalement le résultat des deux dernières lignes en comptant de 3 en 3 et de 5 en 5.
- Déterminer les points gagnés par chaque enfant. Comparer les scores des élèves au cours des deux jeux du supercalculateur.

Conclure avec les enfants

Pour calculer des sommes de plusieurs nombres tous identiques, il est plus efficace de compter combien de fois le nombre est répété, puis de calculer le produit de ce nombre par le nombre de fois où il est répété, en tapant sur la touche « x » de la calculatrice.

LECTURE DE LA 2^E PARTIE

Les élèves doivent avoir compris que le calcul à effectuer est $4 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$, et que pour faire ce calcul, José, Audrey, Nicolas et Thomas ne procèdent pas de la même manière.

Leur travail consiste à trouver quelles sont les procédures correctes et quelle est la procédure la plus rapide.

TRAVAIL INDIVIDUEL

CORRECTION COLLECTIVE

Conclure avec les enfants

Annexe 3

Feuille de calculs utilisée lors de l'activité préparatoire de la « leçon 54 »
(fiche photocopiable page 255, *Euromaths* CE1, Peltier & al., 2004, Hatier)

Feuille de calculs

ETAPE 56

Série 1

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = \dots\dots\dots$$

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = \dots\dots\dots$$

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = \dots\dots\dots$$

$$12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = \dots\dots\dots$$

$$15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 = \dots\dots\dots$$

Série 2

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = \dots\dots\dots$$

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = \dots\dots\dots$$

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = \dots\dots\dots$$

$$13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 = \dots\dots\dots$$

$$14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 = \dots\dots\dots$$

Série 3

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = \dots\dots\dots$$

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = \dots\dots\dots$$

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = \dots\dots\dots$$

$$14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 = \dots\dots\dots$$

$$16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 = \dots\dots\dots$$

Série 4

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = \dots\dots\dots$$

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = \dots\dots\dots$$

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = \dots\dots\dots$$

$$11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = \dots\dots\dots$$

$$17 + 17 + 17 + 17 + 17 + 17 = \dots\dots\dots$$

● Exercice 81

Corrigé, p. 198

Un maître souhaite donner à ses élèves le problème suivant :

Écris tous les nombres entiers ligne par ligne, comme ci-dessous jusqu'à 50.

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	...			

- 1) Dans quelle colonne se trouve le nombre 50 ?
- 2) Peux-tu dire, sans écrire tous les nombres, dans quelle colonne se trouvera le nombre 163 ? Justifie ta réponse.
- 3) Dans quelle colonne se trouvera le nombre 1 000 ? Écris les calculs que tu fais.

Les questions qui suivent se rapportent à ce problème.

1. Quelle est la notion mathématique sous-jacente ?
2. **a)** Indiquer deux procédures qui pourraient être trouvées par les élèves pour répondre à la question 2) du problème que le maître souhaite donner aux élèves.
b) Quelle synthèse peut-on proposer à la suite de la résolution de la question 3) du problème que le maître souhaite donner aux élèves ?
3. **a)** Citer un objectif que peut viser l'enseignant en proposant ce problème à ses élèves.
b) Est-il pertinent d'autoriser l'usage de la calculatrice ? Justifier la réponse.

● Exercice 82

Corrigé, p. 198

1. À quel cycle de l'école élémentaire la technique opératoire de la division euclidienne est-elle abordée ? Comment la question de l'exercice ci-dessous pourrait-elle être modifiée afin d'être proposée à des élèves de l'école élémentaire ? Quel serait alors l'objectif visé par le maître ?

Dans cette question, aucune division n'est à poser. Les réponses doivent être justifiées.

• Sachant que $57\,148\,468 = 3\,361\,674 \times 17 + 10$, donner le quotient et le reste de la division euclidienne de 57 148 468 par 17.

2. Des travaux d'élèves, à qui il était demandé d'effectuer la division $38742 : 38$, sont reproduits dans l'annexe.

Étudier les productions des quatre élèves, vérifier les résultats (quotient et reste) et analy-

ser les erreurs commises en formulant des hypothèses sur leur origine.

Annexe

Elève A

$38 \times 2 = 76$
 $38 \times 10 = 380$
 $38 \times 9 = 342$

$\begin{array}{r} \overline{38} \ 742 \\ \overline{74} \downarrow (-38) \\ 362 \ (-342) \\ 20 \end{array}$	$\begin{array}{r} 38 \\ \hline 1190 \end{array}$
--	--

Elève B

$38 \times 1 = 38$
 $38 \times 2 = 76$
 $38 \times 4 = 152$
 $38 \times 8 = 304$
 $38 \times 9 = 342$

$38 \times 10 = 380$
 $38 \times 20 = 760$

$\begin{array}{r} 38 \ 742 \\ - 38 \ 000 \\ \hline 742 \\ - 380 \\ \hline 462 \\ - 380 \\ \hline 82 \\ - 76 \\ \hline 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 38 \\ \hline 1000 \\ 10 \\ 10 \\ 2 \\ \hline 1022 \end{array}$
--	--

Elève C

$38 \times 1 = 38$
 $38 \times 2 = 76$
 $38 \times 3 = 114$
 $38 \times 4 = 152$
 $38 \times 5 = 190$
 $38 \times 6 = 228$
 $38 \times 7 = 266$
 $38 \times 8 = 304$
 $38 \times 9 = 342$

$\begin{array}{r} \overline{38} \ 742 \\ 0 \overline{74} \ 2 \\ - 380 \\ \hline 362 \\ - 342 \\ \hline 20 \end{array}$	$\begin{array}{r} 38 \\ \hline 1919 \end{array}$
--	--

je vérifie

1019	
x 38	
8152	
30570	
38722	

Elève D

$38 \times 10 = 380$
 $38 \times 11 = 418$
 $38 \times 12 = 456$

$\begin{array}{r} \overline{38} \ 742 \\ 00 \overline{74} \downarrow \\ - 38 \\ \hline 462 \\ - 456 \\ \hline 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 38 \\ \hline 1112 \end{array}$
--	--

■ Organisation de données – Résolution de problèmes

● Exercice 83

Corrigé, p. 200

Cet exercice s'appuie sur les documents proposés dans les annexes 1 et 2 :

– **Annexe 1** : une situation inspirée d'une activité – Partages inéquitables – proposée dans l'ouvrage *ERMEL Apprentissages numériques et résolution de problèmes* – CP, Éditions Hatier.

– **Annexe 2** : les travaux d'un élève (Hubert).

Cette situation a été présentée au troisième trimestre dans une classe de cours préparatoire.

1. Citer deux objectifs que peut viser un enseignant qui propose cette activité à ses élèves. Justifier.
2. Indiquer deux éléments de cette situation qui peuvent avoir une influence sur les procédures mises en œuvre par les élèves.
3. Quel est le rôle de la première phase ?
4. Décrire deux procédures différentes que peuvent utiliser les élèves pour réussir la tâche demandée au cours de la deuxième phase.
5. Analyser la procédure élaborée par Hubert.

Annexe 1

Les partages inéquitables.

PREMIÈRE PHASE : RÉOLUTION DU PROBLÈME AVEC DU MATÉRIEL.

Les enfants sont répartis en groupes.

Matériel

– Pour chaque groupe, on donne un couvercle de boîte à chaussures contenant des objets (bâtonnets de glace) : 16, 19 et 27 selon les groupes.

– Des boîtes (pots de yaourt) : 4, 5 ou 7.

Consigne

« Il va falloir mettre les objets dans les boîtes. Il doit y avoir 3, 4 ou 5 objets par boîte. Pas moins de trois, pas plus de 5. Tous les objets doivent être utilisés. »

Les élèves travaillent en groupes avec pour tâche de remplir les boîtes. Chaque groupe est ensuite amené à présenter son résultat, c'est-à-dire ce qu'il a obtenu et comment il l'a obtenu. On vérifie ensuite l'exactitude de chaque répartition.

DEUXIÈME PHASE : RÉOLUTION DU PROBLÈME SANS MATÉRIEL.

On applique toujours la consigne précédente.

Dans cette étape, les objets ainsi que les boîtes ne sont plus présents. Chaque enfant dispose d'une feuille de recherche. Le maître y indique dans les cadres réservés, le nombre de boîtes et le nombre de bâtonnets.

Les répartitions suivantes sont proposées :

- 13 bâtonnets à répartir dans 4 boîtes ;
- 18 bâtonnets à répartir dans 4 boîtes ;
- 23 bâtonnets à répartir dans 6 boîtes ;
- 26 bâtonnets à répartir dans 6 boîtes ;
- 31 bâtonnets à répartir dans 7 boîtes.

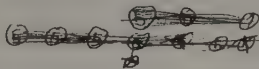
Boîtes :	Bâtonnets :	Prénom :
Mes recherches :		

Feuille de recherche proposée aux élèves

Cette phase de recherche est suivie d'une mise en commun.

Boîtes : 7	Bâtonnets : 31	Prénom : <i>Hubert</i>
----------------------	--------------------------	---------------------------

Mes recherches :



$$\cancel{5} + \cancel{5} + \cancel{5} + \cancel{5} + \cancel{5} + \cancel{5} + 7 = 37$$

$$\cancel{5} + \cancel{5} + 4 + \cancel{5} + \cancel{5} + \cancel{5}$$

$$5 + 5 + 4 + 5 + 5 + 4 + 3 = 37$$

● Exercice 84

Corrigé, p. 201


L'annexe 1 présente l'énoncé d'un problème ainsi que les productions écrites de quatre élèves A, B, C et D.

1. Dans quel cycle de l'école cette situation peut-elle être proposée ? Justifier la réponse.
2. Pour chaque élève, décrire la procédure utilisée et analyser les erreurs éventuelles en formulant des hypothèses sur leurs origines.
3. En référence aux documents d'application des programmes dont un extrait est reproduit en annexe 2, indiquer à quel type d'écrits correspondent les productions des quatre élèves. Justifier la réponse.

Annexe 1

Arnaud est allé voir les poules et les lapins de son voisin. En revenant, il pose à son frère la devinette suivante : « J'ai compté les têtes de tous les animaux et j'ai trouvé 4. J'ai ensuite compté les pattes et j'ai trouvé 14. Peux-tu me dire combien il y a d'animaux de chaque sorte ? »

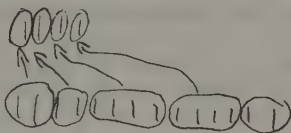
élève A



Il y a 3 lapins et 1 poule.

$$\begin{array}{r} 3 \\ - 1 \\ \hline 4 \end{array}$$

élève B



1 tête = 2 pattes pour les poules
1 tête = 4 pattes pour les lapins

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 4 \\ \hline 16 \end{array}$$

En tout il y a 16 poules et lapins,

élève C

☐ = lapin à 4 pattes

⊙ = poule à 2 pattes

$$\begin{array}{r} \text{☐} \quad \text{☐} \quad \text{☐} \\ \hline 4 + 4 + 4 \\ 8 + 4 \\ \hline 12 \\ + \quad \text{⊙} \\ \hline 14 \end{array}$$

Il y a 3 lapins et 1 poule

élève D

⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙ 7 poules

☐☐☐☐ 4 lapins

Annexe 2

Écrire en mathématiques

Les élèves sont fréquemment placés en situation de production d'écrits. Il convient à cet égard de développer et de bien distinguer trois types d'écrits dont les fonctions sont différentes :

– les écrits de type « recherche » correspondent au travail privé de l'élève. Ils ne sont pas destinés à être communiqués, ils peuvent comporter des dessins, des schémas, des figures, des calculs. Ils sont un support pour essayer, se rendre compte d'une erreur, reprendre, rectifier, organiser sa recherche. Ils peuvent également être utilisés comme mémoire transitoire au cours de la résolution du problème. Si l'enseignant est amené à les consulter pour étudier le cheminement de l'élève, il ne doit ni les critiquer, ni les corriger ;

– les écrits destinés à être communiqués et discutés peuvent prendre des formes diverses (par exemple, affiche, transparent). Ils doivent faire l'objet d'un souci de présentation, de lisibilité, d'explicitation, tout en sachant que, le plus souvent, ils seront l'objet d'un échange entre les élèves au cours duquel des explications complémentaires seront apportées ;

– les écrits de référence sont élaborés en vue de constituer une mémoire du travail de l'élève ou de la classe. Ils sont donc destinés à être conservés et doivent être rédigés dans une forme correcte.

Ce n'est que progressivement que ces trois types d'écrits seront bien distingués, notamment au cycle 3. L'exigence syntaxique ou graphique (soin, présentation) varie également selon la finalité de la trace écrite, et ne doit pas faire obstacle à l'objectif principal qui reste l'activité de réflexion mathématique. On sera attentif en particulier à ne pas se limiter à des formes stéréotypées, sécurisantes, mais pour lesquelles l'exigence formelle prime trop souvent sur le contenu de l'explication.

L'attention doit également être attirée sur l'importance de la synthèse effectuée au terme d'un apprentissage. Celle-ci peut permettre d'élaborer un écrit trouvant sa place dans un aide-mémoire ou un mémento dans lesquels sont consignés les savoirs essentiels.

Extrait du *Document d'application des programmes* –
Ministère de l'Éducation nationale – éd. CNDP, juillet 2002

● Exercice 85

Corrigé, p. 202

1. Un enseignant a demandé à ses élèves de cycle 3 d'écrire trois nombres entiers qui se suivent.

Tous les élèves ont su répondre à cette question. L'enseignant leur a ensuite posé l'exercice suivant :

« Je pense à trois nombres entiers qui se suivent.

Lorsque je les additionne, je trouve 51. Quels sont ces nombres ? »

L'annexe comporte 3 productions d'élèves.

Décrire les procédures utilisées par les élèves, repérer et analyser les erreurs.

2. Après une phase collective de mise en commun des productions d'élèves, l'enseignant répète la même consigne avec les nombres 72, 54 et 91 et en autorisant la calculatrice. Citer deux objectifs qui peuvent être visés par le professeur.

3. L'enseignant demande ensuite aux élèves de chercher, avec l'aide de la calculatrice, pour chacun des nombres 51, 72, 54, 91, si on peut l'écrire comme le produit d'un nombre entier par 3.

a) Quel est l'objectif de cette dernière activité ?

b) Justifier l'emploi de la calculatrice.

recherche	conclusion
$\begin{array}{r} 20 \\ +21 \\ +22 \\ \hline 63 \end{array}$ $\begin{array}{r} 12 \\ +13 \\ +14 \\ \hline 39 \end{array}$ $\begin{array}{r} 13 \\ +14 \\ +15 \\ \hline 42 \end{array}$ $\begin{array}{r} 17 \\ +18 \\ +19 \\ \hline 54 \end{array}$ $\begin{array}{r} 16 \\ +17 \\ +18 \\ \hline 51 \end{array}$	<p>Les nombres sont 16, 17, 18</p>
Elève A	

recherche	conclusion
$\begin{array}{r} 51 \\ 21 \overline{) 3} \\ \hline 0 \end{array}$ <p>Je divise 51 par trois. Je fais plusieurs essais. Je trouve</p> <p>Pour 47 + 16 = 63 il manque 3 je rajoute trois à quinze et je trouve 51.</p> $\begin{array}{r} 17 \\ +16 \\ +16 \\ \hline 49 \end{array}$ <p>il manque 3</p> $\begin{array}{r} 20 \\ +19 \\ +18 \\ \hline 57 \end{array}$ <p>Je rajoute 3 quinze je trouve 18</p> $\begin{array}{r} 18 \\ +17 \\ +16 \\ \hline 51 \end{array}$	<p>c'est nombre sont 16, 17, 18</p>
Elève B	

recherche	conclusion
$\begin{array}{r} 19 \\ +20 \\ +21 \\ \hline 60 \end{array}$ $\begin{array}{r} 10 \\ +11 \\ +12 \\ \hline 33 \end{array}$ $\begin{array}{r} 15 \\ +16 \\ +17 \\ \hline 48 \end{array}$ $\begin{array}{r} 16 \\ +17 \\ +18 \\ \hline 51 \end{array}$ $\begin{array}{r} 17 \\ +18 \\ +19 \\ +20 \\ \hline 57 \end{array}$	<p>18 Nous n'avons pas trouvé</p>
Elève C	

● Exercice 86

Corrigé, p. 202

Voici un problème donné à des élèves du cycle des approfondissements :

Dans la cour des maternelles, il y a des bicyclettes et des tricycles.

J'ai remarqué :

– *qu'il y a au moins trois bicyclettes et trois tricycles ;*

– *qu'il n'y a pas plus de dix bicyclettes, ni plus de dix tricycles ;*

– *qu'il y a en tout 31 roues.*

Avec ces renseignements, combien peut-il avoir de bicyclettes et de tricycles ?

1. Un enseignant propose d'utiliser un tableur pour effectuer les calculs. Le tableur fournit le tableau suivant :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	15	18	21	24	27	30	33	36
3	4	17	20	23	26	29	32	35	38
4	5	19	22	25	28	31	34	37	40
5	6	21	24	27	30	33	36	39	42
6	7	23	26	29	32	35	38	41	44
7	8	25	28	31	34	37	40	43	46
8	9	27	30	33	36	39	42	45	48
9	10	29	32	35	38	41	44	47	50

- À quelle variable du problème correspondent les nombres de la ligne 1 ?
- À quelle variable du problème correspondent les nombres de la colonne A ?
- Pour chacune des cellules F4 et D7, donner une formule pouvant y être écrite.
- Donner un avantage à l'utilisation du tableur pour résoudre ce problème.

2. Deux élèves, Gaëlle et Loïs, ont résolu le problème. Leurs productions sont données en annexe (a et b).

- Décrire les procédures utilisées par chaque élève, relever les erreurs éventuelles et en proposer une analyse.
- Montrer en quoi, lors d'une mise en commun, les solutions proposées peuvent être complémentaires.

Gaëlle

Mardi 30 Janvier

Dans la cour des maternelles, il y a des bicyclette et des tricycles. J'ai compté 34 roues. Il en a au moins trois de chaque mais pas plus de 10. Combien peut-il y avoir de bicyclette et de tricycles?

~~$$\begin{array}{r} 34 - 35 = \\ 34 - 6 = 2 \end{array}$$~~

~~$$\begin{array}{r} 34 \\ 3 \\ \hline 11 \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r} 34 \\ 3 \\ \hline 01 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \quad x$$



$$000 = 7$$

$$00 = 5$$

Il y a 7 tricycles et 5 bicyclettes.

Annexe b
Production de Lois

Mardi 30 Janvier

Lois

Dans la cour des maternelles, il y a des bicyclette et des tricycles.
J'ai 31 roues. Il y en a au moins trois de chaque mais pas plus de 10.
Combien peut-il y avoir de bicyclette et de tricycles ?

bi = 2 roues
tri = 3 roues

~~10 x 3 = 30~~
~~7 x 3 = 21~~
~~6 x 3 = 18~~
~~5 x 3 = 15~~
~~4 x 3 = 12~~
~~3 x 3 = 9~~
~~2 x 3 = 6~~

~~5 x 2 = 10~~
~~6 x 2 = 12~~
~~7 x 2 = 14~~
~~8 x 2 = 16~~

1	x	3	=	3
2	x	3	=	6
3	x	3	=	9
4	x	3	=	12
5	x	3	=	15
6	x	3	=	18
7	x	3	=	21
8	x	3	=	24
9	x	3	=	27
10	x	3	=	30

1	x	2	=	2
2	x	2	=	4
3	x	2	=	6
4	x	2	=	8
5	x	2	=	10
6	x	2	=	12
7	x	2	=	14
8	x	2	=	16
9	x	2	=	18
10	x	2	=	20

Il $5 \times 3 = 15$ plus $8 \times 2 = 16$

donc sa fait 31

31

● **Exercice 87**

Corrigé, p. 203

Les deux énoncés de problèmes suivants ont été donnés lors de l'évaluation à l'entrée en 6^e, dans deux séquences différentes, en 2005.

Énoncé 1 : « 6 objets identiques coûtent 150 €. Combien coûtent 9 de ces objets ? »

Énoncé 2 : « 10 objets identiques coûtent 22 €. Combien coûtent 15 de ces objets ? »

On trouvera, dans l'annexe, des productions d'élèves.

1. Quelle est la notion mathématique sous-jacente dans ces deux énoncés ?
2. Pourquoi a-t-on proposé ces deux énoncés dans une même évaluation ?
3. Analyser les productions d'élèves de l'annexe 1 en prenant soin de décrire la procédure utilisée et en repérant les erreurs et leur(s) origine(s) éventuelle(s).

Annexe

Production d'Alice :

Énoncé 1 :

$$6 \div 2 = 3$$

$$150 \div 2 = 75$$

$$3 \times 3 = 9 \quad 75 \times 3 = 225 \text{€}$$

Réponse : 225...

Énoncé 2 :

$$10 \div 2 = 5$$

$$22 \text{€} \div 2 = 11$$

$$5 \times 3 = 15 \quad 11 \times 3 = 33 \text{€}$$

Réponse : 33€...

Production de Bruno :

Énoncé 1 :

Utilise ce cadre pour faire les recherches

$$\begin{array}{r} 150 \text{€} \\ \times 13 \\ \hline 1350 \text{€} \end{array}$$

Réponse :

Énoncé 2 :

Utilise ce cadre pour faire les recherches

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 15 \\ \hline 110 \\ + 220 \\ \hline 330 \end{array}$$

Réponse :

Production de Charles :

Énoncé 1 :

un objet coûte 25€

$$\begin{array}{r} 150 \text{€} \\ - 12 \text{€} \\ \hline 30 \text{€} \\ - 30 \text{€} \\ \hline 00 \end{array}$$

Réponse :

Énoncé 2 :

10 objets coûtent 22€
15 objets coûtent 33€

$$\begin{array}{r} 22 \\ - 10 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ + 15 \\ \hline 37 \end{array}$$

Réponse : 33€...

Production de Dalila :

Énoncé 1 :

Utilise ce cadre pour faire les recherches

$$150 + 50 + 95 = 295$$

Réponse : 295€

Énoncé 2 :

$$\begin{array}{r} 10 \\ - 90 \\ \hline 80 \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ + 90 \\ \hline 180 \end{array}$$

Réponse : 112

● Exercice 88

Corrigé, p. 204

On considère l'exercice 6 et l'exercice 34, extraits des évaluations de mathématiques à l'entrée en sixième pour l'année 2005. Ces exercices sont reproduits dans l'annexe 1.

1. Quelle est la notion mathématique en jeu dans ces deux exercices ?
2. Dans l'annexe 2 figurent des productions d'élèves nommés *A, B, C, D*, pour l'exercice 6.
 - a) Décrire les procédures correctes mises en œuvre par les élèves. Préciser, le cas échéant, les propriétés mathématiques utilisées implicitement.
 - b) Analyser les erreurs éventuelles de chaque élève.
3. Dans l'annexe 3 figurent les productions des mêmes élèves *A, B, C* pour l'exercice 34. Pour chacun de ces élèves, comparer la procédure mise en œuvre dans l'exercice 6 avec celle utilisée dans l'exercice 34. Si de nouvelles erreurs apparaissent, les analyser.
4. Dans l'annexe 3 figure aussi la production de l'élève *E*. Analyser son erreur.

Annexe 1

Exercice 6

6 objets identiques coûtent 150 €. Combien coûtent 9 de ces objets ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches

Réponse :

Exercice 34

10 objets identiques coûtent 22 €. Combien coûtent 15 de ces objets ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches

Réponse :

Exercices extraits des évaluations à l'entrée en sixième (année 2005).

Annexe 2

Elève A Exercice 6

6 objets identiques coûtent 150 €. Combien coûtent 9 de ces objets ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches

$$\begin{array}{r|l} 150 & 6 \\ \hline 12 & 0 \\ \hline 0 & 30 \\ \hline 30 & 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 150 \\ + 75 \\ \hline 225 \end{array}$$

Réponse : 225....

Elève B Exercice 6

6 objets identiques coûtent 150 €. Combien coûtent 9 de ces objets ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches

$\begin{array}{r} 150 \times 2 \\ - 150 \\ \hline 075 \\ - 70 \\ \hline 00 \end{array}$	$\begin{array}{r} 150 \\ + 75 \\ \hline 225 \end{array}$
---	--

Réponse : 225

Elève C Exercice 6

6 objets identiques coûtent 150 €. Combien coûtent 9 de ces objets ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches

$\begin{array}{r} 150 \overline{) 6} \\ 30 \overline{) 25} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 25 \\ \times 9 \\ \hline 225 \end{array}$
--	---

Réponse : 9 objets coûtent 225 €

Elève D Exercice 6

8 objets identiques coûtent 150 €. Combien coûtent 9 de ces objets ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches

$\begin{array}{r} 150 \\ \times 9 \\ \hline 1350 \end{array}$	$\begin{array}{r} 150 \\ \times 9 \\ \hline 1350 \end{array}$
---	---

Réponse : 1350

Annexe 3

Elève A Exercice 34

10 objets identiques coûtent 22 €. Combien coûtent 15 de ces objets ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches

$$\begin{array}{r} 22 \times 10 \\ \hline 220 \\ \hline 330 \end{array}$$

Réponse : 30 €

Elève B Exercice 34

10 objets identiques coûtent 22 €. Combien coûtent 15 de ces objets ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches

$$\begin{array}{r} 22 \times 2 \\ \hline 44 \\ \hline 22 \times 11 \\ \hline 242 \\ \hline 242 \\ \hline 0 \\ \hline 00 \end{array}$$

Réponse : 26

Elève C Exercice 34

10 objets identiques coûtent 22 €. Combien coûtent 15 de ces objets ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches

$$\begin{array}{r} 22 \times 2 \\ \hline 44 \\ \hline 22 \times 11 \\ \hline 242 \\ \hline 242 \\ \hline 0 \\ \hline 00 \end{array}$$

Réponse : 12 objets coûtent 33€

10 objets identiques coûtent 22 €. Combien coûtent 15 de ces objets ?

L'élève de CM2 pour faire les recherches

$$22 \div 10 = 2,2$$

$$2,2 \times 15 = 30,3$$

Réponse : 30,3 €

● Exercice 89

Corrigé, p. 205

1. L'exercice ci-dessous est proposé dans une classe de CM2 :
(Place aux maths CM2, Bordas 2002, exercice n° 4 p. 94.)

On sait qu'en moyenne, 70 % des élèves mangent à la cantine.

1) Combien peut-on prévoir d'élèves mangeant à la cantine s'il y a 100 élèves dans une école ? S'il y a 50 élèves ? S'il y a 1 000 élèves ?

2) Il y a 1 850 élèves dans une commune. Combien la municipalité doit-elle prévoir de repas à la cantine ?

a) Justifier le choix des nombres 100, 50 et 1 000 donnés dans la première question posée aux élèves.

b) Décrire une procédure induite par cette première question que pourrait utiliser un élève de CM2 pour répondre à la question 2) en précisant la (ou les) propriété(s) mathématique(s) utilisée(s).

2. L'exercice ci-dessous est proposé dans une autre classe de CM2 :

À la boulangerie, Lucie paye 4 € pour acheter 5 baguettes de pain.

Combien doit-elle payer pour avoir 10 baguettes ? 25 baguettes ? 35 baguettes ?

a) Expliciter deux procédures, en précisant les propriétés sous-jacentes, que des élèves peuvent utiliser pour calculer le prix de 35 baguettes.

b) À la suite de cet exercice, le maître pose une nouvelle question aux élèves :

« Combien Lucie doit-elle payer pour avoir 17 baguettes ? »

Décrire une procédure que des élèves peuvent mettre en œuvre pour répondre à cette question.

Expliciter alors ce que pourrait être l'objectif visé par le maître.

■ Géométrie

● Exercice 90

Corrigé, p. 206

1. Pour cette question, se reporter aux exercices 3, 4 et 5 du document reproduit dans l'annexe 1.

a) Expliciter un point commun et une différence entre les tâches demandées aux élèves dans l'exercice 3 et celles demandées dans les exercices 4 et 5.

b) Quel(s) outil(s) le maître pourrait-il fournir aux élèves pour qu'ils valident eux-mêmes leurs réponses dans les exercices 4 et 5 ?

2. Pour cette question, se reporter à l'exercice 3 du document reproduit dans l'annexe 2.

Indiquer trois difficultés que les élèves pourraient rencontrer dans la réalisation de cet exercice.

Date :

Calculs dictés

1 a b c d e f

Écritures de nombres

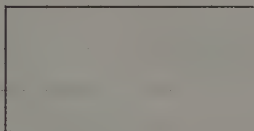
2 Complète.

exemple 443 quatre cent quarante-trois
498
606
919

sept cent soixante-douze
huit cent neuf
cent quatre-vingt-dix-sept
quatre-vingt-dix-neuf

Carrés et rectangles

3 Termine la construction de chaque figure.

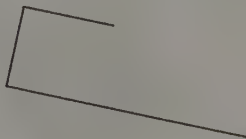


Un rectangle



Un carré

4 Termine le rectangle à l'aide de ton double décimètre.



5 Termine le carré à l'aide de ton double décimètre.

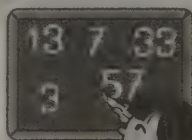


Date :

Calculs dictés

1 a. b. c. d. e. f.

2 Écris des calculs avec deux nombres de l'ardoise, le signe + ou le signe -.
 Attention, le résultat de tes calculs doit avoir 0 pour chiffre des unités.



Carrés et rectangles

3 Pour chaque figure, entoure les phrases vraies, barre les phrases fausses. Utilise ton double décimètre et un gabarit d'angle droit.

a. est un rectangle.
 est un carré.

b. est un rectangle.
 est un carré.

c. est un rectangle.
 est un carré.

d. est un rectangle.
 est un carré.

e. est un rectangle.
 est un carré.

● Exercice 91

Corrigé, p. 206

1. Cette première question porte sur les tracés réalisés par Marine (annexe 1) à l'exercice 16 de l'évaluation sixième en mathématiques de 2005.

Relever deux erreurs de Marine dans cet exercice et les interpréter.

2. Cette deuxième question se rapporte à l'annexe 2.

Un enseignant propose les trois activités dans l'ordre suivant : A, puis B1, puis B2.

Justifier cet ordre.

3. Cette troisième question se rapporte à l'annexe 3 où diverses activités relatives aux droites parallèles sont proposées.

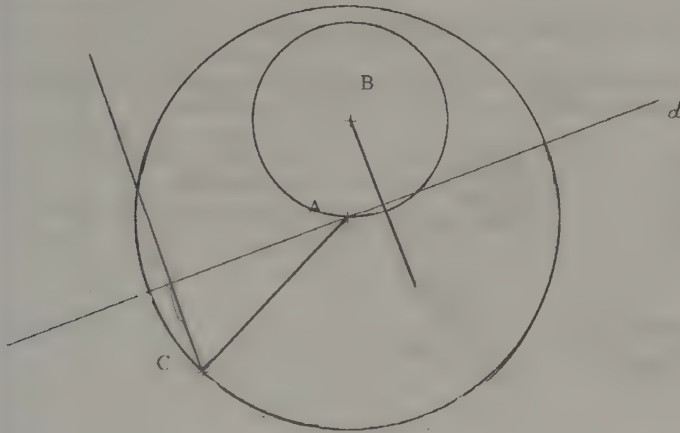
Pour chacune des deux parties, indiquer :

- l'objectif visé par le maître,
- la procédure mise en œuvre,
- la connaissance mathématique sous-jacente.

Annexe 1

Sur la figure, la droite d et les points A , B et C étaient donnés.

Exercice 16



- Trace la droite qui passe par les points A et C .
- Trace la droite qui passe par C et qui est perpendiculaire à la droite d .
- Trace la droite qui passe par B et qui est parallèle à la droite d .
- Trace le cercle de centre B passant par A .
- Trace le cercle de diamètre $[AC]$.

Ministère de l'Éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche
Direction de l'évaluation et de la prospective

Annexe 2

Nota bene : les indications de couleur ne sont pas respectées. Elles n'ont pas d'incidence sur le contenu des activités.

Activité A

Extrait du livre *Les maths à la découverte des sciences*, CE2, Hachette, 2006.

Cherchons ensemble

Clotilde a dessiné son pantin en train de monter un escalier.

- Recherche quels membres du pantin sont pliés en faisant un angle égal à ton gabarit d'angle rouge.
- Colorie ces angles en rouge.

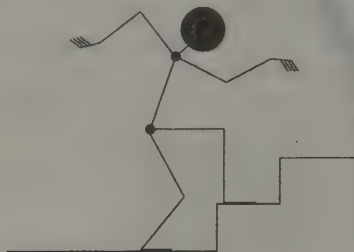
Ce sont des **angles droits**.

On marque un angle droit avec le code suivant :



On vérifie qu'un angle est droit à l'aide d'une **équerre**.

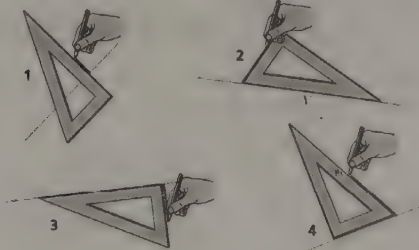
- Recherche d'autres angles droits dans le dessin et marque-les avec le code.



Activité B

Extrait du livre *Les maths à la découverte des sciences*, CE2, Hachette, 2006.

- 1** On veut tracer une ligne perpendiculaire à la droite rouge. Barre le numéro du dessin quand on s'y prend mal.



- 2** Trace deux droites perpendiculaires à la droite rouge :

- la première droite doit croiser la droite rouge en un point que tu choisiras ;
- l'autre doit passer par le point P.



Annexe 3

Extrait du livre *À portée de maths*, CM1, Hachette, 2006.

PARTIE 1

a) Prends une feuille de papier et réalise le pliage en suivant les étapes 1 à 4.



Déplie la feuille et repasse les 5 plis au crayon (étape 5). Tu as tracé 5 droites : d , d_1 , d_2 , d_3 et d_4 .

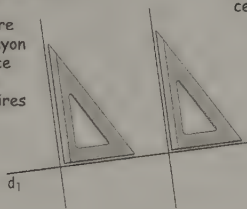
b) Que peux-tu dire des droites d et d_1 ? d et d_2 ? d_1 et d_2 ? d_2 et d_3 ? d_3 et d_4 ?

PARTIE 2

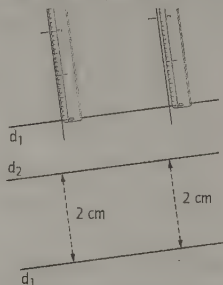
Comment construire deux droites parallèles ?

Trace une droite d_1 .

Puis à l'aide de ton équerre et de ton crayon à papier, trace deux droites perpendiculaires à d_1 .



En utilisant ta règle graduée, marque sur ces deux droites un point situé à 2 cm de d_1 .



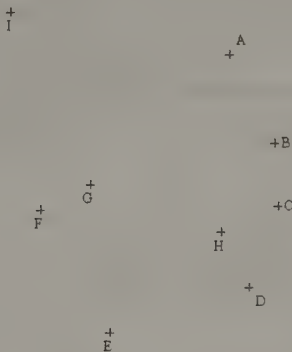
Avec ta règle, trace la droite d_2 passant par les deux points marqués. d_1 et d_2 sont deux droites parallèles distantes de 2 cm l'une de l'autre. On note $d_1 // d_2$.

● Exercice 92

On considère l'exercice suivant extrait de l'évaluation nationale à l'entrée en sixième (septembre 2004, DEP, Ministère de l'Éducation nationale).

Exercice 33

Les points A, B, C et D sont sur un même cercle.
Le centre de ce cercle est l'un des points de la figure.
En utilisant ta règle graduée, trouve le centre de ce cercle.



Le centre du cercle est le point :

Explique comment tu as trouvé.

.....

.....

.....

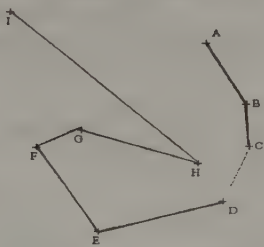
Les réponses de quatre élèves à cet exercice sont fournies en annexe :

1. Quelle connaissance mathématique est nécessaire pour réussir cet exercice ?
2. Quels sont les élèves qui fournissent les réponses attendues ? Justifier.
3. Analyser les productions des élèves en précisant, pour chacune d'elles :
 - a) La conception du centre du cercle que l'élève semble avoir.
 - b) L'utilisation qui a été faite des instruments de géométrie.

Annexe

Pour faciliter la lecture de ces documents, les traces écrites des élèves ont été retranscrites dans des cadres.

FABIEN



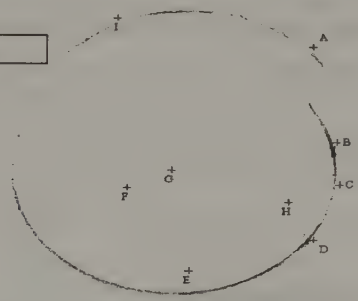
Le centre du cercle est le point : G

Explique comment tu as trouvé.

Parce que H est au milieu de tous les lettres

Parce que H est au milieu de tous les lettres

LEA



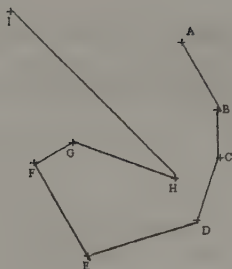
Le centre du cercle est le point : G

Explique comment tu as trouvé.

J'ai mis le compas sur le point G et sa ma fait un cercle sur le point A, B, C, D.

J'ai mis le compas sur le point G et sa ma fait un cercle sur le point A, B, C, D. et sa ma fait un cercle sur le point H, A, B, C, D.

KEVIN



Le centre du cercle est le point : H.....

Explique comment tu as trouvé.

...comme on a dit de prendre une règle, j'ai
 tracé et comme j'ai vu j'ai dit que s'était
 le H.

Comme on a dit de prendre une règle, j'ai
 tracée et comme j'ai vu j'ai dit que s'était
 le H.

DENIS



Le centre du cercle est le point : G.....

Explique comment tu as trouvé.

Car j'ai mesuré A et ça faisait 3,8 cm et
 B, C, D ça faisait aussi 3,8 cm.

Car j'ai mesuré A et ça faisait 3,8 cm et
 C, D ça faisait aussi 3,8 cm.

● Exercice 93

Corrigé, p. 208

1. On considère d'abord le document 1 de l'annexe.
 - a) Décrire deux procédures possibles des élèves en réponse à la question 1.
 - b) Quelle propriété le maître souhaite-t-il faire émerger en proposant cette situation ? Citer une difficulté qui peut faire obstacle à l'émergence de cette propriété.
 - c) Pourquoi la consigne préalable aux questions 2, 3 et 4 précise-t-elle que la droite tracée ne doit pas être parallèle aux bords de la feuille ?
 - d) En prolongement de la question 4 du document 1, indiquer quel est l'ensemble constitué par tous les points situés à 7 cm de la droite.

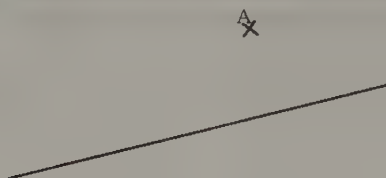
2. On considère maintenant le document 2 (copie d'écran).

Pour procéder à une synthèse de l'activité précédente, l'enseignant décide de projeter sur tableau blanc une figure réalisée avec un logiciel de géométrie dynamique. Le point P peut alors être déplacé sur la droite, et la distance AP s'affiche, comme sur la copie d'écran. Le point A et la droite peuvent également être déplacés.

Quel avantage peut apporter ce support, pour la connaissance visée, par rapport au dessin sur feuille des élèves ?

Annexe

Document 1 : Extrait d'un manuel de cycle 3 (*Cap Maths*, éd. Hatier, 2004)



1) Place, sur la droite, le point qui est le plus proche du point A (le dessin ci-dessus est une réduction d'une fiche format A4 fournie aux élèves) :

Pour les questions 2, 3 et 4, utilise à chaque fois une feuille de papier uni et trace une droite. La droite que tu traces ne doit pas être parallèle aux bords de la feuille.

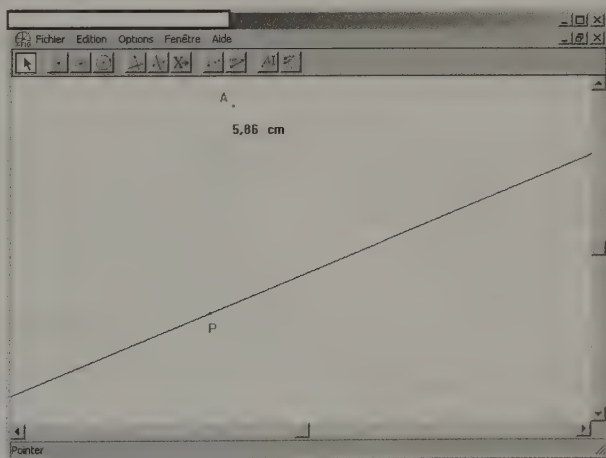
2) Avec ton équipe, propose une méthode qui permet de placer, du premier coup, un point qui est exactement à 7 cm de la droite.

3) Place un point en dehors de la droite, nomme-le A .

Comment faire pour déterminer rapidement le point de la droite qui est le plus proche du point A ?

4) Place rapidement et avec précision 24 points à 7 cm de la droite.

Document 2 : Copie d'écran (logiciel de géométrie dynamique)



● Exercice 94

Corrigé, p. 209

Vous trouverez ci-après le descriptif d'une situation extraite de *Travaux Géométriques, Apprendre par la résolution de problèmes, cycle 3* (CRDP du Nord-Pas-de-Calais, 2000).

Il s'agit de compléter une figure pour obtenir un rectangle $ABCD$ de centre O (on considère implicitement que M est le milieu de $[AB]$, Q le milieu de $[AD]$ et que $AQOM$ est un rectangle). Deux mises en œuvre ont été réalisées dans deux CM2 différents.

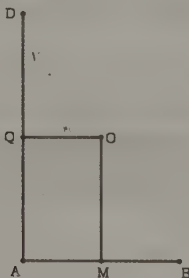
Consigne 1 pour la première mise en œuvre :

Complète la figure ci-dessous pour obtenir un rectangle de centre O .
Tu ne peux utiliser que la règle non graduée et le compas.



Consigne 2 pour la seconde mise en œuvre :

Complète la figure ci-dessous pour obtenir un rectangle de centre O .
Tu ne peux utiliser que la règle graduée.



1. Pour la consigne 1, citer trois procédures envisageables en CM2 et mentionner pour chacune les propriétés géométriques en jeu.
2. Toujours pour la consigne 1, donner deux types de difficultés que peut rencontrer un élève face à cette tâche.
3. Pour la consigne 2, l'enseignant dispose du document suivant qui présente une procédure particulière :

Extrait du document pour l'enseignant :

« pour réussir la tâche demandée il suffit :

- d'utiliser la propriété selon laquelle les diagonales du rectangle ont la même longueur,
- de mesurer la diagonale $[BD]$ (tracée ou non),
- de reporter cette longueur en prolongeant le segment $[AO]$ pour marquer le point C ,
- de tracer le rectangle $ABCD$. »

- a) La procédure présentée dans ce document est-elle envisageable avec la consigne 1 ? Justifier.
- b) Parmi les procédures que vous avez citées pour la consigne 1, certaines peuvent-elles dans leur principe s'appliquer avec la consigne 2 ? Justifier.
4. Proposer un autre instrument géométrique dont l'utilisation amènerait à mettre en œuvre d'autres propriétés du rectangle. Justifier.

● Exercice 95

Corrigé, p. 210

Le document présenté en annexe est extrait d'un manuel de CM1 (collection « Cap Maths », Éditions Hatier, 2004), il comporte deux pages qui ont été réduites.

1. Citer trois types de difficultés que peuvent rencontrer les élèves pour reproduire la figure A à l'identique sur papier uni à l'aide des instruments usuels de géométrie (règle graduée, compas, équerre).

2. Pour chacune des deux figures A et B :

- décrire la chronologie des principales étapes de sa construction qui pourrait être induite par la position de la figure dans sa page;
- justifier cette chronologie.

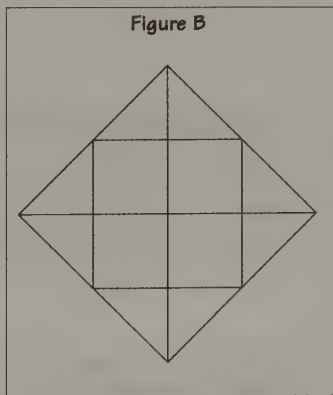
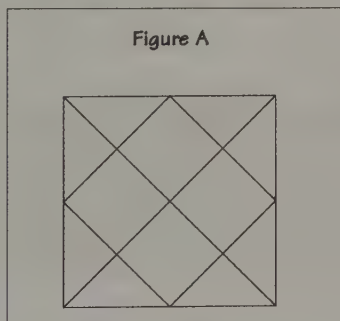
3. Le guide du maître du manuel Cap Maths (collection « Cap Maths », pages 46 à 48, Éditions Hatier, 2004) propose le déroulement suivant :

- la moitié de la classe reçoit la figure A, l'autre moitié reçoit la figure B;
- la consigne est : « Vous devez reproduire sur papier uni avec vos instruments de géométrie la figure que je vous ai distribuée. La figure reproduite doit être identique au modèle. »
- les élèves sont invités à réaliser la tâche prescrite.

Le maître dispose de calques de la page « figure A » et de la page « figure B ».

Proposer deux utilisations différentes de ces transparents pour la suite de l'activité.

Annexe 1



Collection « Cap Maths », Éditions Hatier, 2004.

■ Mesure et grandeurs

● Exercice 96

Corrigé, p. 210

L'énoncé de problème suivant a été proposé à des élèves dont la production est en annexe.
« Je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé. »

1. Indiquer le cycle et le niveau de classe auxquels cet énoncé peut être proposé.
2. Quelles raisons didactiques ont pu motiver le choix des heures et de leurs expressions retenu dans l'énoncé ?
3. Pour chacune des productions d'élèves reproduites dans l'annexe, décrire la procédure utilisée et analyser les erreurs éventuellement commises en formulant des hypothèses sur leurs origines.
4. Quels supports et/ou outils peuvent aider à la résolution de cet exercice ?

Annexe

Productions d'élèves

Mélanie :

Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.

$$10\text{ h} + 1\text{ h} + 40\text{ m} = 1\text{ h} 50$$

Thomas :

Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.

$$10\text{ h} 40 - 9\text{ h} 50 = 90\text{ m}$$

Sabrina :

Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.

j'ai trouvé en ajoutant 10 + 40
je ai parcourus 50 mètres

Kevin :

Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 70 \\ 70 \\ 40 \\ \hline 69 \end{array} \quad 9\text{ h} 69$$

● Exercice 97

Corrigé, p. 211

Le document présenté en annexe A est tiré de *J'apprends les maths* – CE2, Éditions Retz.
L'annexe B présente la production d'un élève.

1) Pour cette question, se reporter au document reproduit en annexe A.

a) Citer deux difficultés que peuvent rencontrer les élèves pour barrer les masses impossibles de l'exercice 1.

b) Citer deux difficultés que peuvent rencontrer les élèves pour répondre correctement à l'exercice 2. a).

2. Pour cette question, se reporter au document reproduit en annexe B.

a) Dans cette question, on s'intéresse aux exercices 2. a), 2. b) et 2. c). Quelle est la règle implicite utilisée par cet élève ?

b) Dans cette question, on s'intéresse à l'exercice 2. d). Lorsqu'il s'agit de transformer une écriture en gramme en une écriture complexe kilogramme-gramme, on peut supposer que l'élève utilise la règle implicite suivante : le premier chiffre correspond au nombre de kilogrammes, le reste des chiffres correspond au nombre de grammes. Proposer un exercice (dans le même contexte) qui permettrait de vérifier si l'élève utilise cette règle qui donne en général un résultat faux.

3. Pour cette question, se reporter au document reproduit en annexe B.

a) Comment utiliser des masses marquées et une balance à affichage digital pour faire prendre conscience à l'élève de son erreur lors de l'écriture de l'égalité : $2 \text{ kg } 40 \text{ g} = 240 \text{ g}$?

b) Donner une aide possible que l'enseignant peut apporter à cet élève.

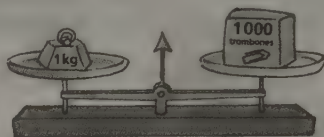
Annexe A

Extrait de *J'apprends les maths* – CE2, Éditions Retz, Séquence 103, p. 150.

1 Observe.



1 gramme (1 g),
c'est lourd comme 1 trombone.



1 kilogramme (1 kg),
c'est lourd comme 1 000 trombones.

1 kilogramme = grammes

Imagine les pesées et barre les masses impossibles.

Une pièce de 1 c.



2 g
200 g
2 kg

Un stylo



1 g
5 g
50 g

Une pile



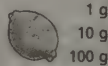
5 g
25 g
250 g

Une bille



1 g
5 g
50 g

Un citron



1 g
10 g
100 g

Ton fichier de maths



100 g
500 g
1 kg

Une boîte de conserve



50 g
100 g
1 kg

Une bouteille d'eau



150 g
1 kg et 500 g
15 kg

Un bébé



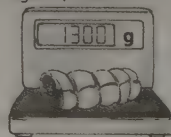
500 g
5 kg
15 kg

2

a On a pesé un poulet et un rôti. Lequel est le plus lourd? Réponds avec le signe >, < ou =.



1 kg 250 g 1 300 g



b Compare ces différentes masses. Utilise les signes >, < ou =.

2 kg 60 g 2 600 g 2 kg 300 g 3 200 g 3 008 g 3 kg 8 g
1 500 g 1 kg 5 g 1 kg 70 g 975 g 1 kg 450 g 1 520 g

c Écris ces masses en grammes.

1 kg 350 g = g 2 kg 40 g = g 4 kg 7 g = g

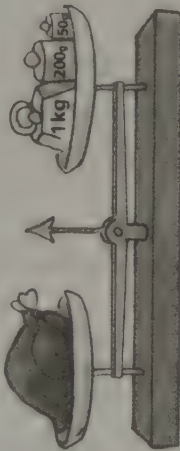
d Écris ces masses en kg et g.

3 200 g = kg g 5 003 g = kg g 2 040 g = kg g

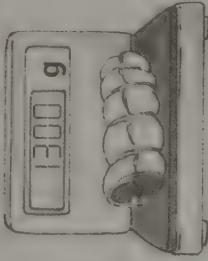
Travail d'un élève

2

On a pesé un poulet et un rôti. Lequel est le plus lourd ? Réponds avec le signe $>$, $<$ ou $=$.



1 kg 250 g $<$ 1300 g



Compare ces différentes masses. Utilise les signes $>$, $<$ ou $=$.

2 kg 60 g $<$ 2600 g

2 kg 300 g $<$ 3200 g

3008 g $>$ 3 kg 8 g

1500 g $>$ 1 kg 5 g

1 kg 70 g $<$ 975 g

1 kg 450 g $<$ 1520 g

Écris ces masses en grammes.

1 kg 350 g = 1350 g

2 kg 40 g = 240 g

4 kg 7 g = 47 g

Écris ces masses en kg et g.

3200 g = 3 kg 200 g

5003 g = 5 kg 003 g

2040 g = 2 kg 040 g

Vous trouverez dans l'annexe 1, le plan d'une séquence d'enseignement prévue pour une classe de cycle 3. Seules les différentes étapes et les consignes ont été données.

1. À propos de la séance 1

Étape 1 a) Quelle est la fonction de cette étape ?

Étape 2 b) Que veut faire émerger le maître en posant les questions de cette étape ?

Étape 3 c) Décrire une procédure permettant aux élèves d'effectuer correctement la tâche demandée. (On suppose que du matériel est disponible.)

2. À propos de la séance 2

Étape 1 a) Quelle connaissance ou compétence du programme 2008 parmi celles rappelées dans l'annexe 2, l'enseignant vise-t-il principalement au cours de cette étape ?

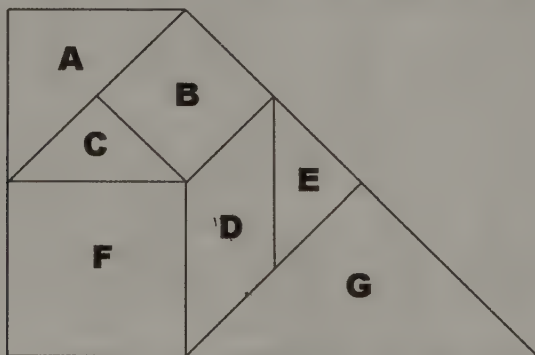
b) Quelle procédure le maître semble-t-il attendre des élèves ?

Étape 2 c) Décrire une procédure, permettant de comparer les périmètres et ne reposant ni sur le tâtonnement ni sur l'utilisation des graduations de la règle.

Le choix des pièces A, B, D vous paraît-il judicieux ? Argumenter.

Annexe 1

Les enfants travaillent par groupes de 2 ou 3 élèves lors des deux séances.



Puzzle I

Séance 1

– Étape 1 :

On donne à chaque groupe un puzzle témoin reconstitué (puzzle I) et chaque enfant reçoit les pièces nécessaires pour construire le sien.

Le puzzle et les pièces sont sur papier uni.

« Chacun doit vérifier qu'il a reçu toutes les pièces pour reconstruire le modèle, même nombre, même taille et même forme. »

– Étape 2 :

« Chacun va fabriquer un nouveau modèle avec les pièces qu'il a reçues.

– Les pièces ne doivent pas se chevaucher et vous devez les utiliser toutes.

– Dans votre équipe, toutes les formes trouvées doivent être différentes et en un seul morceau.

– Chaque forme trouvée sera collée sur une feuille puis le contour sera décalqué sur une feuille blanche. Vous obtenez ainsi une nouvelle figure. »

Chaque équipe dispose alors d'un lot de figures différentes (puzzle témoin compris) dessinées sur papier uni.

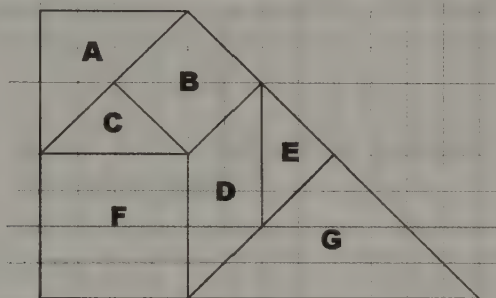
« Selon vous, les figures que vous avez occupent-elles autant de place? Plus de place? Moins de place? Qu'est-ce qui change d'une figure à l'autre? Qu'est-ce qui ne change pas? »

– Étape 3 :

« Rangez les pièces du puzzle, de celle qui occupe le plus de place à celle qui en occupe le moins. »

Séance 2

NB : Pour la suite de la séquence, un puzzle dessiné sur papier quadrillé (puzzle II) est donné aux élèves. Ils vérifient que ce puzzle est superposable, pièce par pièce, à celui déjà utilisé.



Puzzle II

– Étape 1 :

« Le puzzle a été reproduit sur papier quadrillé. Utilisez le quadrillage pour vérifier le rangement des pièces que nous avons obtenu à la fin de la séance précédente. »

– Étape 2 :

« Intéressons-nous aux pièces A, B, D. Que savez-vous de leur aire? Que pensez-vous de leur périmètre? »

– Comparez d'abord les périmètres des pièces A et D. Que constatez-vous?

– Comparez maintenant les périmètres des pièces A et D avec celui de la pièce B. Que constatez-vous? »

Annexe 2

Programme de l'école 2008 : *BOEN* hors-série n° 3 du 19 juin 2008 (extraits)

	Cours élémentaire deuxième année	Cours moyen première année	Cours moyen deuxième année
Grandeurs et mesure	<p>– Connaître les unités de mesure suivantes et les relations qui les lient :</p> <ul style="list-style-type: none"> • longueur : le mètre, le kilomètre, le centimètre, le millimètre; • masse : le kilogramme, le gramme; • capacité : le litre, le centilitre; • monnaie : l'euro et le centime; • temps : l'heure, la minute, la seconde, le mois, l'année. <p>– Utiliser des instruments pour mesurer des longueurs, des masses, des capacités, puis exprimer cette mesure par un nombre entier ou un encadrement par deux nombres entiers.</p> <p>– Vérifier qu'un angle est droit en utilisant l'équerre ou un gabarit.</p> <p>– Calculer le périmètre d'un polygone.</p> <p>– Lire l'heure sur une montre à aiguilles ou une horloge.</p> <p>Problèmes</p> <p>– Résoudre des problèmes dont la résolution implique les grandeurs ci-dessus.</p>	<p>– Connaître et utiliser les unités usuelles de mesure des durées, ainsi que les unités du système métrique pour les longueurs, les masses et les contenances, et leurs relations.</p> <p>– Reporter des longueurs à l'aide du compas.</p> <p>– Formules du périmètre du carré et du rectangle.</p> <p>Aires</p> <p>– Mesurer ou estimer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé.</p> <p>– Classer et ranger des surfaces selon leur aire.</p> <p>Angles</p> <p>– Comparer les angles d'une figure en utilisant un gabarit.</p> <p>– Estimer et vérifier en utilisant l'équerre, qu'un angle est droit, aigu ou obtus.</p> <p>Problèmes</p> <p>– Résoudre des problèmes dont la résolution implique éventuellement des conversions.</p>	<p>– Calculer une durée à partir de la donnée de l'instant initial et de l'instant final.</p> <p>– Formule de la longueur d'un cercle.</p> <p>– Formule du volume du pavé droit (initiation à l'utilisation d'unités métriques de volume).</p> <p>Aires</p> <p>– Calculer l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle en utilisant la formule appropriée.</p> <p>– Connaître et utiliser les unités d'aire usuelles (cm², m² et km²).</p> <p>Angles</p> <p>– Reproduire un angle donné en utilisant un gabarit.</p> <p>Problèmes</p> <p>– Résoudre des problèmes dont la résolution implique des conversions.</p> <p>– Résoudre des problèmes dont la résolution implique simultanément des unités différentes de mesure.</p>

● Exercice 99

Corrigé, p. 213

Cette question s'appuie sur le document proposé en annexe, extrait du manuel *Euromaths* CM2 (Hatier). Il s'agit d'un extrait de la leçon 55, en fin de période 3. Les fractions et les nombres décimaux ont été travaillés en période 1.

1. On s'intéresse à la question 1 du document de l'annexe.

a) Indiquer et décrire deux procédures que peut utiliser un élève pour répondre correctement à la question 1.

b) Un élève ne voit pas que les figures C, D et F ont la même aire. Indiquer une raison possible de cette difficulté. Quelle aide peut lui être apportée ?

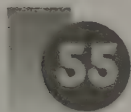
c) Après cette activité, que peut faire noter le maître dans le cahier de leçon concernant deux surfaces de même aire ?

2. On s'intéresse à la question 3 du document.

a) Décrire la procédure qu'un élève peut utiliser pour répondre à la question.

b) Choisir une autre unité d'aire afin que les réponses des élèves à cette question ne fassent appel qu'à des nombres entiers. Justifier la réponse.

Annexe



Aire des surfaces planes et fractions

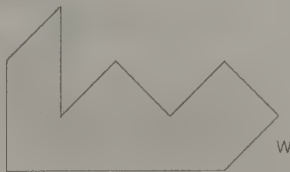
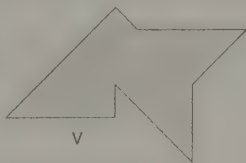
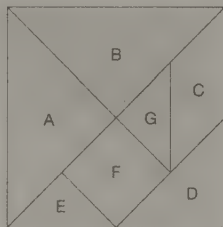
Découverte

Voici le puzzle appelé « tangram ». Son aire est choisie comme unité d'aire u . Reproduis le tangram dans un carré de papier de 8 cm de côté et découpe soigneusement les pièces.

1. Quelles pièces ont la même aire ?

2. Quelle fraction de l'aire du carré représente chaque pièce ?

3. Quelle est l'aire de chacune des figures dessinées ci-dessous ?



● Exercice 100

Corrigé, p. 215

Observer les trois problèmes présentés dans l'annexe.

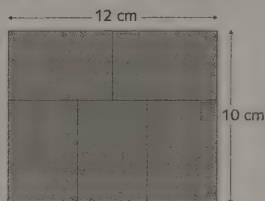
1. Dans quel cycle de l'école primaire ces problèmes pourraient-ils être traités ? Justifier la réponse.
2. Proposer deux erreurs différentes de procédure que pourraient commettre des élèves dans le problème n° 1.
3. Indiquer les principales étapes de la procédure que pourrait adopter un élève pour résoudre le problème n° 2.
4. Quelles connaissances supplémentaires par rapport aux deux problèmes précédents, la résolution du problème n° 3 suppose-t-elle ?

Annexe

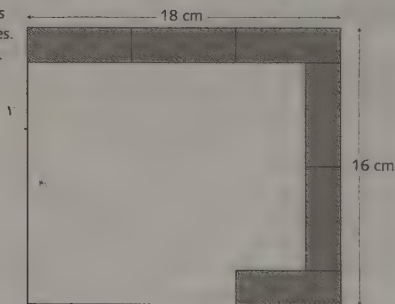
Extrait d'un manuel de la collection *Cap maths*, édition Hatier, 2004

Quelles sont les mesures des étiquettes ?

- ① Les étiquettes oranges qui constituent ce rectangle sont toutes identiques. Le dessin n'est pas en vraie grandeur. Trouve la longueur et la largeur de chaque étiquette.



- ② Les étiquettes bleues déjà placées sur ce rectangle sont toutes identiques. Le dessin n'est pas en vraie grandeur. Trouve la longueur et la largeur de chaque étiquette.



- Ces étiquettes roses, toutes identiques, sont disposées à l'intérieur d'un carré. Le périmètre de ce carré mesure 96 cm. Le dessin n'est pas en vraie grandeur.
- a. Trouve la longueur et la largeur de chaque étiquette.
 - b. Trouve le périmètre du carré blanc.

Les étiquettes mentionnées ci-dessus ne sont pas reproduites en couleur. Cela n'a aucune incidence dans le traitement des questions posées.

Corrigés

Partie 1 : Problèmes	114
Partie 2 : Exercices	126
Partie 3 : Analyse de supports d'enseignement	192

■ Partie 1 : Problèmes

● Exercice 1 : Échelle de température

Énoncé, p. 8

1. a) Correspondance entre la graduation en degrés Fahrenheit et la graduation en degrés Celsius.

Une différence de 100 °C correspond à une différence de 180 °F.

Une différence de 10 °C correspond donc à une différence de 18 °F.

On obtient la correspondance suivante :

Température en °C	- 50	- 40	- 30	- 20	- 10	0	+ 10	+ 20	+ 30
Température en °F	- 58	- 40	- 22	- 4	+ 14	+ 32	+ 50	+ 68	+ 86

Température en °C	+ 40	+ 50	+ 60	+ 70	+ 80	+ 90	+ 100
Température en °F	+ 104	+ 122	+ 140	+ 158	+ 176	+ 194	+ 212

b) Il n'y a pas de relation de proportionnalité entre ces deux suites de nombres.

Soit la fonction qui relie les deux suites de nombres.

On a $f(10) = 50$ et $f(20) = 68$.

Mais $f(30) = 86 \neq f(10) + f(20)$.

De même : $f(20) \neq 2 \times f(10)$.

Cette fonction ne satisfait pas aux propriétés de linéarité d'une fonction linéaire.

2. Montrons que $T = 1,8t + 32$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction affine qui relie les deux suites de nombres.

Soit $T = at + b$.

Pour $t = 100$, on a $T = 212$.

Pour $t = 0$, on a $T = 32$.

D'où :

$$212 = 100a + b \text{ et } 32 = 0 \times a + b.$$

$$B = 32$$

$$212 = 100a + 32 ; 180 = 100a ; a = 1,8.$$

On a donc :

$$T = 1,8t + 32.$$

3. a) Calculons la valeur exprimée en degrés Fahrenheit correspondant à 25 degrés Celsius.

On a : $T = 1,8 \times 25 + 32$.

$$T = 77 \text{ °F.}$$

b) Sur le dessin, 25 °C est repéré par le milieu de l'intervalle [20 ; 30] sur l'échelle Celsius.

Il s'agit de repérer le milieu de l'intervalle correspondant sur l'échelle Fahrenheit :

$$[68 ; 86].$$

$$(68 + 86) : 2 = 77.$$

25 °C correspond à 77 °F.

Le candidat pouvait utiliser l'annexe pour répondre à la question 1 et à cette question.

4. Cherchons la température pour laquelle les deux échelles donnent la même valeur.

On a dans ce cas $T = t$, d'où : $t = 1,8t + 32$.

$$0,8t = - 32$$

$$t = - 40.$$

- 40 °C correspond à - 40 °F.

Ceci peut se vérifier sur le dessin ou sur le tableau de correspondance établi à la question 1.

● Exercice 2 : Serre

1. Calculons la mesure V du volume de la serre.

La serre est constituée d'un parallélépipède et d'une pyramide.

Soit V_1 la mesure du volume du parallélépipède.

On a : $V_1 = EH \times HG \times GC = 8 \times 6 \times 3 = 144 \text{ m}^3$.

Soit V_2 la mesure du volume de la pyramide.

On a : $V_2 = \frac{1}{3} \times (8 \times 6) \times x = (16x) \text{ m}^3$.

D'où en m^3 : $V = 144 + 16x$.

2. Calculons ce volume pour $x = 1,5$.

Dans ce cas $V = 144 + 16 \times 1,5 = 168 \text{ m}^3$.

3. Calculons la valeur de x lorsque le volume de la serre est 200 m^3 .

Dans ce cas : $144 + 16x = 200$.

$16x = 56$.

$x = 3,5$.

Un volume de 200 m^3 correspond à une hauteur SK de mesure $3,5 \text{ m}$.

4. Il est aisé de lire sur le graphique que le point d'abscisse $4,2$ a pour ordonnée 160 .

Pour $x = 4,20 \text{ m}$, l'aire de la surface vitrée est 160 m^2 .

5. On lit sur le graphique que le point de la courbe d'ordonnée 150 a pour abscisse $3,2$.

La hauteur maximale de la pyramide pour limiter la surface vitrée à 150 m^2 est donc $3,2 \text{ m}$.

6. Pour $x = 0$, la serre se réduit à un parallélépipède rectangle de volume 132 m^3 .

On peut obtenir cette valeur par calcul :

$S = (8 \times 6) + 2 \times (6 \times 3) + 2 \times (8 \times 3) = 48 + 36 + 48 = 132$.

On peut également lire cette valeur sur le graphique. L'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 0 est 132 .

7. Les triangles rectangles SKC et SKD sont isométriques. On a donc $SD = SC$.

Le triangle SDC est donc un triangle isocèle de sommet S .

Soit I le milieu de $[DC]$. Le triangle SDC étant isocèle, (SI) est la hauteur issue de S de ce triangle.

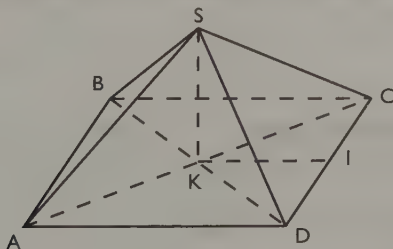
SKI est un triangle rectangle en K puisque $(SK) \perp (KI)$: (KI) appartient au plan $(ABCD)$ et (SK) est perpendiculaire à ce plan.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$SI^2 = SK^2 + KI^2$. $KI = \frac{AD}{2} = 4$ et $SK = 3$.

$SI^2 = 9 + 16 = 25$. $SI = 5$.

La longueur de la hauteur issue de S du triangle SDC est donc 5 m .

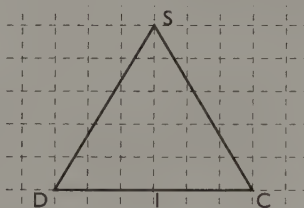


8. a) Reproduction du triangle SDC .

Calculons les longueurs des côtés du triangle sur la copie.

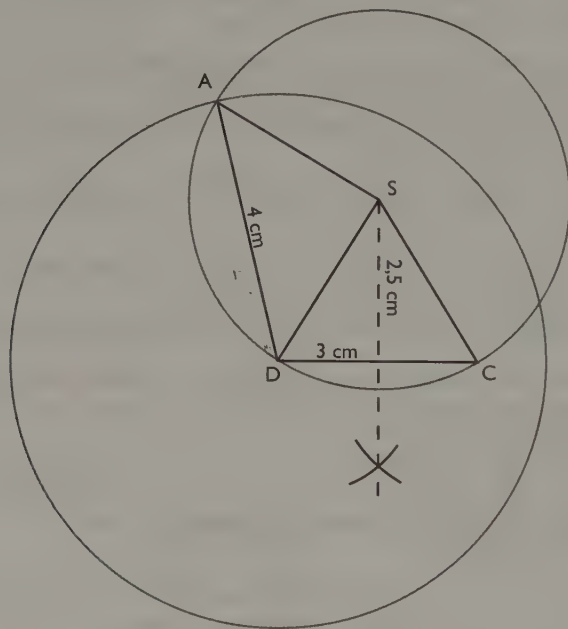
	Longueurs réelles	Longueurs à l'échelle 1/200
DC	600 cm	3 cm
SI	500 cm	2,5 cm

Construction du triangle SDC :



b) Reproduction du triangle SAD .

La longueur AD mesure 4 cm sur la copie (800/200).



● Exercice 3 : La croix des mélanges

Énoncé, p. 10

1. a) Les 15 litres de ce mélange sont composés de 10 litres à 75 centimes et de 5 litres à 60 centimes.

Le prix d'un litre de ce mélange est en centimes :

$$\frac{10 \times 75 + 5 \times 60}{15} = \frac{1\ 050}{15} = 70.$$

b) Ce mélange est composé de $\frac{2}{3}$ de vin à 75 centimes et $\frac{1}{3}$ de vin à 60 centimes.

2. En appliquant la méthode de la croix des mélanges, on obtient :



20 litres de mélange sont composés de 6 litres à 80 centimes et de 14 litres à 60 centimes.

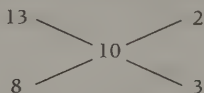
Le mélange est composé de $\frac{3}{10}$ de vin à 80 centimes et de $\frac{7}{10}$ de vin à 60 centimes.

$$6 + 14 = 20, \quad \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \text{ et } \frac{14}{20} = \frac{7}{10}.$$

3. a) Méthode de la croix des mélanges.

La dépense totale est de 150 € pour 15 albums, soit une moyenne de 10 € par album.

On peut donc appliquer la méthode de la croix des mélanges :



Sur les 15 albums, $\frac{2}{5}$ des albums sont à 13 € et $\frac{3}{5}$ des albums sont à 8 €.

L'enseignante a acheté 6 albums à 13 € et 9 albums à 8 €.

b) Méthode algébrique.

Soit x le nombre d'albums à 13 € et y le nombre d'albums à 8 €.

On obtient un système de deux équations à deux inconnues.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 15 \\ 13x + 8y = 150 \end{array} \right. \quad \text{équivalent à} \quad \left\{ \begin{array}{l} 8x + 8y = 120 \quad (1) \\ 13x + 8y = 150 \quad (2) \end{array} \right.$$

En soustrayant membre à membre (2) - (1) :

$$5x = 30, \text{ d'où } x = 6 \text{ et } y = 9.$$

c) Utilisation du tableur.

• La formule d'entrée pour la case grisée est :

$$10 \times 8 + 2 \times 13 \text{ (10 albums à 8 € et 2 albums à 13 €).}$$

• Il n'est pas utile d'aller au-delà de la colonne V car à partir de 19 albums à 8 € (152 €), on dépasse la somme de 150 €.

De la même façon, il n'est pas utile d'aller au-delà de la ligne 14, car à partir de 12 albums à 13 € (156 €), on dépasse la somme de 150 €.

• Pour résoudre le problème en utilisant la feuille de calcul, il suffit de repérer le nombre 150 dans le tableau. Ce nombre apparaît à l'intersection de la ligne 8 et de la colonne L : 9 albums à 8 € et 6 albums à 13 €.

● Exercice 4 : Aquariums

Énoncé, p. 11

Partie A

1. Volume d'eau contenu dans l'aquarium.

Les dimensions de l'aquarium sont en m : 1 m \times 0,30 m \times 0,45 m.

$$V = 1 \times 0,3 \times 0,45 = 0,135 \text{ m}^3 = 135 \text{ dm}^3 = 135 \text{ L.}$$

On retranche 20 % pour obtenir le volume d'eau contenu dans l'aquarium.

$$135 \times 0,8 = 108.$$

Le volume d'eau est 108 L.

2. a) Calculons le nombre de gouttes de médicament pour le premier jour.

Le nombre de gouttes est proportionnel au volume d'eau.

La dose pour 20 L est 10 gouttes.

On obtient le tableau de proportionnalité suivant :

Mesure du volume d'eau en L	Nombre de gouttes
20	10
108	x

On a : $20x = 1080$, d'où $x = 54$. Dans ce tableau de proportionnalité à 4 nombres, les produits en croix sont égaux.

Ou encore : $\frac{10}{20} = \frac{x}{108}$. On retrouve $20x = 1\ 080$.

Le dosage du premier jour est 54 gouttes.

b) Calculons le nombre de gouttes nécessaire jusqu'à la fin du traitement :

$54 + 27 + 27 = 108$. Le deuxième et le troisième jour, le dosage est la moitié de celui du premier jour.

Le nombre de gouttes nécessaire est 108 gouttes.

Partie B

1. Si l'on exprime en dm, les dimensions de l'aquarium, son volume en litres est : $L \times l \times 4,5$.

La mesure en litres du volume d'eau est 80 % de ce volume, soit :

$$L \times l \times 4,5 \times 0,8 = L \times l \times 3,6.$$

Le nombre de gouttes nécessaires pour le premier jour est 10 gouttes pour 20 litres d'eau, soit 1 goutte pour 2 litres.

Le nombre de gouttes nécessaires pour le premier jour est donc : $L \times l \times 3,6 \times \frac{1}{2}$.

N le nombre de gouttes s'exprime sous la forme : $N = L \times l \times 1,8$.

2. 54 gouttes correspondent à une longueur de 100 cm, c'est-à-dire 10 dm, et à une largeur 30 cm, c'est-à-dire 3 dm.

Si la longueur reste inchangée et que la largeur passe de 30 cm à 40 cm, le volume d'eau en litres et le nombre de gouttes est multiplié par $\frac{4}{3}$.

Si la largeur reste inchangée et que la longueur est diminuée de moitié, le nombre de gouttes est diminué de moitié.

Si la largeur reste inchangée et que la longueur est triplée, le nombre de gouttes est triplé.

Le tableau peut donc être complété comme suit.

longueur \ largeur		50 cm	75 cm	100 cm	150 cm
		30 cm	40 cm	36 gouttes	54 gouttes
30 cm	27 gouttes	40,5 gouttes	54 gouttes	72 gouttes	108 gouttes
40 cm	36 gouttes	54 gouttes	72 gouttes	108 gouttes	

Diagramme de relations :

- Un cercle $\times 3$ est au-dessus du tableau, avec des flèches pointant vers les colonnes 100 cm et 150 cm.
- Un cercle $: 2$ est au-dessus du tableau, avec des flèches pointant vers les colonnes 50 cm et 75 cm.
- Un cercle $\frac{4}{3} \times 3$ est à gauche du tableau, avec des flèches pointant vers les lignes 30 cm et 40 cm.
- Un cercle $: 2$ est en dessous du tableau, avec des flèches pointant vers les lignes 30 cm et 40 cm.

Partie C

1. Le nombre de gouttes est proportionnel au volume d'eau.

Les représentations graphiques sont des demi-droites passant par l'origine.

Pour l'aquarium de 30 cm de largeur, la représentation passe par le point de coordonnées (100 ; 54) (cf. le tableau complété).

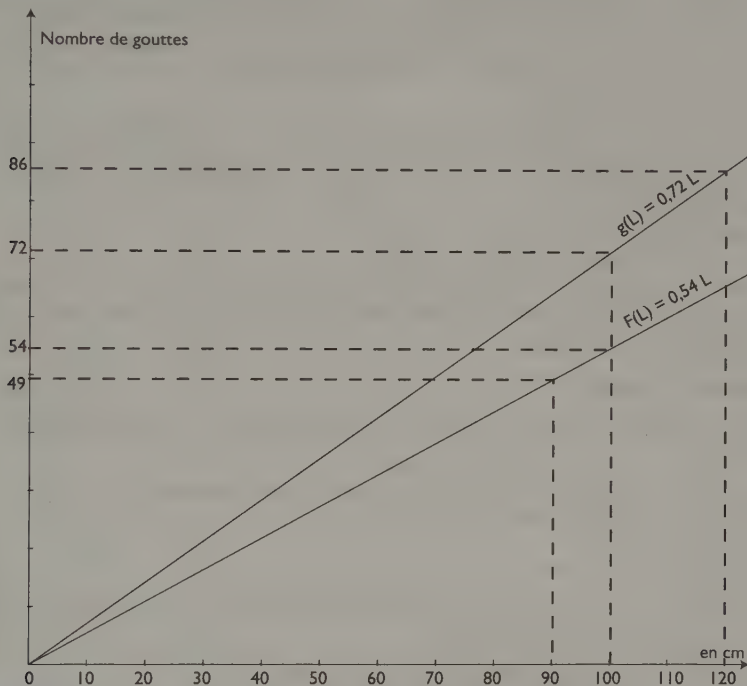
La droite a pour équation : $f(L) = 3 \times 1,8 \times \frac{L}{10}$ (L est donnée en cm).

Soit $f(L) = 0,54 L$.

Pour l'aquarium de 40 cm de largeur, la représentation passe par le point de coordonnées (100 ; 72).

La droite a pour équation : $g(L) = 4 \times 1,8 \times \frac{L}{10}$ (L en cm).

Soit $g(L) = 0,72 L$.



2. a) Par lecture sur le graphique, on obtient $g(120) \approx 86$ gouttes.

$$g(120) = 0,72 \times 120 = 86,4.$$

b) Par lecture graphique, on obtient $f(90) \approx 49$ gouttes.

$$f(90) = 0,54 \times 90 = 48,6.$$

● Exercice 5 : Immatriculations

Énoncé, p. 12

1. De AA-001-AA à AA-999-AA, il y a 999 numéros.

De AA-001-AB à AA-999-AB, il y a également 999 numéros.

De AA à AZ, on peut dénombrer 26 combinaisons de deux lettres si la première lettre reste inchangée (il y a 26 lettres dans l'alphabet).

Pour atteindre le numéro AA-999-AZ, il faut immatriculer (999×26) véhicules, c'est-à-dire 25 974 véhicules.

2. Après le numéro AA-999-AZ, vient le numéro AA-001-BA.

On peut immatriculer 999 véhicules avec un numéro commençant par AA et se terminant par BA.

De même, on peut immatriculer 999 véhicules, avec un numéro commençant par AA et se terminant par BB ; même nombre d'immatriculations pour un numéro commençant par AA et se terminant par BC, soit 999. D'autre part de AA-001-BD à AA-011-BD, on immatricule 11 véhicules.

Pour atteindre le numéro AA-011-BD, il faut donc immatriculer :

$[25\,974 + (999 \times 3) + 11]$ véhicules, soit 28 982 véhicules.

3. Avant d'arriver au numéro AB-001-AA, il faut épuiser toutes les combinaisons commençant par AA. Il faut donc parcourir toutes les combinaisons possibles de deux lettres situées en fin de numéro : de AA à AZ, de BA à BZ..., de ZA à ZZ, soit (26×26) combinaisons.

Pour chaque combinaison, on peut immatriculer 999 véhicules.

Avant d'arriver au numéro AB-001-AA, il faut donc immatriculer $(26 \times 26 \times 999)$ véhicules, soit 675 324 véhicules.

4. Pour obtenir le nombre d'immatriculations possibles, il faut multiplier le nombre de numéros commençant par AA (675 324), par le nombre de combinaisons possibles de deux lettres concernant le début du numéro qui est de (26×26) possibilités, comme pour la fin du numéro.

Le nombre d'immatriculations possibles est donc :

$$675\,324 \times 26 \times 26 = 456\,519\,024.$$

En divisant ce nombre par 7 000 000 (nombre d'immatriculations par an), on obtient le nombre d'années au bout duquel le système sera épuisé, soit un nombre d'années compris entre 65 années et 66 années.

● Exercice 6 : Impôts

Énoncé, p. 13

Monsieur et Madame Durand sont mariés et sans enfant. Leur revenu imposable est de 50 000 €.

1. Le revenu imposable (R_i) est calculé en appliquant une réduction de 10 %.

R_a est le revenu annuel du couple.

On a donc : $R_i = R_a \times 0,9$.

Donc : $R_a = 50\,000 \div 0,9 \approx 55\,555$ € (à l'euro près).

2. Le revenu annuel de Mme Durand représente 85 % du revenu annuel de M. Durand.

Soit r_a le revenu annuel de M. Durand.

On a : $R_a = r_a + 0,85 r_a = 1,85 r_a = 55\,555$.

$r_a = 55\,555 \div 1,85 \approx 30\,229$ € (à 1 € près par défaut).

Le revenu annuel de M. Durand est 30 029 €.

3. Le quotient familial « QF » est $50\,000 \div 2 = 25\,000$ €.

On se reporte à la formule de la troisième ligne : « QF » compris entre 11 344 € et 25 195 €.

L'impôt I se calcule par la formule : $I = (R_i \times 0,14) - (1\,277,03 \times N)$.

Donc : $I = 50\,000 \times 0,14 - (1\,277,03 \times 2) = 7\,000 - 2\,554,06 \approx 4\,445$ € (à 1 € près par défaut).

L'impôt à payer pour ce couple est donc de 4 445 €.

4. Si Mme Durand avait accepté un autre poste, le revenu imposable du couple serait passé de 50 000 € à 50 900 € (en déduisant 10 % sur les 1 000 € supplémentaires gagnés par Mme Durand) et le calcul de l'impôt se serait effectué selon la formule de la tranche suivante (« QF » compris entre 25 195 € et 67 546 €). En effet, dans ce cas le « QF » aurait été de 25 450 €.

En appliquant la formule de calcul de cette tranche, on trouve l'impôt I qu'aurait payé le couple :

$$I = 50\,900 \times 0,30 - 5\,308,23 \times 2 = 15\,270 - 10\,616,46 \approx 4\,653 \text{ €}.$$

Le couple aurait donc payé 208 € supplémentaires d'impôt pour un gain de 1 000 € supplémentaires, donc un bénéfice supplémentaire de 792 €.

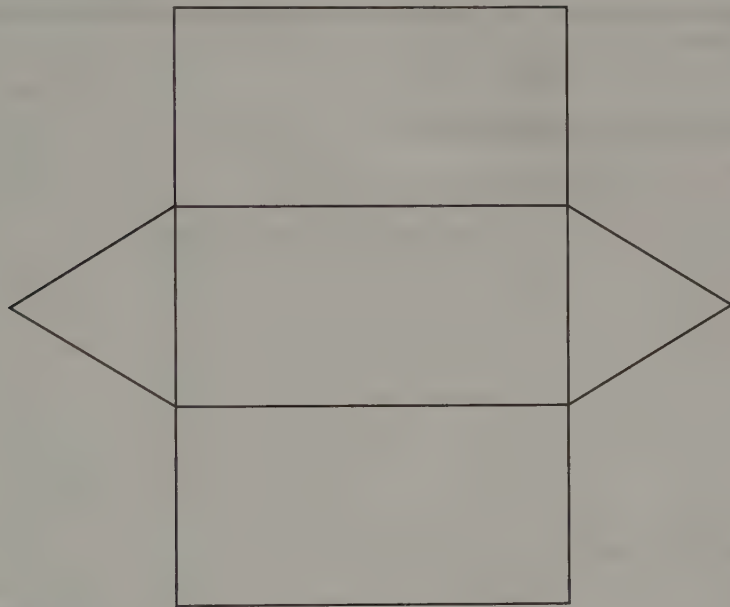
L'argument de M. Durand était donc erroné. Effectivement, c'est uniquement sur la somme dépassant le plafond de la tranche précédente que le pourcentage supérieur de la tranche suivante est appliqué.

● Exercice 7 : Emballages

Énoncé, p. 13

1. Un patron de ce prisme droit est composé de l'assemblage de trois rectangles isométriques et deux triangles équilatéraux isométriques.

Voici un patron possible.



2. On appelle A l'aire du triangle équilatéral de base.

Si x est la mesure du côté du triangle équilatéral, la mesure c des hauteurs est $c = \frac{\sqrt{3}}{2} \times x$.

L'aire du triangle équilatéral est $A = \frac{x \times c}{2} = \frac{x \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$.

3. a) Exprimons h en fonction de x .

Le volume du prisme en cm^3 est $V = 100 = A \times h = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \times h$.

Donc $h = \frac{400\sqrt{3}}{3x^2}$. En effet $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Un patron est l'assemblage de trois rectangles isométriques et deux triangles équilatéraux isométriques.

Chaque rectangle a pour aire : $h \times x = \frac{400\sqrt{3}}{3x^2} \times x = \frac{400\sqrt{3}}{3x}$.

Chaque triangle a pour aire $\frac{\sqrt{3}}{4} x^2$ (cf. démonstration précédente).

L'aire S du patron d'emballage est donc :

$$S = 3 \frac{400\sqrt{3}}{3x} + 2 \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = \frac{400\sqrt{3}}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} x^2.$$

4. Feuille de calcul

a) Par exemple, on entre la valeur 0,5 dans la cellule A2, la formule « = A2 + 0,5 » dans la cellule A3 et on copie le contenu de la cellule A3 de la case A4 à la case A35.

On aurait pu également entrer la formule « = \$A2 + 0,5 » qui fixe la colonne.

b) On peut entrer la formule « = 400 × racine(3)/A2 + racine(3) × A2²/2 » dans la cellule B2 et copier le contenu de la cellule B2 de la case B3 à la case B35.

c) Par lecture de la représentation graphique, on trouve une approximation de x qui minimise l'aire S : 7,5 (minimum de la courbe).

Remarque : La valeur exacte est $\sqrt[3]{400}$ (valeur non demandée).

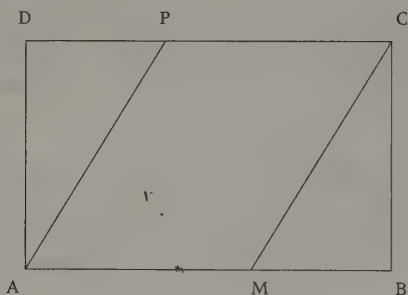
d) Calculons la hauteur de l'emballage pour cette valeur approchée de x . On obtiendra une valeur approchée de h .

Pour $x = 7,5$, on a $h = \frac{400\sqrt{3}}{3 \times 7,5^2} \approx 4,11$ cm.

● Exercice 8 : Aire d'un quadrilatère

Énoncé, p. 15

1. Pour $x = 4$, on a $N = C$ et $Q = A$.



On a :

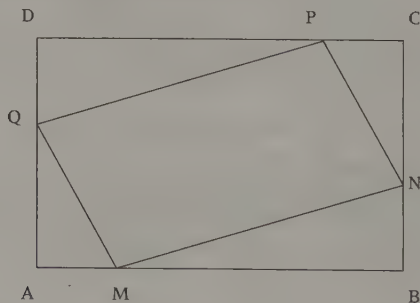
$$NP = CP = 4 \text{ et } QM = AM = 4.$$

En outre $(NP) \parallel (MQ)$ (côtés opposés du rectangle $ABCD$).

$MNPQ$ a donc deux côtés opposés parallèles et de même longueur, c'est un parallélogramme.

$$\text{Aire } (MNPQ) = AM \times BC = 4 \times 4 = 16.$$

2. On choisit une valeur de x dans l'intervalle $]0 ; 4[$.



On cherche à déterminer la nature du quadrilatère $MNPQ$.

On s'intéresse à la mesure de ses côtés.

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AMQ .

$$AM^2 + AQ^2 = MQ^2 \text{ avec } AM = x \text{ et } AQ = 4 - x.$$

$$MQ^2 = x^2 + (4 - x)^2$$

$$MQ = \sqrt{x^2 + (4 - x)^2}.$$

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle CPN rectangle en C , on obtient de la même manière :

$$NP = \sqrt{x^2 + (4 - x)^2}.$$

On a $MQ = NP$.

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle MBN rectangle en B .

$$BM^2 + BN^2 = MN^2 \text{ avec } BM = 6,5 - x \text{ et } BN = x$$

$$MN^2 = (6,5 - x)^2 + x^2$$

$$MN = \sqrt{x^2 + (6,5 - x)^2}$$

En appliquant le théorème de Pythagore dans le DQP rectangle en D , on obtient de la même manière :

$$PQ = \sqrt{x^2 + (6,5 - x)^2}$$

On a $MN = QP$.

Le quadrilatère $MNPQ$ a ses côtés opposés de même mesure, c'est un parallélogramme.

3. a) On suppose $0 < x < 4$.

On cherche à exprimer l'aire du quadrilatère $MNPQ$ en fonction de x .

On a :

$$A(MNPQ) = A(ABCD) - A(AMQ) - A(BMN) - A(CPN) - A(DQP)$$

$$A(ABCD) = 6,5 \times 4 = 26$$

$$A(AMQ) = A(CPN) = \frac{x(4-x)}{2}$$

$$A(BMN) = A(DQP) = \frac{x(6,5-x)}{2}$$

D'où :

$$A(MNPQ) = 26 - (4x - x^2) - (6,5x - x^2) = 26 - 10,5x + 2x^2$$

b) Pour $x = 0$, la formule précédente est valable.

En effet, dans ce cas :

$$A(MNPQ) = A(ABCD) = 6,5 \times 4 = 26 \text{ (en cm}^2\text{)}.$$

La formule donne $A(MNPQ) = 26 - 0 - 0 = 26$.

Pour $x = 4$, la formule est également valable.

Dans ce cas, $MNPQ$ est un carré dont la mesure du côté est 4 cm.

Donc $A(MNPQ) = 16$ (en cm^2).

La formule donne $A(MNPQ) = 26 - (16 - 16) - (26 - 16) = 26 - 10 = 16$.

4. Pour $x = 1$, par exemple, la formule fournit $A(MNPQ) = 26 - 3 - 5,5 = 17,5$.

Le point de coordonnées $(1 ; 17,5)$ n'appartient pas à la courbe de la figure 1.

Ce point n'appartient pas non plus à la courbe de la figure 2, ni à la courbe de la figure 4.

Par élimination, on retient la figure 3. Pour s'en assurer on vérifie quelques points.

5. a) Il est possible de repérer sur la courbe représentative de la figure 3 la zone pour laquelle l'aire est minimale.

À 0,5 cm près, la valeur $x = 2,5$ convient.

La valeur exacte est recherchée à la question 7. Il s'agit de $\frac{21}{8} = 2,625$.

b) La valeur minimale de l'aire du parallélogramme $MNPQ$ est proche de 12 cm^2 (valeur exacte $\frac{391}{32} \approx 12,21$ (cf. question 7)).

6. a) Dans la cellule B2, on peut rentrer la formule :

« = 26 - 10,5 × B1 + 2 × B1² »

En fixant la ligne, on pouvait également entrer la formule « = 26 - 10,5 × B\$1 + 2 × B\$1² » en recopiant vers la droite pour compléter la ligne.

b) Par lecture des résultats fournis par le tableur, on obtient les résultats suivants :

• pour $x = 2,5$, on a $A(MNPQ) = 12,25$.

• pour $x = 2,6$, on a $A(MNPQ) = 12,22$.

• pour $x = 2,7$, on a $A(MNPQ) = 12,23$.

Entre 2,5 cm et 2,6 cm, l'aire diminue de 0,03 cm².

Entre 2,6 cm et 2,7 cm, l'aire augmente de 0,01 cm² seulement.

On peut supposer que 12,22 cm² n'est pas l'aire minimale et que celle-ci est inférieure à 12,22 cm².

$$\begin{aligned} 7. 2 \left(x - \frac{21}{8}\right)^2 + \frac{391}{32} &= 2x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{441}{32} + \frac{391}{32} \\ &= 2x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{832}{32} \\ &= 2x^2 - 10,5x + 26 \\ &= A(MNPQ) \end{aligned}$$

$2\left(x - \frac{21}{8}\right)^2 + \frac{391}{32}$ est minimale lorsque $\left(x - \frac{21}{8}\right)^2$ est nul (car un carré est toujours positif).

Ce carré s'annule pour $x = \frac{21}{8}$.

L'aire de $MNPQ$ est donc minimale pour $x = \frac{21}{8}$. Dans ce cas $A(MNPQ) = \frac{391}{32}$.

● Exercice 9 : Aire maximale

Énoncé, p. 16

Le triangle rectangle ABC étant isocèle on $AB = AC = 1$ m.

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle on a :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$BC^2 = 1 + 1 = 2$$

$$\text{Donc } BC = \sqrt{2} \text{ m}$$

Partie A

1. $AB = 1$ et $AD = x$.

$AD + DB = AB$, donc $DB = AB - AD = 1 - x$.

ABC étant un triangle rectangle isocèle, on a :

mes $\widehat{BAC} = 90^\circ$; mes $\widehat{ABC} = \text{mes } \widehat{ACB} = 45^\circ$.

Le triangle BDE est rectangle en D .

D'autre part, on a mes $\widehat{ABC} = \text{mes } \widehat{DBE} = \text{mes } \widehat{DEB} = 45^\circ$.

Donc le triangle BDE est isocèle et $BD = DE = 1 - x$.

L'aire du rectangle $ADEF$ est : $AD \times DE = x \times (1 - x) = x - x^2$.

La fonction f qui à tout nombre compris entre 0 et 1 associe l'aire du carré $ADEF$ s'exprime donc sous la forme : $x \in [0, 1]$ et $f(x) = x - x^2$.

2. a) Dans la cellule B2, on peut rentrer la formule « =A2 - A2*A2 ».

D'autres formules conviennent, par exemple :

« = A2*(1 - A2) » ou encore « = -(A2*A2) + A2 ».

b) On ne peut pas affirmer à l'aide du tableau que le maximum de la fonction est atteint pour $x = \frac{1}{2}$. La variable x prend une infinité de valeurs entre 0 et 1 et le maximum de la fonction peut être obtenu, par exemple, pour une valeur de x comprise entre 0,4 et 0,5 ou entre 0,5 et 0,6.

3. a) On développe l'expression proposée :

$$-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = -\left(x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = -x^2 + x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -x^2 + x = f(x).$$

b) Quel que soit $x \in [0, 1]$, on a $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, donc $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$.

La valeur maximale de $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ est atteinte pour $\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$, donc pour $x = \frac{1}{2}$.

L'aire maximale du rectangle est donc $\frac{1}{4}$, soit la moitié de l'aire du triangle BAC .

c) Pour $x = \frac{1}{2}$, $AD = x = \frac{1}{2}$ et $DE = 1 - x = \frac{1}{2}$.

Le rectangle d'aire maximale est donc un carré dont les côtés mesurent $\frac{1}{2}$ m.

Partie B

1. Le triangle ABC est rectangle en A et isocèle.

On a $BC = \sqrt{2}$ (cf. ci-dessus).

$BG = x$.

D étant un point du segment $[AB]$. Lorsque D est confondu avec B , G est en B . Lorsque D

est en A , G est milieu du segment $[BC]$. Soit O ce milieu. $G \in [BO]$. $BO = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'où $x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

2. Le triangle ABC étant rectangle et isocèle on a : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45^\circ$.

Le triangle BGD est rectangle en G et $\widehat{DBG} = \widehat{ABC} = 45^\circ$. D'où $\widehat{BDG} = 45^\circ$.

Le triangle BGD est donc isocèle et $DG = GD = x$.

Le triangle EFC est rectangle en F et $\widehat{FCE} = \widehat{BCA} = 45^\circ$. D'où $\widehat{FEC} = 45^\circ$.

Le triangle FEC est donc isocèle et $FC = FE = x$.

$BC = BG + GF + FC$, donc $GF = BC - BG - FC = BC - 2x = \sqrt{2} - 2x$.

On a : Aire $(DGFE) = EF \times GF = x \times (\sqrt{2} - 2x) = \sqrt{2}x - 2x^2$.

g est la fonction qui à $x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ associe $g(x) = \sqrt{2}x - 2x^2$.

3. a) Pour un rectangle d'aire $0,2 \text{ m}^2$, on a $g(x) = 0,2$. On repère les points de la représentation graphique dont les ordonnées sont $0,2$. On obtient deux points dont les abscisses sont respectivement x_1 et x_2 .

Par lecture, on obtient $x_1 \approx 0,2$ m et $x_2 \approx 0,5$ m.

Cela correspond à un point G_1 situé à environ 20 cm de B et à un point G_2 situé à environ 50 cm de B .

b) Par lecture sur le graphique, on obtient les coordonnées du sommet du graphique correspondant à l'aire maximale pour le rectangle. Soit $(x_M ; g(x_M))$ les coordonnées de ce point.

On a $x_M \approx 0,35$ et $g(x_M) \approx 0,25$.

L'aire maximale du rectangle est d'environ $0,25 \text{ m}^2$.

c) Le côté d'un carré d'aire $0,25 \text{ m}^2$ mesure $0,5$ m. Le graphique montre que l'aire du rectangle est maximale pour une valeur de x proche $0,35$ m.

On peut donc inférer de la lecture du graphique que le rectangle d'aire maximale n'est pas un carré.

■ Partie 2 : Exercices

● Exercice 10

Énoncé, p. 20

1. On appelle triplet pythagoricien, tout triplet de nombres entiers positifs non nuls tel que : $a^2 + b^2 = c^2$.

Si les mesures des côtés d'un triangle forment un triplet pythagoricien, le triangle est rectangle vérifiant ainsi le théorème de Pythagore.

a) (3 ; 4 ; 5) est bien un triplet pythagoricien car $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Ce triplet est bien connu des maçons. Avec une corde à nœuds espacés proportionnellement à cette suite de nombres, on peut tracer un angle droit et donc tracer la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné.

b) Vérifions que quel que soit l'entier positif n non nul, on a $(3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$.

On a $(3n)^2 + (4n)^2 = 9n^2 + 16n^2 = 25n^2 = (5n)^2$.

(3n ; 4n ; 5n) est donc un triplet pythagoricien pour $n \neq 0$.

c) Il est aisé d'en déduire un triplet pythagoricien dont les nombres sont tous supérieurs à 1 000.

En prenant $n = 1\ 000$, on en déduit que (3 000 ; 4 000 ; 5 000) est un triplet pythagoricien.

2. On s'intéresse à des triplets (a, b, c) tels que :

$$a = 2xy ; b = y^2 - x^2 ; c = y^2 + x^2,$$

x et y étant deux nombres entiers positifs non nuls et tels que $x < y$.

a) En D2, on entre la formule « = B2² - A2² ». En fixant les colonnes, on aurait pu également entrer la formule « = \$B2² - \$A2² ».

b) On complète la ligne 12 de la manière suivante :

	A	B	C	D	E	F	G
1	valeur de x	valeur de y	a	b	c	$a^2 + b^2$	c^2
12	4	5	40	9	41	1 681	1 681

En effet :

- concernant la colonne des valeurs de a , on a $2 \times 4 \times 5 = 40$ ($2xy$) ;
- concernant la colonne des valeurs de b , on a $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ ($y^2 - x^2$) ;
- concernant la colonne des valeurs de c , on a $5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$ ($y^2 + x^2$) ;
- concernant la colonne des valeurs de $a^2 + b^2$, on a $40^2 + 9^2 = 1\ 600 + 81 = 1\ 681$;
- concernant la colonne des valeurs de c^2 , on a $41^2 = 1\ 681$.

c) On peut conjecturer que les triplets (a, b, c) sont des triplets pythagoriciens.

Prouvons-le.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2xy)^2 + (y^2 - x^2)^2 \\ &= 4x^2 y^2 + y^4 - 2x^2 y^2 + x^4 \\ &= y^4 + 2x^2 y^2 + x^4 \\ &= (y^2 + x^2)^2 \\ &= c^2 \end{aligned}$$

On a bien $a^2 + b^2 = c^2$.

Le triplet (a, b, c) est donc bien pythagoricien.

3. La question est imprécise. Il convient de dire qu'il s'agit de considérer des nombres entiers positifs.

On cherche à savoir s'il existe des entiers naturels n tels que $n^2 + (n + 1)^2 = (n + 2)^2$.

$n, n + 1$ et $n + 2$ sont des entiers consécutifs.

L'équation $n^2 + (n + 1)^2 = (n + 2)^2$ est équivalente à :

$n^2 + n^2 + 2n + 1 = n^2 + 4n + 1$ ou encore à $n^2 = 2n + 3$.

$n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ ne conviennent pas.

$n = 3$ convient car $3^2 = 2 \times 3 + 3$.

Pour $n \geq 4$, on a $n^2 \geq 4n$ et $2n + 3 < 3n$. Dans ce cas, il est impossible d'avoir $n^2 = 2n + 3$.

Le seul triplet composé de trois entiers naturels consécutifs est donc (3, 4, 5).

● Exercice 11

Énoncé, p. 20

1. On cherche pour quelles valeurs de n le nombre A_n est divisible par 11.

a) Supposons n pair

Dans ce cas, A_n se décompose sous la forme additive suivante :

$$A_n = 11 + 1\ 100 + 110\ 000 + 11\ 000\ 000 + \dots + \underbrace{110000 \dots 00}_{n \text{ chiffres}}$$

$$= 11 + 11 \times 100 + 11 \times 10\ 000 + \dots$$

$$\dots = 11 \times (1 + 100 + 10\ 000 + \dots)$$

Donc pour n pair, A_n est un multiple de 11.

b) Supposons n impair.

Dans ce cas, on a : $A_n = 1\ 111 \dots 110 + 1 = A_{n-1} + 1$

$n - 1$ est pair, donc A_{n-1} est multiple de 11. $A_{n-1} + 1$ n'est donc pas multiple de 11.

Pour n impair, A_n n'est pas multiple de 11.

A_n est divisible par 11 si, et seulement si, n est pair.

2. A_n est multiple de 33 si, et seulement si, il est multiple de 3 et de 11.

A_n est multiple de 11 si et seulement si n est pair.

Un nombre est multiple de 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est multiple de 3.

Tous les chiffres de A_n étant égaux à 1, pour que A_n soit multiple de 3, il faut et suffit que n soit multiple de 3.

Pour que A_n soit divisible par 33, il faut et suffit que n soit à la fois pair et multiple de 3, donc que n soit multiple de 6.

● Exercice 12

Énoncé, p. 20

1. On cherche le reste de la division euclidienne de 164 330 258 647 par 9.

Appelons N ce nombre.

La somme des chiffres de ce nombre est 49.

$$49 = 5 \times 9 + 4$$

On peut déduire de cette égalité que le reste de la division euclidienne de la somme des chiffres de N par 9 est égal à 4.

Le reste de la division euclidienne de N par 9 est donc également égal à 4.

2. a) L'écriture du nombre étant exprimée en base 10 (écriture décimale), on a :

$$\overline{abcd} = 1\ 000a + 100b + 10c + d = 999a + 99b + 9c + a + b + c + d$$

$$= 9(111a + 11b + c) + a + b + c + d$$

Il existe un nombre entier k tel que $\overline{abcd} = a + b + c + d + 9k$.

$$k = 111a + 11b + c.$$

b) On note r le reste de la division euclidienne de \overline{abcd} par 9.

On note r' le reste de la division euclidienne de $(a + b + c + d)$ par 9, ce qui s'exprime par la relation suivante : $a + b + c + d = 9k' + r'$, k' étant un entier.

$$\overline{abcd} = a + b + c + d + 9k = 9k' + r' + 9k = 9(k + k') + r'.$$

On peut en déduire que le reste de la division euclidienne de \overline{abcd} par 9 est r' et que $r = r'$.

3. a) On peut déduire de la relation établie en 2. b) que :

« Un nombre entier naturel est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ».

En effet, il faut et suffit que r' soit nul, puisque $r = r'$.

b) La somme des chiffres du nombre $N' = 164\ 330\ 258\ 643$ est égale à 45. 45 est divisible par 9. Le nombre N' est donc divisible par 9.

Le seul diviseur de 18 plus grand que 9 est 18. N' est divisible par 9, mais pas par 18 car il est impair (le dernier chiffre est 3).

Le plus grand diviseur commun des deux nombres N' et 18 est donc 9.

● Exercice 13

Énoncé, p. 21

1. a) $(11)_{\text{base dix}} = 3^2 + 2 = 1 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 2 \times 3^0$

D'où $(11)_{\text{base dix}} = (102)_{\text{base trois}}$

b) $(74)_{\text{base dix}} = 2 \times 27 + 2 \times 9 + 2 = 2 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 2 \times 3^0$

D'où $(74)_{\text{base dix}} = (2\ 202)_{\text{base trois}}$

c) Un nombre n qui se termine par 0 en base trois est un multiple de 3 car :

$$n = a_k \times 3^k + a_{k-1} \times 3^{k-1} + \dots + a_1 \times 3^1 + 0 = 3 \times [a_k \times 3^{k-1} + a_{k-1} \times 3^{k-2} + \dots + a_1] = 3 \times K.$$

Il existe donc un entier K tel que $n = 3 \times K$.

2. a) On a $(100)_{\text{dix}} = (10\ 201)_{\text{trois}}$

En base dix, on a : $100 = 81 + 2 \times 9 + 1 = 1 \times 3^4 + 0 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0$

On cherche les entiers 2-lacunaires inférieurs à $(10\ 201)_{\text{trois}}$

0	10	100	1 000	10 000
1	11	101	1 001	10 001
2	12	102	1 010	10 010
	20	110	1 011	10 011
	21	111	1 100	10 100
	22	120	1 101	10 101
		121	1 110	10 110
		200	1 111	10 111
		2 000	10 200

$(10\ 200)_{\text{trois}}$ n'est pas 2-luculaire, puis un nombre du type $(11abc)_{\text{trois}}$ est supérieur à $(10\ 201)_{\text{trois}}$.

Il y a 24 nombres 2-lacunaires compris entre zéro et cent.

b) Pour qu'un nombre 2-luculaire en base trois possédant quatre chiffres soit divisible par 2, il faut et il suffit que ce nombre possède un nombre pair de chiffres 1.

En effet, la décomposition d'un tel nombre selon les puissances de 3 est de la forme :

$$a_3 \times 3^3 + a_2 \times 3^2 + a_1 \times 3^1 + a_0 \times 3^0 = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0.$$

a_3, a_2, a_1 et a_0 sont égaux à 0 ou 1 puisque le nombre est 2-luculaire en base trois.

27, 9 et 3 étant impairs, il faut que la décomposition comporte deux ou quatre nombres impairs, donc 2 ou 4 coefficients égaux à 1. La somme de deux nombres impairs est paire.

L'écriture d'un tel nombre comportant deux ou quatre fois le chiffre 1, on obtient les nombres : $(1\ 001)_{\text{base trois}}$, $(1\ 010)_{\text{base trois}}$, $(1\ 100)_{\text{base trois}}$ et $(1\ 111)_{\text{base trois}}$.

3. a) L'écriture d'un entier 1-luculaire en base trois ne comporte que des 0 et des 2.

En remplaçant tous les chiffres 2 par des 1, on obtient un nombre entier 2-luculaire. Ce nombre est égal à la moitié du précédent.

Un entier 1-luculaire est donc le double d'un entier 2-luculaire.

$$\begin{array}{ccc} \text{Par exemple :} & (2\ 022)_{\text{base trois}} & = 2 \times (1\ 011)_{\text{base trois}} \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \text{Nombre 1-lacunaire} & \text{nombre 2-lacunaire} \end{array}$$

b) Soit un nombre n écrit en base trois.

Trois cas sont à étudier.

α) Le nombre n n'est ni 1-lacunaire, ni 2-lacunaire en base trois.

Soit n_1 le nombre obtenu en remplaçant tous les chiffres 1 de n par 0.

Soit n_2 le nombre obtenu en remplaçant tous les chiffres 2 de n par 0.

On a alors : $n = n_1 + n_2$.

Par exemple $(201\ 210)_{\text{base trois}} = (200\ 200)_{\text{base trois}} + (1\ 010)_{\text{base trois}}$.

Tout nombre entier écrit en base trois de ce type est donc bien la somme d'un entier 1-lacunaire et d'un entier 2-lacunaire.

β) Le nombre n est 2-lacunaire en base trois.

On a :

$$(1)_{\text{trois}} = (1)_{\text{trois}}$$

$$(10)_{\text{trois}} = (1)_{\text{trois}} + (2)_{\text{trois}}$$

$$(100)_{\text{trois}} = (10)_{\text{trois}} + (20)_{\text{trois}}$$

$$(1\ 000)_{\text{trois}} = (100)_{\text{trois}} + (200)_{\text{trois}}$$

$$\text{En effet : } (1)_{\text{trois}} + (2)_{\text{trois}} = (10)_{\text{trois}}$$

Et en base dix, on a :

$$1 \times 3^k = 3 \times 3^{k-1} = (1 + 2) \times 3^{k-1} = 1 \times 3^{k-1} + 2 \times 3^{k-1}$$

Tout nombre 2-lacunaire en base trois peut donc se décomposer en une somme d'un nombre 2-lacunaire et d'un nombre 1-lacunaire.

$$\begin{aligned} \text{Exemple : } (10\ 110)_{\text{trois}} &= (10\ 000)_{\text{trois}} + (100)_{\text{trois}} + (10)_{\text{trois}} \\ &= (1\ 000)_{\text{trois}} + (2\ 000)_{\text{trois}} + (10)_{\text{trois}} + (20)_{\text{trois}} + (1)_{\text{trois}} + (2)_{\text{trois}} \\ &= (1\ 011)_{\text{trois}} + (2\ 022)_{\text{trois}} \end{aligned}$$

γ) Le nombre n est 1-lacunaire en base trois.

On a :

$$(2)_{\text{trois}} = (2)_{\text{trois}}$$

$$(20)_{\text{trois}} = (11)_{\text{trois}} + (2)_{\text{trois}}$$

$$(200)_{\text{trois}} = (110)_{\text{trois}} + (20)_{\text{trois}}$$

$$(2\ 000)_{\text{trois}} = (1\ 100)_{\text{trois}} + (200)_{\text{trois}}$$

On a :

$$2 \times 3^k = 1 \times 3^k + 3 \times 3^{k-1} = 1 \times 3^k + (1 + 2) \times 3^{k-1} = (1 \times 3^k + 1 \times 3^{k-1}) + 2 \times 3^{k-1}$$

Tout nombre 1-lacunaire en base trois peut donc se décomposer en une somme d'un nombre 2-lacunaire et d'un nombre 1-lacunaire.

$$\begin{aligned} \text{Exemple : } (20\ 202)_{\text{trois}} &= (20\ 000)_{\text{trois}} + (200)_{\text{trois}} + (2)_{\text{trois}} \\ &= (11\ 000)_{\text{trois}} + (2\ 000)_{\text{trois}} + (110)_{\text{trois}} + (20)_{\text{trois}} + (2)_{\text{trois}} \\ &= (11\ 110)_{\text{trois}} + (2\ 022)_{\text{trois}} \end{aligned}$$

c) La décomposition en la somme d'un entier 1-lacunaire et d'un entier 2-lacunaire n'est pas toujours unique.

Par exemple :

$$(100)_{\text{base trois}} = (22)_{\text{base trois}} + (1)_{\text{base trois}}$$

Mais on a également :

$$(100)_{\text{base trois}} = (10)_{\text{trois}} + (20)_{\text{trois}}$$

(En base trois : $1 + 2 = 10$)

● Exercice 14

1. Le nombre 123 412 893 135 552 est bien divisible par 4 car 52 est divisible par 4.
En effet : $52 = 4 \times 13$.

2. On cherche à démontrer le critère de divisibilité par 4 énoncé dans la présentation de l'exercice.

Soit n un nombre entier naturel ayant au moins deux chiffres.

a) Soit q le quotient et r le reste de la division euclidienne de n par 100.

On a : $n = 100q + r$ avec $0 \leq r < 100$.

Cette division est toujours possible, donc n peut toujours s'écrire sous cette forme.

b) Si r est divisible par 4, il existe un entier k tel que $r = 4k$.

Dans ce cas $n = 100q + r = 4 \times 25q + 4k = 4 \times (25q + k)$.

Si r est divisible par 4, n est donc également divisible par 4.

c) Si n est divisible par 4, il existe un entier k' tel que $n = 100q + r = 4k'$.

On a alors : $r = 4k' - 100q$

$$= 4k' - (4 \times 25)q$$

$$= 4(k' - 25q).$$

Si n est divisible par 4, r l'est également.

d) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre n soit divisible par 4 est donc que le reste de la division de ce nombre par 100 soit divisible par 4.

Ce reste est égal au nombre formé par les deux derniers chiffres.

Donc un nombre entier n ayant au moins deux chiffres est divisible par 4 si, et seulement si, le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4.

3. a) Pour tout nombre n on a :

$$n = 1\,000q + r \text{ avec } 0 \leq r < 1\,000.$$

q est le quotient et r le reste de la division euclidienne de n par 1 000.

Si le reste r est divisible par 8, on a :

$$n = 1\,000q + k$$

$$= 8 \times 125q + 8k$$

$$= 8 \times (125q + k).$$

On peut donc démontrer, de la même manière que pour la divisibilité par 4, qu'un nombre entier d'au moins trois chiffres est divisible par 8 si, et seulement si, le reste de la division de ce nombre par 1 000 est divisible par 8, ou encore si, et seulement si, le nombre formé par les trois derniers chiffres est divisible par 8.

b) Le nombre 123 412 893 135 552 est donc divisible par 8 car 552 est divisible par 8 ($552 = 8 \times 69$).

4. a) En généralisant, on peut énoncer le critère de divisibilité d'un nombre d'au moins p chiffres par 2^p :

Un nombre entier naturel ayant au moins p chiffres ($p \geq 1$) est divisible par 2^p si, et seulement si, le nombre formé par les p derniers chiffres est divisible par 2^p .

Soit q le quotient de la division de n par 10^p et r le reste. Si le reste est divisible par 2^p , il existe un entier k tel que $r = 2^p \times k$.

Dans ce cas, on a bien $n = 10^p \times q + 2^p \times k = 2^p \times 5^p \times q + 2^p \times k = 2^p \times (5^p + k)$.

n est alors divisible par 2^p .

b) 123 412 893 135 552 est divisible par 4 car $52 = 4 \times 13$.

123 412 893 135 552 est divisible par 8 car $552 = 8 \times 69$.

123 412 893 135 552 est divisible par 16 car $5\,552 = 16 \times 347$.

123 412 893 135 552 est divisible par 32 car $35\,552 = 32 \times 1\,111$.

123 412 893 135 552 est divisible par 64 car $135\,552 = 64 \times 2\,118$.

Par contre 3 135 552 n'est pas divisible par 128, et 123 412 893 135 552 ne l'est pas non plus.

Donc la plus grande puissance de 2 qui divise 123 412 893 135 552 est 2^6 .

● Exercice 15

Énoncé, p. 22

a , b et c sont des chiffres compris entre 1 et 9.

1. On cherche à déterminer quel est le nombre non premier parmi les nombres : 7, 13, 57 et 61.

La somme des chiffres de 57 est 12. 12 est divisible par 3.

57 est divisible par 3. En effet $57 = 19 \times 3$.

Donc 57 n'est pas premier.

Les autres nombres ne sont divisibles que par 1 et eux-mêmes : ils sont premiers.

2. a) 3 737 est-il premier ?

$3\ 737 = 37 \times 101$. 3 737 est divisible par 37 et 101.

Il n'est pas premier.

b) $\overline{abab} = \overline{ab} \times 101$.

\overline{abab} est divisible par 101 et \overline{ab} .

n'est donc pas premier, quelles que soient les valeurs de a et b comprises entre 1 et 9.

3. a) La somme des chiffres de $\overline{abc} + \overline{abb} + \overline{acc}$ est : $3a + 3b + 3c$.

$3a + 3b + 3c = 3(a + b + c)$.

La somme de ces trois nombres est divisible par 3.

b) La somme des chiffres de $\overline{cba} + \overline{bba}$ est : $c + 3b + 2a$.

Si l'on ajoute le nombre \overline{cca} ou le nombre \overline{acc} ou le nombre \overline{cac} , alors la somme des chiffres des trois nombres sera : $3c + 3b + 3a$. Elle sera divisible par 3.

Il suffit d'ajouter un nombre de trois chiffres composé par deux fois le chiffre c et une fois le chiffre a .

● Exercice 16

Énoncé, p. 22

1. On décompte de 4 en 4 à partir de 61.

a) Pour obtenir les nombres de la suite, on retire à 61 les multiples successifs de 4 (4, 8, ..., $4n$), tant que la différence $(61 - 4n)$ reste positive.

Le plus grand multiple de 4 inférieur à 61 est 60.

Le nombre qui termine la suite est donc $1 : 61 - 60 = 1$.

b) On cherche le plus grand multiple de 4 compris dans le nombre 9 843. Pour cela, on détermine le quotient de la division euclidienne de 9 843 divisé par 4. Ce quotient est 2 460.

Le plus grand multiple de 4 inférieur à 9 843 est $2\ 460 \times 4$, c'est-à-dire 9 840.

$9\ 843 - 9\ 840 = 3$.

c) Cette suite comporte 2 461 termes : le premier terme (9 843) plus 2 460 termes.

d) Le 100^e terme correspond à la différence $9\ 843 - (99 \times 4) = 9\ 843 - 396 = 9\ 447$. On cherche le 99^e terme après le premier, sans compter ce premier terme 9 843.

2. $16\ 135\ 407 = (4\ 548 \times 3\ 547) + 3\ 651$.

a) Le quotient de la division euclidienne de 16 135 407 par 4 548 est $q = 3\ 547$ et le reste est $r = 3\ 651$.

En effet, l'égalité fournie est bien de la forme $a = (b \times q) + r$, avec $0 \leq r < b$, en prenant $a = 16\ 135\ 407$ et $b = 4\ 548$.

b) En revanche, le quotient de la division euclidienne de 16 135 407 par 3 547 n'est pas 4 548 car 3 651 n'est pas plus petit que 3 547.

On transforme l'égalité donnée :

$$\begin{aligned}16\ 135\ 407 &= (4\ 548 \times 3\ 547) + 3\ 547 + 104 \\ &= (4\ 549 \times 3\ 547) + 104 \\ &= (3\ 547 \times 4\ 549) + 104\end{aligned}$$

Le quotient de la division euclidienne de 16 135 407 par 3 547 est 4 549 et le reste est 104.

3. On sait que $1\ 000\ 000 = (1\ 996 \times 501) + 4$
 $100\ 000 = (1\ 996 \times 50) + 200$
 $10\ 000 = (1\ 996 \times 5) + 20$

$$\begin{aligned}\text{On a : } 8\ 640\ 219 &= 8 \times 1\ 000\ 000 + 6 \times 100\ 000 + 4 \times 10\ 000 + 219 \\ &= 8 \times [(1\ 996 \times 501) + 4] + 6 \times [(1\ 996 \times 50) + 200] \\ &\quad + 4 \times [(1\ 996 \times 5) + 20] + 219 \\ &= [1\ 996 \times 4\ 008 + 32] + [1\ 996 \times 300 + 1\ 200] + [1\ 996 \times 20 + 80] + 219 \\ &= 1\ 996 \times [4\ 008 + 300 + 20] + 32 + 1\ 200 + 80 + 219 \\ &= 1\ 996 \times 4\ 328 + 1\ 531\end{aligned}$$

Le quotient de la division euclidienne de 8 640 219 par 1 996 est 4 328 et le reste est 1 531.
On a bien $1\ 531 < 1\ 996$.

● Exercice 17

Énoncé, p. 22

1. Le confiseur a fabriqué 1 386 lrelettes et 308 contettes.

Chaque sachet doit contenir le même nombre de lrelettes et également le même nombre de contettes. Toutes les confiseries doivent être contenues dans les sachets.

1 386 est donc un multiple du nombre n de sachets. De même, 308 est un multiple de n .

n est donc un diviseur commun à 1 386 et 308.

On décompose 1 386 et 308 en produits de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 1\ 386 & 2 \\ 693 & 3 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 308 & 2 \\ 154 & 2 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

On cherche à déterminer le plus grand nombre de sachets possibles. Ce nombre est donc déterminé par le plus grand commun diviseur aux deux nombres.

Le PGCD est $2 \times 7 \times 11 = 154$.

Le confiseur peut donc réaliser au plus 154 paquets.

2. On a : $1\ 386 = 9 \times 154$ et $308 = 2 \times 154$.

Chaque paquet contiendra dans ce cas 9 lrelettes et 2 contettes.

3. Si toutes les lrelettes et les contettes étaient mélangées, il lui faudrait prendre au moins 1 387 confiseries, pour être sûr d'avoir au moins une contette, car le hasard pourrait lui faire tirer 1 386 lrelettes d'affilée. Pour être sûr d'avoir au moins une lrelette, il lui faudrait prendre au moins 309 confiseries, car le hasard pourrait lui faire tirer 308 contettes d'affilée.

Pour être sûr d'avoir au moins une lrelette et une contette, il lui faudrait donc prendre 1 387 confiseries.

● Exercice 18

Énoncé, p. 23

1. a) Le reste de la division euclidienne de 1 par 7 est 1. En effet : $1 = 7 \times 0 + 1$.

Le reste de la division euclidienne de 10 par 7 est 3. En effet : $10 = 7 \times 1 + 3$.

Le reste de la division euclidienne de 100 par 7 est 2. En effet : $100 = 7 \times 14 + 2$.

$$\begin{aligned} \text{b) } 10^3 &= 10 \times 10^2 = (7 \times 1 + 3) (7 \times 14 + 2) \\ &= (7 \times 1 \times 7 \times 14) + (3 \times 7 \times 14) + (7 \times 1 \times 2) + (3 \times 2) \\ &= (7a) + (7b) + (7c) + (3 \times 2) \\ &= 7(a + b + c) + 6. \end{aligned}$$

Le reste de la division de 1 000 par 7 se détermine à partir du produit des restes des divisions de 100 par 7 et de 10 par 7. Le produit étant inférieur à 7, le reste de la division euclidienne de 1 000 par 7 est égal au produit des restes précédents, donc à 6.

c) Soit q_n et r_n le quotient et le reste de la division de 10^n par 7.

$$\text{On a : } 10^n = 7q_n + r_n$$

$$\begin{aligned} 10^{n+1} &= 10^n \times 10 = (7q_n + r_n) \times (7 + 3) = 49q_n + 7r_n + 21q_n + 3r_n \\ &= 7(10q_n + r_n) + 3r_n \end{aligned}$$

10^{n+1} s'exprime sous la forme $7k + 3r_n$.

Si $3r_n < 7$ alors $r_{n+1} = 3r_n$.

Si $3r_n > 7$ alors r_{n+1} est égal au reste de la division de $3r_n$ par 7.

d)

10^n	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
Reste de la division euclidienne de 10^n par 7	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6

La méthode consiste à multiplier le reste précédent par 3 et à prendre pour nouveau reste à la colonne suivante le reste de la division du produit obtenu par 7.

Par exemple pour 10^5 , on multiplie le reste précédent par 3, $4 \times 3 = 12$. Le reste de la division de 12 par 7 est 5. Le reste de la division de 10^5 par 7 est donc 5.

2. Pour trouver le reste de la division euclidienne de 6 000 000 006, on décompose ce nombre : $6\,000\,000\,006 = 6 \times 10^9 + 6$.

Le reste de la division de 10^9 par 7 est 6.

Le reste de la division de 6×10^9 par 7, est égal au reste de la division euclidienne de 6×6 par 7, donc de 36 par 7. Ce reste est 1.

Le reste de la division de 6 par 7 est 6.

Le reste de la division de $6 \times 10^9 + 6$ par 7 est le reste de la division de $(1 + 6)$ par 7, donc 0.

Le nombre 6 000 000 006 est donc divisible par 7.

● Exercice 19

Énoncé, p. 23

1. a) On sait que $57\,148\,468 = 3\,361\,674 \times 17 + 10$.

Diviser 57 148 468 par 17 consiste à trouver deux nombres q et r , tels que :

$$57\,148\,468 = 17 \times q + r \text{ avec } 0 \leq r < 17.$$

Dans l'expression du nombre 57 148 468 on a $10 < 17$.

On peut donc en déduire que le quotient cherché est 3 361 674 et le reste est 10.

b) On sait que $84\,279\,733 = 4\,957\,630 \times 17 + 23$.

$$\begin{aligned} \text{On en déduit que : } 84\,279\,733 &= 4\,957\,630 \times 17 + 17 + 6 = (4\,957\,630 + 1) \times 17 + 6 \\ &= 4\,957\,631 \times 17 + 6. \end{aligned}$$

On a $6 < 17$.

On peut en déduire que le quotient de 84 279 733 par 17 est 4 957 631 et le reste 6.

$$\begin{aligned} \text{c) On a : } 57\,148\,468 + 84\,279\,733 &= 3\,361\,674 \times 17 + 10 + 4\,957\,631 \times 17 + 6 \\ &= (3\,361\,674 + 4\,957\,631) \times 17 + 16 \\ &= 8\,319\,305 \times 17 + 16. \end{aligned}$$

On a $16 < 17$.

On peut en déduire que le quotient de 57 148 468 + 84 279 733 par 17 est 8 319 305 et le reste 16.

$$\begin{aligned}
 \text{On a } 57\,148\,468 \times 2 &= [3\,361\,674 \times 17 + 10] \times 2 = 6\,723\,348 \times 17 + 20 \\
 &= 6\,723\,348 \times 17 + 17 + 3 \\
 &= (6\,723\,348 + 1) \times 17 + 3 \\
 &= 6\,723\,349 \times 17 + 3
 \end{aligned}$$

On peut en déduire que le quotient de $57\,148\,468 \times 2$ par 17 est 6 723 349 et que le reste est 3.

2. On a : $a = 17q + r$ et $a' = 17q' + r'$ avec $0 \leq r < 17$ et $0 \leq r' < 17$.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } a + a' &= 17q + r + 17q' + r' \\
 &= 17(q + q') + r + r'.
 \end{aligned}$$

D'autre part : $0 \leq r + r' < 34$.

Si $0 \leq r + r' < 17$, alors le quotient de $a + a'$ par 17 est $q + q'$ et le reste $r + r'$.

Si $17 \leq r + r' < 34$, alors le quotient de $a + a'$ par 17 est $q + q' + 1$ et le reste $r + r' - 17$.

b) $a = 17q + r$, donc $2a = 17 \times (2q) + 2r$.

Si $0 \leq 2r < 17$, le quotient de $2a$ par 17 est $2q$ et le reste $2r$.

Si $17 \leq r + r' < 34$, le quotient de $2a$ par 17 est $(2q + 1)$ et le reste est $2r - 17$.

● Exercice 20

Énoncé, p. 23

1. Soit b le nombre de bicyclettes et t le nombre de tricycles.

Les deux premières conditions s'expriment sous la forme :

$$3 \leq b \leq 10 \text{ et } 3 \leq t \leq 10.$$

La troisième condition s'exprime sous la forme : $2b + 3t = 31$.

• Solution 1 :

$2b$ est pair, donc $3t$ est impair (la somme de deux nombres pairs serait paire et donc différente de 31).

On a donc les possibilités suivantes :

$$t = 3 \text{ ou } t = 5 \text{ ou } t = 7 \text{ ou } t = 9.$$

a) $t = 3$ implique $2b = 22$, donc $b = 11$; impossible puisque $b \leq 10$.

b) $t = 5$ implique $2b = 16$, donc $b = 8$.

c) $t = 7$ implique $2b = 10$, donc $b = 5$.

d) $t = 9$ implique $2b = 4$, donc $b = 2$; impossible car $3 \leq b$.

Finalement on a deux possibilités :

8 bicyclettes et 5 tricycles ou 5 bicyclettes et 7 tricycles.

$$S = \{(8 ; 5), (5 ; 7)\}.$$

• Solution 2 :

Le nombre de roues des bicyclettes peut être égal à : 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 ou 20.

Le nombre de roues des tricycles peut être égal à : 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 ou 30.

On cherche à obtenir une combinaison du nombre de roues de bicyclettes et du nombre de roues de tricycles dont la somme est égale à 31.

On retrouve les deux solutions précédentes.

Bien sûr, toute méthode cohérente est acceptée, à condition d'être exhaustive.

2. Le reste de la division du nombre cherché N par 2 est 1. Il en est de même des restes des divisions de N par 3 et 4.

$N - 1$ est donc à la fois multiple de 2, 3 et 4, donc multiple de leur ppcm 12.

Les possibilités pour $N - 1$ sont : 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96.

Les possibilités pour N sont : 13, 25, 37, 49, 61, 73, 85, 97.

D'autre part, on sait que N est multiple de 5.

Il y a donc deux solutions possibles : 25 chocolats ou 85 chocolats.

● Exercice 21

Énoncé, p. 24

1. Soit \overline{cdu} ce nombre de trois chiffres.

On a :

$$(1) c + d + u = 14.$$

$$(2) c > u$$

En effet : $100c + 10d + u - 100u - 10d - c = 99c - 99u = 99(c - u)$. $99(c - u) > 0$.

Donc $c - u > 0$ et $c > u$.

$$(3) 100c + 10d + u - (100u + 10d + c) = 99. \text{ D'où : } 99c - 99u = 99. c - u = 1.$$

$$(3') c = u + 1.$$

$$(4) 2d - 3c = 2.$$

On a donc le système d'équations à trois inconnues suivant :

$$(1) c + d + u = 14$$

$$(3') c = u + 1$$

$$(4) 2d - 3c = 2$$

On remplace u par $c - 1$ dans (1).

On obtient : $c + d + c - 1 = 14$, donc $d + 2c = 15$

On a conjointement :

$$2d - 3c = 2$$

$$d + 2c = 15$$

Ce système est équivalent au système suivant :

$$2d - 3c = 2$$

$$2d + 4c = 30$$

ou encore

$$-2d + 3c = -2$$

$$2d + 4c = 30$$

En ajoutant membre à membre :

$$7c = 28.$$

$c = 4$. On en déduit $u = 3$ et $d = 7$.

Le nombre cherché est **473**.

On a bien :

$$4 + 7 + 3 = 14.$$

$$4 > 3.$$

$$473 - 374 = 99.$$

$$2 \times 7 - 3 \times 4 = 2.$$

2. a) La conjecture s'applique au nombre 473.

$4 + 3 = 7$ et 473 est divisible par 11 car $473 = 43 \times 11$.

b) Soit n le nombre \overline{cdu} .

Supposons que le chiffre des dizaines est égal à la somme du chiffre des centaines et du chiffre des unités.

On a alors : $d = c + u$.

$$N = 100c + 10 \times (c + u) + u = 110c + 11u = 11(c + u).$$

N est donc multiple de 11.

c) Soit le multiple de 11 suivant : $11 \times 87 = 957$.

957 est bien multiple de 11, mais $9 + 7 \neq 5$.

Si un nombre est tel que la somme du chiffre des centaines et du chiffre des unités est égale au chiffre des dizaines alors le nombre est multiple de 11.

Mais tous les multiples de 11 à 3 chiffres ne vérifient pas cette condition.

Ce n'est pas une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit multiple de 11.

● Exercice 22

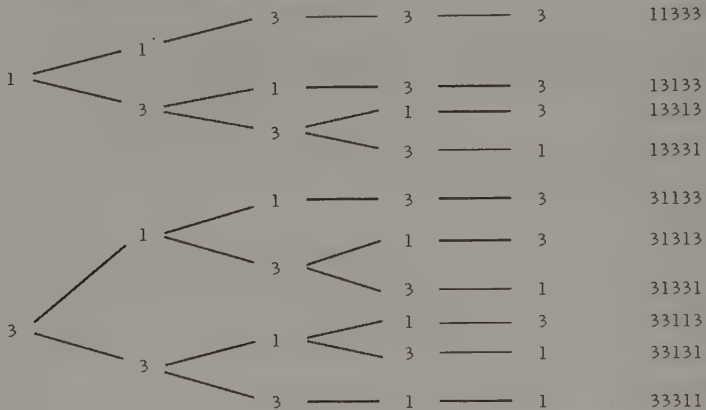
1. Il s'agit de trouver tous les nombres de 5 chiffres qui s'écrivent avec 3 fois le chiffre 3 et 2 fois le chiffre 1.

On a bien : $3 \times 3 + 2 \times 1 = 11$

Méthode avec constitution d'un arbre

Le premier chiffre peut être 1 ou 3.

Le deuxième chiffre peut être 1 ou 3 et ainsi de suite, mais il n'est pas possible d'avoir plus de 2 fois le chiffre 1 et plus de 3 fois le chiffre 3.

**Autre méthode**

On cherche toutes les manières de placer 2 chiffres 1 dans un nombre de 5 chiffres.

1 1 . . .	11333
1 . 1 . .	13133
1 . . 1 .	13313
1 . . . 1	13331
. 1 1 . .	31133
. 1 . 1 .	31313
. 1 . . 1	31331
. . 1 1 .	33113
. . 1 . 1	33131
. . . 1 1	33311

2. La somme des chiffres est égale à 11.

On a :

$10 + 1 = 11$. Si l'on a une fois le chiffre 1, 10 n'étant pas un multiple de 4, il n'y a pas de solution.

$9 + 2 = 11$. Les nombres qui s'écrivent avec 3 fois le chiffre 3 et 2 fois le chiffre 1 correspondent (cf. 1).

$8 + 3 = 11$. On a $2 \times 4 + 3 \times 1 = 11$.

Cette décomposition de 11 permet d'affirmer que les nombres constitués par 2 fois le chiffre 4 et 3 fois le chiffre 1 correspondent.

Il en va de même pour les nombres constitués par 4 fois le chiffre 2 et 1 fois le chiffre 3.

$7 + 4 = 11$. On a $1 \times 7 + 4 \times 1 = 11$.

Les nombres constitués par 4 fois le chiffre 1 et 1 fois le chiffre 4 correspondent.

3. Il y a 10 nombres qui s'écrivent avec 2 fois le chiffre 1 et 3 fois le chiffre 3 (d'après la réponse à la 1^{re} question).

De la même manière, il y a 10 nombres qui s'écrivent avec 2 fois le chiffre 4 et 3 fois le chiffre 1. Ces nombres s'obtiennent de la même manière qu'au 1.

44 111 ; 41 411 ; 41 141 ; 41 114 ; 14 411 ; 14 141 ; 14 114 ; 11 441 ; 11 414 ; 11 144.

Il y a 5 nombres qui s'écrivent avec 4 fois le chiffre 1 et 1 fois le chiffre 7 :

71 111 ; 17 111 ; 11 711 ; 11 171 ; 11 117.

De la même manière, il y a 5 nombres qui s'écrivent avec 4 fois le chiffre 2 et une fois le chiffre 3 :

32 222 ; 23 222 ; 22 322 ; 22 232 ; 22 223.

Il y a donc 30 nombres qui vérifient les conditions i) et ii).

● Exercice 23

Énoncé, p. 24

$$A = 50\,000\,006 \times 70\,000\,008.$$

1. La valeur de A affichée par l'écran de la calculatrice n'est pas la valeur exacte. En effet la valeur exacte doit se terminer par 8, or $3,50000082 \times 10^{15}$ a 2 comme dernier chiffre significatif.

2. On a :

$$5 \times 10^7 \times 7 \times 10^7 < 50\,000\,006 \times 70\,000\,008 < 6 \times 10^7 \times 8 \times 10^7$$

$$35 \times 10^{14} < A < 48 \times 10^{14}.$$

On peut en déduire que A a 16 chiffres.

Remarque : 8 est le 16^e chiffre en partant de la gauche et non le 15^e, ne pas oublier le chiffre des unités qui correspond à 10^0 .

$$\begin{aligned} 3. A &= (5 \times 10^7 + 6) \times (7 \times 10^7 + 8) \\ &= 35 \times 10^{14} + 42 \times 10^7 + 40 \times 10^7 + 48 \\ &= 35 \times 10^{14} + 82 \times 10^7 + 48 \times 10^0. \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } A = 3\,500\,000\,820\,000\,048.$$

$$4. B = 48\,506\,557 \times 505\,149.$$

En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$48\,506 \times 505 = 24\,495\,530.$$

$$557 \times 505 = 281\,285.$$

$$48\,506 \times 149 = 7\,227\,394.$$

$$557 \times 149 = 82\,993.$$

On a :

$$B = (48\,506 \times 10^3 + 557) (505 \times 10^3 + 149).$$

$$B = 48\,506 \times 505 \times 10^6 + (557 \times 505 + 48\,506 \times 149) \times 10^3 + 557 \times 149.$$

$$B = 24\,495\,530 \times 10^6 + (281\,285 + 7\,227\,394) \times 10^3 + 82\,993.$$

$$B = 24\,495\,530 \times 10^6 + 7\,508\,679 \times 10^3 + 82\,993.$$

$$B = 24\,495\,530\,000\,000 + 7\,508\,679\,000 + 82\,993.$$

On pose l'addition :

$$\begin{array}{r} 24\,495\,530\,000\,000 \\ + \quad 7\,508\,679\,000 \\ + \quad \quad \quad 82\,993 \\ \hline 24\,503\,038\,761\,993 \end{array}$$

$$B = 24\,503\,038\,761\,993.$$

● Exercice 24

1. Si $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible, on peut en déduire que $\frac{a}{b}$ est un nombre décimal si $b = 2^n \times 5^p$ avec n et p entiers.

$\frac{1}{7}$ n'est pas un décimal.

$\frac{27}{8}$ est un nombre décimal car $8 = 2^3$. On a : $\frac{27}{8} = \frac{27}{2^3} = \frac{27 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3\,375}{1\,000} = 3,375$.

$\frac{91}{7}$ est un nombre décimal car $\frac{91}{7} = 13$ (tout nombre entier est un nombre décimal).

$\frac{42}{17}$ est irréductible et 17 est premier. Donc $17 \neq 2^n \times 5^p$. $\frac{42}{17}$ n'est pas un nombre décimal.

2. Écriture décimale périodique de $\frac{1}{7}$.

a) En posant la division de 1 par 7, on obtient :

1	7
10	0,142857....
30	
20	
60	
40	
50	
10	

L'écriture décimale périodique de $\frac{1}{7}$ est 0,142857... En effet, avec 7 au quotient, on retrouve le reste 1, et on obtient un nouveau cycle.

b) La période comporte 6 chiffres.

Le 32^e chiffre après la virgule est 4. En effet, le 30^e chiffre est 7 (5 périodes de 6 chiffres). Le 31^e chiffre est 1 et le 32^e chiffre est 4.

3. Écriture décimale périodique de $\frac{42}{17}$.

a) Dans la cellule B3 on obtient la première décimale de $\frac{42}{17}$. 4 est la première décimale. La 20^e décimale est 5 (cellule B22).

b) Toujours par lecture du tableau, on a : $\frac{42}{17} = 2,4705882352941176...$

En A18, on est sûr d'obtenir un résultat connu car de A2 à A17, on a obtenu 16 restes différents. Le diviseur est 17 ; le reste est donc obligatoirement inférieur à 17. Le nouveau reste en A18 est donc obligatoirement un reste déjà obtenu. La période du nombre comporte 16 chiffres et ne pouvait pas en comporter 17.

4. On a :

$$100a = 123,23$$

$$a = 1,23$$

En soustrayant membre à membre :

$$99a = 122.$$

$$\text{D'où : } a = \frac{122}{99}.$$

L'écriture fractionnaire du rationnel est : $\frac{122}{99}$.

● Exercice 25

Énoncé, p. 26

1. Oui, 68, 69, 70. $207 = 68 + 69 + 70$.

2. On a $108 + 109 + 110 = 327$, puis $109 + 110 + 121 = 330$. Si S est la somme d'un triplet de trois nombres consécutifs, la somme du triplet suivant est $S + 3$. Il n'existe donc pas de triplet de trois nombres consécutifs dont la somme est 329.

3. Soit $n - 1$, n et $n + 1$ trois nombres consécutifs.

$$S = (n - 1) + n + (n + 1) = 3n.$$

Les entiers naturels qui sont la somme de trois entiers consécutifs sont les multiples de 3 non nuls :

$$0, 1, 2 : 0 + 1 + 2 = 3 ;$$

$$1, 2, 3 : 1 + 2 + 3 = 6 ; \text{ etc.}$$

4. Pour que $\overline{47d5}$ en base 10 soit la somme de trois entiers consécutifs, il faut et suffit que ce nombre soit un multiple de 3.

Un nombre est multiple de 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

$$4 + 7 + d + 5 = 16 + d.$$

$16 + d$ est multiple de 3 si et seulement si $[d = 2 \text{ ou } d = 5 \text{ ou } d = 8]$.

4 725, 4 755, 4 785 sont des sommes de trois entiers consécutifs :

$$1\ 574 + 1\ 575 + 1\ 576 = 4\ 725.$$

$$1\ 584 + 1\ 585 + 1\ 586 = 4\ 755.$$

$$1\ 594 + 1\ 595 + 1\ 596 = 4\ 785.$$

● Exercice 26

Énoncé, p. 26

1. Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.

a) Résolution par l'algèbre

Soit F le nombre de flans pâtisseries.

Soit T le nombre de tartes aux pommes.

L'énoncé se traduit par un système de deux équations :

$$(1) 1,5F + 2T = 122$$

$$(2) F + T = 72$$

On obtient un système d'équations équivalent en multipliant par 2 les deux membres de l'équation (2).

$$(1) 1,5F + 2T = 122$$

$$(2') 2F + 2T = 144$$

On soustrait les deux équations membre à membre afin d'éliminer l'inconnue T .

$$(2') - (1) 0,5F + 0T = 22$$

$$\text{D'où : } F = 44.$$

On remplace F par sa valeur dans une des deux équations et l'on obtient par exemple :

$$44 + T = 72. \text{ D'où : } T = 28.$$

La solution est donc : 44 flans et 28 tartes aux pommes.

b) Un raisonnement de type arithmétique est un raisonnement sémantique qui n'utilise pas la mise en équations comme dans le raisonnement algébrique (avec des lettres représentant les inconnues du problème).

Plusieurs raisonnements et variantes sont possibles.

• Première possibilité.

Si on n'avait vendu que des tartes aux pommes, le nombre de parts de gâteaux aurait été égal à 61 ($61 \times 2 \text{ €} = 122 \text{ €}$).

La recette reste la même si l'on échange 3 tartes aux pommes contre 4 flans.

Un tel échange donne un gâteau de plus.

La différence entre 72 (nombre de gâteaux vendus) et 61 (nombre de parts si l'on n'avait vendu que des tartes) est 11.

On effectue donc 11 fois cet échange, ce qui représente 44 parts de flan (4×11).

Le nombre de tartes vendues est alors : $72 - 44 = 28$ ou $61 - 11 \times 3 = 61 - 33 = 28$.

• Deuxième possibilité.

Si on n'avait vendu que des flans la recette serait : $72 \times 1,5 \text{ €} = 108 \text{ €}$.

La recette est 122 €, soit 14 € supplémentaires.

Chaque tarte aux pommes vendue à la place d'un flan rapporte 0,50 € supplémentaire.

$14 \div 0,5 = 28$.

La différence de 14 € correspond à 28 tartes aux pommes.

$72 - 28 = 44$. Le nombre de flans vendus est 44.

2. La portion de tarte de Jean-Marc est représentée par : $\frac{1}{3}$. Il reste $\frac{2}{3}$ de la tarte.

La portion de tarte de Sophie est représentée par : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}$. Il reste $\frac{5}{12}$ ou $\frac{10}{24}$ de la tarte.

Antoine et Rémi se partagent la tarte en deux parts égales. Chacun mange les $\frac{5}{24}$ de la tarte.

Jean-Marc : $\frac{1}{3}$. Sophie : $\frac{1}{4}$. Antoine : $\frac{5}{24}$. Rémi : $\frac{5}{24}$.

● Exercice 27

Énoncé, p. 26

1. Soit $S_1 = 5 + 7 + 9$.

$S_1 = 21$.

On a : $21 = 6 \times 3 + 3$ et $21 = 3 \times 7$.

Le reste de la division de S_1 par 6 est 3.

Le reste de la division de S_1 par 3 est 0.

Soit $S_2 = 15 + 17 + 19 = 51$. On a : $51 = 6 \times 8 + 3$ et $51 = 3 \times 17$.

Le reste de la division de S_2 par 6 est 3.

Le reste de la division de S_2 par 3 est 0.

Soit $S_3 = 1\ 527 + 1\ 529 + 1\ 531 = 4\ 587$. On a : $4\ 587 = 6 \times 764 + 3$ et $4\ 587 = 3 \times 1\ 529$.

Le reste de la division de S_3 par 6 est 3.

Le reste de la division de S_3 par 3 est 0.

2. a) Soit trois nombres impairs consécutifs. Un nombre impair s'écrit sous la forme $2n + 1$, n étant un entier naturel.

La somme S de trois nombres impairs consécutifs s'écrit sous la forme :

$$S = 2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5.$$

On a alors : $S = 6n + 9 = 6(n + 1) + 3$ quel que soit n entier.

Il existe donc un entier q ($q = n + 1$) tel que $S = 6q + 3$. Le reste de la division de S par 6 est donc toujours égal à 3.

b) De la même façon :

$$S = 6n + 9 = 3 \times 2n + 3 \times 3 = 3 \times (2n + 3) + 0.$$

Le reste de la division de trois nombres impairs consécutifs par 3 est donc toujours nul.

3. On a vu lors de la question précédente que pour trois nombres consécutifs dont le premier s'écrit $2n + 1$, on a $S = 6n + 9$.

Si $S = 12\ 027$, on a : $12\ 027 = 6n + 9$. D'où : $6n = 12\ 018$ et $n = 2\ 003$.

Dans ce cas : $2n + 1 = 4\ 007$, $2n + 3 = 4\ 009$ et $2n + 5 = 4\ 011$.

Les trois nombres impairs consécutifs cherchés sont 4 007, 4 009 et 4 011.

4. Pour $p = 2$, il suffit de prendre $S = 1 + 3 = 4$. La somme n'est pas multiple de 5. Donc $p = 2$ ne convient pas.

Pour $p = 3$, il suffit de prendre $S = 1 + 3 + 5 = 9$. La somme n'est pas un multiple de 5. Donc $p = 3$ ne convient pas.

Pour $p = 4$, il suffit de prendre $S = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$. La somme n'est pas un multiple de 5. Donc $p = 4$ ne convient pas.

Pour $p = 5$, on raisonne dans le cas général.

Prenons 5 nombres impairs consécutifs. Leur somme S peut s'écrire sous la forme :

$$S = 2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 + 2n + 7 + 2n + 9 = 10n + 25 = 5(2n + 5).$$

S est toujours un multiple de 5.

Donc 5 est bien la plus petite valeur de p pour laquelle S est toujours multiple de 5.

● Exercice 28

1. Les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6. On a bien : $6 = 1 + 2 + 3$.

On décompose 496 en un produit de facteurs premiers :

$$496 = 2^4 \times 31.$$

On recherche tous les diviseurs de 496 :

Les diviseurs de 496 sont : 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496.

On a : $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$.

496 est un nombre parfait.

2. La décomposition en produit de facteurs premiers de 120 est :

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$. On recherche tous les diviseurs de 120 (même disposition en arbre qu'à la question précédente).

Les diviseurs de 120 sont : 1, 5, 3, 15, 2, 10, 6, 30, 4, 20, 12, 60, 8, 40, 24, 120.

On a : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 10 + 12 + 15 + 20 + 24 + 30 + 40 + 60 = 248 \neq 120$.

120 n'est pas un nombre parfait.

3. Un nombre entier pair est parfait si et seulement si

$N = 2^n (2^{n+1} - 1)$ avec $2^{n+1} - 1$ premier.

a) $n = 1$. $N = 2 (2^2 - 1) = 6$.

$n = 2$. $N = 2^2 (2^3 - 1) = 4 \times 7 = 28$. 7 est premier. 28 est parfait (cf. énoncé).

$n = 3$. $N = 2^3 (2^4 - 1) = 8 \times 15 = 120$. 15 n'est pas premier. 120 n'est pas un nombre parfait ($45 + 30 + 15 + \dots > 90$).

$n = 4$. $N = 2^4 (2^5 - 1) = 16 \times 31 = 496$. 496 est parfait (cf. question 1).

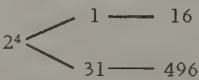
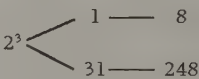
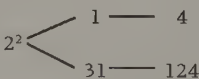
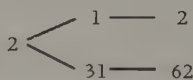
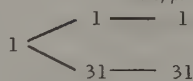
b) On a $2^4 (2^5 - 1) = 16 \times 31 = 496$.

$2^5 (2^6 - 1)$ n'est pas un nombre parfait car $2^6 - 1 (64 - 1 = 63)$ n'est pas un nombre premier.

$2^6 (2^7 - 1) = 64 \times 127 = 8128$ est un nombre parfait car 127 est premier.

8128 est le plus petit nombre parfait supérieur à 496.

Énoncé, p. 26



● Exercice 29

Énoncé, p. 27

1. Calculons S et M .

$$S = 257 + 275 + 527 + 572 + 725 + 752 = 3108.$$

$$M = \frac{S}{6} = \frac{3108}{6} = 518.$$

2. On appelle a , b et c les chiffres d'un nombre quelconque à trois chiffres.

a , b et c sont des nombres inférieurs strictement à 10.

La famille des nombres s'écrit abc , acb , bac , bca , cab , cba .

$$abc = 100a + 10b + c.$$

On a donc :

$$S = 100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10a + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b + 100c + 10b + a = 222a + 222b + 222c = 222(a + b + c).$$

Calculons la moyenne M :

$$M = S : 6 = 222(a + b + c) : 6 = 37(a + b + c).$$

$$S = 222(a + b + c) \text{ et } M = 37(a + b + c).$$

3. $M = 370$ pour $a + b + c = 10$.

Les triplets de trois chiffres distincts et différents de 0 qui permettent de former une famille dont la moyenne des six nombres est 370 sont les suivants :

$$\{1 ; 2 ; 7\} \quad \{1 ; 3 ; 6\} \quad \{1 ; 4 ; 5\} \quad \{2 ; 3 ; 5\}.$$

● Exercice 30

Énoncé, p. 27

1. Valeur de vérité des énoncés.

• Énoncé 1 : « Si $2x$ est un nombre entier naturel, alors x est un nombre entier naturel. »

Soit $2x = 3$.

$2x$ est bien un entier, mais il n'existe pas de nombre entier x tel que $2x = 3 \rightarrow \frac{3}{2} = 1,5$.
Ce contre-exemple suffit pour affirmer que l'énoncé 1 est faux.

• Énoncé 2 : « Si $\frac{x}{2}$ est un entier naturel, alors x est un nombre entier naturel. »

Soit $\frac{x}{2} = n$, n étant un entier naturel. On a alors $x = 2n$.

Quel que soit l'entier n , on a $x = 2n$. x est bien un entier naturel.

L'énoncé 2 est vrai.

• Énoncé 3 : « Si $x + 1$ est un entier naturel, alors x est un nombre entier naturel. »

Soit $x + 1 = 0$, il n'existe pas d'entier naturel x qui vérifie cette égalité ($-1 + 1 = 0$).

Même si pour tous les autres entiers naturels l'affirmation s'avère vérifiée, le contre-exemple 0 suffit pour affirmer que l'énoncé 3 est faux.

2. On considère trois nombres entiers a , b et c .

Soit $a + b = 78$, $a + c = 59$, $b + c = 43$.

En ajoutant ces trois sommes on obtient :

$$2(a + b + c) = 78 + 59 + 43 = 180.$$

D'où : $a + b + c = 90$.

On obtient alors facilement :

$$c = 12 ; b = 31 ; a = 47 ; \text{ par exemple, } (a + b + c) - (a + b) = 90 - 78 = 12.$$

Les trois nombres cherchés sont 12, 31, 47.

● Exercice 31

Énoncé, p. 27

Dans cet exercice il s'agit d'étudier le caractère de divisibilité par 11.

1. On a : $1\ 001 = 91 \times 11 + 0$.

Il existe donc un entier k tel que $1\ 001 = k \times 11$ ($k = 91$).

$1\ 001$ est donc un multiple de 11.

2. Vérifions que $\overline{mcd\ u} = 1\ 001 \times m + 99 \times c + 11 \times d - m + c - d + u$.

$$\overline{mcd\ u} = 1\ 000m + 100c + 10d + u.$$

$$= 1\ 001m - m + 99c + c + 11d - d + u.$$

$$= 1\ 001m + 99c + 11d - m + c - d + u.$$

3. Critère de divisibilité par 11.

a) On utilise l'égalité de la question 2.

$$\begin{aligned} \overline{mcd u} &= 1\,001m + 99c + 11d - m + c - d + u. \\ &= 11 \times 91m + 11 \times 9c + 11d - m + c - d + u. \\ &= 11 \times (91m + 9c + d) + (-m + c - d + u). \end{aligned}$$

On constate que si $(-m + c - d + u)$ est un multiple de 11, alors $\overline{mcd u}$ est également un multiple de 11.

Par ailleurs si $\overline{mcd u}$ est un multiple de 11, c'est qu'il existe un nombre entier k tel que :

$$\begin{aligned} \overline{mcd u} &= 11k. \text{ Dans ce cas, il existe un entier } k' \text{ tel que :} \\ \overline{mcd u} &= 11 \times (91m + 9c + d) + 11 \times k' = 11 \times (91m + 9c + d + k'). \\ k &= 91m + 9c + d + k'. \end{aligned}$$

Sinon on aurait $\overline{mcd u} = 11 \times k + r$ avec $0 < r < 11$ et $\overline{mcd u}$ serait non multiple de 11, ce qui contredirait l'hypothèse.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{mcd u}$ soit divisible par 11 est donc que le nombre $(-m + c - d + u)$ soit lui-même divisible par 11.

b) Les nombres de quatre chiffres possédant 38 centaines sont de la forme $38\overline{du}$.

Pour que ce nombre soit divisible par 11, il doit vérifier la condition nécessaire et suffisante démontrée ci-dessus.

On doit avoir $(-3 + 8 - d + u)$ divisible par 11, ou encore $(5 - d + u)$ divisible par 11.

$(5 - d + u)$ est divisible par 11 s'il existe un entier k tel que : $5 - d + u = 11k$.

Pour $k = 0$, on a $d - u = 5$.

Pour $k = 1$, on a $u - d = 6$.

k ne peut pas être supérieur à 1. Pour $k = 2$, on obtient $u - d = 17$. La différence de deux nombres d'un chiffre ne peut être égale à 17. Il en va de même pour des valeurs supérieures pour k .

Il suffit maintenant de déterminer les couples d'entiers inférieurs à 10 ($d ; u$) tels que $d - u = 5$ ou tels que $u - d = 6$.

Pour $d - u = 5$

d	9	8	7	6	5
u	4	3	2	1	0
$38\overline{du}$	3 894	3 883	3 872	3 861	3 850

Pour $u - d = 6$

d	3	2	1	0
u	9	8	7	6
$38\overline{du}$	3 839	3 828	3 817	3 806

Il existe donc 9 entiers du type $38\overline{du}$ divisibles par 11.

4. Critère de divisibilité par 11 pour un nombre à 6 chiffres.

a) $\overline{abmcd u} = ab \times 10\,000 + \overline{mcd u}$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \overline{abmcd u} &= 100\,001a - a + 9\,999b + b + 1\,001m + 99c + 11d - m + c - d + u. \\ &= 11 \times 9\,091a + 11 \times 909b + 11 \times 91m + 99c + 11d - a + b - m + c - d + u. \\ &= 11 \times (9\,091a + 909b + 91m + 9c + d) - a + b - m + c - d + u. \end{aligned}$$

On démontre de la même façon qu'à la question 3, que la condition nécessaire et suffisante pour que le nombre $\overline{abmcd u}$ soit divisible par 11 est que le nombre $(-a + b - m + c - d + u)$ soit divisible par 11.

b) $1,2452 \times 10^{11} = 124\,520 \times 10^6$.

Pour que ce nombre soit divisible par 11 et il faut et suffit que 124 520 soit divisible par 11.

On applique le critère de divisibilité défini en a).

$$-1 + 2 - 4 + 5 - 2 + 0 = 0.$$

0 est multiple de 11 et 124 520 l'est également.

$1,2452 \times 10^{11}$ est donc multiple de 11.

● Exercice 32

Énoncé, p. 28

1. On cherche à démontrer que $AH = 5$ et $CH = 12$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AHC rectangle en H , on obtient :

$$(1) AH^2 + HC^2 = AC^2 = 13^2.$$

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle BHC rectangle en H , on obtient :

$$(2) BH^2 + HC^2 = BC^2 = 15^2.$$

En retranchant membre à membre (2) - (1), on obtient :

$$BH^2 - AH^2 = 15^2 - 13^2 = 225 - 169 = 56.$$

D'autre part :

$$BH^2 - AH^2 = (BH - AH) \times (BH + AH) = (BH - AH) \times 14 = 56.$$

On en déduit $BH - AH = 4$ ($4 \times 14 = 56$).

On obtient un système de deux équations à deux inconnues, BH et AH :

$$\begin{cases} BH + AH = 14 \\ BH - AH = 4 \end{cases}$$

On en déduit : que $2BH = 18$; $BH = 9$ et $AH = 5$.

On a alors : $AH^2 + HC^2 = 13^2$; d'où $HC^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$.

Enfin : $HC = \sqrt{144} = 12$.

Conclusion : $AH = 5$ et $CH = 12$.

2. a) K se déplace sur $[AB]$.

Lorsque K est en A , on a $K = A = L$ et $M = B = N$. Le rectangle est aplati et dans ce cas :

$$KL = 0 \text{ et } KN = AB = 14.$$

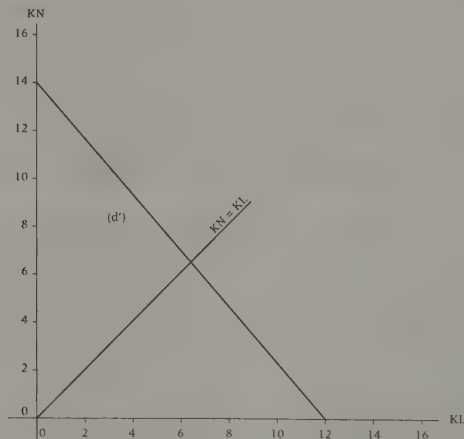
La courbe représentative passe et est limitée par le point de coordonnées $(0, 14)$.

Lorsque K tend vers H , L tend vers C , on a alors pour $K = H$; $L = C = M$ et $K = H = N$ et le rectangle est aplati : $KL = CH = 12$ et $KN = 0$.

La courbe représentative passe et est limitée par le point de coordonnées $(12, 0)$.

b) Lorsque $KLMN$ est un carré, on a $KL = KN$.

On trace la droite d'équation $KN = KL$ qui coupe la droite qui représente la relation entre KN et KL en un point tel que $6 < KN < 7$.



3. a) On cherche à exprimer AK et BN en fonction de KL .

On considère les deux droites sécantes (AC) et (AH) . Ces deux droites sont coupées par les droites parallèles (KL) et (HC) .

$$\text{D'après le théorème de Thalès, on a } \frac{AK}{AH} = \frac{AL}{AC} = \frac{KL}{HC}.$$

$$\text{On en déduit que } AK = \frac{AH \times KL}{HC} = \frac{5 \times KL}{12}.$$

On considère les deux droites sécantes (BC) et (BH) . Ces deux droites sont coupées par les deux droites parallèles (NM) et (HC) .

$$\text{D'après le théorème de Thalès, on a } \frac{BN}{BH} = \frac{BM}{BC} = \frac{NM}{HC}.$$

$$\text{On en déduit que } BN = \frac{BM \times NM}{HC} = \frac{9 \times KL}{12} \text{ (en effet dans le rectangle, } KL = NM).$$

$$\text{Conclusion : } AK = \frac{5 \times KL}{12} \text{ et } BN = \frac{9 \times KL}{12}.$$

b) Exprimons KN en fonction de KL .

$$\text{On a } AB = AK + KN + NB = \frac{5 \times KL}{12} + KN + \frac{9 \times KL}{12}.$$

$$\text{D'où } 14 = KN + \frac{14 \times KL}{12} \text{ et } KN = 14 - \frac{7 \times KL}{6}.$$

4. Lorsque $KLMN$ est un carré, les côtés consécutifs du rectangle sont de même mesure.

$$\text{On a dans ce cas : } KL = KN = 14 - \frac{7 \times KL}{6}.$$

$$\text{On en déduit } KL + \frac{7 \times KL}{6} = 14.$$

$$\text{D'où } \frac{13 \times KL}{6} = 14.$$

$$KL = KN = \frac{84}{13}.$$

On vérifie que $6 < KN < 7$ (cf. question 2b).

On en déduit :

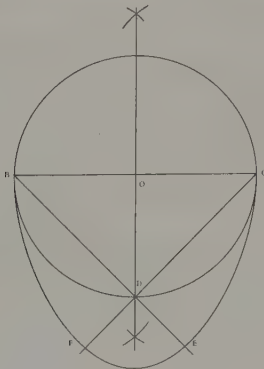
$$AK = \frac{5 \times KL}{12} = \frac{5 \times 84}{12 \times 13} = \frac{35}{13} \text{ et } BN = \frac{9 \times KL}{12} = \frac{9 \times 84}{12 \times 13} = \frac{63}{13}.$$

Ces deux valeurs déterminent la position de K sur le segment $[AB]$ lorsque $KLMN$ est un carré.

● Exercice 33

Énoncé, p. 29

1. Voici un programme de construction de l'ove (non demandée, mais utile à écrire).



On trace un cercle \mathcal{C}_O de centre O et de rayon 5 cm.

On place un point B sur le cercle.

On trace la droite (BO) qui coupe le cercle \mathcal{C}_O en B et C .

On trace la médiatrice du segment $[BC]$ qui coupe le cercle en deux points. On nomme D l'un d'entre eux.

On trace le cercle \mathcal{C}_B de centre B et de rayon 10 cm. On trace la droite (CD) qui coupe \mathcal{C}_B en deux points. On nomme F le point d'intersection qui est tel que D est entre C et F .

On trace le cercle \mathcal{C}_C de centre C et de rayon 10 cm. On trace la droite (BD) qui coupe \mathcal{C}_C en deux points. On nomme E le point d'intersection qui est tel que D est entre B et E .

On trace le cercle \mathcal{C}_D de centre D passant par E et F .

Puis on ne conserve que le tracé de l'ovale.

2. On cherche à calculer le périmètre de l'ovale.

Les différents arcs de cercle qui le composent sont :

- l'arc \widehat{BC} est un demi-cercle ayant pour rayon $OB = 5$ cm ;
- l'arc \widehat{CE} est constitué par un huitième du cercle de centre B et de rayon $BE = 10$ cm (en effet, BDC est un triangle rectangle isocèle et $\text{mes}\widehat{DBC} = \text{mes}\widehat{BCD} = 45^\circ$) ;
- l'arc \widehat{BF} est lui aussi constitué par un huitième du cercle de centre C et de rayon $CF = 10$ cm ;
- enfin l'arc \widehat{EF} est constitué par un quart du cercle de centre D et de rayon DE (en effet $\text{mes}\widehat{EDF} = 90^\circ$).

$CD^2 + BD^2 = BC^2$ (on applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BDC).

$CD = BD$, donc $2 CD^2 = 100$

$$CD = \sqrt{\frac{100}{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 10 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$D'où $DF = CF - CD = 10 - 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = 5(2 - \sqrt{2})$.$$

Le périmètre p de l'ovale est :

$$p = \frac{2\pi \times 5}{2} + 2 \times \frac{2\pi \times 10}{8} + \frac{2\pi \times 5 \times (2 - \sqrt{2})}{4}$$

$$p = 5\pi \times \left(1 + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

On a $p = 5\pi \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ cm ≈ 36 cm arrondi au millimètre près.

● Exercice 34

Énoncé, p. 30

Partie A

On cherche à calculer l'aire de l'hexagone $ABCDEF$.

Soit r la longueur du rayon du cercle circonscrit à l'hexagone.

Le triangle AOB est un triangle équilatéral.

En effet, il s'agit d'un triangle isocèle de sommet O (car $OA = OB = r$) et l'angle \widehat{AOB} a pour mesure 60° ($360^\circ : 6$ car l'hexagone est régulier).

$\text{mes}\widehat{OAB} + \text{mes}\widehat{OBA} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

$$\text{mes}\widehat{OAB} = \text{mes}\widehat{OBA} = \frac{120}{2} = 60^\circ.$$

On a donc $OA = OB = AB = r$.

$(OH) \perp (AB)$. Dans le triangle OHA rectangle en H , on a, d'après le théorème de Pythagore :

$$OH^2 + AH^2 = AO^2$$

$$OH^2 = AO^2 - AH^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$$

$$OH = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Aire } (AOB) = \frac{AB \times OH}{2} = \frac{1}{2} \times \left(r \times \frac{r\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2.$$

L'aire de l'hexagone est égale à 6 fois l'aire du triangle AOB :

$$\text{Aire } (ABCDEF) = 6 \times \text{Aire } (AOB) = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2$$

$$\text{Aire } (ABCDEF) = \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2.$$

Partie B

1. La forme extérieure de l'écrou est un hexagone régulier. Le diamètre du cercle circonscrit à cet hexagone est $d_c = 18,9$ mm et le rayon est $r_c = 9,45$ mm.

Le rayon du disque intérieur de l'écrou est $r_i = 5$ mm.

$$\text{On a : Aire } (ABCDEF) = \frac{3\sqrt{3}}{2} 9,45^2 \text{ mm}^2$$

$$\text{Aire (disque central)} = \pi \times 5^2 = 25 \pi \text{ mm}^2$$

Le volume extérieur de l'écrou (volume du cylindre vide intérieur compris) est :

$$V_e = \frac{3\sqrt{3}}{2} 9,45^2 \times 8 \approx 1\,856,117... \text{ mm}^3$$

Le volume du cylindre vide intérieur est :

$$V_i = 25 \pi \times 8 = 200 \times \pi \approx 628,318... \text{ mm}^3.$$

$$V_e - V_i \approx 1\,856,117 - 628,318 \approx 1\,227,799... \text{ mm}^3.$$

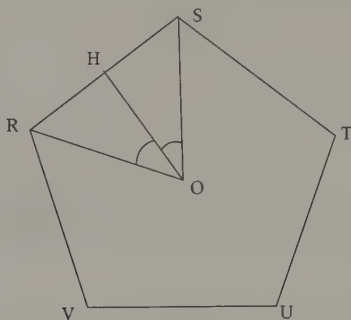
Le volume de l'écrou arrondi au mm^3 près est $1\,228 \text{ mm}^3$.

2. La masse volumique du laiton est $8\,400 \text{ kg/m}^3$, c'est-à-dire $0,0084 \text{ g/mm}^3$, la masse de l'écrou est : $0,0084 \times 1\,228 \approx 10,3$ g.

La valeur arrondie au gramme près de la masse de l'écrou est 10 g.

Partie C

$RSTUV$ est un pentagone régulier dans un cercle de centre O et de rayon r .



1. ROS , SOT , TOU , UOV et VOR sont des triangles isocèles isométriques.

$$\text{mes}\widehat{ROS} = 360^\circ : 5 = 72^\circ.$$

$[OH]$ est hauteur et bissectrice du triangle ROS , donc $\text{mes}\widehat{ROH} = \text{mes}\widehat{HOS} = 36^\circ$.

Dans le triangle OHS rectangle en H , on a :

$$\cos \widehat{HOS} = \frac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{OH}{OS} = \frac{OH}{r}$$

$$\frac{OH}{r} = \cos 36^\circ$$

$$OH = r \times \cos 36^\circ \approx 0,809r.$$

2. Dans le triangle OHS rectangle en H , on a :

$$\sin \widehat{HOS} = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{HS}{OS} = \frac{HS}{r}$$

$$HS = r \sin 36^\circ \approx 0,587r$$

$$RS = 2r \sin 36^\circ$$

$$\text{Aire}(ROS) = \frac{RS \times OH}{2} = \frac{r \times \cos 36^\circ \times 2r \sin 36^\circ}{2} = r^2 \times \cos 36^\circ \sin 36^\circ$$

L'aire du pentagone est égale à 5 fois l'aire du triangle ROS .

$$\text{Aire}(RSTUV) = 5r^2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \approx 2,37 r^2.$$

● Exercice 35

Énoncé, p. 31

1. $A'AB$ est un triangle rectangle en A , car $ABCD$ est un carré.

O , centre du cercle circonscrit au triangle rectangle, est tel que $OA = OB = OA'$.

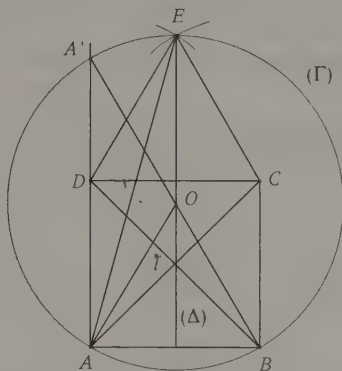
Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse.

O est donc le milieu de l'hypoténuse $[A'B]$ du triangle rectangle $A'AB$.

A' , O et B sont donc alignés.

2. a) Δ , médiatrice de $[AB]$, est un axe de symétrie du carré. Δ est donc également la médiatrice de $[CD]$. La médiatrice de $[CD]$ est également hauteur et médiane issue de E du triangle équilatéral EDC .

Δ passe donc par E .



b) On trace les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du carré $ABCD$. Le point d'intersection I appartient à Δ car $IA = IB$.

Pour obtenir Δ , on trace (EI) , d'où $(EI) = \Delta$.

c) On a $OA = OB$, donc O appartient à Δ .

d) On prolonge (AD) qui coupe le cercle en un deuxième point A' .

On trace les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du carré $ABCD$, on appelle I leur point d'intersection.

On trace (EI) , c'est-à-dire Δ .

On trace $(A'B)$. L'intersection de $(A'B)$ avec Δ est le point O cherché.

3. EDA et EOA sont deux triangles isocèles car $DE = DA$ et $OE = OA$.

Dans le triangle isocèle ADE , on a :

$$\widehat{ADE} = \widehat{ADC} + \widehat{CDE} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

($ADCB$ est un carré et DEC est un triangle équilatéral).

On a $\widehat{DAE} = \widehat{DEA}$ et $\widehat{DAE} + \widehat{DEA} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. D'où $\widehat{DAE} = 15^\circ$.

Dans le triangle équilatéral DEC , Δ est bissectrice de l'angle \widehat{DEC} .

L'utilisateur du tableur observe alors les valeurs de $x^2 - 8x + 10$ pour des valeurs de x évoluant de dixième en dixième entre 1 et 2. La valeur de $x^2 - 8x + 10$ passe par 0 pour une valeur de x comprise entre 1,5 et 1,6.

De la même manière, $x^2 - 8x + 10$ passe par 0 pour une valeur de x comprise entre 6,4 et 6,5.

D'où l'idée consistant à étudier l'évolution de l'expression pour des valeurs de x évoluant de centième en centième.

En observant les valeurs fournies par le tableur, on constate que $x^2 - 8x + 10$ passe par 0 pour une valeur de x comprise entre 1,550 et 1,551 et une autre valeur comprise entre 6,449 et 6,450.

b) Si x_1 et x_2 sont les deux solutions de l'équation, on a :

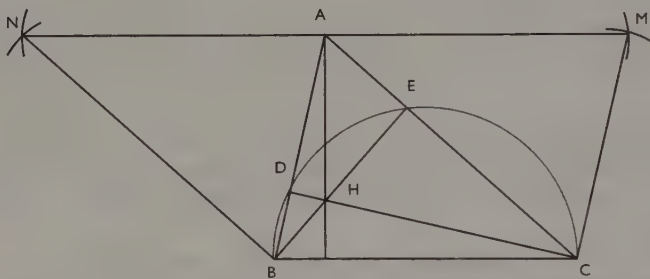
$1,550 < x_1 < 1,551$ et $6,449 < x_2 < 6,450$ (encadrements à un millièmè près).

4. On a donc $DM \approx 1,5$ cm à 1 mm près par défaut et $DM' \approx 6,4$ mm à 1 mm près par défaut.

● Exercice 37

Énoncé, p. 32

1.



2. Démontrons que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Les angles \widehat{BDC} et \widehat{BEC} interceptent le diamètre $[BC]$. Ces deux angles sont droits.

(BE) et (CD) sont deux hauteurs du triangle ABC . Ces deux hauteurs se coupent en H , orthocentre du triangle. (AH) est donc la troisième hauteur du triangle.

Donc $(AH) \perp (BC)$.

3. Pour tracer le parallélogramme $BCMA$, on trace le cercle de centre A et de rayon BC , ainsi que le cercle de centre C et de rayon AB . Une de leurs intersections est le point M cherché.

Pour tracer le parallélogramme $BCAN$, on trace le cercle de centre A et de rayon BC , ainsi que le cercle de centre B et de rayon AC . Une de leurs intersections est le point N cherché (cf. figure ci-dessus).

4. Démontrons que le point A est milieu de $[MN]$.

$ABCM$ et $BCAN$ sont des parallélogrammes.

Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles et de même longueur.

On a donc :

$BC = AM$ et $(BC) \parallel (AM)$.

$BC = AN$ et $(BC) \parallel (AN)$.

On en déduit que :

$(AM) \parallel (AN)$, donc les trois points N, A et M sont alignés.

D'autre part $AM = AN$, donc A est milieu de $[MN]$.

● Exercice 38

Énoncé, p. 33

1. a) En utilisant le théorème de Pythagore dans le carré $ABCD$, on a :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 16 + 16 = 32.$$

$$AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ cm et } AO = 2\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Le triangle AOS est rectangle.

Toujours en utilisant le théorème de Pythagore, on a :

$$AO^2 + OS^2 = SA^2$$

$$(2\sqrt{2})^2 + 2^2 = SA^2$$

$$8 + 4 = SA^2$$

$$SA = \sqrt{12} \text{ cm}$$

$$SA = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Le triangle SAB est un triangle isocèle. $AB = 4 \text{ cm}$. $SA = SB = 2\sqrt{3} \text{ cm}$.

b) On trace un triangle équilatéral MNP de mesure de côté 4 cm .

On trace la médiatrice de MN qui passe par P .

On obtient la hauteur PH du triangle issue de P .

On a $MH = 2 \text{ cm}$.

D'après le théorème de Pythagore, on a : $PH^2 = MP^2 - MH^2$.

$$PH^2 = 16 - 4 = 12.$$

$$PH = \sqrt{12} \text{ cm.}$$

$$PH = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$PH = SA.$$

(Cf. figure 1)

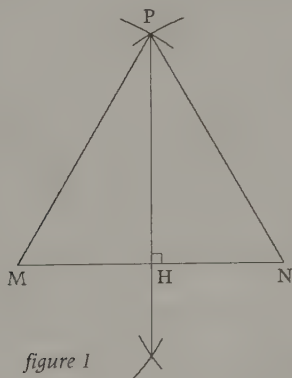


figure 1

2. On trace un triangle isocèle SAB tel que, $SA = SB = PH = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ et tel que $AB = 4 \text{ cm}$.
Pour SA et SB , on prend pour écartement du compas la longueur PH obtenue précédemment.

On trace un patron de la figure 2.

CORRIGÉS DE LA PARTIE 2

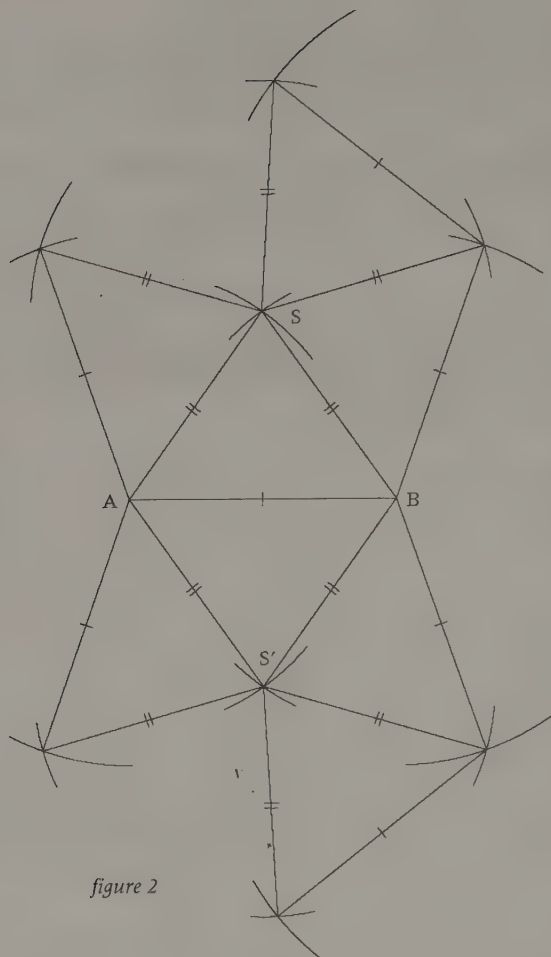


figure 2

3. a) Le volume de chaque pyramide est :

$$V_p = \frac{1}{3} \times B \times h = \frac{1}{3} \times 16 \times 2 = \frac{32}{3} \text{ cm}^3.$$

Le volume occupé par les six pyramides est : $V_p = \frac{32}{3} \times 6 = 64 \text{ cm}^3$.

Le volume du cube est $V_c = 4 \times 4 \times 4 = 64 \text{ cm}^3$.

Le volume du solide ainsi obtenu est : $V = 64 + 64 = 128 \text{ cm}^3$.

Remarque : Le volume du cube est égal au volume des six pyramides. Effectivement, l'intérieur du cube est constitué de six pyramides identiques à celles tracées à l'extérieur.

b) i) On considère le triangle rectangle SJB . On a d'après le théorème de Pythagore :

$$SB^2 = BJ^2 + SJ^2.$$

$$\text{Donc } SJ^2 = SB^2 - BJ^2 = 12 - 4 = 8.$$

$$SJ = 2\sqrt{2} \text{ cm.}$$

De la même façon, on a $S'J = 2\sqrt{2} \text{ cm}$.

$$\text{Donc : } SJ + S'J = 4\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Dans le triangle rectangle SIS' , on a d'après Pythagore :

$$SI^2 + S'I^2 = SS'^2.$$

$$SS'^2 = 4^2 + 4^2 = 32.$$

$$SS' = \sqrt{32}$$

$$SS' = 4\sqrt{2} \text{ cm.}$$

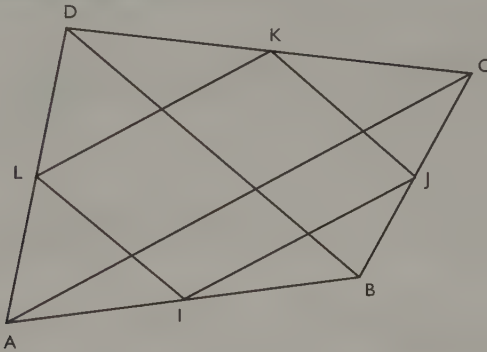
On peut en déduire que $SS' = SJ + S'J$. Donc S, S', J sont alignés et l'angle $\widehat{SJS'}$ est plat.

b) ii) $SBS'C$ est contenu dans un même plan et ses quatre côtés ont même longueur ; c'est un losange qui n'est pas un carré car $BC = 4 \text{ cm}$ et $SS' = 4\sqrt{2} \text{ cm}$. Les diagonales n'ont donc pas même longueur.

● Exercice 39

Énoncé, p. 34

1. La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa longueur est égale à la moitié de ce côté.



Dans le triangle ABC , on a donc : $(IJ) \parallel (AC)$ et $IJ = \frac{AC}{2}$

On peut raisonner de la même manière dans le triangle ADC .

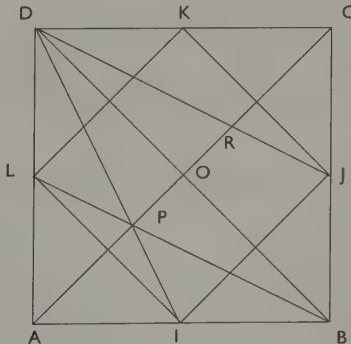
On obtient : $(LK) \parallel (AC)$ et $LK = \frac{AC}{2}$

On a donc : $(IJ) \parallel (LK)$ et $IJ = LK$.

Un quadrilatère qui a deux côtés opposés et de même longueur est un parallélogramme.

$IJKL$ est un parallélogramme.

2. a) $ABCD$ est un carré. Un carré étant un parallélogramme, $IJKL$ est un parallélogramme d'après 1.



$$IJ = LK = \frac{AC}{2}.$$

De la même façon on démontre que :

$$IL = JK = \frac{BD}{2}.$$

Or, dans le carré $ABCD$ les diagonales sont perpendiculaires et ont même longueur.

$(IJ) \parallel (LK) \parallel (AC)$ et $(IL) \parallel (JK) \parallel (BD)$. Comme $(AC) \perp (BD)$, on en déduit que deux côtés consécutifs du quadrilatère $IJKL$ sont perpendiculaires.

$IJKL$ est donc un carré.

b) $(AC) \parallel (LK)$ et $(AC) \perp (LI)$.

$$\text{D'autre part } AI = AL = \frac{AB}{2}.$$

On en déduit que L est le symétrique de I par rapport à (AC) .

c) P est le point d'intersection des droites (LB) et (AC) .

L étant symétrique de I par rapport à (AC) on a : $LP = IP$.

Soit P' le point d'intersection des droites (DI) et (BL) .

$AP'D$ et $AP'B$ sont deux triangles symétriques par rapport à l'axe (AC) , car D est le symétrique de B par rapport à la diagonale $[AC]$ du carré.

On a donc $P'D = P'B$. P' appartient à la médiatrice de $[AC]$.

Les droites (AC) , (LB) et (DI) ont donc même point d'intersection. P et P' sont confondus.

Les points D , P et I sont alignés.

d) Dans le triangle ADB , P est le point de concours des médianes.

Les médianes d'un triangle se coupent aux deux tiers de leur longueur.

$$\text{On a donc } \frac{DP}{DI} = \frac{2}{3}.$$

On appelle O l'intersection des diagonales du carré $ABCD$.

(AO) est la troisième médiane du triangle. On a : $AP = \frac{2}{3} AO$ et $PO = \frac{1}{3} AO$.

e) De la même façon dans le triangle DBC on montre que $RC = \frac{2}{3} CO$ et $RO = \frac{1}{3} CO$.
 $OA = OC$.

On a d'une part $PR = OP + OR = 2 OP = 2 \times \frac{1}{3} OC = \frac{1}{3} AC$.

D'autre part $AP = RC = \frac{1}{3} AC = PR$.

$$PR = \frac{1}{3} AC.$$

● Exercice 40

Énoncé, p. 34

1. Démontrons que le quadrilatère $BKDI$ est un parallélogramme.

$ABCD$ est un carré. On a donc $(AB) \parallel (CD)$. D'où $(BI) \parallel (KD)$.

D'autre part $AB = DC$. Comme I est le milieu de $[AB]$ et K le milieu de $[CD]$, on a $DK = IB = \frac{1}{2} AB$.
 $BKDI$ a deux côtés opposés parallèles et de même longueur. C'est un parallélogramme.

$$\text{D'autre part } IB = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}.$$

Le triangle BCK est rectangle en C . D'après le théorème de Pythagore : $BK^2 = CK^2 + CB^2$.

$$BK^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4} a^2. \quad BK = \frac{\sqrt{5}}{2} a.$$

Les côtés du parallélogramme mesurent :

$$DI = KB = \frac{\sqrt{5}}{2} a.$$

$$IB = DK = \frac{a}{2}.$$

2. a) Démontrons que $AJ = \frac{5}{2} FG$.

Dans le triangle AGB on a $(FI) \parallel (GB)$ car $BKDI$ est un parallélogramme.

D'après le théorème de la droite des milieux, la droite parallèle à (BG) qui passe par le milieu I de $[AB]$ passe par le milieu F de $[AG]$. On a $AF = FG$.

De la même façon, dans le triangle DEC , on montre que H est le milieu de $[EC]$. Donc $CH = HE$.

De la même façon qu'à la question 1, on peut démontrer que $AJCL$ est un parallélogramme. Donc $(FG) \parallel (EH)$ car $(AJ) \parallel (LC)$.

Dans le triangle BHC , on applique le théorème de la droite des milieux. G est donc milieu de $[BH]$. $BG = GH$, mais on a également $GJ = \frac{HC}{2}$.

Puisque l'on admet que $EFGH$ est un carré, on a $EH = FG$. D'où : $CH = FG$.

Finalement : $AJ = AF + FG + GJ = FG + FG + \frac{FG}{2} = \frac{5FG}{2}$.

b) Calculons $\frac{FG}{AB}$.

Les triangles ABJ et BCK sont isométriques (triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont respectivement de même mesure).

On a $AJ = BK = \frac{\sqrt{5}}{2} a = \frac{\sqrt{5}}{2} AB$.

On sait que $AJ = \frac{5}{2} FG$.

$\frac{\sqrt{5}}{2} AB = \frac{5}{2} FG$. D'où : $\sqrt{5} AB = 5 FG$.

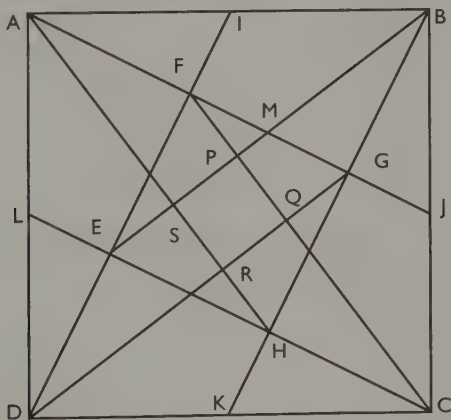
D'où : $\frac{FG}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Le rapport des longueurs des côtés des deux carrés est donc $\frac{FG}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Le rapport des aires des deux carrés est $\frac{FG^2}{AB^2} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

L'aire du carré $ABCD$ est égale à 5 fois l'aire du carré $EFGH$.

3. a) Démontrons que E , M et B sont alignés.



On sait que G est le milieu de $[BH]$. $BG = GH$. D'autre part $GH = EF$, donc $EF = GB$. Les droites (EF) et (GB) sont parallèles.

Le quadrilatère $EFBG$ est un parallélogramme (deux côtés parallèles et de même longueur).

Les diagonales de ce parallélogramme se coupent en leur milieu. Puisque M est milieu de $[FG]$, M est milieu de $[EB]$ et les points E , M et B sont alignés (le milieu d'un segment appartient au segment).

b) Le carré $EFGH$ a été construit en traçant les droites (AJ) , (BK) , (CL) et (DI) qui relient les sommets du carré $ABCD$ aux milieux de ses côtés.

En procédant de la même manière à partir du carré $EFGH$, on obtient le carré $PQRS$.

On a montré que la droite (EB) coupe $[FG]$ en son milieu.

De la même manière les droites (FC) , (GD) et (HA) coupent respectivement les côtés $[GH]$, $[HE]$ et $[EF]$ en leurs milieux.

Le tracé des droites (HA) , (EB) , (FC) et (GD) permet d'obtenir le carré $PQRS$ (les sommets de ce carré sont points d'intersection de ces droites).

Voir la figure de la page précédente.

c) Calculons la longueur du côté du carré $PQRS$.

À la question **2. b)** on a démontré que le rapport du côté du carré $EFGH$ et du côté du carré

$$ABCD \text{ est } \frac{FG}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

De la même manière on peut montrer que : $\frac{PQ}{FG} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

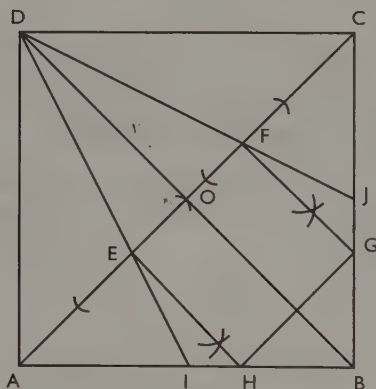
$$PQ = \frac{\sqrt{5}}{5} FG = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} AB = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 AB = \frac{1}{5} a.$$

La longueur du côté du carré $PQRS$ est $\frac{1}{5} a$, donc le cinquième de la longueur du carré $ABCD$.

● Exercice 41

Énoncé, p. 35

1.



2. a) (AO) et (DI) sont deux médianes du triangle ABD . Le point de concours des médianes d'un triangle est le centre de gravité du triangle.

Les médianes se coupent aux deux tiers de leur longueur. On a :

$$AE = \frac{2}{3} AO = \frac{1}{3} AC \quad (AC = 2AO).$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}.$$

b) En utilisant la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle ACD , on a :

$$AD^2 + CD^2 = AC^2.$$

$$2 AD^2 = AC^2.$$

$$AC^2 = 81 \times 2.$$

$$AC = \sqrt{81} \times \sqrt{2} = 9 \times \sqrt{2}.$$

$$AE = \frac{AC}{3} = 3\sqrt{2} \text{ cm.}$$

c) Dans le triangle rectangle AEH on a :

$$\widehat{AEH} = 90^\circ.$$

$$\widehat{EAH} = 45^\circ \text{ car } (AC) \text{ est la bissectrice de } \widehat{DAI}.$$

Donc $\widehat{EHA} = 45^\circ$, car la somme des angles d'un triangle est égale à 180° .

Le triangle AEH est rectangle et isocèle.

$$AE = EH = 3\sqrt{2} \text{ cm.}$$

d) Le symétrique de E par rapport à (DB) est F . Le symétrique de H est G .

Le symétrique de $[EH]$ est $[FG]$. On a $EH = FG = 3\sqrt{2} \text{ cm}$.

Le symétrique de $[AE]$ est $[FC]$. On a $AE = FC = 3\sqrt{2} \text{ cm}$.

$$D'où $EF = 9\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.$$

e) $HE = EF = FG$. $(EH) \perp (EF)$ et $(FG) \perp (EF)$. $EFGH$ est un rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur ; c'est un carré.

3. a) Le carré $EFGH$ a pour mesure de côté $3\sqrt{2} \text{ cm}$. Il n'est donc pas possible de paver un carré de 9 cm de côté avec des carrés isométriques à $EFGH$.

b) On a $HG^2 = 2KG^2$.

$$2KG^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18.$$

$$D'où $KG^2 = 9$.$$

$$KG = 3 \text{ cm.}$$

On obtient un pavage de $EFGH$ par quatre triangles isométriques à KGH .

On peut paver le carré $ABCD$ par 9 carrés isométriques à $KGBH$, et donc par 18 triangles isométriques à KGH .

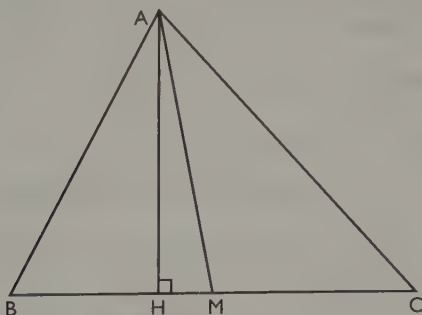
● Exercice 42

Énoncé, p. 36

Partie A

1. Démontrons qu'une médiane d'un triangle partage celui-ci en deux triangles de même aire.

Soit un triangle ABC et M le milieu de $[BC]$. Soit H le pied de la hauteur issue de A .



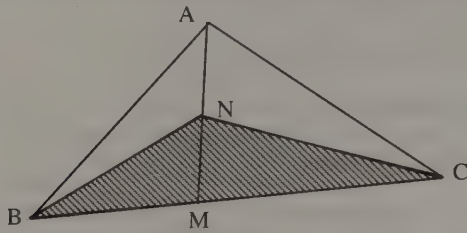
$$\text{On a : } A_{ABM} = \frac{BM \times AH}{2} \text{ et } A_{ACM} = \frac{CM \times AH}{2}.$$

M étant le milieu de $[BC]$, on $BM = CM$.

L'aire du triangle ABM est donc égale à l'aire du triangle ACM .

La médiane partage donc le triangle en deux triangles de même aire.

2. Comparons l'aire de la surface blanche à l'aire de la surface hachurée.



On applique la propriété démontrée précédemment dans les triangles ABM et ACM . (BN) est la médiane issue de B du triangle ABM , et CN est la médiane issue de C du triangle ACM .

On a : $A_{ABN} = A_{MBN}$ et $A_{ACN} = A_{MCN}$.

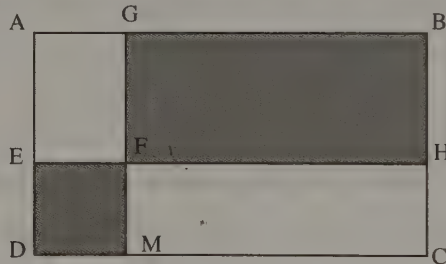
L'aire de la surface hachurée est : $A_{MBN} + A_{MCN}$

L'aire de la surface blanche est : $A_{ABN} + A_{ACN}$.

D'après les égalités ci-dessus l'aire de la surface blanche est égale à l'aire de la surface hachurée.

Partie B

1. Démontrons que l'aire de la surface grisée est : $2x^2 - 28x + 160$.



$EDMF$ est un carré : $A_{EDMF} = x^2$.

$GFHB$ est un rectangle.

On a $GB = 20 - x$ et $BH = 8 - x$.

$$\begin{aligned} A_{GFHB} &= GB \times BH = (20 - x)(8 - x) \\ &= 160 - 20x - 8x + x^2 \\ &= x^2 - 28x + 160. \end{aligned}$$

L'aire en cm^2 de la surface grisée est égale à la somme des deux aires, soit : $2x^2 - 28x + 160$.

2. $2(x - 7)^2 + 62 = 2(x^2 - 14x + 49) + 62 = 2x^2 - 28x + 98 + 62 = 2x^2 - 28x + 160$.
C'est ce que l'on cherchait à démontrer.

3. L'aire de la surface grisée en cm^2 peut donc s'exprimer sous la forme : $2(x - 7)^2 + 62$. Cette aire est minimale pour $x - 7 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 7$ cm.

4. Cherchons les valeurs de x pour lesquelles l'aire de la partie grisée est égale à 112 cm^2 . On cherche x compris entre 0 et 8 tel que :

$$2(x - 7)^2 + 62 = 112.$$

On a alors les équations équivalentes suivantes : $2(x - 7)^2 = 112 - 62$

$$2(x-7)^2 = 50$$

$$(x-7)^2 = 25$$

$$(x-7)^2 - 25 = 0$$

$$(x-7+5)(x-7-5) = 0$$

$$(x-2)(x-12) = 0$$

Cette équation admet deux solutions : 2 et 12. Mais 12 ne peut pas être une solution de ce problème.

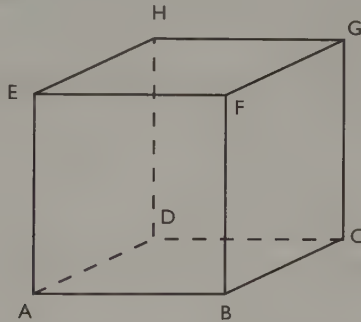
Il n'y a donc qu'une valeur de x pour laquelle l'aire de la partie grisée est 112 cm^2 , $x = 2 \text{ cm}$.

● Exercice 43

Énoncé, p. 37

1. Les faces cachées.

Les faces cachées sont $ABCD$, $CDHG$ et $ADHE$ (cf. la figure ci-dessous).
 La face opposée à $ABFE$ est $DCGH$. Leur motif est constitué de hachures.
 La face opposée à $BCGF$ est $ADHE$. Leur motif est uni.
 La face opposée à $EFGH$ est $ABCD$. Leur motif est constitué de points.



2. Ces 4 patrons sont bien des patrons d'un cube, mais les assemblages ne respectent pas tous l'ordonnancement des faces. Il faut en effet que les faces opposées soient constituées du même motif.

Si l'on considère le patron n° 2, il est facile de voir que les faces hachurées vont avoir une arête commune, de même pour les faces avec le motif pointillé.

Il en va de même pour le patron n° 4.

Les relations de voisinage entre les faces ne sont respectées que pour les patrons n° 1 et n° 3.

3. a) Il y a 27 petits cubes dans le grand cube $ABCDHEFG$ (3 plaques de 9 cubes).

b) Le volume d'un petit cube correspond $\frac{1}{27} \times V$.
 $V = 216 \text{ cm}^3$.

Le volume v d'un petit cube est en cm^3 : $216 : 27$.

D'où $v = 8 \text{ cm}^3$.

c) $v = 8 \text{ cm}^3$.

Les arêtes de chaque petit cube mesurent donc 2 cm ($v = 2^3 = 8 \text{ cm}^3$).

Les arêtes du grand cube mesurent 6 cm ($3 \times 2 \text{ cm}$).

d) Bien sûr, ces petits cubes ont des nombres de faces décorées différents.

Il y a 8 petits cubes avec 3 faces décorées : les 8 cubes situés à chacun des sommets du grand cube.

Il y a 12 petits cubes avec 2 faces décorées. Ces cubes se situent au milieu de chacune des arêtes du grand cube et le grand cube possède 12 arêtes.

Il y a 6 petits cubes avec une seule face décorée. Ces cubes se situent au centre de chacune des faces du grand cube qui a 6 faces.

Il y a un cube sans aucune face décorée situé au centre du grand cube.

On obtient le tableau suivant :

Nombre de faces décorées	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de petits cubes	1	6	12	8	0	0	0

e) Nombres de faces décorées.

$$N = 0 \times 1 + 1 \times 6 + 2 \times 12 + 3 \times 8 = 6 + 24 + 24 = 54.$$

Il y a 54 faces décorées.

Une autre méthode consiste à remarquer que chaque face du grand cube est constituée de 9 faces décorées de petits cubes. Le grand cube possède 6 faces. Donc $N = 9 \times 6 = 54$.

4. a) Calculons le volume du nouveau solide obtenu en retirant un petit cube à chaque sommet du grand cube.

On sait que $V = 216 \text{ cm}^3$ et $v = 8 \text{ cm}^3$ (cf. question 3).

Le volume du nouveau solide est $V' = 216 - 8 \times 8 = 216 - 64 = 152 \text{ cm}^3$.

b) Lorsque l'on retire un petit cube à un sommet du grand cube, les 3 faces apparentes du petit cube laissent place à 3 nouvelles faces (chacune de ces faces appartient à l'un des trois cubes adjacents au cube retiré).

L'aire latérale du nouveau solide est donc inchangée par rapport au grand cube initial.

Cette aire mesure 216 cm^2 .

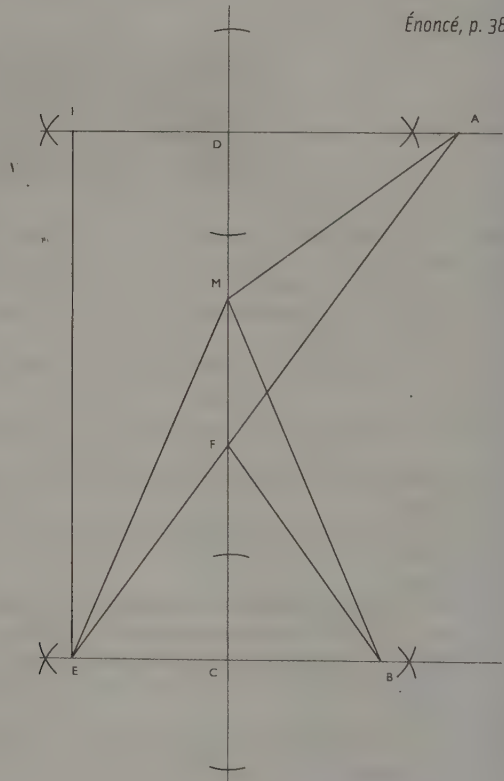
● Exercice 44

1. 1 cm correspond à 1 km, c'est-à-dire à 100 000 cm.

L'échelle de la représentation est donc $\frac{1}{100\,000}$.

La figure suivante, réduite à 50 %, tient compte des constructions nécessaires à la résolution des questions suivantes.

Énoncé, p. 38



2. Pour construire le point E , on prolonge la droite (BC) et on place E sur (BC) tel que $BC = CE$.

3. Démontrons que $AM + MB > AF + FB$.

Les points M et F appartiennent à la médiatrice de $[BE]$.

On a donc : $MB = ME$ et $FB = FE$.

D'où : $AM + MB = AM + ME$ et $AF + FB = AF + FE$.

Dans le triangle AME , on a $AM + ME > AE$ (la longueur d'un côté d'un triangle est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés).

F appartient au segment $[AE]$, $AF + FE = AE$.

On a donc : $AM + MB > AE$.

D'où : $AM + MB > AF + FB$.

4. Emplacement de la gare.

Pour que la gare G soit située de manière à ce que le trajet de la ville A à la ville B en passant par la gare soit le plus court possible, il faut que la somme $AG + GB$ soit minimale.

On a démontré à la question 3 que $AM + MB$ est minimale pour $M = F$.

Il faut construire la gare en F .

5. Démontrons que $FD = \frac{3}{2} FC$.

(DC) et (AE) sont deux sécantes aux parallèles (AD) et (BE) .

D'après le théorème de Thalès, les triangles DFA et CFE sont semblables (de même forme).

On a donc : $\frac{FD}{FC} = \frac{DA}{CE}$.

On sait que $CE = CB = 4$ km. D'autre part $DA = 6$ km.

On a alors : $\frac{FD}{FC} = \frac{6}{4}$ et $FD = \frac{3}{2} FC$.

6. Démontrons que $FC = 5,6$ km. Par hypothèse on a $DC = 14$ km. On vient de démontrer que $FD = \frac{3}{2} FC$.

$DC = FD + FC$.

$14 = \frac{3}{2} FC + FC = \frac{5}{2} FC$.

$FC = \frac{28}{5} = 5,6$.

La distance FC est 5,6 km.

7. Calculons la longueur du trajet de la ville A à la ville B en passant par G .

La méthode la plus rapide consiste à placer le point I sur la droite (AD) de telle sorte que le quadrilatère $ECDI$ soit un rectangle (cf. figure).

$AF + FB = AF + FE = AE$.

AE est l'hypoténuse du triangle rectangle AIE .

On a d'après le théorème de Pythagore : $AI^2 + IE^2 = AE^2$.

$AI = AD + DI = AD + CE = AD + CB = 6 + 4 = 10$.

$IE = DC = 14$.

D'où : $AE^2 = 10^2 + 14^2 = 100 + 196 = 296$.

$AE = \sqrt{296}$ km.

$\sqrt{296} \approx 17,2046\dots$

Le calcul au mètre près correspond au millième de kilomètre près.

La longueur du trajet cherchée au mètre près est :

– par excès 17 km 205 m ;

– par défaut 17 km 204 m.

Une méthode un peu plus longue consistait à appliquer deux fois le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles ADF et FCB afin de calculer AF et FB .

● Exercice 45

Partie A

1. Dans le triangle ABC , on a :

$$AB^2 = 480^2 = 230\,400$$

$$AC^2 = 360^2 = 129\,600$$

$$AB^2 + AC^2 = 230\,400 + 129\,600 = 360\,000$$

$$BC^2 = 600^2 = 360\,000$$

On a donc : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Les côtés du triangle ABC vérifient la relation de Pythagore, donc ABC est un triangle rectangle.

2. a) ABC étant un triangle rectangle, son aire est égale à :

$$\frac{AB \times AC}{2} = \frac{480 \times 360}{2} = \frac{172\,800}{2} = 86\,400 \text{ m}^2.$$

b) La distance de A à la droite (BC) est égale à la longueur de la hauteur issue de A du triangle ABC .

Soit H le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC . Posons $AH = h$.

$$\text{On a : Aire } (ABC) = \frac{BC \times h}{2} = 86\,400.$$

$$\text{D'où : } BC \times h = 86\,400 \times 2 \text{ et } h = \frac{172\,800}{600} = 288.$$

La distance du point A à la droite (BC) est 288 m.

Partie B

1. La distance parcourue par José est : $2 \times (480 + 360 + 600) = 2 \times 1\,440 = 2\,880$ m.

Sa vitesse moyenne est 8 km/h, soit 8 000 m/h.

$$2\,880 = 2\,000 + 800 + 80.$$

À la vitesse de 8 000 m/h, on parcourt 2 000 m en 15 min.

À cette vitesse, on parcourt 800 m en un dixième d'heure, donc en 6 min.

À la même vitesse, on parcourt 80 m en un centième d'heure. Dans une heure, il y a 3 600 s. Donc à cette vitesse, on parcourt 80 m en 36 s.

Pour parcourir deux tours du parcours, José a donc mis 21 minutes et 36 secondes.

2. a) Pour calculer une vitesse moyenne en mètres par minute, on divise la distance parcourue exprimée en mètres par la durée exprimée en minutes.

Une minute correspond à 60 secondes et une seconde correspond à $\frac{1}{60}$ min.

n secondes correspondent à $\frac{n}{60}$ min.

La formule proposée dans la feuille de calcul doit donc être modifiée de la manière suivante :

$$\text{« } =E\$1/(C4+D4/60) \text{ »}$$

b) Si l'on n'écrivait pas le symbole \$, la référence à la ligne 1 serait relative, c'est-à-dire qu'en recopiant vers le bas, E1 deviendrait E2, puis E3, etc. Mais le nombre qui doit être utilisé dans le calcul est toujours le nombre inscrit dans la cellule E1 de la feuille de calcul. Le symbole \$ impose une interprétation absolue, c'est-à-dire que le numéro de la ligne n'est pas modifié dans la copie vers le bas.

Partie C

1. Le point J est situé à égale distance des points A , B et C .

a) On a $JA = JB = JC$, donc J est le point de concours des médiatrices des trois côtés du triangle rectangle ABC .

Dans un triangle rectangle, le point de concours des médiatrices est le milieu de l'hypoténuse, et ce milieu est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

J est donc le milieu de $[BC]$.

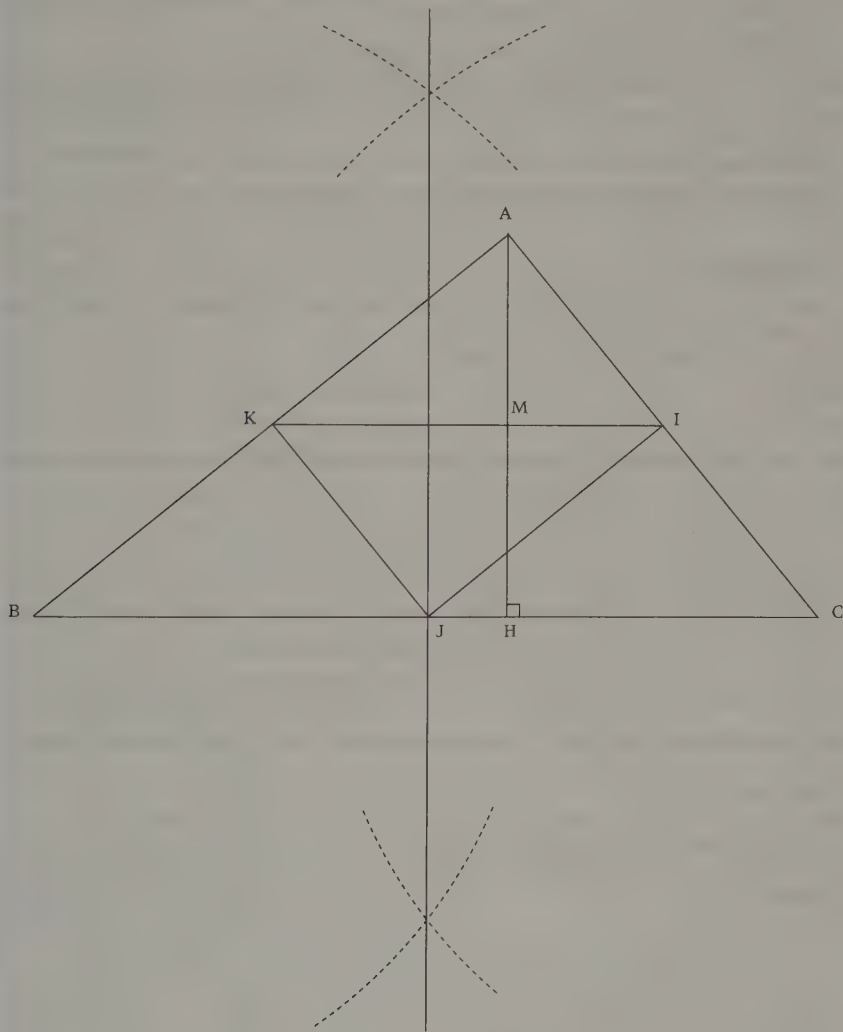
b) À l'échelle 1/5 000, on aura les mesures suivantes en mm sur la figure :

$$AB = \frac{480 \times 1\,000}{5\,000} = \frac{480}{5} = 96 \text{ mm}$$

$$AC = \frac{360 \times 1\,000}{5\,000} = \frac{360}{5} = 72 \text{ mm}$$

$$BC = \frac{600 \times 1\,000}{5\,000} = \frac{600}{5} = 120 \text{ mm}$$

Voici la construction à la règle et au compas de cette figure.



2. On a J milieu de $[BC]$, K milieu de $[AB]$ et I milieu de $[AC]$.

La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

I milieu de $[AC]$ et J milieu de $[BC]$ implique que $(IJ) \parallel (AB)$. Donc $(IJ) \parallel (AK)$.

De la même façon, J milieu de $[BC]$ et K milieu de $[AB]$ implique que $(KJ) \parallel (AC)$.
Donc $(KJ) \parallel (AI)$.

Le quadrilatère $AKJI$ a ses côtés parallèles deux à deux, c'est un parallélogramme.
Par ailleurs, l'angle en A de ce parallélogramme est droit.
Donc $AKJI$ est un rectangle.

3. La droite (KI) qui joint les milieux de deux côtés du triangle ABC est parallèle au troisième côté $[BC]$.

Cette parallèle à $[BC]$ qui passe par le milieu K de $[AB]$ coupe le côté $[AH]$ du triangle ABH en son milieu. Soit M ce milieu.

On a $(AH) \perp (BC)$ et $(KI) \parallel (BC)$. Donc $(AH) \perp (KI)$.

$(KI) \perp (AH)$ et (KI) coupe $[AH]$ en son milieu M . Donc (KI) est la médiatrice du segment $[AH]$ et tout point de cette médiatrice est situé à égale distance des extrémités A et H du segment $[AH]$.

Tous les points du segment $[KI]$ sont donc situés à égale distance de A et H .

Si l'infirmière se déplace sur le segment $[KI]$, elle reste bien à égale distance des deux postes de secours situés en A et H .

● Exercice 46

Énoncé, p. 40

La fonction f qui à la vitesse v (en m/s) d'un véhicule associe la distance de freinage en m est définie par : $f : v \mapsto k \times v^2$.

Le coefficient k dépend de l'état de la route.

Partie 1

Lorsque la route est sèche, on a $k = 0,08$.

1. a) Voici deux formules qui, entrées dans la cellule B2 (puis recopiées vers la droite), permettent de compléter la ligne 2.

$$= B1 * B1^{0,08} \quad \text{ou} \quad = B1^{2*0,08}$$

* est l'opérateur multiplication et ^ est l'opérateur exposant.

b) Si l'on veut qu'en modifiant la valeur de k en B3, les distances soient recalculées automatiquement, les deux formules proposées au a) ne satisfont pas à la nouvelle contrainte. Voici deux formules qui conviennent.

$$= B1 * B1 * \$B\$3 = B1^{2 * \$B\$3} \quad (\text{références absolues à B3}).$$

\$ devant le numéro de ligne empêche la modification de ligne dans un « tirer-vers-le-bas ».

\$ devant la lettre B empêche la modification de colonne dans un « tirer-vers-la-droite ».

2. a) Calculons la distance de freinage sur route sèche ($k = 0,08$) pour une vitesse de 72 km/h.

On convertit 72 km/h en m/s.

Une vitesse de 72 km/h correspond à une vitesse de 20 m/s ($72\,000 : 3\,600 = 20$).

On a : $D_f = 0,08 \times 20^2 = 0,08 \times 400 = 32 \text{ m}$.

b) On calcule la vitesse à partir de laquelle la distance de freinage sur route sèche est supérieure à 45 m.

On a alors : $kv^2 > 45$.

$$0,08 v^2 > 45$$

$$v^2 > 562,5$$

$$v > \sqrt{562,5} \quad (\text{cette vitesse est exprimée en m/s})$$

$$\text{En km/h on a : } v > \sqrt{562,5} \times \frac{3\,600}{1\,000}$$

$$v > 85,381\dots$$

La distance de freinage sur route sèche est supérieure à 45 m pour une vitesse supérieure à 85 km/h (valeur arrondie à l'unité, en km/h).

Partie 2

1. Par lecture graphique, on constate que, pour une vitesse de 10 m/s, la distance de freinage est 16 m.

$$\begin{aligned} \text{On a : } k \times v^2 &= D_F \\ k \times 10^2 &= 16 \\ k &= \frac{16}{100} = 0,16 \end{aligned}$$

La valeur du coefficient sur route mouillée est 0,16.

$$2. D_F = v^2 \times 0,16 = (v^2 \times 0,8) \times 2.$$

La représentation graphique donnant la distance de freinage sur route sèche en fonction de la vitesse se situe donc à mi-chemin entre l'axe des abscisses et la représentation graphique de la distance de freinage sur route mouillée.

● Exercice 47

Énoncé, p. 41

1. Les briques de 20 cL ont la forme de pavés droits dont la base a pour dimensions 4 cm et 6 cm.

a) 20 cL correspondent à 200 cm³.

Le volume exprimé en cm³ est $V = 4 \times 6 \times h$ où h est la hauteur exprimée en cm.

$$\text{On a : } 4 \times 6 \times h = 200. \text{ D'où } h = \frac{200}{24}.$$

$$h = 8,333... \text{ cm}$$

$$h = 83,33... \text{ mm}$$

La hauteur à 1 mm près par excès est 84 mm.

b) 6 briques de jus d'orange contiennent 1,2 L.

Le prix au litre est donc : $\frac{2,89}{1,2}$ euros $\approx 2,4083...$ euros soit une valeur arrondie au litre de 2,41 euros (valeur arrondie au centime le plus proche).

c) L'option A correspond à une remise de 30 % sur le prix d'un lot.

Dans ce cas le prix au litre est : $2,41 \times 0,7 \approx 1,69$ euros.

L'option B (prix inchangé avec deux briques gratuites) correspond à un prix de 2,89 euros

pour 1,6 L, soit un prix au litre de $\frac{2,89}{1,6} \approx 1,81$ euros.

L'option A donne un prix moins élevé au litre.

2. Offre « remboursement de la TVA ».

a) Soit P_p le prix payé et P_a le prix affiché.

La TVA ne se calcule pas sur le prix affiché, mais sur le prix payé : on multiplie le prix payé par 1,055 pour obtenir le prix affiché. $1 + 0,055 = 1,055$ (100 % + 5,5 %).

$$\text{On a : } P_a = P_p \times 1,055 \text{ et } P_p = \frac{P_a}{1,055}.$$

Pour un prix affiché de 42,55 euros le prix payé est : $\frac{42,55}{1,055}$ euros soit une valeur arrondie de 40,33 euros.

b) La formule à taper en D_2 est « = B₃ : 1,055 ».

La formule à taper en D_3 est « = B₃ : 1,196 », dans ce cas le coefficient permettant de calculer le prix affiché est $1,196 : 1 + 0,196 = 1,196$ (100 % + 19,60 %).

● Exercice 48

Énoncé, p. 42

Un pot de peinture « hors promotion » coûte 39 €.

Un pot de peinture en promotion contient 3 L, soit 20 % de peinture en plus et coûte 39 € également. Il permet de couvrir 48 m².

1. Soit V le volume en litre du pot « hors promotion ».

On a $V \times 1,2 = 3$.

D'où : $V = 3 : 1,2 = 2,5$ L.

2. Le prix au litre pour un pot « hors promotion » est $39 : 2,5 = 15,6$ €.

3. Le prix au litre pour un pot promotionnel est 13 € ($39 : 3$).

Le rapport entre les deux prix au litre est $13 : 15,6 \approx 0,833$.

La valeur arrondie du pourcentage de baisse du prix au litre est 16,7 %.

En effet : $1 - 0,833... = 0,166... \approx 16,7$.

4. On calcule l'aire A de la surface à peindre.

Le périmètre de la piscine parallélépipédique est 22 m. On a $(5 + 6) \times 2 = 22$.

D'où, $A = (22 \times 2,25) + (6 \times 5) = 79,5$ m².

3 couches représentent une aire à peindre de $79,5 \times 3 = 238,5$ m².

Il faut dans ce cas 5 pots de 3 L ($48 \times 5 = 240$ m²).

3 L de peinture permettent de couvrir 48 m².

1 L permet de couvrir $48 : 3 = 16$ m².

Un pot de 2,5 L « hors promotion » permet de couvrir $16 \times 2,5 = 40$ m².

Avec un pot de 2,5 L on peut donc couvrir 40 m² et il faut 6 pots de 2,5 L pour effectuer le travail ($6 \times 40 = 240$ m²).

La promotion permet d'économiser 1 pot à 39 €, donc 39 €.

● Exercice 49

Énoncé, p. 42

Soit i l'indice de masse corporelle, p le poids en kg et h la taille en m.

On a : $i = \frac{p}{h^2}$.

1. a) En septembre, l'indice de masse corporelle d'Antoine est :

$$i = \frac{64}{1,6^2} = \frac{64}{2,56} = 25.$$

b) Le poids p_A d'Antoine en avril est $\frac{p_A}{0,88} = p_S$, avec p_S le poids en septembre.

On a donc $p_A = \frac{p_S}{0,88} = \frac{64}{0,88} \approx 72,7272... \approx 72,7$ kg.

2. On a :

$p_D = 0,92 p_S = 0,92 \times 0,88$ avec p_D le poids d'Antoine en décembre.

$p_D = 0,92 \times 0,88 p_A = 0,8096 p_A \approx 0,81 p_A$.

Le pourcentage de perte de poids d'Antoine entre avril et décembre est d'environ 19 %.

● Exercice 50

Énoncé, p. 43

1. La moyenne des sept tours déjà notés dans le tableau pour Marc est 22, soit $154 : 7 = 22$. Si le score au tour 3 est également 22, alors la moyenne des scores de Marc sera également 22.

2. La moyenne des scores de Lucie est 23. Le total des points obtenus par Lucie est donc $23 \times 8 = 184$.

Le total des 7 scores de Marc notés dans le tableau est 154. Pour obtenir la même moyenne que Lucie, Marc devrait avoir un score de 30 au troisième tour, ce qui représente 3 flèches dans le 10 (3 scores parfaits). Il était donc possible par ce score au troisième tour d'obtenir la même moyenne que Lucie, mais impossible d'obtenir une meilleure moyenne.

3. Si le score x de Lucie au premier tour est supérieur de 40 % au score y qu'elle a obtenu au second tour, on a : $x = 1,4y$.

Le total des points de Lucie est : $T = 136 + 1,4y + y = 136 + 2,4y$.
 D'autre part on a : $T = 23 \times 8 = 184$, car la moyenne des scores de Lucie est 23.
 D'où : $2,4y + 136 = 184$
 $2,4y = 48$
 $y = 48 \div 2,4 = 20$
 On a donc : $x = 28$ et $y = 20$.

● Exercice 51

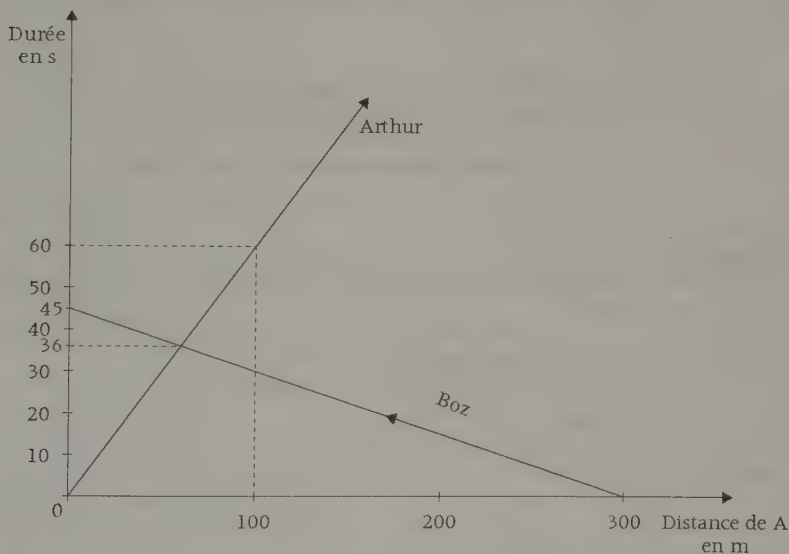
Énoncé, p. 43

1. Arthur se déplace à la vitesse constante de 6 km/h.
 Il parcourt 6 000 m en 60 min, donc sa vitesse moyenne est 100 m par minute.
 Boz se déplace à la vitesse moyenne de 24 km/h.
 Il parcourt 24 000 m en 60 min. Sa vitesse moyenne est 400 m par minute (vitesse quatre fois plus élevée que celle d'Arthur).

2. a) Il convenait de représenter les déplacements des deux robots en tenant compte qu'ils n'ont pas le même point de départ.

Sur l'axe des abscisses on reporte les distances exprimées en mètres.

Sur l'axe des ordonnées on indique les durées exprimées en secondes.



b) Le point d'intersection des deux droites a pour ordonnée 36 secondes.

Les robots se croisent à 9 h 36 s.

3. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées. La plus simple consiste à remarquer que les deux robots se rapprochent de 500 m toutes les minutes (60 s). Toutes les 6 secondes, ils se rapprochent de 50 m. Ils se rencontreront lorsqu'ils auront parcouru à eux deux 300 m, donc 6×50 m.

Ils se rencontreront au bout de 36 s (6×6 s), c'est-à-dire à 9 h et 36 s.

● Exercice 52

Énoncé, p. 43

La durée nécessaire à l'impression est proportionnelle à la longueur du tracé.

1. Calculons la durée nécessaire à l'impression d'un segment de droite de 28 cm de longueur.

Longueur du tracé en cm	Durée de l'impression en s
10	2,8
28	x

On a : $10x = 28 \times 2,8$.

D'où : $x = 7,84$ s.

2. Calculons la longueur d'un segment de droite imprimé en 3,5 s.

Longueur du tracé en cm	Durée de l'impression en s
10	2,8
x	3,5

On a : $10 \times 3,5 = 2,8x$.

D'où : $x = 35 : 2,8 = 12,5$ cm.

3. Calculons le périmètre du rectangle.

Longueur du tracé en cm	Durée de l'impression en s
10	2,8
P	6,3

On a : $2,8P = 10 \times 6,3$

$P = 63 : 2,8 = 22,5$ cm.

Soit respectivement L et l la longueur et la largeur d'un rectangle de périmètre 22,5 cm.

On a : $2(L + l) = 22,5$ cm.

$L + l = 11,25$ cm.

Il y a une infinité de rectangles de périmètre 22,5 cm.

Par exemple : $L = 6$ cm et $l = 5,25$ cm ou encore $L = 7,25$ cm et $l = 4$ cm.

4. Soit a la longueur du côté du carré.

D'après le théorème de Pythagore on $a^2 + a^2 = 6^2$.

D'où : $2a^2 = 36$; $a^2 = 18$.

$a = \sqrt{18}$ cm. $a = 3\sqrt{2}$ cm.

Le périmètre du carré mesure $12\sqrt{2}$ cm.

On a la relation de proportionnalité suivante :

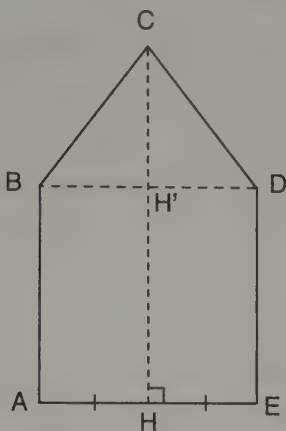
Longueur du tracé en cm	Durée de l'impression en s
10	2,8
$12\sqrt{2}$	x

$10x = 2,8 \times 12\sqrt{2}$.

$x \approx 4,75$ s.

La durée d'impression est 4,7 s au dixième de seconde près par défaut.

5. Soit H' l'intersection de (BD) avec (CH) .



On a dans le triangle rectangle BCH' et d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = BH'^2 + CH'^2 = 3^2 + 4^2 = 25.$$

D'où : $BC = 5$ cm.

Le périmètre de la figure $ABCDE$ mesure : $(6 \times 3) + (5 \times 2) = 28$ cm.

La durée d'impression est de 7,84 s (cf. question 1) augmentée du temps nécessaire pour effectuer 4 changements de direction, soit à $0,1 \text{ s} \times 4$.

La durée d'impression pour la figure $ABCDE$ est donc 8,24 s.

● Exercice 53

Énoncé, p. 44

1. le nombre de la graduation inférieure correspond au nombre 12 sur la graduation supérieure est 18.

2. On a les relations suivantes entre les deux graduations :

$$\begin{array}{ccc} 2 & \rightarrow & 14 \\ 10 & \updownarrow & \updownarrow & 4 \\ 12 & \rightarrow & 18 \end{array}$$

Un écart de 10 sur la graduation supérieure correspond à un écart de 4 sur la graduation inférieure : rapport $\frac{4}{10}$.

On a :

$$\begin{array}{ccc} 7 & \rightarrow & 16 \\ 2000 & \updownarrow & \updownarrow & 800 \\ 2007 & \rightarrow & x \end{array} \qquad \frac{800}{2000} = \frac{4}{10}$$

Donc $x = 816$.

Le nombre de la graduation supérieure correspondant à 2007 sur la graduation inférieure est 816.

3. On a :

$$\begin{array}{ccc} 7 & \rightarrow & 16 \\ 40 & \updownarrow & \updownarrow & 16 \\ x & \rightarrow & 0 \end{array}$$

En effet : $16 \times \frac{10}{4} = 40$ et $40 \times \frac{4}{10} = 16$.

$$x = 7 - 40 = -33.$$

Le nombre de la graduation supérieure correspondant au nombre 0 sur la graduation inférieure est -33 .

4. Pour $x = -33$ on a $y = 0$.

Pour $x = 2$, on a $y = 14$.

La correspondance entre x et y est donnée par l'égalité : $x = ay + b$. Il s'agit d'une fonction affine. On a :

$$-33 = 0 + b.$$

$$2 = 14a + b.$$

$$\text{D'où : } b = -33.$$

$$2 = 14a - 33.$$

$$14a = 35.$$

$$a = 2,5.$$

La relation est donnée par l'égalité : $x = 2,5y - 33$.

On retrouve le rapport précédent : $2,5 = \frac{10}{4}$.

● Exercice 54

Énoncé, p. 45

Il s'agit ici de résoudre un système de deux équations à deux inconnues en utilisant un tableur, par une méthode algébrique ou par un raisonnement arithmétique.

1. Utilisation du tableur.

a) À la ligne 16, on lit 877,50 correspondant à la dépense totale.

Ce résultat correspond à 12 adultes et 15 enfants.

b) Pour compléter la ligne 21, on utilise les écarts entre les nombres d'une ligne à l'autre dans chaque colonne.

Pour la première colonne l'écart est 1.

Pour la deuxième colonne l'écart est 1.

Pour la troisième colonne l'écart est 45.

Pour la quatrième colonne l'écart est 22,50.

Pour la cinquième colonne l'écart est également 22,50.

On obtient :

	Nombre d'adultes	Nombre d'enfants	Prix payé par les adultes	Prix payé par les enfants	Somme totale dépensée
21	17	10	765	225	990

c) Les formules qui peuvent être écrites dans les cellules sont les suivantes.

Pour C4 : = 45 × A4.

Pour D4 : = 22,50 × B4.

Pour E4 : = C4 + D4.

2) a) Résolution arithmétique du problème

Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.

La situation est modélisée par un système de deux équations à deux inconnues.

$$(1) x + y = 27$$

$$(2) 45x + 22,5y = 877,5$$

Ce système est équivalent au système

$$(1) x + y = 27$$

$$(2') 2x + y = 39 \rightarrow \text{On divise chaque membre de l'égalité (2) par 22,5.}$$

On soustrait membre à membre (2') - (1).

On trouve $x = 12$, puis on remplace x par sa valeur dans une des équations. On obtient : $y = 15$.

La solution est 12 adultes et 15 enfants.

b) Voici une méthode arithmétique, c'est-à-dire sémantique, parmi bien d'autres.

S'il n'y avait que des enfants la dépense serait $27 \times 22,50 = 607,50$.

À chaque fois qu'un adulte remplace un enfant, le coût augmente de 22,50 euros (le double).

L'écart entre la dépense totale de 877,50 et 607,50 est de 270 euros.

En divisant 270 par 22,50, on obtient le nombre d'adultes.

$270 : 22,50 = 12$.

Il y a donc bien 12 adultes et 15 enfants.

● Exercice 55

Énoncé, p. 45

1. Montrons que $BATU$ est un rectangle.

On a : $RM = RC - MC$ et $RB = RP - BP$.

$EPRC$ étant un carré, on a : $RP = RC$.

Par hypothèse, on a : $CM = PB$.

On en déduit que $RC - MC = RP - BP$, c'est-à-dire $RM = RB$.

On considère les droites (RC) et (RP) sécantes aux deux droites (BM) et (PC) .

On a : $\frac{RM}{RC} = \frac{RB}{RP}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BM) et (PC)

sont donc parallèles. On a $(AB) \parallel (TU)$.

Par hypothèse, $(AT) \parallel (BU)$.

$BATU$ a ses côtés opposés parallèles deux à deux, c'est un parallélogramme.

Par ailleurs, $EPRC$ est un carré. Ses diagonales sont perpendiculaires, donc $(TA) \perp (TU)$.

Un parallélogramme qui possède un angle droit est un rectangle.

On en déduit que $BATU$ est un rectangle.

2. On pose $CM = x$ et $CR = 40$.

Remarque : l'unité de mesure n'est pas précisée.

a) M appartient au segment $[CR]$ tout en étant distinct de C et R .

D'où $x \in]0 ; 40[$.

b) Le triangle PUB est rectangle en U . D'autre part, $\widehat{UPB} = 45^\circ$ car (PC) est une diagonale du carré $EPRC$ et est donc la bissectrice de l'angle droit \widehat{EPR} . Par conséquent, $\widehat{BP\hat{U}} = 45^\circ$.

PUB est donc également un triangle isocèle et $UP = UB$.

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle BUP :

$$UB^2 + UP^2 = BP^2$$

$$2 UB^2 = BP^2$$

$$\text{Comme } BP = CM = x, \text{ on a : } 2 UB^2 = x^2 \text{ et } UB = \sqrt{\frac{x^2}{2}}.$$

$$UB = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} x.$$

c) De la même façon, le triangle PTR est un triangle rectangle isocèle. Il est rectangle en T .

En appliquant la relation de Pythagore, on a :

$$TP^2 + TR^2 = PR^2.$$

$$TP = TR, \text{ donc } 2 TP^2 = PR^2.$$

$$TP = \frac{\sqrt{2}}{2} PR = 40 \frac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}.$$

$$TU = TP - UP = TP - UB = 40 \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} x = \frac{\sqrt{2}}{2} (40 - x).$$

d) Soit $A(x)$ l'aire du rectangle $BATU$.

$$\text{On a } A(x) = UB \times UT = \frac{\sqrt{2}}{2} x \times \frac{\sqrt{2}}{2} (40 - x) = \frac{2x(40 - x)}{4} = \frac{x(40 - x)}{2}.$$

3. Par lecture du graphique, on peut conjecturer que l'aire du rectangle est maximale pour $x = 20$ et l'aire proche de 200.

Si l'unité de longueur est le centimètre, alors l'aire maximale semble proche de 200 cm^2 .

4. a) Montrons que $A(x) = \frac{-(x-20)^2}{2} + 200$

$$\begin{aligned} \frac{-(x-20)^2}{2} + 200 &= \frac{-(x^2 - 40x + 400)}{2} + 200 \\ &= \frac{-x^2 + 40x - 400}{2} + 200 \\ &= \frac{-x^2 + 40x}{2} - 200 + 200 \\ &= \frac{-x^2 + 40x}{2} \\ &= \frac{x(40 - x)}{2} \\ &= A(x) \end{aligned}$$

b) Quelle que soit la valeur de x appartenant à l'intervalle $]0; 40[$, $-(x-20)^2 \leq 0$.

La valeur maximale de $\frac{-(x-20)^2}{2} + 200$ est obtenue pour $\frac{-(x-20)^2}{2} = 0$, donc pour $x = 20$.

L'aire du rectangle $BATU$ est maximale pour $x = 20$.

c) Lorsque $x = 20$, on a :

$$UB = \frac{\sqrt{2}}{2} x = 20 \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \text{ et } TU = \frac{\sqrt{2}}{2} (40 - x) = 20 \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}.$$

Pour $x = 20$, on a $UB = TU$. Donc deux côtés consécutifs du rectangle $BATU$ sont égaux et le rectangle est un carré.

● Exercice 56

Énoncé, p. 47

1. Dans le triangle rectangle ABC rectangle en A , la relation de Pythagore permet d'écrire : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

$$\text{On a donc : } AB^2 + (3,5)^2 = (12,5)^2.$$

$$\text{D'où : } AB^2 + 12,25 = 156,25 \text{ et } AB^2 = 144. \quad AB = 12.$$

La longueur AB est 12 cm.

$$2. \quad a + b = 36 \text{ et } a - b = 4.$$

En ajoutant les deux égalités membre à membre on obtient $2a = 40$. D'où $a = 20$.

On remplace a par sa valeur dans une des deux équations et l'on obtient $b = 16$.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 36 \times 4 = 144.$$

$$\text{D'où } \sqrt{a^2 - b^2} = 12.$$

Les mesures des longueurs des côtés d'un triangle rectangle en A (BC étant l'hypoténuse) vérifient :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2. \text{ Si } AB = 12, \text{ alors les mesures des deux autres côtés vérifient : } 12^2 = BC^2 - AC^2.$$

$$\text{Dans ce cas, } (BC + AC)(BC - AC) = 144.$$

Si l'on prend $BC + AC = 36$ et $BC - AC = 4$, on a bien $(BC + AC)(BC - AC) = 144$. Dans ce cas, on sait qu'une solution est $BC = 20$ et $AC = 16$.

Un triangle rectangle ABC dont les côtés mesurent respectivement 20 cm, 16 cm et 12 cm est donc rectangle en A .

Ce triangle n'est pas unique.

Remarque :

Plusieurs triangles rectangles en A , dont l'un des côtés mesure 12 cm existent.

• le triangle de dimensions 12, 35 et 37 en cm :

$$37^2 - 35^2 = (a + b)(a - b) = 72 \times 2 = 144 = 12^2.$$

• le triangle de dimensions 12, 15 et 9 en cm :

$$15^2 - 9^2 = (a + b)(a - b) = 24 \times 6 = 144 = 12^2.$$

• le triangle de dimensions 12, 13 et 5 en cm :

$$13^2 - 5^2 = (a + b)(a - b) = 18 \times 8 = 144 = 12^2.$$

3. a) Les décompositions possibles sont :

$$144 = 144 \times 1 ; 144 = 72 \times 2 ; 144 = 48 \times 3 ; 144 = 36 \times 4 ; 144 = 24 \times 6 ; 144 = 18 \times 8 ;$$

$$144 = 16 \times 9 ; 144 = 12 \times 12.$$

b) Les couples d'entiers solutions de l'équation $a^2 - b^2 = 144$, vérifient $(a + b)(a - b) = 144$.

Il y a 7 décompositions possibles pour 144.

Lorsque l'on résout le système $a + b = n$ et $a - b = p$, en ajoutant les égalités membre à membre, on obtient $2a = n + p$. Si $n + p$ est impair, a ne peut être un entier. On élimine donc trois décompositions dont l'un des facteurs est impair.

Il convient de résoudre quatre systèmes d'équations :

$$a + b = 72 \text{ et } a - b = 2$$

$$a = 37 \text{ et } b = 35.$$

$$a + b = 36 \text{ et } a - b = 4$$

$$a = 20 \text{ et } b = 16.$$

$$a + b = 24 \text{ et } a - b = 6$$

$$a = 15 \text{ et } b = 9.$$

$$a + b = 18 \text{ et } a - b = 8$$

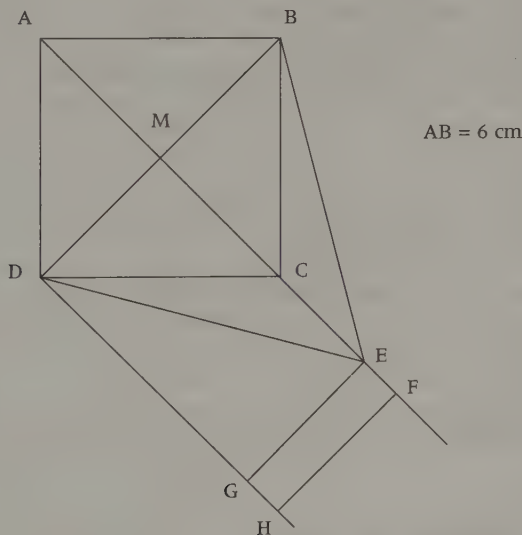
$$a = 13 \text{ et } b = 5.$$

Les couples d'entiers cherchés sont : (37 ; 35) ; (20 ; 16) ; (15 ; 9) ; (13 ; 5).

● Exercice 57

Énoncé, p. 48

1.



2. a) Démontrons que Aire (MDGE) = Aire (BDE).

On a :

$$\text{Aire (MDGE)} = MD \times ME = \frac{1}{2} BD \times ME$$

$$\text{Aire } (BDE) = \frac{1}{2} BD \times EM \text{ (} BD \text{ base et } EM \text{ hauteur du triangle } BDE\text{).}$$

$$\text{Donc : Aire } (MDGE) = \text{Aire } (BDE).$$

b) Démontrons que Aire $(MDHF) = \text{Aire } (ABCD)$

On a :

$$\begin{aligned} \text{Aire } (ABCD) &= 4 \times \text{Aire } (AMB) = 4 \times \frac{AM \times MB}{2} \\ &= 4 \times \frac{AC \times BD}{8} \text{ (car } AM = \frac{AC}{2} \text{ et } MB = \frac{BD}{2}\text{)} \\ &= \frac{1}{2} AC \times BD \\ &= \frac{1}{2} AC^2 \text{ (car } AC = BD\text{)} \end{aligned}$$

$$\text{Aire } (MDHF) = MD \times MF$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} AC \times AC \text{ (car } MD = \frac{BD}{2} = \frac{AC}{2} \text{ et } MF = MC + CF = 2 MC = AC\text{)} \\ &= \frac{1}{2} AC^2 \end{aligned}$$

$$\text{On a donc Aire } (ABCD) = \text{Aire } (MDHF)$$

c) On a Aire $(BDE) = \text{Aire } (MDGE)$ et Aire $(ABCD) = \text{Aire } (MDHF)$.

D'autre part Aire $(MDHF) > \text{Aire } (MDGE)$.

On peut en conclure que Aire $(ABCD) > \text{Aire } (BDE)$.

3. Soit $AB = c$.

a) On cherche à exprimer l'aire du triangle BDE en fonction de c .

$$\text{Aire } (BDE) = \frac{BD \times EM}{2}$$

$AB = c$, donc $AC = BD = c\sqrt{2}$ (AC et BD sont les diagonales du carré $ABCD$).

Le triangle BDE est un triangle équilatéral ($BD = ED = EB$).

$(EM) \perp (BD)$, le triangle EMD est rectangle en M .

On applique le théorème de Pythagore au triangle rectangle EMD :

$$MD^2 + ME^2 = DE^2$$

$$ME^2 = DE^2 - MD^2$$

$$DE^2 = (c\sqrt{2})^2 = 2c^2$$

$$MD = \frac{BD}{2} = \frac{c\sqrt{2}}{2} \text{ et } MD^2 = \frac{c^2}{2}$$

$$\text{Donc : } ME^2 = 2c^2 - \frac{c^2}{2} = \frac{3c^2}{2} \text{ et } ME = \sqrt{\frac{3c^2}{2}} = \frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Aire } (BDE) = \frac{1}{2} (BD \times EM) = \frac{1}{2} c\sqrt{2} \times \frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} c^2 \sqrt{3} = \frac{c^2\sqrt{3}}{2}$$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, donc Aire $(BDE) < c^2$.

Comme Aire $(ABCD) = c^2$, on a Aire $(ABCD) > \text{Aire } (BDE)$.

4. Si le point P est confondu avec le point F , on a bien Aire $(BDP) = \text{Aire } (ABCD)$.
 F est donc le point cherché.

● Exercice 58

Énoncé, p. 48

Soit V_i le volume intérieur du tube creux en cm^3 .

Soit V_e le volume extérieur du tube en cm^3 .

On a :

$$V_i = \pi \times 4^2 \times 75$$

$$V_e = \pi \times 6^2 \times 75$$

Le volume d'aluminium est :

$$V_e - V_i = \pi \times (6^2 - 4^2) \times 75 = \pi \times 20 \times 75 \approx 3,14 \times 20 \times 75 \text{ cm}^3 \approx 4\,710 \text{ cm}^3.$$

La masse d'un tube d'aluminium est en g : $M = 2,7 \times 4\,710$. Soit $12\,717 \text{ g}$ ou $12,717 \text{ kg}$.

Si la charge utile d'un camion est de 14 tonnes, c'est-à-dire $14\,000 \text{ kg}$, le camion pourra transporter 1 100 tubes au maximum. On a $14\,000 : 12,717 \approx 1\,100,88$.

● Exercice 59

Énoncé, p. 48

La pièce rectangulaire mesure 418 cm sur 567 cm .

1. a) Si le carreleur utilise des dalles entières, il utilisera 14 dalles sur la largeur.

En effet : $418 \div 29 \approx 14,41\dots$

b) Si le carreleur utilise des dalles entières, il utilisera 19 dalles sur la longueur.

En effet : $567 \div 29 \approx 19,55\dots$

Le nombre de dalles nécessaires sera : $19 \times 14 = 266$ dalles.

c) Soit h la largeur du joint sur la largeur de la pièce (joints réguliers). Il y aura 15 joints sur la largeur (13 joints entre les dalles et deux entre les dalles et les murs).

La somme cumulée des joints sera : $418 - 14 \times 29 = 12 \text{ cm}$. On a : $15h = 12$.

Chaque joint aura pour dimension $0,8 \text{ cm}$ ($12 \text{ cm} : 15$).

Soit h' la largeur du joint sur la longueur de la pièce (joints réguliers). Il y aura 20 joints sur la longueur ($19 + 1$).

La somme cumulée des joints sur la longueur sera : $567 - 19 \times 29 = 16 \text{ cm}$. On a $20h' = 16$.

$h' = 16 : 20 = 0,8 \text{ cm}$.

Les joints auront donc tous la même largeur $0,8 \text{ cm}$.

2. Soit n le nombre de carreaux disposés sur la largeur avec des joints de $0,6 \text{ cm}$.

On a : $418 = 36n + 0,6 \times (n + 1)$.

D'où : $418 = 36,6n + 0,6$ ou encore $417,4 = 36,6n$.

$417,4 : 36,6 \approx 11,4\dots$

Il faudra utiliser 12 carreaux sur la largeur et découper l'un d'entre eux.

Soit p le nombre de carreaux utilisés sur la longueur avec des joints de $0,6 \text{ cm}$.

On a : $567 = 36p + 0,6 \times (p + 1)$.

D'où : $567 = 36,6p + 0,6$ ou encore $566,4 = 36,6p$.

$566,4 : 36,6 \approx 15,49\dots$

Il faudra utiliser 16 carreaux sur la longueur et découper l'un d'entre eux.

Le nombre de dalles nécessaires est $16 \times 12 = 192$ dalles.

3. Dans le premier cas le coût sera : $2,30 \text{ €} \times 266 = 611,80 \text{ €}$.

Dans le second cas le coût sera : $3,10 \text{ €} \times 192 = 595,20 \text{ €}$.

C'est le deuxième choix qui sera le moins onéreux.

● Exercice 60

Énoncé, p. 49

1. a) L'aire de la surface peinte en rouge (S_1) représente 40 % de la surface peinte

($100 - (35 + 25) = 40$).

On a $S_1 = 2\,688 \text{ cm}^2$.

D'où : $S = 2\,688 \times \frac{100}{40} = 6\,720 \text{ cm}^2$.

b) L'aire de la surface de la toile est :

$T = 120 \times 84 = 10\,080 \text{ cm}^2$.

L'aire de la surface peinte représente 66,7 % de l'aire de la surface totale.

On a : $\frac{6\,720}{10\,080} = 0,666\dots$

c) On a : $x = \frac{1}{8} \times 120 = 15$ cm.

L'aire de la partie hachurée est :

$$A = 15 \times 84 + (120 - 15) \times y = 3\,360 \text{ (car } 10\,080 - 6\,720 = 3\,360).$$

$$1\,260 + 105y = 3\,360$$

$$105y = 2\,100$$

$$y = 20 \text{ cm.}$$

2. La condition s'écrit :

$$10\,080 \times 0,20 < 12 \times 84 + (120 - 12) \times y < 10\,080 \times 0,22$$

$$2\,016 < 1\,008 + 108y < 2\,217,6$$

$$1\,008 < 108y < 1\,209,6$$

y représentant un nombre entier de centimètres, on a $y = 10$ ou $y = 11$.

● Exercice 61

Énoncé, p. 49

1. Flacon 1.

Le flacon 1 est constitué de deux pavés droits.

On a :

$$V_1(x) = (5 \times 4 \times 5) + (2 \times 1 \times x) = 100 + 2x. \quad V_1(x) \text{ est exprimé en cm}^3.$$

$$V_1(x) = 2x + 100.$$

2. Flacon 2

Soit V_p le volume de la pyramide de base $ABCD$ et de hauteur SO .

Soit $V_{p'}$ le volume de la pyramide de base $EFGH$ et de hauteur SO' .

On a :

$$V_p = \frac{1}{3} \times AB \times BC \times SO = \frac{1}{3} \times 6 \times 4 \times 11 = 88 \text{ cm}^3.$$

$$V_{p'} = \frac{1}{3} \times EF \times FG \times SO' = \frac{1}{3} \times 3 \times 2 \times 5,5 = 11 \text{ cm}^3.$$

$$V_{ABCEFGH} = V_p - V_{p'} = 88 - 11 = 77 \text{ cm}^3.$$

On a alors :

$$V_2(x) = 77 + 2 \times 3 \times x = 6x + 77.$$

$$V_2(x) \text{ est exprimé en cm}^3.$$

3. a) Les représentations graphiques de $V_1(x)$ et $V_2(x)$ sont deux droites (représentations de fonctions affines).

Deux points suffisent pour tracer chacune des droites :

- pour V_1 , la droite représentative passe par exemple par les points de coordonnées (0 ; 100) et (10 ; 120) ;
- pour V_2 , la droite représentative passe par exemple par les points de coordonnées (0 ; 77) et (10 ; 137).

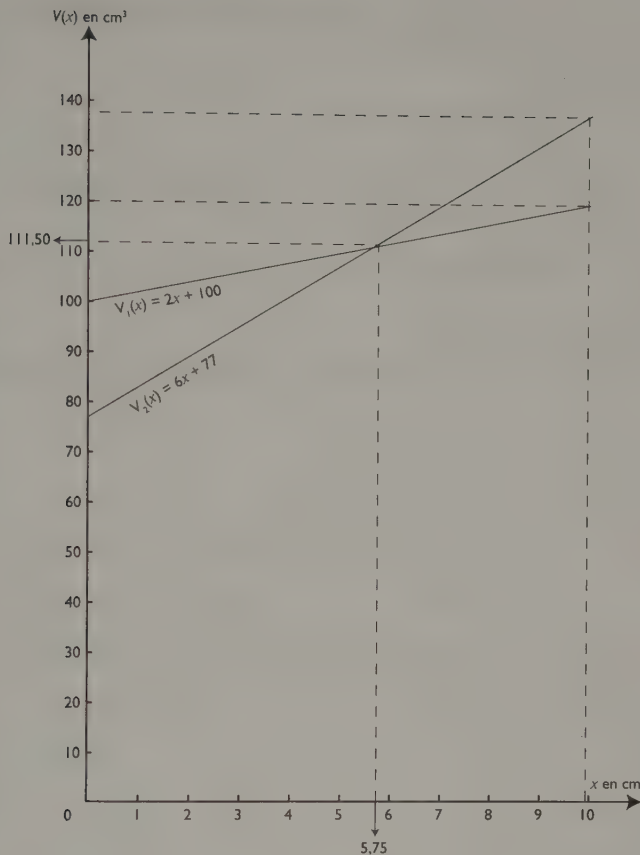
b) On a $V_1(x) = V_2(x)$ pour x compris entre 5,7 cm et 5,8 cm (cf. abscisse du point d'intersection des deux droites).

c) On a $V_1(x) = V_2(x)$ pour $6x + 77 = 2x + 100$, donc pour $4x = 23$, c'est-à-dire $x = 5,75$ cm.

d) Dans ce cas, le volume correspondant (en cm^3) est : $2 \times 5,75 + 100 = 111,50 \text{ cm}^3$.

$111,5 \text{ cm}^3$ correspond à $0,1115 \text{ dm}^3$, donc à $0,1115 \text{ L}$.

Ce volume est donc égal à $11,15 \text{ cL}$.



● Exercice 62

Énoncé, p. 50

1. a) Calculons la hauteur du cône.

Le triangle SAB est un triangle rectangle en A .

SA est la hauteur du cône et AB le rayon de sa base.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$SB^2 = SA^2 + AB^2.$$

$$SA^2 = SB^2 - AB^2 = 21^2 - 14^2 = 441 - 196 = 245 = 5 \times 7^2.$$

D'où la valeur exacte de la hauteur du cône : $SA = 7\sqrt{5}$ cm.

En utilisant la calculatrice on trouve : $SA \approx 15,652\dots$

La hauteur du cône est 15,7 cm au mm près par excès, 15,6 cm au mm près par défaut.

b) Calculons le volume du cône.

L'aire de la base du cône est $B = \pi \times AB^2 = \pi \times 14^2$.

$$\text{Le volume exact du cône est : } V = \frac{1}{3} \times B \times h = \frac{\pi \times 14^2 \times 7 \times \sqrt{5}}{3} = \frac{1\,372 \times \pi \times \sqrt{5}}{3} \text{ cm}^3.$$

$$V \approx 3212,6819\dots \text{ cm}^3.$$

La valeur approchée au mm^3 par excès (valeur arrondie) est : $V \approx 3\,212,682 \text{ cm}^3$.

c) Calculons le nombre de bougies que l'on peut fabriquer avec 20 litres de cire.

1 L c'est 1 dm³ ou encore 1 000 cm³.

20 L c'est 20 000 cm³.

On a 20 000 : 3 212,682 ≈ 6,22.

Avec 20 L de cire on peut fabriquer 6 bougies.

2. a) Calculons la longueur exacte de l'arc de cercle BB'.

La longueur de cet arc est égale à la longueur de la circonférence de la base du cône.

Soit L₁ cette longueur et D₁ le diamètre de la base du cône.

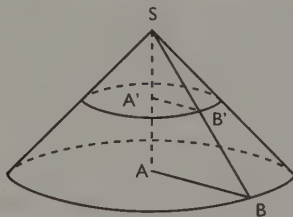
$$L_1 = \pi \times D_1 = \pi \times 28 = 28\pi \text{ cm.}$$

Appelons C₂ le cercle auquel appartient l'arc BB', D₂ son diamètre et L₂ la longueur de sa circonférence.

$$\text{On a : } L_2 = \pi \times D_2 = 42\pi \text{ cm.}$$

b) Calculons l'angle α en degrés.

La mesure de l'angle α est proportionnelle à la mesure de la longueur de l'arc correspondant.



$$\text{On a donc : } \text{mes}(\alpha) = 360^\circ \times \frac{28\pi}{42\pi} = 360^\circ \times \frac{2}{3} = 240^\circ.$$

3. La cire blanche occupe le volume d'un cône dont la base est un disque de rayon A'B' tel

que A'B' = $\frac{1}{2}$ AB, et sa hauteur h' est telle que h' = SA' = $\frac{1}{2}$ SA.

Le volume V' de ce cône est : $V' = \frac{1}{3} \times \pi \times A'B'^2 \times h'$

$$V' = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 \times \pi \times \frac{1}{2}SA = \frac{1}{3} \times AB^2 \times \pi \times SA \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}V$$

(V étant le volume du grand cône).

La proportion de cire blanche dans le volume total de la bougie est donc $\frac{1}{8}$.

● Exercice 63

Énoncé, p. 51

1. Les étapes de la construction peuvent être les suivantes :

1. Tracé du segment [AC] de mesure 7 cm.

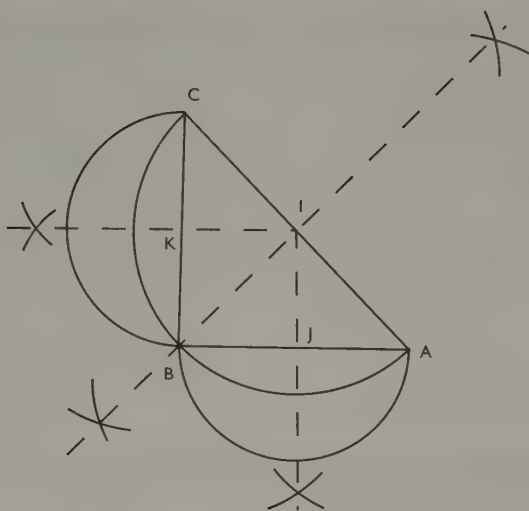
2. Tracé de la médiatrice du segment [AC].

3. Tracé de l'un des demi-cercles de diamètre [AC].

4. B est l'intersection de ce demi-cercle avec la médiatrice de [AC].

5. Tracés des médiatrices des segments [AB] et [BC] pour obtenir les milieux de ces segments.

6. Tracés du demi-cercle de diamètre [AB] et du demi-cercle de diamètre [BC]. (du même côté de [AC] que le demi-cercle de diamètre [AC]).



2. On appelle A l'aire de la surface grisée, A_1 l'aire du triangle ABC , A_2 l'aire du disque de diamètre $[AC]$, A_3 l'aire du disque de diamètre $[AB]$.

On a :

$$\text{mes}(A) = \text{mes}A_1 + \text{mes}A_3 - \frac{1}{2} \text{mes}A_2.$$

Les mesures sont calculées en cm pour les longueurs, en cm^2 pour les aires.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2 AB^2 = 7^2 = 49$ (relation de Pythagore dans le triangle ABC).

$$AB^2 = \frac{49}{2}$$

$$AB = \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = 7 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{mes}A_1 = \frac{AB^2}{2} = \frac{49}{4} = 12,25.$$

$$\text{mes}A_3 = \pi \times \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \pi \times \frac{49}{8} = 6,125 \times \pi.$$

$$\text{mes}A_2 = \pi \times (3,5)^2 = 12,25 \times \pi.$$

$$\text{mes}(A) = 12,25 + 6,125 \pi - 6,125 \times \pi.$$

$$\text{mes}(A) = 12,25 \text{ cm}^2.$$

$$\text{mes}(A) = 1\,225 \text{ mm}^2.$$

● Exercice 64

Énoncé, p. 52

1. Les carrés D et E sont isométriques.

On a : $d = e$.

La longueur du côté du carré C est égale au double de celle du carré D et au double de celle du carré E .

On a : $c = d + e = 2d = 2e$.

On en déduit : $d = \frac{c}{2}$ et $e = \frac{c}{2}$.

La longueur du côté du carré B est égale à la somme des longueurs des côtés des carrés C et D .

$$\text{On a : } b = c + d = c + \frac{c}{2} = \frac{3c}{2}$$

La longueur du côté du carré A est égale à la somme des longueurs des côtés des carrés B et C .

$$\text{On a : } a = b + c = \frac{3c}{2} + c = \frac{5c}{2}.$$

2. Soit A l'aire du rectangle.

$$A = a \times (a + b) = \frac{5c}{2} \times \left(\frac{5c}{2} + \frac{3c}{2} \right) = \frac{5c}{2} \times 4c = 10c^2.$$

$$\text{D'où : } 10c^2 = 3\,610.$$

$$c^2 = 361.$$

$$c = \sqrt{361} = 19.$$

La longueur c du côté du carré C est dans ce cas : 19 cm.

Les dimensions de la feuille sont alors :

$$a = \frac{5c}{2} = \frac{5 \times 19}{2} = 47,5.$$

$$a + b = \frac{5c}{2} + \frac{3c}{2} = \frac{8c}{2} = 4c = 4 \times 19 = 76.$$

Les dimensions de la feuille sont : 76 cm sur 47,5 cm.

3. La masse de la pièce B est 100 g.

La plaque étant homogène, la masse est proportionnelle à la surface.

$$\text{L'aire de la pièce } B \text{ est : } b^2 = \frac{3c}{2} \times \frac{3c}{2} = \frac{9c^2}{4}.$$

$$\text{L'aire de la pièce } A \text{ est : } c^2 = \frac{5c}{2} \times \frac{5c}{2} = \frac{25c^2}{4}.$$

$$\text{Le rapport entre l'aire de la pièce } A \text{ et l'aire de la pièce } B \text{ est : } \frac{25}{4} / \frac{9}{4} = \frac{25}{9}.$$

$$\text{Le rapport entre la masse de la pièce } A \text{ et celle de la pièce } B \text{ est également } \frac{25}{9}.$$

$$\text{La masse de la pièce } A \text{ est donc : } 100 \text{ g} \times \frac{25}{9} = \frac{2\,500}{9} \text{ g}.$$

La masse de la pièce A est 277,8 g à 1 dg par excès. Elle est de 277,7 g à 1 dg près par défaut.

$$4. \text{ On a : } a = \frac{5c}{2}.$$

$$\text{D'où : } c = \frac{2a}{5}.$$

$$\text{Le volume du cube } C \text{ est : } c^3 = \frac{8a^3}{125}.$$

$$\text{Comme } a^3 = 2 \text{ m}^3, c^3 = \frac{8 \times 2}{125} \text{ m}^3.$$

$$\text{Soit en dm}^3 : c^3 = \frac{16\,000}{125} \text{ dm}^3 = 128 \text{ dm}^3.$$

● Exercice 65

Énoncé, p. 52

1. Conversion de durées en secondes.

a) Une heure correspond à 3 600 s.

$$\text{Deux tiers d'heure correspondent à } 3\,600 \text{ s} \times \frac{2}{3} = 2\,400 \text{ s}.$$

b) 1,2 heure correspond à $3\,600 \times 1,2 = 4\,320$ s.

2. Conversion de durées en heures, minutes et secondes.

a) $5\,532 = 3\,600 + 1\,932$.

5 532 s, c'est 1 heure et 1 932 s.

$$1\,932 = 60 \times 32 + 12.$$

1 932 secondes, c'est 32 minutes et 12 secondes : 1 h 32 min 12 s.

5 532 s, c'est 1 heure 32 minutes 12 secondes.

b) $1,87 \times 3\,600 = 6\,732$.

$6\,732 = 3\,600 + 3\,132 = 3\,600 + 60 \times 52 + 12$.

1,87 h, c'est 6 732 s ou 1 heure 52 minutes et 12 s : 1 h 52 min 12 s.

3. Pour une durée de 30 min la grande aiguille parcourt un angle de 180° .

La durée est proportionnelle à l'angle parcouru.

Pour un angle de 54° la durée correspond à 9 minutes, car $30 \times \frac{54}{180} = \frac{1\,620}{180} = 9$.

4. Chaque heure la petite aiguille parcourt $1/12^\circ$ du cadran, soit $360^\circ \times 1/12$, c'est-à-dire 30° .

Un déplacement de 30° correspond à une durée de 60 min.

Calculons la durée en minutes correspondant à un déplacement de 68° .

$$60 \times \frac{68}{30} = 136.$$

Un déplacement de 68° correspond à une durée de 136 min ou encore 2 h 16 min.

Il sera alors 14 h 16 min.

5. Décalages horaires.

Il est utile de faire un tableau pour répondre rapidement aux questions posées.

	Départ Paris	Arrivée Houston	Départ Houston	Arrivée Rio
Heure de Paris	23 h	10 h	11 h	21 h
Heure de Houston	16 h	3 h	4 h	14 h
Heure de Rio	19 h	6 h	7 h	17 h

On indique d'abord les heures locales à Houston et Rio lorsqu'il est 23 h à Paris.

Lorsqu'il est 23 h à Paris, il est 16 h à Houston (7 heures de décalage horaire).

Lorsqu'il est 23 h à Paris, il est 19 h à Rio (3 heures de décalage horaire entre Rio et Houston).

a) Calcul de la durée du vol entre Paris et Houston.

On indique l'heure locale à Paris lorsqu'il est 3 h à Houston : il est 10 h à Paris.

Cela permet de calculer la durée du vol de Paris à Houston. La durée du vol est de 11 h.

b) Calcul de l'heure d'arrivée à Rio.

Lorsque l'avion arrive à Rio, il est 14 h à Houston (10 heures de vol avec un départ à 4 h).

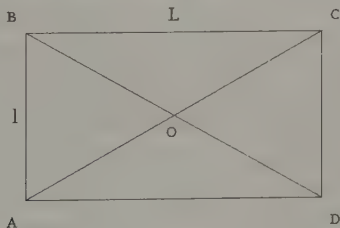
Lorsqu'il est 14 h à Houston il est 17 h à Rio (3 h de décalage).

● Exercice 66

Énoncé, p. 52

1. Par symétrie par rapport au point O , on a :

Aire $(AOB) = \text{Aire}(COD)$ et Aire $(AOD) = \text{Aire}(BOC)$.



D'autre part :

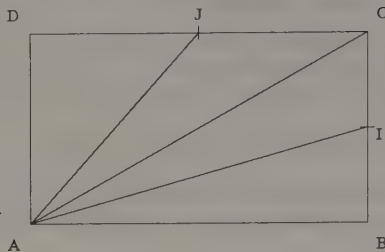
$$\text{Aire}(AOD) = L \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{2} = L \times \frac{l}{4}.$$

$$\text{Aire}(AOB) = l \times \frac{L}{2} \times \frac{1}{2} = l \times \frac{L}{4}.$$

Les aires des quatre parts sont égales.

2. On a :

$$\text{Aire (ABI)} = AB \times \frac{BI}{2} \text{ et Aire (AIC)} = AB \times \frac{IC}{2}.$$



Puisque $IB = IC$,

$$\text{Aire (ABI)} = \text{Aire (AIC)} = \frac{1}{4} \text{ Aire (ABCD)} \text{ puisque}$$

$$\text{Aire (ABI)} + \text{Aire (AIC)} = \frac{1}{2} \text{ Aire (ABCD)}.$$

De même :

$$\text{Aire (AJC)} = JC \times \frac{AD}{2} \text{ et Aire (AJD)} = DJ \times \frac{AD}{2}.$$

Puisque $JC = DJ$,

$$\text{Aire (AJC)} = \text{Aire (AJD)} = \frac{1}{4} \text{ Aire (ABCD)} \text{ puisque}$$

$$\text{Aire (AJC)} + \text{Aire (AJD)} = \frac{1}{2} \text{ Aire (ABCD)}.$$

Les quatre parts sont donc égales.

3. On a :

$$\text{Aire (EFC)} = 4 \text{ CI} \times 2 \frac{CJ}{2} = 4 \text{ CI} \times \text{CJ} = 4u.$$

$$\text{Aire (DGFE)} = \text{Aire (CGD)} - \text{Aire (EFC)} = 5 \text{ CI} \times 3 \frac{CJ}{2} - 4u = 7,5 \text{ CI} \times \text{CJ} - 4u = 7,5u - 4u = 3,5u.$$

$$\text{Aire (ABGD)} = \text{Aire (ABC)} - \text{Aire (DGC)} = 6 \text{ CI} \times 4 \frac{CJ}{2} - 7,5u = 12u - 7,5u = 4,5u.$$

Les polygones EFC , $DGFE$, et $ABGD$ n'ont pas la même aire.

● Exercice 67

Énoncé, p. 53

1. Jauges et courbes associés aux récipients.

Récipient	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
Jauge	E	C	F	A	B	D
Courbe	2	1	5	4	6	3

Toutes les coupes des récipients présentent une symétrie orthogonale par rapport à l'axe central. Les récipients sont réguliers.

- Le récipient R_2 est cylindrique. Dans ce cas la hauteur du liquide dans le récipient est proportionnelle au volume du liquide. La jauge C est la seule à présenter des graduations régulières. La courbe 1 est la seule à être la représentation graphique d'une fonction linéaire. La jauge C et la courbe 1 correspondent au récipient R_2 .

- Les récipients R_3 et R_6 ont des vues de coupe symétriques l'une de l'autre. Les jauges de ces deux récipients doivent également être symétriques l'une de l'autre. Quant à leurs courbes elles sont symétriques par rapport à une symétrie centrale.

R_3 est étroit à la base, donc au fur et à mesure du remplissage, la hauteur augmente de moins en moins vite. C'est l'inverse pour le récipient R_6 .

La jauge F et la courbe 5 correspondent au récipient R_3 .

La jauge D et la courbe 3 correspondent au récipient R_6 .

- Le récipient R_5 est large à la base, étroit au milieu, puis large vers le haut. Au fur et à mesure du remplissage, les graduations de la jauge doivent être de plus en plus espacées, puis de moins en moins espacées à partir du remplissage de la moitié du récipient. La jauge doit être symétrique par rapport à l'axe perpendiculaire à la jauge passant par son milieu. La courbe doit posséder une symétrie centrale par rapport au point central de la courbe.

La jauge B et la courbe 6 correspondent donc au récipient R_5 .

- La largeur du récipient R_4 augmente près de sa base, puis devient constante sur la grande partie de la hauteur, enfin elle diminue au sommet.

La jauge A et la courbe 4 correspondent au récipient R_4 .

- La jauge E et la courbe 2 correspondent au récipient R_1 .

2. Soit V le volume du récipient R_2 .

On a : $V = \pi \times r^2 \times h$ (r est le rayon de la base et h la hauteur du cylindre).

D'autre part, on sait que $V = 10 \text{ L} = 10 \text{ dm}^3 = 10\,000 \text{ cm}^3$ et $r = 8 \text{ cm}$.

D'où : $10\,000 = \pi \times 8^2 \times h$.

$$h = \frac{10\,000}{64\pi}.$$

La calculatrice affiche : 49,73591972.

La valeur arrondie au centimètre est la valeur la plus proche soit de la valeur à 1 cm près par défaut, soit de la valeur à 1 cm près par excès.

Donc $h \approx 50 \text{ cm}$.

3. Pour le récipient R_2 qui est cylindrique le volume d'eau est proportionnel à la hauteur.

Soit V' le volume d'eau lorsque R_2 est rempli aux deux tiers.

$$\text{On a : } V' = \frac{2}{3} \times 10 \text{ L} = \frac{20}{3} \text{ L}.$$

Au dixième de litre près $V' \approx 6,7 \text{ L}$.

4. Comparons les hauteurs d'eau dans les récipients R_2 et R_6 lorsque R_2 est rempli aux deux tiers de sa hauteur.

Sur la courbe 1 (correspondant au récipient R_2 , l'instant t_1 pour lequel le récipient est rempli aux $\frac{2}{3}$ de sa hauteur est repéré par le point d'abscisse 10 et d'ordonnée environ 6,7 :

$\frac{2}{3}$ de 15 carreaux, 10 carreaux ;

$\frac{2}{3}$ de 10 carreaux, environ 6,7 carreaux.

Sur la courbe 3 correspondant au récipient R_6 il suffit de repérer l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 10. On trouve une ordonnée d'environ 4, c'est-à-dire moins haute que pour le récipient cylindrique R_2 (R_6 est très large à la base).

En portant les courbes 1 et 3 sur le même graphique, on constate que la courbe 3 est toujours en dessous de la courbe 1, sauf bien sûr pour le point d'abscisse 15 carreaux.

• Exercice 68

Énoncé, p. 55

1. Pour parcourir les 50 premiers kilomètres à la vitesse moyenne de 25 km/h, le cycliste met 2 h.

Pour parcourir les 50 derniers kilomètres à la vitesse moyenne de 15 km/h, le cycliste met 3 h + 1/3 h, c'est-à-dire 3 h 20 min.

Le cycliste parcourt donc 100 km en 5 h 20 min.

Une vitesse moyenne de 20 km/h correspondrait à une durée de 5 h.

L'affirmation est donc fausse.

La vitesse moyenne du cycliste est 18,75 km/h, soit $100 : \frac{16}{3} = 100 \times \frac{3}{16} = \frac{300}{16} = 18,75$.

2. Soit \overline{aaa} un nombre dont les chiffres des centaines, dizaines et unités sont les mêmes avec $0 \leq a \leq 9$.

On a : $\overline{aaa} = a \times 111 = a \times 3 \times 37$. \overline{aaa} est donc un multiple de 37. Il est divisible par 37. L'affirmation est vraie.

3. 9 et 15 sont deux nombres impairs, mais ils ne sont pas premiers entre eux :

$9 = 3 \times 3$ et $15 = 3 \times 5$, donc 9 et 15 sont tous deux multiples de 3.

L'affirmation est fausse.

4. On a l'identité remarquable : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

D'où $(9 - 4\sqrt{5}) \times (9 + 4\sqrt{5}) = 9^2 - (4\sqrt{5})^2 = 81 - 80 = 1$.

Le produit des deux nombres est égal à 1 (élément neutre de la multiplication dans l'ensemble des nombres réels), donc les deux nombres sont inverses l'un de l'autre.

L'affirmation est vraie.

5. La demi-circonférence du cercle de diamètre AB (longueur du chemin en trait pointillé) a pour longueur $\frac{\pi \times AB}{2}$.

La demi-circonférence du cercle de diamètre AI a pour longueur $\frac{\pi \times AI}{2}$.

La demi-circonférence du cercle de diamètre IB a pour longueur $\frac{\pi \times IB}{2}$.

La longueur du chemin en trait plein est $\frac{\pi \times AI}{2} + \frac{\pi \times IB}{2} = \frac{\pi \times (AI + IB)}{2} = \frac{\pi \times (AB)}{2}$.

La longueur du chemin en trait plein est égale à la longueur du chemin en trait pointillé.

L'affirmation est vraie.

6. La population des bactéries augmente de 20 % toutes les heures.

Soit N la population initiale des bactéries.

Au bout d'une heure on a : $N_1 = 1,2 \times N$.

Au bout de deux heures on a : $N_2 = 1,2^2 \times N$.

Au bout de cinq heures, on a : $N_5 = 1,2^5 \times N = 2,48832 \times N \neq 2 \times N$.

Au bout de cinq heures, la population a donc plus que doublé.

L'affirmation est fausse.

● Exercice 69

Énoncé, p. 55

1. 9 personnes ont une moyenne d'âge de 25 ans.

11 autres personnes ont une moyenne d'âge de 45 ans.

Calculons la moyenne d'âge de ces 20 personnes si on les réunit.

$$M = \frac{9 \times 25 + 11 \times 45}{20} = \frac{720}{20} = 36 \text{ ans}$$

L'affirmation est donc fausse.

Pour que la nouvelle moyenne d'âge soit de 35 ans, il aurait fallu que le nombre de personnes du premier groupe soit égal au nombre de personnes du second (10 et 10 pour un groupe de 20 personnes).

2. Maxime a 12 possibilités de s'habiller (3×4).

Parmi ces possibilités, il en a une de s'habiller tout en rouge et une de s'habiller tout en bleu, donc 2 possibilités sur 12 de s'habiller de la même couleur.

2 possibilités sur 12 correspondent à une possibilité sur 6, donc $\frac{1}{6}$.
L'affirmation est donc vraie.

3. Les deux angles \widehat{ABC} et \widehat{ADC} sont inscrits dans le cercle et interceptent le même arc AC .
Ils ont donc même mesure :

$$\text{mes}\widehat{ABC} = \text{mes}\widehat{ADC} = 50^\circ$$

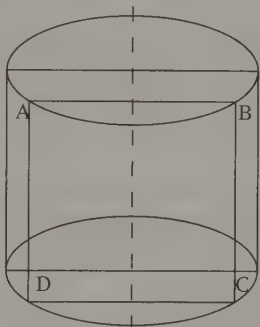
$$\text{mes}\widehat{ABC} + \text{mes}\widehat{BCA} = 50^\circ + 40^\circ = 90^\circ$$

Dans le triangle ABC on a : $\text{mes}\widehat{BAC} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Le triangle ABC est donc rectangle en A .

L'affirmation est vraie.

4. Le diamètre du cylindre est 10 cm. Si les intersections d'un tel plan parallèle à l'axe du cylindre avec les disques supérieur et inférieur du cylindre ont pour mesure 8 cm, la section sera un carré de 8 cm de côté puisque la hauteur du cylindre a pour mesure 8 cm.



L'affirmation est donc vraie.

5. En ouvrant le robinet A , la cuve pleine se vide en 7 heures. Par ce robinet la cuve se vide de $\frac{1}{7}$ de son volume en une heure.

En ouvrant le robinet B , la cuve pleine se vide en 3 heures. Par ce robinet la cuve se vide de $\frac{1}{3}$ de son volume en une heure. Si l'on ouvre les deux robinets, la cuve se vide de

$\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3}\right)$ de son volume.

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{3}{21} + \frac{7}{21} = \frac{10}{21}$$

En une heure, la cuve se vide de $\frac{10}{21}$ de son volume.

La cuve se vide donc en $\frac{21}{10}$ h ou 2 h + $\frac{1}{10}$ h ou 2 heures et 6 minutes.

L'affirmation est donc vraie.

6. Le graphique est la représentation graphique d'une fonction linéaire, donc d'une situation de proportionnalité (droite passant par l'origine).

Lors du remplissage, pour une hauteur donnée, le volume de liquide supplémentaire n'est pas le même. Pour une hauteur donnée, le volume est plus grand à mi-hauteur de la carafe sphérique. Au début du remplissage, la même hauteur donne un plus faible volume au fond de la carafe.

Le volume n'est donc pas proportionnel à la hauteur.

L'affirmation est donc fausse.

● Exercice 70

1. Remarque : Il n'est pas indiqué de quel ensemble de nombres il s'agit.

Supposons donc qu'il s'agit de l'ensemble des nombres réels.

Dans ce cas, on a $\sqrt{0,81} = 0,9$ car $0,9^2 = 0,81$.

$0,9 > 0,81$ donc la racine carrée de $0,81$ est supérieure à ce nombre.

L'affirmation 1 est donc fausse.

Si l'on considère les racines carrées des entiers naturels, cette affirmation serait vraie, mais les racines carrées des entiers naturels sont à rechercher dans l'ensemble des nombres réels.

2. La somme des chiffres du nombre du numérateur est égale à 30.

30 est un multiple de 3, donc le numérateur est également un multiple de 3.

La somme des chiffres du nombre du dénominateur est égale à 39.

39 est un multiple de 3, donc le dénominateur est également un multiple de 3.

Les deux nombres étant multiples de 3, la fraction n'est pas irréductible.

L'affirmation 2 est donc fausse.

3. Dans le sachet, il y a 55 chocolats au total, et parmi eux 20 chocolats blancs.

La probabilité de tirer un chocolat blanc parmi les 55 chocolats est donc $\frac{20}{55}$.

On a $\frac{20}{55} = \frac{4}{11}$ et $\frac{4}{11} \neq \frac{4}{7}$.

L'affirmation 3 est donc fausse.

4. En 2008, le nombre de bagages perdus était de 32,8 millions.

En 2009, le nombre de bagages perdus était de 25 millions.

La diminution du nombre de bagages perdus entre 2008 et 2009 est de 23,8 %.

En effet, $1 - \frac{25}{32,8} \approx 1 - 0,762 = 0,238$.

Par contre, en prenant comme nombre référence le nombre de bagages perdus en 2009, le pourcentage supplémentaire de bagages perdus en 2008 est de 31,2 %.

En effet, $\frac{32,8}{25} \approx 1,312 \approx 1 + 0,312$.

L'affirmation 4 est donc fausse.

Remarque : Parler d'une augmentation du nombre de bagages perdus en remontant le temps est pour le moins curieux ! Il est évidemment plus pertinent de parler de diminution entre 2008 et 2009.

5. Le nombre cherché est un multiple de 545.

Il existe deux nombres multiples de 545 compris entre 11 000 et 12 000 : 11 445 et 11 990.

En effet, $545 \times 21 = 11 445$ et $545 \times 22 = 11 990$.

$11 445 = 21 \times 545 = 3 \times 7 \times 545$ et $2 180 = 2^2 \times 545$.

545 est donc bien le PGCD de 11 445 et de 2 180.

$11 990 = 2 \times 11 \times 545$ et $2 180 = 2^2 \times 545$. Dans ce cas, le PGCD des deux nombres est 2×545 , c'est-à-dire 1 090.

11 990 ne convient donc pas.

L'affirmation 5 est donc vraie, le nombre cherché est 11 445.

6. Remarque : Il convient évidemment d'interpréter que la donnée des masses des deux boules concerne les boules avant d'être peintes.

Soit r le rayon de la petite boule et m sa masse.

Soit R le rayon de la grosse boule et M sa masse.

Le volume de la petite boule est $v = 4/3 \times \pi \times r^3$.

Le volume de la grosse boule est $V = 4/3 \times \pi \times R^3$.

$$\frac{v}{V} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{1}{8}$$

V est 8 fois plus grand que v .

Donc R est 2 fois plus grand que r .

$$\text{On a donc } \frac{r}{R} = \frac{1}{2}.$$

La quantité de peinture est proportionnelle à la surface de la sphère.

La mesure de la surface de la grosse boule est 4 fois plus grande que celle de la petite boule car :

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{4}.$$

S'il faut 900 g de peinture pour recouvrir la grosse boule, il en faut $\frac{900}{4}$ g pour recouvrir la petite, soit 225 g et non 112,5 g.

L'affirmation 6 est donc fausse.

● Exercice 71

Énoncé, p. 57

1. Cette affirmation est fausse.

Voici un contre-exemple :

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \text{ et } \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5. \text{ Donc } \sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{25}.$$

2. Cette affirmation est vraie.

On a :

(1) En effectuant la somme des carrés des deux premiers nombres, on obtient :

$$a^2 + \frac{1}{4}(a^2 - 1)^2 = a^2 + \frac{1}{4}(a^4 - 2a^2 + 1) = \frac{1}{4}(a^4 + 2a^2 + 1).$$

(2) En développant le carré du troisième nombre, on obtient $\frac{1}{4}(a^2 + 1)^2 = \frac{1}{4}(a^4 + 2a^2 + 1)$.

La somme des carrés des deux premiers nombres est égale au carré du troisième nombre.

Les mesures des côtés du triangle vérifient donc le théorème de Pythagore et le triangle est rectangle.

3. On obtient quatre possibilités équiprobables : Pile/Pile ; Pile/Face ; Face/Pile ; Face/Face.

La probabilité d'obtenir Pile à l'un des lancers et Face à l'autre est donc $\frac{2}{4}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$, donc l'affirmation est fausse.

4. Un article a le même prix dans deux magasins A et B. Soit x ce prix.

Dans le magasin A, le prix subit une baisse de 20 %, puis une hausse de 20 %.

Le prix final est alors $x \times 0,8 \times 1,2 = 0,96x$.

Dans le magasin B, le prix subit une hausse de 20 %, puis une baisse de 20 %.

Le prix final est alors $x \times 1,2 \times 0,8 = 0,96x$.

Le prix sera de nouveau le même dans les deux magasins.

L'affirmation 4 est donc fausse.

5. Soit l la longueur du côté du carré.

Le périmètre du carré est $p = 4l$.

Calculons le périmètre P du carré après augmentation de la longueur de ses côtés :

$$P = 4 \times (1,05l) = 4,2l = 4l \times 1,05 = 1,05p.$$

Le périmètre du carré est augmenté de 5 % également et non de 20 %.

L'affirmation 5 est donc fausse.

● Exercice 72

1. Soit p un prix donné de départ. Pour une augmentation de 10 % par an, le prix P au bout de 5 ans sera $P = p \times (1,10)^5 \approx p \times 1,615$.

Au bout de 5 ans, l'augmentation est d'environ de 61,5 %.

L'affirmation 1 est donc fausse.

2. Cette question est formulée dans un langage courant. On suppose donc qu'il s'agit d'une même unité volumétrique pour l'eau et le sirop.

Le rapport entre 5 et 9 est égal au rapport entre 20 et 36.

Le rapport entre 4 et 7 est égal au rapport entre 20 et 35.

Le second mélange est donc plus sucré que le premier car $\frac{20}{35} > \frac{20}{36}$.

L'affirmation 2 est donc fausse.

3. La somme des probabilités est égale à 1.

$$\text{Donc } \frac{1}{4} + p + p + \frac{3}{8} + p = 1.$$

$$\text{On a } 3p = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} \text{ et } p = \frac{1}{8}.$$

La probabilité d'obtenir un nombre pair est donc $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

On peut vérifier que la probabilité d'obtenir un nombre impair est également $\frac{1}{2}$.

$$\text{En effet, on a } \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

L'affirmation 3 est donc vraie.

4. Soit n et $n + 1$ deux nombres entiers consécutifs.

$$\text{On a } (n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 = n + (n + 1).$$

La différence entre les carrés de deux nombres entiers consécutifs est bien égale à la somme de ces deux nombres.

L'affirmation 4 est donc vraie.

5. Soit c la mesure de l'arête d'un cube. Son volume est dans ce cas $v = c^3$.

Si l'on augmente l'arête de 10 %, le nouveau volume V est :

$$V = (1,1c)^3 = 1,1^3 c^3 = 1,331 c^3.$$

Le volume augmente donc de 33,1 %.

L'affirmation 5 est donc vraie.

6. Supposons que le skieur descend à une vitesse moyenne de 60 km/h sans la technique de « l'œuf ».

Avec cette technique, le skieur augmenterait sa vitesse de 50 %. Sa nouvelle vitesse moyenne serait alors de 90 km/h ($60 \times 1,5 = 90$).

L'affirmation 6 est donc fausse.

7. Le triangle ACB est rectangle en C , car \widehat{ACB} intercepte le diamètre $[AB]$ du cercle.

On considère les deux triangles ACB et AHC .

$$\text{On a } \widehat{HAC} = \widehat{BAC}, \widehat{AHC} = \widehat{ACB} = 90^\circ.$$

Les deux triangles ayant déjà deux angles différents de même mesure, ils ont leurs trois angles égaux chacun à chacun. Les deux triangles sont semblables et les mesures des côtés de l'un sont proportionnelles aux mesures des côtés correspondants de l'autre.

$$\text{On a donc : } \frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{HC}{CB}.$$

De l'égalité des deux premiers rapports, on en déduit que $AC^2 = AH \times AB = 1 \times n$.

D'où $AC = \sqrt{n}$.

L'affirmation 7 est donc vraie.

● Exercice 73

Énoncé, p. 58

1. Remarque préalable : La question n'est pas rigoureusement posée. Le terme « à l'échelle » ne veut rien dire, car elle n'est pas indiquée. Voici une façon plus rigoureuse de poser la question : La figure ci-contre est composée d'un triangle et de trois carrés. Chacun des côtés du triangle est côté de l'un des carrés. La valeur des aires de chaque carré est indiquée sur la figure.

Affirmation 1 : Le triangle est rectangle.

Si le triangle était rectangle, d'après le théorème de Pythagore, la somme des aires de deux de ces carrés serait égale à l'aire du troisième carré.

Or : $32 + 64 = 96 \neq 100$.

La longueur des côtés d'un carré d'aire 100 cm^2 est 10 cm .

La longueur des côtés d'un carré d'aire 64 cm^2 est 8 cm .

La longueur des côtés d'un carré d'aire 32 cm^2 est $\sqrt{16 \times 2} \text{ cm}$, c'est-à-dire $4\sqrt{2} \text{ cm}$.

Pour que le triangle soit rectangle, il faudrait par exemple que les côtés mesurent 10 cm , 8 cm et 6 cm . Les aires des carrés seraient alors respectivement 100 cm^2 , 64 cm^2 , 36 cm^2 , avec $64 + 36 = 100$.

L'affirmation 1 est donc fautive.

2. 18 est multiple de 6 (car $18 = 3 \times 6$) et de 9 (car $18 = 2 \times 9$), mais n'est pas multiple de 54. Ce contre-exemple suffit à invalider l'affirmation.

L'affirmation 2 est donc fautive.

3. Soit x et y les deux nombres. On a $x + y = 400$.

Soit $X = x + 3$ et $Y = y + 3$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } X \times Y &= (x + 3) \times (y + 3) \\ &= xy + 3x + 3y + 9 \\ &= xy + 3(x + y) + 9 \\ &= xy + 3 \times 400 + 9 \\ &= xy + 1\,209. \end{aligned}$$

Le produit augmente donc de 1 209.

L'affirmation 3 est donc vraie.

4. L'agriculteur a des réserves pour alimenter 8 vaches pendant 20 jours.

Ces réserves peuvent être assimilées à 160 rations/jour.

On suppose que la situation proposée relève de la proportionnalité.

Pour nourrir deux vaches de plus pendant 18 jours, il aurait besoin de disposer de 180 rations/jour.

Avec 160 rations/jour, il peut nourrir 10 vaches pendant 16 jours et non 18.

L'affirmation 4 est donc fautive.

5. La vue de dessus permet d'affirmer que ce solide est composé de 6 cubes au premier niveau.

La vue de face et la vue de droite permettent d'affirmer qu'il y a deux niveaux seulement.

La vue de face indique qu'il y a au moins 1 cube posé sur la rangée du milieu composée de 3 cubes que l'on perçoit sur la vue de dessus.

La vue de droite permet d'affirmer qu'il n'y a qu'un seul cube posé sur cette rangée.

Il n'y a donc qu'un cube au deuxième niveau, soit sept cubes en tout.

L'affirmation 5 est donc vraie.

6. On a : $(8 \times 7) + 3 \times 5 = 56 + 15 = 71$ (dans ce cas les parenthèses n'influent pas sur le calcul, la multiplication étant prioritaire sur l'addition).

$$8 \times (7 + 3) \times 5 = 8 \times 10 \times 5 = 400$$

$$8 \times (7 + 3 \times 5) = 8 \times (7 + 15) = 8 \times 22 = 176$$

$$(8 \times 7 + 3) \times 5 = (56 + 3) \times 5 = 59 \times 5 = 295$$

71, 176, 295 et 400 sont donc des résultats possibles.

Est-il possible d'obtenir 283 ?

Si l'addition est réalisée en dernier, on est ramené au premier cas, les parenthèses sont superflues et l'on obtient 71 comme résultat.

Pour obtenir 283, il faudrait que ce nombre soit le résultat d'une multiplication, or 283 est un nombre premier. La seule écriture multiplicative de 283 est 283×1 .

283 n'est donc pas un résultat possible.

L'affirmation 6 est donc fausse.

● Exercice 74

Énoncé, p. 59

1. $2^n + 2^{n+1} + 2^n + 2 = 2^n + 2 \times 2^n + 4 \times 2^n = (1 + 2 + 4) \times 2^n = 7 \times 2^n$

Pour tout entier n , le nombre $(2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2})$ est donc multiple de 7.

L'affirmation 1 est donc vraie.

2. Chaque item du QCM comportant 3 choix possibles, en répondant au hasard, Martin a une chance sur trois de donner la bonne réponse à chacun d'entre eux.

La probabilité pour que plusieurs événements indépendants soient réalisés est le produit des probabilités de chacun des événements.

La probabilité pour que Martin donne trois bonnes réponses en répondant au hasard est

$$\text{donc } \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$

L'affirmation 2 est donc vraie.

Pour chaque item, la probabilité pour qu'une réponse soit fausse est $\frac{2}{3}$ (deux chances sur trois).

$$\text{La probabilité que toutes les réponses soient fausses est } \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \neq \frac{1}{3}.$$

L'affirmation 3 est donc fausse.

3. Soit A l'aire d'un disque de rayon r . On a $A = \pi \times r^2$.

Si l'on double le rayon du disque, on obtient une aire $A' = \pi \times (2r)^2 = 4 \pi \times r^2 = 4 \times A$.

Si l'on double le rayon d'un disque, on quadruple l'aire initiale.

Soit B l'aire d'un carré dont la longueur du côté est c . On a $B = c^2$.

Si l'on double la longueur du côté, l'aire du nouveau carré est $B' = (2c)^2 = 4c^2 = 4 \times B$.

Si l'on double la longueur du côté d'un carré, on quadruple l'aire initiale.

De la même façon, si par exemple l'on quintuple le rayon d'un disque, on multiplie par 25 l'aire initiale et si l'on quintuple la longueur du côté d'un carré, on obtient un carré dont l'aire est 25 fois supérieure.

Si A est l'aire du disque central, les aires des cinq disques concentriques sont respectivement : $A, 4A, 9A, 16A, 25A$.

On peut en déduire que l'aire grisée de la première figure est égale à : $25A - 16A = 9A$.

De la même façon, si B est l'aire du carré central, les aires des différents carrés sont respectivement : $B, 4B, 9B, 16B, 25B$.

On peut en déduire que l'aire grisée de la seconde figure est égale à : $25B - 16B = 9B$.

Le rapport entre l'aire du disque central et l'aire grisée de la figure de gauche est donc :

$$\frac{A}{9A} = \frac{1}{9}.$$

De la même façon, le rapport entre l'aire du carré central et l'aire grisée est : $\frac{B}{9B} = \frac{1}{9}$.
L'affirmation 4 est donc vraie.

● Exercice 75

Énoncé, p. 60

1. Un prisme droit à base triangulaire possède 5 faces et 9 arêtes. Ce contre-exemple suffit pour contredire l'affirmation.

L'affirmation 1 est donc fausse.

2. Les deux triangles ont le côté $[AB]$ en commun.

Les droites (DC) et (AB) sont parallèles. Si l'on appelle H le pied de la hauteur issue de C du triangle ACB , on a $AD = CH$.

$$\text{Aire } (ABD) = \frac{AB \times AD}{2} \text{ et Aire } (ACB) = \frac{AB \times CH}{2}.$$

Donc Aire $(ABD) = \text{Aire } (ACB)$.

L'affirmation 2 est donc vraie.

3. Le volume du pavé initial est $V = L \times l \times h$.

Le volume du pavé modifié est : $V' = 1,5L \times l \times 2h = 3L \times l \times h = 3V$.

Le volume du pavé est donc multiplié par 3 et non par 4.

L'affirmation 3 est donc fausse.

4. La somme des tailles des filles est en cm : $14 \times 162 = 2\,268$

La somme des tailles des garçons est en cm : $10 \times 174 = 1\,740$

La somme des tailles des 24 élèves est en cm : $2\,268 + 1\,740 = 4\,008$

La taille moyenne des élèves de la classe est en cm : $\frac{4\,008}{24} = 167$.

L'affirmation 4 est donc vraie.

5. Soit n et $n + 2$ deux nombres pairs consécutifs.

n est pair, il existe un entier k non nul tel que $n = 2k$ et $n + 2 = 2k + 2$.

$$n \times (n + 2) = 2k \times (2k + 2) = 4k^2 + 4k = 4(k^2 + k) = 4 \times k \times (k + 1).$$

k et $k + 1$ étant deux entiers consécutifs, l'un d'entre eux est pair, donc il existe un entier K tel que : $k(k + 1) = 2K$.

Donc, il existe un entier K tel que : $n \times (n + 1) = 4 \times 2K = 8K$.

Le produit de deux nombres pairs consécutifs est donc toujours un multiple de 8.

L'affirmation 5 est donc vraie.

■ Partie 3 : Analyse de supports d'enseignement

● Exercice 76

Énoncé, p. 62

1. Cet exercice peut avoir été donné au CP pour aborder la numération décimale.

La situation fait apparaître la nécessité de faire des paquets de dix pour énumérer tous les éléments de la collection sans en oublier et sans les compter deux fois, et pour connaître le nombre de dizaines et d'unités afin de déterminer le nombre d'éléments.

Il s'agit également de faire admettre aux élèves l'inefficacité du comptage des éléments un à un.

Cet exercice peut également avoir été donné au CE1 dans le cadre d'une révision de la numération.

2. Analyse des productions d'élèves.

	Procédures mises en œuvre	Erreurs commises	Hypothèses sur les erreurs
Théo	Théo cherche à déterminer le nombre de coccinelles en faisant des paquets de dix.	Théo commet des erreurs en entourant les coccinelles pour former des paquets de dix.	Théo a des difficultés à entourer dix éléments dans un même ensemble. La difficulté consiste à coordonner le geste avec le comptage de dix éléments. Puis il perd de vue la consigne et confond nombre de paquets et nombre de coccinelles. Il se trompe dans l'énumération des paquets de dix.
Maxime	Maxime veut établir le nombre de coccinelles par un comptage un à un. Il a l'idée de numéroter les coccinelles pour marquer chaque coccinelle prise en compte dans le comptage et contrôler en même temps la suite de la comptine numérique.	Le début de la numérotation montre l'oubli de certaines coccinelles.	Le comptage un à un est fastidieux. Maxime capitule devant cette difficulté.
Hugo	Hugo fait des paquets de dix pour énumérer et déterminer le nombre de coccinelles.	Hugo se trompe plusieurs fois dans la détermination des paquets de dix : certains paquets comportent 9 ou 11 coccinelles. 63 est la bonne réponse, mais elle est obtenue par le hasard des compensations d'erreurs successives.	Même difficulté que chez Théo pour coordonner le geste et le comptage des éléments.

	Procédures mises en œuvre	Erreurs commises	Hypothèses sur les erreurs
Andréa	Andréa compte les coccinelles « dans sa tête » en cochant les coccinelles comptées.	Elle commet une erreur en trouvant un résultat très proche.	Dans le comptage un à un, la difficulté consiste à ne pas perdre le fil de la comptine numérique, à toujours se souvenir du dernier nombre énuméré et à trouver le successeur lors du repérage suivant.

3. a) Dans la situation précédente, la procédure mise en œuvre par Maxime est le comptage un à un. Même s'il se trompe, cette procédure aurait pu aboutir.

La nouvelle situation est proposée pour obliger Maxime à effectuer des paquets de 9 coccinelles. Dans cette situation, le comptage un à un n'est opérant que jusqu'à 9.

b) Une procédure correcte consiste à faire des paquets de 9 coccinelles (3 fois 9 coccinelles) et il reste une coccinelle. On peut donc commander « 3 paquets de 9 coccinelles » à la marionnette et une coccinelle séparée.

Sur le plan mathématique, il s'agit de déterminer le nombre de coccinelles en base 9 :
 (28) base dix = (31) base neuf.

● Exercice 77

Énoncé, p. 64

1. Cycle visé

Les cartes déterminent des nombres inférieurs à 1 000. En revanche, le calcul du nombre de points met en jeu des nombres supérieurs à 1 000.

Ce jeu peut donc être proposé à partir de la fin du cycle 2. Dans ce cas, la somme des points pourra être déterminée par utilisation de la calculatrice, d'autant que l'objectif principal concerne la mobilisation de connaissances concernant la numération.

Ce jeu peut, bien sûr, être proposé au début du cycle 3. Il pourrait être étendu tout au long de ce cycle avec de plus grands nombres.

2. Compétences mobilisées

• Au cycle 2, les compétences du programme mobilisées sont :

– Comprendre et déterminer la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture décimale d'un nombre.

– Associer les désignations chiffrées et orales des nombres.

– Comparer, ranger, encadrer des nombres.

• Au cycle 3, les compétences du programme mobilisées sont :

– Déterminer la valeur de chacun des chiffres composant l'écriture d'un nombre entier en fonction de sa position.

– Donner diverses décompositions d'un nombre en utilisant 10, 100, 1 000... et retrouver l'écriture d'un nombre à partir d'une telle décomposition.

– Associer la désignation orale et la désignation écrite (en chiffres) pour des nombres jusqu'à la classe des millions.

– Comparer des nombres, les ranger par ordre croissant ou décroissant, les encadrer par deux dizaines consécutives, etc.

On peut également citer des compétences liées au domaine du calcul :

– Additionner ou soustraire des dizaines entières, ou des centaines entières.

– Multiplier ou diviser un nombre entier par 10, 100, 1 000.

3. Connaissances nécessaires pour trouver chaque nombre

• Carte B1 : l'élève doit savoir retrouver les nombres compris entre 738 et 742 et déterminer, parmi ces nombres, celui qui a 0 pour chiffre des unités.

- Carte B2 : pour calculer la somme, l'élève doit savoir ajouter la dizaine de « 13 » aux six dizaines de « 60 ». Cette carte permet de travailler la relation entre désignation orale et désignation écrite : « soixante-treize » correspond à « 60 + 13 ».
- Carte B3 : l'élève doit savoir recomposer mentalement un nombre à partir de la donnée dans le désordre des chiffres des unités, des dizaines et des centaines.
- Carte B4 : soit l'élève dispose d'un savoir-faire et il effectue le produit 6×2 puis « ajoute un zéro », soit il met en œuvre le savoir « 20, c'est 2 dizaines ; 6 fois 2 dizaines, c'est 12 dizaines ; donc 120 ».
- Carte V1 : l'élève doit retrouver mentalement l'équivalence entre 80 dizaines et 800. 0 est le chiffre des dizaines du nombre et le chiffre des unités est 0.
- Carte V2 : l'élève peut d'abord imaginer le dernier chiffre 4 (celui des unités), puis placer le nombre de dizaines 90, pour retrouver le nombre 904.

Une erreur possible consiste à ajouter 4 au nombre de dizaines (94). Le fait que le nombre doit posséder trois chiffres peut diminuer le risque d'erreurs.

- Carte V3 : le plus grand des nombres à deux chiffres s'obtient en utilisant deux fois le chiffre 9.
- Carte V4 : deux types d'erreurs sont possibles.

L'élève peut ajouter le nombre de dizaines au nombre d'unités, mais il obtient, dans ce cas, un nombre à deux chiffres (en contradiction avec une des informations de la carte).

L'élève peut également placer le chiffre des unités avant le nombre de dizaines.

La relation entre chiffre et nombre doit donc être bien maîtrisée.

- Carte R1 : pour retrouver le nombre qui précède, l'élève doit se focaliser sur le nombre d'unités et non le nombre de dizaines. 59 vient juste avant 60, donc 359 précède 360. Une erreur possible consiste à donner le nombre de dizaines qui précède : 350.
- Carte R2 : l'élève doit savoir recomposer mentalement un nombre à partir de la donnée dans le désordre des différents chiffres qui le composent.
- Carte R3 : le savoir en jeu consiste à savoir établir l'équivalence entre « 20 » et « 2 dizaines » et « 10 » et « dizaine ».
- Carte R4 : l'élève doit savoir que « 2×100 » correspond à 2 centaines (car 100, c'est 1 centaine) et que « 8×10 » correspond à 8 dizaines (car 10, c'est 1 dizaine). Il aurait été préférable de proposer une écriture du type $(8 \times 10) + 3 + (2 \times 100)$, afin de se placer dans un cas moins stéréotypé.

4. Objectif principal de l'apprentissage

Dans le cadre d'un jeu qui a pour but de motiver les élèves et qui ne les expose pas à une évaluation par l'enseignant, l'objectif d'apprentissage consiste à permettre le réinvestissement de plusieurs connaissances concernant la numération.

Ce jeu peut être considéré comme une activité structurante (mise en relation de différentes écritures d'un nombre et de leurs significations).

● Exercice 78

Énoncé, p. 65

1. L'annexe 3 indique les compétences à acquérir à la fin du cycle 3 concernant la connaissance des fractions et des décimaux, ainsi que les grandeurs et leurs mesures.

La détermination des aires des pièces en fonction de l'aire de U fait intervenir des fractions simples (demis et quarts).

On peut donc citer les compétences suivantes :

- « Utiliser, dans des cas simples, des fractions ou des sommes d'entiers et de fractions pour coder des mesures d'aires. »
- « Écrire une fraction sous forme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. »
- « Connaître et utiliser les relations entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$. »

Concernant les aires on peut citer les compétences suivantes (domaine des grandeurs et mesure) :

« Classer et ranger des surfaces selon leurs aires... »

« Mesurer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence (dont l'aire est prise pour unité). »

2. On peut distinguer quatre phases dans le déroulement des activités.

- La première phase consiste à s'appropriier le matériel : le découpage des pièces par les élèves favorise cet objectif. Suite au découpage le maître collecte les remarques des élèves sur les pièces et leur agencement.

Puis il formule la première question à laquelle il faudra répondre par la suite.

- La deuxième phase est une phase de recherche par groupe de deux élèves. Il s'agit pour les élèves de répondre aux trois questions de la fiche.

- Cette phase permet d'élaborer des procédures et de formuler des réponses. Travailler par deux permet à la fois la collaboration et la confrontation pour la construction des démarches, la mise en œuvre des procédures et la production des résultats.

- La troisième phase consiste pour chaque groupe à communiquer démarches et résultats, donc à expliciter ce que l'on a trouvé. Elle permet de confronter la validité des procédures et de mettre en évidence toutes les procédures possibles.

- La quatrième phase permet aux élèves de se mettre d'accord sur les démarches et les résultats (validation), de les structurer avec l'aide du maître.

3. a) La pièce A est superposable à la pièce U. Son aire est 1U.

b) La pièce B peut être recouverte exactement par deux pièces U (par exemple A et U, ou par report de la pièce U) et la moitié de la surface de U (il suffit de plier en deux la pièce U).

Si l'on plie en deux la pièce U, la pièce B peut être également recouverte exactement par 5 fois cette moitié de la pièce U.

La pièce B a pour aire $(2U + \frac{1}{2}U)$ ou $5 \times \frac{1}{2}U$.

c) La pièce D nécessite de plier en quatre la pièce U. Elle peut être recouverte par trois fois cette nouvelle pièce dont l'aire vaut $\frac{1}{4}U$.

La pièce D a pour aire $3 \times \frac{1}{4}U$.

On peut également recouvrir la pièce D par la moitié de la pièce U et un quart de la pièce U.

L'aire de la pièce D peut s'exprimer sous la forme : $\frac{1}{2}U + \frac{1}{4}U$.

En superposant la pièce D à la pièce U on s'aperçoit que l'aire de D vaut $1U - \frac{1}{4}U$.

4. Les aires des pièces B et E de formes différentes sont toutes deux égales à $\frac{5}{2}U$.

B et E ont donc même aire.

5. Le maître pourrait demander aux élèves de reporter bout à bout sur une demi-droite les longueurs des côtés de la pièce B, puis de la même façon les longueurs des côtés de la pièce E afin de constater que les deux pièces n'ont pas le même périmètre.

On pourrait également utiliser le compas pour reporter les longueurs des côtés.

● Exercice 79

Énoncé, p. 69

1. Capacité évaluée

La capacité que permet d'évaluer chacun des items 13, 15 et 26 est : « savoir passer, dans des cas simples, pour un nombre décimal, d'une écriture à virgule à une écriture fractionnaire (fractions décimales) et réciproquement ».

Au CM2, cette capacité est travaillée dans le but de construire le sens des nombres décimaux en permettant aux élèves d'interpréter la signification des chiffres d'un nombre décimal dans les écritures décimales à virgule.

$\frac{84}{10}$ se lit « 84 dixièmes », donc 4 est le chiffre des dixièmes et ce nombre s'écrit 8,4. 8,4 c'est 8 unités et 4 dixièmes, et ce nombre peut également s'écrire sous la forme $8 + \frac{4}{10}$ (partie entière et partie décimale).

C'est donc la connaissance « connaître la valeur de chacun des chiffres composant une écriture à virgule, en fonction de sa position » qui est évaluée au travers de la capacité précédente.

2. Analyse des erreurs

• Exercice 13

L'élève entoure $\frac{80}{4}$. On peut supposer que, ne donnant pas de signification pertinente à l'écriture 80,4, il attribue la même signification à la virgule et au trait de fraction. Pour lui, dans 80,4, la virgule sépare le nombre en deux entiers, et dans $\frac{80}{4}$ c'est le trait de fraction qui joue ce rôle.

• Exercice 15

L'élève entoure 98,100. L'élève ne donne pas non plus de signification pertinente à l'écriture fractionnaire $96 + \frac{2}{100}$. Il ajoute 96 et 2 pour obtenir la partie entière et place le nombre 100 situé au dénominateur après la virgule. Trait de fraction et virgule ont encore pour lui une signification de séparation.

• Exercice 26

L'élève entoure 724,100 en appliquant la même règle erronée de séparation de la virgule. Dans l'écriture $\frac{724}{100}$ le trait de fraction a pour lui cette fonction de séparation.

• Exercice 35

L'élève applique toujours la même règle pour interpréter les écritures 1,4 et $\frac{1}{4}$: même fonction de séparation du trait de fraction et de la virgule.

3. Avantage et inconvénient du tableau de numération.

L'avantage du tableau s'il est correctement utilisé par les élèves est d'attribuer une signification à chacun des chiffres du nombre décimal (à condition de ne placer qu'un chiffre par colonne). Toutefois, dans la pratique, plusieurs inconvénients apparaissent.

Si le nombre à placer dans le tableau est sous forme d'une écriture à virgule, voici quelques inconvénients et erreurs possibles :

– où placer la virgule ?

– ne pas placer plusieurs nombres dans la même case ;

– difficulté à lire le nombre de (par exemple pour le nombre 724,100 il y a 724 unités et 100 millièmes).

Si le nombre à placer dans le tableau est sous forme fractionnaire, la difficulté principale consiste à ne placer qu'un chiffre par colonne. Par exemple, pour $\frac{724}{100}$ l'élève doit passer par l'oral « il y a 724 centièmes », déterminer le chiffre des centièmes « 4 », placer ce chiffre dans la colonne des centièmes, puis 2 dans la colonne des dixièmes et 7 dans la colonne des unités, et enfin découper le nombre en unités et centièmes « 7,24 ».

Le tableau aide donc à donner la signification de chaque chiffre d'un nombre décimal écrit sous sa forme décimale à virgule, mais il introduit de nouvelles séparations entre les chiffres qui peuvent à leur tour être difficilement interprétables par les élèves.

4. Papier millimétré

a) La connaissance relative à cet exercice est « connaître ou savoir utiliser dans des situations concrètes (contenance, masse, longueur, monnaie, durée) les écritures fractionnaires

et décimales de certains nombres : $0,1$ et $\frac{1}{10}$; $0,01$ et $\frac{1}{100}$; $0,5$ et $\frac{1}{2}$; $0,25$ et $\frac{1}{4}$; $0,75$ et $\frac{3}{4}$ ».

b) Le segment $[AB]$ mesure 10 cm.

Pour tracer le segment attendu, l'élève peut partager le segment de longueur 10 cm en quatre segments de même longueur. Par ailleurs, le quotient de 10 divisé par 4 est 2 et il reste 2 . Pour diviser un segment de 2 cm en quatre segments de même longueur, l'élève peut remarquer que 2 cm c'est 4 fois $\frac{1}{2}$ cm.

Le segment à tracer doit donc mesurer 2 cm et $\frac{1}{2}$ cm. Il est aisé de vérifier que 4 fois cette mesure donne 10 cm.

Le papier millimétré permet de constater que $\frac{1}{2}$ cm c'est 5 mm, donc $0,5$ cm.

$(2 + \frac{1}{2})$ c'est $2,5$.

● Exercice 80

Énoncé, p. 73

1. Activité préparatoire

a) Procédures mobilisables.

Il y a deux procédures mobilisables avec l'emploi de la calculatrice.

• La première procédure consiste à effectuer des additions répétées.

Par exemple pour $23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23$, l'élève doit effectuer cinq additions (et non six). La difficulté principale consiste donc à contrôler le nombre d'opérations. Le principal avantage est de conserver la signification du produit comme codant une addition répétée.

• La seconde procédure consiste à compter le nombre de termes et à taper une multiplication. L'avantage réside dans la rapidité et la simplicité de la mise en œuvre de la procédure. L'inconvénient peut résider dans la perte de sens si l'élève n'utilise que sa calculatrice pour calculer des produits. C'est pourquoi dans la suite de l'apprentissage, le maître doit envisager de multiples situations qui permettront à l'élève de construire le sens de cette opération, c'est-à-dire d'établir les relations entre toutes ses propriétés (par exemple le fait que $7 \times 2 = 2 \times 7$ doit permettre à l'élève de se rendre compte qu'il est plus facile de calculer mentalement 2 fois 7 que 7 fois 2 , etc.).

b) Avec la calculatrice, effectuer des additions répétées est une procédure longue et peu fiable. Par contre, effectuer un produit est simple et rapide. La multiplication est donc une nouvelle opération qui s'impose. L'élève pourra en conclure l'intérêt de son étude qui ne s'effectuera pas bien sûr uniquement avec une calculatrice.

2. Une procédure possible pour calculer $25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25$ consiste à regrouper par 4 les termes de cette somme, car $25 + 25 + 25 + 25 = 100$. On peut effectuer deux groupements de ce type et il reste un terme.

La somme est donc égale à $100 + 100 + 25 = 225$.

La connaissance en jeu est la mise en œuvre implicite de l'associativité de l'addition.

Pour calculer $38 + 38 + 38 + 38 + 38 + 38 + 38 + 38 + 38 + 38$ on peut remarquer que cette somme contient dix termes. Cette somme s'écrit 38×10 . En utilisant la commutativité de la multiplication on peut remplacer le calcul de 10 fois 38 par le calcul de 38 fois 10 . 38 dizaines c'est 380 .

Il y a peu de chance pour qu'un élève utilise ces propriétés en début d'apprentissage de la multiplication. Il y a peu de chance également qu'il sache appliquer à ce stade la règle des zéros.

3. Les quatre écritures valides sont :

• $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + \dots + 3 + 3$ (avec 21 termes égaux à 3). 21 élèves et 3 cahiers par élève. L'élève mime la distribution par cette écriture symbolique et s'arrête lorsqu'il arrive à 21 termes.

- 3×21 ou 21×3 . L'élève traduit la situation par l'un des deux produits (le maître distribue 21 fois 3 cahiers).
- L'élève simule une distribution pour laquelle le maître distribue 1 cahier à la fois. Il y a 21 élèves. En donnant un cahier à chaque élève le maître distribue à chaque fois 21 cahiers. D'où l'écriture possible :
 $21 + 21 + 21$. Le maître a distribué 3 fois 21 cahiers.

● Exercice 81

Énoncé, p. 77

1. La notion mathématique sous-jacente est la division euclidienne des entiers naturels. En effet, dans chaque colonne, on trouve les nombres dont le reste de la division euclidienne par 7 est le premier nombre de cette colonne.

On trouve donc dans la première colonne les multiples de 7, dans la deuxième les nombres dont le reste dans la division euclidienne par 7 est 1, et ainsi de suite.

2. a) Une première procédure consiste par exemple à écrire dans la première colonne tous les multiples de 7 (en comptant de 7 en 7). Dans la première colonne on trouve 161, il est alors facile de placer 163 dans la troisième colonne.

Une deuxième méthode consiste à encadrer 163 par des multiples de 7 consécutifs :
 $23 \times 7 < 163 < 24 \times 7$; $161 < 163 < 168$. 161 se trouve dans la première colonne, donc 163 est dans la troisième colonne, la même que le nombre 2.

Une autre procédure plus experte (par exemple au CM2) – le niveau dans lequel cet exercice est proposé n'est malheureusement pas précisé – consisterait à déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 163 par 7. Le quotient est 23 et le reste 2, 163 est dans la même colonne que 2, c'est-à-dire dans la troisième colonne.

b) À la suite de la résolution de la question 3) (*Dans quelle colonne se trouve le nombre 1 000 ?*), le maître pourra proposer comme synthèse de procéder à la division euclidienne par 7 du nombre et de le placer dans la colonne du reste de cette division.

Le maître pourra en prenant l'exemple du nombre 1000, institutionnaliser l'écriture de la division euclidienne de 1000 par 7 comme réponse au problème :

$$1\,000 = 142 \times 7 + 6 = 994 + 6.$$

Le nombre 1 000 est dans la même colonne que le nombre 6, avec tous les nombres qui ont pour reste 6 dans la division par 7.

3. a) L'objectif de l'enseignant peut être l'utilisation de la division euclidienne par un nombre donné pour classer les nombres selon le reste obtenu dans cette division.

b) L'utilisation de la calculatrice peut se révéler pertinente pour permettre aux élèves de travailler sur de nombreux cas : ici, le calcul du quotient et du reste est facilité et les élèves peuvent réfléchir plus facilement aux relations numériques en jeu.

● Exercice 82

Énoncé, p. 77

1. La technique opératoire de la division euclidienne est abordée au cycle 3.

Dans les programmes 2008, les compétences repères sont les suivantes :

- CE2 : Connaître une technique opératoire de la division et la mettre en œuvre avec un diviseur à un chiffre.
- CM1 : Effectuer un calcul posé... Division euclidienne de deux entiers.
- CM2 : Division d'un nombre décimal par un nombre entier.

Toutefois, il est primordial de donner du sens à la division euclidienne.

Diviser un nombre entier a par un nombre entier b c'est chercher deux nombres tel que :
 $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$.

Il s'agit de chercher le plus grand nombre de fois que l'on a b dans a .

C'est pourquoi l'exercice peut être adapté pour être proposé à des élèves de l'école élémentaire.

Par exemple à partir de l'égalité $32 = 6 \times 5 + 2$, on peut demander aux élèves de déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 32 par 5 ou de 32 par 6. Dans ce cas 2 est inférieur au diviseur.

On a donc : 6 est le quotient de la division de 32 par 5 et le reste est 2 ; 5 est le quotient de la division de 32 par 6 et le reste est 2.

Par contre si l'on propose l'égalité $47 = 8 \times 5 + 7$, le quotient de 47 par 8 est bien 5 et il reste 7, mais le quotient de 47 par 5 n'est pas 8.

$47 = 8 \times 5 + 5 + 2 = 9 \times 5 + 2$. Dans ce cas, le quotient est 9 et le reste est 2.

Un tel exercice permet aux élèves de s'approprier le sens de l'expression $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$.

Toute expression du type $a = b \times q + r$ ne permet pas de donner directement le quotient de a par b si b n'est pas inférieur à r . Il faut rechercher le plus grand nombre de fois que l'on a dans a .

2. Analyse des productions d'élèves.

L'élève A effectue le calcul de quelques multiples du diviseur dont 38×9 qu'il utilise dans l'exécution de sa procédure.

Il sélectionne d'abord deux chiffres au dividende. « En 38 combien de fois 38 ? 1 fois. » Il pose 1 au quotient. Estimant que 7 n'est pas divisible par 38 (le quotient est en fait 0), il abaisse à nouveau deux chiffres au dividende, 74. « En 74 combien de fois 38 ? 1 fois. » Il pose à nouveau 1 au quotient. Il retire 38 à 74, trouve 36 et abaisse le dernier chiffre. Il divise 362 par 38, trouve 9 comme quotient ($38 \times 9 = 342$), pose 9 au quotient et retire 342 au reste 362. Il trouve 20. Il pose alors 0 au quotient, car il avait vraisemblablement estimé qu'il y avait 4 chiffres au quotient (présence des points). Pourquoi 0 ? Peut-être parce que « en 20 combien de fois 38 ? 0 fois. »

Le quotient est donc inexact.

L'élève B effectue et pose en ligne le calcul de certains multiples du diviseur.

Il recherche alors en s'appuyant sur les résultats calculés en ligne le nombre de milliers de fois 38 compris dans 38 000. Il trouve 1000 et pose 1000 au quotient.

Il retire 38 000 au dividende et trouve 742. Il recherche combien il y a de dizaines de fois 38 dans 742 et trouve 10. Il pose 10 au quotient et retire 380 (10×38) à 742. Il commet une erreur dans l'exécution de la soustraction et trouve 462 au lieu de 362. Dans 462, l'élève trouve à nouveau qu'il y a 10 fois 38. Il pose de nouveau 10 au quotient et retire de nouveau 380. Le reste est 82.

Dans 82, il trouve 2 fois 38, pose 2 au quotient. Il soustrait 76 (2 fois 38) à 82 et trouve un reste égal à 6.

Il ajoute les différents nombres obtenus au quotient et trouve un quotient global de 1022. Sa démarche est donc correcte, mais il commet une erreur de calcul dans une soustraction. Le résultat est donc inexact.

L'élève C a besoin d'écrire la table de multiplication de 38 par tous les nombres à 1 chiffre. Par ailleurs, il exécute correctement l'algorithme. Il n'oublie pas de poser 0 après 1. On peut supposer qu'il abaisse d'abord le chiffre 7 avant de prendre en compte 74.

Le résultat est exact.

L'élève D commet la même erreur que l'élève A. Il abaisse directement 74. « Dans 38, il y a 1 fois 38 et dans 74 il y a 1 fois 38 », donc il pose deux fois 1 au quotient en oubliant 0.

D'autre part, il commet une erreur dans la soustraction $74 - 38$, il trouve 46 au lieu de 36. En abaissant le chiffre 2, il obtient 462. Il recherche « en 462, combien de fois 38 ? », c'est pourquoi il recherche les produits 38×10 , 38×11 et 38×12 . Il trouve 12 et pose 12 au

quotient, ce qui lui donne un quotient égal à 1112 et un reste égal à 6 ($462 - 456$).
L'élève commet des erreurs d'exécution dans l'algorithme ainsi qu'une erreur de calcul.
Son résultat est faux.

● Exercice 83

Énoncé, p. 79

1. Plusieurs types d'objectifs peuvent être visés par l'enseignant.

Si l'on se réfère aux programmes 2002 en vigueur en 2007, on peut citer des objectifs concernant la résolution de problèmes :

– « *s'engager dans une procédure de recherche personnelle de résolution et la mener à son terme* » ;
– « *rendre compte oralement de la démarche utilisée, en s'appuyant éventuellement sur sa feuille de recherche* ».

Si l'on se réfère à la situation, on peut citer les objectifs suivants :

– mettre en œuvre des connaissances acquises dans le domaine des nombres et du calcul (et en particulier déterminer différentes sommes égales à un nombre donné) ;
– comprendre un problème comportant plusieurs contraintes (nombre de bâtonnets, nombre de boîtes, nombre variable de bâtonnets par boîte).

On peut également citer des objectifs méthodologiques (faire des hypothèses et les tester, etc.), mais la liste est longue).

Citer un objectif concernant les compétences de résolution de problèmes et un objectif en relation avec la situation était souhaitable.

2. Plusieurs éléments de la situation peuvent influencer les procédures des élèves :

– le nombre total de bâtonnets (plus les bâtonnets sont nombreux, plus il est difficile de dessiner la situation) ;
– le nombre de boîtes (plus les boîtes sont nombreuses plus la recherche par tâtonnement devient difficile) ;
– le nombre de bâtonnets par boîte et en particulier la « fourchette » autorisée (plus la fourchette est grande, plus la répartition devient aléatoire, donc perturbante) ;
– la mise à disposition du matériel ou non.

3. Le rôle de la première phase est une phase d'appropriation de la situation ; il s'agit de se construire une représentation correcte de cette situation. La manipulation est nécessaire pour que les élèves se construisent une telle représentation dans cette situation complexe à plusieurs contraintes.

4. Procédures possibles pour réussir la tâche.

Deux types de procédures peuvent être attendues : des procédures figuratives (l'élève dessine) et des procédures de type « calcul ».

Dans le premier cas, l'élève peut dessiner tous les bâtonnets en les regroupant par paquets de 3, 4 ou 5. Il peut également dessiner les boîtes, puis répartir les bâtonnets. Il peut créer une correspondance entre les boîtes dessinées et les bâtonnets dessinés.

Dans le second cas, l'élève doit écrire une somme de nombres égaux à 3, 4 ou 5 avec un nombre de termes égal au nombre de boîtes.

5. Analyse de la procédure élaborée par Hubert.

Le nombre de boîtes est 7 et le nombre de bâtonnets 31.

Hubert a d'abord besoin de s'appuyer sur une représentation figurée.

Puis il tente de trouver une somme égale à 31 avec 7 nombres, en privilégiant un partage égal (5 bâtonnets par boîte). Il semble qu'il se rend compte que si la somme est bien égale à 31 (6 fois 5 plus 1), une contrainte du problème n'est pas respectée : on ne peut mettre un seul bâtonnet dans une boîte.

Son deuxième essai est infructueux (six nombres seulement et une somme différente de 31). Enfin, il remplace deux fois le nombre 5 de la première par 4 et il remplace 1 par 3. Il trouve 31. Hubert semble s'appuyer sur les résultats précédents pour les corriger (démarche rétroactive).

● Exercice 84

Énoncé, p. 80

1. Ce problème est un problème visant à développer les capacités à chercher des élèves. Mathématiquement ce problème peut être modélisé par deux équations du premier degré à deux inconnues. Une résolution algébrique du problème n'est pas au programme de l'école élémentaire. Mais les élèves peuvent mettre en œuvre des procédures par tâtonnement, par raisonnement arithmétique ou effectuer des dessins.

Par ailleurs les nombres en jeu sont ici très « petits ». C'est pourquoi ce type de problème peut être proposé dès la fin du cycle 2.

Au cycle 3 l'enseignant devra augmenter la taille des nombres afin de faire obstacle aux procédures de type dessin.

2. Description des procédures

L'élève A a correctement schématisé la situation (chaque patte est représentée par un trait).

D'autre part, il vérifie que le nombre des animaux est bien égal à 4.

Lors de cette vérification il écrit le signe de la soustraction à la place de celui de l'addition, mais il effectue bien une addition. Il s'agit donc certainement d'une faute d'étourderie.

L'élève B représente chaque tête d'animal par un trait.

Puis, en dessous, il représente certainement des poules et des lapins en entourant 2 pattes sous forme de traits également pour les poules et 4 pattes pour les lapins. Puis il associe chaque animal dessiné de manière arbitraire à une tête.

Le hasard fait que les deux poules et les deux lapins dessinés représentent 12 pattes. Mais les têtes étant représentées par le même symbole (un trait vertical), l'élève ajoute finalement tous les traits mis en correspondance, soit 16 traits.

Par un nouveau changement d'interprétation les traits sont tous assimilés à des animaux, donc à 16 poules et lapins.

L'élève ne répond pas à la question posée. Il pense répondre à la question « combien il y a-t-il d'animaux ? » au lieu de « combien il y a-t-il d'animaux de chaque sorte ? ».

Le fondement des erreurs de cet élève réside dans la mauvaise compréhension de l'énoncé et dans les changements permanents d'interprétation de sa propre production écrite, sans vision cohérente de la situation.

L'élève C invente un codage pour chaque animal et l'explique.

Puis il ajoute les pattes de trois lapins. Il s'arrête à trois lapins car il se rend compte vraisemblablement que pour 4 lapins on dépasserait 14 pattes. Il ajoute alors 2 pattes supplémentaires correspondant à une poule.

Il donne le résultat de manière correcte sous forme d'une phrase réponse.

Sa procédure est valide. Peut-être aurait-il eu plus de difficulté s'il avait d'abord ajouté des pattes de poule ? La contrainte du nombre d'animaux est dans ce cas un peu plus difficile à contrôler.

L'élève D semble utiliser les deux nombres de l'énoncé pour trouver le nombre d'animaux de chaque sorte.

Il utilise le nombre 14 pour trouver le nombre de poules : $14 : 2 = 7$ poules.

Il utilise le nombre 4 (sans se rendre compte qu'il ne s'agit pas de pattes, mais de têtes) pour trouver le nombre de lapins.

L'élève n'a donc pas réussi à interpréter de manière correcte la signification des nombres de l'énoncé.

3. Ces écrits sont à la fois « des écrits de recherche » et « des écrits destinés à être communiqués et discutés ». En effet ces écrits présentent des caractères de recherche (étapes du raisonnement) et des signes pour clarifier la présentation de la démarche à des interlocuteurs.

● Exercice 85

Énoncé, p. 82

1. L'élève A met en œuvre une stratégie d'essais. Sa procédure d'essais-erreurs est régulée par une stratégie d'écart au but.

63 est trop grand, 39 et 42 sont trop petits, 54 est trop grand mais très proche de 51. Cette procédure est donc bien maîtrisée.

L'élève B divise 51 par 3, car il s'agit de trouver trois nombres. $51 = 3 \times 17$.

Il prend 17 comme étant le plus grand des trois nombres. Il obtient trois nombres consécutifs dont la somme est égale à 48 (17, 16, 15). Il décide de prendre les nombres consécutifs 18, 19 et 20 qui constituent pour lui le triplet suivant et obtient une somme égale à 57. Puis il remplace 15 par 18 en ajoutant 3 à 15 (puisque'il manque 3), et obtient les nombres consécutifs qui conviennent.

L'élève C procède comme l'élève A par essais-erreurs, mais il commet une erreur en effectuant la somme $16 + 17 + 18$: il trouve 41 au lieu de 51 (certainement une erreur concernant la retenue). Il poursuit ses recherches et ne trouve pas de triplet convenable.

2. En autorisant la calculatrice, le professeur vise la facilitation des calculs et donc la multiplication des tests d'hypothèses. Bien sûr il vise également l'amélioration des compétences liées au calcul instrumenté. Le calcul instrumenté peut être un support du calcul réfléchi.

3. a) L'objectif de cette activité consiste à faire apparaître la propriété des nombres qui sont la somme de trois entiers consécutifs. Ces nombres sont des multiples de 3, donc divisibles par 3.

b) L'emploi de la calculatrice permet de faciliter la production d'hypothèses et de vérifier rapidement les calculs (y compris la division par 3).

Par exemple, en divisant par 3 un nombre multiple de 3, on obtient le nombre intermédiaire de trois nombres consécutifs. Pour obtenir les deux autres nombres, on ajoute 1 et on retire 1 à ce nombre intermédiaire.

● Exercice 86

Énoncé, p. 84

1. – La ligne 1 correspond au nombre de tricycles car en ligne 2 l'écart entre deux nombres consécutifs est égal à 3.

– La colonne A correspond au nombre de bicyclettes car en colonne B l'écart entre deux nombres est égal à 2.

Pour F4 on peut écrire « $= 2 \times A4 + 3 \times F1$ ».

Pour D7 on peut écrire « $= 2 \times A7 + 3 \times D1$ ».

Il était possible d'écrire une formule plus générale permettant de remplir le tableau automatiquement du type « $= (\text{numéro de ligne} + 1) \times 2 + (\text{numéro de colonne}) \times 3$ ».

Remarque : Le candidat était en droit de se poser également la question des inconvénients du recours à un tableur. Si ce sont les élèves qui programment, la difficulté est sans commune mesure avec la résolution du problème de manière classique. Si le tableau est fourni, l'intérêt mathématique est discutable. Il s'agira alors davantage d'une activité de compréhension du tableau.

2. a) Analyse de la production de Gaëlle.

Gaëlle amorce la division de 31 par 3, peut-être pour essayer de traduire sa remarque précédente (« Il y en a au moins trois de chaque »).

Puis elle schématise les roues en alternant une bicyclette et un tricycle (deux roues puis trois roues).

Après avoir schématisé les roues de 5 bicyclettes et 5 tricycles, Gaëlle se rend compte qu'il manque 6 roues. Elle complète alors son schéma par les roues de deux tricycles.

Elle dénombre alors 7 tricycles et 5 bicyclettes.

La question ne laissant pas supposer que plusieurs solutions étaient possibles, la recherche de Gaëlle s'arrête.

Sa démarche est bien contrôlée. Elle permet d'aboutir pour une des deux solutions grâce aux nombres en jeu. Gaëlle aurait eu davantage de difficultés pour trouver la deuxième solution si la question en avait fait référence.

Analyse de la production de Loïs.

Après avoir écrit quelques multiples de 2 et de 3 sans méthode précise, Loïs procède de manière systématique : il écrit le tableau des multiples de 3 et le tableau des multiples de 2 (de 1 à 10, sans tenir compte des conditions exposées dans l'énoncé).

Il cherche à combiner un nombre du premier tableau avec un nombre du second tableau tels que leur somme soit égale à 31. Il trouve une combinaison 15 et 16.

Loïs commet une erreur sans conséquence en recopiant : $8 \times 2 = 18$.

Loïs n'écrit pas de phrase réponse : 5 tricycles et 8 bicyclettes.

La démarche est correcte et aurait pu permettre de faire apparaître la deuxième solution (7 tricycles et 5 bicyclettes).

b) La complémentarité des deux productions est double. Elles font apparaître les deux solutions et mettent en évidence des procédures différentes (schématique et calculatoire).

Lors d'une synthèse, le maître pouvait s'appuyer avec profit sur ces deux productions.

● Exercice 87

Énoncé, p. 86

1. La notion mathématique en jeu est la proportionnalité. En effet, le prix est proportionnel aux nombres d'objets identiques.

2. Deux énoncés ont été proposés dans la même évaluation car la valeur des nombres affecte les procédures attendues.

Dans l'énoncé 1, 6 objets coûtent 150 euros.

L'élève peut soit utiliser les propriétés de linéarité de la proportionnalité, soit utiliser le prix unitaire qui se calcule aisément.

Première méthode : 1 objet coûte 25 euros, donc 9 objets coûtent $25 \times 9 = 225$ euros.

Deuxième méthode : 6 objets coûtent 150 euros, 3 objets coûtent 75 euros, donc 9 objets ($6 + 3$) coûtent 225 euros ($150 + 75$).

Dans l'énoncé 2, 10 objets identiques coûtent 22 euros, les mêmes procédures peuvent être utilisées, mais la recherche du prix unitaire met en œuvre la recherche d'un quotient décimal, et la recherche du produit d'un décimal par un entier.

Première méthode : 1 objet coûte 2,2 euros, 15 objets coûtent $2,2 \times 15 = 33$ euros.

Deuxième méthode : 10 objets valent 22 euros, 5 objets valent 11 euros (deux fois moins), donc 15 objets valent 33 euros ($22 + 11$).

Dans ce cas la deuxième méthode est aisément calculable.

3. Analyse des productions

- Alice emploie pour les deux problèmes la propriété de linéarité multiplicative de la proportionnalité. Elle calcule le prix de la moitié des objets donnés dans les énoncés (respectivement le prix de 3 objets et de 5 objets). Elle constate que 9 est le triple de 3 et que 15 est le triple de 5. Elle multiplie les prix obtenus par 3.

La démarche est valide et réfléchie, les résultats sont exacts.

- Bruno interprète mal les données du problème. Pour lui, les prix donnés dans chacun des énoncés sont les prix unitaires des objets.

Il n'indique rien dans les cases réponse. Peut-être s'est-il rendu compte que les résultats ne sont pas plausibles ?

Les multiplications sont effectuées sans erreur.

- Charles calcule pour chacun des problèmes la valeur unitaire des objets, puis multiplie par le nombre d'objets.

Sa démarche est bonne et ses calculs sont exacts (y compris le calcul du quotient décimal et le calcul de la multiplication d'un décimal par un entier).

- Pour le premier problème, Dalila semble avoir calculé le prix de 2 objets en divisant par 3 le prix de 6 objets, et calculé le prix de 1 objet en divisant par 2 le prix de 2 objets.

Elle constate que 9 objets forment la somme de 6 objets plus 2 objets plus 1 objet.

Elle effectue sur sa feuille la somme des prix calculés de tête ou au brouillon (utilisation de la propriété additive de linéarité).

$$150 + 50 + 25 = 225 \text{ euros.}$$

Sa démarche et le résultat sont exacts.

Pour le deuxième problème, Dalila calcule d'abord avec succès la valeur unitaire d'un objet. Puis elle tente de calculer le prix de 5 objets (car $10 + 5 = 15$).

Mais elle manque de connaissances pour ajouter cinq nombres décimaux. Elle ajoute les parties décimales comme des parties entières et trouve 10, elle ajoute les parties entières et trouve également 10, puis ajoute ces deux nombres sans se rendre compte qu'il s'agit de 10 unités et de 10 dixièmes d'unité, c'est-à-dire 11 unités.

La démarche est bonne, mais le calcul est inexact.

● Exercice 88

Énoncé, p. 88

1. La proportionnalité est la notion en jeu dans ces deux exercices.

2. a) et b) Il s'agit d'analyser les productions des quatre élèves pour l'exercice 6 (annexe 2).

L'élève A calcule le prix d'un objet (division de 150 par 6). Il obtient 25 euros pour un objet. On peut supposer qu'il ajoute au prix de 6 objets, le prix de trois objets ($3 \times 25 = 75$).

La réponse est exacte : 225 euros. Il n'écrit pas l'unité monétaire dans sa réponse.

Passage par l'unité et utilisation d'une propriété de linéarité sont les propriétés implicitement mises en œuvre.

L'élève B calcule le prix de 3 objets en divisant le prix de 6 objets par 2. Il obtient 75 euros qu'il ajoute au prix de 6 objets. Il utilise donc les propriétés de linéarité.

L'élève C calcule le prix d'un objet, 25 euros, puis il calcule le prix de 9 objets en multipliant 25 par 9. Il obtient 215 euros. La procédure est exacte (passage par l'unité), mais l'élève commet une erreur dans l'exécution de la technique opératoire.

L'élève D calcule un produit à partir de deux données du problème. 150 euros n'est pas le prix d'un objet, mais de 9 objets. La situation de proportionnalité n'est pas reconnue.

3. Pour l'exercice 34, **l'élève A** calcule comme pour l'exercice 6 le prix d'un objet.

Il retient pour prix d'un objet le quotient de la division euclidienne sans tenir compte du reste.

Pour l'exercice 34, **l'élève B** calcule comme pour l'exercice 6 le prix de 5 objets : 11 euros.

Mais il est difficile d'analyser son erreur. Il donne pour réponse 26 euros au lieu de 33 euros ($22 + 11 = 33$). S'agit-il d'une erreur de calcul ?

L'élève C qui avait mis en œuvre une procédure de passage par l'unité lorsque les nombres s'y prêtaient, utilise les propriétés de linéarité ce qui évite le calcul d'un quotient décimal. On peut donc dire que cet élève adapte sa procédure aux conditions du calcul.

4. **L'élève E** utilise la procédure de passage par l'unité. Il sait calculer le quotient décimal (2,2 euros par objet). Il cherche à obtenir le prix de 15 objets en multipliant le prix unitaire par 15 (démarche exacte). Mais il commet une erreur dans le produit : il multiplie la partie entière et la partie décimale par 15. Il obtient 30,3 (30,30). Il considère le nombre décimal comme deux entiers accolés.

● Exercice 89

Énoncé, p. 91

1. Disposons les valeurs demandées dans un tableau :

Nombre d'élèves	Nombre d'élèves mangeant à la cantine
100	70
50	35
1 000	700
800	560

a) Le choix de la valeur 100 permet de donner une signification au pourcentage. 70 % signifie que pour 100 élèves, 70 mangent à la cantine. On établit cette relation numérique de manière claire.

Le choix des valeurs 50 et 1 000 permet aux élèves d'utiliser les propriétés de linéarité d'une situation de proportionnalité.

« 50, c'est deux fois moins que 100 » et « 1 000, c'est dix fois plus que 100 ». Pour trouver le nombre d'élèves mangeant à la cantine, il suffit dans le premier cas de diviser 70 par 2 et dans le deuxième cas de multiplier 70 par 10.

b) Pour répondre à la question 2) (1 850 élèves), un élève pourrait utiliser les résultats précédents en employant les propriétés de linéarité multiplicative et additive.

S'il y a 1 000 élèves, 700 mangent à la cantine.

S'il y a 800 élèves, 560 mangent à la cantine : huit fois plus que pour 100 élèves ($8 \times 70 = 560$).

S'il y a 50 élèves, 35 mangent à la cantine.

Parmi 1 850 élèves, 1 295 mangent à la cantine ($700 + 560 + 35$).

2. a) **Première procédure** : pour calculer le prix de 35 baguettes, les élèves peuvent utiliser les résultats obtenus pour 10 baguettes et 25 baguettes. Le prix de 35 baguettes est égal au prix de 10 baguettes plus le prix de 25 baguettes. Il s'agit dans ce cas d'utiliser la propriété de linéarité additive d'une situation de proportionnalité.

Deuxième procédure : le prix de 35 baguettes est égal au prix de 5 baguettes multiplié par 7. Dans ce cas, on utilise la propriété de linéarité multiplicative.

En disposant les données dans un tableau, on obtient :

Nombre de baguettes	Prix (en euros)
5	4
10	8
20	16
25	20
35	28

Avec les deux procédures, on a $8 + 20 = 28$ et $4 \times 7 = 28$.

b) Pour calculer le prix de 17 baguettes, il est possible pour un élève de calculer le prix de 20 baguettes ($4 \times 4 = 16$ €), puis de 2 baguettes (10 fois moins que le prix de 20 baguettes). L'élève doit dans ce cas savoir diviser un nombre entier par 10 en trouvant un résultat décimal (1,6 €). Puis l'élève calcule le prix de 15 baguettes ($4 \times 3 = 12$ €), et enfin le prix de 17 baguettes ($12 + 1,6 = 13,6$ €).

Une deuxième procédure peut consister à calculer le prix d'une baguette (passage par l'unité). Dans ce cas, l'élève doit savoir trouver le quotient décimal de deux entiers dans des cas simples : calcul du quotient de 8 divisé par 10 ou 4 divisé par 5, c'est-à-dire 0,8 €. Dans ce deuxième cas, l'enseignant peut aborder avec ses élèves la méthode de passage par l'unité (proche de la règle dite « de trois »).

● Exercice 90

Énoncé, p. 92

1. a) La tâche commune aux trois exercices est : achever le tracé d'un rectangle ou d'un carré déjà amorcé.

Les conditions de la tâche sont par contre différentes.

Dans l'exercice 3 le support est un papier quadrillé. Les côtés des figures sont sur les lignes du quadrillage et les sommets sur les nœuds. La tâche est donc facilitée et un simple contrôle perceptif est suffisant. Pour le carré, l'élève doit toutefois savoir que les côtés d'un carré ont même mesure (3 carreaux).

Pour les exercices 4 et 5, la tâche est orientée vers l'utilisation de la règle graduée.

Pour l'exercice 4, l'élève doit placer avec soin sa règle le long du segment inachevé, mesurer et reporter avec précision la mesure de la longueur du rectangle.

Pour l'exercice 5, l'élève doit relever avec précision la longueur du côté du carré et la reporter par deux fois en prolongeant les deux autres côtés.

b) Deux types de validation peuvent être envisagés :

– fournir la figure sur papier calque ;

– fournir une équerre ou un gabarit d'angle droit pour vérifier les angles droits.

2. On peut citer trois types de difficultés.

a) Difficultés liées à la consigne :

– la consigne « entourer et barrer » n'est pas facile à comprendre ;

– les propositions carré et rectangle ne sont pas exclusives l'une de l'autre ; les élèves risquent de penser que si l'une des propositions est vraie, l'autre est fausse ; or si l'une est fausse, l'autre n'est pas nécessairement vraie.

b) Difficultés liées aux propriétés du rectangle et du carré : un carré est un rectangle, mais pour un élève de CE1, cela n'est pas évident ; théoriquement il conviendrait d'entourer les deux réponses pour les figures c et e .

c) Difficultés liées à l'activité proposée : le placement des figures dans la feuille (côtés non parallèles aux bords de la feuille) introduit une difficulté voulue (figures en position non prototypique) ; la simple vérification de la longueur des côtés du quadrilatère d peut conduire l'élève à affirmer qu'il s'agit d'un rectangle.

● Exercice 91

Énoncé, p. 95

1. Analyse de la production de Marine.

Marine commet deux erreurs concernant la consigne 3 et la consigne 5.

• Au lieu de tracer la parallèle à la droite d qui passe par B , elle trace la perpendiculaire à d passant par ce point. Marine peut commettre une erreur de lecture en retenant perpendiculaire au lieu de parallèle. Le tracé d'une parallèle est plus complexe que celui d'une perpendiculaire et nécessite des connaissances plus complexes. Peut-être Marine ne connaît-elle pas l'exécution d'un tel tracé ? C'est pourquoi elle peut remplacer le terme de parallèle par celui de perpendiculaire de manière consciente (pour répondre tout de même à la consigne) ou inconsciente.

• Au lieu de tracer le cercle de diamètre $[AC]$, Marine trace le cercle de centre A qui passe par C .

Tracer le cercle d'un diamètre donné nécessite une connaissance : le centre du cercle est le milieu du diamètre et le cercle passe par les extrémités de ce diamètre. Dans le cas présent, ce tracé nécessite d'abord de déterminer le milieu de $[AC]$.

De la consigne, Marine retient avant tout qu'il faut tracer un cercle. Elle pointe son compas en B . On peut penser qu'elle choisit B car le point est isolé dans la figure (représentation prototypique d'un cercle en dehors de toute autre figure). Elle fait passer ce cercle par A qui est le point le plus proche de B .

2. Justification de la progression de l'annexe 3.

L'activité A consiste à reconnaître des angles droits dans une figure à l'aide de l'équerre.

L'activité B1 consiste à analyser les erreurs possibles dans l'utilisation de l'équerre pour tracer la perpendiculaire à une droite.

L'activité B2 consiste à utiliser l'équerre pour tracer une perpendiculaire à une droite, puis la perpendiculaire à une droite passant par un point donné.

Il y a donc une progression réfléchie des activités en vue de maîtriser l'utilisation de l'équerre en rapport avec la notion de droite perpendiculaire à une droite donnée.

3. Analyse de l'annexe 3.

• **Partie 1.** L'objectif est de faire apparaître par des actions de pliage d'une feuille que les droites perpendiculaires à une droite donnée sont parallèles entre elles.

Le premier pliage permet d'obtenir une droite d .

Le deuxième pliage permet d'obtenir une perpendiculaire à cette droite.

Les pliages suivants permettent d'obtenir d'autres perpendiculaires.

En dépliant la feuille, on constate que les plis déterminent 4 droites perpendiculaires à d (droite du premier pli) et que ces quatre droites sont parallèles.

• **Partie 2.** L'objectif est de donner une méthode de construction de deux droites parallèles.

On trace une droite d_1 et deux perpendiculaires à la droite d_1 . On marque sur chacune de ces droites un point situé à égale distance de la droite d_1 , puis on trace la droite passant par ces deux points. Cette droite est parallèle à d_1 .

La connaissance en jeu est celle d'écart constant entre deux droites parallèles (connaissance figurant au programme 2008).

● Exercice 92

Énoncé, p. 98

1. Pour réussir cet exercice, il faut savoir que tous les points d'un cercle sont situés à égale distance du centre.

2. Deux élèves ont déterminé le centre du cercle : le point G .

• **Léa** a tracé un cercle de centre G et de rayon GA et a constaté que ce cercle passe également par B , C et D . Léa a donc déterminé correctement le centre du cercle, mais elle n'a pas respecté la consigne : elle a utilisé le compas au lieu de la règle graduée.

• **Denis** a également déterminé le centre G du cercle et a en outre respecté la consigne : l'utilisation de la règle graduée. A , B , C et D sont situés à 3,8 cm de G . Ils sont donc situés sur un cercle de centre G .

3. Analyse des productions des élèves.

• Pour **Fabien**, l'utilisation de la règle correspond avant tout à tracer des segments (tracé de la ligne brisée de proche en proche). Il n'utilise pas la graduation de sa règle.

Fabien choisit le point H pour centre du cercle, vraisemblablement parce qu'il est celui qui apparaît le plus clairement à l'intérieur de l'arc dessiné par les points A , B , C , D . Pour Fabien, le centre d'un cercle est à l'intérieur du cercle (ici au « milieu » de toutes les lettres et notamment des points qui ne sont pas à prendre en compte). Il ne mobilise pas ou ne connaît pas la propriété du centre d'un cercle.

- Pour **Léa**, l'instrument privilégié concernant le cercle est le compas. Elle trace donc le cercle qui a pour centre G et qui passe par A , B , C et D . Il n'est pas certain qu'elle sache que l'ensemble des points d'un cercle sont à égale distance du centre. Le compas est souvent perçu comme un instrument un peu magique qui trace des cercles (des ronds) et non comme un instrument qui permet de reporter ou de comparer des distances.
- **Kevin** a la même conception de la règle que Fabien. Il trace la même ligne brisée. Il juge également perceptivement que c'est le point H qui est le centre.
- **Denis** met en œuvre la connaissance nécessaire (tout point du cercle est à égale distance du centre) et la démarche demandée (utilisation de la règle graduée).

● Exercice 93

Énoncé, p. 100

1. Activité sur support papier

a) Il est toujours difficile de décrire une procédure précise. Les procédures réelles des élèves combinent souvent plusieurs heuristiques (voies prometteuses). Parmi les procédures heuristiques possibles on peut citer :

- le tracé de plusieurs points sur la droite et l'utilisation d'une règle graduée pour déterminer le point le plus proche de A ;
- l'utilisation d'une équerre pour tracer la perpendiculaire à la droite passant par A ; par combinaison avec la procédure précédente, l'élève peut constater que la distance la plus courte est bien en relation avec cette perpendiculaire ;
- l'utilisation d'une règle graduée ; faire pivoter la règle en plaçant l'origine de cette règle sur le point A afin d'obtenir la distance la plus courte ;
- l'utilisation d'un compas ; constater en faisant varier l'écartement des branches que la distance la plus courte correspond au point de tangence (l'arc de cercle ne coupe plus deux fois la droite) ;
- le tracé implicite de la médiatrice d'un couple de points de la droite situés à égale distance de A peut advenir si l'élève utilise un compas ; ce tracé correspond à celui de la perpendiculaire à la droite passant par A à l'aide d'un compas ;
- des essais de pliage si les élèves en ont la possibilité.

b) La distance la plus courte d'un point A extérieur à une droite aux différents points de cette droite est déterminée par la perpendiculaire à la droite passant par ce point.

Cette distance est appelée distance du point A à la droite.

La difficulté principale qui peut faire obstacle à l'émergence de cette propriété réside dans l'imprécision des tracés et des mesures à l'aide des instruments (notamment la règle graduée, mais également le compas).

Une autre difficulté à surmonter consiste à ne pas tracer une droite perpendiculaire au bord de la feuille.

c) Si la droite est parallèle à l'un des bords de la feuille, les élèves auront tendance à croire que le tracé d'une parallèle à la droite correspondra avec une nouvelle parallèle au bord de la feuille et la propriété visée (tous les points situés à 7 cm de la droite sont situés sur une parallèle à la droite) risque de ne pas apparaître (la droite peut être d'abord perçue comme parallèle au bord de la feuille).

d) L'ensemble des points situés à 7 cm de la droite est une droite parallèle à cette droite. Cette situation permet de faire apparaître une relation existant entre deux droites parallèles. D'autre part, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

2. Activité avec le logiciel de géométrie dynamique

En déplaçant le point P sur la droite, l'élève constatera que la distance de ce point P , mobile, au point A , fixe, diminue ou augmente selon le sens du déplacement. Il est possible de déterminer la position du point P telle que AP est minimal au dixième de millimètre près (précision du calcul de la distance par le logiciel). Ce logiciel doit d'autre part permettre le

tracé de la perpendiculaire à la droite passant par A , et permettre de vérifier que c'est bien pour cette perpendiculaire que la distance est la plus courte. Deux avantages par rapport au support papier peuvent être repérés : la précision de la mesure, mais aussi la multiplication rapide des essais. Ce « milieu » dynamique permet à l'élève de percevoir l'évolution des obliques et le passage par la perpendiculaire qui correspond à la distance la plus courte.

● Exercice 94

Énoncé, p. 102

1. Procédures envisageables pour compléter la figure.

1^{re} procédure. L'élève trace la droite (AO) et le cercle de centre O et de rayon OA .

Le cercle coupe la droite (AO) en C .

$ABCD$ est un rectangle.

L'élève utilise dans ce cas explicitement ou implicitement les propriétés suivantes :

« Les diagonales d'un rectangle sont égales et se coupent en leur milieu. »

« Le centre du cercle circonscrit au rectangle est le point d'intersection de ses diagonales. »

Le centre de ce cercle est le milieu des diagonales. »

2^e procédure. L'élève trace le cercle de centre B et de rayon AD et le cercle de centre D et de rayon AB . Ces cercles se coupent en C . $ABCD$ est bien le rectangle cherché.

L'élève utilise alors implicitement ou explicitement la propriété suivante :

« Les côtés opposés d'un rectangle sont de même longueur. »

3^e procédure. L'élève trace la droite (AO) , puis le cercle de centre A et de rayon BD . Le cercle coupe la droite (AO) en C tel que $ABCD$ est bien un rectangle.

L'élève utilise la propriété suivante :

« Les diagonales d'un rectangle sont égales. »

4^e procédure. L'élève trace la droite (QO) et le cercle de centre O et de rayon OQ . L'intersection de la droite (QO) avec le cercle est un point Q' symétrique de Q par rapport à O .

Puis l'élève trace la droite (BQ') , et le cercle de centre B et de rayon AD . Ce cercle coupe la droite (BQ') en C . Il peut également tracer le cercle de centre Q' et de rayon BQ' qui coupe également (BQ') en C .

La propriété utilisée est : « Les médianes d'un rectangle ont pour milieu le centre du rectangle, point de concours de ses médianes. »

2. Difficultés que peut rencontrer un élève pour compléter la figure.

La notion de rectangle est largement associée chez les élèves à celle d'angle droit. Ici l'élève ne dispose pas de l'équerre, d'où une difficulté possible pour envisager la mise en œuvre de propriétés qui ne portent pas directement sur les angles.

L'élève peut avoir des difficultés de compréhension de la consigne : il lui faut comprendre qu'un rectangle de centre O est un rectangle dont on connaît déjà les trois points A , B et D et qu'il convient de ne rechercher que le quatrième sommet.

L'utilisation du compas comme instrument de report des longueurs peut ne pas être compris, car l'élève ne dispose pas d'une règle graduée.

L'élève peut avoir des difficultés dans le maniement des instruments, règle et compas. Les tracés peuvent donc manquer de précision.

Plusieurs types de difficultés peuvent donc se présenter à l'élève :

– difficultés de compréhension de la consigne ;

– difficultés pour anticiper la figure, les tracés ;

– manque de connaissances concernant les propriétés d'un rectangle ;

– manque de maîtrise des instruments, notamment dans la précision des tracés.

3. a) On peut adapter la consigne en supprimant l'action de mesurer. Il s'agira alors d'utiliser le compas pour reporter la longueur BD sur la droite (AO) .

Sinon sans règle graduée la procédure de l'extrait de document est évidemment non envisageable.

b) Les procédures présentées à la question 1. qui n'utilisent le compas que pour reporter une longueur sur une droite peuvent s'appliquer avec la consigne 2 en utilisant la règle graduée.

Toute procédure qui utiliserait le tracé du point d'intersection de deux cercles ne pourrait par contre pas être envisagé.

4. Une consigne autorisant l'équerre amènerait vraisemblablement les élèves à mettre en œuvre des propriétés liées aux angles droits. Il est d'ailleurs vraisemblable que certains élèves tentent de manière illicite de tracer au jugé des perpendiculaires lors de la mise en œuvre des consignes 1 et 2.

● Exercice 95

Énoncé, p. 103

1. Les élèves peuvent rencontrer plusieurs types de difficultés :

- déterminer la longueur des côtés et des segments et conserver cette longueur à l'aide du compas (l'emploi du double décimètre n'est pas aisé puisque la longueur des côtés n'est pas un nombre entier de cm) ;
- repérer que les sommets du carré intérieur sont confondus avec les milieux des côtés du carré extérieur et déterminer le milieu de chacun de ces côtés ;
- utiliser l'équerre avec précision pour tracer le carré.

2. Étapes de construction des figures A et B.

Les deux figures A et B sont superposables, seule leur orientation dans la feuille diffère.

Concernant la figure A, on peut supposer que la construction du carré extérieur sera privilégiée par les élèves en tant que première étape ; puis suivra la construction du carré intérieur.

Concernant la figure B, on peut supposer le contraire, au moins au début de la recherche : les élèves commenceront par construire le carré intérieur, puis chercheront à construire le grand carré, en utilisant vraisemblablement la construction des médianes du carré intérieur qui sont les diagonales du grand carré.

En effet, les élèves auront tendance à commencer par tracer le carré dont les côtés sont parallèles aux bords de la feuille, à la fois pour des raisons de prégnance perceptive, mais surtout pour des raisons de commodité du tracé. Le choix par commodité de la première étape peut bien sûr se révéler moins prometteur pour la suite de la construction.

3. Utilisation du calque.

Deux utilisations différentes des calques sont possibles :

- une fois la construction réalisée, les élèves pourront la valider à l'aide du calque A ou du calque B selon les groupes ;
- par ailleurs, en superposant les deux calques, les élèves pourront constater que les deux figures sont identiques (superposables).

● Exercice 96

Énoncé, p. 104

1. Cet exercice peut être proposé au cycle 3. Le calcul de la durée sous forme du calcul d'un complément peut être effectué dès le CE2.

L'expression neuf heures moins dix peut toutefois poser un problème de compréhension.

Entre neuf heures moins dix et neuf heures il y a dix minutes.

Neuf heures moins dix c'est avant neuf heures.

Neuf heures moins dix c'est 8 h 50 min.

Si la procédure exigée est de poser une soustraction, la difficulté d'exécution d'une telle opération peut poser problème, à de nombreux élèves de CM2.

2. Les deux expressions retenues pour désigner l'heure font partie de l'usage social. Neuf heures moins dix correspond à une lecture analogique sur le cadran d'une montre ou d'une horloge. 10 h 40 correspond à une lecture digitale. Le but didactique est de faire donner du sens à ces deux expressions dans le cadre d'un même problème.

Il s'agit notamment de permettre aux élèves de comprendre que 10 h 40 c'est 10 h et 40 min et non 10,40 h. Cette confusion intervient fréquemment lorsque les élèves s'approprient le système décimal.

3. Analyse des procédures.

• **Mélanie** décompose la durée totale en trois durées : 10 min avant neuf heures, 1 h entre neuf heures et dix heures, 40 min après dix heures. Puis elle effectue la somme de ces trois durées, ce qui ne pose pas de problème majeur.

Son raisonnement est adéquat, l'exécution de la procédure exacte.

Par contre, Mélanie ne connaît pas le codage des minutes sous la forme min.

• **Thomas** commet deux erreurs. Il traduit neuf heures moins dix par 9 h 50 et non par 8 h 50, puis lorsqu'il soustrait l'heure de départ à l'heure d'arrivée, il confond l'écriture sexagésimale avec l'écriture décimale. Il calcule la différence $140 - 50$ au lieu de convertir une heure en 60 min et d'effectuer la différence $100 \text{ min} - 50 \text{ min}$.

• **Sabrina** ajoute les minutes entre elles. Il est difficile de donner une interprétation à sa proposition : ajout de durées sans tenir compte des heures ou choix aléatoire d'une opération face à l'incompréhension du problème.

De plus, influencée par le terme parcours, Sabrina exprime son résultat en mètre (unité de longueur).

Sabrina n'a pas su modéliser le problème.

• **Kevin** ne comprend pas la structure du problème, il ajoute tous les nombres figurant dans l'énoncé, trouve 69 et accole 69 à 9 h. A-t-il saisi que 9 h figure dans l'heure de départ ?

4. Une horloge ou une montre avec un cadran, ainsi qu'une horloge ou une montre digitale sont des supports qui peuvent aider les élèves à interpréter les données du problème, à construire la procédure de résolution et à vérifier le résultat.

● Exercice 97

Énoncé, p. 105

1. a) Difficultés concernant l'exercice 1 de l'annexe A.

La première difficulté est le manque de connaissances du monde d'un élève de CE2. La masse de certains objets, un stylo par exemple, est très variable : 50 g est-elle une masse impossible pour un stylo ? Comment savoir ? Si les élèves ne disposent pas des objets et d'un instrument de mesure, les réponses seront souvent aléatoires.

Par ailleurs, il n'est pas précisé dans la question que plusieurs réponses sont possibles et qu'il s'agit seulement de barrer les masses impossibles. Les élèves peuvent interpréter de manière implicite et erronée (mais en général une seule réponse est attendue dans les exercices de mathématiques) qu'il ne faut conserver qu'une « bonne réponse ».

L'élève doit également savoir convertir les kilogrammes en grammes pour certains objets.

b) En ce qui concerne l'exercice 2) a) les élèves peuvent rencontrer plusieurs difficultés.

La première est relative aux conversions g/kg ou kg/g : 1 300 g c'est 1 kg 300 g ; 1 kg 250 g c'est 1 250 g.

Une autre difficulté consiste à maîtriser l'utilisation des symboles $<$ et $>$ sans les inverser.

Les élèves peuvent également avoir des difficultés de compréhension de l'exercice, puisque le poulet et le rôti sont pesés par des balances différentes.

2. a) La règle implicite utilisée par cet élève apparaît au c) : 1 kg 350 g est converti en 1 350 g, 2 kg 40 g est converti en 240 g, 4 kg 7 g est converti en 47 g. L'élève se contente

d'accoler les deux entiers de l'écriture « complexe » pour obtenir la conversion en grammes. De ce fait, lorsque l'élève écrit au b) $3\ 008\text{ g} > 3\text{ kg } 8\text{ g}$, c'est parce qu'il convertit $3\text{ kg } 8\text{ g}$ en 38 g . De même, il écrit $1\text{ kg } 70\text{ g} < 975\text{ g}$ car il convertit vraisemblablement $1\text{ kg } 70\text{ g}$ en 170 g .

Lorsqu'il écrit $2\text{ kg } 60\text{ g}$, il donne une réponse exacte, mais en employant certainement la même procédure erronée : $2\text{ kg } 60\text{ g}$ est plus petit que $2\ 600\text{ g}$ car $260 < 2\ 600$.

b) Dans l'exercice d) l'élève doit décomposer la valeur exprimée en g en une valeur exprimée en kg et g : la formulation de l'exercice impose cette décomposition.

On peut effectivement penser que l'élève prend le premier chiffre pour déterminer le nombre de kilogrammes et le reste des chiffres pour déterminer les grammes.

Un premier exercice pourrait consister à demander la même conversion avec un nombre de grammes inférieur à 1 000.

Par exemple : « Écris 650 g en kg et g ». Dans ce cas, l'élève écrira-t-il $6\text{ kg } 50\text{ g}$?

Un autre exercice possible pourrait consister à demander la même conversion avec un nombre de grammes à 5 chiffres, sans faire figurer la séparation conventionnelle tous les trois chiffres.

Par exemple : « Écris 10050 g en kg et g ».

Un autre exercice consiste à l'inverse à demander à l'élève de convertir $4\text{ kg } 1\ 350\text{ g}$ en g.

3. Annexe B

a) En plaçant sur la balance à affichage digital une masse marquée de 1 kg , on fera apparaître $1\ 000\text{ g}$. Donc 2 kg c'est $2\ 000\text{ g}$ et $2\text{ kg } 40\text{ g}$, c'est $2\ 040\text{ g}$ ($2\ 000\text{ g} + 40\text{ g}$) et non 240 g .

b) L'aide spécifique que l'enseignant peut apporter à cet élève est de convertir à part le nombre de kilogrammes en nombre de grammes (en multipliant par 1 000), puis d'ajouter les deux valeurs exprimées en grammes.

● Exercice 98

Énoncé, p. 108

1. À propos de la séance 1

a) La fonction de cette étape est de permettre aux élèves de s'approprier la situation. Les élèves pourront superposer chacune des pièces reçues aux pièces du puzzle I, et reconstituer ce puzzle à partir de ces pièces.

b) Le maître veut faire émerger la notion d'aire d'une surface. D'autre part, il souhaite que les élèves aboutissent à la distinction entre surface et aire.

Deux surfaces différentes peuvent avoir la même aire.

On peut distinguer les surfaces par leurs formes, par les propriétés des figures qui les déterminent.

On peut distinguer les surfaces par la « place » qu'elles occupent en les comparant par des superpositions.

c) Pour répondre à la question, les élèves pourront procéder par découpage et superposition des pièces. Ils devront disposer d'une paire de ciseaux.

2. À propos de la séance 2

a) Sur papier quadrillé, il s'agit d'aborder la notion de mesure d'une aire à partir d'un étalon, d'une unité de mesure qui, dans ce cas, est le carreau du quadrillage.

La compétence visée du programme 2008 est :

« Mesurer ou estimer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé. »

Il s'agit également de « classer et ranger des surfaces selon leur aire. »

b) La procédure attendue par le maître semble être la détermination de l'aire de chaque pièce du puzzle en nombre de carreaux (l'unité d'aire étant donc le carreau). Chaque figure est composée de carreaux entiers et de demi-carreaux.

c) À cette étape, on s'intéresse aux pièces A, B et D.

Pour comparer les périmètres, on peut utiliser la longueur du côté d'un carreau (c) et la longueur de la diagonale d'un carreau (d).

Le périmètre de la pièce A est : $8c + 4d$.

Le périmètre de la pièce B est : $8d$.

Le périmètre de la pièce D est : $8c + 4d$.

On a $d < 2c$: la longueur de la diagonale d'un carreau est inférieure à deux fois la longueur du côté d'un carreau.

Les élèves peuvent donc trouver par cette procédure que le périmètre de la pièce A est égal au périmètre de la pièce D.

D'autre part, le périmètre de A et de D est supérieur au périmètre de B :

en effet $4d + 4d < 4d + 8c$, puisque $d < 2c$.

A, B et D ont la même aire (8 carreaux) et pas forcément le même périmètre. Le choix est judicieux si l'on veut aboutir à la connaissance par les élèves que deux figures de même aire n'ont pas forcément même périmètre.

A et D ont le même périmètre et la même aire. Si l'on veut montrer que deux figures ayant même périmètre n'ont pas forcément la même aire, ce choix ne sera pas judicieux.

● Exercice 99

Énoncé, p. 111

1. a) Pour répondre à la question 1) plusieurs types de procédures peuvent être mises en œuvre par des élèves de CM2.

- Premier type de procédures

Les élèves procèdent par perception visuelle : cela est possible pour les pièces A et B (la symétrie est facile à observer), voire pour les pièces E et G pour lesquelles on peut avec plus de difficulté reconnaître également une symétrie.

- Deuxième type de procédures

Si les élèves peuvent procéder par découpage des pièces, les pièces A et B peuvent se superposer, ainsi que les pièces E et G.

- Troisième type de procédures

Les élèves peuvent procéder par recollement des pièces (si le découpage est autorisé).

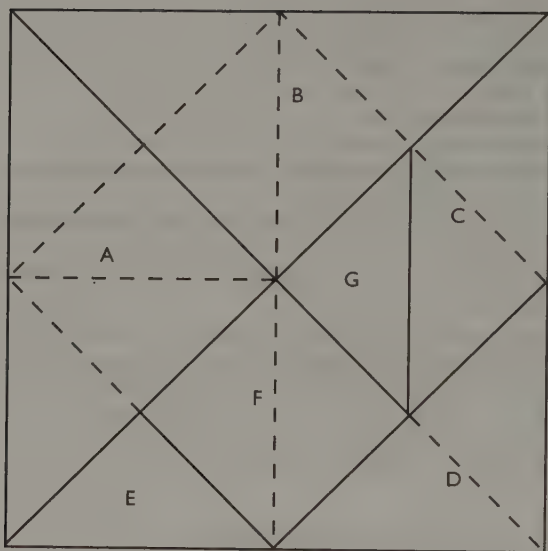
Les élèves peuvent alors constater que les pièces C, D et F ont la même aire car elles s'obtiennent en recollant les deux pièces E et G qui sont toutes deux superposables, donc de même aire.

- Quatrième type de procédures

L'élève peut exprimer l'aire de chaque pièce à partir d'une unité d'aire : par exemple la pièce E.

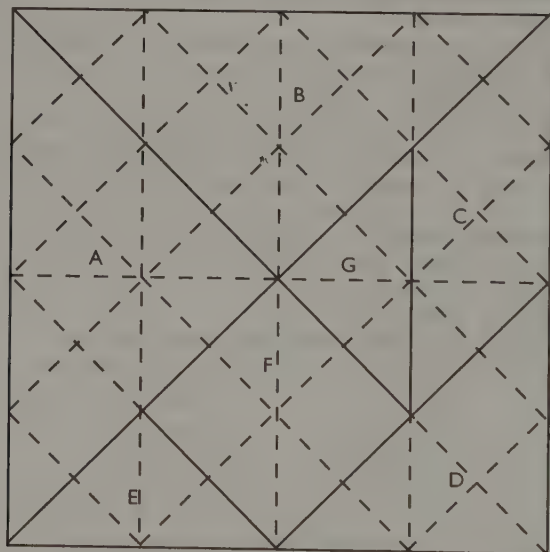
- Cinquième type de procédures

L'élève peut décomposer chaque pièce en utilisant sa règle de telle sorte de faire apparaître la même pièce (E par exemple).



Il peut également tracer un quadrillage plus serré en 16 carreaux (4×4), qui peut encore être partagé (mais cette procédure devient complexe) selon les diagonales du quadrillage. On obtient ainsi 64 triangles de même aire.

Dans ce cas on compare les surfaces à partir de l'unité d'aire la plus commode.



b) Les figures C, D et F ont la même aire et pas la même forme. C'est une des principales difficultés à travailler avec des élèves.

L'aide à apporter consiste à lui faire constater que les pièces C, D et F peuvent chacune être recouverte par deux pièces E, ou par les deux pièces E et G qui sont superposables.

c) Après cette activité le maître pourra faire noter dans le cahier de leçons les définitions et propriétés suivantes :

- Deux figures ont la même aire si elles sont superposables.
- Deux figures ont la même aire si après découpage de l'une d'entre elles on peut recouvrir exactement l'autre figure avec tous les morceaux de la première.
- Deux figures de formes différentes peuvent avoir la même aire.
- Deux figures de même aire ne sont pas nécessairement superposables.

2. a) Une procédure possible est d'utiliser comme unité d'aire la pièce E (ou la pièce G superposable à E).

Soit t , v , w et e les aires respectives des pièces T, V, W et E.

On obtient (par décomposition, recollement, superposition) : $t = 3e$, $v = 5e$ et $w = 8e$.

D'autre part : $e = \frac{1}{16} u$.

D'où :

$$t = \frac{3}{16} u. \quad v = \frac{5}{16} u. \quad w = \frac{8}{16} u = \frac{1}{2} u.$$

b) En choisissant E comme unité d'aire on obtient :

$T = 3E$; $V = 5E$; $W = 8E$. Les mesures des aires des trois figures sont alors des nombres entiers.

● Exercice 100

Énoncé, p. 112

1. Ces problèmes peuvent être proposés à des élèves de cycle 3. Ils développent leurs capacités de recherche.

La connaissance de la division peut simplifier les recherches, mais il s'agit avant d'analyser les figures proposées et de les interpréter en fonction de la question.

• Pour le premier problème, il y a plusieurs procédures puisque la longueur du grand rectangle est égale à 2 fois la longueur du petit rectangle ou 3 fois la largeur du petit rectangle. De même la largeur du grand rectangle est égale à la somme de la largeur et de la longueur du petit rectangle. La largeur du grand rectangle est donc une donnée supplémentaire que l'on peut utiliser pour vérifier ou pour trouver la deuxième dimension lorsque l'on a trouvé la première.

• Pour le second problème, il faut d'abord calculer la longueur d'un petit rectangle en utilisant la donnée de la longueur du grand rectangle, puis utiliser la donnée de la largeur du grand rectangle pour en déduire la largeur du petit. La principale difficulté consiste à reconnaître que la largeur du grand rectangle est égale à deux fois la longueur d'un petit rectangle plus deux fois sa largeur.

• Pour le troisième problème, il s'agit en outre d'être capable de calculer la longueur du côté d'un carré connaissant son périmètre (soit le périmètre divisé par 4), puis de repérer que la longueur du côté du petit carré est égal à la longueur du côté du grand carré moins deux fois la largeur du côté d'un rectangle. La résolution du troisième problème est facilitée si l'élève s'est exercé lors de la résolution du second, mais l'élève doit se rendre compte que les dimensions sont différentes de celles du second problème.

La notion de périmètre est bien une notion abordée au cycle 3. La présence du dessin (surface composée sur son pourtour de rectangles) peut occulter chez beaucoup d'élèves la compréhension du calcul du périmètre.

2.

• Première erreur possible.

L'élève peut mesurer directement sur le dessin la longueur et la largeur de chaque rectangle, sans tenir compte des données et du fait que le dessin n'est pas à l'échelle.

- Deuxième erreur possible.

L'élève peut procéder par essais successifs sans vérifier que les résultats trouvés sont compatibles avec les données (incohérence des résultats due à des prises de données partielles).

- Troisième erreur possible.

L'élève peut assimiler la largeur d'un petit rectangle à sa longueur.

3. Étapes d'une procédure possible.

1. Calcul de la longueur d'un petit rectangle : $18 : 3 = 6$ cm.

2. On retire à la largeur du grand rectangle deux fois la longueur du petit : $16 - 2 \times 6 = 16 - 12 = 4$ cm. Cette longueur correspond à deux largeurs d'un petit rectangle.

La largeur d'un petit rectangle est 2 cm.

Chaque étiquette bleue a pour dimensions : 6 cm \times 2 cm.

4. Connaissances supplémentaires pour résoudre le problème 3.

La principale connaissance supplémentaire concerne la connaissance du périmètre.

Il ne s'agit pas de calculer un périmètre, mais de déduire de sa connaissance la longueur du côté d'un carré. Il faut donc connaître ou savoir retrouver que le périmètre du carré est égal à 4 fois la longueur du côté.

La présence du dessin peut accroître la difficulté (confusion périmètre/surface, mais aussi perturbation introduite par la présence des rectangles).

L'articulation avec la deuxième partie du raisonnement est particulièrement délicate (calcul de la longueur du carré blanc, puis calcul du périmètre du carré blanc).

D'autre part, l'absence de dimensions sur la figure est en rupture avec les deux problèmes précédents.

Objectif CRPE

Concours de recrutement de professeurs des écoles

Admissibilité

Écrit

Entraînement

Maths

Cet ouvrage propose de nombreux exercices et problèmes pour s'entraîner de manière efficace à la seconde épreuve écrite d'admissibilité au CRPE portant sur les mathématiques.

Il est organisé suivant les 3 parties de l'épreuve :

- Partie 1 : problèmes portant sur un ou plusieurs domaines des programmes
- Partie 2 : exercices indépendants
- Partie 3 : analyses de supports d'enseignement

Les exercices des parties 2 et 3 sont classés selon leur champ mathématique dominant :

- Nombres, numération, opérations, arithmétique
- Géométrie
- Organisation de données, proportionnalité
- Mesure des grandeurs

Mais, conformément à l'esprit des sujets de ce concours, la plupart d'entre eux réfèrent à plusieurs domaines.

Les programmes de référence sont ceux de l'école primaire et du collège.

Les corrigés des exercices et problèmes permettent au candidat d'avoir une idée précise du niveau exigé.

Alain Descaves

Se préparer

Le cours complet, l'entraînement et la méthodologie.



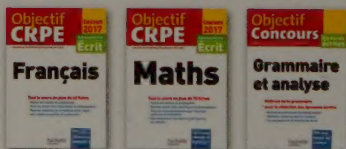
Tester ses connaissances

Des QCM et leurs réponses détaillées.



Réviser

Tout le cours en fiches synthétiques.



S'entraîner

Un entraînement pour chacune des 3 parties de l'épreuve.



12,90 €

24.0802.5

ISBN : 978-2-01-400519-6



9 782014 005196

hachette
ÉDUCATION

www.hachette-education.com

KO-513-573



NGER
LE COPILLAGE
LE LIVRE