GÉOMÉTRIE
et géométrie analytique

C. LEBOSSÉ
C. HÉMERY

CLASSE TERMINALE C



term. C

FERNAND NATHAN

GÉOMÉTRIE

ET

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

C. LEBOSSÉ
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Claude-Bernard

C. HÉMERY
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Lavoisier

GÉOMÉTRIE
ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Classe Terminale C

PROGRAMME 1966

FERNAND NATHAN, ÉDITEUR
18, rue Monsieur-Le-Prince, Paris.

COLLECTION LEBOSSÉ ET HÉMERY

avec la collaboration de M. FAURE

6e	Arithmétique et Travaux Pratiques
5e	Arithmétique et Géométrie
4e	Arithmétique, Algèbre et Géométrie
3e	Algèbre, Arithmétique et Géométrie

Nouveaux programmes 1966

2e A	Algèbre et Géométrie
2e C	Algèbre
2e C	Géométrie
1re A	Algèbre et notions de Statistique
1re B	Algèbre et Statistique
1re C et D	Algèbre et notions d'Analyse
1re C	Géométrie et Géométrie analytique
1re D	Géométrie et Statistique
Terminale A	Notions d'Analyse et de Probabilités
Terminale B	Algèbre et Probabilités
Terminales C, D et T	Algèbre et Analyse
Terminale C	Géométrie et Géométrie analytique
Terminale D	Géométrie et éléments de Probabilités

Enseignement technique

LEBOSSÉ-HÉMERY-FAURE

Nouveaux programmes 1964 et 1966

2e Techn. industrielle	Algèbre
2e Techn. industrielle	Géométrie
1re Techn. industrielle	Algèbre, Trigonométrie, Géométrie
Classes Terminales	Mathématiques (en 1 seul volume)

© *1967, Fernand Nathan, Paris*

EXTRAITS DES PROGRAMMES DU 8 JUIN 1966

(B. O. n° 26 du 30-6-66).

CLASSE TERMINALE C

GÉOMÉTRIE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

I. — Compléments de géométrie plane.

1° Définition du birapport d'un ensemble ordonné de quatre points alignés. Division harmonique, relations caractéristiques (révision des notions figurant au programme de Seconde C).

Birapport d'un ensemble ordonné de quatre droites concourantes ou parallèles d'un plan. Faisceau harmonique de droites.

Polaire d'un point par rapport à deux droites ; application aux constructions élémentaires sur les divisions et faisceaux harmoniques.

2° Applications. Ensemble des points d'un plan dont le rapport des distances à deux droites de ce plan est donné.

Rapport des segments déterminés sur un côté d'un triangle par une bissectrice de l'angle opposé.

3° Angle orienté de deux demi-droites ou de deux vecteurs (rappel). Angle orienté de deux droites.

Mesure, dans un plan orienté, d'un angle orienté de deux demi-droites, de deux droites. Formules de Chasles. Un plan orienté étant muni d'un axe polaire, repérage par son angle polaire dans ce plan de la direction d'un axe, de la direction d'une droite.

4° Ensemble des points M d'un plan tels que, A et B étant deux points de ce plan, l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ ou l'angle orienté de droites (MA, MB) soit égal à un angle donné.

5° Puissance d'un point par rapport à un cercle ; différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles, axe radical de deux cercles.

Cercles orthogonaux.

Faisceaux linéaires de cercles, faisceaux orthogonaux.

6° Points conjugués, polaire d'un point par rapport à un cercle, pôle d'une droite, droites conjuguées.

II. — Compléments de géométrie dans l'espace.

Le rappel des notions de géométrie analytique dans le plan et dans l'espace acquises en Seconde et en Première, interviendra naturellement à l'occasion de l'étude de divers chapitres du présent programme et à l'occasion de problèmes ; il ne doit pas donner lieu à une révision systématique.

1° Angle d'une droite et d'un plan. Aire de la projection orthogonale d'un polygone plan. Problème de la perpendiculaire commune et de la plus courte distance de deux droites.

2° Barycentre d'un système de n points affectés de coefficients dont la somme n'est pas nulle, définition, propriétés. Coordonnées du barycentre. Centre de gravité d'un triangle, d'un tétraèdre.

Transformation des sommes :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} \text{ en géométrie affine,}$$
$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 \text{ en géométrie métrique,}$$

α, β, γ étant des réels quelconques non nuls, dans les deux cas :

$$\alpha + \beta + \gamma \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

III. — Transformations ponctuelles (plan et espace).

Notes préliminaires.

L'ordre de présentation et la nature même des questions suivantes dépendent de notions premières dont le professeur garde le choix ; il n'y a pas lieu de faire une « construction axiomatique » de la géométrie, mais il appartient au professeur de préciser ce qu'il admet, tant pour les axiomes et leurs conséquences que pour les problèmes relatifs, en particulier, à la « mesure des angles », à l'orientation du plan et à celle de l'espace.

Les généralités qui précèdent ne pourront faire l'objet d'aucune question écrite ou orale au baccalauréat.

L'étude et la représentation de figures dans l'espace qui seront rencontrées dans cette rubrique peuvent être facilitées par l'emploi de projections sur des plans convenablement choisis, en particulier : perpendiculaire commune à deux droites ; rotation autour d'un axe, vissage ; symétries du cube, du tétraèdre régulier ; affinité orthogonale, projection orthogonale du cercle, etc.

1° *Translation.* — Révision des questions figurant au programme de Seconde C. Produit de translations ; groupe des translations.

2° *Déplacements et symétries en géométrie plane.* — Rotation autour d'un point ; symétrie par rapport à un point. Symétrie (orthogonale) par rapport à une droite (symétrie axiale).

Produit de deux symétries axiales, de rotations et de symétries axiales : formes réduites (une translation ou une rotation, ou le produit d'une symétrie axiale et d'une translation parallèle à l'axe).

Déplacement. Forme réduite d'un déplacement ; centre de rotation. Groupe des déplacements.

3° *Déplacements dans l'espace.* — Rotation autour d'un axe ; demi-tour (symétrie orthogonale par rapport à une droite).

Tout déplacement dans l'espace ayant un point double est une rotation.

Produit de deux demi-tours d'axes non coplanaires, vissage.

4° *Symétries dans l'espace.* — Symétrie par rapport à un point, symétrie par rapport à un plan. Produit de deux telles symétries.

Toute translation ou rotation est un produit de deux symétries par rapport à un plan.

5° *Plans de symétrie, axes, centres d'une figure.* — Définitions. Exemples : couple de droites, couples de plans, triangle équilatéral, cube, tétraèdre régulier.

6° *Homothétie* (plan et espace). — Révision des questions figurant au programme de Seconde C. Produits de deux homothéties, d'une homothétie et d'une translation. Groupe des homothéties-translations.

Applications de l'homothétie. Cercles homothétiques dans l'espace. Centres d'homothéties de deux sphères, de trois sphères prises deux à deux.

7° *Similitudes.* — Similitude directe en géométrie plane. Forme réduite ; centre de similitude. Le groupe des similitudes directes planes.

Relation avec la transformation définie dans le plan complexe par $z' = az + b$.

Rapport des aires de deux polygones semblables.

8° *Affinité (géométrie plane).* — Définition. Produit de deux affinités ayant le même axe et la même direction. Transformée d'une droite ; transformée de la tangente en un point d'une courbe.

Affinité orthogonale : interprétation à l'aide d'une rotation et d'une projection orthogonale.

9° *Inversion.* — Définition. Produit de deux inversions ayant même pôle ; produit d'une inversion et d'une homothétie ayant pour centre le pôle d'inversion. Cercle (ou sphère) d'inversion.

Étude, en géométrie plane seulement, des questions suivantes relatives à l'inversion :

Conservation du contact ; problème de la conservation des angles. Transformés d'une droite, d'un cercle. Inversions pouvant échanger une droite et un cercle, deux cercles.

Transformés par inversion des cercles d'un faisceau linéaire.

IV. — Coniques.

Le choix des définitions, l'ordre de présentation des diverses questions sur les coniques et, notamment, de leurs propriétés caractéristiques, ne sont nullement imposés, ni même suggérés, par l'ordre d'énumération ci-après.

1° Étude de la courbe représentée en axes rectangulaires par l'équation :

$$y^2 = ax^2 + bx + c.$$

Différentes formes de courbes. Discussion de l'existence d'un centre de symétrie, de l'existence d'asymptotes ; équation réduite, et, dans le cas où la courbe admet des asymptotes, équation de la courbe rapportée à ses asymptotes.

2° Ensemble des points d'un plan dont la somme ou la différence des distances à deux points donnés du plan a une valeur donnée.

Ensemble des points d'un plan dont le rapport des distances à un point et à une droite donnés du plan a une valeur donnée.

Équations de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à leurs axes de symétrie ; équation de la parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet.

Sections planes d'un cône de révolution, d'un cylindre de révolution.

3° Affinités orthogonales faisant correspondre une ellipse et son cercle principal ; ellipse considérée comme projection orthogonale d'un cercle. Aire de l'ellipse.

L'étude des diamètres des coniques, l'extension à une conique, considérée comme projection ou perspective d'un cercle, des propriétés des éléments conjugués par rapport à un cercle, les propriétés tangentielles des coniques, sont en dehors du programme.

V. — Cinématique.

1° *Mouvement d'un point ; sa relativité ; trajectoire.*

Modes de définition d'un mouvement :

— par les coordonnées du mobile par rapport à un repère cartésien fixe ;

— par la donnée d'un support géométrique de la trajectoire et par une loi horaire.

2° *Vecteur-vitesse d'un point.*

Vecteur-vitesse à un instant donné.

Coordonnées du vecteur-vitesse, lorsque le mouvement est défini par rapport à un repère cartésien donné. Vecteur-vitesse de la projection du mobile sur un plan ou sur une droite fixe.

Détermination du vecteur-vitesse lorsqu'on connaît le support géométrique de la trajectoire et la loi horaire.

Mouvement circulaire : vecteur-vitesse, vitesse angulaire.

3° *Vecteur accélération d'un point.*

Définition du vecteur-accélération à un instant donné.

Coordonnées du vecteur-accélération, lorsque le mouvement est défini par rapport à un repère cartésien donné. Vecteur-accélération de la projection du mobile sur un plan ou sur une droite fixe.

Application à l'étude du mouvement circulaire et du mouvement hélicoïdal uniforme.

4° Mouvement d'un point dont le vecteur-accélération reste équipollent à un vecteur fixe (liaison avec le mouvement d'un point pesant dans le vide) : trajectoire, mouvements projetés sur un axe parallèle et sur un plan perpendiculaire au vecteur-accélération.

5° *Mouvement de translation d'un corps solide* par rapport à un repère donné. Trajectoires, vecteurs-vitesse, vecteurs-accélération des divers points] invariablement liés au corps.

Changement de repère (mouvement d'un point) : composition des vitesses uniquement dans le cas où le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation.

GÉOMÉTRIE ORIENTÉE

1re Leçon

DIVISION HARMONIQUE

1. Définition. — ***On appelle birapport d'un ensemble ordonné de quatre points alignés*** A, B, C, D, ***l'expression :***

$$(ABCD) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \iff (ABCD) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}. \qquad (1)$$

En désignant par a, b, c, d les abscisses des quatre points A, B, C, D sur l'axe $x'x$ (fig. 1) on obtient :

$$(ABCD) = \frac{a - c}{b - c} : \frac{a - d}{b - d} = \frac{(a - c)(b - d)}{(a - d)(b - c)} = \frac{(ab + cd) - (ad + bc)}{(ab + cd) - (ac + bd)} \qquad (2)$$

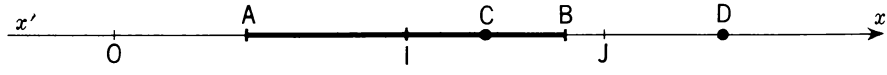


Fig. 1

On dit également que le nombre réel $\lambda = (ABCD)$ ainsi obtenu est le birapport de l'ensemble ordonné des quatre nombres a, b, c, d et on écrit :

$$(ABCD) = (a, b, c, d) = \lambda.$$

Notons que la donnée du birapport (ABCD) fixe la position de l'un des points, D par exemple, connaissant la position des trois autres car :

$$(ABCD) = \lambda \iff \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{1}{\lambda} \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}.$$

En particulier : $(ABCD) = 1$ avec A et B distincts, implique que C et D sont confondus.

2. Propriétés du birapport. — 1° *Le birapport* (ABCD) *reste invariant lorsqu'on inverse simultanément chacun des couples* (AB) *et* (CD) *ou lorsqu'on échange ces deux couples.*

On vérifie immédiatement que :

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}. \qquad (3)$$

2° *Avec quatre points alignés* A, B, C, D, *on peut former six birapports distincts, et la valeur de l'un d'eux détermine celle de chacun des autres.*

D'après les relations (3) on peut toujours supposer que le point A par exemple occupe le premier rang et l'on obtient les six birapports distincts :

(ABCD), (ABDC), (ACBD), (ACDB), (ADBC) et (ADCB).

Or : $(ABCD) = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} = \lambda \implies (ABDC) = \dfrac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}} = \dfrac{1}{\lambda}.$ (5)

D'autre part l'identité d'Euler : $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$

s'écrit : $\dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} + \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AD} \cdot \overline{CB}} = 1 \iff (ABCD) + (ACBD) = 1.$

Donc : $(ABCD) = \lambda \implies (ACBD) = 1 - \lambda.$ (6)

D'après (5) : $(ACBD) = 1 - \lambda \implies (ACDB) = \dfrac{1}{1 - \lambda}.$

D'après (6) : $(ABDC) = \dfrac{1}{\lambda} \implies (ADBC) = 1 - \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}.$

D'après (5) : $(ADBC) = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} \implies (ADCB) = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}.$

On en déduit par exemple que :

$(ABCD) = (MNPQ) \iff (ADBC) = (MQNP).$

3. Remarque. — Si les points A, B, C restant fixes sur l'axe $x'x$, le point D s'éloigne à l'infini sur cet axe, le rapport $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \dfrac{a - d}{b - d}$ tend vers 1 et :

$(ABCD) = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \implies \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{a - c}{b - c}.$ On écrit : $(ABC\infty) = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}.$

4. Division harmonique. — ***L'ensemble ordonné de quatre points alignés*** A, B, C, D, ***constitue une division harmonique lorsque le birapport*** (ABCD) ***est égal à*** — 1.

$(ABCD) = -1 \iff \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \iff \overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0.$ (1)

On dit aussi que C et D sont *conjugués harmoniques* par rapport à A et B.

Comme $(ABCD) = -1 \iff (CDAB) = -1$, les points A et B sont également conjugués par rapport à A et B (fig. 1).

Deux points distincts C ***et*** D ***sont conjugués harmoniques par rapport aux points*** A ***et*** B, ***s'ils divisent le vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ ***dans le même rapport arithmétique.***

En effet les rapports $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ et $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$, égaux en valeur absolue, ne peuvent avoir le même signe, sinon C et D seraient confondus. Donc :

$\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{DA}{DB} \implies \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \iff (ABCD) = -1.$

Notons, d'après les relations établies au n° 2, que $(ABCD) = -1$ implique $(ABDC) = -1$, $(ACBD) = (ADBC) = 2$ et $(ACDB) = (ADCB) = \dfrac{1}{2}.$

5. Relation entre les abscisses. — La relation : $\overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$ (n° 4) s'écrit en désignant par a, b, c, d les abscisses de A, B, C et D :

$$(c - a)(d - b) + (d - a)(c - b) = 0.$$
$$2(ab + cd) = ac + ad + bc + bd$$
$$2(ab + cd) = (a + b)(c + d).$$

soit :
$$\boxed{(a + b)(c + d) = 2(ab + cd).} \qquad (2)$$

Se rappeler : *Produit des deux sommes = deux fois la somme des produits.*

6. Formes remarquables de la relation précédente.

1° Prenons l'origine O en A, on a : $a = 0$, la relation (2) devient :

$$b(c + d) = 2cd$$

et en divisant par bcd :
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}.$$

Or : $b = \overline{AB}$, $c = \overline{AC}$ et $d = \overline{AD}$. On obtient :

$$\boxed{\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}.} \qquad (3)$$

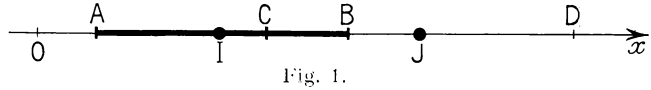


Fig. 1.

Cette relation équivaut à la relation (1) et se transforme en permutant A et B entre eux ou en échangeant A et B avec C et D :

$$\frac{2}{\overline{BA}} = \frac{1}{\overline{BC}} + \frac{1}{\overline{BD}}; \quad \frac{2}{\overline{CD}} = \frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CB}} \quad \text{et} \quad \frac{2}{\overline{DC}} = \frac{1}{\overline{DA}} + \frac{1}{\overline{DB}}. \qquad (3')$$

2° Prenons l'origine O en I milieu de AB. On a alors : $b = -a$ d'où : $a + b = 0$ et la relation (2) devient :

$$0 = 2(-a^2 + cd). \iff a^2 = cd.$$

Or $a = \overline{IA} = -\overline{IB}$, $c = \overline{IC}$ et $d = \overline{ID}$.

D'où :
$$\boxed{\overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}.} \qquad (4)$$

Cette relation montre que $\overline{IC} \cdot \overline{ID}$ est positif, donc que C et D sont d'un même côté du milieu I de AB.

D'autre part si C se rapproche de A (ou de B) il en est de même de D. Si C se rapproche de I, $\overline{IC}$ devient aussi voisin de zéro que l'on veut, tandis que ID dépasse en valeur absolue tout nombre fixé à l'avance.

Quand le point C est en I, le point D n'existe plus. Autrement dit, le milieu d'un segment n'a pas de conjugué harmonique par rapport aux extrémités de ce segment : le conjugué est rejeté à l'infini sur la droite AB.

3° De (3') on déduit :

$$\frac{2}{\overline{CD}} = \frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CA} + \overline{CB}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = \frac{2\overline{CI}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}$$

$$\text{soit : } \frac{1}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} \iff \overline{CD} \cdot \overline{CI} = \overline{CA} \cdot \overline{CB} \qquad (5)$$

On démontre de même les relations suivantes (où J désigne le milieu de CD) :

$$\overline{DC} \cdot \overline{DI} = \overline{DA} \cdot \overline{DB}\,; \qquad \overline{AB} \cdot \overline{AJ} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}\,; \qquad \overline{BA} \cdot \overline{BJ} = \overline{BC} \cdot \overline{BD}$$

7. Remarque. — Les relations (2), (3), (4) et (5) équivalent à la relation (1). Elles expriment des conditions nécessaires et suffisantes pour que la division (ABCD) soit harmonique.

FAISCEAU HARMONIQUE

8. Théorème. — ***Le birapport des points d'intersection de quatre droites d'un même plan, concourantes ou parallèles, par une sécante quelconque est un nombre constant appelé birapport des quatre droites données.***

1er CAS : *Droites parallèles* (fig. 2) :

D'après le théorème de Thalès, les divisions ABCD et A′B′C′D′ déterminées par les sécantes Δ et Δ′ sur les droites parallèles Ax, By, Cu et Dv sont des divisions semblables :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}} \implies (ABCD) = (A'B'C'D').$$

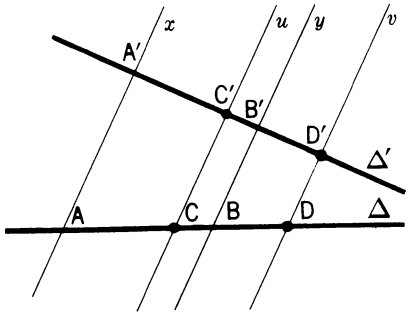


Fig. 2

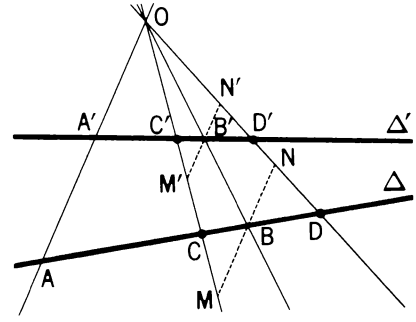


Fig. 3

2e CAS : *Droites concourantes* (fig. 3).

Les quatre droites OA, OB, OC, OD sont coupées par les sécantes Δ et Δ′ suivant les divisions ABCD et A′B′C′D′. Par les points B et B′ menons les parallèles MN et M′N′ à la droite OA.

De la similitude des triangles COA et CMB et de celle des triangles DOA et DNB, on déduit :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} &= \frac{\overline{OA}}{\overline{MB}} \\ \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} &= \frac{\overline{OA}}{\overline{NB}} \end{aligned}\right\} \implies (ABCD) = \frac{\overline{NB}}{\overline{MB}}$$

De même : $$(A'B'C'D') = \frac{\overline{N'B'}}{\overline{M'B'}}.$$

Mais les trois droites concourantes OB, OC et OD déterminent des divisions semblables sur les parallèles MN et M′N′ :

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{N'B'}}{\overline{M'B'}} \Longrightarrow (ABCD) = (A'B'C'D').$$

Ce birapport (ABCD) = λ, indépendant de la sécante Δ est le birapport des quatre droites OA, OB, OC, OD, prises dans cet ordre, ou celui du faisceau O(ABCD). On écrit : O(ABCD) = λ.

La division A′B′C′D′ constitue la projection de centre O (ou perspective) de la division ABCD de Δ sur la droite Δ′. C'est pourquoi on dit que *le birapport de quatre points alignés se conserve en projection centrale* (fig. 3) *ou parallèle* (fig. 2).

9. Définition. — *Quatre droites concourantes ou parallèles d'un plan constituent un faisceau harmonique lorsque leur birapport est égal à* — 1.

On obtient donc un faisceau harmonique en joignant un point donné O aux quatre points d'une division harmonique (fig. 3) ou en menant par ces points quatre droites parallèles à une direction donnée (fig. 2).

On écrit : O(ABCD) = — 1.

Le point O est le *centre* du faisceau et les droites OA, OB, OC, OD sont les *rayons* du faisceau. Les rayons OC et OD sont dits *conjugués harmoniques* par rapport aux rayons OA et OB. Si trois des rayons, OA, OB, OC par exemple, sont donnés, le quatrième OD est déterminé. Notons que :

$$O(ABCD) = -1 \iff O(ABDC) = -1 \quad \text{ou} \quad O(CDAB) = -1.$$

10. Théorème. — *Pour qu'un faisceau de quatre droites concourantes soit harmonique, il faut et il suffit que trois de ces droites déterminent des segments égaux sur une parallèle à la quatrième :*

En effet (fig. 3) : $O(ABCD) = (ABCD) = \dfrac{\overline{NB}}{\overline{MB}}$.

Pour que : O(ABCD) = — 1, il faut et il suffit que B soit le milieu de MN.

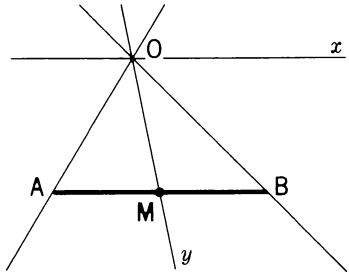


Fig. 4

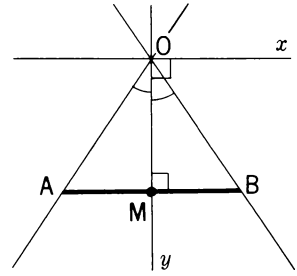


Fig. 5

11. Exemples de faisceaux harmoniques.

1° ***Deux côtés d'un triangle, la médiane relative au troisième côté et la parallèle à ce troisième côté.***

En effet le faisceau O(ABM*x*) (fig. 4) est harmonique car M est le milieu de AB parallèle au rayon O*x*.

2° ***Deux droites concourantes et leurs bissectrices.***

En effet si le triangle OAB (fig. 5) est isocèle, la médiane OM est bissectrice de l'angle AOB et hauteur. Le rayon Ox parallèle à la base AB est perpendiculaire à OM et est donc la bissectrice extérieure de l'angle AOB.

Remarquons que : *dans ce faisceau les rayons conjugués* OM *et* Ox *sont rectangulaires.*

12. Réciproque. — *Si dans un faisceau harmonique deux rayons conjugués sont rectangulaires, ces rayons sont les bissectrices des angles formés par les deux autres.*

Supposons (fig. 5) que les rayons conjugués Ox et Oy soient rectangulaires. La parallèle AB à Ox est coupée en son milieu M par Oy et dans le triangle OAB, OM perpendiculaire à Ox et par suite à AB est en même temps médiane et hauteur. Le triangle OAB est isocèle et OM et Ox sont les bissectrices de l'angle AOB.

POLAIRE D'UN POINT PAR RAPPORT A DEUX DROITES

13. Définition. — *Deux points* M *et* P *sont conjugués par rapport à deux droites données* D *et* D′ *si la droite* MP *coupe* D *et* D′ *respectivement en* A *et* B *conjugués harmoniques par rapport aux points* M *et* P.

Si la division ABMP est harmonique, les points M et P sont conjugués par rapport aux droites D et D′ concourantes (fig. 6) ou parallèles (fig. 7). Il en résulte que le point P par exemple a une infinité de conjugués par rapport aux droites données D et D′.

14. Théorème. — *Le lieu géométrique des conjugués d'un point fixe* P *par rapport à deux droites données* D *et* D′ *est une droite* Δ *appelée polaire de* P *par rapport aux droites* D *et* D′.

1° D *et* D′ *sont concourantes* (fig. 6). Pour que M et P soient conjugués par rapport à D et D′, il faut et il suffit que le faisceau O (xyMP) soit harmonique.

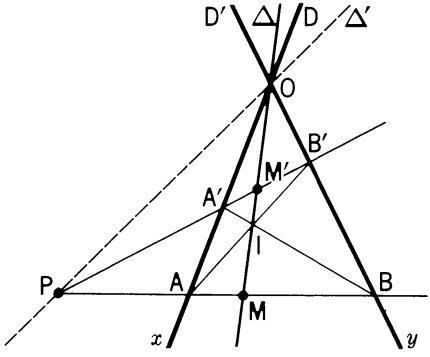


Fig. 6

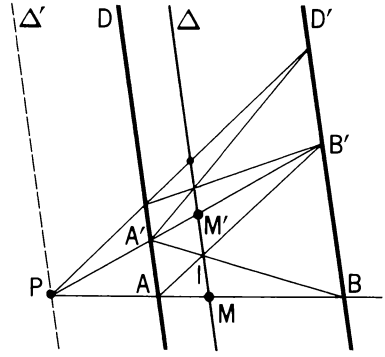


Fig. 7

Les rayons Ox, Oy et OP de ce faisceau sont fixes. Il en est donc de même du quatrième OM (n° 9). Lorsque la sécante PAB tourne autour de P, le point M décrit entièrement la droite Δ, conjuguée harmonique de la droite OP par rapport aux droites D et D′.

2° D *et* D′ *sont parallèles* (fig. 7). Si M et P sont conjugués par rapport à D et D′, les parallèles à D et D′ issues de P et M forment, avec D et D′, un faisceau harmonique de parallèles (DD′Δ′Δ) dont les trois rayons sont fixes. Il en est de même du quatrième Δ qui constitue le lieu du point M.

15. Propriétés de la polaire.

1° *Si la polaire de* P *passe par* M, *la polaire de* M *passe par* P.

2° Si le point P décrit la droite OP (fig. 6) les rayons Ox, Oy, OP du faisceau harmonique O(xyPM) sont fixes. La quatrième l'est aussi : *Tous les points de la droite* OP *ont même polaire par rapport aux droites* D *et* D′, *concourantes en* O.

De même, tous les points de la droite Δ′ ont même polaire par rapport aux droites D et D′ parallèles à Δ′ (fig. 7).

16. Construction de la polaire. — Soient M et M′ les points de la polaire Δ du point P par rapport aux droites données D et D′ et situés sur les sécantes PAB et PA′B′ (fig. 6 et 7). Les points M et M′ appartiennent aussi à la polaire de P par rapport aux droites AB′ et BA′, sécantes en I. Or, cette polaire, donc la droite Δ, passe par I. La polaire Δ cherchée est la droite OI lorsque D et D′ sont concourantes en O (fig. 6). C'est la parallèle à D et D′ issue de I, lorsque D et D′ sont parallèles (fig. 7). Dans ce dernier cas (ou si le point O est inaccessible) on construit un second point J de Δ à l'aide d'une troisième sécante issue de P.

La construction de la polaire d'un point P par rapport à deux droites D et D′ nécessite uniquement l'emploi de la règle.

17. Construction du conjugué d'un point par rapport à deux autres.

Pour construire le conjugué harmonique M du point P rapport aux points donnés A et B, il suffit de mener par A et B deux droites Ax et By se coupant en O (fig. 6) puis de construire la polaire Δ de P par rapport aux sécantes Ox et Oy. Cette polaire coupe AB au point M cherché.

APPLICATIONS

PROPRIÉTÉ DES BISSECTRICES D'UN TRIANGLE

18. Théorème. — ***Les bissectrices d'un angle d'un triangle divisent intérieurement et extérieurement le côté opposé en deux segments proportionnels aux côtés adjacents.***

Soit un triangle ABC (fig. 8). Par B menons la parallèle à AC qui coupe en E et E′ les bissectrices intérieure et extérieure AD et AD′ de l'angle A.

Ces bissectrices sont perpendiculaires. Le faisceau A(BCDD′) est harmonique (n° 11) et B est le milieu de EE′ (n° 10). La droite AB est la médiane relative à l'hypoténuse du triangle rectangle AEE′. Donc :
AB = BE = BE′.

La similitude des triangles DEB et DAC donne :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{AC} \Longrightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

De même, la similitude des triangles D′E′B et D′AC donne :

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{E'B}{AC} \Longrightarrow \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}.$$

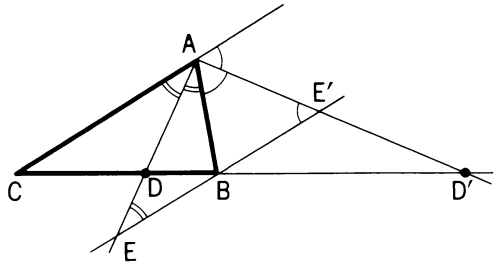


Fig. 8

On vérifie ainsi que D et D′ divisent BC dans le même rapport.

REMARQUE. — Si AB = AC, le point D est au milieu de BC et la bissectrice extérieure AE′ est parallèle à BC. On vérifie que le conjugué harmonique du milieu d'un segment par rapport aux extrémités de ce segment est rejeté à l'infini sur le support de ce segment.

19. Réciproque. — ***Les droites qui joignent un sommet*** A ***d'un triangle aux points qui divisent le côté opposé*** BC ***dans le rapport des côtés adjacents*** AB ***et*** AC ***sont les bissectrices de l'angle*** A.

En effet il n'existe que deux points D et D′ divisant BC dans le rapport $\frac{AB}{AC}$.

Or, d'après le théorème précédent, ces deux points sont les pieds des bissectrices de l'angle A.

20. Calcul des segments DB, DC, D′B **et** D′C.

Posons $BC = a$ $CA = b$ et $AB = c$. (On suppose $b > c$.)

1° On a : $\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b}$ et $DB + DC = BC = a$.

Donc $\frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{DB + DC}{c + b} = \frac{a}{b + c}$.

Soit $DB = \frac{ac}{b + c}$ et $DC = \frac{ab}{b + c}$.

2° De même : $\frac{D'B}{D'C} = \frac{c}{b}$ et $D'C - D'B = BC = a$.

Donc $\frac{D'B}{c} = \frac{D'C}{b} = \frac{D'C - D'B}{b - c} = \frac{a}{b - c}$.

Soit $D'B = \frac{ac}{b - c}$ et $D'C = \frac{ab}{b - c}$.

QUADRILATÈRE COMPLET

21. Définition. — ***On appelle quadrilatère complet la figure formée par quatre droites se coupant deux à deux.***

On obtient un quadrilatère complet ABCA′B′C′ en coupant les trois droites BC, CA et AB par une transversale A′B′C′ (fig. 9). Les quatre droites sont les côtés et leurs six points d'intersection sont les sommets du quadrilatère complet.

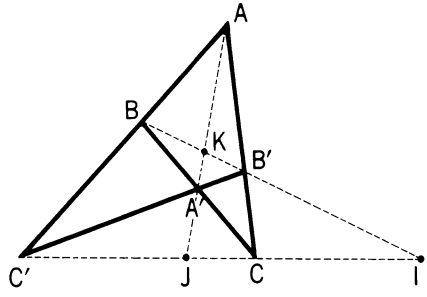


Fig. 9

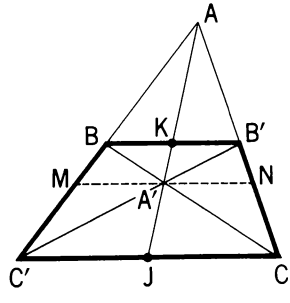


Fig. 10

Deux sommets tels que A et A′ non situés sur un même côté sont dits opposés et les trois droites AA′, BB′ et CC′ sont les *diagonales* du quadrilatère complet. Elles forment en général un triangle IJK appelé *triangle diagonal.*

22. Théorème. — ***Chaque diagonale d'un quadrilatère complet est divisée harmoniquement par les deux autres.***

Soit un quadrilatère complet ABCA'B'C' obtenu en coupant les trois côtés du triangle ABC par la transversale A'B'C' (fig. 9). La droite AA'JK est la polaire de I par rapport aux droites ABC' et AB'C, ce qui montre que les divisions (BB'IK) et (CC'IJ) sont harmoniques. D'autre part A' est un point de la polaire de A par rapport aux droites IBB' et ICC'. La division AA'JK est harmonique.

23. Corollaire. — ***Dans tout trapèze les milieux des deux bases divisent harmoniquement le segment qui joint le point d'intersection des diagonales et le point d'intersection des côtés non parallèles.***

Si les diagonales BB' et CC' du quadrilatère complet ABCA'B'C' sont parallèles le point I est rejeté à l'infini. Les points J et K sont alors les milieux respectifs de CC' et BB', bases du trapèze BB'CC' (fig. 10).

Notons aussi que la parallèle aux bases, issue de A' coupe les côtés obliques BC' et B'C en M et N conjugués harmoniques de A par rapport aux segments BC' et B'C. La droite MN est en effet la polaire de A par rapport aux deux droites parallèles BB' et CC' (n° 9).

Les divisions BKB' et MA'N sont homologues dans une homothétie de centre A donc :

$$KB = KB' \implies A'M = A'N.$$

Le point A' est le milieu du segment MN.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

24. Théorème. — ***Le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à deux points donnés*** A ***et*** B ***a une valeur*** k ***différente de l'unité est un cercle admettant pour diamètre le segment qui joint les points qui divisent le segment*** AB ***dans le rapport*** k.

1° Soit M un point du lieu (fig. 11). Les bissectrices de l'angle AMB coupent AB en I et J et (n° 18) :

$$\frac{IA}{IB} = \frac{JA}{JB} = \frac{MA}{MB} = k.$$

Les points I et J divisent donc le segment AB dans le rapport k. Ces points sont donc indépendants du point M et peuvent être construits à partir des données. Comme l'angle IMJ est droit, M appartient au cercle de diamètre IJ.

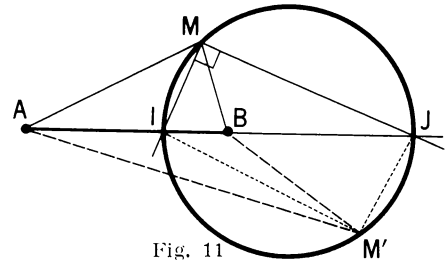


Fig. 11

2° Réciproquement soit M' un point quelconque de ce cercle. La division ABIJ étant harmonique, il en est de même du faisceau M' (ABIJ). Or les rayons conjugués M'I et M'J sont rectangulaires. Ils sont donc bissectrices de l'angle AM'B (n° 12) et par suite $\frac{M'A}{M'B} = \frac{IA}{IB} = k$.

Le lieu cherché est donc le cercle de diamètre IJ.

REMARQUE. — Si $k = 1$ le raisonnement précédent n'est plus valable car J n'existe plus. Mais on a alors MA = MB et le lieu est la médiatrice de AB.

25. Calcul du rayon du lieu précédent. — On peut toujours, en échangeant si besoin est A et B, supposer MA > MB et $k > 1$. On a alors (cf. n° 20) en posant AB = a.

$$\frac{IA}{k} = \frac{IB}{1} = \frac{IA + IB}{k+1} = \frac{a}{k+1} \quad \text{soit} \quad IA = \frac{ak}{k+1}$$

$$\frac{JA}{k} = \frac{JB}{1} = \frac{JA - JB}{k-1} = \frac{a}{k-1} \quad \text{soit} \quad JA = \frac{ak}{k-1}.$$

On en déduit : $IJ = JA - IA = \frac{ak}{k-1} - \frac{ak}{k+1} = \frac{2ak}{k^2-1}$.

Le rayon R du cercle de diamètre IJ est donc : $R = \frac{ak}{k^2-1}$.

26. Théorème. — ***Le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à deux droites données a une valeur donnée k se compose de l'ensemble de deux droites conjuguées harmoniques par rapport aux droites données.***

1° *Les droites données sont concourantes.* — Soit O le point commun aux deux droites données Ox et Oy (fig. 12). Désignons par M un point du lieu : $\frac{MH}{MK} = k$ et par M_1 un point quelconque de la droite OM. Les triangles homothétiques OM_1H_1 et OMH d'une part, OM_1K_1 et OMK d'autre part donnent :

$$\frac{M_1H_1}{MH} = \frac{OM_1}{OM} = \frac{M_1K_1}{MK} \Longrightarrow \frac{M_1H_1}{M_1K_1} = \frac{MH}{MK} = k.$$

Tout point de la droite OM est un point du lieu. Celui-ci se compose donc de droites issues de O.

Cherchons les points du lieu sur une sécante AB aux deux droites Ox et Oy, telle que OA = OB. Pour tout point M de AB les triangles rectangles MHA et MKB qui ont des angles aigus égaux en A et B sont semblables et $\frac{MH}{MK} = \frac{MA}{MB}$. Le point M sera un point du lieu si le rapport $\frac{MA}{MB} = k$. Lorsque le rapport k est différent de 1, il y a sur la droite AB deux points M et M′ répondant à la question et le lieu cherché se compose des deux droites OM et OM′ conjuguées harmoniques par rapport aux deux droites Ox et Oy (n° 9).

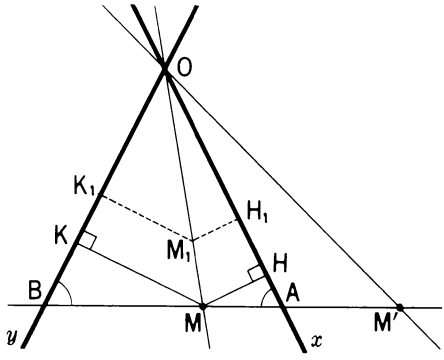


Fig. 12

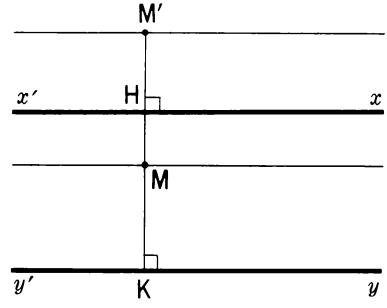


Fig. 13

Si $k = 1$, le lieu se compose des deux bissectrices de l'angle xOy, conjuguées harmoniques par rapport aux côtés de cet angle (n° 11).

2° *Les droites données sont parallèles.* — Sur toute perpendiculaire commune HK aux deux parallèles $x'x$ et $y'y$ données (fig. 13) il existe deux points du lieu : les points

M et M′ qui divisent HK dans le rapport donné k. Les longueurs MH et M′H sont alors déterminées. En posant HK $= a$ et en supposant $k < 1$:

$$\mathrm{MH} = \frac{ak}{1+k} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M'H} = \frac{ak}{1-k}.$$

Le lieu se compose de deux parallèles aux droites données, conjuguées harmoniques par rapport à ces droites.

Si $k = 1$, le point M′ n'existe plus et le lieu se réduit à la médiatrice de HK.

27. Théorème de Ménélaüs. — ***Pour que les points*** α, β, γ ***pris respectivement sur les côtés*** BC, CA ***et*** AB ***d'un triangle*** ABC, ***soient alignés il faut et il suffit que :***

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1. \qquad (1)$$

1° Supposons α, β, γ alignés sur une droite Δ (fig. 14). La parallèle à Δ menée par C coupe AB en D et d'après le théorème de Thalès dans les triangles BCD et ADC :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma D}} \text{ et } \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = \frac{\overline{\gamma D}}{\overline{\gamma A}}. \implies \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma D}} \cdot \frac{\overline{\gamma D}}{\overline{\gamma A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1.$$

2° Supposons que les points α, β, γ vérifient la relation (1). La droite $\beta\gamma$ coupe BC en un point α' tel que :

$$\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1. \qquad (2)$$

De ces relations il résulte que $\dfrac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}} = \dfrac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}$ donc que α' est confondu avec α.

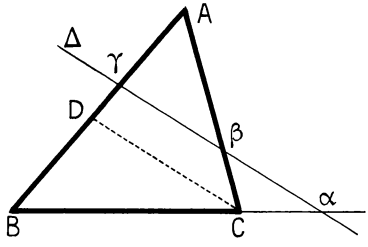


Fig. 14

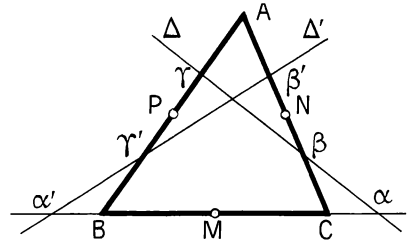


Fig. 15

28. Applications. — 1° La droite Δ qui coupe les côtés du triangle ABC en trois points α, β, γ distincts est dite *transversale* au triangle ABC.

Si on considère (fig. 15) les points α', β', γ' respectivement symétriques de α, β, γ, par rapport au milieu du côté correspondant, on a par exemple :

$$\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}} = \frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}} \cdot \frac{\overline{\beta' C}}{\overline{\beta' A}} \cdot \frac{\overline{\gamma' A}}{\overline{\gamma' B}} = \frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}} \cdot \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}} \cdot \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma A}} = 1.$$

Les points α', β', γ', sont alignés sur une droite Δ'. Les deux transversales Δ et Δ' *sont dites réciproques.*

2° Soit D′, E′ et F′ les pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC :

$$\frac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}} \cdot \frac{\overline{E'C}}{\overline{E'B}} \cdot \frac{\overline{F'A}}{\overline{F'B}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{BC} = 1.$$

Les pieds des bissectrices extérieures d'un triangle sont alignés. Il en est de même des pieds des bissectrices intérieures de deux angles et de la bissectrice extérieure du troisième angle. Autrement dit :

Les pieds des bissectrices d'un triangle sont les sommets d'un quadrilatère complet.

29. Théorème de Céva. — ***Pour que trois droites issues des trois sommets du triangle*** ABC ***soient concourantes, il faut et il suffit que leurs points d'intersections*** α, β ***et*** γ ***avec les côtés opposés vérifient la relation :***

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -1. \qquad (1)$$

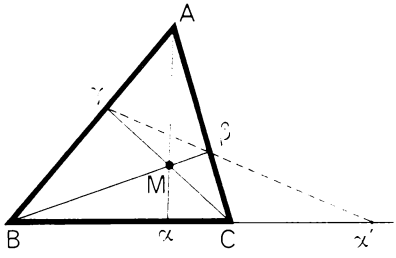


Fig. 16

Soit α, β, γ trois points pris sur BC, CA et AB (fig. 16). Désignons par M le point de rencontre de $B\beta$ et $C\gamma$, et par α' le point de rencontre des droites BC et $\beta\gamma$.

D'après le théorème de Ménélaüs :

$$\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}} = \frac{\overline{\beta A} \cdot \overline{\gamma B}}{\overline{\beta C} \cdot \overline{\gamma A}}.$$

Or d'après la construction du n° 16 la droite AM est la polaire de α' par rapport aux droites AB et AC. Pour que cette polaire soit la droite $A\alpha$, il faut et il suffit que $(BC\alpha\alpha') = -1$:

donc que : $\dfrac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = -\dfrac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}} = -\dfrac{\overline{\beta A} \cdot \overline{\gamma B}}{\overline{\beta C} \cdot \overline{\gamma A}} \iff \dfrac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \dfrac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \dfrac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -1.$

30. Applications. — 1° Le théorème de Céva permet de démontrer facilement que les médianes, les hauteurs, les bissectrices d'un triangle sont concourantes.

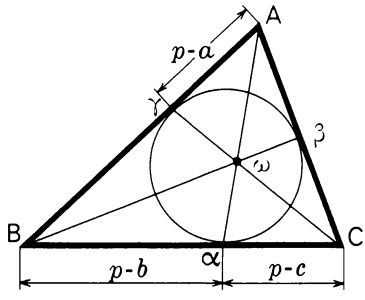


Fig. 17

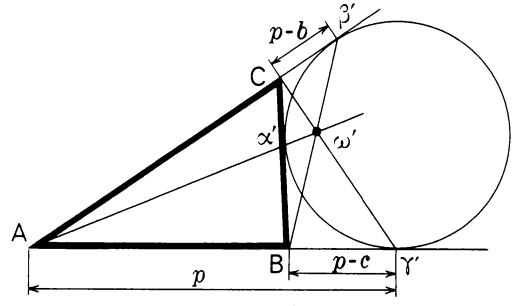


Fig. 18

2° Soient α, β, γ les points de contact d'un cercle I tangent aux trois côtés d'un triangle ABC. En orientant les trois côtés dans le sens correspondant au sens direct sur le cercle I, on obtient (fig. 17 et 18) :

$$\overline{\alpha B} = -\overline{\gamma B}\,; \qquad \overline{\beta C} = -\overline{\alpha C}\,; \qquad \overline{\gamma A} = -\overline{\beta A}.$$

Ce qui entraîne : $\dfrac{\overline{\alpha B}}{\overline{\gamma B}} \cdot \dfrac{\overline{\beta C}}{\overline{\alpha C}} \cdot \dfrac{\overline{\gamma A}}{\overline{\beta A}} = -1 \iff \dfrac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \dfrac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \dfrac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma C}} = -1.$

Les droites joignant les sommets d'un triangle aux points de contact d'un cercle tangent aux trois côtés sont concourantes.

Rappelons que lorsque I est le cercle inscrit dans le triangle ABC (fig. 17) :

$$A\beta = A\gamma = p - a\,; \quad B\gamma = B\alpha = p - b\,; \quad C\alpha = C\beta = p - c$$

et que lorsque le cercle I est exinscrit dans l'angle A (fig. 18) :

$$A\beta' = A\gamma' = p\,; \quad B\gamma' = B\alpha' = p - c\,; \quad C\alpha' = C\beta' = p - b.$$

ENVELOPPES

31. Notion d'enveloppe. — Lorsqu'un point M du plan est astreint à vérifier une propriété *P*, il décrit en général une courbe (C) *lieu géométrique* de M. On obtient ainsi une *génération ponctuelle* de (C). De même :

Une droite variable D, ***astreinte à vérifier une propriété*** $\mathfrak{P}$, ***reste en général tangente à une courbe*** (C) ***appelée enveloppe de la droite*** (D) (fig. 19) :

D *vérifie* $\mathfrak{P}$ $\Longleftrightarrow$ D *tangente* à (C)

Exemples. — 1° Une droite D astreinte à rester à la distance R du point fixe O admet pour enveloppe le cercle de centre O et de rayon R.

2° Si une droite variable D passe par un point fixe O, on dit de même qu'elle admet le point O pour enveloppe.

On obtient ainsi une *génération tangentielle* d'une courbe donnée (C) lorsqu'on peut déterminer une propriété caractéristique $\mathfrak{P}$ de ses tangentes.

La notion d'enveloppe d'une droite variable se généralise pour une courbe variable quelconque.

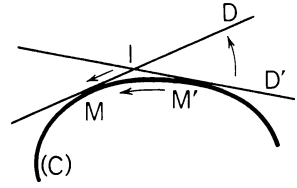


Fig. 19

Une courbe (γ) ***qui dépend d'un élément variable reste en général tangente à une courbe fixe*** (E) ***appelée enveloppe de la courbe*** (γ).

L'enveloppe (E) peut parfois comprendre plusieurs arcs distincts et un ou plusieurs points fixes.

Exemple. — Un cercle de rayon donné *r* dont le centre ω décrit un cercle de centre O et de rayon R admet pour enveloppe les deux cercles de centre O et de rayons respectifs $R + r$ et $|R - r|$.

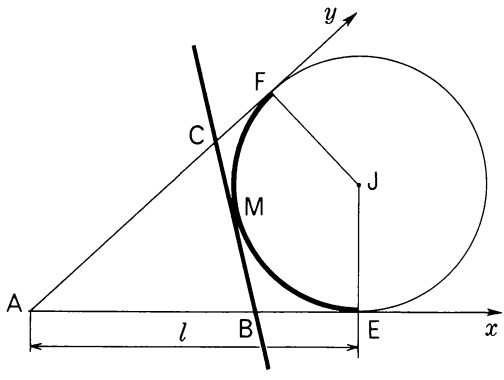


Fig. 20

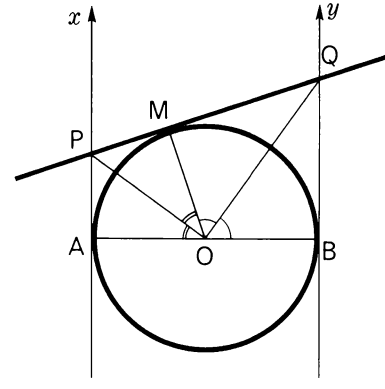


Fig. 21

32. Recherche d'une enveloppe. — Pour démontrer qu'une courbe (C), définie à partir des données, est l'enveloppe des droites D vérifiant une condition donnée $\mathfrak{P}$ il faut établir les deux implications réciproques :

1° D vérifie $\mathfrak{P}$ $\Longrightarrow$ D tangente à (C) 2° D tangente à (C) $\Longrightarrow$ D vérifie $\mathfrak{P}$.

1er EXEMPLE. — *On donne un angle xAy et deux points variables* B *sur la demi-droite* A*x et* C *sur la demi-droite* A*y tels que le périmètre du triangle* ABC *soit égal à* 2 *p longueur donnée. Trouver l'enveloppe de la droite* BC.

1° Considérons une position de BC telle que AB + BC + CA = 2 p (fig. 20). Le cercle (J) ex-inscrit dans l'angle A est fixe, car il touche Ax et Ay en E et F tels que AE = AF = p. La droite BC est donc tangente au cercle (J) déterminé à partir des données.

2° Réciproquement une tangente BC à ce cercle donnera un triangle ABC de périmètre 2 p si B et C appartiennent respectivement aux segments AE et AF.

L'enveloppe (C) du côté BC est l'arc EMF, intérieur à l'angle EJF, du cercle (J).

2e EXEMPLE. — *Soit un segment* AB, *de milieu* O *et les perpendiculaires* Ax *et* By *en* A *et* B. *Un point* P *varie sur la droite* Ax *un point* Q *sur la droite* By *de façon que l'angle* POQ *soit droit. Démontrer que l'enveloppe de la droite* PQ *est le cercle* O *de diamètre* AB.

1° Soit M le point de contact d'une tangente au cercle (O) coupant Ax en P, By en Q (fig. 21). Les droites OP et OQ bissectrices des angles adjacents supplémentaires AOM et BOM sont rectangulaires et l'angle POQ est droit.

2° Pour démontrer que tout segment PQ tel que $\widehat{POQ} = 1^{D}$ est tangent au cercle (O) procédons par identification. La tangente au cercle issue de P et distincte de PA, coupe By en Q′ telle que $\widehat{POQ'} = 1^{D}$. Les droites OQ et OQ′ perpendiculaires en O à OP sont confondues et Q′ est confondu avec Q. Donc PQ est tangente au cercle.

L'enveloppe est donc bien le cercle (O) en entier.

EXERCICES

1. On prend sur un axe $x'x$ quatre points A, B, C, D. Les points B et C sont respectivement les milieux de AD et de BD. Calculer les valeurs distinctes des birapports que l'on peut former avec les quatre points A, B, C et D.

2. On considère une division rectiligne ABCD et un segment MN sur lequel on construit le point P tel que : $\dfrac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = (ABCD)$.

1° Montrer que les six birapports (ABDC), (ABCD), (ACBD), (ACDB), (ADCB) et (ADBC) s'expriment simplement à l'aide des rapports de deux segments MN, NP et PM.

2° Montrer que l'un de ces birapports est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. En désignant sa valeur par $\sin^2 \alpha$, calculer en fonction de α l'ensemble des valeurs des six birapports.

3° En déduire que les six valeurs obtenues se répartissent dans les six intervalles limités par les nombres $-\infty, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ et ∞. Cas où la division ABCD est harmonique ?

— On considère la division harmonique (ABCD) et les milieux I et J des segments AB et CD. Démontrer les relations suivantes et étudier les réciproques :

3. $\dfrac{\overline{IC}}{\overline{ID}} = \left(\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}\right)^2 = \left(\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}\right)^2$

4. $\dfrac{\overline{JA}}{\overline{JB}} = \left(\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\right)^2 = \left(\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}\right)^2$

5. $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = 2\,\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DC}}$

6. $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4\,\overline{IJ}^2$

7. $\dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{BD}} + \dfrac{1}{\overline{AD}} + \dfrac{1}{\overline{BC}} = 0$

8. On construit la division harmonique (ABCD) et les milieux I et J des segments AB et CD. On désigne par O le milieu de IJ et par M un point quelconque du plan. Montrer que :

1° $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = 4\,\overline{MO}^2 + 3\,\overline{IJ}^2$.

2° $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ}$.

3° Étudier les réciproques.

9. On considère la division harmonique (ABMN) et on construit A′ conjugué harmonique de M par rapport à A et N puis B′ conjugué harmonique de M par rapport à B et N. Montrer que la division (A′B′MN) est harmonique. (Prendre N pour origine.)

10. On prend un point fixe B sur un axe Ax et un point C sur un axe Ay, puis on construit les points I et J qui divisent les segments AB et AC dans un même rapport algébrique k. Un point M se déplace sur Ax et un point N sur Ay de façon que :

$$\overline{IM} \cdot \overline{JN} = \overline{IA} \cdot \overline{JC} = \overline{IB} \cdot \overline{JA}.$$

1° Démontrer les relations : $\overline{IM} \cdot \overline{CN} = \overline{MA} \cdot \overline{JC}$ et $\overline{IM} \cdot \overline{AN} = \overline{MB} \cdot \overline{JA}$.

2° En déduire la relation : $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$.

3° Soient M′ et N′ deux positions correspondantes de M et N. Montrer que si la division (ABMM′) est harmonique il en est de même de la division (ACNN′).

11. On considère une division harmonique ABCD (B et C entre A et D) et un point O extérieur. On désigne par a, b, c et d les longueurs OA, OB, OC et OD et par α, β, α' et β' les angles COA, COB, DOA et DOB. Démontrer les relations :

1° $\dfrac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \dfrac{\sin \alpha'}{\sin \beta'}$. 2° $\dfrac{2}{b \sin (\alpha + \beta)} = \dfrac{1}{c \sin \alpha} + \dfrac{1}{d \sin \alpha'}$.

3° $\dfrac{2}{a \sin (\alpha + \beta)} = \dfrac{1}{c \sin \beta} - \dfrac{1}{d \sin \beta'}$.

12. Soit un triangle ABC et un point D de BC. Sur AD on prend un point E et on construit les rayons Bx conjugué de BE par rapport à BA et BC et Cy conjugué de CE par rapport à CA et CB. Montrer que les droites AE, Bx et Cy sont concourantes. Peuvent-elles être parallèles ?

13. On considère un triangle ABC et la médiane AM. Soit I le point du segment AB tel que BI = 2 IA. On prolonge BA d'un segment AJ = BA. Les segments AM et CI se coupent en O.

1° Montrer que le faisceau C (ABIJ) est harmonique.

2° Montrer que O est au milieu de AM et au quart de IC.

14. Soit un triangle isocèle ABC de sommet A inscrit dans un cercle O. On construit deux points I et J conjugués harmoniques par rapport à B et C. Les droites AI et AJ recoupent le cercle en D et E.

1° Soit M un point quelconque du cercle O. Comparer les angles des deux faisceaux M (BCDE) et A (BCDE).

2° Montrer que BC et les tangentes en D et E sont concourantes.

15. Soient deux cordes AB et AC d'un cercle O. On mène le diamètre IJ perpendiculaire à BC qui coupe AB en E et AC en F.

1° Que représentent AI et AJ pour l'angle BAC ?

2° Comparer les rapports $\dfrac{IE}{IF}$ et $\dfrac{JE}{JF}$.

3° Calculer le produit $\overline{OE} \cdot \overline{OF}$ en fonction du rayon R du cercle.

16. Dans un triangle ABC on désigne par D, E, F les pieds des hauteurs issues de A, B, C, par H l'orthocentre, par P l'intersection de AD et EF.

1° Montrer que les bissectrices du triangle EDF sont les hauteurs de ABC.

2° Montrer que le faisceau E (AHPD) est harmonique.

3° Établir la relation : $\dfrac{2}{\overline{AH}} = \dfrac{1}{\overline{AP}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$.

17. On mène d'un point A les tangentes AB et AC à un cercle O. La corde de contact BC coupe le diamètre AO en H et AO coupe le cercle en D et E.

1° Que peut-on dire du faisceau B (AHDE) ?

2° Établir la relation $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = R^2$ en désignant par R le rayon du cercle.

18. Soit un triangle ABC, AH la hauteur issue de A, K le pied de la bissectrice intérieure de l'angle A, D et E les projections sur BC du centre du cercle inscrit I et du centre du cercle J exinscrit dans l'angle A.

1° Montrer que la division AKIJ est harmonique.

2° Montrer qu'il en est de même de la division HKDE.

3° M étant le milieu de BC établir la relation : $\overline{MD}^2 = \overline{MH} \cdot \overline{MK}$.

19. Un cercle variable O passe par deux points fixes A et B. Soient I et J les intersections du cercle avec le diamètre perpendiculaire à AB et C un point du prolongement de AB. La droite CI recoupe le cercle en M.

1° Étudier le faisceau M (ABIJ) et en déduire que MJ passe par un point fixe D de AB.

2° Montrer que la tangente en M passe par le milieu ω de CD et que sa longueur est indépendante du cercle O. Lieu du point M ?

3° Soit M′ le point de rencontre de CJ avec le cercle O. Montrer que ωM = ωM′ et que M′I passe par D.

20. Un cercle de centre O passe par le sommet P d'un faisceau harmonique et coupe ses rayons respectivement en A, B, C et D.

1° M étant un point quelconque du cercle O, montrer que le faisceau M (ABCD) est harmonique.

2° Soient AT et BT′ les tangentes au cercle O en A et B. Montrer que les faisceaux A (TBCD) et B (AT′CD) sont harmoniques.

3° Montrer que les droites AT, BT′ et CD sont concourantes.

21. Soient D, E, F les pieds des hauteurs AD, BE et CF du triangle ABC, dont l'orthocentre est H, et soit P le point de rencontre des droites EF et BC.

1° Quelle est la polaire de P par rapport à AB et AC ? Nature du faisceau D (APEF).

2° Montrer que A, B, C et H sont les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle DEF.

3° Les droites CA et DF se coupent en Q. Montrer que AB, DE et PQ sont concourantes en R.

22. Soit un parallélogramme ABCD. On prolonge AB d'un segment BP = AB.

1° Montrer que la droite CP est la polaire de A par rapport aux droites CB et CD.

2° Une sécante quelconque Ax coupe BD en I, BC en M, CD en N et CP en E.

Démontrer les relations : $\overline{IA}^2 = \overline{IE}^2 = \overline{IM} \cdot \overline{IN}$ et $\overline{BM} \cdot \overline{DN} = \overline{BC} \cdot \overline{DC}$.

23. On donne deux droites fixes Ox et Oy. Une droite variable Δ issue du point fixe P coupe Ox en A et Oy en B. La droite qui joint A au milieu I de OP coupe Oy en C et la parallèle à OP menée par C coupe Δ en M.

1° Montrer que le faisceau C (OPIM) est harmonique. Que peut-on dire de la division (BPAM) ? En déduire le lieu du point M lorsque Δ tourne autour de P.

2° La droite MI coupe Oy en D. Quelle est la polaire de B par rapport aux droites CM et AD ? En déduire que le quadrilatère ADCM est un trapèze.

24. Une droite Δ coupe les côtés BC, CA, AB d'un triangle respectivement en D, E et F. Les droites BE et CF se coupent en K.

Montrer que la polaire de A par rapport aux droites DC et DE est la droite DK puis que la polaire de D par rapport aux droites AB et AC est la droite AK, enfin que la polaire de K par rapport aux droites DC, DE ou par rapport aux droites AB, AC est la droite AD.

25. On donne dans un plan un point A et une droite Δ. Soit M un point variable du plan. La droite AM coupe Δ en P et on construit M′ tel que la division APMM′ soit harmonique.

1° Lorsque le point M décrit une droite D, montrer que le point M′ décrit une droite D′ et que les droites Δ, D et D′ sont concourantes ou parallèles.

2° Comment faut-il choisir D pour que D′ lui soit perpendiculaire ? Quel est alors le lieu des projections orthogonales de A sur les droites D et D′ ?

26. Dans un triangle ABC les bissectrices intérieures AD, BE, CF se coupent en I.

1° Évaluer en fonction des côtés a, b, c, du triangle les rapports $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$, $\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}$ et $\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}$ puis calculer leur produit.

2° Évaluer en fonction de a, b, c les rapports $\frac{\overline{DI}}{\overline{DA}}$, $\frac{\overline{EI}}{\overline{EB}}$ et $\frac{\overline{FI}}{\overline{EC}}$ puis calculer leur somme.

27. Deux cercles O et O′ sont sécants en A et B. Soient I et J les centres d'homothétie positive et négative des deux cercles.

1° Montrer que AI et AJ sont bissectrices de l'angle OAO′.

2° Montrer que le cercle de diamètre IJ passe par A et B.

28. On considère un triangle ABC inscrit dans le cercle O. La tangente en A coupe BC en I. Soient D et E les pieds des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A.

1° Montrer que le triangle IAD est isocèle. En déduire que I est le milieu de DE.

2° Établir la relation $\overline{IA}^2 = \overline{IB} \cdot \overline{IC}$.

3° Calculer IB et IC en fonction des côtés du triangle ABC.

29. Soient trois points alignés A, B et C ; B est entre A et C et on pose AB = a ; BC = b. Une droite variable Δ tourne autour de B et on construit les symétriques A′ et C′ de A et C par rapport à Δ ; les droites AC′ et A′C se coupent en M.

1° Lieux des points A′ et C′.

2° Évaluer le rapport $\frac{MA}{MC}$ en fonction de a et b.

3° Le lieu du point M est un cercle dont on calculera le rayon en fonction de a et b.

30. On désigne par a, b et c les côtés du triangle ABC, et par D et D′, E et E′, F et F′ les pieds des bissectrices intérieures et extérieures des angles A, B et C.

1° Montrer que les cercles de diamètres DD′, EE′ et FF′ ont deux points communs vérifiant la relation : $a \cdot MA = b \cdot MB = c \cdot MC$.

2° En déduire que les milieux I, J et K de DD′, EE′ et FF′ sont alignés. Que peut-on dire des pieds des tangentes en A, B et C au cercle circonscrit à ABC ?

31. Construire un triangle ABC connaissant $BC = a$, le rapport des côtés AB et AC et : 1° l'angle A ; 2° la hauteur AA′ ; 3° la bissectrice AD ou AD′ ; 4° le rapport des deux bissectrices précédentes.

32. Dans un triangle ABC on mène la hauteur AA′ et la médiane AM. On suppose que les points A et M sont fixes ainsi que le rapport $\frac{AB}{BC} = k$.

1° Lieux des points A′, B et C.

2° Construire ABC connaissant AM, AA′ et k.

33. On désigne par AD la bissectrice intérieure du triangle ABC issue du point A.

1° On suppose connus les points A et D et le rapport $\frac{AB + AC}{BC}$. Évaluer les rapports $\frac{BA}{BD}$ et $\frac{CA}{CD}$ et en déduire le lieu des points B et C.

2° Construire le triangle connaissant les longueurs AD, BC et AB + AC.

34. Dans un triangle ABC on mène la bissectrice intérieure $AD = \beta_a$. Soient E et F les projections de B et C sur la droite AD.

1° Étudier la division ADEF et démontrer que :

$$\frac{2}{\beta_a} = \frac{1}{AE} + \frac{1}{AF} \qquad \text{et} \qquad \beta_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}.$$

2° Reprendre le problème avec la bissectrice extérieure $AD' = \beta'_a$.

APPLICATION : $A = 84° 16'$, $b = 112$ et $c = 75$. Calculer β_a et β'_a.

35. Soit un angle xOy. Un point variable M se projette en P sur Ox et en Q sur Oy.

1° Trouver le lieu de M lorsque $\overrightarrow{PQ}$ a une direction donnée et un sens donné.

2° Si PQ a une longueur constante montrer que MO est constant : lieu de M.

3° Construire le point M quand le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est égal à un vecteur donné.

36. On donne un angle xOy et un point variable M intérieur à cet angle. Les parallèles menées par M à Ox et Oy coupent Oy en B et Ox en A de façon que $MA = k MB$ où k est un nombre donné. Trouver le lieu géométrique du point M.

37. Soit un angle aigu $xOy = \alpha$. Un point variable M de Oy se projette orthogonalement en A sur Ox. Par M on mène le segment MP parallèle à Ox, de même sens et tel que $MP = k MA$, où k est un nombre positif donné.

1° Évaluer le rapport des distances du point P aux côtés de l'angle xOy, en fonction de k et α.

2° Trouver le lieu géométrique du point P.

38. On considère trois segments AB, CD et EF non parallèles.

1° Trouver le lieu des points tels que les triangles MAB et MCD soient équivalents.

2° Construire le point S sachant que les trois triangles SAB, SCD et SEF sont équivalents.

39. Soient deux droites concourantes Ox et Oy. On prend un point A sur Ox, un point B sur Oy et on mène une parallèle variable à AB qui coupe Ox en M et Oy en N.

1° Trouver le lieu du point P d'intersection de AN et de BM.

2° Soient H et K les projections de P sur Ox et Oy, démontrer que l'on a $OA \cdot PH = OB \cdot PK$.

40. On donne une droite fixe Δ et un point extérieur O. Un point variable M décrit Δ. Trouver l'enveloppe de la droite D symétrique de Δ par rapport à OM.

41. On considère deux axes rectangulaires Ox et Oy, un point variable A sur Ox et un point variable B sur Oy. Trouver l'enveloppe de la droite AB sachant que : $\frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} = \frac{1}{l^2}$ (l longueur donnée).

42. On considère deux axes parallèles et de même sens Ax et By coupés en P et Q par une droite variable. Trouver l'enveloppe de la droite PQ dans les trois cas suivants (l et k constantes réelles données) :

1° $\overline{AP} + \overline{BQ} = l$ 2° $\overline{AP} + k\overline{BQ} = 0$ 3° $\overline{AP} + k\overline{BQ} = l$.

43. On désigne par AA′ et BB′ les distances algébriques des deux points fixes A et B à une droite variable Δ. Trouver l'enveloppe de la droite Δ sachant que :

1° $\overline{AA'} + \overline{BB'} = l$ 2° $\overline{AA'} + k\overline{BB'} = 0$ 3° $\overline{AA'} + k\overline{BB'} = l$.

44. Sachant que l est une longueur donnée, trouver l'enveloppe d'une droite variable Δ qui coupe deux droites fixes Ax et Ay en deux points B et C dans les différents cas suivants :

1° $AB + AC + BC = 2l$ 2° $AB + AC - BC = 2l$ 3° $BC \pm (AB - AC) = 2l$.

Représenter sur une même figure l'ensemble de ces enveloppes.

45. On désigne par $2a$ la distance FK d'un point fixe F à une droite donnée Δ et par M un point variable sur Δ.

1° Construire sur la perpendiculaire en M à Δ un point ω équidistant de F et de Δ. (On ne demande pas le lieu de ω.)

2° Démontrer que l'enveloppe du cercle γ de centre ω et de rayon $\rho = \omega F - a$ se compose d'un cercle (C) et d'une droite (D).

3° Soient N et P les points de contact du cercle γ avec (D) et (C). Démontrer que l'enveloppe de la droite NP est un point fixe I et que le produit $\overline{IP} \cdot \overline{IN}$ est constant.

46. Soient deux axes rectangulaires Ox et Oy, les points A et B de Oy et les points I et J de Ox tels que $\overline{OA} = -\overline{OB} = \overline{OI} = -\overline{OJ} = a > 0$. Deux points M et N varient sur Ox de façon que $(AM, AN) = \frac{\pi}{4}$. On pose $\overline{OM} = am$.

1° Établir que le triangle AMN est inversement semblable à chacun des triangles IMA et JAN. En déduire que $\overline{IM} \cdot \overline{JN} = -2a^2$ et déterminer l'angle en A des cercles AIN et AJM.

2° Soit K un point de Oy tel que OK = AI. Calculer en fonction de a et m l'abscisse de N, celle du milieu ω de MN, le rayon ρ du cercle de diamètre MN et la distance $K\omega = d$ dans les deux cas $m < 1$ et $m > 1$.

3° Comparer les valeurs de d et ρ et en déduire l'enveloppe du cercle de diamètre MN. Les cercles ABM et ABN recoupent Ox en P et Q. Quelle est la nature de la division (MPQN) et quel est l'angle des cercles ABM et ABN ? Que peut-on dire des cercles de diamètres NP, PQ et QM ?

ANGLES ORIENTÉS DANS LE PLAN

33. Plan orienté. — Une demi-droite Oz du plan peut tourner autour de son origine O dans deux sens différents :

On appelle sens direct de rotation dans le plan le sens inverse des aiguilles d'une montre. Le sens opposé est le sens rétrograde.

Le plan est dit orienté (fig. 22). Au sens direct dans le plan correspond un sens direct de parcours sur toute ligne fermée non croisée du plan (fig. 23) et en particulier sur tout polygone convexe ou tout cercle du plan.

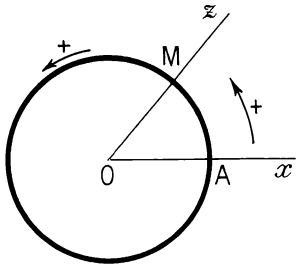


Fig. 22

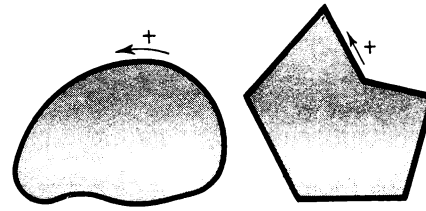


Fig. 23

ANGLE DE DEUX DIRECTIONS ORIENTÉES

34. Angle de deux demi-droites de même origine. — ***On appelle angle orienté des demi-droites*** OA ***et*** OB ***prises dans cet ordre, l'un quelconque des angles dont il faut faire tourner dans un sens donné, une demi-droite mobile*** Oz ***pour l'amener du côté origine*** OA ***sur le côté extrémité*** OB.

On écrit (fig. 24) : *angle* $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ou simplement $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

En affectant la mesure arithmétique de l'angle balayé par Oz du signe + ou du signe — suivant que Oz a tourné dans le sens direct ou dans le sens rétrograde, on obtient une mesure algébrique (ou détermination) de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

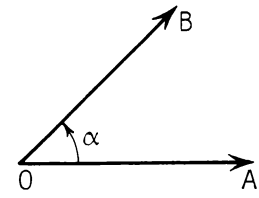


Fig. 24

35. Théorème. — ***Les différentes mesures algébriques en radians de l'angle*** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ***sont données par la formule :***

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha + 2k\pi.$$

où α *désigne une quelconque de ces mesures et* k *un entier relatif arbitraire.*

Soit θ la mesure en radians du plus petit angle dont il faut faire tourner une demi-droite Oz, dans le sens direct, pour l'amener de OA sur OB. Chaque tour supplémentaire, dans le sens direct ramène Oz sur OB. On obtient ainsi les mesures algébriques :

$$\theta ; \quad \theta + 2\pi ; \quad \theta + 4\pi ; \quad \theta + 6\pi, \text{ etc.}$$

Lorsque Oz tourne dans le sens rétrograde, les diverses mesures obtenues sont :

$$\theta - 2\pi ; \quad \theta - 4\pi ; \quad \theta - 6\pi ; \quad \theta - 8\pi, \text{ etc.}$$

On voit donc que : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \theta + 2m\pi$. Si $\alpha = \theta + 2n\pi$ est l'une de ces mesures, on obtient, en éliminant θ, la formule, équivalente à la formule annoncée :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha + 2(m - n)\pi. \iff (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha \pmod{2\pi}$$

La détermination principale de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ***est la mesure algébrique*** φ ***de cet angle comprise entre*** $-\pi$ ***et*** π.

Cette mesure φ est la mesure de l'angle saillant orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, dont le sens, parfaitement déterminé, correspond au signe de φ.

36. Corollaires. — 1° ***On a l'égalité :*** $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = -(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + 2k\pi$.

En effet si φ est la détermination principale de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, celle de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ est $-\varphi$, ce qui entraîne, à $2k\pi$ près : $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = -(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

2° ***Deux angles*** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ***et*** $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$ ***dont les côtés sont respectivement parallèles et de même sens ont mêmes mesures algébriques.***

On sait, en effet, que les angles saillants orientés $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{O'B'})$ ont même valeur absolue et même sens. Les angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$ ont donc même détermination principale et par suite mêmes mesures.

37. Angle de deux vecteurs ou de deux axes. — ***L'angle orienté*** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ ***des deux vecteurs*** $\overrightarrow{AB}$ ***et*** $\overrightarrow{CD}$ ***est, par définition, l'un quelconque des angles*** $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ ***obtenus en menant par un point arbitraire*** O ***les demi-droites*** $\overrightarrow{Ox}$ ***et*** $\overrightarrow{Oy}$ ***de même direction et de même sens que les vecteurs*** $\overrightarrow{AB}$ ***et*** $\overrightarrow{CD}$ (fig. 25).

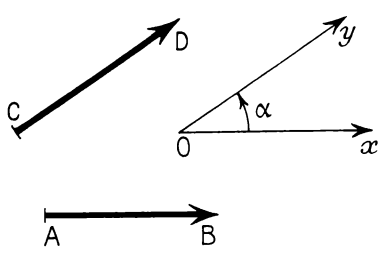


Fig. 25

Comme l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ est indépendant du point O (n° 36, 2°), il en est de même de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

On définit de la même façon l'angle $(\overrightarrow{\Delta_1}, \overrightarrow{\Delta_2})$ de deux axes $\overrightarrow{\Delta_1}$ et $\overrightarrow{\Delta_2}$ ou bien l'angle $(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{AB})$ de l'axe Δ et du vecteur AB.

Chacun de ces angles constitue *un angle orienté de deux directions orientées.*

La mesure algébrique est celle de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ correspondant, définie à $2k\pi$ près.

38. Relation de Chasles. — ***Quelle que soit la disposition des trois directions orientées*** $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ***et*** $\overrightarrow{OC}$, ***on a la relation :***

$$\boxed{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + 2k\pi} \qquad (1)$$

On peut toujours (fig. 26), en faisant tourner Oz *dans le sens direct*, l'amener successivement de OA sur OB puis sur OC. Si α et β sont les mesures obtenues pour $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ la mesure obtenue pour $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ est égale à $\alpha + \beta$, ce qui permet d'écrire (n° 35) :

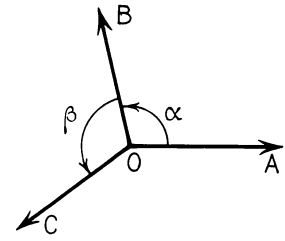


Fig. 26

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha + 2l\pi, \qquad (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \beta + 2m\pi$$

et $$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \alpha + \beta + 2h\pi.$$

Éliminons α et β entre ces trois relations, nous obtenons :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + 2(h - l - m)\pi$$

relation équivalente à la relation (1).

Cette relation s'écrit d'ailleurs aussi (n° 36, 1°) :

$$\boxed{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = 2k\pi.} \qquad (2)$$

et se généralise pour un nombre quelconque de directions. Ainsi :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) =$$
$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + [(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})] + 2k\pi$$

soit $$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) + 2k\pi. \qquad (3)$$

Il en résulte, pour des angles de vecteurs ou d'axes :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}) + 2k\pi.$$
$$(\overrightarrow{\Delta_1}, \overrightarrow{\Delta_4}) = (\overrightarrow{\Delta_1}, \overrightarrow{\Delta_2}) + (\overrightarrow{\Delta_2}, \overrightarrow{\Delta_3}) + (\overrightarrow{\Delta_3}, \overrightarrow{\Delta_4}) + 2k\pi.$$

39. Angle polaire d'un vecteur ou d'un axe. — Soit un axe $\overrightarrow{x'x}$ appelé *axe polaire* ou *axe origine*. La direction $\overrightarrow{\Delta}$ est déterminée par l'angle $(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{\Delta})$ appelé *angle polaire* de $\overrightarrow{\Delta}$ (fig. 27). De même l'angle $(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{AB})$ est l'angle polaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

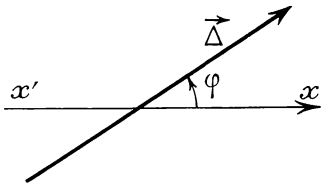


Fig. 27

La mesure algébrique de l'angle de deux directions orientées est égale à l'angle polaire de la direction extrémité diminué de l'angle polaire de la direction origine.

L'égalité : $(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{CD}) + 2k\pi$ montre que :

$$\boxed{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{AB}) + 2k\pi.}$$

40. Applications. — 1° ***Si on change le sens de l'un des côtés d'un angle de vecteurs, la mesure algébrique de cet angle est modifiée de π.***

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + \pi \quad \text{à } 2k\pi \text{ près.}$$

Par suite : $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}) + 2k\pi.$$

2° ***Dans une égalité ou une différence entre deux angles de vecteurs, on peut échanger les côtés moyens ou les côtés extrêmes.***

Si par hypothèse : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) + \varphi + 2k\pi$

on peut écrire :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) + \varphi + 2k\pi$$

soit

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}) + \varphi + 2k\pi$$

ce qui montre que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) - (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}) = \varphi + 2k\pi.$$

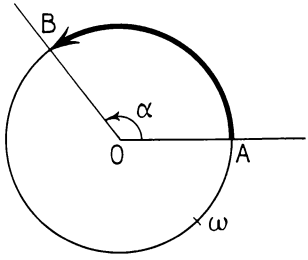


Fig. 28

41. Arcs orientés. — Considérons sur un cercle orienté de centre O deux points fixes A et B (fig. 28). Lorsqu'un point mobile M, parcourant le cercle dans un sens donné, va de A en B, il décrit un arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ d'origine A et d'extrémité B. La demi-droite OM engendre un angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ dont la mesure algébrique en radians est égale à celle de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ parcouru par le point M :

Les différentes mesures d'un arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ ***sont données en radians par :***

$$\overset{\frown}{AB} = \alpha + 2k\pi$$

où α ***désigne une des mesures de l'arc*** $\overset{\frown}{AB}$ ***ou de l'angle*** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Toutes les propriétés des angles au centre $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ s'étendent aux arcs $\overset{\frown}{AB}$ interceptés. Ainsi la relation de Chasles devient :

$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + 2k\pi.$$

En désignant par ω une origine des abscisses curvilignes sur le cercle on a :

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\omega B} - \overset{\frown}{\omega A} + 2k\pi.$$

La mesure algébrique d'un arc est égale à l'abscisse de son extrémité diminuée de l'abscisse de son origine.

ANGLE DE DROITES DANS LE PLAN

42. Définition. — ***On appelle angle orienté de deux droites*** D ***et*** D′, ***l'angle orienté de l'un quelconque des axes portés par*** D ***avec l'un quelconque des axes portés par*** D′.

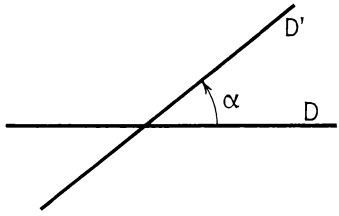


Fig. 29

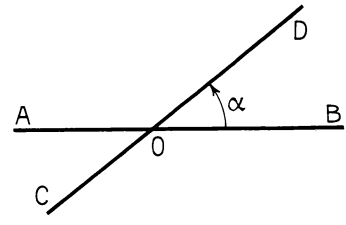


Fig. 30

Cet angle est représenté par le symbole (D, D′) (fig. 29). L'angle des deux droites AB et CD (fig. 30) s'écrit de même (AB, CD) ou (AB, DC).

43. Théorème. — ***La mesure algébrique d'un angle de droites est définie à $k\pi$ près.***

Soit α l'une des mesures algébriques de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$. On a (n° 40) :
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}) = \alpha + 2m\pi$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}) = \alpha + \pi + 2n\pi$.

Donc : $$(AB, CD) = \alpha + k\pi.$$

Dans cette formule α désigne l'une quelconque des déterminations de l'angle (AB, CD) et k un entier relatif arbitraire. Notons que :

Toute mesure algébrique d'un angle d'axes ou de vecteurs est une mesure de l'angle de droites de leurs supports non orientés.

44. Corollaires. — Il résulte de ce qui précède et des théorèmes (n° 36) que :

1° *La position de la droite* OB *est déterminée par la donnée de la droite* OA *et de l'angle* $(OA, OB) = \alpha + k\pi$;

2° *Deux angles de droites à côtés respectivement parallèles sont égaux.*

3° *Si* D et D′ *sont parallèles :* $(D, D') = k\pi$;

4° *Si* $(D, D') = \alpha + k\pi$ *:* $(D', D) = -\alpha + l\pi$.

45. Relation de Chasles. — ***Quelles que soient les trois droites*** D_1, D_2, D_3 :

$$\boxed{(D_1, D_3) = (D_1, D_2) + (D_2, D_3) + k\pi.} \qquad (1)$$

Menons par un point O les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ respectivement parallèles à D_1, D_2 et D_3 (fig. 31).

Des relations :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + 2k\pi$$

et

$$(D_1, D_2) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + l\pi ;$$
$$(D_2, D_3) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + m\pi ;$$
$$(D_1, D_3) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + n\pi ;$$

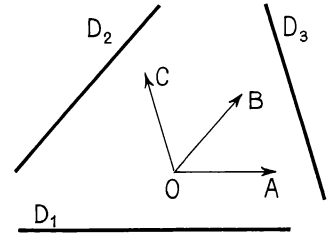


Fig. 31

on déduit la relation équivalente à la relation (1) :
$(D_1, D_3) = (D_1, D_2) + (D_2, D_3) + (2k - l - m + n)\pi$

De même : $$(D_1, D_2) + (D_2, D_3) + (D_3, D_1) = k\pi.$$

et $$(D_1, D_4) = (D_1, D_2) + (D_2, D_3) + (D_3, D_4) + k\pi.$$

46. Corollaires. — 1° ***Dans une égalité ou une différence entre deux angles de droites on peut échanger les côtés moyens ou les côtés extrêmes.***

Si on a l'égalité : $(D_1, D_2) = (D_3, D_4) + \varphi + k\pi$, on peut écrire :
$$(D_1, D_2) + (D_2, D_3) = (D_2, D_3) + (D_3, D_4) + \varphi + k\pi$$

soit : $$(D_1, D_3) = (D_2, D_4) + \varphi + k\pi$$

et $$(D_1, D_2) - (D_3, D_4) = (D_1, D_3) - (D_2, D_4) \quad (\text{mod. } \pi).$$

2° ***Deux angles de droites à côtés respectivement perpendiculaires sont égaux.***

Si D et D′ sont respectivement perpendiculaires à Δ et Δ′, on a, à $k\pi$ près :

$$(D, \Delta) = (D', \Delta') = \frac{\pi}{2}.$$

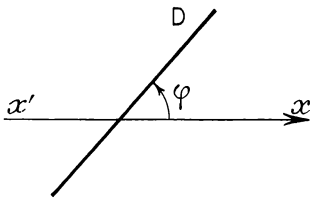


Fig. 32

Donc : $\boxed{(D, D') = (\Delta, \Delta') + k\pi.}$

3° ***La mesure algébrique d'un angle de droites*** (D, D′) ***est égal à l'angle polaire de la droite*** D′, ***diminué de l'angle polaire de la droite*** D.

Si l'axe $x'x$ est l'axe polaire (fig. 32) l'angle $(x'x, D)$ est l'angle polaire de la droite D. La relation : $(x'x, D) + (D, D') = (x'x, D') + k\pi$ montre que :

$$(D, D') = (x'x, D') - (x'x, D) + k\pi.$$

47. Bissectrice d'un angle d'axes ou de vecteurs. — Étant donnés deux axes $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$ (fig. 33), soit à déterminer un axe $\overrightarrow{Ou}$ tel que :

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ou}) = (\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{Oy}) + 2k\pi. \qquad (1)$$

En désignant par α, β et θ les angles polaires des axes Ox, Oy et Ou rapportés à un axe polaire OX donné, il faut et il suffit que (n° 40) :

$$(\theta - \alpha) = (\beta - \theta) + 2k\pi \qquad \text{soit :} \quad \theta = \frac{\alpha + \beta}{2} + k\pi.$$

Pour $k = 2m$, on obtient un axe $\overrightarrow{Ou}$ d'angle polaire $\frac{\alpha + \beta}{2} + 2m\pi$ et pour $k = 2m + 1$, on obtient l'axe opposé $\overrightarrow{Ou'}$.

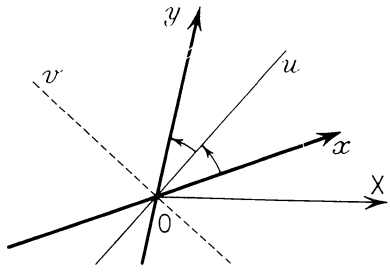


Fig. 33

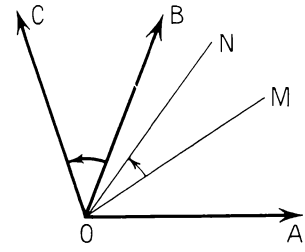


Fig. 34

La droite $u'u$ ***est, par définition, la bissectrice ou l'axe de symétrie des deux axes*** $\overrightarrow{Ox}$ ***et*** $\overrightarrow{Oy}$. ***Son angle polaire est à*** $k\pi$ ***près, la demi-somme des angles polaires de ces deux axes.***

En prenant Ox comme axe polaire, on obtient la relation nécessaire et suffisante :

$$\boxed{(Ox, Ou) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) + k\pi.}$$

La droite $v'v$ perpendiculaire en O à $u'u$ est la bissectrice des axes $\overrightarrow{x'x}$ et $\overrightarrow{yy'}$ (ou $\overrightarrow{xx'}$ et $\overrightarrow{y'y}$). On la désigne sous le nom de *bissectrice extérieure de l'angle* $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$.

48. Théorème. — ***Lorsque deux angles de vecteurs ont un côté commun, l'angle de droites de leurs bissectrices est égal à la moitié de l'angle de leurs côtés non communs.***

Soient (fig. 34) OM et ON les bissectrices des angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$:

$$(OM, ON) = (OA, ON) - (OA, OM) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

Donc : $\boxed{(OM, ON) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + k\pi.}$

49. Bissectrices d'un angle de droites. — On appelle *bissectrice de l'angle* (D, D′) toute droite Δ issue du point O commun à D et D′ telle que:

$$(D, \Delta) = (\Delta, D') + k\pi \qquad (1)$$

En désignant par α, β et φ les angles polaires de D, D′ et Δ on obtient :

$$\varphi - \alpha = \beta - \varphi + k\pi \implies \varphi = \frac{\alpha + \beta}{2} + k\frac{\pi}{2}.$$

Pour k pair on obtient une droite Δ et pour k impair une seconde droite Δ′ perpendiculaire à Δ.

Un angle de droites admet deux bissectrices rectangulaires.

Ce sont les deux droites formées par les bissectrices des quatre angles saillants déterminés par ces deux droites.

50. Angle de deux cercles. — L'angle de deux courbes C et C′ se coupant en A (fig. 35) est, par définition, l'angle de droites (AT, AT′) de leurs tangentes en A. Les courbes sont tangentes en A si cet angle est nul, orthogonales en A si cet angle est égal à $\pm\frac{\pi}{2}$. Si les deux courbes C et C′ sont orientées, leur angle est l'angle $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT'})$, chaque tangente étant orientée dans le sens de la courbe correspondante.

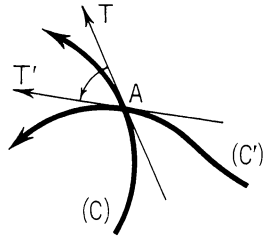


Fig. 35

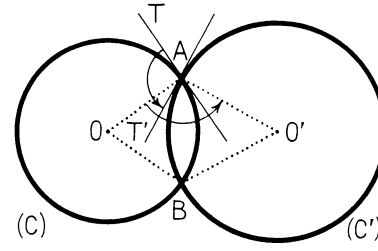


Fig. 36

Lorsque deux cercles (C) et (C′) de centres O et O′ se coupent en A et B, leur angle (AT, AT′) en A est égal à (AO, AO′), tandis que leur angle en B est égal à l'angle opposé (BO, BO′). En désignant par V la mesure arithmétique des angles saillants OAO′ et OBO′, on a par exemple (fig. 36) :

$$(AT, AT') = V + k\pi.$$

Les deux cercles (C) et (C′) sont tangents intérieurement si $V = 0$, tangents extérieurement si $V = \pi$, orthogonaux si $V = \frac{\pi}{2}$.

En orientant les deux cercles donnés (C) et (C′) dans le même sens on aurait $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT'}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) = V + 2k\pi$, tandis qu'en les orientant en sens contraire, on aurait $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT'}) = V + \pi + 2k\pi$.

ANGLES INSCRITS

51. Théorème fondamental. — ***Lorsque trois points*** A, B, M ***appartiennent à un cercle de centre*** O, ***on a :***

$$(\mathrm{MA},\ \mathrm{MB}) = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}) + k\pi. \qquad (1)$$

Les droites MA et MB (fig. 37) sont respectivement perpendiculaires aux droites Ou et Ov, bissectrices des angles $(\overrightarrow{\mathrm{OM}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}})$ et $(\overrightarrow{\mathrm{OM}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}})$. D'après les théorèmes n^{os} 46 et 48 on peut donc écrire :

$$(\mathrm{MA},\ \mathrm{MB}) = (\mathrm{O}u,\ \mathrm{O}v) = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}) + k\pi.$$

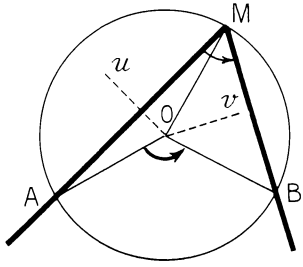


Fig. 37

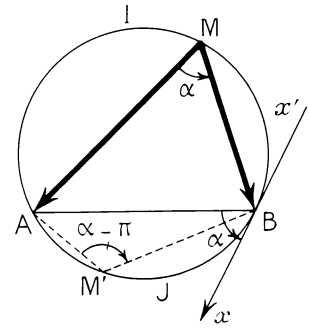


Fig. 38

Autrement dit :

Un angle de droite inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre de vecteurs correspondant.

52. Corollaire I. — La relation (1) est valable quel que soit M. Lorsque le point M parcourant le cercle O, vient en B (fig. 38), la droite MA vient se confondre avec BA et la droite MB avec la tangente $x'x$ en B. Il en résulte que :

$$(\mathrm{MA},\ \mathrm{MB}) = (\mathrm{BA},\ \mathrm{B}x) + k\pi. \qquad (2)$$

53. Corollaire II. — Précisons cette deuxième formule. Soient AIB et AJB (fig. 38) les arcs géométriques situés respectivement à l'intérieur des angles saillants ABx' et ABx, et désignons par α l'une des déterminations de l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{BA}},\ \overrightarrow{\mathrm{B}x})$. Lorsque M décrit l'arc AIB, l'angle géométrique AMB et l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\ \overrightarrow{\mathrm{MB}})$ restent constants et lorsque M vient en B, les axes $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ viennent se confondre avec $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}x}$.

Pour tout point M de l'arc AIB on a donc :

$$(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\ \overrightarrow{\mathrm{MB}}) = (\overrightarrow{\mathrm{BA}},\ \overrightarrow{\mathrm{B}x}) = \alpha + 2k\pi. \qquad (3)$$

Pour tout point M′ de l'arc AJB, on a par suite (n° 40) :

$$(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{Bx'}) = \alpha - \pi + 2k\pi. \qquad (4)$$

54. Théorème. — *Étant donnés deux points* A *et* B *et un angle orienté* α, *le lieu géométrique des points* M *tels que* $(MA, MB) = \alpha + k\pi$ *est un cercle passant par* A *et* B.

(*Cercle capable de l'angle de droites* α *relatif à* A *et* B.)

Soit M un point du lieu (fig. 39). Menons la tangente Bx au cercle ABM. La relation $(MA, MB) = (BA, Bx) = \alpha + k\pi$ montre que la droite Bx est indépendante de M. Il en est donc de même du cercle ABM dont le centre O est l'intersection de la médiatrice de AB et de la perpendiculaire en B à Bx. Tout point M du lieu appartient donc à ce cercle et la relation $(M'A, M'B) = (BA, Bx) = \alpha + k\pi$ montre que tout point M′ de ce cercle est un point du lieu.

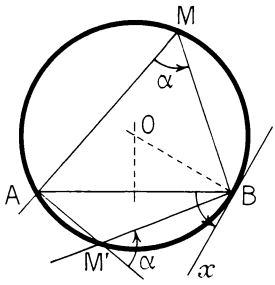


Fig. 39

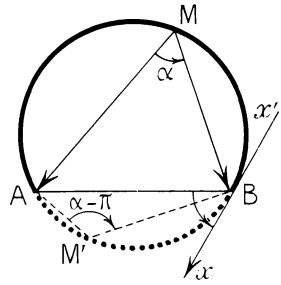


Fig. 40

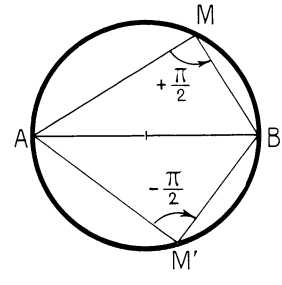


Fig. 41

55. Corollaire. — *Le lieu des points* M *tels que* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + 2k\pi$ *est un arc de cercle d'extrémités* A *et* B.

(*Arc capable de l'angle de vecteurs* α *relatif à* A *et* B.)

Tout point M du lieu (fig. 40) appartient au cercle lieu des points tels que $(MA, MB) = \alpha + k\pi$. Soit $x'x$ la tangente en B à ce cercle orientée de telle sorte que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{Bx}) = \alpha + 2k\pi$. Pour tout point M de l'arc intérieur à l'angle saillant ABx', on a $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + 2k\pi$ tandis que pour tout point M′ de l'arc intérieur à l'angle ABx on a $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = \alpha + (2k + 1)\pi$.

Le lieu cherché est donc l'arc AMB, tandis que l'arc AM′B est le lieu des points M′ tels que $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = \alpha + \pi + 2k\pi$.

56. Cas particuliers. — 1° *Le lieu des points* M *tels que* $(MA, MB) = k\pi$ *se réduit à la droite* AB. Le segment AB correspond à $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (2k + 1)\pi$ et ses prolongements à $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2k\pi$.

2° *Le lieu des points* M *tels que* $(MA, MB) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *est le cercle de diamètre* AB (fig. 41). L'un des demi-cercles de diamètre AB correspond à $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ tandis que l'autre correspond à $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

3° Si deux points M et M′ sont symétriques par rapport à la droite AB les angles saillants $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$ sont opposés. Donc (fig. 42) :

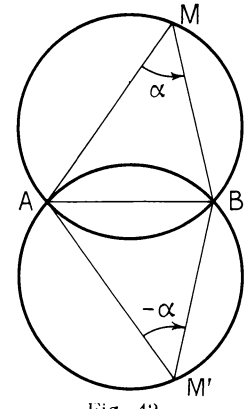


Fig. 42

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + 2k\pi \iff (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = -\alpha + 2k\pi.$$

Les deux arcs de cercle AMB *et* AM'B *capables des angles de vecteurs* α *et* $-\alpha$ *sont symétriques par rapport à* AB.

Il en est par suite de même des cercles AMB et AM'B, capables des angles de droites α et $-\alpha$.

57. Points cocycliques. — *Pour que quatre points non alignés* A, B, C *et* D *appartiennent à un même cercle, il faut et il suffit que :*

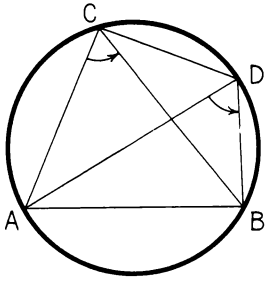


Fig. 43

$$(CA, CB) = (DA, DB) + k\pi. \qquad (1)$$

En effet, il faut et il suffit que C et D appartiennent à un même cercle capable relatif à A et B, donc que les angles (CA, CB) et (DA, DB) aient, à $k\pi$ près, la même valeur α (fig. 43). Il en résulte que la relation (1) équivaut à :

$$(CA, CD) = (BA, BD) + k\pi$$

ou

$$(BA, BC) = (DA, DC) + k\pi.$$

Dans l'égalité (1) on peut donc permuter deux quelconques des quatre lettres A, B, C et D. Rappelons que :

Lorsqu'un quadrilatère ABCD *a deux angles opposés* A *et* C *égaux à un droit, il est inscriptible dans le cercle de diamètre* DB *et réciproquement.*

58. Quadrangle. — *On appelle quadrangle la figure formée par quatre points et les six segments qui les joignent deux à deux.* (1)

Les quatre points A, B, C, D sont les sommets du quadrangle ABCD (fig. 44 et 45). Les côtés tels que AC et BD sont dits opposés. Les points de rencontre I, J, K des trois couples de côtés opposés sont les *points diagonaux* et le triangle IJK est le *triangle diagonal.*

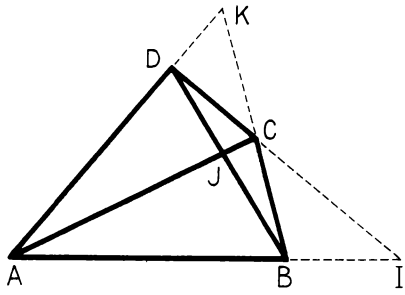


Fig. 44

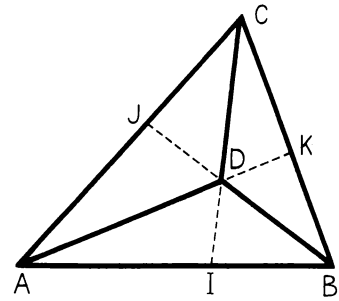


Fig 45

La relation (CA, CB) = (DA, DB) + $k\pi$ est nécessaire et suffisante pour que le quadrangle ABCD soit inscriptible dans un cercle (fig. 43).

Un quadrangle ABCD est dit *orthocentrique* lorsqu'un sommet est l'orthocentre du triangle déterminé par les trois autres (fig. 50).

59. Droites antiparallèles. — *Deux couples de droites* D, D' *et* Δ, Δ' *sont antiparallèles si :* (D, Δ) = (Δ', D') + $k\pi$.

On dit, par exemple (fig. 46), que Δ' est antiparallèle à Δ par rapport à D et D'. Il en est ainsi notamment lorsque D et D' sont respectivement perpendiculaires à Δ et Δ' car alors : $(D, \Delta) = (\Delta', D') = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

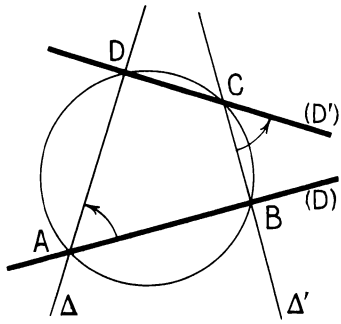


Fig. 46

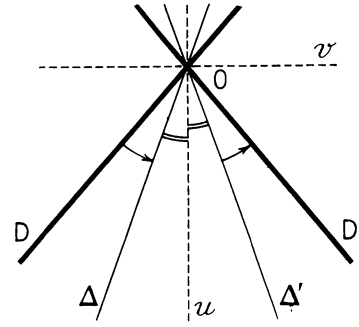


Fig. 47

Si les quatre droites D, D', Δ et Δ' sont issues d'un même point O, on dit également que Δ et Δ' sont des isogonales de l'angle (D, D') (fig. 47). Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que les angles (D, D') et (Δ, Δ') aient mêmes bissectrices Ou et Ov.

1° ***Pour qu'un quadrangle*** ABCD ***soit inscriptible il faut et il suffit que deux couples de côtés opposés soient antiparallèles.***

En effet, l'égalité (AB, AD) = (CB, CD) est la condition pour que les deux couples AB, CD et AD, BC soient antiparallèles (fig. 46).

Si O désigne le point d'intersection des droites AD et BC, cette condition équivaut à la similitude inverse des triangles OAB et OCD soit à l'égalité $\overline{OA} \cdot \overline{OD} = \overline{OB} \cdot \overline{OC}$.

2° Les égalités $(D, \Delta) = (\Delta', D')$ et $(D, \Delta) = (\Delta', D'')$ entraînent $(\Delta', D') = (\Delta' D'')$. Donc : *si deux droites* D' *et* D'' *sont antiparallèles à* D *par rapport à* Δ *et* Δ', *elles sont parallèles entre elles.*

De même : $(D, \Delta) = (\Delta', D')$ et $(\Delta, \delta) = (\delta', \Delta') \implies (D, \delta) = (\delta', D')$.

Deux couples de droites D, D' *et* δ, δ' *antiparallèles par rapport à un troisième* Δ, Δ' *sont antiparallèles entre eux.* Les 3 couples ont alors des bissectrices de même direction.

60. Exemples. — Menons les hauteurs AA', BB' et CC' du triangle ABC, puis le diamètre AD et la tangente Ax au cercle ABC (fig. 48). Le quadrangle BCB'C' étant inscriptible, les couples AB, AC; BB', CC' et BC, B'C' sont deux à deux antiparallèles. Les angles (BC, BA) et (AC, Ax) étant égaux, les couples AB, AC et BC, Ax sont antiparallèles. Il en résulte que B'C' et Ax, antiparallèles à BC par rapport à AB et AC, sont parallèles donc, que AD est perpendiculaire à B'C'. Les droites AA' et AD, perpendiculaires à BC et B'C', sont antiparallèles par rapport à BC et B'C' donc par rapport à BB' et CC' ou par rapport à AB et AC. Notons que :

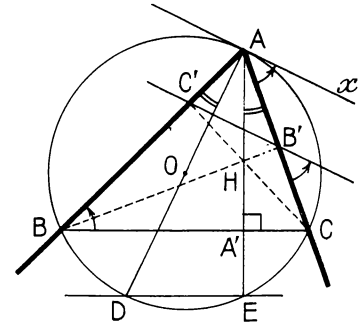


Fig. 48

Deux côtés d'un triangle sont antiparallèles par rapport à la hauteur et au diamètre du cercle circonscrit issus du même sommet.

Ce qui revient à dire que les angles (AB, AC) et (AH, AD) ont mêmes bissectrices.

APPLICATIONS

61. Théorème. — *Les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés du triangle sont situés sur le cercle circonscrit.*

Soit H l'orthocentre du triangle ABC et H_1 le symétrique de H par rapport à la droite BC (fig. 49). Les angles (AB, AC) et (HC, HB) ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires sont égaux, tandis que les angles (HB, HC) et (H_1B, H_1C) symétriques par rapport à BC sont opposés. Donc :

$$(AB, AC) = -(HB, HC) = (H_1B, H_1C) \text{ à } k\pi \text{ près.}$$

L'égalité (H_1B, H_1C) = (AB, AC) + $k\pi$ montre que le point H_1 est sur le cercle ABC (n° 57).

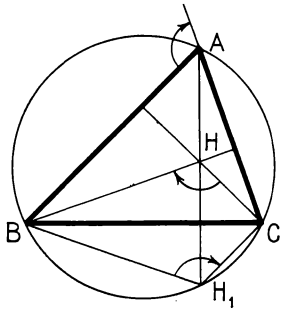


Fig. 49

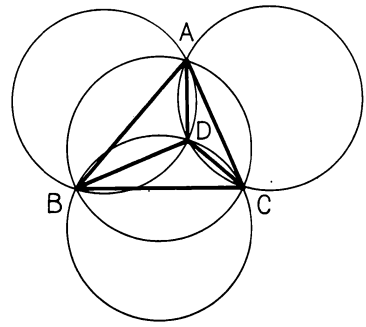


Fig. 50

Autre énoncé. — *Les symétriques du cercle circonscrit à un triangle par rapport aux côtés de ce triangle passent par l'orthocentre.*

Cela résulte aussi des égalités telles que (HB, HC) = — (AB, AC) + $k\pi$ (n° 56, 3°).

62. Corollaire. — *Les quatre cercles circonscrits aux triangles d'un quadrangle orthocentrique sont égaux.*

Un quadrangle ABCD est dit *orthocentrique* lorsqu'un sommet est l'orthocentre du triangle déterminé par les trois autres (fig. 50).

Le point D étant l'orthocentre du triangle ABC les trois cercles DBC, DCA et DAB sont égaux au cercle ABC, donc égaux entre eux.

Inversement si trois cercles égaux ABC, ACD *et* ADB *concourent en un même point* A, *le quadrangle* ABCD *est orthocentrique.*

Les cercles ACD et ABD sont symétriques du cercle ABC par rapport à AC et AB respectivement. L'orthocentre du triangle ABC, qui appartient à ces deux cercles, est donc le point D et le cercle BCD est égal à chacun des trois cercles donnés.

63. Droite de Simson. — *Le lieu géométrique des points dont les projections sur les côtés d'un triangle* ABC *sont en ligne droite est le cercle circonscrit au triangle.*

Pour que les points α, β, γ projections sur les droites BC, CA et AB, d'un point M du plan ABC soient alignés (fig. 51) il faut et il suffit que :

$$(\beta\alpha, \beta M) = (\beta\gamma, \beta M) + k\pi. \qquad (1)$$

Or les quadrangles αβCM et βγAM sont inscriptibles (n° 57). Donc :

$$(\beta\alpha, \beta M) = (C\alpha, CM) = (CB, CM) + h\pi$$
$$(\beta\gamma, \beta M) = (A\gamma, AM) = (AB, AM) + l\pi.$$

La relation (1) est donc équivalente à la relation :

$$(CB, CM) = (AB, AM) + (k - h - l)\,\pi.$$

Cette dernière est la condition pour que le quadrangle CABM soit inscriptible, c'est-à-dire pour que le point M appartienne au cercle ABC.

La droite αβγ est la droite de Simson relative au point M du cercle ABC.

Soit D la seconde intersection de la droite Mα avec le cercle ABC. Les quadrangles αβCM et DACM étant inscriptibles, les droites αβ et AD sont séparément antiparallèles à MC par rapport aux droites AβC et MαD. Elles sont donc parallèles et la droite de Simson αβγ est parallèle à AD.

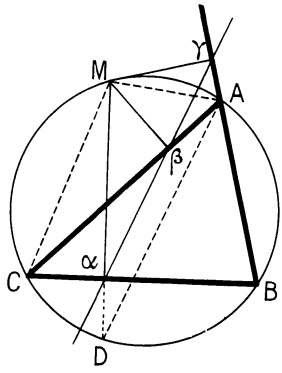


Fig. 51

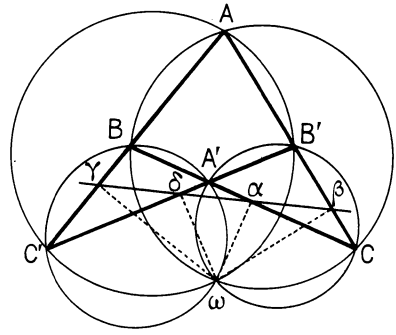


Fig. 52

64. Théorème. — ***Les cercles circonscrits aux quatre triangles formés par les côtés d'un quadrilatère complet concourent en un point ω dont les projections sur les côtés sont alignées.***

Soit ω le second point commun aux cercles ABC et AB′C′ (fig. 52) et α, β, γ, δ, ses projections sur les droites A′BC, AB′C, ABC′ et A′B′C′. Ces quatre points α, β, γ, δ sont alignés car αβγ et δβγ sont les droites de Simson de ω pour les triangles ABC et AB′C′. Le point ω ayant ses projections sur les côtés des triangles A′BC′ et A′B′C alignées appartient aux cercles A′BC′ et A′B′C.

65. Triangles semblables. — Deux triangles ABC et A′B′C′ de même sens (fig. 53) sont directement semblables lorsque deux des relations suivantes sont vérifiées à $2k\pi$ près :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}); \qquad (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'}); \qquad (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'})$$

Or les relations : (AB, AC) = (A′B′, A′C′) et (BA, BC) = (B′A′, B′C′) à $k\pi$ près, suffisent à déterminer la position du point C′ lorsque l'on connaît le triangle ABC et les points A′ et B′. Donc :

Pour que deux triangles soient directement semblables, il suffit qu'ils aient deux angles de droites respectivement égaux.

Il en résulte immédiatement que deux triangles à côtés respectivement parallèles (ou respectivement perpendiculaires) sont directement semblables.

On verrait de même (fig. 53) que les deux relations, à $k\pi$ près :

$$(AB, AC) = -(A_1B_1, A_1C_1) \quad \text{et} \quad (BA, BC) = -(B_1A_1, B_1C_1)$$

suffisent pour que les deux triangles de sens contraires ABC et $A_1B_1C_1$ soient inversement semblables.

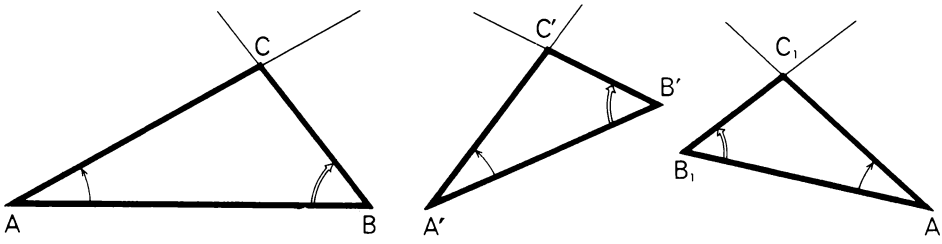


Fig. 53

66. Angle de deux cercles. — 1° ***Toute sécante passant par un des points communs à deux cercles est vue de l'autre point commun sous un angle constant égal à l'angle des deux cercles.***

Soient deux cercles O et O′ sécants en A et B et une droite passant par B qui recoupe les deux cercles en M et M′ (fig. 54). On a, à $k\pi$ près :

$$(MA, MB) = (OA, OO') = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \qquad (M'B, M'A) = (O'O, O'A) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'A})$$

Donc : $(MA, MM') = (OA, OO')$ et $(M'A, M'M) = (O'A, O'O)$.

Les deux triangles MAM′ et OAO′ sont directement semblables (n° 65) et par suite (mod. 2π) :

$$\boxed{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) = V}$$

L'angle V *de deux cercles sécants est donc l'angle sous lequel on voit, du point commun* A *la sécante* MM′ *passant par l'autre point commun* B.

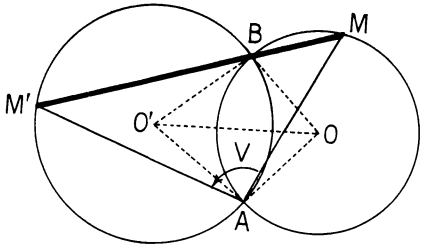


Fig. 54

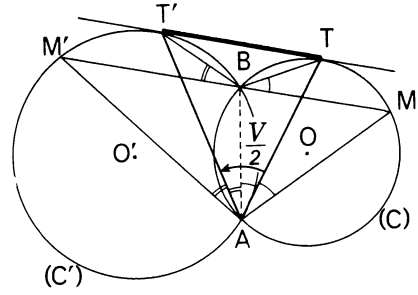


Fig. 55

2° Menons la tangente commune TT′ la plus rapprochée de B (fig. 55) et par le point B la sécante MM′ parallèle à TT′. Les points T et T′ sont les milieux des arcs BM et BM′. On obtient à 2 $k\pi$ près :

$$\left.\begin{aligned}(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) &= -(\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BM}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT'}) &= -(\overrightarrow{BM'}, \overrightarrow{BT'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})\end{aligned}\right\} \Longrightarrow (\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT'}) = \pi - (\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BT'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}).$$

Donc : $\boxed{(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT'}) = \frac{V}{2}}$ et $\boxed{(\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BT'}) = \pi - \frac{V}{2}}$

La tangente commune TT′ *est vue de* A *sous l'angle* $\frac{V}{2}$ *et de* B *sous l'angle* $\pi - \frac{V}{2}$.

Propriété qui implique que les deux cercles ATT′ et BTT′ sont égaux (n° 56, 3°).

EXERCICES

47. 1° Démontrer que l'angle de droites de deux cordes AB et CD d'un cercle de centre O est donné par la formule : $(AB, CD) = \frac{1}{2}[(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})] + k\pi$.

2° En désignant par α la mesure algébrique de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ intérieur à l'angle ADC et par β la mesure algébrique de l'arc $\overset{\frown}{BD}$ intérieur à l'angle BAD démontrer que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 2k\pi.$$

48. Soient trois points ABC d'un cercle de centre O. Démontrer que la mesure algébrique de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$ est à $2k\pi$ près égale à la moitié de la mesure algébrique de l'arc $\overset{\frown}{BAC}$ inférieur au cercle entier.

49. 1° On considère deux arcs de cercle ACB et ADB et les tangentes $\overrightarrow{Ax}$ et $\overrightarrow{Ay}$ orientées dans les sens correspondants à $\overset{\frown}{ACB}$ et $\overset{\frown}{ADB}$. Démontrer que :

$$(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{Ay}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) + 2k\pi.$$

2° Comparer l'angle de deux des cercles ABC, BCD, CDA et DAB avec l'angle des deux autres. Les angles obtenus sont-ils indépendants ?

3° Les deux cercles ABC et ABD sont orthogonaux. Montrer qu'il en est de même des cercles ACD et BCD.

50. Un point variable M décrit le cercle circonscrit au triangle isocèle ABC de sommet A. La droite AM coupe en P la droite BC :

1° Montrer que les cercles BMP et CMP sont respectivement tangents à AB et AC. Lieux de leurs centres ω et ω'.

2° Comparer les angles (BA, BM) et (CA, CM) à l'angle (AM, BC).

51. Soient trois points D, E, F pris respectivement sur les côtés BC, CA et AB d'un triangle ABC.

1° Montrer que les trois cercles AEF, BFD et CDE se recoupent en un même point M.

2° Évaluer l'angle (DE, DF) en fonction des angles (AB, AC) et (MB, MC).

3° Lieu géométrique du point M lorsque D, E et F varient en restant alignés ?

52. 1° On considère un triangle ABC, un point fixe D de AB, un point fixe E de AC et un point mobile M du cercle ABC. Les cercles BDM et CEM se recoupent en N. Trouver le lieu du point N.

2° Soit un quadrilatère ABCD et un point mobile M de BC. Les cercles ABM et CDM se recoupent en P. Lieu géométrique du point P ?

53. 1° On donne deux cercles fixes ABC et ABD. Une sécante mobile passant par B recoupe le premier cercle en M et le second en N. Les droites CM et DN se coupent en R. Trouver le lieu du point R.

2° Soient trois cercles fixes DAB, DAC et DBC et un point variable M du cercle DBC. La droite MB recoupe en N le cercle DAB et la droite MC recoupe en P le cercle DAC. Trouver l'enveloppe de NP.

54. 1° Quel est le lieu des points de l'espace dont les projections sur les côtés d'un triangle sont en ligne droite ?

2° Quel est le lieu des points de l'espace dont les projections sur les côtés d'un quadrilatère complet sont en ligne droite ?

55. Soit un triangle ABC. On construit trois droites Ax, By et Cz telles que : (AB, Ax) = (CB, Cz) et (AC, Ax) = (BC, By) :

1° Montrer que les trois couples BC, Ax ; CA, By et AB, Cz sont deux à deux antiparallèles.

2° Démontrer que les trois droites Ax, By et Cz sont concourantes en un point D du cercle ABC.

56. Dans un triangle ABC on désigne par A la mesure de l'angle $(\vec{AB}, \vec{AC})$, par H l'orthocentre, par I le centre du cercle inscrit et par J, K, L les centres des cercles exinscrits respectivement dans les angles A, B et C du triangle :

1° Évaluer en fonction de A, les angles (HB, HC), $(\vec{IB}, \vec{IC})$, $(\vec{JB}, \vec{JC})$, $(\vec{KB}, \vec{KC})$ et $(\vec{LB}, \vec{LC})$.

2° Déterminer les lieux géométriques de H, I, J, K et L lorsque le point A décrit un cercle passant par les points fixes B et C. Préciser les centres de ces cercles ainsi que les arcs décrits par chacun des points I, J, K et L.

57. On considère trois vecteurs $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$ et on mène les bissectrices OM, ON et OP des angles $(\vec{OB}, \vec{OC})$, $(\vec{OC}, \vec{OA})$ et $(\vec{OA}, \vec{OB})$:

1° Démontrer que OM et ON sont antiparallèles par rapport à OP et OC.

2° Énoncer deux autres groupes analogues de quatre droites et écrire les égalités d'angles qui en résultent.

58. Soit D le point de contact avec la droite BC d'un cercle de centre I tangent aux trois côtés du triangle ABC :

1° Démontrer que IA et ID sont antiparallèles par rapport à IB et IC.

2° En déduire que AI passe par le centre du cercle IBC.

59. Étant donné un triangle ABC on construit extérieurement au triangle les points D et E tels que : $(\vec{AD}, \vec{AB}) = (\vec{AC}, \vec{AE})$, AD = AB et AE = AC.

1° Montrer que les droites BD et CE se coupent en un point I situé sur les cercles ACD et ABE.

2° Démontrer que les droites CD et BE ainsi que les cercles ABD et ACE concourent en un même point J. Que représente JA pour l'angle $(\vec{CD}, \vec{BE})$?

3° La droite AJ coupe BD en P et CE en Q. Montrer que AI est tangente au cercle IPQ.

60. On considère un triangle ABC dont l'angle A est obtus. Le cercle tangent en A à AB et passant par C recoupe BC en D. Le cercle tangent en A à AC et passant par B recoupe BC en E. Ces deux cercles se recoupent en ω :

1° Démontrer que AD = AE et que la droite ωA est bissectrice de l'angle BωC. Évaluer les angles $(\vec{\omega B}, \vec{\omega C})$ et $(\vec{\omega D}, \vec{\omega E})$ en fonction de $(\vec{AB}, \vec{AC})$ = A.

2° Montrer que le cercle ωDE est tangent à AD et AE et que les cercles ωBD et ωCE sont respectivement tangents à AB et AC.

3° Le cercle ωDE recoupe ωA en I. Comparer les directions ID et IE aux directions AB et AC.

61. Soient deux cercles de centres O et O′ se coupant en A et B. On mène par le point B deux sécantes : l'une fixe CC′, l'autre variable MM′. Les droites CM et C′M′ se coupent en P :

1° Démontrer que les quadrilatères PACC′ et PAMM′ sont inscriptibles et trouver le lieu géométrique du point P.

2° Évaluer l'angle (CM, C′M′) en fonction de $(\vec{AO}, \vec{AO'})$ = V et démontrer que les trois angles $(\vec{AB}, \vec{AP})$, $(\vec{AC}, \vec{AM'})$ et $(\vec{AM}, \vec{AC'})$ ont même bissectrice.

3° Soient D et D′ les projections de A sur CM et C′M′. Montrer que la droite DD′ passe par un point fixe.

62. 1° Montrer que les projections d'un point ω d'un cercle sur les six côtés d'un quadrangle inscrit dans ce cercle sont les sommets d'un quadrilatère complet.

2° On considère un quadrilatère complet ABCA′B′C′ et soit ω le point commun aux quatre cercles ABC, AB′C′, A′BC′ et A′B′C de diamètres respectifs ωM, ωN, ωP et ωQ. Démontrer que les six sommets du quadrilatère complet sont les projections de ω sur les six côtés du quadrangle MNPQ et en déduire que les cinq points ω, M, N, P et Q appartiennent à un même cercle.

63. Deux cercles O et O′, se coupent en A et B et une sécante mobile MM′ passant par B recoupe le premier cercle en M et le second en M′. Les tangentes en M et M′ se coupent en I et les rayons OM et O′M′ se coupent en J :

1° Montrer que I et J sont diamétralement opposés sur le cercle AMM′ de centre ω et que les angles $(\vec{AB}, \vec{AI})$ et $(\vec{AM}, \vec{AM'})$ ont même bissectrice.

2° Évaluer en fonction de $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) = V$ les angles (IM, IM'), (JM, JM') et (ωO, ωO'). Déterminer le lieu géométrique de ω et J.

3° La droite AI recoupe en K le cercle AOO'. Démontrer que le segment KI est constant et égal au diamètre du cercle AOO'.

64. On considère un cercle Γ de centre O, de rayon R, une corde BC et un point A de ce cercle. La tangente en A à Γ coupe la droite BC en T. On désigne par A l'angle BAC, par α l'angle formé par la bissectrice intérieure AA' de l'angle BAC avec la hauteur AH du triangle ABC, par I et J les centres des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle A du triangle ABC.

1° B et C restant fixes et A décrivant le cercle Γ montrer que le lieu de I et de J appartient à deux cercles dont la somme des carrés des rayons est égale à $4\,R^2$.

2° Calculer en fonction de A et de α les angles des triangles ABC, CAT et BAT. Calculer en fonction de R, A, α les côtés des mêmes triangles.

65. Par les sommets ABC d'un triangle donné on mène respectivement les droites D_A, D_B et D_C telles que les trois angles (BC, D_A), (CA, D_B) et (AB, D_C) soient égaux à $k\pi$ près à un même angle α. Soit A'B'C' le triangle déterminé par ces trois droites :

1° Lieux des points A', B' et C' quand α varie.

2° Montrer que le point commun aux trois lieux obtenus est l'orthocentre H du triangle ABC. Que représente le point H pour le triangle A'B'C' ?

3° Montrer que le triangle A'B'C' est semblable au triangle ABC et que leur rapport de similitude est $2|\cos\alpha|$.

66. Soit un triangle ABC : on désigne par U le cercle passant par A et B et centré en I sur AC, par V le cercle passant par A et C et centré en J sur AB, par W le cercle ABC et par K le centre de ce cercle :

1° En supposant donnés les points I, J, K construire le triangle ABC.

2° Les cercles U et V se coupent en un point H distinct de A. Montrer que les points A, K, H sont alignés.

67. Soient dans le plan $x'Ox$, $y'Oy$ deux droites rectangulaires fixes, Ot une demi-droite issue de O et sur cette demi-droite deux points P et Q tels que $OP = a$, $OQ = b$ (a et b constantes telles que $a > b$). Soit I le milieu de PQ. Le cercle de centre I passant par O recoupe $x'Ox$ en U, $y'Oy$ en V et Ot en W. Les cercles Γ et Ω respectivement circonscrits aux triangles WPU et WQV se recoupent en M et recoupent respectivement $x'Ox$ en S et $y'Oy$ en T.

1° Montrer que P et Q sont les projections sur OW respectivement de S et de T et que M est la projection de W sur ST.

2° Démontrer que les quatre points O, T, W, S sont sur un même cercle. En déduire que M est sur la droite UV.

3° Démontrer que QM est parallèle à $x'Ox$ et PM parallèle à $y'Oy$.

68. 1° Un faisceau de n droites Δ_1, Δ_2 ... Δ_n, issues d'un point I est régulier si, à $k\pi$ près :

$$(\Delta_1, \Delta_2) = (\Delta_2, \Delta_3) = \ldots\ldots = (\Delta_n, \Delta_1) = \frac{\pi}{n} \text{ (mod. } \pi).$$

Démontrer qu'un tel faisceau découpe tout cercle passant par I aux sommets d'un polygone régulier de n côtés A_1, A_2 ... A_n.

2° Si n est impair et si I appartient à l'arc A_nA_1, démontrer que :

$$IA_1 - IA_2 + IA_3 - IA_4 \ldots + IA_n = 0.$$

3° On considère deux faisceaux réguliers de trois droites I (Δ_1, Δ_2, Δ_3) et J (D_1, D_2, D_3). Les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 coupent la droite D_1 en A_1, B_1, C_1, la droite D_2 en C_2, A_2, B_2 et la droite D_3 en B_3, C_3, A_3. Démontrer que les trois triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ et $C_1C_2C_3$ sont équilatéraux et qu'ils ont leurs côtés parallèles.

69. Un cercle orienté ou *cycle* Γ de centre ω est dit tangent en A à l'*axe* Δ lorsque les sens de Γ et de l'axe tangent Δ coïncident en A. Le nombre réel $\overline{A\omega} = A\omega \sin(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{A\omega})$ constitue la *distance algébrique* du point ω et de l'axe Δ ou le rayon du cycle Γ. Deux cycles Γ et Γ' sont dits tangents en A s'ils admettent même axe tangent en ce point.

1° Déterminer l'ensemble des points algébriquement équidistants de deux axes Δ et Δ' et l'ensemble des cycles tangents à ces deux axes. Étudier le cas où Δ et Δ' sont parallèles de même sens ou de sens contraires.

2° Montrer qu'il existe un cycle et un seul tangent à trois axes Δ, Δ', Δ'' deux à deux concourants. Étudier le cas où deux de ces axes ont même direction.

3° Construire un cycle tangent en A à un axe donné Δ (ou à un cycle donné) et tangent au cycle donné Γ. En désignant par I le point de Γ où l'axe tangent est parallèle à Δ et de même sens, on montrera que le point de contact B avec Γ est situé sur AI.

70. On considère deux axes Ax et By tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{Ax}) = (\overrightarrow{By}, \overrightarrow{BA}) = \alpha$ (on pourra commencer par le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$). Deux points variables P et Q décrivent respectivement Ax et By. On désigne par H, K et M les projections du milieu O de AB sur Ax, By et PQ. Déterminer en utilisant la méthode indiquée l'enveloppe de la droite PQ dans les hypothèses suivantes :

1° $(OP, OQ) = \alpha$. — *a*) Montrer que le cercle OPQ recoupe Ax sur la parallèle menée par Q à AB, qu'il est tangent en O à AB et que OP et OQ sont les bissectrices des angles HPQ et KQP *b*) Utiliser les quadrangles OHPM et OKQM pour établir que $(MH, MK) = \alpha = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK})$.

2° $\overline{AP} \cdot \overline{BQ} = \overline{AO}^2$. — *a*) Montrer que le cercle tangent en O à AB et passant par P passe aussi par Q ; *b*) Établir la similitude directe des trois triangles APO, BOQ et OPQ.

3° $|\ HP \pm KQ\ | = PQ$. — *a*) Le cercle de centre O et de rayon OH est un cercle tangent aux trois droites PQ, Ax et By ; *b*) Les cercles de centres P et Q tangents respectivement à OH et OK sont tangents entre eux en M ; montrer que $(NH, NK) = \alpha$ ou que la tangente commune en M passe par O.

71. On donne deux droites Ax et By se coupant en C tel que $CA > CB$. On désigne par D le point diamétralement opposé à C sur le cercle ABC et par A′ un point de By tel que $CA' = CA$. Un cercle variable de centre ω est tangent en A à Ax et recoupe AA′ en α. La droite $B\alpha$ recoupe le cercle ω en M.

1° Montrer qu'il existe un cercle de centre ω' tangent en B à By et en M au cercle ω. Construire ce cercle et la tangente commune en M qui coupe Ax en P, By en Q.

2° Démontrer que les droites $P\omega$ et $Q\omega'$ se coupent en un point fixe I équidistant des côtés du triangle CPQ, des trois points A, B, M et des côtés du triangle $D\omega\omega'$. Préciser la position de I sur le cercle ABC et déterminer le lieu de M, l'enveloppe de la droite PQ et l'enveloppe de la droite $\omega\omega'$.

3° La deuxième tangente, issue de Q, au cercle ω touche ce cercle en N et coupe Ax en R. Montrer qu'il existe un cercle de centre ω_1, tangent en N au cercle ω et en B à By. Établir de même que $R\omega$ et $Q\omega_1$ se coupent en un point fixe J, équidistant des côtés du triangle CQR, des sommets du triangle ABN, des côtés du triangle $D\omega\omega_1$. En déduire le lieu de N et les enveloppes des droites QR et $\omega\omega_1$.

4° Étudier le cas où $CA = CB$, puis le cas où Ax et By sont parallèles. Peut-on déduire de l'étude précédente le lieu des points de rencontre M et N de deux cercles orthogonaux, l'un tangent en A à Ax, le second tangent en B à Bz perpendiculaire à By, ainsi que les enveloppes des tangentes en M et N à ces deux cercles.

PUISSANCE PAR RAPPORT A UN CERCLE

67. Théorème. — ***Lorsqu'une sécante variable issue d'un point fixe*** M ***coupe un cercle donné*** Γ ***en*** A ***et*** B, ***le produit*** $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ ***est un nombre constant appelé puissance du point*** M ***par rapport à ce cercle.***

Soit O le centre et R le rayon du cercle donné Γ (fig. 56 et 57). Désignons par d la distance OM et par A′ le point diamétralement opposé à A sur Γ. L'angle ABA′ étant droit, on peut écrire, quelle que soit la sécante MAB :

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = d^2 - R^2.$$

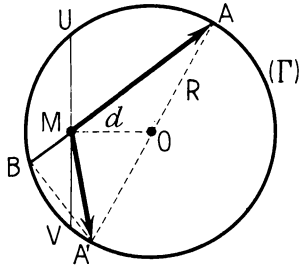


Fig. 56

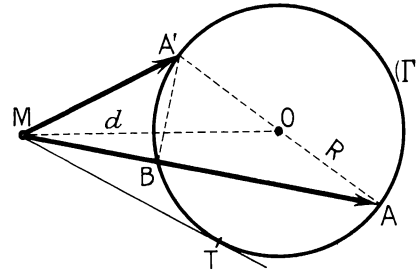


Fig. 57

Cette valeur constante $d^2 - R^2$ du produit $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ est la puissance du point M par rapport au cercle Γ. Cette puissance est une fonction du point M que l'on représente par Γ(M) ou si le cercle est désigné par son centre O, par $\mathcal{P}_O(M)$. Donc :

$$\boxed{\Gamma(M) = \mathcal{P}_O(M) = \overline{MA} \cdot \overline{MB}} \iff \boxed{\Gamma(M) = d^2 - R^2} \quad (1)\ (2)$$

68. Propriétés de la puissance. — 1° Il résulte de ce qui précède que :

La puissance d'un point M ***par rapport à un cercle*** Γ ***de diamètre*** AA′ ***est égale au produit scalaire*** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$.

$$\boxed{\Gamma(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}} \quad (3)$$

Inversement tout produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$ peut être interprété comme étant la puissance du point M par rapport au cercle Γ de diamètre AA′.

2° Si on mène deux sécantes MAB et MCD au cercle Γ on obtient (fig. 58 et 59) :

$$\Gamma(M) = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}. \quad (4)$$

Si le point M est extérieur (fig. 57), en désignant par MT une tangente :

$$\Gamma(M) = \overline{MT}^2 = \overline{MA} \cdot \overline{MB}. \qquad (5)$$

Si le point M est intérieur (fig. 56), en désignant par UV la corde perpendiculaire à OM : $\Gamma(M) = -\overline{MU}^2$. (6)

3° Pour que la puissance $\Gamma(M)$ soit positive, nulle ou négative, il faut et il suffit que d soit supérieur, égal ou inférieur à R, donc que M soit extérieur, sur le cercle ou intérieur au cercle O. Le minimum de $\Gamma(M)$ est atteint lorsque M est en O : $\Gamma(O) = -R^2$.

Le lieu des points M tels que $\Gamma(M) = k > -R^2$ est le cercle de centre O tel que $OM^2 - R^2 = k$, donc de rayon $\sqrt{R^2 + k}$.

4° Si le rayon R du cercle O devient nul on a affaire au *cercle-point* O et la puissance $\Gamma(M)$ est alors égale à $\overline{MO}^2$.

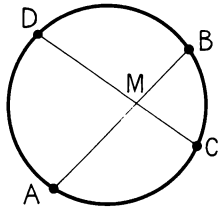


Fig. 58

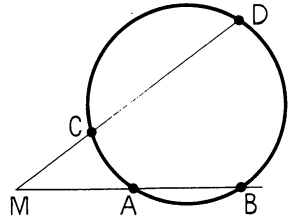


Fig. 59

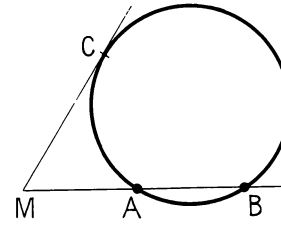


Fig. 60

69. Réciproques. — 1° ***Si les côtés*** AB ***et*** CD ***du quadrangle*** ABCD ***se coupent en un point*** M ***tel que*** $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$, ***ce quadrangle est inscriptible.***

Le cercle ABC recoupe en effet (fig. 58 et 59) la droite MC en un point D′ tel que $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD'}$. Donc $\overline{MD'} = \overline{MD}$, ce qui montre que D′ est en D.

2° ***Si le point*** M ***du côté*** AB ***du triangle*** ABC ***est tel que*** $\overline{MC}^2 = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$ ***la droite*** MC ***est tangente en*** C ***au cercle*** ABC.

Supposer (fig. 60), dans la démonstration précédente, que D est confondu avec C.

AXE RADICAL DE DEUX CERCLES

70. Théorème. — ***Le lieu géométrique des points qui ont même puissance par rapport à deux cercles donnés est une droite*** Δ ***perpendiculaire à la droite des centres, appelée axe radical des deux cercles.***

Pour que le point M ait même puissance par rapport aux deux cercles O(R) et O′(R′), il faut et il suffit que (fig. 61) :

$$\overline{MO}^2 - R^2 = \overline{MO'}^2 - R'^2 \iff \overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = R^2 - R'^2 \qquad (1)$$

En désignant par I le milieu de OO′, le lieu de M est donc une droite Δ perpendiculaire à la droite OO′ au point H défini par la relation :

$$2\,\overline{OO'} \cdot \overline{IH} = R^2 - R'^2. \qquad (2)$$

Si R = R′ l'axe radical Δ est la médiatrice de OO′. Si R′ = 0, la droite Δ est l'axe radical du cercle O(R) et du cercle-point O′.

Notons que si O′ vient se confondre avec O et si R′ ≠ R, l'axe radical est rejeté à l'infini.

71. Propriétés de l'axe radical. — 1° ***L'axe radical de deux cercles passe par tout point commun aux deux cercles.***

Les puissances d'un tel point par rapport aux deux cercles étant nulles, elles sont donc égales. L'axe radical de deux cercles sécants (fig. 62) est par suite le support de leur corde commune et l'axe radical de deux cercles tangents (fig. 64 et 65) est leur

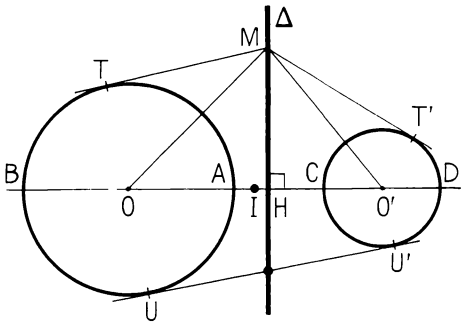


Fig. 61

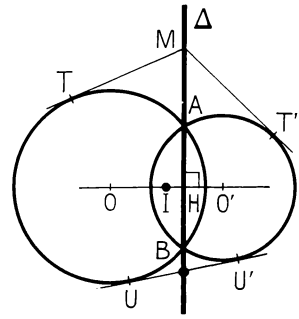


Fig. 62

tangente commune. L'axe radical de deux cercles intérieurs ou extérieurs est extérieur aux deux cercles (fig. 61 et 63) car s'il coupait l'un d'eux en un point il couperait l'autre au même point.

2° Précisons la position de Δ dans le cas où R > R′. La relation (2) montre que dans ce cas les vecteurs $\overrightarrow{OO'}$ et $\overrightarrow{IH}$ sont de même sens. Le point H appartient à la demi-droite IO′ et HO > HO′. Par suite HO + R > HO′ + R′ donc (fig. 61) : HB > HD. La relation HA . HB = HC . HD entraîne alors : HA < HC. *La droite* Δ *est donc plus proche du cercle* O *que du cercle* O′.

3° ***La portion de l'axe radical, extérieure aux deux cercles, est le lieu des points d'où on peut leur mener des tangentes égales.***

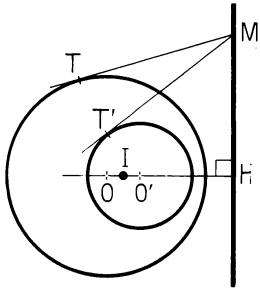


Fig. 63

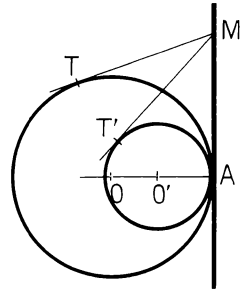


Fig. 64

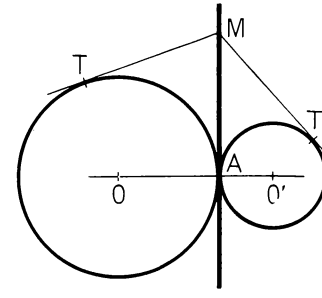


Fig. 65

En effet pour que l'on ait MT = MT′ (fig. 62) il faut et il suffit que M ait même puissance positive par rapport aux cercles O et O′. Il en résulte que l'*axe radical de deux cercles passe par le milieu de toute tangente commune à ces deux cercles.*

Lorsque deux cercles sont extérieurs, les milieux des 4 tangentes communes sont alignés sur l'axe radical.

72. Théorème. — ***Les axes radicaux de trois cercles pris deux à deux concourent en général en un même point qui a même puissance par rapport aux trois cercles et qu'on appelle centre radical des trois cercles.***

1° Si les centres O, O′ et O″ de trois cercles donnés ne sont pas alignés (fig. 66), l'axe radical Δ des cercles O et O′ et l'axe radical Δ′ des cercles O et O″ se coupent en un point I dont les puissances $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}''$ par rapport aux trois cercles sont égales. Le point I appartient donc également à l'axe radical Δ″ des cercles O′ et O″.

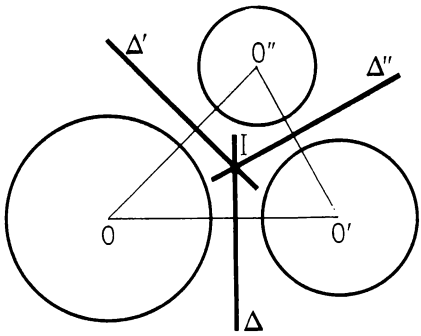


Fig. 66

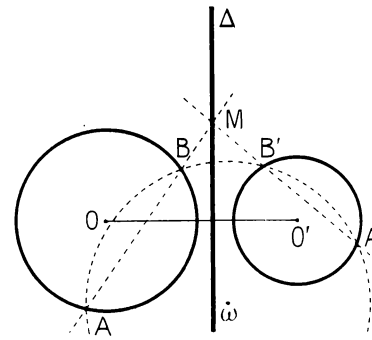


Fig. 67

2° Si les trois centres O, O′ et O″ sont alignés, les droites Δ et Δ′ sont parallèles ou confondues. Dans le premier cas il n'y a aucun point possédant même puissance par rapport aux trois cercles et les trois droites Δ, Δ′ et Δ″ sont distinctes et parallèles.

Si les deux droites Δ et Δ′ sont confondues, tout point de Δ a même puissance par rapport aux trois cercles et les trois droites Δ, Δ′ et Δ″ sont confondues. *On dit que les trois cercles admettent même axe radical.*

73. Construction de l'axe radical de deux cercles non sécants. — Soit à construire (fig. 67) l'axe radical Δ des deux cercles O et O′ quelconques. Traçons un cercle auxiliaire ω coupant le cercle O en A et B, le cercle O′ en A′ et B′. Le point d'intersection M de AB et A′B′ est le centre radical des trois cercles ω, O et O′. C'est donc un point de l'axe radical cherché Δ.

Il suffit alors de mener de M la perpendiculaire Δ à la droite des centres OO′ ou bien de répéter la construction pour déterminer un second point N de Δ.

Si le cercle O′ est un cercle point, on fait passer par O′ le cercle auxiliaire ω et on lui mène la tangente en O′ qui coupe la droite AB en M.

74. Théorème. — ***La différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles est, en valeur absolue, égale au double produit de la distance de leurs centres par la distance de ce point à leur axe radical.***

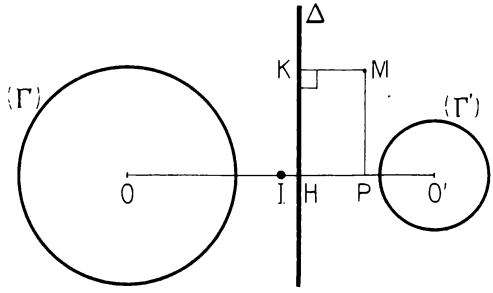


Fig. 68

Soit (fig. 68) H le pied de l'axe radical Δ des cercles Γ(O, R) et Γ′(O′, R′), I le milieu de OO′, P et K les projections du point donné M sur la droite OO′ et sur Δ. La différence des puissances Γ(M) — Γ′(M) du point M par rapport aux cercles O et O′ est égale à :

$$(\overline{MO}^2 - R^2) - (\overline{MO'}^2 - R'^2)$$

ou $$(\overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2) - (R^2 - R'^2),$$

Or : $$\overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = 2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{IP}$$

et (n° 70) : $$R^2 - R'^2 = 2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{IH}.$$

Donc : $\Gamma(M) - \Gamma'(M) = 2\,\overline{OO'}\,.\,(\overline{IP} - \overline{IH}) = 2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{HP}.$

Soit : $\boxed{\Gamma(M) - \Gamma'(M) = 2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{KM}}$

formule algébrique qui définit $\Gamma(M) - \Gamma'(M)$ en grandeur et en signe.

75. Corollaires. — 1° *Le lieu des points dont la différence des puissances par rapport à deux cercles est constante est une perpendiculaire à la droite des centres.*

Pour que $\Gamma(M) - \Gamma'(M) = k$ il faut et il suffit que $2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{HP} = k$ donc que la projection de M sur OO′ soit le point P déterminé par cette relation.

2° *La puissance d'un point* M *par rapport à un cercle* Γ *de centre* O *est égale à* $2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{KM}$ *où* K *désigne la projection de* M *sur l'axe radical du cercle* Γ *et d'un cercle quelconque* Γ′ *de centre* O′ *passant par* M.

Dans la relation du n° 74 : $\Gamma'(M) = 0 \implies \Gamma(M) = 2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{KM}$.

76. Puissance d'un point par rapport à une sphère. — La notion de puissance se généralise pour une sphère S de centre O et de rayon R (fig. 69).

Si une sécante variable issue d'un point fixe M ***coupe la sphère*** (S) ***en*** A ***et*** B, ***le produit*** $\overline{MA}\,.\,\overline{MB}$ ***est un nombre constant*** S(M) ***ou*** $\mathfrak{P}_O(M)$, ***appelé puissance du point*** M ***par rapport à*** (S).

Si A′ est diamétralement opposé à A sur S, on obtient comme au n° 67 :

$$S(M) = \overline{MA}\,.\,\overline{MB} = \overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MA'} = d^2 - R^2.$$

On peut remarquer que S(M) est la puissance de M par rapport à l'intersection γ de (S) par tout plan issu de M. D'autre part si MT est une tangente à S issue de M, on obtient : $S(M) = \overline{MT}^2$.

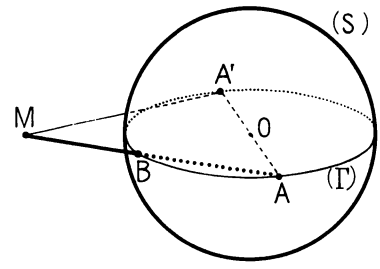


Fig. 69

77. Lieux géométriques. — 1° Soit I le milieu du segment joignant les centres des sphères S (O, R) et S′ (O, R′) et H la projection de M sur la droite OO′ (fig. 70) :

$$S(M) = S'(M) \iff 2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{IH} = R^2 - R'^2.$$

Le lieu des points qui ont même puissance par rapport à deux sphères est un plan perpendiculaire à la droite des centres, appelé plan radical des deux sphères.

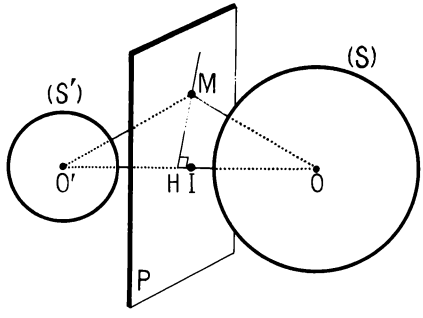


Fig. 70

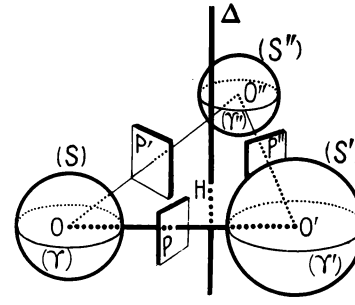


Fig. 71

Le plan radical P est le plan du cercle commun si (S) et (S′) sont sécantes, leur plan tangent commun lorsqu'elles sont tangentes. Si K désigne la projection d'un point quelconque M sur le plan radical P, on obtient (cf. n° 74) :

$$S(M) - S(M') = 2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{KM}.$$

2° Tout point M qui a même puissance par rapport aux trois sphères (S), (S′) et (S″) appartient au plan radical P de (S) et (S′), ainsi qu'au plan radical P′ de (S) et (S″). Si les centres O, O′ et O″ des trois sphères ne sont pas alignés, ces deux plans se coupent suivant une droite Δ (fig. 71) :

Le lieu des points qui ont même puissance par rapport à trois sphères dont les centres ne sont pas alignés est une droite Δ, perpendiculaire au plan des centres, appelée axe radical des trois sphères.

Cet axe radical Δ passe par tout point commun aux trois sphères et par le centre radical des intersections γ, γ′, γ″ des trois sphères par un plan sécant quelconque.

3° *Étant données quatre sphères* S_1, S_2, S_3, S_4 *dont les centres ne sont pas dans un même plan, il existe un point unique ω, appelé centre radical, qui a même puissance par rapport aux quatre sphères.*

Ce centre radical ω est le point commun à l'axe radical des sphères S_1, S_2, S_3 et au plan radical des sphères S_4 et S_1 par exemple.

APPLICATIONS

78. Utilisation de la puissance. — 1° Les considérations de puissance permettent souvent d'établir des relations métriques dans des figures où interviennent des cercles.

2° *Pour démontrer que trois points α, β, γ sont alignés* il suffit de montrer que chacun de ces points a même puissance par rapport à deux cercles de la figure. Car s'il en est ainsi α, β et γ appartiennent à l'axe radical de ces deux cercles.

3° *Si* (fig. 72) *deux points distincts α et β ont chacun même puissance par rapport à trois cercles* O, O′ *et* O″, ces trois cercles admettent un axe radical αβ (n° 70) :

a) *Les points* O, O′ *et* O″ *sont alignés sur une perpendiculaire à αβ.*

b) Tout point γ de la droite αβ a même puissance par rapport aux cercles O, O′ et O″.

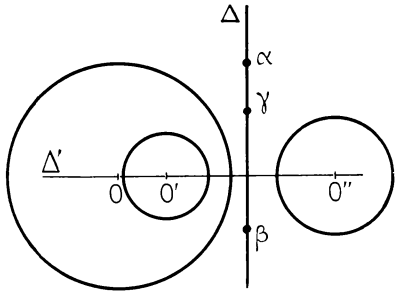


Fig. 72

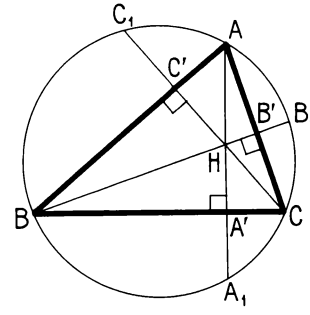


Fig. 73

79. Relations dans le quadrangle orthocentrique. — Considérons (fig. 73) un triangle ABC, d'orthocentre H. Soient A′, B′, C′ les pieds des hauteurs AH, BH et CH et A_1, B_1 et C_1 les intersections de ces hauteurs avec le cercle ABC.

1° Les relations : $\overline{A'A_1} = -\overline{A'H}$ et $\overline{A'B} \cdot \overline{A'C} = \overline{A'A} \cdot \overline{A'A_1}$ entraînent :

$$\boxed{\overline{A'B} \cdot \overline{A'C} = -\overline{A'A} \cdot \overline{A'H}} \qquad (1)$$

2° Les relations telles que : $\overline{HA} \cdot \overline{HA_1} = \overline{HB} \cdot \overline{HB_1} = \overline{HC} \cdot \overline{HC_1}$ et $\overline{HA_1} = 2\,\overline{HA'}$ entraînent :

$$\boxed{\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'}} \qquad (2)$$

Le point H est le centre radical des trois cercles BCB′C′, CAC′A′ et ABA′B′.

3° De même le point A est le centre radical des cercles BCB′C′, BHA′C′ et CHA′B′ :

$$\boxed{\overline{AA'} \cdot \overline{AH} = \overline{AB} \cdot \overline{AC'} = \overline{AC} \cdot \overline{AB'}} \qquad (3)$$

80. Application. — ***Les orthocentres des quatre triangles d'un quadrilatère complet sont alignés sur une droite Δ. Les milieux des diagonales de ce quadrilatère complet sont alignés sur une droite Δ′ perpendiculaire à la précédente.***

Les cercles de centres O, O′ et O″ ayant pour diamètres les diagonales AD, BE et CF du quadrilatère complet ABCDEF (fig. 74) passent par les pieds des hauteurs AA′, BB′ et CC′ du triangle ABC. L'orthocentre H du triangle ABC vérifiant les relations

$$\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'}$$

a donc même puissance par rapport aux trois cercles. Il est de même de J, K, L orthocentres respectifs des triangles AEF, DBF et DEC.

Les quatre points H, J, K, L sont donc (n° 78) alignés sur l'axe radical Δ des trois cercles O, O′ et O″ et les centres de ces cercles sont alignés sur une droite Δ′ perpendiculaire à Δ.

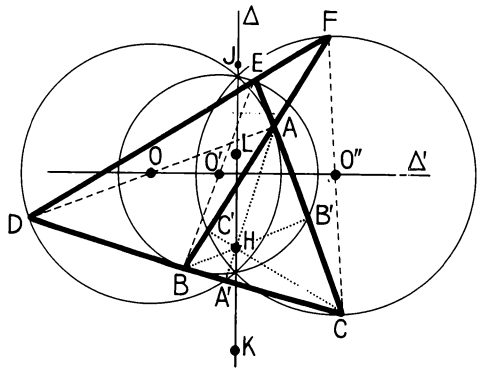


Fig. 74

81. Relations d'Euler dans un triangle. — Désignons par (Γ) le cercle de centre O et de rayon R, circonscrit à un triangle donné ABC. Soient d'autre part I et J les centres des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle A au triangle ABC admettant pour rayons respectifs r et r_a (fig. 75). Le quadrilatère BICJ ayant deux angles opposés B et C égaux à 1 droit est inscriptible dans un cercle (Ω) dont le centre ω est le milieu de IJ. Ce centre ω, qui appartient à la médiatrice de BC, et à la bissectrice intérieure AIJ de l'angle A est donc le milieu de l'arc BC, intérieur à l'angle BAC, du cercle (Γ).

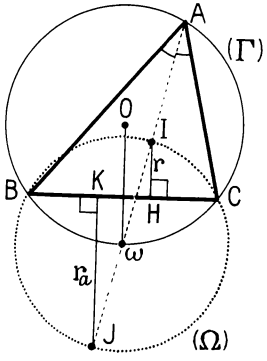


Fig. 75

Soient H et K les projections des points I et J sur l'axe radical BC des cercles (Γ) et (Ω). On peut écrire (n° 74) :

$$\Gamma(I) = \Gamma(I) - \Omega(I) = 2\,\overline{O\omega} \cdot \overline{HI}.$$

Soit : $IO^2 - R^2 = -2Rr \Longrightarrow \boxed{\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr}$

De même : $\Gamma(J) = \Gamma(J) - \Omega(J) = 2\,\overline{O\omega} \cdot \overline{KJ}.$

Soit : $OJ^2 - R^2 = 2Rr_a \Longrightarrow \boxed{\overline{OJ}^2 = R^2 + 2Rr_a}$

CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

82. Moyenne proportionnelle de deux segments. — Étant donnés deux segments a et b, il s'agit de construire un segment x tel que :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Longleftrightarrow x^2 = ab \Longleftrightarrow x = \sqrt{ab}.$$

On connaît déjà les constructions utilisant les relations métriques du triangle rectangle.

Dans de nombreux cas de figure, on pourra utiliser avantageusement les suivantes :

1° Portons sur une droite deux segments de même sens OA = a et OB = b (fig. 76). Traçons un cercle quelconque passant par A et B et la tangente OM à ce cercle. Nous obtenons (n° 68) :

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB} = ab \Longrightarrow OM = \sqrt{ab} \Longrightarrow OM = x.$$

2° Sur les côtés d'un angle de sommet O, portons OA = a et OB = b respectivement. Coupons en M et M′, la bissectrice intérieure Ox de l'angle AOB par le cercle

ω, passant par A et B et centré sur la bissectrice extérieure Oy (fig. 77). Ce cercle ω recoupe OA en B′ symétrique de B par rapport à Oy et on obtient :

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB'} = \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = -\overline{OM}^2.$$

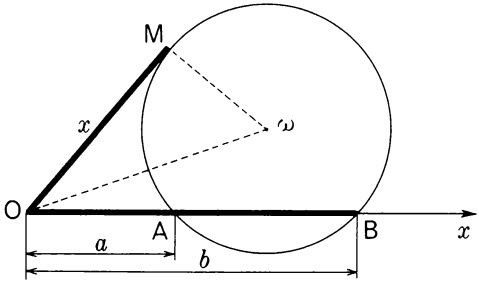


Fig. 76

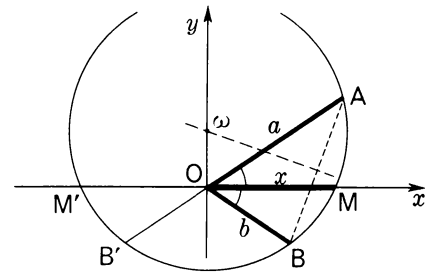


Fig. 77

Soit puisque OB′ = OB : $\overline{OM}^2 = \overline{OM'}^2 = OA \cdot OB = ab$.

Donc : $OM = OM' = x$.

83. Construire deux segments connaissant leur somme et leur moyenne géométrique.

Soient s et m deux segments donnés (fig. 78). Il s'agit de construire les segments x et y tels que : $x + y = s$ et $xy = m^2$.

Construisons un demi-cercle de centre O et de diamètre AB = s et sur la tangente en A portons AM = m. Par M menons la parallèle Δ à AB qui coupe le demi-cercle en P et Q, et la médiatrice de AB en I. On obtient (n° 68) :

$$\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \overline{MA}^2 = m^2 \quad \text{et} \quad MP + MQ = 2\,MI = 2\,AO = s.$$

Donc : $MP = x$ et $MQ = y$.

Notons qu'on peut également projeter P en H sur AB, alors : $AH = x$ et $HB = y$.

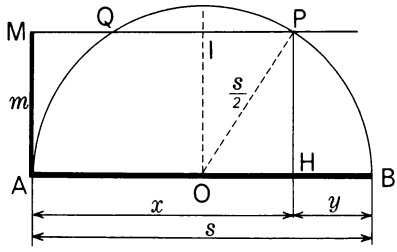


Fig. 78

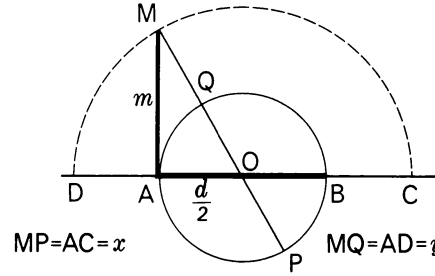


Fig. 79

Discussion. — Les points P et Q n'existent que si la droite Δ coupe le demi-cercle AB, c'est-à-dire si $m < \frac{s}{2}$. Dans ce cas x et y sont distincts.

Si $m = \frac{s}{2}$, la droite Δ est tangente au demi-cercle AB et on obtient $x = y = \frac{s}{2}$.

84. Construire deux segments connaissant leur différence et leur moyenne géométrique.

Soit d et m deux segments donnés (fig. 79). Il s'agit de construire les segments x et y tels que $x - y = d$ et $xy = m^2$.

Construisons le cercle de centre O et diamètre AB $= d$ et sur la tangente en A portons AM $= m$. Traçons la droite AO qui coupe le cercle en P et Q. On obtient :

$$MP - MQ = PQ = AB = d \quad \text{et} \quad \overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \overline{MA}^2 = m^2.$$

Donc : MP $= x$ et MQ $= y$. La construction est toujours possible.

EXERCICES

72. Pour que deux cercles O et O′ soient sécants il faut et il suffit qu'il existe un point M de leur axe radical ayant une même puissance négative par rapport à ces deux cercles.

73. D'un point M de l'axe radical des cercles O et O′ on mène la sécante MAB au premier et la sécante MCD au deuxième. Démontrer que le quadrilatère ABCD est inscriptible.

74. Soient AB et CD les diamètres des cercles Γ (O, R) et Γ' (O′, R′) portés par la droite OO′. Montrer que le pied H de leur axe radical Δ vérifie les relations :

$$\frac{\overline{HA}}{\overline{HD}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{HB}} = -\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{HA}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{HD}}{\overline{HB}} = -\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}.$$

En déduire une construction de H et de l'axe radical Δ.

75. On considère quatre points A, B, C, D d'une même droite, un cercle variable O passant par A et B, un cercle variable O′ passant par C et D. Trouver l'enveloppe de l'axe radical Δ des cercles O et O′.

Étudier le cas où B est en A et le cas où B est en A et C en D.

76. Reprendre le problème précédent en supposant que les quatre points A, B, C, D appartiennent à un même cercle fixe (Γ).

77. Deux cercles variables O et O′ sont respectivement tangents en A et B à la droite fixe AB. Les cercles de centre O passant par B et de centre O′ passant par A se coupent en M en N. Trouver l'enveloppe de la droite MN.

78. On considère deux cercles fixes O et O′, le premier tangent en A à Ax, le second tangent en B à By et deux points variables M et N qui décrivent respectivement Ax et By de telle sorte que AM = BN. Trouver le lieu des points d'intersection du cercle O passant par M et du cercle de centre O′ passant par N.

79. Soient trois points fixes A, B, C alignés dans cet ordre et un point variable P qui décrit la droite Δ perpendiculaire en C à AB. On mène la perpendiculaire BH à AP et cette droite coupe le cercle de diamètre AP en M et N.

1° Nature du quadrilatère BCPH ? Montrer que le lieu de M et N est un cercle de centre A.

2° Démontrer que les cercles BCM et BCN de centres ω et ω' sont respectivement tangents à AM et AN et que la figure BωPω' est un parallélogramme. Nature du faisceau P(BCMN).

80. Un point M décrit un cercle fixe O(R). On désigne par Δ l'axe radical du cercle O et du cercle de centre M passant par un point fixe A tel que OA $= d$.

1° Calculer en fonction de d et R la distance AK de A à la droite Δ.

2° En déduire l'enveloppe de la droite Δ puis l'enveloppe de la droite MK.

81. On considère deux cercles fixes O(R) et A(a). Une tangente variable en M au cercle A coupe le cercle O en B et C. Soit ω le centre du cercle ABC.

1° Évaluer en fonction de R, a et d = AO, la distance Oω.

2° Déterminer le lieu du point ω et l'enveloppe de la droite ωM.

82. Dans un triangle ABC un cercle variable Γ passant par A et par le milieu M de BC recoupe la droite BC en E et le cercle ABC en D. La droite AD coupe BC en F.

1° Démontrer les relations $\overline{FM} \cdot \overline{FE} = \overline{FB} \cdot \overline{FC}$ et $(BCEF) = -1$.

2° On suppose dans la suite que le cercle Γ passe par le centre O du cercle ABC. Montrer que la droite EA est tangente en A au cercle ABC ainsi qu'au cercle AMF.

3° Le cercle de centre E et de rayon EA coupe BC en I et J. Nature des divisions (IJBC) et (IJFM) ? En déduire que AM et AD sont antiparallèles par rapport à AB et AC.

83. On désigne par A', B', C' les milieux des côtés BC, CA, AB du triangle ABC et par I, J, K et L les centres des cercles inscrit et exinscrits dans les angles A, B et C du triangle ABC.

1° Montrer que l'axe radical des cercles K et L est la bissectrice intérieure de l'angle B'A'C' et que le centre radical des cercles J, K, L est le centre du cercle inscrit dans le triangle A'B'C'.

2° Établir de même que le centre radical des cercles I, K, L est le centre du cercle exinscrit dans l'angle A' du triangle A'B'C'.

84. Soit un point fixe A, un cercle de centre O et une sécante variable ABC à ce cercle :

1° En supposant A intérieur au cercle O, trouver le lieu des extrémités de la corde MN, menée par A et perpendiculaire à BC, dans le cercle de diamètre BC.

2° En supposant A extérieur au cercle O, trouver le lieu des points de contact des tangentes AT et AU au cercle de diamètre BC.

85. Dans un triangle ABC la perpendiculaire en B à AB coupe AC en D et la perpendiculaire en C à AC coupe AB en E.

1° Montrer que DE est perpendiculaire au rayon AO du cercle ABC.

2° Établir que l'axe radical des cercles ABD et ACE est la droite AO.

86. On désigne par O le centre du cercle ABC, par H l'orthocentre du triangle ABC, par M, N, P les milieux des côtés BC, CA, AB, par ω le centre du cercle MNP et enfin par A', B', C' les pieds des hauteurs AH, BH et CH. Les droites BC et B'C' se coupent en α, CA et C'A' en β, AB et A'B' en γ.

1° Établir les relations : $\overline{\alpha B} \cdot \overline{\alpha C} = \overline{\alpha B'} \cdot \overline{\alpha C'} = \overline{\alpha A'} \cdot \overline{\alpha M}$ et $(BCA'\alpha) = -1$.

2° En déduire que α, β, γ sont alignés sur une droite Δ perpendiculaire à OH et axe radical des cercles O et ω.

87. Un point variable M décrit un cercle fixe Γ passant par A et B. Sur la bissectrice intérieure de l'angle AMB on prend les points C et D tels que $\overline{MC}^2 = \overline{MD}^2 = MA.MB$.

1° On prolonge AM de MB' = MB. Nature du quadrangle AB'CD ? Montrer que les quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle centré en ω milieu de l'arc AMB. En déduire les lieux de C et D lorsque M décrit le cercle Γ en entier.

2° On désigne par I le milieu de AB, par P le point où MC recoupe Γ et par R le point où ωM coupe AB. Démontrer que $\overline{PI} \cdot \overline{P\omega} = \overline{PA}^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ et que les trois points I, C, D appartiennent au cercle de diamètre ωR.

3° Établir que la droite AB est la bissectrice intérieure de l'angle CID et que : $\overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = IC.ID$.

88. Soient trois points fixes B, C, P alignés et un point variable A qui décrit une droite Δ perpendiculaire en I à la droite BC. Soit H l'orthocentre du triangle ABC.

1° Trouver l'enveloppe de la droite EF qui joint les pieds des hauteurs issues de B et C dans le triangle ABC et l'enveloppe de l'axe radical du cercle ABC et du cercle de diamètre AH.

2° Soit M la projection de A sur la droite PH. Montrer que la droite AM passe par un point fixe et trouver le lieu du point M.

89. Deux cercles O et O' sont sécants en A et B. Une sécante variable Δ coupe le premier en C et M le second en D et N. On mène dans le cercle O la corde CE parallèle à AN, et dans le cercle O' la corde DF parallèle à AM.

1° Démontrer que les points A, E, F sont alignés et que le quadrangle CDEF est inscriptible.

2° Lieu géométrique du point d'intersection I de CE et de DF ? Montrer que le quadrangle BCDI est inscriptible.

90. Un triangle ABC est dit pseudo-rectangle si : $\widehat{B} - \widehat{C} = \frac{\pi}{2}$.

1° Démontrer que le côté BC est parallèle au diamètre AD = 2R du cercle ABC et que la hauteur AA' est tangente à ce cercle ainsi qu'au cercle passant par les pieds des hauteurs.

2° Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Montrer que BA = BH, CA = CH puis que :

$$\overline{AA'}^2 = \overline{A'B} \cdot \overline{A'C}\,; \qquad \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 4R^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{AA'}^2} = \frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{AC}^2}.$$

3° Un cercle passant par A et centré sur AH recoupe AB et AC respectivement en C' et B'. Démontrer que B'C' est perpendiculaire à BC et que le triangle AB'C' est pseudo-rectangle.

91. Un cercle O passe par le centre ω d'un second cercle et le coupe en B et C. Une sécante variable issue du point ω coupe le segment BC en D, le cercle O en A et le cercle ω en I et J (I entre A et D).

1° Établir la relation (ADIJ) = — 1 et démontrer que I et J sont les centres du cercle inscrit et du cercle exinscrit dans l'angle A du triangle ABC.

2° Construire le point ω puis le triangle ABC connaissant les points B et C et les rayons r et r_a des cercles inscrit et exinscrit I et J.

3° Effectuer la même construction connaissant B et C, l'angle A du triangle ABC et la longueur AD = β.

92. On donne un cercle fixe de centre O, un diamètre $x'x$ et un point quelconque M de ce cercle. Le cercle de centre M tangent en I à $x'x$ coupe le cercle O en B et C et la droite MI coupe BC en D, le cercle (M) en J et le cercle O en A.

1° Démontrer que D est le centre radical des cercles (O), (M) et du cercle de diamètre AM. En déduire que D est le milieu de MI.

2° Établir que : (ADIJ) = — 1 et que les points I et J sont les centres des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle A du triangle ABC.

3° Soient r et r_a les rayons des deux cercles inscrit et exinscrit I et J et h_a la hauteur issue de A du triangle ABC. Démontrer que : $h_a = r_a = 3r$.

93. On donne un cercle fixe O(R), un point fixe I tel que $OI = d \neq R$ et un point variable M sur le cercle O. Ce cercle recoupe la droite IM en A et coupe en B et C le cercle de centre M passant par I.

1° Montrer que l'enveloppe des trois côtés du triangle ABC est un cercle fixe de centre I dont le rayon r est donné par la relation d'Euler $|d^2 - R^2| = 2Rr$.

2° En déduire que si deux cercles donnés O(R) et I(r) tels que $OI = d$ vérifient la relation précédente, il existe une infinité de triangles inscrits dans le cercle O et admettant le cercle I pour cercle inscrit ou exinscrit.

3° Soit IP un rayon du cercle I perpendiculaire à IO. Montrer que le cercle de centre P et de rayon r est tangent au cercle O. En déduire une construction géométrique des deux valeurs de R qui correspondent à un point O et à un cercle I (r) donnés.

94. Un point variable M décrit une droite fixe Δ perpendiculaire en H au prolongement Bx du segment AB. La perpendiculaire menée de B à AM coupe AM en C et coupe Δ en N. Les droites AN et BM se coupent en D.

1° Nature du quadrangle ABMN ? Montrer que le produit $\overline{HM} \cdot \overline{HN}$ est constant et que le cercle de diamètre MN passe par deux points fixes I et J conjugués harmoniques par rapport à A et B.

2° Montrer que le cercle AMN passe par un point A_1 autre que A et trouver le lieu de son centre O. Démontrer que la droite CD passe par un point fixe K tel que (ABHK) = — 1.

3° La droite CD coupe le cercle O en P et Q et coupe le diamètre AE de ce cercle en F. Démontrer que $\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 = \overline{AE} \cdot \overline{AF} = \overline{AK} \cdot \overline{AA_1}$ et trouver le lieu des points P et Q.

95. On donne un cercle de centre O et de rayon R et une droite Δ extérieure perpendiculaire en A à OA. Soit PP' la corde joignant les points de contact des tangentes menées d'un point M variable de Δ et N et B les points de rencontre de PP' avec OM et OA.

1° Démontrer que $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OM} \cdot \overline{ON} = R^2$. En déduire que B est fixe et trouver le lieu géométrique du point N.

2° Trouver le lieu du centre du cercle inscrit au triangle MPP'.

3° Comment est situé l'orthocentre H du triangle MPP' par rapport à O et à N et trouver son lieu géométrique.

96. On considère trois points A, B et C alignés dans cet ordre. Un cercle variable de centre O passe par A et B et on mène les tangentes CT et CT'. Soit H le milieu de TT' qui coupe AB en D et I le milieu de AB.

1° Lieu de T et T'. Montrer que $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \overline{CO} \cdot \overline{CH} = \overline{CI} \cdot \overline{CD}$.

2° En déduire que le point D est fixe et trouver le lieu de H.

3° Montrer que la division ABCD est harmonique.

97. Soit un cercle de centre O et de rayon R et un point quelconque M. On construit un cercle passant par M et tangent en A à l'extrémité du rayon OA. Ce cercle recoupe OM en M'.

1° Montrer que le produit $\overline{OM} \cdot \overline{OM'}$ est égal à R^2 et que l'un des points M ou M' est le milieu de la corde joignant les points de contact des tangentes au cercle O issues de l'autre.

2° Soient H et H' deux positions correspondantes de M et M'. Montrer que le quadrilatère HH'MM' est inscriptible et comparer les triangles OHM et OM'H'.

3° Trouver le lieu de M' lorsque M décrit :

a) le cercle de diamètre OH ; *b*) la droite Δ perpendiculaire en H à OH.

98. On donne un segment AB $= a$ et on mène deux cercles variables de centres O et O′ tangents à AB en A et B, situés d'un même côté de AB et tels que la somme de leurs rayons soit égale à une longueur constante k supérieure à a.

1° Montrer que le milieu I de OO′ est fixe. Entre quelles valeurs doivent être compris R et R′ pour que les cercles soient sécants en C et D ?

2° Montrer que CD passe par un point fixe ω tel que $\overline{\omega I}^2 - \overline{IC}^2 = \overline{\omega C} \cdot \overline{\omega D}$.

3° Calculer IC en fonction de k et a et trouver le lieu de C et D puis celui du milieu M de CD.

99. Soient deux cercles de centres O et O′ et de rayons R et R′ tangents extérieurement en A. Une tangente commune BB′ coupe OO′ en I et la tangente en A au point M.

1° Calculer IO, IO′, BB′, IB et IB′ en fonction de R et R′.

2° Montrer que le cercle de diamètre BB′ est tangent en A à OO′. En déduire que $\overline{IA}^2 = \overline{IB} \cdot \overline{IB'}$.

3° Montrer que le cercle de diamètre OO′ est tangent en M à BB′ et que $\overline{IM}^2 = \overline{IO} \cdot \overline{IO'}$.

100. On donne un demi-cercle de centre O et de diamètre AB $= 2R$ et un cercle variable de centre ω tangent en M à ce demi-cercle et en N au segment AB. Ce cercle coupe MA et MB en C et D. Montrer que :

1° CD est parallèle à AB et MN est bissectrice de l'angle AMB et passe par un point fixe I.

2° Le cercle AMN est tangent en A à IA. Évaluer $\overline{IM} \cdot \overline{IN}$ en fonction de R.

3° L'axe radical de deux cercles ω et ω' passe par I. Trouver le lieu du point de contact de ces deux cercles lorsqu'ils varient en restant tangents entre eux.

101. On considère un cercle de centre O et de rayon R et un point fixe P tel que OP $= a$. On mène deux sécantes variables PAC et PBD rectangulaires.

1° Calculer en fonction de R et de a les expressions : $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$ et $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$.

2° Soient M et N les milieux de AB et de CD et H la projection de P sur AB. Montrer que P, N et H sont alignés et que : $\overline{MO}^2 + \overline{MP}^2 = \overline{HO}^2 + \overline{HP}^2 = R^2$.

3° En déduire que le lieu de M, N et H est un cercle de centre ω milieu de OP et MN. Calculer son rayon ρ en fonction de R et a et la valeur du produit $\overline{OM} \cdot \overline{PH}$.

102. Deux cercles extérieurs de centres O et O′ et de rayons R et R′ ont pour axe radical la droite Δ perpendiculaire en K à OO′. D'un point ω variable de Δ, on mène les tangentes ωM, ωN, ωM′ et ωN′ aux deux cercles.

1° Montrer que les quatre points M, N, M′, N′ sont sur un cercle de centre ω.

2° Évaluer en fonction de R et de OK $= d$ la puissance de K par rapport au cercle ω. En déduire que ce cercle passe par deux points fixes F et F′ de OO′.

3° Soit AA′ une tangente commune extérieure et BB′ une tangente commune intérieure aux cercles O et O′. Montrer que AB et A′B′ sont perpendiculaires et se coupent en F ou F′.

103. On considère un cercle Γ de centre O, de rayon R, une corde BC et un point A de ce cercle.

1° Les points B et C restant fixes et le point A décrivant le cercle donné, montrer que les lieux des milieux des segments AB et AC sont deux cercles Γ_1 et Γ_2. Déterminer l'axe radical de Γ_1 et Γ_2 et le centre radical de Γ, Γ_1 et Γ_2.

2° Évaluer en fonction de l'angle A du triangle ABC l'angle sous lequel se coupent les cercles Γ_1 et Γ_2.

3° Montrer que si le point A décrit Γ, B et C restant fixes, les lieux des points I, J, K et L, centres du cercle inscrit et des cercles exinscrits dans le triangle ABC se compose de deux cercles dont la somme des carrés des rayons est égale à $4R^2$.

104. Deux sphères variables S et S′ passent respectivement par les cercles fixes γ et γ' d'un même plan P ou d'une même sphère Σ.

1° Montrer que le plan radical de S et S′ passe par une droite fixe Δ.

2° Étudier le cas où la sphère S est tangente à P ou à Σ et le cas où les deux sphères S et S′ sont toutes deux tangentes à P ou à Σ.

105. Trois sphères variables S_1, S_2, S_3 passent respectivement par les cercles fixes γ_1, γ_2 et γ_3 d'un même plan P, dont les centres ne sont pas alignés.

1° Montrer que l'axe radical des trois sphères S_1, S_2 et S_3 passe par un point fixe.

2° Étudier le cas où la sphère S_1 est tangente au plan P, le cas où S_1 et S_2 sont tangentes à P et le cas où S_1, S_2 et S_3 sont tangentes à P.

106. Reprendre le problème précédent en remplaçant le plan P par une sphère Σ.

107. Une sphère variable ω passe par un point fixe A et coupe la sphère fixe S suivant un cercle variable γ. Soit Δ l'intersection du plan de γ et du plan tangent en A à la sphère ω.

1° Montrer que le lieu de la droite Δ est un plan fixe P.

2° Que représente le plan P pour la sphère S et le point fixe A ?

108. On donne une sphère O(R) et un point fixe A tel que $OA = d$. Une sphère variable dont le centre M est situé sur la sphère O passe par A. Démontrer que l'enveloppe du plan radical des sphères (O) et (M) est une sphère de centre A.

109. On considère deux sphères fixes O(R) et A(a). Un plan variable tangent en M à la sphère A coupe la sphère O suivant un cercle γ. Soit ω le centre de la sphère passant par A et contenant γ. Déterminer le lieu de ω et montrer que la droite ωM passe par un point fixe.

110. 1° Déterminer le lieu géométrique des points de contact avec un plan P des sphères tangentes à ce plan et passant par deux points donnés A et B.

2° Construire les sphères passant par trois points non alignés A, B, C et tangentes soit à un plan donné P, soit à une droite donnée Δ.

111. Soit S une sphère variable passant par deux points donnés A et B et soit Σ une sphère fixe.

1° Montrer que le plan radical de S et de Σ passe en général par un point fixe I de la droite AB. En déduire le lieu des points de contact avec Σ des sphères S tangentes à Σ.

2° Construire les sphères passant par trois points non alignés ABC et tangentes à la sphère Σ.

112. On considère deux cercles fixes de l'espace (C) et (γ) non situés sur une même sphère et dont les plans se coupent suivant une droite Δ.

1° Montrer qu'il existe sur la droite Δ un point I et un seul dont les puissances par rapport aux cercles (C) et (γ) sont égales. Cas d'exception.

2° Déterminer une sphère passant par (C) et tangente à (γ).

113. Deux cercles γ et γ' appartiennent à un même plan P ou à une même sphère Σ et deux sphères S et S′ passent respectivement par γ et γ'.

1° Montrer que le plan radical de S et S′ passe par une droite fixe Δ.

2° Lieu géométrique du point de contact M des sphères S et S′ lorsqu'elles sont tangentes.

CERCLES ORTHOGONAUX

85. Définition. — ***Deux cercles sécants d'un même plan sont orthogonaux lorsque les tangentes en un de leurs points communs sont perpendiculaires*** (n° 45).

Pour que les deux cercles Γ (O, R) et Γ′ (O′, R′), sécants en A et B soient orthogonaux (fig. 80) il faut et il suffit que la tangente en A à l'un d'eux passe par le centre de l'autre ou que les rayons OA et O′A soient perpendiculaires. Cela revient à dire que le triangle OAO′ doit être rectangle en A ou que le point A doit appartenir au cercle de diamètre OO′ = *d*.

$$\Gamma \perp \Gamma' \iff (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) = \pm \frac{\pi}{2} \iff \boxed{d^2 = R^2 + R'^2.} \qquad (1)$$

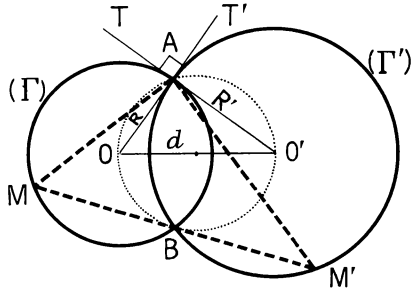


Fig. 80

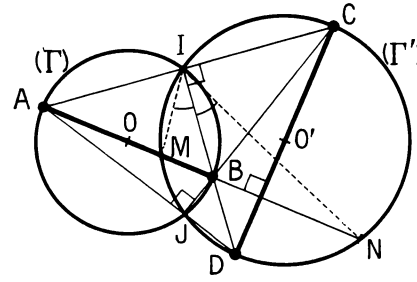


Fig. 81

86. Théorème I. — ***Pour que deux cercles*** O ***et*** O′ ***soient orthogonaux il faut et il suffit qu'une sécante*** MM′ ***passant par un de leurs points communs soit vue de l'autre point commun sous un angle droit.***

On sait en effet (n° 66) que la sécante MM′ passant par B est vue du point A sous un angle V = $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'})$. Pour que l'angle O′AO′ soit droit il faut et il suffit que l'angle MAM′ le soit :

$$\boxed{(AM, AM') = \frac{\pi}{2}.} \qquad (2)$$

87. Théorème II. — ***Pour que deux cercles soient orthogonaux il faut et il suffit que le carré du rayon de l'un d'eux soit égal à la puissance de son centre par rapport à l'autre.***

En effet : $d^2 = R + R'^2 \iff R^2 = d^2 - R'^2 \iff R'^2 = d^2 - R^2$.

Soit $\boxed{R^2 = \Gamma'(O)}$ et $\boxed{R'^2 = \Gamma(O').}$ (3)

Ce qui revient à dire que le rayon OA = R de l'un est la longueur de la tangente menée de son centre à l'autre.

On peut donner à ces relations des formes variées. Désignons (fig. 81) par AB un diamètre du cercle O et par CD un diamètre du cercle O′. La relation (3) s'écrit :

$$\overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}. \qquad (4)$$

Elle se ramène à : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ou $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO'}$ etc. dont l'analogie avec les formules de la division harmonique est évidente.

88. Théorème III. — *Pour que deux cercles soient orthogonaux il faut et il suffit qu'un diamètre de l'un soit divisé harmoniquement par l'autre.*

Soit AB un diamètre du cercle O qui coupe le cercle O′ en M et N (fig. 81).

La relation (3) qui s'écrit : $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OM} \cdot \overline{ON}$ est équivalente à :

$$\boxed{(ABMN) = -1.} \qquad (5)$$

Il faut et il suffit que la division (ABMN) soit harmonique.

89. Corollaires. — *1° Pour que deux cercles soient orthogonaux il faut et il suffit qu'ils aient pour diamètres respectifs deux côtés opposés d'un quadrangle orthocentrique.*

Le faisceau I (ABMN) étant harmonique et IA étant perpendiculaire à IB (fig. 81), les droites IA et IB sont les bissectrices de l'angle MIN et passent par les milieux C et D des arcs MN du cercle O′. Il en est de même de JA et JB et le quadrangle ABCD est orthocentrique.

Réciproquement si par hypothèse le quadrangle ABCD est orthocentrique les cercles O et O′ de diamètres AB et CD se coupent aux points d'intersections I de AC et BD, J de AD et BC. L'angle AJC étant droit les cercles sont orthogonaux.

2° Pour que deux cercles Γ et Γ' soient orthogonaux il faut et il suffit qu'une tangente commune à ces deux cercles soit vue d'un point commun sous un angle de $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$.

On sait en effet qu'une tangente commune TT′ (n° 66) est vue d'un point commun sous un angle égal à $\frac{V}{2}$ ou $\pi - \frac{V}{2}$. Pour que V soit égal à $\frac{\pi}{2}$ il faut et il suffit que : $\frac{V}{2} = \frac{\pi}{4}$ ou $\pi - \frac{V}{2} = \frac{3\pi}{4}$.

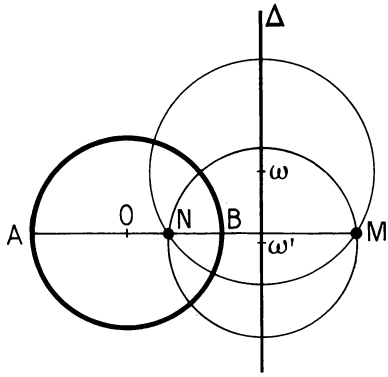


Fig. 82

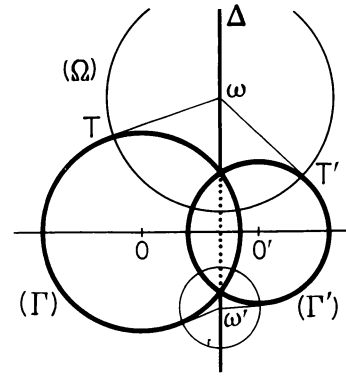


Fig. 83

90. Cercles orthogonaux à un cercle donné. — 1° Pour que le point O′ soit le centre d'un cercle $\Gamma'(O', R')$ orthogonal au cercle donné $\Gamma(O, R)$, il faut et il suffit (fig. 80) que : $R'^2 = \overline{OO'}^2 - R^2$. Le cercle Γ' existe si son centre O′ est extérieur au cercle Γ et si son rayon R′ est égal à la longueur O′A d'une tangente menée de O′ au cercle Γ.

2° Tout cercle Ω (ω, ρ) passant par un point donné M et orthogonal au cercle donné Γ(O, R), passe par un deuxième point fixe N (fig. 82) situé sur le diamètre AB, issu de M, du cercle Γ et tel que (ABMN) = — 1. Réciproquement, tout cercle passant par M et N est un cercle orthogonal à Γ. Le lieu du point ω est donc la médiatrice Δ de MN, axe radical du cercle Γ et du cercle-point M.

91. Cercles orthogonaux à deux cercles donnés. — Pour que le cercle Ω (ω, ρ) soit orthogonal aux deux cercles donnés Γ (O, R) et Γ′ (O′, R′), il faut et il suffit (n° 85) que : $\rho^2 = \overline{\omega O}^2 - R^2 = \overline{\omega O'}^2 - R'^2$.

Le centre ω du cercle Ω (fig. 83) est donc un point de même puissance positive ρ^2 par rapport aux deux cercles. C'est un point de l'axe radical Δ de ces deux cercles, extérieur à ces deux cercles et le rayon ρ du cercle Ω est la longueur de la tangente ωT ou ωT′ à l'un de ces deux cercles :

Le lieu des centres des cercles orthogonaux à deux cercles donnés est la portion, extérieure à ces deux cercles, de leur axe radical.

Remarquons que deux cercles quelconques Ω et Ω′ de cette famille admettent la droite OO′ pour axe radical car : Ω (O) = Ω′ (O) = R^2 et Ω (O′) = Ω′ (O′) = R'^2.

92. Théorème. — ***Il existe au plus un cercle orthogonal à trois cercles donnés dont les centres ne sont pas alignés.***

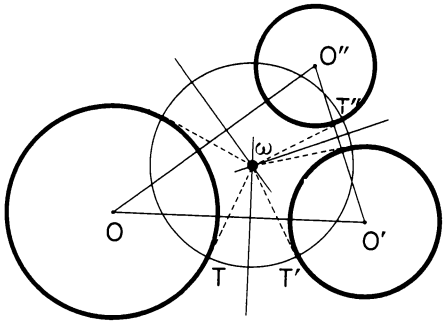


Fig. 84

Le centre ω d'un cercle Ω orthogonal à trois cercles donnés Γ (O, R), Γ′ (O′, R′) et Γ″ (O″, R″) est un point de même puissance positive par rapport aux trois cercles (fig. 84).

Si les trois O, O′, O″ ne sont pas alignés, seul convient le centre radical ω des trois cercles (n° 72). Le cercle Ω (ω, ρ) existe effectivement, si le point ω est extérieur aux trois cercles. Le rayon ρ du cercle ω est la longueur de la tangente ωT, ωT′ ou ωT″ menée de ω à l'un de ces trois cercles.

Si O, O′ et O″ sont alignés, le cercle Ω dégénère en la droite O, O′ O″ à moins que les trois cercles Γ, Γ′ et Γ″ admettent un axe radical commun. Dans ce cas tout cercle ω orthogonal à deux de ces trois cercles est orthogonal au troisième.

93. Pseudo-orthogonalité. — Soit AB une corde du cercle Γ (O, R), et le cercle Ω (ω, ρ) de diamètre AB (fig. 85). On dit que *le cercle Ω est coupé diamétralement par le cercle Γ et le cercle Γ est dit pseudo-orthogonal au cercle Ω*. En posant Oω = *d* on obtient la relation :

$$\boxed{d^2 = R^2 - \rho^2} \iff \boxed{\Gamma(\omega) = -\rho^2}.$$

Pour qu'un cercle Ω soit coupé diamétralement par un cercle Γ il faut et il suffit que le carré de son rayon soit égal à l'opposé de la puissance de son centre par rapport au cercle Γ.

Remarquons que cette condition n'est autre que la condition pour que l'axe radical AB des cercles Γ et Ω passe par ω.

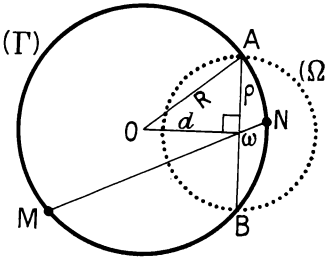


Fig. 85

Il existe un cercle et un seul, de centre O donné, pseudo-orthogonal au cercle donné Ω. Si le cercle Γ passe par le point fixe M, il passe aussi par le point fixe N de la droite ωM tel que $\overline{\omega M} \cdot \overline{\omega N} = -\rho^2$.

Lorsque le point fixe ω a une puissance constante $\mathcal{P}$ par rapport au cercle variable Γ :

1° Si $\mathcal{P} = k^2$, le cercle Γ est orthogonal au cercle Ω (ω, k).

2° Si $\mathcal{P} = -k^2$, le cercle Γ est pseudo-orthogonal au cercle Ω (ω, k).

3° Si $\mathcal{P} = 0$, le cercle Γ est orthogonal (ou pseudo-orthogonal) au cercle point ω.

94. Sphères orthogonales. — *Deux sphères* S (O, R) *et* S′ (O′, R′) *sont orthogonales si leurs plans tangents en un point commun* M *sont perpendiculaires.*

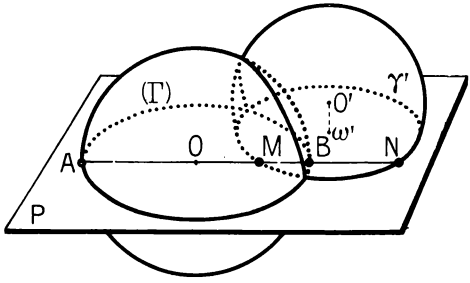


Fig. 86

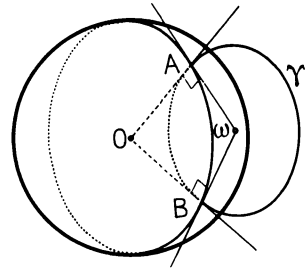


Fig. 87

Cette définition équivaut (cf. n^{os} 85 à 89) aux propriétés caractéristiques suivantes (fig. 86) :

1° $\widehat{OMO'} = \frac{\pi}{2} \iff d^2 = R^2 + R'^2$ (1)

2° *Le carré du rayon de l'une est égal à la puissance de son centre par rapport à l'autre :*

$$R^2 = S'(O) \quad \text{ou} \quad R'^2 = S(O') \tag{2}$$

3° *Tout diamètre de l'une est divisé harmoniquement par l'autre :*

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OM} \cdot \overline{ON} \iff (ABMN) = -1 \tag{3}$$

4° *Tout plan diamétral de l'une coupe les deux sphères suivant deux cercles orthogonaux.*

APPLICATIONS. — 1° La sphère de centre ω orthogonale à la sphère S (O, R) a pour rayon $\rho = \sqrt{\omega O^2 - R^2}$, longueur de la tangente ωT issue de ω.

2° Toute sphère ω orthogonale à la sphère S (O, R) et passant par le point M du diamètre AB de S, recoupe AB en un point fixe N tel que (ABMN) = — 1.

3° Toute sphère ω orthogonale à deux ou plusieurs sphères a pour centre un point de puissance positive appartenant à leur plan radical, axe radical ou centre radical et son rayon ρ est la longueur de la tangente ωT à l'une quelconque de ces sphères.

95. Cercle orthogonal à une sphère. — *Un cercle* γ (ω, ρ) *est orthogonal en* A *à une sphère* S (O, R) *si la tangente en* A *à ce cercle est perpendiculaire au plan tangent en* A *à la sphère* S.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit (fig. 87) que le plan de γ coupe la sphère S suivant un grand cercle orthogonal à γ. Il résulte du n° 94 (4°) que toute sphère passant par γ est orthogonale à S. D'autre part lorsqu'une sphère S est orthogonale à deux sphères sécantes données, elle est orthogonale à leur plan radical et à leur cercle d'intersection γ.

FAISCEAUX DE CERCLES

96. Définition. — *On appelle faisceau de cercles toute famille de cercles admettant deux à deux le même axe radical* Δ.

Il en est ainsi, par exemple, des cercles passant par deux points fixes A et B ou (fig. 83) des cercles orthogonaux à deux cercles fixes (n° 91).

Nous allons montrer qu'un faisceau est défini lorsque l'on connaît un cercle O(R)

de ce faisceau et l'axe radical commun Δ et par suite lorsque l'on connaît deux éléments O(R) et O′(R′) du faisceau. Comme Δ est l'axe radical du cercle O et d'un cercle quelconque O′ du faisceau, il en résulte que OO′ est perpendiculaire à Δ. Donc :

Les centres des cercles d'un faisceau sont alignés sur une perpendiculaire à l'axe radical Δ du faisceau.

Étudions les différents genres de faisceaux suivant la position relative du cercle O et de la droite Δ donnés.

97. 1er cas. Faisceau de cercles sécants. — Si le cercle O coupe la droite Δ (fig. 88) en A et B, il en est de même de tout cercle O′ du faisceau (n° 71, 1°). *Les points fixes* A *et* B *sont les points de base du faisceau.*

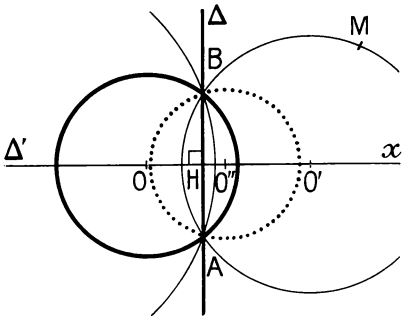


Fig. 88

Les cercles du faisceau sont les cercles passant par les points de base A ***et*** B**.**

Il existe un cercle du faisceau et un seul admettant pour centre un point donné O′ de la droite des centres H*x*, médiatrice de AB. Le rayon O′A de ce cercle est au moins égal à HA. Notons que :

Tout cercle du faisceau de points de base A *et* B *est un lieu de points* M *tels que :*
(MA, MB) = θ + *k*π (θ donné).

98. 2e cas. Faisceau de cercles tangents. — Si le cercle O est tangent en A à la droite Δ (fig. 89), il en est de même de tout cercle du faisceau (n° 71, 1°) :

Les cercles du faisceau sont les cercles tangents en A ***à*** Δ**.**

Il existe un cercle et un seul admettant pour centre un point donné de la droite des centres A*x*. Son rayon O′A devient nul lorsque O′ vient en A :

Le cercle-point A *fait partie du faisceau* (O, Δ).

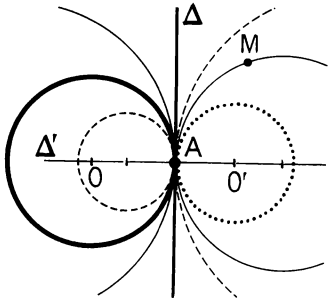


Fig. 89

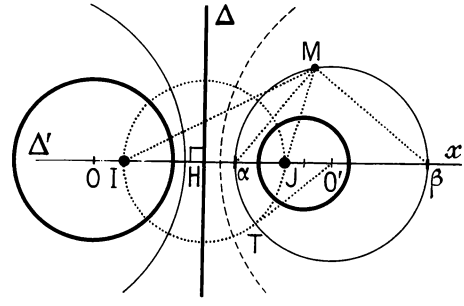


Fig. 90

99. 3e cas. Faisceau de cercles à points-limites. — Si le cercle O est extérieur à la droite Δ (fig. 90), la projection H de O sur Δ a une puissance constante positive ρ^2 par rapport à tout cercle du faisceau. Un cercle du faisceau est donc caractérisé par le fait d'être centré sur la perpendiculaire H*x* à Δ (n° 96) et d'être orthogonal au cercle H(ρ). Soit IJ le diamètre du cercle H(ρ) porté par la droite H*x*. Tout point O′ de la droite H*x*, extérieur au segment IJ est le centre d'un cercle du faisceau dont le rayon $R' = \sqrt{\overline{O'I} \cdot \overline{O'J}}$ est égal à la tangente O′T au cercle H(ρ). Lorsque O′ vient en I ou J, ce rayon s'annule :

Les cercles-points I ***et*** J ***font partie du faisceau et se nomment points de Poncelet ou points-limites du faisceau.***

Soit $\alpha\beta$ le diamètre du cercle O′ porté par la droite Hx. La relation :

$$\overline{HI}^2 = \overline{HJ}^2 = \overline{H\alpha} \cdot \overline{H\beta} \qquad \text{montre que} \qquad (IJ\alpha\beta) = -1 :$$

Les cercles du faisceau sont les cercles qui admettent pour extrémités d'un diamètre deux points divisant harmoniquement le segment IJ.

Pour tout point M du cercle O′ de diamètre $\alpha\beta$, on a (n° 24) la relation :

$$\frac{\overline{MI}}{\overline{MJ}} = \frac{\overline{\alpha I}}{\overline{\alpha J}} = \frac{\overline{\beta I}}{\overline{\beta J}} = k.$$

Tout cercle du faisceau est un lieu de points M *dont le rapport des distances aux points limites est constant.*

100. Théorème général. — ***Dans un faisceau de cercles il existe un cercle et un seul passant par un point donné*** M ***du plan.***

C'est le cercle ABM dans le cas d'un faisceau à points de base A et B (fig. 88), le cercle centré sur la médiatrice de AM et tangent en A à Δ dans le cas d'un faisceau de cercles tangents (fig. 89) et enfin, le cercle ayant pour diamètre le segment qui joint les pieds α et β des bissectrices issues de M du triangle MIJ dans le cas d'un faisceau à points limites I et J (fig. 90). Si M est sur la droite IJ, il est confondu avec α ou β et il suffit d'achever la division harmonique $(IJ\alpha\beta)$.

Lorsque M vient sur Δ, le cercle correspondant du faisceau vient se confondre avec la droite Δ qui peut être considérée comme un cercle de rayon infini du faisceau.

101. Théorème. — ***Le lieu géométrique des points dont le rapport des puissances par rapport à deux cercles*** Γ (O, R) ***et*** Γ′ (O′, R′) ***est un nombre constant*** $k \neq 1$ ***est le cercle du faisceau*** (Γ, Γ′) ***dont le centre*** ω ***divise le vecteur*** $\overrightarrow{OO'}$ ***dans le rapport*** k.

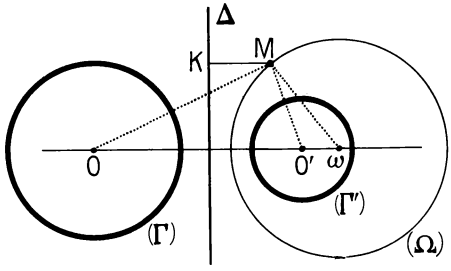


Fig. 91

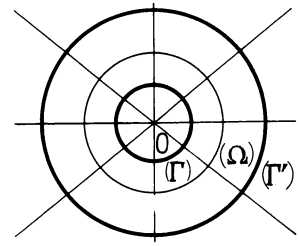


Fig. 92

Soit K la projection d'un point M quelconque du plan sur l'axe radical Δ des cercles Γ et Γ′ (fig. 91) et soit ω le centre du cercle Ω du faisceau (Γ, Γ′) passant par M :

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(M) &= \Gamma(M) - \Omega(M) = 2\,\overline{O\omega} \cdot \overline{KM} \\ \Gamma'(M) &= \Gamma'(M) - \Omega(M) = 2\,\overline{O'\omega} \cdot \overline{KM} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\Gamma(M)}{\Gamma'(M)} = \frac{\overline{\omega O}}{\overline{\omega O'}}.$$

Pour que le point M soit un point du lieu il faut et il suffit que :

$$\frac{\overline{\omega O}}{\overline{\omega O'}} = k \iff \overline{\omega O} - k\,\overline{\omega O'} = 0.$$

Ce qui revient à dire que le point M appartient au cercle fixe du faisceau (Γ, Γ′) dont le centre ω vérifie la relation précédente.

102. Relation entre les rayons de trois cercles d'un faisceau. — Pour obtenir le cercle $\Omega(\omega, \rho)$ du faisceau de cercles défini par $\Gamma(O, R)$ et $\Gamma'(O', R')$ et dont le centre est un point donné ω de la droite OO' tel que $\overrightarrow{\omega O} - k\,\overrightarrow{\omega O'} = 0$, il suffit donc de chercher le lieu des points M tels que :

$$\Gamma(M) - k\,\Gamma'(M) = 0 \iff \overline{MO}^2 - k\,\overline{MO'}^2 = R^2 - k\,R'^2.$$

Le point ω est le barycentre des points O(1) et O′ (— k) et (*Géométrie* 1re, n° 52) :

$$\overline{MO}^2 - k\,\overline{MO'}^2 = (1 - k)\,\overline{M\omega}^2 + \overline{\omega O}^2 - k\,\overline{\omega O'}^2.$$

Le rayon $\rho = \omega M$ du cercle du faisceau centré en ω est donc tel que :

$$(1 - k)\,\overline{M\omega}^2 + \overline{\omega O}^2 - k\,\overline{\omega O'}^2 = R^2 - k\,R'^2.$$

Compte tenu de : $$\frac{\overline{\omega O}}{k} = \frac{\overline{\omega O'}}{1} = \frac{\overline{OO'}}{1 - k},$$

on en déduit : $$\overline{OO'}\,\rho^2 + \overline{\omega O}^2\,\overline{\omega O'} - \overline{\omega O}\,\overline{\omega O'}^2 = R^2\,\overline{\omega O'} - R'^2\,\overline{\omega O}$$

$$\overline{OO'}\,\rho^2 + R^2\,\overline{O'\omega} + R'^2\,\overline{\omega O} + \overline{\omega O}\,\overline{\omega O'}\,(\overline{\omega O} - \overline{\omega O'}) = 0.$$

Soit : $$\boxed{\rho^2\,\overline{OO'} + R^2\,\overline{O'\omega} + R'^2\,\overline{\omega O} + \overline{OO'}\,.\,\overline{O'\omega}\,.\,\overline{O\omega} = 0.}$$

103. Remarque. — Il y a identité entre les cercles du faisceau défini par Γ et Γ' et les différents lieux de points M, tels que $\Gamma(M) + \lambda\,\Gamma'(M) = 0$, ce qui explique le terme *faisceau linéaire de cercles.*

Si les cercles Γ et Γ' ont même centre O, la relation précédente donne :

$$(1 + \lambda)\,\overline{MO}^2 = R^2 + \lambda\,R'^2 \iff \overline{MO}^2 = \frac{R^2 + \lambda\,R'^2}{1 + \lambda}.$$

Le lieu de M est donc un cercle concentrique aux deux cercles Γ et Γ'. C'est pourquoi *on dit que les cercles de centre donné* O *forment un faisceau de cercles concentriques dont l'axe radical est rejeté à l'infini* (fig. 145).

FAISCEAUX ORTHOGONAUX OU CONJUGUÉS

104. Théorème. — ***Il existe une infinité de cercles orthogonaux à chacun des cercles d'un faisceau*** (F). ***Ces cercles engendrent un faisceau*** (Φ) ***et les deux faisceaux*** (F) ***et*** (Φ) ***sont dits orthogonaux ou conjugués.***

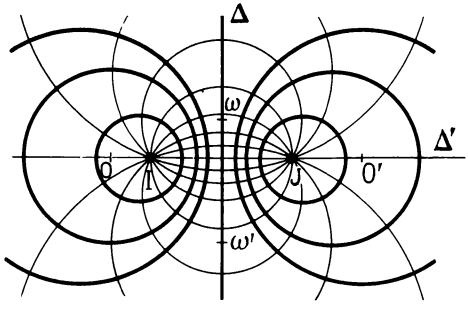


Fig. 93

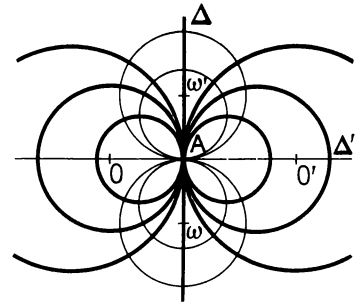


Fig. 94

Pour que le cercle $\omega(\rho)$ soit orthogonal (fig. 93) aux différents cercles du faisceau (F) défini par les cercles O et O′, il faut qu'il soit orthogonal à chacun des cercles O et O′.

Cela suffit, car si le cercle $\omega(\rho)$ est orthogonal aux deux cercles O et O′, son centre est situé sur l'axe radical Δ du faisceau (F) et le carré ρ^2 de son rayon est égal à la puissance de son centre ω par rapport à tout cercle du faisceau (F) (n° 87).

Les différents cercles ω admettent, deux à deux, la droite OO′ pour axe radical car chacun des points O et O′ a même puissance par rapport aux différents cercles ω. Ces cercles ω engendrent donc un faisceau (Φ) et réciproquement tout cercle O du faisceau (F) est orthogonal à chacun des cercles du faisceau (Φ) : *Les deux faisceaux réciproques* (F) *et* (Φ) *sont dits orthogonaux ou conjugués : la droite des centres de l'un est l'axe radical de l'autre.*

105. Propriétés. — 1° ***Lorsque deux faisceaux de cercles sont orthogonaux les points de base de l'un sont les points-limites de l'autre.***

Si un faisceau (F) admet I et J pour points limites (fig. 93), tous les cercles du faisceau conjugué (Φ) sont orthogonaux aux cercles-points I et J. Le faisceau (Φ) admet donc I et J pour points de base.

Si un faisceau (Φ) admet I et J pour points de base, les cercles points I et J font partie du faisceau conjugué (F). Celui-ci admet donc I et J pour points limites.

2° ***Le faisceau*** (F) ***des cercles tangents en*** A ***à*** Δ ***est orthogonal au faisceau*** (Φ) ***des cercles tangents en*** A ***à la perpendiculaire*** Δ′ ***à*** Δ.

Tout cercle ω (fig. 94) orthogonal aux cercles O tangents en A à Δ, a pour centre un point ω de Δ et pour rayon ωA. Il est donc tangent en A à Δ′.

3° ***Le faisceau singulier des cercles de centre*** O ***est orthogonal au faisceau des droites issues de*** O.

Ce cas (fig. 92) peut être regardé comme celui d'un faisceau à points limites lorsque l'un de ces points limites s'éloigne indéfiniment.

106. Utilisation du faisceau conjugué. — Dans les problèmes où interviennent les cercles d'un faisceau (F) il y a souvent avantage à considérer les cercles du faisceau orthogonal (Φ).

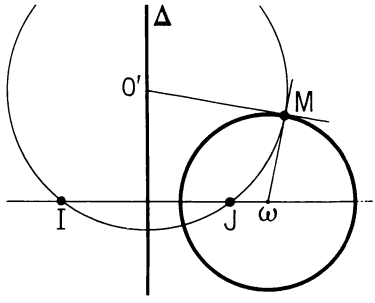


Fig. 95

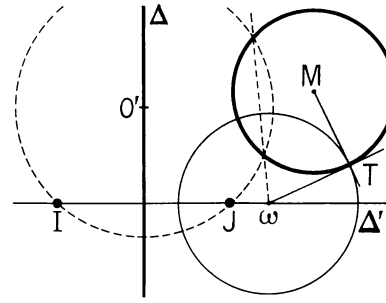


Fig. 96

Exemple. — *Construire le cercle* ω *du faisceau de points limites* I *et* J *passant par un point donné* M.

Le cercle cherché (fig. 95) est orthogonal en M au cercle du faisceau admettant I et J pour points de base, c'est-à-dire au cercle IJM. Le centre du cercle ω est donc situé à l'intersection de la droite IJ et de la tangente en M au cercle IJM. Son rayon est égal à ωM.

107. Théorème. — ***Dans un faisceau de cercles, il en existe au plus un, orthogonal à un cercle donné ne faisant pas partie du faisceau conjugué.***

Soit à construire le cercle ω d'un faisceau donné (F), orthogonal à un cercle donné de centre M (fig. 96).

Pour qu'un cercle appartienne au faisceau (F) il faut et il suffit qu'il soit centré sur la droite des centres Δ' de ce faisceau, et qu'il soit orthogonal à un cercle quelconque O′ du faisceau conjugué (Φ). Le cercle ω orthogonal aux cercles M et O′ a donc pour centre l'intersection de Δ' et de l'axe radical δ du cercle (M) et du cercle O′. On choisira ce dernier de façon qu'il coupe le cercle (M).

Dans le cas d'un faisceau à points limites I et J, la construction n'est possible que si δ coupe l'un des prolongements du segment IJ, c'est-à-dire si I et J sont tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs au cercle donné (M).

REMARQUE. — On voit de même qu'il existe au plus un cercle d'un faisceau donné, orthogonal à une droite donnée δ, distincte de la droite des centres. Le centre ω de ce cercle est le point de cette droite des centres situé sur δ.

PROBLÈMES DE CONSTRUCTION

108. Problème I. — *Construire un cercle tangent à une droite donnée* Δ *et passant par deux points donnés* A *et* B.

Ce problème est équivalent au suivant :

Construire un cercle du faisceau de points de base A *et* B *tangent à la droite* Δ.

Soit ω le centre d'un cercle passant par A et B et tangent en M à Δ (fig. 97). Le point M appartient par suite au cercle (γ) du faisceau de points limites A et B orthogonal à Δ. Son centre I est l'intersection de la droite AB et de Δ et son rayon $\rho = \sqrt{\overline{IA} \cdot \overline{IB}}$ est égal à la longueur de la tangente IT menée de I à un cercle quelconque passant par A et B. Réciproquement, si M et M′ sont les intersections de Δ avec le cercle (γ), les cercles ABM et ABM′, orthogonaux en M et M′ à (γ) sont tangents à Δ.

DISCUSSION. — La construction est possible et admet 2 solutions si Δ coupe l'un des prolongements du segment AB car alors $\overline{IA} \cdot \overline{IB}$ est positif et égal à ρ^2. Elle est impossible si A et B sont de part et d'autre de Δ.

Si AB est parallèle à Δ, les points I et M′ sont rejetés à l'infini sur Δ et le cercle ABM′ dégénère en la droite AB. Le cercle ABM existe seul et le point M est l'intersection de Δ et de la médiatrice de AB.

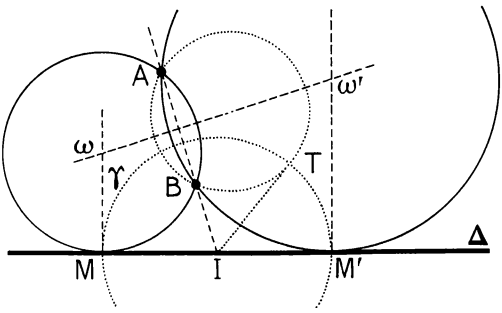


Fig. 97

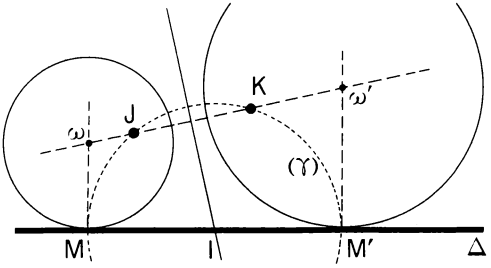


Fig. 98

109. Problème II. — *Construire un cercle du faisceau* (F) *de points limites* J et K *tangent à une droite donnée* Δ.

Si M est le point de contact d'un cercle du faisceau (F) tangent à Δ (fig. 98), c'est aussi l'intersection de Δ avec le cercle (γ) du faisceau conjugué (Φ), de points de base J et K, orthogonal à Δ. Le centre I de ce cercle (γ) est l'intersection de Δ avec la médiatrice du segment JK et son rayon ρ est égal à IJ.

Réciproquement si M est une intersection de Δ et de (γ), et ω l'intersection de la tangente en M à (γ) et de la droite JK, le cercle de centre ω et de rayon ωM est un cercle du faisceau (F) tangent à Δ.

DISCUSSION. — Le problème admet toujours deux solutions si la droite JK n'est pas perpendiculaire à Δ, une seule dans le cas contraire : le cercle ω du faisceau (F) passant par l'intersection M de JK et de Δ.

110. Problème III. — *Construire un cercle tangent à un cercle donné* Γ *et passant par deux points donnés* A *et* B.

Ce problème est équivalent au suivant :

Construire un cercle du faisceau (F) *de points de base* A *et* B *tangent au cercle* Γ.

Soit ω le centre d'un cercle passant par A et B et tangent en M au cercle Γ (fig. 99). Le point M appartient au cercle (γ) du faisceau conjugué Φ, de points limites A et B, orthogonal à Γ. Le centre I de ce cercle (γ) est (n° 102) l'intersection de la droite AB et de l'axe radical CD du cercle Γ et d'un cercle quelconque passant par A et B. Les intersections M et M′ du cercle (γ) et du cercle Γ sont les points de contact des tangentes IM et IM′ au cercle Γ.

Réciproquement, M et M′ étant ainsi déterminés, les cercles ABM et ABM′, orthogonaux en M et M′ au cercle (γ) sont tangents au cercle Γ.

DISCUSSION. — Le cercle (γ) existe si (n° 102), les deux points A et B sont tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs au cercle donné Γ, et il coupe Γ en deux points M et M′. Ce cercle peut se réduire à la médiatrice de AB lorsque le centre O de Γ est situé sur cette médiatrice. Il y a alors deux solutions, les cercles ABM et ABM′. L'une de ces solutions dégénère en la droite AB lorsque cette dernière est tangente au cercle Γ.

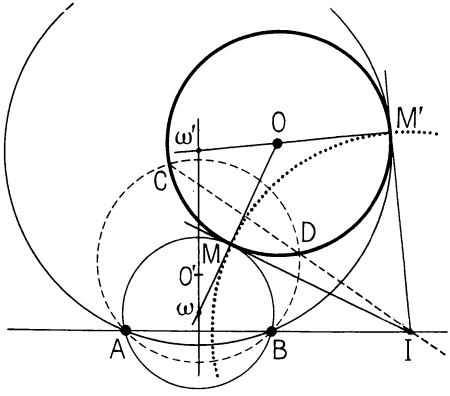


Fig. 99

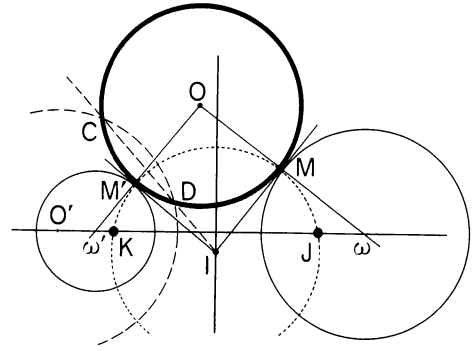


Fig. 100

111. Problème IV. — *Construire un cercle du faisceau* (F) *de points limites* J *et* K *tangent à un cercle donné* Γ.

Si M est le point de contact d'un cercle du faisceau (F), tangent au cercle Γ (fig. 100), c'est aussi l'intersection de Γ avec le cercle (γ) du faisceau conjugué (Φ), de points de base J et K, orthogonal à Γ. Le centre I de ce cercle (γ) est (n° 107) l'intersection de la médiatrice de JK et de l'axe radical CD du cercle Γ et d'un cercle quelconque du faisceau F, et le rayon ρ de ce cercle (γ) est égal à IJ ou IK. Le cercle (γ) coupe orthogonalement Γ en M et M′ et les rayons OM et OM′ du cercle Γ coupent la droite JK en ω et ω′. Les cercles (ω, ωM) et (ω′, ω′M′) orthogonaux à (γ) en M et M′ sont des cercles du faisceau (F) tangents en M et M′ au cercle Γ.

DISCUSSION. — Le cercle (γ) existe toujours (il se réduit à la droite JK si le cercle Γ est centré sur JK) et les points M et M′ existent également. Il y a donc toujours *deux solutions*, l'une d'elles pouvant dégénérer en la médiatrice de JK, si le cercle Γ est tangent à cette médiatrice.

EXERCICES

114. Pour que deux cercles sécants en A et B soient orthogonaux il faut et il suffit que les droites MA et MB, issues d'un point M de l'un d'eux, recoupent l'autre en deux points C et D diamétralement opposés.

115. Pour que deux cercles de centres O et O′ soient orthogonaux il faut et il suffit qu'un point M du cercle de diamètre OO′ ait des puissances opposées par rapport à ces deux cercles.

116. Pour que deux cercles O et O′ soient orthogonaux il faut et il suffit que par un de leurs points d'intersection on puisse leur mener deux sécantes MM′ et NN′ telles que MN et M′N′ soient perpendiculaires, ou que les tangentes en M et M′ soient rectangulaires.

117. Soit un triangle OAB rectangle en O et un point variable M de la droite AB.

1° Montrer que les cercles OAM et OBM sont orthogonaux.

2° Montrer que les cercles ω et ω' passant par M et respectivement tangents en A à OA et en B à OB sont orthogonaux. Lieu de leur second point commun N.

118. On donne un triangle rectangle OAB et un point fixe C de l'hypoténuse AB. Une sécante variable passant par C coupe OA en M et OB en N.

1° Montrer que les cercles AMC et BNC sont orthogonaux.

2° Lieu géométrique du second point P commun à ces deux cercles.

119. Construire un cercle ω orthogonal à un cercle donné O(R) connaissant son rayon ρ et sachant que son centre se trouve sur une droite donnée Δ ou sur un cercle donné (Γ).

120. Construire une division harmonique (ABCD) connaissant les longueurs AB et CD. En désignant par I et J les milieux de AB et CD établir que $4\,\overline{IJ}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$.

121. Étant donné un segment AB et une longueur $2l$ construire un cercle $\omega(\rho)$ orthogonal au cercle de diamètre AB, découpant sur la droite AB un segment MN de longueur $2l$ et sachant d'autre part que le point ω se trouve sur une droite donnée Δ ou sur un cercle donné Γ.

122. Construire un cercle passant par deux points donnés A et B, et découpant sur une droite donnée Δ un segment MN de longueur $2l$. Discuter :

1° Dans le cas où A et B sont d'un même côté de Δ.

2° Dans le cas où A et B sont de part et d'autre de Δ.

123. On donne un cercle O(R), deux points fixes A et B et une longueur $2l$:

1° Trouver l'enveloppe des cordes de longueur $2l$ du cercle O et l'enveloppe des cordes MN communes au cercle O et à un cercle variable ω passant par A et B.

2° Construire la corde MN sachant que $MN = 2l$.

124. Reprendre le problème précédent en supposant :

1° Que le cercle ω est tangent en A à une droite donnée Δ.

2° Que le cercle ω appartient à un faisceau de points limites I et J.

125. Trouver le lieu des points dont la somme des puissances par rapport à deux cercles donnés O et O′ est nulle.
Étudier le cas de deux cercles O et O′ orthogonaux.

126. On donne deux cercles fixes O(R) et O′(R′), un cercle variable $\omega(\rho)$. Déterminer le lieu du point ω dans les cas suivants :

1° Le cercle ω coupe diamétralement chacun des cercles O et O′.

2° Le cercle ω est orthogonal au cercle O et coupe diamétralement le cercle O′.

3° Le cercle ω est coupé diamétralement par chacun des cercles O et O′ Discuter.

127. Reprendre l'exercice précédent dans le cas où :

1° Le cercle ω est orthogonal à l'un des deux cercles O et O′ et est coupé diamétralement par l'autre.

2° Le cercle ω coupe diamétralement l'un des deux cercles O et O′ et est coupé diamétralement par l'autre.

128. 1° Lorsque trois cercles de centres respectifs A, B et C sont deux à deux orthogonaux, leur centre radical C est l'orthocentre du triangle ABC.

2° Comment faut-il modifier l'énoncé lorsque les deux cercles B et C sont orthogonaux entre eux et tous deux pseudo-orthogonaux au cercle A ?

129. On considère les divisions harmoniques (ABCD) et (ABEF).

1° Démontrer que les cercles de diamètres AB, CE et DF font partie d'un même faisceau : on pourra montrer que le pied de l'axe radical des deux derniers a même puissance par rapport aux trois cercles ou établir l'égalité :

$$\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AE}}{\overline{AD}\cdot\overline{AF}} = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{BE}}{\overline{BD}\cdot\overline{BF}} = -\frac{\overline{CE}}{\overline{DF}}.$$

2° Démontrer qu'il en est de même de trois cercles passant respectivement par A et B, C et E, D et F, concourants en M ou dont les centres sont alignés.

130. On considère quatre points alignés A, B, C, D et on désigne par I le milieu de AB, par J le milieu de CD. Démontrer que pour que les deux cercles de diamètres AB et CD soient orthogonaux il faut et il suffit que la somme des puissances d'un point M du plan par rapport à ces deux cercles soit égale au double de sa puissance par rapport au cercle de diamètre IJ. (On peut procéder vectoriellement en montrant que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ}$.)

131. Étant donné un triangle ABC, d'orthocentre H, de centre de gravité G et de hauteurs AA′, BB′ et CC′, démontrer que le cercle ABC circonscrit au triangle, le cercle d'Euler A′B′C′ et le cercle de diamètre HG font partie d'un même faisceau.

132. Soit TT′ une tangente commune aux deux cercles orthogonaux O(R) et O′(R′), se coupant en A et B. On désigne par C et D les projections de T et T′ sur la droite OO′.

1° Calculer en fonction de R et R′ les longueurs AB, TT′ et CD.

2° Nature du quadrilatère ACBD ?

133. On considère un triangle AOB et deux cercles variables orthogonaux ω et ω', passant le premier par O et A le second par O et B, se recoupant en M.

1° Trouver le lieu du point N où BM recoupe le cercle ω et le lieu du point P où AM recoupe le cercle ω'.

2° Évaluer l'angle (MA, MB) en fonction de θ = (OA, OB) et trouver le lieu du point M. Préciser la position de ce lieu à l'aide du point C où la perpendiculaire en A à OA coupe OB et du point D où la perpendiculaire en B à OB coupe OA.

134. Soit un cercle de diamètre BC, de centre O, un point fixe A de ce cercle et une sécante variable issue de A qui coupe la droite BC en M et qui recoupe le cercle en P.

1° Démontrer que les cercles ABM et ACM sont orthogonaux et qu'il en est de même des cercles BMP et CMP.

2° On mène la corde PQ du cercle O parallèle à BC et la corde AN égale à AQ. Montrer que les bissectrices de l'angle $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ})$ et celles de l'angle $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AQ})$ sont fixes, et que le produit AM.AN est constant.

3° Démontrer que le cercle de diamètre MN est orthogonal à un cercle fixe dont on calculera le rayon en fonction de AB et AC.

135. Soit (ω) un cercle du faisceau défini par le cercle O(R) et la droite Δ comme axe radical, et M un point quelconque du cercle (ω).

1° Exprimer en fonction de $\overline{O\omega}$ le rapport de la puissance de M par rapport au cercle O et de la distance orientée $\overline{MH}$ de M à la droite Δ orientée dans un sens donné.

2° Trouver le lieu des points M dont la puissance par rapport au cercle O et la distance orientée de M à l'axe Δ sont dans un rapport algébrique donné.

3° Étudier, dans le cas où R = 0, le lieu des points tel que $\overline{MO}^2 = 2a\,\overline{MH}$ (a longueur donnée).

136. Soit un quadrilatère complet ABCA′B′C′ dont les diagonales AA′, BB′ et CC′ déterminent un triangle diagonal IJK.

1° Démontrer que le cercle ω circonscrit au triangle IJK est orthogonal aux cercles de diamètres AA′, BB′ et CC′.

2° En déduire que ω est situé sur une droite remarquable du quadrilatère complet.

137. On désigne par a, b, c les longueurs BC, CA, AB des côtés du triangle ABC, par D, E, F les pieds des bissectrices intérieures et par D′, E′, F′ les pieds des bissectrices extérieures des angles A, B et C.

1° Montrer que les cercles de diamètres DD′, EE′ et FF′, de centres respectifs α, β et γ ont deux points communs M et M′ tels que : a MA = b MB = c MC et a M′A = b M′B = c M′C.

2° Montrer que les trois cercles précédents sont orthogonaux au cercle ABC, que les droites Aα, Bβ, Cγ sont tangentes à ce cercle et que les points α, β, γ sont alignés sur la médiatrice de MM′.

3° En déduire que le centre O du cercle ABC est situé sur la droite MM′. Ce cercle coupe la droite MM′ en P et Q, montrer que AP et AQ sont les bissectrices de l'angle MAM′.

138. On considère un cercle O(R), un point fixe extérieur A et les tangentes en B et C, issues de A, à ce cercle. Un point variable P décrit le cercle O et les droites PB et PC coupent la droite Δ, perpendiculaire en A à OA, en M et N.

1° Montrer que le cercle PMN est tangent en P au cercle O et que les quadrangles ABPN et ACPM sont inscriptibles.

2° Comparer les triangles ABM et ANC puis montrer que le produit $\overline{AM} \cdot \overline{AN}$ est égal à $-\overline{AB}^2$.

3° Démontrer que le cercle de diamètre MN est orthogonal au cercle O.

139. Soient $\Gamma_1(\omega_1, R_1)$, $\Gamma_2(\omega_2, R_2)$ et $\Gamma_3(\omega_3, R_3)$ trois cercles d'un même faisceau.

1° Établir pour tout point M du plan la relation : $\overline{\omega_2\omega_3}\,\Gamma_1(M) + \overline{\omega_3\omega_1}\,\Gamma_2(M) + \overline{\omega_1\omega_2}\,\Gamma_3(M) = 0$.

2° Utiliser cette formule pour déterminer le lieu des points M, tels que : $\alpha\Gamma_1(M) = \beta\Gamma_2(M)$ et pour retrouver la relation entre R_1^2, R_2^2, R_3^2 et les mesures algébriques $\overline{\omega_1\omega_2}$, $\overline{\omega_2\omega_3}$ et $\overline{\omega_3\omega_1}$.

140. 1° Le plan étant rapporté à une origine fixe O, montrer que tout cercle $\Omega(\omega, R)$ de ce plan est déterminé par la donnée du vecteur $\overrightarrow{O\omega}$ et de la puissance $\gamma = \Omega(O)$ du point O par rapport à ce cercle désigné par (ω, γ). Démontrer que la puissance de tout point M du plan est donnée par la formule :

$$\Omega(M) = \overline{OM}^2 - 2\,\overrightarrow{O\omega}\,.\,\overrightarrow{OM} + \gamma.$$

2° Démontrer que tout point M de l'axe radical de deux cercles (ω_1, γ_1) et (ω_2, γ_2) est caractérisé par la relation : $2\,\overrightarrow{\omega_1\omega_2}\,.\,\overrightarrow{OM} = \gamma_2 - \gamma_1$. Retrouver ainsi le théorème relatif aux différences des puissances de O par rapport aux deux cercles.

3° Établir que la condition pour que les deux cercles (ω_1, γ_1) et (ω_2, γ_2) soient orthogonaux est

$$2\,\overrightarrow{O\omega_1}\,.\,\overrightarrow{O\omega_2} = \gamma_1 + \gamma_2.$$

141. Une sécante variable issue d'un point fixe P coupe deux axes fixes Ox et Oy en M et N. On désigne par I et J les points de Ox et de Oy tels que PI et PJ soient respectivement parallèles à Oy et Ox.

1° Démontrer que le produit $\overline{IM}\,.\,\overline{JN}$ est constant. En désignant par AB une position particulière de MN on pose $\overrightarrow{IM} = \lambda\,\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{JN} = \frac{1}{\lambda}\,\overrightarrow{JB}$.

2° Montrer que le cercle de diamètre MN est orthogonal à un cercle fixe ayant pour centre l'orthocentre ω du triangle OIJ et passant par O (on exprimera $\overrightarrow{\omega M}$ et $\overrightarrow{\omega N}$ en fonction de $\overrightarrow{\omega I}$, $\overrightarrow{\omega J}$, $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{JB}$ et on montrera que $\overrightarrow{\omega M}\,.\,\overrightarrow{\omega N}$ est constant).

3° Montrer que l'axe radical des cercles de diamètres IN et JM passe par ω tandis que l'axe radical des cercles de diamètres AN et BM passe par l'orthocentre H du triangle OAB. Lieu des points de rencontre de ces deux derniers cercles.

142. 1° Étant donnés un point fixe A et un cercle $\omega(\rho)$, montrer que le lieu des points M centres des cercles M(r) orthogonaux au cercle ω et vus du point A sous un angle constant donné est un cercle O(R) du faisceau défini par le cercle ω et le cercle-point A.

2° Réciproquement si le point M décrit un cercle O montrer que le cercle M(r) vu du point A sous un angle constant reste orthogonal (ou pseudo-orthogonal) à un cercle fixe de centre ω du faisceau (O) (A).

3° Démontrer que l'axe radical du cercle O et du cercle variable M(r) enveloppe un cercle de centre ω.

143. On donne un cercle fixe O (R) et un point fixe A de ce cercle. Un cercle M (r) dont le centre M décrit le cercle O est vu du point A sous un angle constant ($r = k.MA$). Le cercle M est coupé en N et N′ par le cercle K orthogonal en A et M au cercle O et les droites NA et NM recoupent le cercle O en P et I.

1° Montrer que PI est un diamètre du cercle O. Comparer les deux triangles NAM et NIP et montrer que la longueur PN est constante.

2° Soit J le centre radical des cercles (O), (M) et (K). Montrer que J divise le vecteur AM dans un rapport constant et que l'enveloppe de NN′ est un point fixe ω.

3° Démontrer que le lieu de J est un cercle de centre ω, orthogonal au cercle (M) et enveloppe de l'axe radical des cercles (O) et (M).

144. Soit un quadrilatère variable Q situé dans un plan fixe. On désigne par a, b, c et d les longueurs constantes des côtés AB, BC, CD et DA.

1° Calculer en fonction de $a^2 - b^2$ et $c^2 - d^2$ le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{DB}$ et montrer qu'il reste constant lorsque le quadrilatère Q se déforme. A quelle condition les diagonales AC et BD sont-elles rectangulaires ?

2° On suppose $a^2 + c^2 > b^2 + d^2$ et on mène $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BD}$. Démontrer que lorsque le quadrilatère se déforme de telle sorte que le sommet A reste fixe, le cercle de diamètre IC est orthogonal à un cercle fixe, le cercle de diamètre JC est pseudo-orthogonal à ce même cercle fixe tandis que le cercle de diamètre DB est coupé diamétralement par un second cercle fixe.

3° Généraliser les résultats précédents en supposant que le quadrilatère Q est gauche.

145. On donne deux droites Δ et Δ' perpendiculaires en O et un point fixe A. Deux sécantes issues de A coupent Δ en P et Q, Δ' en P′ et Q′. Soient I et I′ les centres des cercles APQ et AP′Q′ et soit M le second point commun à ces deux cercles.

1° Montrer que les cercles I et I′ sont orthogonaux. Construire les sécantes PAP′ et QAQ′ correspondant à un point M donné.

2° Trouver les lieux des points I, I′ et M dans les cas suivants :

a) la sécante PAP′ est fixe ; *b*) le quadrangle PP′QQ′ est inscriptible ; *c*) le rapport des segments PQ et P′Q′ est constant ; *d*) les cercles OPP′ et OQQ′ sont orthogonaux.

146. On considère un angle droit AOB et un point variable M qui décrit la droite AB. On construit les cercles de centres ω et ω' passant par M et respectivement tangents en A à OA et en B à OB.

1° Démontrer que les cercles ω et ω' sont orthogonaux. Lieu de leur deuxième point de rencontre N.

2° Trouver l'enveloppe de la droite MN et le lieu du centre du cercle OMN.

3° Démontrer que le cercle de diamètre $\omega\omega'$ passe par le milieu F de AB. En déduire le lieu de son centre I et le lieu de la projection K du point F sur la droite $\omega\omega'$.

147. Étant donnés un cercle O (R) et une droite D de son plan située à une distance OH = 2R du centre, on appelle Γ tout cercle tangent à D et orthogonal au cercle O.

1° Construire un cercle Γ de rayon donné r. Discuter.

2° Construire un cercle Γ passant par un point donné A du cercle O. On trouve en général deux solutions Γ_1 et Γ_2 dont on évaluera les rayons r_1 et r_2 en fonction de R et de l'angle $\widehat{HOA} = \theta$. Cas particuliers où $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

3° Construire un cercle Γ tangent à D en un point donné B.

148. Étant donnés deux points A et B du plan, trouver :

1° Le lieu géométrique des points M tels que $\frac{MA}{MB} = k$. Si k varie on obtient un faisceau de cercles F. Quels sont les cercles de rayon nul du faisceau F ?

2° Le lieu des points M tel que l'angle de droites (MA, MB) soit constant. Si cet angle varie on obtient un faisceau de cercles Φ. Que peut-on dire de ce faisceau par rapport au précédent ?

3° Étant donnés deux faisceaux de cercles F et F′, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que ces deux faisceaux aient un cercle en commun et montrer que les deux faisceaux conjugués Φ et Φ' ont alors un cercle en commun.

149. On donne deux cercles de centres O et O′, de rayons R et R′ (R > R′).

1° Calculer la puissance p par rapport à chacun des cercles du pied H de l'axe radical sur la droite des centres, en fonction de R, R′ et OO′ = d. Retrouver tous les cas de nullité de cette puissance.

2° Le cercle O étant fixe, le point O′ décrit une demi-droite Ox et l'on suppose R′ = 0. Construire l'axe radical du cercle O et du cercle O′ dans tous les cas de figure. Montrer que la puissance p du point H n'est jamais négative.

3° Montrer qu'il existe deux positions O'_1, O'_2 du point O′ pour lesquelles p a une valeur donnée. Construire ces positions dans le cas où $p = R^2$.

4° Montrer que les cercles Γ ayant pour diamètre $O'_1O'_2$ sont orthogonaux à un cercle fixe. Montrer qu'il passe en général un cercle Γ par un point donné du plan. Construction.

150. Soient un cercle Γ de diamètre AA′, de centre O, de rayon R, et Δ la tangente en A′ à ce cercle. M étant un point du plan, la droite AM recoupe Γ en B et la droite A′M recoupe Γ en D ; soient N l'intersection de AD et A′B et P la projection orthogonale de M sur AA′.

1° Démontrer que MN est perpendiculaire à AA′ et que le cercle MNDB est orthogonal à Γ.

2° Montrer que si le conjugué harmonique de B par rapport à A et M est sur Δ, N est le milieu de PM et réciproquement. Dans ces conditions établir la relation existant entre $\overline{OP}$ et $\overline{PM}$.

151. On donne deux droites fixes Δ et D parallèles entre elles et un point fixe A sur D. Un cercle variable Γ passe par A et est tangent en K à Δ.

1° Ce cercle recoupe D en P. Montrer que la droite PK passe par un point fixe I. En déduire que la tangente en P à Γ reste tangente à un cercle fixe C de centre I.

2° Un cercle Γ étant donné, montrer qu'il existe deux cercles Γ' et Γ'' de centres ω' et ω'' passant par A, tangents à Δ et orthogonaux à Γ.

3° On considère l'un d'eux Γ'. Soit P′ le point autre que A où Γ' coupe D. Montrer que les tangentes en P et P′ à Γ et Γ' sont perpendiculaires. Lieu de leur point commun M quand Γ et par suite Γ' varient.

152. On donne un cercle (C), de centre O. Soit AB un diamètre fixe de ce cercle et M un point fixe du cercle. PQ étant un diamètre mobile, l'une des bissectrices des angles formés par les droites MP et MQ coupe PQ en D et AB en E ; l'autre bissectrice coupe PQ en D′ et AB en E′.

1° Montrer que le cercle DMD′ est orthogonal au cercle C. Lieu de son centre I lorsque PQ tourne autour de O.

2° Prouver que les cercles Γ et Γ' circonscrits aux triangles DOE et D'OE' sont orthogonaux.

3° Établir que D' appartient à l'axe radical Δ des cercles C et Γ.

4° On suppose maintenant que M est le milieu d'un des arcs AB. Démontrer que les triangles DOE et D'OE' sont isocèles. Trouver le lieu du centre radical K des trois cercles C, Γ et Γ' et le lieu de l'intersection, autre que O, des cercles Γ et Γ' lorsque PQ tourne autour de O.

153. A et B sont deux points fixes ($AB = 2a$). On étudie les couples de points P et Q tels que le segment PQ ait une longueur donnée $2l$ ($l < a$) et que A, B, P, Q soient sur un même cercle C. Soit I le milieu de PQ, D le support de PQ qui coupe AB en J.

1° Construire Q quand on se donne P. Montrer que le cercle C' concentrique à C et passant par I passe par deux points fixes A' et B' indépendants de P.

2° Construire P et Q quand la droite D est donnée. Lieux des points I, P, Q quand D pivote autour de J.

3° Construire P et Q sachant qu'ils sont sur un cercle S donné.

4° Construire à partir d'un point F donné deux droites D faisant entre elles un angle donné et portant deux couples P, Q situés sur un même cercle C.

154. On donne deux sphères O (R) et O' (R') se coupant en M sous l'angle $V = \widehat{OMO'}$. Soient I et J les centres des sections de ces deux sphères par un même plan P.

1° Trouver la relation entre OI, O'J, R, R' et V pour que les deux sections soient orthogonales.

2° Démontrer que dans ce cas $\overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IO'} = \overrightarrow{JO} \cdot \overrightarrow{JO'} = \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MO'}$ et en déduire le lieu des points I et J lorsque les deux sections sont orthogonales.

155. Soit (A, B, C, D) une division harmonique et deux plans P et P' rectangulaires issus de la droite ABCD. On considère le cercle γ de diamètre AB du plan P et le cercle γ' de diamètre CD du plan P' (*Anneau orthogonal*).

1° Montrer que toute sphère S contenant le cercle γ est orthogonale au cercle γ' ainsi qu'à toute sphère S' contenant le cercle γ'.

2° Montrer que tout cercle passant par deux points A et B de γ et un point C de γ' coupe à angle droit le cercle γ'. Que peut-on dire des cercles qui coupent le cercle γ en A et B et le cercle γ' en C et D ?

156. Soient deux droites orthogonales xx' et yy' admettant le segment IJ pour perpendiculaire commune et deux points fixes A et B de $x'x$ de part et d'autre de I. Soient C et D deux points variables de $y'y$ tels que la sphère de diamètre CD soit orthogonale à la sphère de diamètre AB.

1° Montrer que les hauteurs issues de C et D du tétraèdre ABCD passent par un point fixe H. Déterminer sa position connaissant A, B et J.

2° Calculer le produit $\overline{JC} \cdot \overline{JD}$ en fonction de IJ, IA et IB. Montrer que la sphère de diamètre CD passe par un cercle fixe.

3° Lieux géométriques des pieds des hauteurs AE, BF et de l'orthocentre K du triangle ABC, ainsi que des pieds des hauteurs AE', BF' et de l'orthocentre K', du triangle ABD.

4° Montrer que les droites EF et E'F' passent par un même point fixe et qu'il en est de même des droites EF' et E'F.

POLARITÉ PAR RAPPORT A UN CERCLE

112. Points conjugués par rapport à un cercle. — ***Deux points*** M ***et*** P ***sont dits conjugués par rapport à un cercle*** O, ***lorsqu'ils sont conjugués harmoniques par rapport aux points*** A ***et*** B ***où la droite*** MP ***coupe ce cercle.***

Or, pour que la division (ABMP) soit harmonique (fig. 101), il faut et il suffit (n° 88) que le cercle de diamètre MP soit orthogonal au cercle O. Cette propriété caractéristique permet d'étendre la notion de points conjugués par rapport à un cercle O, lorsque la droite qui les joint ne coupe pas le cercle O. D'où la définition plus générale (fig. 102) :

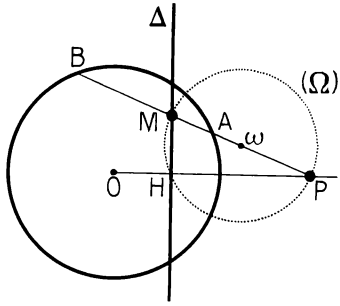


Fig. 101

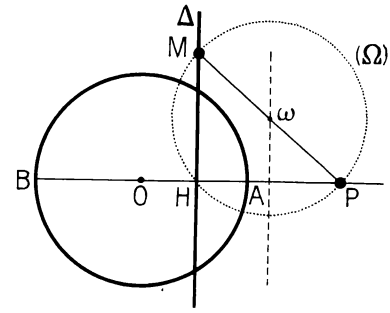


Fig. 102

113. Définition. — ***On dit que deux points*** M ***et*** P ***sont conjugués par rapport au cercle*** O ***lorsque le cercle de diamètre*** MP ***est orthogonal au cercle*** O.

La condition d'orthogonalité du cercle O (R) et du cercle Ω de diamètre MP s'écrit (n° 87) :

$$\Omega\,(O) = R^2 \iff \boxed{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} = R^2} \qquad (1)$$

Si on désigne par H la projection orthogonale de M sur OP, on obtient, puisque H appartient au cercle de diamètre MP, la relation équivalente : $\overline{OH} \cdot \overline{OP} = R^2$. (2)

114. Polaire d'un point. — ***Le lieu des conjugués d'un point*** P ***par rapport au cercle*** O ***est une droite*** Δ ***perpendiculaire à*** OP, ***appelée polaire du point*** P ***par rapport au cercle*** O.

Pour qu'un point M soit conjugué du point fixe P il faut et il suffit qu'il se projette sur la droite OP au point fixe H tel que $\overline{OH} \cdot \overline{OP} = R^2$. Le lieu du point M est donc la droite Δ perpendiculaire en H à OP (fig. 101 et 102). Le point H est appelé *pied de la polaire* Δ du point P.

115. Pôle d'une droite. — Réciproquement, étant donnée une droite Δ ne passant pas par O, il existe sur la perpendiculaire OH à Δ, un point P et un seul tel que $\overline{OH} \cdot \overline{OP} = R^2$, c'est-à-dire un point P admettant Δ pour polaire par rapport au cercle O.

***Le point* P *qui admet la droite* Δ *pour polaire est appelé pôle de la droite* Δ.**

Un point P et une droite Δ ainsi associés sont dits *pôle* et *polaire* par rapport au cercle O.

116. Positions du pôle et de la polaire. — Les points P et H sont conjugués harmoniques par rapport aux extrémités du diamètre AB, passant par P et perpendiculaire à Δ (fig. 102). Ces deux points P et H sont donc réciproques.

1° *Si le point* P *est extérieur au cercle* O, *sa polaire* Δ *coupe le cercle et réciproquement le pôle d'une sécante au cercle est extérieur à ce cercle* (fig. 103). Lorsque le point P s'éloigne indéfiniment sur Ox, la droite Δ devient le diamètre perpendiculaire à Ox. Inversement le pôle d'un diamètre est le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à ce diamètre.

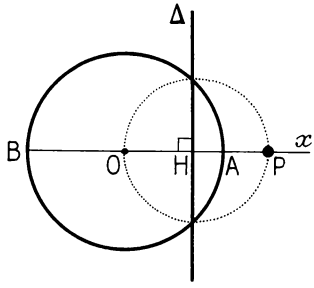


Fig. 103

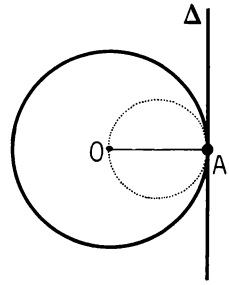


Fig. 104

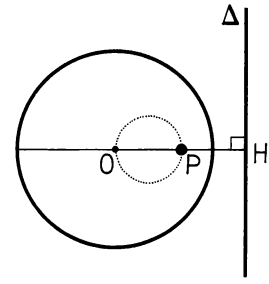


Fig. 105

2° *Si le point* P *est en* A *sur le cercle, sa polaire* Δ *est la tangente en* A (fig. 104). Réciproquement le pôle d'une tangente est son point de contact. Donc :

Tout point d'une tangente au cercle* O *est conjugué du point de contact de cette tangente.

3° *Si le point* P *est intérieur au cercle* O, *sa polaire est extérieure à ce cercle* (fig. 105). Lorsque le point P vient en O, sa polaire est rejetée à l'infini. On dit que la polaire du centre d'un cercle est la droite de l'infini du plan de ce cercle.

117. Propriétés de la polaire. — 1° Le cercle de diamètre MP (fig. 106) est orthogonal au cercle O et au cercle point P. Son centre ω appartient à leur axe radical (n° 91). Et puisque $\overrightarrow{PM} = 2\,\overrightarrow{P\omega}$:

***La polaire d'un point* P *par rapport au cercle* O *est la transformée dans l'homothétie* (P, 2) *de l'axe radical du cercle* O *et du cercle-point* P.**

2° La division (ABHP) étant harmonique et O étant le milieu de AB (n° 16) : $\overline{HA} \cdot \overline{HB} = \overline{HO} \cdot \overline{HP}$. Le point H est donc le pied de l'axe radical du cercle O et du cercle de diamètre OP. Par suite :

***La polaire du point* P *est l'axe radical du cercle donné* O *et du cercle de diamètre* OP.**

3° Lorsque le point P est extérieur au cercle O (fig. 106), il est conjugué de chacun des points de contact E et F des tangentes issues de P. Sa polaire est la droite EF.

La polaire, par rapport à un cercle, d'un point extérieur P ***est donc la droite qui joint les points de contact des tangentes issues de*** P ***à ce cercle.***

D'autre part, le cercle de centre P orthogonal au cercle O passe par E et F. Donc :

Lorsque deux cercles sont orthogonaux, leur axe radical est la polaire du centre de l'un par rapport à l'autre.

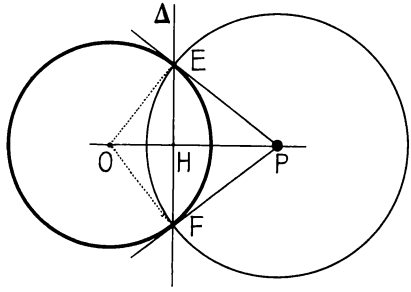


Fig. 106

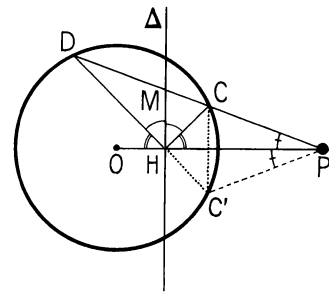


Fig. 107

118. Propriétés du pôle. — 1° La réciprocité entre le point P et le pied H de sa polaire Δ montre que le pôle P de Δ est le pied de la polaire de la projection H du point O sur Δ.

2° ***Le pôle d'une sécante*** EF ***est le point d'intersection des tangentes en*** E ***et*** F (fig. 106).

3° La droite Δ (fig. 107) coupe une sécante quelconque PCD issue de son pôle P en un point M tel que (CDMP) = — 1. Le faisceau H(CDMP) est harmonique et les rayons rectangulaires HP et HM sont les bissectrices de l'angle CHD. On obtient par suite une sécante CD passant par le pôle P de Δ en prenant C symétrique par rapport à OH, du point C′ où la droite HD recoupe le cercle O.

119. Construction de la polaire. — La construction, basée sur la propriété suivante, est préférable à toute autre car elle ne nécessite que l'emploi de la règle :

Si on mène deux sécantes quelconques PAB ***et*** PCD ***au cercle*** Γ, ***la droite qui joint les points*** M ***et*** N ***communs aux côtés opposés du quadrilatère*** ACBD ***est la polaire*** Δ ***du point*** P ***par rapport au cercle*** Γ.

En effet (fig. 108) la polaire Δ du point P coupe AB en E et CD en F. Les divisions (PEAB) et (PFCD) étant harmoniques, la droite Δ est également la polaire du point P par rapport aux deux droites AC et BD et (n° 16) passe donc par M et N.

120. Corollaires. — 1° Les points M et P étant les points de rencontre des côtés opposés du quadrilatère inscrit ABCD (fig. 108), on en déduit que :

Les points de rencontre des côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle sont conjugués par rapport à ce cercle.

Il en résulte que NP est la polaire de M et que MP est la polaire de N par rapport au cercle O.

2° Réciproquement (fig. 108) étant donnés deux points conjugués M et P, menons au cercle O une sécante arbitraire MAD distincte de la polaire Δ du point P, puis les sécantes PAB et PCD. D'après la construction précédente les droites AD et BC se coupent en un point de Δ, donc en M.

Deux points conjugués par rapport à un cercle sont, d'une infinité de manières, les points de rencontre des côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans ce cercle.

121. Propriété fondamentale des pôles et polaires. — ***Lorsque la polaire d'un point*** P ***passe par un point*** M, ***la polaire du point*** M ***passe par le point*** P.

Si le point M appartient à la polaire Δ du point P (fig. 109), les points P et M sont conjugués par rapport au cercle O. Donc P appartient à la polaire D du point M. Cette propriété constitue la *réciprocité polaire.*

Le point P et sa polaire Δ étant donnés, la polaire d'un point M de Δ est donc la perpendiculaire PK à OM. Le pôle M de la droite D issue de P est l'intersection de Δ et de la perpendiculaire OK à la droite D.

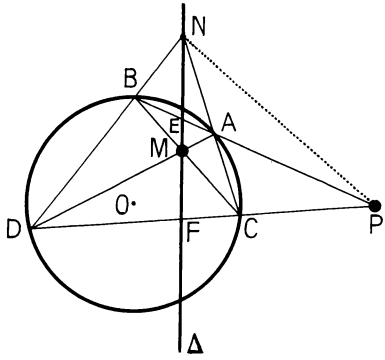


Fig. 108

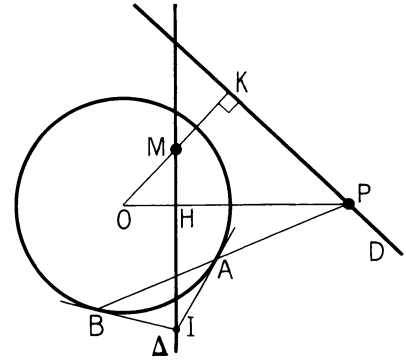


Fig. 109

122. Corollaires. — 1° ***Les polaires des points d'une droite*** Δ ***concourent au pôle*** P ***de cette droite.***

Le point P étant conjugué de tout point M de Δ appartient à la polaire du point M.

Pour obtenir le pôle P *d'une droite* Δ *il suffit de construire l'intersection des polaires de deux points quelconques de cette droite.*

2° ***Les pôles des droites issues d'un point*** P ***sont alignés sur la polaire*** Δ ***du point*** P.

Le pôle M d'une droite D issue du point P est conjugué de P et appartient à sa polaire Δ.

3° Le pôle I d'une sécante PAB au cercle O (fig. 109) est le point d'intersection des tangentes en A et B. Il en résulte que :

La polaire d'un point P ***passe par le point d'intersection des tangentes aux extrémités de toute corde issue de*** P.

On peut déduire cette propriété de la construction du n° 119 lorsque la sécante PCD vient se confondre avec la sécante PAB.

123. Droites conjuguées par rapport à un cercle. — Deux droites D et Δ, dont les pôles M et P sont conjugués par rapport au cercle O, sont dites conjuguées par rapport à ce cercle. Pour qu'il en soit ainsi (fig. 110), il faut et il suffit que le pôle de l'une d'elles appartienne à l'autre.

Les conjuguées d'une droite Δ ***sont les droites issues de son pôle*** P.

124. Triangle conjugué ou autopolaire. — Le point de rencontre N des polaires de deux points conjugués M et P admet chacun de ces points pour conjugué. Dans le

triangle MNP (fig. 111), chaque côté est la polaire du sommet opposé. Deux quelconques de ses sommets sont conjugués et il en est de même de deux quelconques de ses côtés :

Le triangle MNP ***est dit conjugué ou autopolaire par rapport au cercle*** O.

1° Il résulte du n° 120 (1°), que (fig. 108) :

Le triangle diagonal MNP *de tout quadrangle* ABCD *inscrit dans un cercle* Γ *est autopolaire par rapport à ce cercle.*

Tout triangle autopolaire correspond d'ailleurs ainsi à une infinité de quadrangles inscrits.

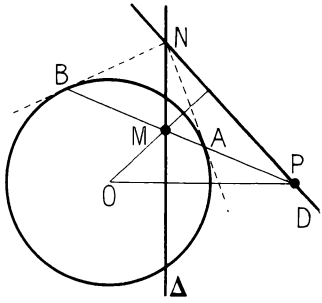


Fig. 110

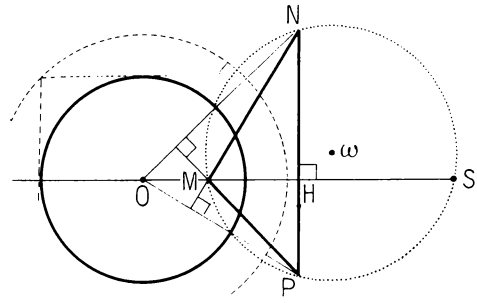


Fig. 111

2° *Le centre* O *est l'orthocentre du triangle autopolaire* MNP car (fig. 111) les droites $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ et OP sont respectivement perpendiculaires à NP, PM et MN. La relation $\overline{OM} \cdot \overline{OH} = R^2$ montre que O est extérieur au triangle MNP qui admet donc un angle obtus. Réciproquement tout triangle admettant un angle obtus est conjugué par rapport au cercle orthogonal aux trois cercles admettant ses côtés pour diamètres.

3° Le symétrique S du point O par rapport au côté NP appartient (n° 61) au cercle Ω circonscrit au triangle MNP. On a : $\Omega(O) = \overline{OM} \cdot \overline{OS} = 2\,\overline{OM} \cdot \overline{OH} = 2\,R^2$.

Le cercle circonscrit au triangle MNP, *autopolaire par rapport au cercle* O(R), *est orthogonal au cercle* O ($R\sqrt{2}$).

Ce cercle O ($R\sqrt{2}$) est appelé *cercle orthoptique* du cercle O (R). C'est le lieu des points d'où l'on peut mener au cercle O (R) deux tangentes rectangulaires.

APPLICATIONS

125. Méthode de démonstration. — L'utilisation d'éléments conjugués, de pôles et de polaires, conduit souvent à d'élégantes démonstrations. Ainsi :

1° ***Pour démontrer que plusieurs points sont alignés*** il suffit de montrer qu'ils sont conjugués d'un même point ou que leurs polaires par rapport à un cercle donné sont concourantes.

2° ***Pour démontrer que plusieurs droites sont concourantes*** il suffit de montrer qu'elles sont conjuguées d'une même droite ou que leurs pôles par rapport à un cercle donné sont alignés.

On utilise, le plus souvent, un cercle convenablement choisi de la figure à étudier. En voici quelques exemples :

126. Exemple I. — ***Pour que quatre points*** A, B, C, D ***forment une division harmonique, il faut et il suffit que leurs polaires forment un faisceau harmonique.***

Pour que les points A, B, C, D soient alignés il faut et il suffit que leurs polaires soient concourantes au pôle P de la droite ABCD (fig. 112). Soient P*a*, P*b*, P*c* et P*d* les polaires des quatre points alignés A, B, C, D. Les droites OA et P*a*, OB et P*b* étant rectangulaires, on a : (OA, OB) = (P*a*, P*b*) et de même (OB, OC) = (P*b*, P*c*) et (OC, OD) = (P*c*, P*d*). Les deux faisceaux O (ABCD) et P(*abcd*) sont superposables. Si l'un d'eux est harmonique il en est de même de l'autre.

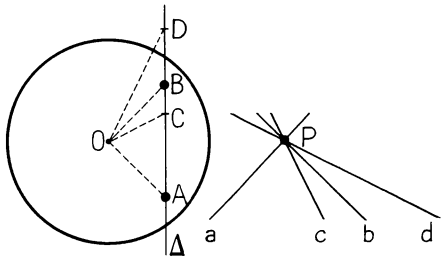


Fig. 112

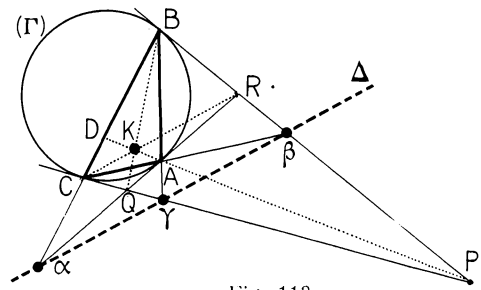


Fig. 113

127. Exemple II. — *Les tangentes en* A, B, C *à un cercle* Γ *coupent les droites* BC, CA *et* AB *en* α, β, γ *et forment un triangle circonscrit* PQR. *Démontrer que les droites* AP, BQ, CR *sont concourantes et que les points* α, β, γ *sont alignés.*

Les points A et P étant les pôles des droites QR et BC (fig. 113), la droite AP est la polaire du point α commun à QR et BC. De même BQ et CR sont les polaires de β et γ.

1° La droite AP, polaire de α par rapport à Γ, coupe la corde αBC en D conjugué harmonique de α par rapport à BC. Cette droite AP est donc la polaire de α par rapport aux deux droites PB et PC. Elle passe donc par le point K intersection de BQ et CR d'après la construction n° 16. On retrouve ainsi la propriété du n° 30, 2°.

2° Corrélativement, les points α, β, γ pôles des trois droites AP, BQ, CR concourantes en K, sont alignés sur la droite Δ polaire de K par rapport à Γ.

128. Exemple III. — 1° *Un quadrangle inscrit dans un cercle* Γ *et le quadrilatère complet formé par les tangentes aux sommets ont même triangle diagonal autopolaire par rapport à* Γ.

Soit ABCD le quadrangle inscrit (fig. 114) et MNP son triangle diagonal, autopolaire par rapport au cercle Γ (n° 124). La droite MN, polaire du point P commun à AB et CD, passe par les points I et K, pôles de AB et CD, et sommets opposés du quadrilatère complet circonscrit HIJGKL. De même MP passe par J et L, tandis que PN passe par G et H.

2° *Les diagonales d'un quadrilatère circonscrit* IJKL *et les droites* AC *et* BD *joignant les points de contact des côtés opposés forment un faisceau harmonique.*

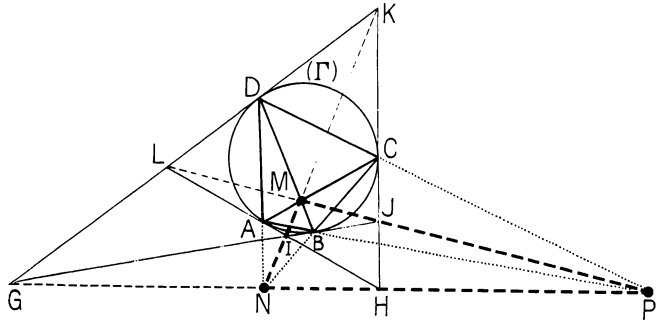


Fig. 114

En effet, les quatre droites AC, BD, IK, JL sont respectivement les polaires des points H, G, P, N qui forment une division harmonique d'après le théorème n° 22.

(HGNP) = — 1 ⟺ M (ABIJ) *harmonique.*

129. Quadrangle harmonique. — ***Un quadrangle inscriptible*** ABCD ***est dit harmonique lorsque les droites*** AB ***et*** CD ***sont conjuguées par rapport au cercle*** ABCD.

Un tel quadrangle (fig. 116) est déterminé par trois de ses sommets A, B, C par exemple car le point D s'obtient en recoupant le cercle ABC par la droite qui joint C au pôle P de AB. De même le pôle Q de CD est situé sur AB et les joints P et Q forment avec le point R commun à AB et à CD un triangle PQR autopolaire.

130. Propriétés. — 1° Si M est un point du cercle O circonscrit au quadrangle, le faisceau M (ABCD), égal au faisceau A (PBCD), est harmonique car (PRCD) = — 1. Le cercle de centre Q passant par C et D est orthogonal au cercle O et appartient au faisceau de points limites A et B. Donc (n° 57 et 99) :

$$(CA, CB) = (DA, DB) \quad \text{et} \quad \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}.$$

2° Désignons par I et J les milieux de AB et de CD (fig. 116). La droite AB est bissectrice intérieure de l'angle CID (n° 118) et les droites ID et IC recoupent le cercle O en C′ et D′ symétriques de C et D par rapport à IP. L'égalité des arcs $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{C'A}$ et des arcs $\overset{\frown}{AD'}$ et $\overset{\frown}{DB}$ entraîne :

(AI, AC) = (DI, DA) = (DB, DC) et (CA, CI) = (AD, AI) = (CD, CB). Donc :

Les trois triangles AIC, DIA ***et*** DBC, ***sont directement semblables.***

Il en est de même des triangles BIC, DIB et DAC, des triangles CJA, BJC et BDA et des triangles DJA, BJD et BCA. Réciproquement :

La similitude de deux des triangles AIC, DIA ***et*** DBC ***caractérise un quadrangle harmonique lorsque*** I ***est le milieu de*** AB.

Une telle similitude détermine en effet la position du sommet D connaissant les sommets A, B et C.

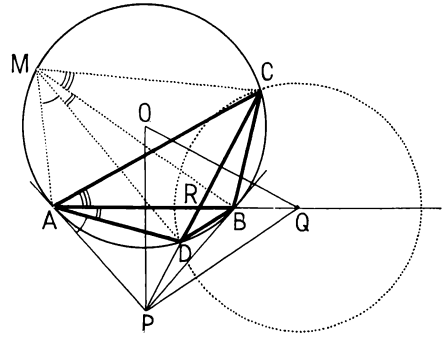


Fig. 115

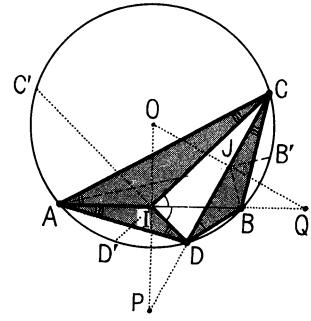


Fig. 116

3° ***Dans un quadrangle harmonique*** ABCD ***les points*** A ***et*** B ***sont les points de la bissectrice intérieure de l'angle*** CID ***tels que*** $IA^2 = IB^2 = IC \cdot ID$.

Les relations équivalentes $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IA})$ et $\frac{IA}{ID} = \frac{IC}{IA}$ entraînent la similitude des triangles IAC et IDA et réciproquement. On peut donc construire le quadrangle ABCD connaissant les sommets C et D et le milieu I de AB.

4° En considérant les triangles IAC et DBC on voit que :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) = -(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \quad \text{et} \quad CA \cdot CB = CD \cdot CI.$$

La droite CD *est antiparallèle à* CI *par rapport à* CA *et* CB.

D'autre part l'égalité des arcs AD′, DB et B′C entraîne AB′ = CD′ et par suite :

$$IC + ID = JA + JB.$$

131. Symédianes d'un triangle. — Dans le triangle ABC (fig. 116) la droite CR est symétrique de la médiane CI par rapport aux bissectrices de l'angle C.

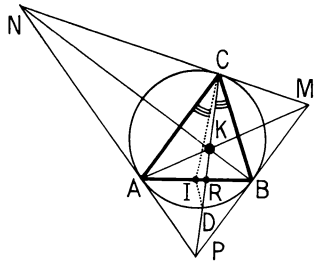


Fig. 117

La droite CR, *symétrique de la médiane* CI *par rapport aux bissectrices de l'angle* C, *est dite symédiane du triangle* ABC.

Cette symédiane CR, qui passe par le pôle P du côté AB par rapport au cercle ABC, est conjuguée du côté AB (fig. 117) :

La symédiane issue d'un sommet du triangle ABC *est conjuguée du côté opposé par rapport au cercle* ABC.

En achevant le triangle MNP formé par les tangentes en A, B, C au cercle ABC, on voit (n° 30) que :

Les trois symédianes AM, BN *et* CP *d'un triangle* ABC *sont concourantes en un point* K *appelé centre des symédianes ou point de Lemoine du triangle* ABC.

132. Problème. — *Démontrer que le rapport des distances de deux points* A *et* B *au centre* O *d'un cercle* Γ *est égal au rapport des distances* AA′ *et* BB′ *de chacun de ces points à la polaire de l'autre.*

La relation : $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = \overline{OB} \cdot \overline{OK} = R^2 \implies \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OK}{OH}$

(fig. 118). Cette dernière entraîne la similitude des triangles OAK et OBH (2e cas) et par suite celle des trapèzes rectangles OAA′K et OBB′H, d'où : $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{AA'}{BB'}$.

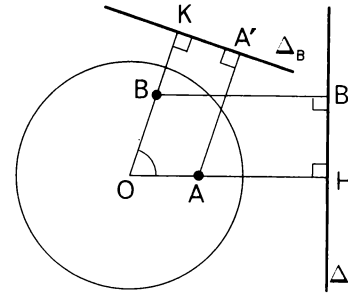


Fig. 118

Vectoriellement on peut écrire : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA'} = R^2$

soit : $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'})$

d'où : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AA'} \implies \overline{OA} \cdot \overline{BB'} = \overline{OB} \cdot \overline{AA'}$

car OA et OB sont respectivement parallèles à BB′ et AA′.

133. Polarité par rapport à une sphère. — La notion de points conjugués s'étend à toute sphère S (O, R). Deux points M et P sont dits conjugués par rapport à la sphère S (fig. 119), si :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} = R^2 \qquad (1)$$

Les points M et P sont conjugués par rapport à S, s'ils sont conjugués par rapport au grand cercle Γ situé dans le plan OMP, ou si la sphère S est orthogonale à la sphère de diamètre MP. La relation (1) se réduit à (ABMP) = — 1 lorsque la droite MP coupe la sphère S en A et B.

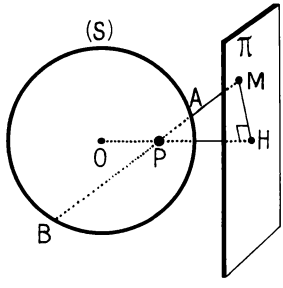


Fig. 119

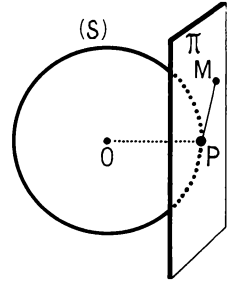


Fig. 120

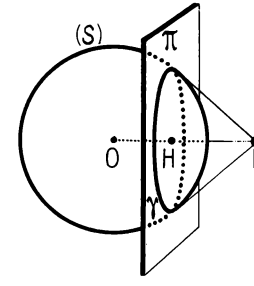


Fig. 121

Le lieu des points M conjugués d'un point donné P est le plan (π), *plan polaire de* P, perpendiculaire à la droite OP au point H tel que $\overline{OH} \cdot \overline{OP} = R^2$. Inversement tout plan (π) perpendiculaire en H à OH est le plan polaire du point P de la droite OH défini par la relation précédente (fig. 119 à 121) et appelé *pôle du plan* (π).

Le pôle de tout plan tangent à S (fig. 120) est son point de contact P. Donc tout point d'une tangente à S est conjugué de son point de contact.

Lorsqu'un point M appartient au plan polaire (π) du point P, les points M et P sont conjugués et le point P appartient au *plan polaire* (μ) du point M. *Les plans* (π) *et* (μ) *sont dits conjugués* par rapport à S.

Si les points C et D appartiennent à l'intersection Δ' des plans polaires de deux points A et B d'une droite Δ (fig. 122), les points A et B appartiennent aux plans polaires de C et de D. *Les droites* Δ *et* Δ' *sont dites conjuguées ou réciproques* et le plan polaire de tout point de l'une passe par l'autre. On pourra montrer que Δ et Δ' sont orthogonales et perpendiculaires à un même diamètre de la sphère S en deux points conjugués H et H'.

Si, de plus, les deux points A et B de Δ sont conjugués, ainsi que les deux points C et D de la droite réciproque Δ', les quatre points ABCD sont deux à deux conjugués. Chaque face du tétraèdre ABCD est le plan polaire du sommet opposé et chaque arête est conjuguée de l'arête opposée. Le *tétraèdre* ABCD *est dit autopolaire.* Comme OA par exemple est perpendiculaire au plan BCD, le point O est l'orthocentre du tétraèdre ABCD.

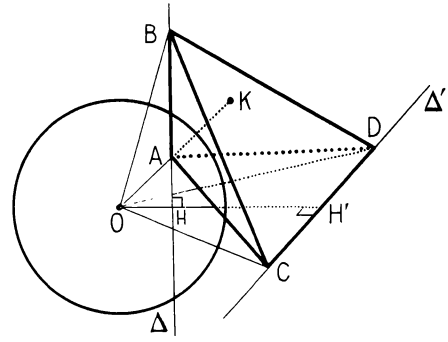


Fig. 122

EXERCICES

157. Pour que deux points M et P soient conjugués par rapport au cercle O (R), il faut et il suffit :

1° Que la somme de leurs puissances par rapport au cercle O soit égale à $\overline{MP}^2$.

2° Que les cercles de centres M et P orthogonaux au cercle O soient orthogonaux entre eux. Comment faut-il modifier cette condition si le point M est intérieur au cercle O ?

158. Démontrer que la polaire d'un point P par rapport au cercle O (R) est :

1° L'homologue, dans l'homothétie (O, 2) de l'axe radical des cercles O (R) et P (PO).

2° L'axe radical du cercle P (PO) et du cercle O ($R\sqrt{2}$) orthoptique du cercle O (R).

159. Lorsque les points M et P sont conjugués par rapport au cercle O, les points O et M sont conjugués par rapport au cercle de centre P orthogonal au cercle O.

160. Si ω est le centre radical de trois cercles O_1, O_2 et O_3 orthogonaux deux à deux :

1° Les centres O_1 et O_2 sont conjugués par rapport au cercle O_3.

2° L'axe radical des cercles O_1 et O_3 et celui des cercles O_2 et O_3 sont conjugués par rapport au cercle O_3 et le triangle $\omega O_1 O_2$ est autopolaire par rapport à O_3.

161. 1° Deux points donnés A et B sont conjugués par rapport à tout cercle orthogonal au cercle de diamètre AB. Étudier la famille des cercles admettant deux couples de points donnés (A, B) et (C, D) comme couples de points conjugués.

2° Existe-t-il un cercle admettant trois couples donnés (A, B), (C, D) et (E, F) comme couples de points conjugués ? Dans quel cas y en a-t-il une infinité ?

162. 1° Étudier la famille des cercles admettant un point donné P et une droite donnée Δ comme pôle et polaire.

2° On considère un faisceau de cercles à points limites I et J. Montrer que le point I a même polaire par rapport à tous les cercles du faisceau et qu'il en est de même de J.

163. On donne un cercle O (R) et un point fixe intérieur I. Une sécante variable issue de I coupe le cercle en M et N. Trouver le lieu géométrique de l'intersection P des tangentes en M et N au cercle O.

Étudier le problème lorsque I est extérieur au cercle O.

164. On considère les cercles Γ qui passent par un point donné M et qui admettent deux points donnés A et B comme points conjugués.

1° Montrer que ces cercles passent en général par un second point fixe M′ et trouver le lieu de leurs centres.

2° Construire un cercle passant par deux points donnés M et N et admettant un couple donné (A, B) comme points conjugués.

165. On donne dans le plan une droite Δ et deux cercles O et O_1. Construire une droite Δ' qui soit à la fois conjuguée de Δ par rapport au cercle O et au cercle O_1.

166. 1° Démontrer que les polaires d'un point donné M par rapport aux cercles d'un faisceau (F) concourent en un point P, tel que le cercle de diamètre MP soit orthogonal aux différents cercles de ce faisceau.

2° Trouver le lieu de P lorsque M décrit un cercle du faisceau (Φ) conjugué du faisceau (F) ou une parallèle à l'axe radical du faisceau (F).

167. 1° Soient deux points A et B conjugués par rapport à trois cercles O_1, O_2 et O_3. Que représente le milieu I de AB pour ces trois cercles ?

2° Déterminer le lieu des points A et B conjugués par rapport aux trois cercles lorsqu'il existe.

168. 1° Démontrer que le cercle qui admet pour diamètre le segment qui joint les points de rencontre des côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle O est orthogonal au cercle O.

2° Réciproquement si deux cercles sont orthogonaux les extrémités d'un diamètre de l'un sont, d'une infinité de manières, les points de rencontre des opposés d'un quadrilatère inscrit dans l'autre.

169. On donne un cercle O (R) et sur une droite Δ deux points A et B conjugués par rapport à ce cercle.

1° On joint un point variable M du cercle O aux points A et B. Les droites MA et MB recoupent le cercle O en C et D. Trouver l'enveloppe de la droite CD, et le lieu du point d'intersection S des tangentes en C et D.

2° Soit EF une position particulière de CD. Les droites ME et MF coupent la droite Δ en N et P. Montrer que N et P sont conjugués par rapport au cercle O et que NF et PE se coupent sur ce cercle.

3° En désignant par H la projection de O sur Δ, évaluer en fonction de HO et R les produits $\overline{HN}.\overline{HP}$ et $\overline{HA}.\overline{HB}$.

170. Soit ABC un triangle conjugué par rapport au cercle O.

1° Une sécante variable issue de A coupe le cercle en N et P. Trouver le lieu du point d'intersection M de BN et de CP.

2° Un point R décrit la droite BC. Les tangentes au cercle O issues de R coupent respectivement AB et AC en D et E. Trouver l'enveloppe de la droite DE.

171. On désigne par I le centre d'un cercle inscrit (ou exinscrit) dans le triangle ABC qui touche les côtés BC, CA et AB en D, E et F. La droite BI coupe EF en M et DE en P. La droite CI coupe EF en N et DF en Q.

1° Démontrer que MC et NB sont respectivement les polaires de P et Q par rapport au cercle I.

2° En déduire que le cercle de diamètre BC coupe EF en M et N.

172. On étend la notion de points conjugués dans le plan en disant que M et P sont conjugués dans la *polarité* (O, k) si $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} = k$ où k est une constante donnée.

1° Si $k = -\rho^2$, montrer que le cercle de diamètre MP coupe diamétralement le cercle (O, ρ).

2° Étudier la position d'un point P et de sa polaire Δ lorsque k est négatif. Construire un triangle ABC autopolaire.

3° Montrer que tout triangle ABC, non rectangle, est autopolaire dans une polarité à déterminer.

173. On considère le quadrilatère complet formé par les tangentes communes à deux cercles extérieurs O et O′.

1° Les diagonales de ce quadrilatère complet étant deux à deux conjuguées par rapport à chacun des deux cercles O et O′ en déduire que la diagonale OO′ coupe les deux autres aux points limites I et J du faisceau défini par les cercles O et O′.

2° Montrer que la droite qui joint les points de contact du cercle O avec deux tangentes non symétriques et la droite qui joint les points de contact du cercle O′ avec ces tangentes sont perpendiculaires en I ou en J.

174. Dans un triangle ABC on désigne par M, N, P les milieux des côtés BC, CA et AB, par D, E, F les points de contact de ces côtés avec le cercle inscrit I et par D′, E′, F′ les points de contact de ces côtés avec le cercle J exinscrit dans l'angle A. La droite AIJ coupe BC en S.

1° Montrer que la projection H du point C sur AI est située sur les droites MN et DF, puis que la projection K de B sur AI est située sur les droites MP et DE.

2° Démontrer que MD = MD′ = MH = MK et que les points H et K sont conjugués par rapport aux deux cercles I et J. Nature de la division (ASHK) ?

3° Montrer que DF et D′F′ sont perpendiculaires en H et que DE et D′E′ sont perpendiculaires en K.

175. Soient deux cercles orthogonaux O(R) et O′(R′) tangents en A et A′ au segment AA′ = a et de diamètres respectifs AB et A′B′.

1° Démontrer que AB′ et A′B sont respectivement perpendiculaires à OA′ et O′A et en déduire la relation entre a, R et R′.

2° Démontrer que la perpendiculaire OK menée de O à A′B′, l'axe radical MN des cercles O et O′ et la droite AB′ concourent en un point J.

3° Soit I le point de rencontre de MN avec AB. Calculer en fonction de R le produit $\overline{AI}.\overline{OJ}$.

176. 1° Démontrer que si deux couples de sommets opposés A, A′ et B, B′ d'un quadrilatère complet ABCA′B′C′ sont conjugués par rapport à un cercle, il en est de même du couple C, C′.

2° En déduire que si deux couples de côtés opposés d'un quadrangle MNPQ sont conjugués par rapport à un cercle il en est de même du troisième couple.

177. On considère deux cercles inégaux O et O′ sécants en A et B et une tangente commune TT′ qui coupe la droite OO′ en I. La droite IB recoupe les cercles en M et M′ et les droites AM et AM′ coupent la droite OO′ en H et H′.

1° Démontrer que H et H′ sont les pieds des polaires de I par rapport aux cercles O et O′, que l'angle HAH′ est égal à l'angle OAO′ = V des deux cercles et que le quadrilatère AHBH′ est un losange. Cas où les deux cercles sont orthogonaux.

2° Comparer les triangles BTT′, HTA et H′AT′ et montrer que $\overline{HT}.\overline{H'T'} = \overline{HA}^2$.

178. On donne un cercle O de diamètre PQ, une corde fixe AB et un point I de la droite PQ. Les droites IA et IB recoupent le cercle en C et D et les droites AB et CD se coupent en J.

1° La polaire de I par rapport au cercle O coupe AC en E. Nature du faisceau J (ACIE) ?

2° La perpendiculaire en I à la droite PQ coupe AB en M et CD en N. Montrer que I est le milieu du segment MN.

3° Lieu du point N lorsque I décrit la droite PQ.

179. On désigne par H l'orthocentre du triangle ABC de hauteurs AA′, BB′ et CC′ et par I et r le centre et le rayon d'un cercle inscrit ou (exinscrit) au triangle. La tangente parallèle à BC coupe CA en D et coupe AB en E. Les droites BD et CE se coupent en J et coupent respectivement en K et L la parallèle à BC menée par A.

1° Démontrer que A est le milieu de KL, que (BDJK) = (CEJL) = — 1 et que le triangle JKL est conjugué par rapport au cercle I(r).

2° Montrer que le cercle JKL est orthogonal aux cercles de diamètres BD et CE ainsi qu'au cercle I($r\sqrt{2}$), puis que ces trois cercles font partie d'un même faisceau admettant pour axe radical la hauteur AA′.

3° Établir la relation : $\overline{HA}\,.\,\overline{HA'} = \overline{HI}^2 - 2r^2$.

180. Déduire de la formule établie au 3° de l'exercice précédent que :

1° Lorsqu'un triangle ABC est conjugué par rapport à un cercle ω (ρ), ce cercle ω est orthogonal aux cercles orthoptiques des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC.

2° Lorsqu'un quadrilatère complet ABCA′B′C′ est circonscrit à un cercle O, le cercle orthoptique du cercle O fait partie du faisceau des cercles ayant pour diamètres les diagonales AA′, BB′ et CC′ du quadrilatère complet.

3° Le centre O d'un cercle inscrit dans un quadrilatère ABCD est situé sur la droite qui joint les milieux I et J des diagonales AC et BD.

181. On considère deux cercles O(R) et ω(ρ) tels que : $\overline{O\,\omega}^2 = \rho^2 + 2\,R^2$.

1° Soit A un point quelconque du cercle ω, intérieur au cercle O. La polaire de A par rapport au cercle O coupe le cercle ω en B et C. Démontrer que le triangle ABC est conjugué par rapport au cercle O.

2° On construit un triangle ABC circonscrit au cercle O en se donnant la droite AB tangente à ce cercle, le point C pôle de cette droite par rapport au cercle ω, puis on achève le trapèze BCDE circonscrit au cercle O. En utilisant la propriété établie au 2° de l'exercice 179 qui indique que les cercles de diamètres BD, CE et le cercle O ($R\sqrt{2}$) ont pour axe radical commun la hauteur AA′ du triangle ABC, démontrer que le triangle ABC est conjugué par rapport au cercle ω.

3° En déduire que si le cercle ω (ρ) est orthogonal au cercle orthoptique du cercle O(R), il existe une infinité de triangles inscrits dans le cercle ω et conjugués par rapport au cercle O et une infinité de triangles circonscrits au cercle O et conjugués par rapport au cercle ω : *Le cercle ω est dit harmoniquement circonscrit au cercle O et le cercle O harmoniquement inscrit au cercle ω.*

182. On obtient un quadrangle harmonique ABCD :

1° En menant deux tangentes PA et PB et une sécante PCD à un cercle donné O.

2° En coupant (en C et D) un cercle passant par A et B, par un cercle du faisceau de points limites A et B.

3° En coupant deux cercles orthogonaux par un cercle orthogonal à chacun de ces deux cercles.

183. Dans un quadrangle harmonique ABCD on connaît les points A et B et le milieu J de CD. Démontrer que les points C et D sont les intersections de la bissectrice intérieure de l'angle AJB par le cercle ω passant par A et B et centré sur la bissectrice extérieure de l'angle AJB.

184. Trois cercles de centres O, P, Q sont deux à deux orthogonaux. Les cercles O et P se coupent en A et B et coupent respectivement le cercle Q en C et D et en E et F. On désigne par I, J et K les milieux de AB, CD et EF.

1° Démontrer que les quadrangles ABCD, ABEF et CDEF sont harmoniques.

2° Montrer qu'il en est de même des quadrangles ABJK, CDKI et EFIJ.

185. On donne un triangle PQR d'orthocentre S intérieur au triangle et on désigne par I, J, K les pieds des hauteurs PS, QS et RS.

1° Le cercle de diamètre QR coupe la hauteur PI en A et B. Démontrer que (ABPS) = — 1 et que le quadrangle ABJK est harmonique.

2° Le cercle de diamètre RP coupe la hauteur QJ en C et D. Montrer que le quadrangle ABCD est inscriptible dans un cercle de centre R orthogonal au cercle de diamètre PQ. Nature des quadrangles CDIK et ABCD ?

3° Le cercle de diamètre PQ coupe la hauteur RK en E et F. Nature des quadrangles EFIJ, ABEF et CDEF. Montrer que les trois cercles ABCD, CDEF et ABEF sont deux à deux orthogonaux. Quel est leur centre radical ?

186. Soient I et J les milieux des côtés AB et CD du quadrangle harmonique ABCD.

1° Établir les relations : $(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JB}) = 2\ (CA, CB) = 2(DA, DB)$ et $\dfrac{JA}{JB} = \left(\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\right)^2 = \left(\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}\right)^2$.

2° Les points A et B étant fixes, trouver le lieu de C et D ainsi que l'enveloppe de CD lorsque J décrit un cercle passant par A et B.

3° Dans les mêmes conditions trouver le lieu de C et D et l'enveloppe de CD lorsque J décrit un cercle du faisceau de points limites A et B.

187. Dans un quadrangle harmonique ABCD les points A et B sont fixes et AB = $2c$. On désigne par I et J les milieux de AB et CD et par θ l'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})$ [mod. 2π].

1° La parallèle à JA menée par C coupe le prolongement de DA en E. Comparer les triangles CAE et CIA. En déduire que : $\overline{CA}^2 = CI.JA$ et $\overline{CB}^2 = CI.JB$.

2° Démontrer que : JA + JB = IC + ID et JB — JA = $2c \cos\theta$. On suppose JA + JB constant et égal à $2a$. Calculer IC et ID et trouver les lieux de C et D.

3° On suppose cette fois que : JB — JA = $2k$. Montrer que $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$ ont des directions fixes et en déduire les lieux de C et D. Montrer que l'aire du triangle ICD est constante et que le cercle de diamètre CD est orthogonal à un cercle fixe.

188. On considère un quadrangle harmonique inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R et on désigne par I et J les milieux de AB et CD, par θ et φ les angles aigus CAD et ACB.

1° Démontrer que les droites JB, JA, ID et IC sont tangentes en A', B', C', D' à un cercle de centre O dont on calculera le rayon R'.

2° Soient P et Q les pôles de AB et CD par rapport au cercle O. Démontrer que les deux figures OPQABCD et OJIA'B'C'D' sont inversement semblables. En déduire que les points I, A', B' et J, C', D' sont alignés et que le quadrangle A'B'C'D' est harmonique.

3° Soient P' et Q' les milieux de A'B' et C'D'. Montrer qu'il existe sur la bissectrice intérieure de l'angle IOJ deux points E et F formant un quadrangle harmonique avec chacun des couples IJ, AA', BB', CC', DD', PP' et QQ'.

189. 1° Démontrer que les tangentes à un cercle Γ aux quatre sommets A, B, C, D d'un quadrangle harmonique découpent une division harmonique (P, Q, R, S) sur la tangente en un point quelconque M de Γ.

2° Soit O le centre du cercle Γ. Montrer que le faisceau O(PQRS) reste égal à lui-même lorsque le point M décrit le cercle Γ. Étudier le cas où le point M est confondu avec l'un des points A, B, C ou D.

190. On désigne par I et J les milieux des côtés AB et CD du quadrangle harmonique ABCD inscrit dans un cercle Γ de centre O.

1° Démontrer que les pôles A', B', C', D' des droites JB, JA, ID et IC sont les sommets d'un quadrangle harmonique inscrit dans un cercle Γ' de centre O et semblable à ABCD.

2° Soient I′ et J′ les milieux de A′B′ et C′D′. Quels sont les pôles par rapport à Γ des droites J′B′, J′A′, I′D′ et I′A′ ?

191. Les diagonales AB et CD d'un quadrilatère ABCD circonscrit à un cercle Γ sont deux droites conjuguées par rapport au cercle Γ.

192. Les points de rencontre I et J des côtés opposés du quadrilatère ABCD inscrit dans un cercle Γ et les points de rencontre P et Q des tangentes en deux sommets opposés sont alignés et forment une division harmonique.

193. Un point variable M décrit une sécante AB au cercle Γ de centre O. Les tangentes en A et B à ce cercle se coupent en I et coupent respectivement en P et Q la perpendiculaire en M à OM.

1° Démontrer que M est le milieu de PQ et que le point O appartient au cercle IPQ. Lieu du centre de ce cercle IPQ ?

2° Démontrer que l'angle $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$ est constant. En supposant les droites IA et IB, orientées dans les sens de $\overrightarrow{IA}$ et de $\overrightarrow{IB}$, démontrer que la somme $\overline{IP} + \overline{IQ}$ est constante.

194. Démontrer que si H et K sont les projections orthogonales du centre O sur deux droites D et Δ, conjuguées par rapport au cercle O et si $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}) = \theta$, les points H et K sont conjugués par rapport au cercle $(O, R \cos \theta)$.

195. On donne un cercle fixe Γ de centre O, et deux points fixes A et B de ce cercle. Soit M un point fixe de la droite AB et H sa projection orthogonale sur une droite variable Ox. Les droites AH et BH recoupent le cercle Γ en C et D et coupent en E et F la polaire Δ du point H. La droite CD coupe la droite HM en N et la droite AB en S.

1° Trouver le lieu du pied K de Δ sur la droite Ox.

2° Montrer que S appartient à Δ. Quelle est la nature du faisceau S(ACHE) ?

3° Démontrer que H est le milieu de MN et en déduire le lieu de N lorsque varie Ox.

PROJECTIONS ORTHOGONALES

134. Définition. — La projection d'un point A, effectuée parallèlement à une direction Δ, sur un plan P, est l'intersection A′ de ce plan et de la parallèle à Δ menée par A. Lorsque la direction Δ est perpendiculaire au plan P, la projection est dite *orthogonale* au plan P. Donc (fig. 123).

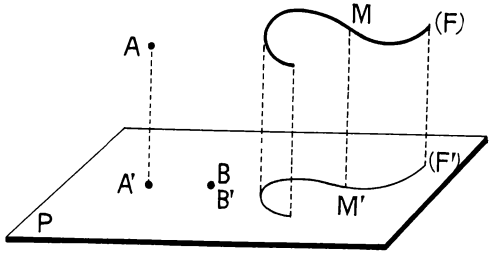


Fig. 123

La projection orthogonale d'un point A ***sur un plan*** P ***est le pied*** A′ ***de la perpendiculaire menée du point*** A ***au plan*** P ***:***

La droite AA′ est la *projetante* de A. Tout point B du plan P coïncide avec sa projection. Si un point variable M décrit une figure (F), sa projection M′ décrit une figure (F′), projection orthogonale de la figure (F) sur le plan P.

135. Propriétés des projections. — Rappelons les propriétés suivantes qui ont été établies en classe de Seconde :

1° *Toute droite* D *non perpendiculaire au plan de projection* P *se projette orthogonalement sur le plan* P *suivant une droite* D′.

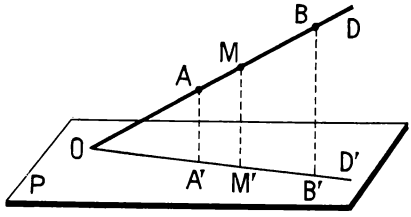


Fig. 124

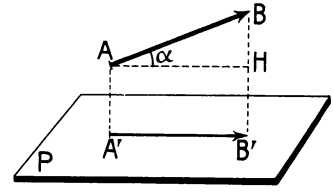


Fig. 125

Si la droite D coupe le plan P en O (fig. 124), sa projection D′ contient le point O. Si la droite D est parallèle au plan P, elle est parallèle à sa projection. La projection d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ défini par les projections A′ et B′ des points A et B (fig. 125). Si α désigne l'angle aigu de $\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{A'B'}$, on obtient : $A'B' = AB \cos \alpha$.

2° *Les projections orthogonales de deux droites parallèles sont en général parallèles* (fig. 126). Ces projections sont confondues si les deux droites AB et CD sont situées dans un plan perpendiculaire au plan P. Il en résulte que la projection d'un parallélogramme (fig. 126) est un parallélogramme véritable ou aplati.

3° *Les projections orthogonales d'une même figure sur deux plans parallèles sont deux figures égales.*

La figure F″ (A″B″C″) se déduit de la figure F′ (A′B′C′) dans la translation $\overrightarrow{A'A''}$ (fig. 127). Il en résulte que toute figure plane (F) se projette orthogonalement en *vraie grandeur* sur tout plan P parallèle au plan de la figure F.

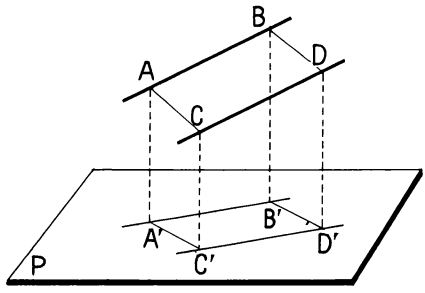


Fig. 126

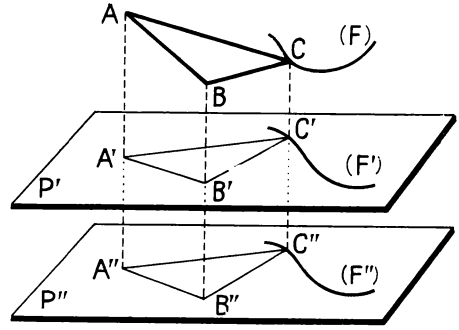


Fig. 127

136. Projection orthogonale d'un angle droit. — Rappelons (Géométrie Seconde nos 335 à 338) que :

1° *Lorsqu'un angle droit a un côté parallèle au plan de projection il se projette orthogonalement suivant un angle droit.*

2° *Lorsqu'un angle qui a un côté parallèle au plan de projection, se projette orthogonalement suivant un angle droit, il est lui-même droit.*

3° *Lorsqu'un angle droit se projette orthogonalement suivant un angle droit, un de ses côtés au moins est parallèle au plan de projection.*

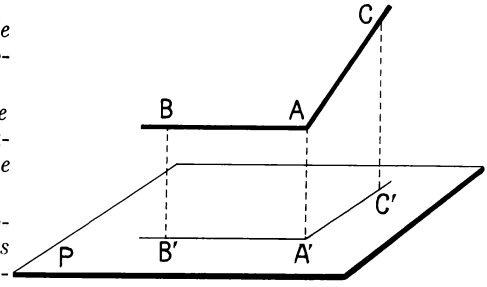


Fig. 128

Ainsi (fig. 128) :

1° $AB \parallel P$ et $AB \perp AC \Longrightarrow A'B' \perp A'C'$.

2° $AB \parallel P$ et $A'B' \perp A'C' \Longrightarrow AB \perp AC$.

3° $AB \perp AC$; $A'B' \perp A'C'$; AC non parallèle à P $\Longrightarrow AB \parallel P$.

On peut dans les propriétés ci-dessus, remplacer les côtés de l'angle droit BAC par deux droites orthogonales ou supposer le côté AB situé dans le plan P. Ainsi :

Pour qu'une droite D, *située dans un plan* P, *soit orthogonale à une droite* Δ, *non perpendiculaire au plan* P, *il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire à la projection orthogonale* Δ′ *de* Δ *sur le plan* P.

ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

137. Définition. — ***On appelle angle d'une droite et d'un plan l'angle aigu formé par cette droite et sa projection orthogonale sur le plan.***

Soit une droite AB coupant le plan P en B et soit A′ la projection orthogonale du point A sur le plan P (fig. 129). L'angle aigu ABA′ est par définition l'angle de la droite AB et du plan P.

Cet angle caractérise l'inclinaison de AB par rapport au plan P et permet de construire la demi-droite BA connaissant sa projection BA′ et le demi-espace dans lequel elle se trouve.

138. Théorème. — ***L'angle d'une droite et d'un plan est le plus petit angle aigu formé par cette droite et une droite quelconque passant par son pied dans le plan.***

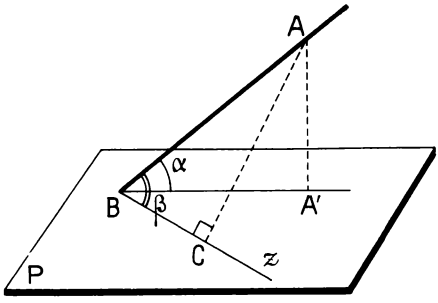


Fig. 129

Soit Bz une droite quelconque du plan P et C la projection de A sur Bz. Désignons par α et β les angles ABA′ et ABC :

$$\sin\alpha = \frac{AA'}{AB} \quad \text{et} \quad \sin\beta = \frac{AC}{AB}.$$

Or AA′ perpendiculaire au plan P est inférieur à l'oblique AC. Donc :

$$\sin\alpha < \sin\beta.$$

et puisqu'il s'agit d'angles aigus :

$$\sin\alpha < \sin\beta \Longrightarrow \alpha < \beta.$$

139. Pente d'une droite par rapport à un plan. — ***C'est la tangente trigonométrique*** p ***de l'angle*** α ***de cette droite et du plan.***

Ainsi (fig. 129) : $$p = \operatorname{tg}\alpha = \frac{AA'}{BA'}.$$

La pente d'une droite croît en même temps que l'angle α de la droite et du plan.

140. Remarque. — Pour obtenir en vraie grandeur, dans le plan P, l'angle α de la droite AB et du plan P, on rabat le plan ABA′ sur le plan P, autour de A′B comme charnière.

141. Cas particuliers. — 1° Droite parallèle à un plan. — Dans ce cas l'angle α de la droite et du plan est nul et il en est de même de sa pente.

2° Droite perpendiculaire à un plan. — La projection de la droite AB se réduit au point B. Mais comme l'angle ABz formé avec une droite quelconque du plan P est droit, on dit que la droite coupe le plan P à angle droit.

LIGNES DE PENTE D'UN PLAN

142. Théorème. — ***Étant donnés deux plans sécants, les droites de l'un de ces plans qui font le plus grand angle possible avec l'autre, sont les perpendiculaires à leur intersection.***

Soient deux plans P et Q se coupant suivant xy (fig. 130). Menons d'un point A du plan P la perpendiculaire AB à xy et une oblique quelconque AC. L'angle droit ABC se projette orthogonalement sur le plan Q suivant l'angle droit A′BC (n° 136). Désignons par α et β, les angles aigus ABA′ et ACA′ :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A'A}{A'B} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{A'A}{A'C}.$$

Ces deux rapports ont le même numérateur A′A et comme A′B < A′C, il en résulte :

$$\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta \Longrightarrow \alpha > \beta.$$

143. Définition. — ***On appelle ligne de pente d'un plan*** P ***par rapport à un plan*** Q ***toute droite du plan*** P ***perpendiculaire à l'intersection des deux plans.***

Il résulte de ce qui précède que tg α, pente de la droite AB par rapport au plan Q, est supérieur à tg β, pente de la droite AC par rapport au même plan Q. Les lignes de pente du plan P sont donc celles qui ont la plus grande pente par rapport au plan Q.

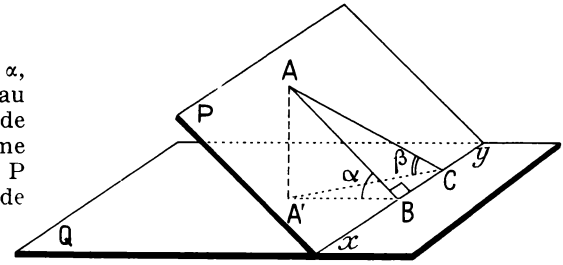


Fig. 130

144. Propriétés.

1° *Toutes les lignes de pente d'un plan sont parallèles et il en passe une et une seule par un point donné de ce plan.*

2° *L'angle d'une ligne de pente du plan* P *avec le plan* Q *est égal à l'angle aigu des deux plans.*

En effet (fig. 130) l'angle ABA′ = α est un rectiligne du dièdre aigu formé par les deux plans P et Q.

3° *Un plan* P *est déterminé par l'une quelconque de ses lignes de pente par rapport à un plan donné* Q.

Le plan Q et la droite AB étant donnés (fig. 130), on connaît la projection A′B de AB sur le plan Q et par suite, dans ce plan, la droite xy perpendiculaire en B à A′B. Le plan P est le plan Axy.

PERPENDICULAIRE COMMUNE A DEUX DROITES

145. Théorème. — ***Étant données deux droites de l'espace non situées dans un même plan, il existe une droite et une seule les coupant toutes deux à angle droit, appelée perpendiculaire commune aux deux droites.***

Étant données deux droites D_1 et D_2 non situées dans un même plan (fig. 131), proposons-nous de construire une droite AB perpendiculaire à D_1 en A et à D_2 en B. Menons par un point quelconque O de D_2 la parallèle D_3 à D_1. Les droites D_2 et D_3 déterminent le plan P passant par D_2 et parallèle à D_1. Toute droite perpendiculaire à D_1 et à D_2, est orthogonale à D_3, donc perpendiculaire au plan P. La droite AB a donc une direction bien déterminée, celle des perpendiculaires Δ au plan P. Le lieu des parallèles à Δ rencontrant D_1 est le plan projetant D_1 sur le plan P. Ce plan coupe D_2 en un point unique B. La parallèle à Δ passant par B coupe D_1 en A. La droite AB est la perpendiculaire commune cherchée. Le problème admet donc une solution unique.

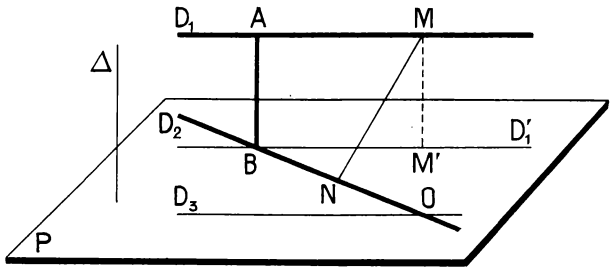


Fig. 131

146. Constructions de la perpendiculaire commune.

1° On peut dans la construction précédente commencer par déterminer le point A, intersection de D_1 et du plan parallèle à Δ et contenant D_2, ou bien encore définir AB comme l'intersection des deux plans parallèles à Δ, l'un mené par D_1, l'autre mené par D_2.

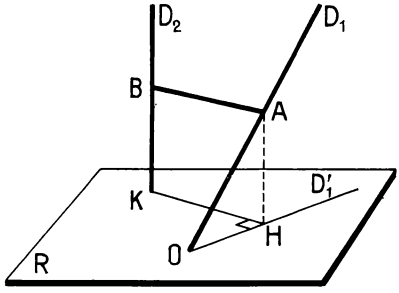


Fig. 132

2° On peut, dans de nombreux cas de figure, utiliser la construction suivante (fig. 132) :

Par un point quelconque O de D_1 menons le plan R perpendiculaire en K à D_2 et soit D'_1 la projection orthogonale de D_1 sur le plan R. L'angle droit OAB qui a le côté AB parallèle au plan R se projette sur ce plan suivant l'angle droit OHK. Le point H est donc la projection de K sur D'_1, ce qui permet de le déterminer puis d'en déduire successivement le point A et le point B.

Notons que si D_1 et D_2 sont orthogonales, D_1 est confondu avec D'_1 et AB avec HK. La droite AB est alors l'intersection des deux plans menés par chacune des deux droites perpendiculairement à l'autre.

147. Théorème. — ***Le segment déterminé par deux droites de l'espace sur leur perpendiculaire commune est le plus court segment joignant un point de l'une à un point de l'autre. Sa longueur est appelée plus courte distance des deux droites.***

Soit M un point quelconque de D_1 (fig. 131), N un point quelconque de D_2 et M′ la projection de M sur le plan P. La droite D_1 étant parallèle à P, on a : AB = MM′ ; or le segment MM′ perpendiculaire à P est plus court que l'oblique MN. Donc AB < MN.

Remarquons que la distance AB est la distance de D_1 au plan P ou la distance des deux plans parallèles contenant l'un D_1, l'autre D_2.

148. Cas de deux droites coplanaires.

1° Si les droites D_1 et D_2 sont concourantes, la construction du n° 145 montre que A et B sont confondus au point O commun à ces deux droites. La perpendiculaire commune existe, c'est la droite Δ perpendiculaire en O au plan de D_1 et D_2 mais la plus courte distance est nulle (fig. 133).

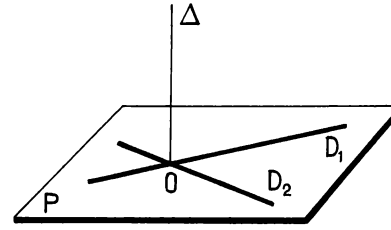


Fig. 133

2° Si D_1 et D_2 sont parallèles on sait qu'il existe, dans le plan P contenant ces deux droites, une infinité de perpendiculaires communes à ces deux droites. La longueur du segment AB découpé sur l'une quelconque d'entre elles est la distance des deux droites D_1 et D_2.

PROJECTION ORTHOGONALE D'UNE SURFACE PLANE

149. Théorème. — ***L'aire de la projection orthogonale sur un plan d'un polygone plan est égale au produit de l'aire de ce polygone par le cosinus de l'angle aigu que fait le plan du polygone avec le plan de projection.***

1er cas : Triangle ayant un côté parallèle au plan de projection. — Soit ABC un triangle dont le côté BC est parallèle au plan de projection. Les projections d'une figure donnée sur deux plans parallèles étant égales (n° 135), on peut remplacer le plan de projection par le plan parallèle P contenant BC, ce qui ne modifie pas l'angle aigu α du plan ABC et du plan de projection. Soit A'BC, la projection orthogonale du triangle ABC sur le plan P (fig. 134), et AH la hauteur issue de A. L'angle

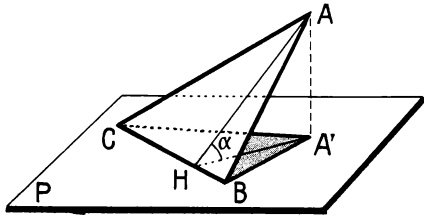


Fig. 134

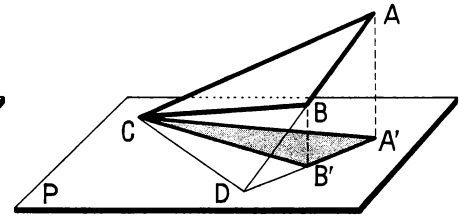


Fig. 135

droit AHB se projette suivant l'angle droit A'HB. Par suite, A'H est la hauteur du triangle A'BC et l'angle AHA' est un rectiligne de l'angle dièdre du plan ABC et du plan P. Donc : $A'H = AH \cos \alpha$.

En désignant par S et S' les aires des triangles ABC et A'BC, il vient :

$$S' = \frac{1}{2} BC \cdot A'H = \frac{1}{2} BC \cdot AH \cos \alpha = S \cos \alpha.$$

2e cas : Triangle quelconque. — Si aucun des côtés du triangle n'est parallèle au plan de projection, on peut remplacer ce plan par un plan parallèle P passant par un sommet C et coupant le prolongement du côté opposé AB en D (fig. 135). On peut alors écrire :

$$\text{aire } A'DC = \text{aire } ADC \times \cos \alpha,$$
$$\text{aire } B'DC = \text{aire } BDC \times \cos \alpha,$$

et par différence :

$$\text{aire } A'DC - \text{aire } B'DC = (\text{aire } ADC - \text{aire } BDC) \times \cos \alpha.$$

Soit : $S' = S \cos \alpha$.

3e cas : Polygone quelconque. — Soit un polygone convexe ABCDE d'aire S et sa projection A'B'C'D'E' d'aire S' sur le plan P (fig. 136). On peut toujours décomposer ce polygone ABCDE en triangles d'aires respectives S_1, S_2, S_3. Soient S'_1, S'_2, S'_3 les aires de leurs projections. On peut écrire :

$$S'_1 = S_1 \cos \alpha$$
$$S'_2 = S_2 \cos \alpha$$
$$S'_3 = S_3 \cos \alpha.$$

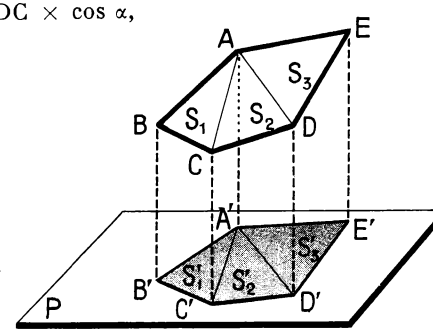


Fig. 136

Soit par addition :

$$S'_1 + S'_2 + S'_3 = (S_1 + S_2 + S_3) \cos \alpha,$$

et finalement :

$$\boxed{S' = S \cos \alpha.}$$

150. Remarques. — 1° La formule précédente s'applique en particulier si le plan de la surface est parallèle au plan de projection ; on a dans ce cas :

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad S' = S.$$

2° L'aire Σ de la portion de plan limitée par une courbe plane C peut être considérée comme la limite de l'aire S d'un polygone inscrit P lorsque le nombre des côtés de ce polygone tend vers l'infini, le plus grand de ces côtés tendant vers zéro.

L'aire Σ' limitée par la courbe C', projection orthogonale de la courbe C sur un plan π, est donc la limite de l'aire S' du polygone P', projection du polygone P sur le plan π. En désignant par α l'angle aigu du plan de la courbe et du plan de projection, on a encore :

$$\Sigma' = \Sigma \cos \alpha.$$

EXERCICES

196. On considère un point fixe A se projetant orthogonalement en B sur une droite fixe xy et en M sur un plan variable P qui tourne autour de xy.

1° Montrer que la droite AM engendre un plan Q.

2° Lieu géométrique du point M dans ce plan ?

197. Soit O la projection orthogonale du point donné A sur le plan fixe P. Une droite variable Δ du plan P tourne autour du point donné B de ce plan.

1° Déterminer le lieu géométrique de la projection orthogonale M du point A sur Δ. Démontrer que les plans AOM et ABM sont perpendiculaires.

2° Le point O se projette orthogonalement en C sur AB et en N sur AM. Trouver le lieu géométrique de la droite CN, puis celui du point N. Établir que le produit $\overline{AM} \cdot \overline{AN}$ est constant.

198. Une droite D se projette orthogonalement suivant la droite D' sur le plan P. Soit A un point quelconque du plan P.

1° Démontrer que dans le plan P, la seule droite passant par A et orthogonale à D, est la perpendiculaire AK à la droite D'.

2° Montrer que la projection de A sur D est le pied H de la perpendiculaire menée de K à D.

199. Les côtés d'un angle droit xAy coupent respectivement le plan P en B et C. Le sommet A se projette orthogonalement en A' sur le plan P. Soit O le milieu de BC :

1° Démontrer que : $OA' < \frac{1}{2}$ BC et $\overline{BC}^2 = \overline{A'B}^2 + \overline{A'C}^2 + \overline{2AA'}^2$. En déduire que l'angle BA'C est un angle obtus.

2° Si les deux côtés d'un angle droit coupent le plan de projection la projection orthogonale de cet angle ne peut être un angle droit.

200. 1° Démontrer le théorème suivant :

Tout plan qui coupe un dièdre droit suivant un angle droit est perpendiculaire à l'une au moins des faces de ce dièdre.

2° En déduire le lieu de l'arête Δ d'un dièdre droit dont les faces contiennent respectivement les côtés d'un angle droit AOB.

201. Dans un tétraèdre ABCD, les faces ABC et ABD sont équivalentes et il en est de même des faces ACD et BCD.

1° Démontrer que les bissecteurs extérieurs des dièdres d'arêtes AB et CD sont parallèles.

2° La droite IJ commune aux bissecteurs intérieurs des dièdres précédents est médiatrice de AB et de CD, et elle constitue un axe de symétrie du tétraèdre.

3° En déduire : AC = BD, AD = BC, l'égalité des faces ABC et BAD puis des faces ACD et BDC.

202. 1° Démontrer que si quatre plans P, Q, R, S issus d'une même droite xy découpent une division harmonique (ABCD) sur une sécante Δ, ils découpent une division harmonique sur toute autre sécante.

2° Les plans P, Q, R, S constituent un faisceau harmonique de plans. Montrer que si les plans conjugués R et S sont rectangulaires, ce sont les bissecteurs des dièdres formés par P et Q.

203. 1° Montrer que trois plans concourants ou trois droites passant par un même point déterminent huit trièdres deux à deux opposés par le sommet.

2° Étudier ce que représentent les bissecteurs intérieurs des dièdres de l'un (ou les bissectrices intérieures des faces de l'un) par rapport à l'un des dièdres (ou l'une des faces) des autres trièdres.

204. 1° Trouver le lieu des points intérieurs équidistants des trois faces d'un trièdre.
En déduire que les bissecteurs intérieurs d'un trièdre passent par une même droite.

2° Trouver le lieu des points intérieurs équidistants des arêtes d'un trièdre.
En déduire que les plans menés perpendiculairement à chacune des faces d'un trièdre suivant sa bissectrice intérieure passent par une même droite également inclinée sur les arêtes du trièdre.

205. On porte sur les arêtes d'un trièdre de sommet S des longueurs égales SA, SB et SC. Soient M, N et P les milieux de BC, CA et AB.

1° Montrer que les trois plans SAM, SBN et SCP passent par une même droite.

2° En déduire une propriété des plans menés par chaque arête d'un trièdre et la bissectrice intérieure de la face opposée.

3° Démontrer que les trois bissectrices extérieures des faces du trièdre sont dans un même plan.

206. On considère un trièdre $Sxyz$, et on prend un point quelconque A de l'arête Sx et les points B et C sur Sy et Sz tels que AB et AC soient respectivement orthogonaux à Sz et Sy.

1° Montrer que la projection H du sommet S sur le plan ABC est l'orthocentre du triangle ABC.

2° En déduire que dans un trièdre, les trois plans menés par chaque arête perpendiculairement à la face opposée passent par une même droite.

3° Démontrer que les droites menées par le sommet S dans chacune des faces perpendiculairement à l'arête opposée sont dans un même plan.

207. 1° Lorsqu'un trièdre isocèle SABC a pour faces égales ASB et ASC, le bissecteur intérieur du dièdre SA est perpendiculaire à la face BSC (plan hauteur) et coupe cette face suivant sa bissectrice intérieure (plan médian).

2° Montrer que lorsque dans un trièdre un plan hauteur est en même temps bissecteur intérieur ou plan médian, ce trièdre est isocèle.

3° Pour qu'un trièdre soit isocèle il faut et il suffit qu'une de ses arêtes soit perpendiculaire à la bissectrice extérieure de la face opposée.

4° Pour qu'un plan fasse des angles dièdres égaux avec deux plans donnés il faut et il suffit qu'il soit perpendiculaire à l'un de leurs bissecteurs.

208. 1° Démontrer que si dans un trièdre SABC les faces ASB et ASC sont supplémentaires il en est de même des dièdres SB et SC et réciproquement.

2° Montrer que dans ce cas l'arête SA est perpendiculaire à la bissectrice intérieure SM de la face BSC, que le bissecteur intérieur du dièdre SA passe par SM et que le bissecteur extérieur est perpendiculaire au plan BSC.

209. Dans un trièdre SABC la droite BC coupe en M et M′ les bissectrices intérieure et extérieure de la face BSC.

1° Lorsque le bissecteur intérieur du dièdre SA contient SM, le bissecteur extérieur contient SM′ et réciproquement.

2° En déduire que, dans ce cas, la face BSC est perpendiculaire à l'un des bissecteurs (cf. ex. n° 200) et que l'arête SA est perpendiculaire à l'une des bissectrices SM ou SM′.

3° Soit SC′ le prolongement de SC. Démontrer que l'un des trièdres SABC ou SABC′ est alors isocèle, l'autre ayant deux faces supplémentaires et deux dièdres supplémentaires.

210. Soit un angle trièdre dont les trois faces sont égales à 60°. Sur chacune des arêtes on porte les longueurs SA $= l$, SB $= x$, SC $= y$.

1° Calculer en fonction de x et y le côté BC commun aux triangles ABC et SCB.

2° Établir la relation qui doit exister entre x, y et l pour que le triangle ABC soit rectangle en A.

3° Dans l'hypothèse qui vient d'être faite, calculer x et y pour que BC $= 4l$. (Il sera commode de calculer d'abord $x + y$ et xy.) Déterminer ensuite en fonction de l seulement la somme des aires des trois triangles SAB, SAC et SBC.

211. Un tétraèdre OABC a ses arêtes OA, OB, OC égales à a : les angles AOB et AOC valent 60°, l'angle BOC vaut 90°.

1° Évaluer les autres arêtes en fonction de a et montrer que le triangle ABC est rectangle.

2° Montrer que les arêtes opposées OA et BC sont orthogonales et que la droite qui joint leurs milieux I et J leur est perpendiculaire. Montrer que le tétraèdre possède deux plans de symétrie et un axe de symétrie.

3° Montrer que le dièdre d'arête BC est droit. Évaluer en fonction de a la longueur IJ.

212. On donne dans l'espace une droite X′AX. Par A, on mène le plan perpendiculaire à cette droite et, dans ce plan, on prend une droite Y′BY, B étant le pied de la perpendiculaire à Y′BY menée par A. On désigne la longueur AB par $2a$. On prend sur AX une longueur AC $= x$ et sur BY une longueur BD $= y$.

1° Quelles faces du tétraèdre ABCD sont des triangles rectangles ? Calculer la longueur de l'arête CD. En déduire la relation qui doit lier x et y pour que CD $= x + y$.

2° La condition étant toujours satisfaite, calculer la somme S des carrés des aires des faces du tétraèdre. Montrer que S peut s'exprimer uniquement en fonction de a et de $z = x + y$. En déduire les valeurs de x et de y qui donnent à S la plus petite valeur possible.

213. Étant données deux droites parallèles D et E, une perpendiculaire à ces deux droites coupe D en I et E en H. Soit IZ une demi-droite perpendiculaire à D en I telle que $\widehat{HIZ} = 45°$. D'un point M de E on abaisse la perpendiculaire sur IZ.

1° Montrer que le pied K de cette perpendiculaire ne dépend pas de la position de M sur E. En posant IH = d, calculer IK en fonction de d.

2° Soit P le plan perpendiculaire à IH en I. Lieu du point N d'intersection de P et de MK quand M décrit E. Montrer que K est le milieu de MN.

3° Soient A et B deux points de D symétriques par rapport à I tels que : IA = IB = l. Montrer qu'il existe sur la droite IK un point O équidistant des points M, N, A et B.

214. On considère une droite Ox faisant un angle aigu α avec un plan P passant par O. Une droite variable Oy de ce plan tourne autour de O et fait avec la projection de Ox un angle aigu θ. Étudier comment varient en fonction de θ :

1° L'angle xOy. 2° L'angle β du plan xOy avec le plan P.

215. On se donne deux plans P et Q et un point O de leur intersection.

1° Montrer que si une droite OM fait des angles égaux avec les plans P et Q, le point M est équidistant des deux plans P et Q. Réciproque.

2° Lieu des droites issues d'un point A et coupant les plans P et Q sous des angles égaux.

3° Construire les droites passant par A et coupant trois plans donnés sous des angles égaux.

216. Soient trois droites concourantes Ox, Oy et Oz.

1° Montrer que tout plan P faisant des angles égaux avec Ox et Oy coupe ces deux droites en deux points A et B tels que OA = OB et est parallèle à une des bissectrices de l'angle des deux droites. Réciproque ?

2° Construire les plans issus d'un point I donné et faisant des angles égaux avec les trois droites Ox, Oy et Oz. Que peut-on dire des bissectrices extérieures des trois angles xOy, yOz et zOx ?

217. On considère un plan P et deux points donnés A et B se projetant en A′ et B′ sur le plan P. On pose AA′ = a, BB′ = b et A′B′ = d. Un point M variable se déplace dans le plan P de façon que MA et MB fassent des angles égaux avec le plan P. Montrer que le lieu géométrique de M est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

218. Étant donné un plan fixe P, un point extérieur A et un angle aigu α :

1° Trouver le lieu des pieds M des obliques issues de A faisant avec le plan P l'angle α. Caractériser par rapport à ce lieu les intersections Δ du plan P et des plans R issus de A et faisant avec le plan P l'angle α.

2° Construire les droites AM situées dans un plan donné Q issu de A. Discuter.

3° Construire les plans R contenant une droite donnée D issue de A. Discuter.

219. Soit (P, Q) un dièdre aigu. Un triangle ABC de la face P se projette en A′B′C′ sur la face Q. Le triangle A′B′C′ se projette lui-même en A″B″C″ sur la face P. Montrer que l'aire S′ du triangle A′B′C′ est moyenne proportionnelle entre les aires S et S″ des triangles ABC et A″B″C″.

220. Sur deux demi-droites Ax et By admettant AB pour perpendiculaire commune, on porte des segments égaux AM et BN variables.

1° Montrer que MN reste parallèle à un plan fixe et forme avec Ax et By des angles égaux.

2° Montrer que le milieu I de MN décrit une droite perpendiculaire commune à AB et à MN.

3° Trouver le lieu géométrique de l'intersection Δ des plans P et Q respectivement perpendiculaires à Ax et By en M et N.

221. Soient deux droites orthogonales D et D′. On prend un point fixe A sur la droite D et deux points B et C variables sur la droite D′ tels que les plans issus de D et passant respectivement par B et C soient rectangulaires. Soient A′, B′ et C′ les pieds des hauteurs AA′, BB′, et CC′ du triangle ABC.

1° Montrer que $\overline{A'B} \cdot \overline{A'C}$ est constant et que l'orthocentre H du triangle ABC est fixe.

2° Trouver le lieu des points B′ et C′ et celui du centre O du cercle ABC.

3° Démontrer que l'expression $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$ est constante.

222. On considère deux droites orthogonales $x'x$ et $y'y$ admettant le segment AB = a pour perpendiculaire commune. Un point C se déplace sur $x'x$ et un point D sur $y'y$ de façon que le segment CD ait une longueur constante d.

1° Montrer que les sommes $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$ et $\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2$ sont constantes et que l'angle de AB et CD est constant. Trouver le lieu du milieu M de CD.

2° Construire la perpendiculaire commune IJ à AB et à CD et montrer que sa longueur est proportionnelle au produit $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$.

223. Dans deux plans perpendiculaires P et Q on considère deux triangles isocèles ACD et BCD ayant même base CD = $2x$. Les autres côtés ont pour longueur a. Soient M le milieu de AB et N le milieu de CD.

1° Démontrer que MN est perpendiculaire à la fois à AB et à CD.

2° Calculer en fonction de a et x les longueurs AB et MN.

3° Pour quelle valeur de x le dièdre d'arête AB est-il droit ? Calculer dans ce cas la longueur AB et préciser la position du point O équidistant des quatre points A, B, C, D. Calculer la longueur OA.

224. Soit un tétraèdre ABCD dans lequel les faces ACD et BCD sont des triangles isocèles égaux de base CD = a et de hauteurs relatives à la base égales à la base. L'arête AB est égale à CD.

1° Montrer que les arêtes AB et CD sont orthogonales et que, I et J étant les milieux de AB et de CD, IJ est la perpendiculaire commune à AB et à CD.

2° Montrer que le sommet A se projette orthogonalement sur la face opposée en un point H de la hauteur issue de B du triangle BCD. Déterminer AH en fonction de a.

3° Par un point H′ de AH situé à la distance x de A on mène un plan parallèle à BCD qui coupe le tétraèdre suivant le triangle B′C′D′. Exprimer en fonction de x l'aire y du triangle B′C′D′. Variations de cette aire quand x varie de 0 à AH. Graphe.

225. On considère un tétraèdre ABCD et l'on désigne par H l'orthocentre du triangle BCD.

1° Montrer que, si deux couples d'arêtes opposées — par exemple AB et CD, AC et BD — sont orthogonales, A se projette orthogonalement sur le plan du triangle BCD au point H. En déduire que AD et BC sont orthogonales.

2° Montrer que, lorsque le tétraèdre possède la propriété considérée, ses quatre hauteurs sont concourantes.

3° Montrer que, si les arêtes AB et CD sont orthogonales et si les pieds de leur perpendiculaire commune se trouvent au milieu de AB et au milieu de CD, les quatre arêtes AC, AD, BC, BD sont égales.

4° Réciproquement, montrer que si les quatre arêtes AC, AD, BC, BD sont égales, les arêtes AB et CD sont orthogonales et les pieds de leur perpendiculaire commune se trouvent aux milieux de AB et CD.

226. On considère un triangle équilatéral ABC, de côté a, et les demi-droites BU et CV perpendiculaires en B et C à son plan et situées d'un même côté de ce plan. M et N étant deux points pris sur BU et CV respectivement, on pose BM = u et CN = v.

1° Montrer que si P est le milieu de MN on a PM < PB < PA. En déduire que le triangle AMN ne peut être rectangle qu'en M ou N.

Trouver la relation qui doit exister entre u et v pour que le triangle AMN soit rectangle en M.

2° Montrer que, lorsque M et N varient de façon que l'on ait constamment CN = 2 BM, le plan AMN coupe le plan du triangle ABC suivant une droite fixe. Quelle est la perpendiculaire commune à cette droite fixe et à la droite CV ?

3° Déterminer M et N de façon que, CN étant égal à 2 BM, le triangle AMN soit rectangle en M. En supposant qu'il en soit ainsi, montrer que, si I est le milieu de BC, le triangle IAM est isocèle.

227. On considère deux droites D et D′ non situées dans un même plan.

1° A et B étant deux points de D, et A′ et B′ deux points de D′, montrer que les plans médiateurs de AA′ et BB′ se coupent nécessairement. On appellera Δ leur intersection.

2° On suppose maintenant que A′B′ = AB.

a) Montrer que tout point de Δ est équidistant des droites D et D′.

b) En déduire que, si l'on appelle H et K les points de rencontre de Δ et D avec la perpendiculaire commune à ces deux droites, et H′ et K′ les points de rencontre de Δ et D′ avec la perpendiculaire commune à Δ et D′, les points H et H′ sont confondus et l'on a HK = HK′ et A′K′ = AK.

c) Montrer que les projections orthogonales des segments AK et A′K′ sur un plan perpendiculaire à Δ sont égales. (On dessinera la projection de la figure sur ce plan.)

En déduire que Δ fait des angles égaux avec D et D′.

ÉLÉMENTS ORIENTÉS DANS L'ESPACE

151. Orientation de l'espace. — Un demi-plan R issu d'un axe $z'z$ peut tourner autour de cet axe dans deux sens différents. Afin de distinguer ces deux sens, construisons (fig. 137) les perpendiculaires Ox et Oy en un point O de $z'z$ de manière à former un trièdre trirectangle $Oxyz$ de sens direct ; cela signifie qu'un observateur placé le long de l'axe $z'z$ de façon que le sens $z'z$ soit celui des pieds à la tête de cet observateur voit le demi-axe Ox à sa droite et le demi-axe Oy à sa gauche. Désignons par P et Q les demi-plans issus de $z'z$ et contenant respectivement les demi-axes Ox et Oy :

On appelle sens direct de rotation autour de l'axe $\overrightarrow{z'z}$, le sens dans lequel il faut faire tourner d'un dièdre droit autour de $z'z$ le demi-plan* P *pour l'amener sur le demi-plan* Q. *Le sens opposé est le sens rétrograde.

Le sens direct de rotation ainsi défini autour de l'axe $z'z$ est indépendant du point O ainsi que de la direction initiale Ox.

On définit de même le sens direct de rotation autour d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$. On dit que l'*espace est orienté*.

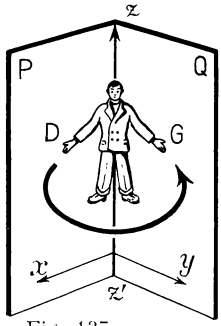


Fig. 137

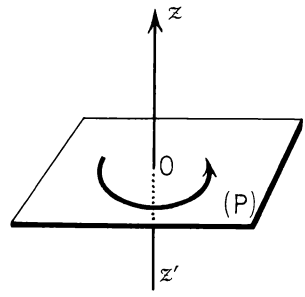


Fig. 138

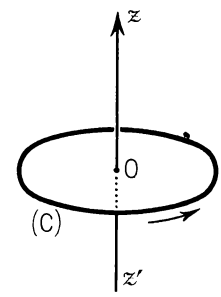


Fig. 139

152. Plan orienté dans l'espace. — Au sens direct de rotation autour d'un axe $z'z$ correspond un sens de rotation dans tout plan P perpendiculaire en O à cet axe (fig. 138). Pour un observateur placé dans le demi-espace contenant la demi-droite Oz, ce sens est le sens direct tel qu'il a été défini au n° 151. Si on change le sens de l'axe, le sens direct de rotation dans le plan P change également.

Pour orienter un plan dans l'espace il suffit d'orienter une perpendiculaire à ce plan. Le sens direct dans le plan est le sens direct autour de l'axe obtenu.

En particulier tout cercle de l'espace est orienté lorsque l'axe de ce cercle est lui-même orienté (fig. 139).

153. Dièdre orienté. — Un demi-plan R issu de l'axe $z'z$ engendre en tournant dans un sens déterminé autour de $z'z$ un dièdre orienté (P, Q). La mesure algébrique,

autour de $z'z$, du dièdre orienté (P, Q) s'obtient en affectant la mesure arithmétique du dièdre balayé par le demi-plan R, du signe + ou du signe —, suivant que le demi-plan R a tourné dans le sens direct ou dans le sens rétrograde autour de l'axe $z'z$.

Inversement deux demi-plans P et Q issus de l'axe $z'z$ définissent (fig. 140) une infinité de dièdres orientés (P, Q). En effet, un demi-plan R initialement confondu avec P, tournant dans un sens donné, peut venir s'appliquer sur le demi-plan Q et y revenir après avoir décrit un nombre entier quelconque de tours supplémentaires.

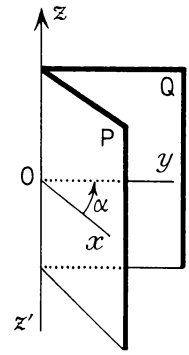


Fig. 140

154. Définition. — ***On appelle angle orienté de deux demi-plans*** P ***et*** Q ***issus d'un même axe*** $z'z$ ***l'un quelconque des dièdres dont il faut faire tourner, dans un sens donné, la face origine*** P ***pour l'amener sur la face extrémité*** Q.

Soit α la mesure algébrique autour de l'axe $z'z$ de l'un de ces dièdres.

On démontre, comme cela a été fait pour les angles orientés dans le plan (n° 35) que les différentes mesures algébriques de l'angle des demi-plans P et Q sont données par la formule :

$$(P,\ z'z,\ Q) = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad (P,\ Q) = \alpha + 2k\pi.$$

Soit xOy le rectiligne du dièdre (P, Q). Les différentes mesures algébriques ainsi obtenues sont celles de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ dans le plan xOy orienté par l'axe $z'z$. *La détermination principale de l'angle des demi-plans* P *et* Q *est la mesure algébrique autour de* $z'z$ *du dièdre orienté saillant* (P, $z'z$, Q).

Cette détermination est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$. Elle est positive ou négative suivant que le sens du dièdre orienté saillant (P, Q) est le sens positif ou le sens négatif autour de $z'z$.

155. Angle de deux vecteurs dans l'espace. — Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ de l'espace (fig. 141) et par un point quelconque O menons les demi-droites $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$ respectivement parallèles à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ et de même sens. L'angle xOy obtenu est indépendant du point O et se conserve quand on remplace l'un des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{CD}$ par un vecteur parallèle et de même sens.

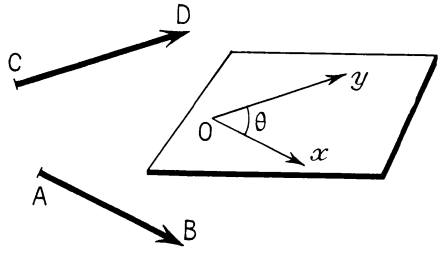


Fig. 141

1° Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont parallèles à un plan P préalablement orienté (ou orthogonaux à un axe $z'z$), on peut prendre pour mesure algébrique de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ l'une des mesures algébriques de l'angle (Ox, Oy) dans le plan P (ou autour de $z'z$).

2° Dans le cas contraire on envisage seulement pour l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ la mesure arithmétique θ de l'angle saillant xOy car il n'y a aucune raison d'orienter le plan xOy dans un sens plutôt que dans l'autre. Donc :

Sauf indication contraire le symbole $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ ***dans l'espace désigne la mesure arithmétique*** θ, ***comprise entre*** 0 ***et*** π, ***de l'angle saillant*** xOy ***formé par deux demi-droites*** Ox ***et*** Oy ***de même direction et de même sens que les vecteurs*** $\overrightarrow{AB}$ ***et*** $\overrightarrow{CD}$.

On définit de même l'angle (Δ_1, Δ_2) de deux axes de l'espace. Cet angle est celui de leurs vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Soit : $(\overrightarrow{\Delta_1}, \overrightarrow{\Delta_2}) = (\vec{i}, \vec{j})$.

156. Théorème. — ***La mesure algébrique de la projection*** $\overrightarrow{A'B'}$ ***sur un axe*** $x'x$ ***d'un vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ ***porté par l'axe*** $y'y$ ***est égale au produit de la mesure algébrique du vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ ***par le cosinus de l'angle des deux axes*** $x'x$ ***et*** $y'y$.

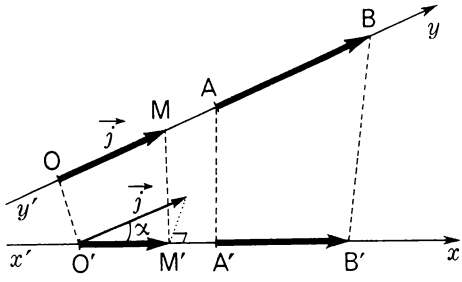


Fig. 142

Rappelons en effet que le cosinus de l'angle $(x'x, y'y)$ est égal à la mesure algébrique, sur l'un des axes, de la projection orthogonale du vecteur unitaire $\vec{j}$ de l'autre. Ainsi (fig. 142) :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{j} \Longrightarrow \overline{O'M'} = \cos(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = \cos\theta.$$

Or :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{O'M'}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{OM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OM}} \Longrightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\cos\theta} = \frac{\overline{AB}}{1}.$$

Soit : $\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\theta.$

En supposant l'axe $y'y$ de même sens que le vecteur $\overrightarrow{AB}$, on a par suite :

$$\boxed{\overline{A'B'} = AB \,.\, \cos(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{AB}).}$$

157. Tétraèdre orienté. — Un tétraèdre est orienté lorsque ses sommets sont rangés dans un ordre déterminé. Le sens du tétraèdre orienté ABCD (fig. 143) est par définition celui du dièdre saillant orienté (C, $\overrightarrow{AB}$, D). On voit (n° 153) que le tétraèdre ABCD est de même sens que les tétraèdres ACDB et ADBC, mais de sens contraire aux tétraèdres BACD et ABDC. On en déduit qu'un tétraèdre orienté change de sens lorsqu'on échange deux de ses sommets.

Les tétraèdres orientés ABCD et CDAB étant de même sens, il en est de même des dièdres saillants orientés (C, $\overrightarrow{AB}$, D) et (A, $\overrightarrow{CD}$, B). Suivant que ce sens est le sens direct ou le sens rétrograde on dit que les deux vecteurs non coplanaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de disposition directe ou rétrograde.

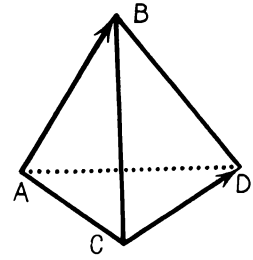


Fig. 143

BARYCENTRE

158. Existence et définition. — Considérons un ensemble de n points de l'espace A_1, A_2 .... A_n (pas nécessairement tous distincts) affectés respectivement des coefficients réels α_1, α_2, .. α_n : système : $A_1(\alpha_1)$, $A_2(\alpha_2)$, ... $A_n(\alpha_n)$.

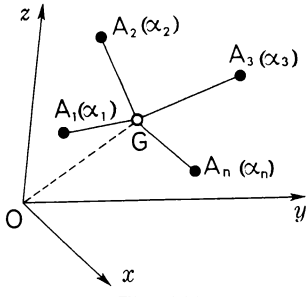


Fig. 144

Proposons-nous de déterminer s'il existe un point G vérifiant la relation :

$$\boxed{\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.} \quad (1)$$

soit en abrégé : $\sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$

Prenons une origine O. La relation (1) équivaut à :

$$\alpha_1(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG}) + ... + \alpha_n(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0}$$

donc à : $\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_n) \overrightarrow{OG}$. (2)

1° Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$, on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}.} \quad (3)$$

Cette relation vectorielle détermine le vecteur $\overrightarrow{OG}$ et par suite le point G d'une façon unique (fig. 144) :

Si la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ ***n'est pas nulle, il existe un point unique*** G, ***appelé barycentre du système*** $A_1(\alpha_1)$, $A_2(\alpha_2)$, $\ldots$ $A_n(\alpha_n)$ ***et défini par la relation :***

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}. \quad (1)$$

La relation (2) étant valable pour tout point O, on peut écrire pour tout point M de l'espace :

$$\boxed{\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \overrightarrow{MG}} \quad (4)$$

On peut d'ailleurs vérifier que : $\Sigma\alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \Sigma\alpha_i (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}) = (\Sigma\alpha_i) \overrightarrow{MG}$ car $\Sigma\alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

2° Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$, la relation (2) s'écrit : $\vec{U} = \vec{0}$, en posant :

$$\vec{U} = \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} \ldots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n}. \quad (5)$$

Si ce vecteur $\vec{U}$ est nul, la relation (1) est vérifiée pour tout point G de l'espace. Sinon, la relation (1) est impossible et il n'y a pas de barycentre.

Pour tout point M de l'espace, on obtient lorsque $\Sigma\alpha_i = 0$:

$$\Sigma\alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \Sigma\alpha_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}) = \Sigma\alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{U} \quad \text{car} \quad (\Sigma\alpha_i) \overrightarrow{MO} = \vec{0}.$$

soit : $$\boxed{\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = \vec{U}.} \quad (6)$$

Si la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ ***est nulle, le système n'admet pas de barycentre déterminé, mais la somme*** $\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}$ ***est égale à un vecteur*** $\vec{U}$ ***indépendant du point*** M.

En prenant le point M en A_1 et en désignant par B_1 le barycentre du système $A_2(\alpha_2)$, $A_3(\alpha_3)$, $\ldots$ $A_n(\alpha_n)$, on obtient :

$$\vec{U} = \alpha_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{A_1A_n} = (\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n) \overrightarrow{A_1B_1}$$

soit puisque $\alpha_2 + \alpha_3 \ldots + \alpha_n = -\alpha_1$: $$\boxed{\vec{U} = \alpha_1 \overrightarrow{B_1A_1}.} \quad (7)$$

159. Propriétés du barycentre. — 1° ***Commutativité :*** En effet, la relation (1) ou (3) est indépendante de l'ordre des points du système.

2° ***Multiplication par un réel.*** — La relation (1) peut s'écrire $\forall k \neq 0$:

$$k\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + k\alpha_2 \overrightarrow{GA_2} \ldots + k\alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Le point G est donc le barycentre du système : $A_1(k\alpha_1)$, $A_2(k\alpha_2) \ldots$ $A_n(k\alpha_n)$. Par contre si $\Sigma\alpha_i = 0$ le vecteur $\vec{U}$ correspondant est multiplié par k.

3° ***Associativité. — Le barycentre*** G ***d'un système ne change pas si on***

remplace deux ou plusieurs points par leur barycentre affecté de la somme de leurs coefficients.

Soit par exemple $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta \neq 0$ et B le barycentre du système $A_1(\alpha_1)$, $A_2(\alpha_2)$, $A_3(\alpha_3)$. D'après la formule (4) (n° 158) on obtient :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{GA}_2 + \alpha_3 \overrightarrow{GA}_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \overrightarrow{GB} = \beta \overrightarrow{GB}.$$

et la relation (1) est alors équivalente à :

$$\beta \overrightarrow{GB} + \alpha_4 \overrightarrow{GA}_4 + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{GA}_n = \vec{0}.$$

Le point G est le barycentre du système $B(\beta)$, $A_4(\alpha_4)$ ... $A_n(\alpha_n)$.

4° ***Projection du barycentre.*** — Soient A′, A'_2, ... A'_n et G′ les projections (sur un plan ou une droite) des points A_1, A_2 ... A_n et de leur barycentre G. La relation (1) : $\Sigma \alpha_i \overrightarrow{GA}_i = \vec{0}$ donne en projection $\Sigma \alpha_i \overrightarrow{G'A'}_i = \vec{0}$.

Le point G′ *projection de* G, *est donc le barycentre du système formé par les projections* $A'_1(\alpha_1)$, $A'_2(\alpha_2)$, ... $A'_n(\alpha_n)$.

Lorsque $\Sigma \alpha_i = 0$, on voit de même que $\vec{U} = \Sigma \alpha_i \overrightarrow{MA}_i$ a pour projection $\vec{U}' = \Sigma \alpha_i \overrightarrow{M'A'}_i$.

160. Coordonnées du barycentre.

Soient x_i, y_i, z_i les coordonnées de A_i dans le repère cartésien $Oxyz$ et x, y, z les coordonnées du point G barycentre de l'ensemble des $A_i(\alpha_i)$.

La relation (3) entraîne :

$$x = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} = \frac{\Sigma \alpha_i x_i}{\Sigma \alpha_i},$$

$$y = \frac{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} = \frac{\Sigma \alpha_i y_i}{\Sigma \alpha_i},$$

$$z = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} = \frac{\Sigma \alpha_i z_i}{\Sigma \alpha_i}.$$

Si les points A_i appartiennent à un plan P, en prenant les axes Ox et Oy dans P on obtient $z = 0$, donc G appartient au plan P.

Si les points A_i appartiennent à une droite D, en prenant D pour axe Oz, on obtient $x = y = 0$, donc G appartient à la droite D.

161. Construction d'un barycentre.

1° ***Barycentre du système*** A (α), B (β). — Le barycentre G de ce système est défini par : $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff \dfrac{\overline{GA}}{\overline{GB}} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$.

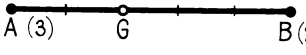


Fig. 145

C'est donc le point de la droite AB qui divise AB dans le rapport $-\dfrac{\beta}{\alpha}$ (fig. 145). Ainsi le barycentre du système A (1), B (1) est le milieu I de AB, le barycentre du système A (α′), A (α″) est le point A lui-même.

2° ***Cas général.*** — En remplaçant deux points du système donné par leur barycentre affecté de la somme de leurs coefficients, on obtient un système avec un point de moins. En répétant cette opération on finit par se ramener au cas de deux points.

— Remarquons qu'il est parfois avantageux d'effectuer l'opération inverse en remplaçant le point A(α′ + α″) par exemple par le système A(α′), A(α″) ou par un système A′(α′), A″(α″) admettant A pour barycentre.

162. Barycentre du système A (α), B (β), C (γ). — Désignons par D ($\beta + \gamma$) le barycentre du système B(β), C(γ). On obtient (fig. 146) :

$$\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} + \gamma\,\overrightarrow{GC} = \alpha\,\overrightarrow{GA} + (\beta + \gamma)\,\overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Le point G est le barycentre du système A(α), D($\beta + \gamma$). Il appartient donc à la droite AD et divise AD dans le rapport $-\dfrac{\beta + \gamma}{\alpha}$. En construisant de même E ($\gamma + \alpha$), barycentre de C(γ) et A(α), puis F ($\alpha + \beta$) barycentre de A(α), B(β) on voit que G *appartient aux trois droites* AD, BE *et* CF, *nécessairement concourantes.*

REMARQUE. — Réciproquement tout point M du plan du triangle ABC peut être considéré comme le barycentre d'un système A (α), B (β), C (γ). Si D désigne l'intersection des droites AM et BC, il suffit pour cela que α, β, γ vérifient les relations :

$$\beta\,\overrightarrow{DB} + \gamma\,\overrightarrow{DC} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \alpha\,\overrightarrow{MA} + (\beta + \gamma)\,\overrightarrow{MD} = \vec{0} \quad \text{c'est-à-dire :}$$

$$\frac{\beta}{\overline{DC}} = \frac{\gamma}{\overline{BD}} = \frac{\beta + \gamma}{\overline{BC}} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{\overline{MD}} = -\frac{(\beta + \gamma)}{\overline{MA}} \iff \frac{\alpha}{\overline{MD} \cdot \overline{BC}} = \frac{\beta}{\overline{MA} \cdot \overline{CD}} = \frac{\gamma}{\overline{MA} \cdot \overline{DB}}.$$

Les 3 *nombres* α, β, γ, *définis à un facteur près, sont appelés coordonnées barycentriques du point* M (α, β, γ) *par rapport au triangle* ABC.

Ces 3 nombres α, β, γ caractérisent le point M et déterminent sa position dans le plan ABC.

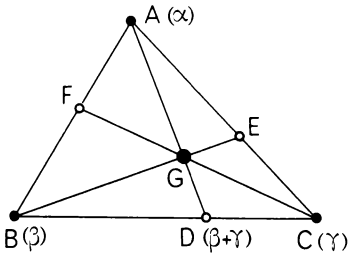


Fig. 146

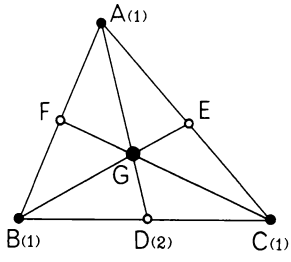


Fig. 147

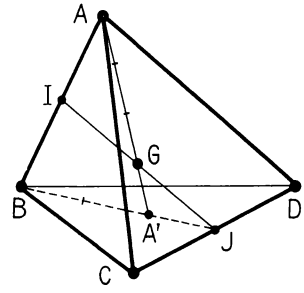


Fig. 148

163. Centre de gravité d'un triangle ABC. — Soit à déterminer le barycentre G du système A(1), B(1), C(1). En désignant par D, E, F les milieux respectifs de BC, CA et AB (fig. 147), G est le barycentre du système A(1), D(2). Le point G appartient à la médiane AD et par analogie aux médianes BE et CF. C'est le point de concours des médianes du triangle ABC. La relation $\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{DA} = 3\,\overrightarrow{DG}$ montre que G est situé au tiers de DA à partir de D ; donc (n° 159) :

Le centre de gravité du triangle ABC ***est défini par la relation vectorielle :***

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

et pour tout point M ***de l'espace :*** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}$.

Dans le plan rapporté au triangle ABC le point G est le point de coordonnées barycentriques (1, 1, 1).

Si G′ désigne le centre de gravité d'un triangle A′B′C′ du plan ABC ou de l'espace, les relations : $3\,\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et $3\,\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$ entraînent par différence : $3\,\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

Pour que deux triangles ABC *et* A′B′C′ *du plan ou de l'espace aient même centre de gravité il faut et il suffit que :* $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Relation qui s'écrit aussi :

$$\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}.$$

164. Centre de gravité du tétraèdre ABCD. — C'est le barycentre G du système A(1), B(1), C(1), D(1). Désignons par I et J les milieux de AB et CD et par A′ le centre de gravité du triangle BCD (fig. 148). Le point G est le barycentre du système I(2), J(2) ainsi que celui du système A(1), A′(3). Donc :

$$2\,\vec{GI} + 2\,\vec{GJ} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{GA} + 3\,\vec{GA'} = \vec{0}.$$

Le point G est donc le milieu de chacun des trois segments tels que IJ joignant les milieux de deux arêtes opposées telles que AB et CD. Il est d'autre part situé sur chacun des segments tels que AA′ joignant un sommet A au centre de gravité de la face opposée BCD, au quart à partir de cette face.

∀ M de l'espace : $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\,\vec{MG}$.

Remarquons que le point G existe même si les 4 points ABCD sont situés dans un même plan ou sur une même droite.

Si G′ est le centre de gravité du tétraèdre A′B′C′D′, on voit, comme pour le triangle que : $4\,\vec{GG'} = \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{DD'}$. Pour que G et G′ soient confondus, il faut et il suffit que : $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{DD'} = \vec{0}$.

165. Transformation de la somme : $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC}$.

1° Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, désignons par G le barycentre de l'ensemble A(α), B(β) et C(γ). La relation (4) du n° 158 donne :

$$\boxed{\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\,\vec{MG}}$$

Elle permet de remplacer par un seul vecteur une somme de trois vecteurs.

2° Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, le vecteur $\vec{V} = \alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC}$ est indépendant du point M (n° 158). En particulier : $\vec{V} = \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC}$.

166. Transformation de la somme : $\alpha\overline{MA}^2 + \beta\overline{MB}^2 + \gamma\overline{MC}^2$.

1° Supposons d'abord $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et soit G le barycentre (n° 159) du système : A (α), B (β), C (γ). On peut écrire :

$$\alpha\overline{MA}^2 + \beta\overline{MB}^2 + \gamma\overline{MC}^2 = \alpha(\vec{MG} + \vec{GA})^2 + \beta(\vec{MG} + \vec{GB})^2 + \gamma(\vec{MG} + \vec{GC})^2.$$

Compte tenu de la relation : $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = \vec{0}$, qui entraîne :
$2\alpha\,\vec{MG}\cdot\vec{GA} + 2\beta\,\vec{MG}\cdot\vec{GB} + 2\gamma\,\vec{MG}\cdot\vec{GC} = 0$, on obtient la *relation de Leibniz:*

$$\alpha\overline{MA}^2 + \beta\overline{MB}^2 + \gamma\overline{MC}^2 = (\alpha + \beta + \gamma)\,\overline{MG}^2 + \alpha\overline{GA}^2 + \beta\overline{GB}^2 + \gamma\overline{GC}^2 \qquad (1)$$

Il suffit de retenir que :

$$\boxed{\alpha\overline{MA}^2 + \beta\overline{MB}^2 + \gamma\overline{MC}^2 = (\alpha + \beta + \gamma)\,\overline{MG}^2 + h} \qquad (2)$$

La constante *h* est indépendante de M et, en plaçant M en G, on retrouve sa valeur :

$$h = \alpha\overline{GA}^2 + \beta\overline{GB}^2 + \gamma\overline{GC}^2. \qquad (3)$$

On obtient la valeur de *h* en fonction des données en plaçant M successivement en A, B et C et en combinant linéairement les relations obtenues :

$$\begin{array}{c|rcrcrcl}
\alpha & 0 & + & \beta\overline{AB}^2 & + & \gamma\overline{AC}^2 & = (\alpha+\beta+\gamma)\,\overline{GA}^2 & + h \\
\beta & \alpha\overline{BA}^2 & + & 0 & + & \gamma\overline{BC}^2 & = (\alpha+\beta+\gamma)\,\overline{GB}^2 & + h \\
\gamma & \alpha\overline{CA}^2 & + & \beta\overline{CB}^2 & + & 0 & = (\alpha+\beta+\gamma)\,\overline{GC}^2 & + h \\
\hline
 & 2(\alpha\beta\overline{AB}^2 & + & \beta\gamma\overline{BC}^2 & + & \gamma\alpha\overline{CA}^2) & = (\alpha+\beta+\gamma)h & + h(\alpha+\beta+\gamma)
\end{array} \qquad (4)$$

Soit : $$\boxed{h = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}(\alpha\beta\,\overline{AB}^2 + \beta\gamma\,\overline{BC}^2 + \gamma\alpha\,\overline{CA}^2)} \qquad (5)$$

Cette valeur permet alors de calculer $\overline{GA}^2$, $\overline{GB}^2$, $\overline{GC}^2$ par les formules (4). On obtient finalement la formule générale (valable quel que soit le nombre de points) :

$$\Sigma\,\alpha\,\overline{MA}^2 = (\Sigma\alpha)\,\overline{MG}^2 + \frac{1}{\Sigma\,\alpha}\Sigma\,\alpha\beta\,\overline{AB}^2 \qquad (6)$$

2° Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, la somme $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ est un vecteur $\vec{U}$, indépendant du point M (n° 158). Avec une origine donnée O on peut écrire :

$$\alpha\,\overline{MA}^2 + \beta\,\overline{MB}^2 + \gamma\,\overline{MC}^2 = \alpha(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + \beta(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + \gamma(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2.$$

Compte tenu des relations : $(\alpha + \beta + \gamma)\,\overrightarrow{MO}^2 = \vec{0}$ et

$$2\alpha\,\overrightarrow{MO}\,.\,\overrightarrow{OA} + 2\beta\,\overrightarrow{MO}\,.\,\overrightarrow{OB} + 2\gamma\,\overrightarrow{MO}\,.\,\overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{MO}\,.\,(\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}) = 2\,\overrightarrow{MO}\,.\,\vec{U}$$

On obtient la relation :

$$\boxed{\alpha\,\overline{MA}^2 + \beta\,\overline{MB}^2 + \gamma\,\overline{MC}^2 = -\,2\,\vec{U}\,.\,\overrightarrow{OM} + h} \qquad (7)$$

avec $$h = \alpha\,\overline{OA}^2 + \beta\,\overline{OB}^2 + \gamma\,\overline{OC}^2. \qquad (8)$$

La constante h est indépendante du point M, mais dépend de l'origine O. En prenant cette origine en A, on obtient :

$$\vec{U} = \beta\,\overrightarrow{AB} + \gamma\,\overrightarrow{AC} \qquad \text{et} \qquad h = \beta\,\overline{AB}^2 + \gamma\,\overline{AC}^2. \qquad (9)$$

REMARQUE. — Si D désigne le barycentre du système B(β), C(γ) on peut écrire :

$$\beta\,\overline{MB}^2 + \gamma\,\overline{MC}^2 = -\,\alpha\,\overline{MD}^2 + h \qquad \text{avec} \qquad h = \beta\,\overline{DB}^2 + \gamma\,\overline{DC}^2 = -\,\frac{\beta\gamma}{\alpha}\,\overline{BC}^2.$$

En prenant O au milieu de AD, on obtient :

$$\alpha\,\overline{MA}^2 + \beta\,\overline{MB}^2 + \gamma\,\overline{MC}^2 = \alpha\,(\overline{MA}^2 - \overline{MD}^2) + h = 2\,\alpha\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{OM} + h \qquad (10)$$

formule en accord avec la formule 7 car $\vec{U} = \alpha\overrightarrow{DA}$ (n° 159).

167. Lieux géométriques : $\alpha\,MA^2 + \beta\,MB^2 + \gamma\,MC^2 = k$.

1° Pour $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, cette relation équivaut (formule 2) à :

$$(\alpha + \beta + \gamma)\,MG^2 + h = k \iff GM^2 = \frac{k - h}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Donc si $k - h$ et $\alpha + \beta + \gamma$ sont de même signe :

Pour $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, ***le lieu géométrique des points*** M ***tels que :*** $\alpha\,\overline{MA}^2 + \beta\,\overline{MB}^2 + \gamma\,\overline{MC}^2 = k$ ***est un cercle dans le plan (une sphère dans l'espace) dont le centre est le barycentre du système*** A(α), B(β), C(γ).

Lorsque ce lieu existe, son rayon est $\rho = \sqrt{\dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{k - h}}$.

On peut ainsi retrouver le lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes A et B, est égal au nombre k car si $\overrightarrow{\omega A} - k^2\overrightarrow{\omega B} = 0$, on obtient :

$$\frac{MA}{MB} = k \iff \overline{MA}^2 - k^2\,\overline{MB}^2 = 0 \iff (1 - k^2)\,\overline{M\omega}^2 - \frac{k^2}{1 - k^2}\,AB^2 = 0.$$

Le lieu est donc un cercle centré en ω et de rayon $\rho = \dfrac{k}{1 - k^2}\,AB$ (n° 24).

2° Pour $\alpha + \beta + \gamma = 0$, la relation donnée équivaut (formule 7) à :

$$-\,2\,\vec{U}\,.\,\overrightarrow{OM} + h = k \iff 2\,\vec{U}\,.\,\overrightarrow{OM} = h - k.$$

La projection H du point M sur le support de $\overrightarrow{OP} = 2\vec{U}$ est un point fixe :

Pour $\alpha + \beta + \gamma = 0$, ***le lieu géométrique des points*** M ***tels que :*** $\alpha\overline{MA}^2 + \beta\overline{MB}^2 + \gamma\overline{MC}^2 = k$ ***est une droite dans le plan (un plan dans l'espace) perpendiculaire au vecteur*** $\vec{U}$ ***attaché au système*** A(α), B(β), C(γ).

La formule (10) permet d'ailleurs d'écrire : $\alpha(\overline{MA}^2 - \overline{MD}^2) + h = k \Longrightarrow \overline{MA}^2 - \overline{MD}^2 = \dfrac{k-h}{\alpha}$, qui donne bien une droite (ou un plan) perpendiculaire au vecteur $\vec{U} = \alpha\overrightarrow{DA}$.

DÉRIVATION VECTORIELLE

168. Définition. — ***On dit qu'un vecteur*** $\vec{V}$ ***est fonction d'un paramètre variable*** t ***lorsque ses composantes scalaires dans un repère donné sont des fonctions de la variable*** t.

Si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont les vecteurs de base du repère $Oxyz$ et si X, Y, Z, sont des fonctions X(t), Y(t), Z(t) définies sur le segment [a, b], le vecteur $\vec{V}$(X, Y, Z) est une fonction vectorielle de t sur [a, b]. On écrit :

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}(t) = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j} + Z(t)\vec{k}.}$$

Si dans le repère $Oxyz$ (fig. 149) on construit $\overrightarrow{OM} = \vec{V}(t)$, le point M décrit, lorsque t varie sur [a, b], une courbe (C) appelée indicatrice de la fonction vectorielle $\vec{V}(t)$.

169. Limites vectorielles. — 1° *Dire que* $\vec{V}(t) \longrightarrow \vec{0}$ *lorsque* $t \longrightarrow t_0$ *signifie que le module* $|\vec{V}(t)| \longrightarrow 0$ *lorsque* $t \longrightarrow t_0$.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que les composantes X(t), Y(t) et Z(t) tendent vers 0 lorsque t tend vers t_0. En effet dans un repère $Oxyz$ orthonormé :

$$|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \Longrightarrow |X| \leqslant |\vec{V}| ; |Y| \leqslant |\vec{V}| ; |Z| \leqslant |\vec{V}|$$

Donc : $|\vec{V}| \longrightarrow \vec{0} \Longrightarrow X \longrightarrow 0 ; \quad Y \longrightarrow 0 ; \quad Z \longrightarrow 0.$

Réciproquement si X, Y, Z, tendent simultanément vers 0, il en est de même de $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = |\vec{V}|$, donc $\vec{V} \longrightarrow \vec{0}$.

Nous admettrons qu'il en est de même dans un repère quelconque.

2° *Dire que* $\vec{V}(t) \longrightarrow \vec{U}(\alpha, \beta, \gamma)$ *lorsque* $t \longrightarrow t_0$ *signifie que la différence* $\vec{V}(t) - \vec{U}(\alpha, \beta, \gamma) \longrightarrow \vec{0}$.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que les différences $X(t) - \alpha$, $Y(t) - \beta$ et $Z(t) - \gamma$ tendent simultanément vers 0, lorsque $t \longrightarrow t_0$. Donc :

$$\boxed{\vec{V}(t) \longrightarrow \vec{U}(\alpha, \beta, \gamma)} \iff \boxed{X(t) \longrightarrow \alpha, \quad Y(t) \longrightarrow \beta, \quad Z(t) \longrightarrow \gamma.}$$

3° *Si lorsque* $t \longrightarrow t_0$, *le vecteur* $V(t)$ *tend vers* $V(t_0)$, *on dit que la fonction vectorielle* $V(t)$ *est continue pour* $t = t_0$. On dit qu'elle est continue sur le segment [a, b] si :

$$\forall t_0 \in [a, b] : t \longrightarrow t_0 \Longrightarrow V(t) \longrightarrow V(t_0).$$

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que X(t), Y(t), Z(t) soient des fonctions continues de t sur [a, b].

170. Dérivée vectorielle. — ***On appelle dérivée de la fonction vectorielle*** $\vec{V}(t)$, ***pour la valeur*** t_0 ***du paramètre, la limite, lorsqu'elle existe, du vecteur*** $\frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}(t) - \vec{V}(t_0)}{t - t_0}$ ***lorsque*** t ***tend vers*** t_0.

Cette limite est désignée par $\vec{V}'(t_0)$ et on écrit indifféremment :

$$\vec{V}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{V}(t) - \vec{V}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{V}(t_0 + h) - V(t_0)}{h}. \qquad (1)$$

Or les relations : $\vec{V}(t) = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j} + Z(t)\vec{k}$

et : $\vec{V}(t_0) = X(t_0)\vec{i} + Y(t_0)\vec{j} + Z(t_0)\vec{k}$ donnent

$$\overrightarrow{\Delta V} = \vec{V}(t) - \vec{V}(t_0) = [X(t) - X(t_0)]\vec{i} + [Y(t) - Y(t_0)]\vec{j} + [Z(t) - Z(t_0)]\vec{k}$$

Soit : $\overrightarrow{\Delta V} = \Delta X \cdot \vec{i} + \Delta Y \cdot \vec{j} + \Delta Z \cdot \vec{k} \implies \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \frac{\Delta X}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta Y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta Z}{\Delta t}\vec{k}.$

Pour que le vecteur $\frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}$ admette une limite, lorsque $t \to t_0$, il faut et il suffit qu'il en soit de même de $\frac{\Delta X}{\Delta t}, \frac{\Delta Y}{\Delta t}, \frac{\Delta Z}{\Delta t}$, c'est-à-dire que les fonctions $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ soient dérivables pour $t = t_0$. Dans ce cas $V'(t_0)$ existe et on obtient :

$$\vec{V}'(t_0) = X'(t_0)\vec{i} + Y'(t_0)\vec{j} + Z'(t_0)\vec{k}. \qquad (2)$$

Si cette dérivée $\vec{V}'(t_0)$ existe pour toute valeur t_0 du segment $[a, b]$ on dit que $\vec{V}(t)$ est dérivable sur $[a, b]$ et admet $\vec{V}'(t)$ pour dérivée :

171. Théorème. — ***Si les composantes scalaires d'une fonction vectorielle*** $\vec{V}(t)$ ***sont dérivables sur*** $[a, b]$, ***il en est de même de*** $\vec{V}(t)$ ***et les composantes de sa dérivée*** $\vec{V}'(t)$ ***sont les dérivées des composantes de*** $\vec{V}(t)$.

En remplaçant t_0 par t dans la relation (2) ci-dessus, on obtient :

$$\boxed{\vec{V}'(t) = X'(t)\vec{i} + Y'(t)\vec{j} + Z'(t)\vec{k}.} \qquad (3)$$

Donc : $\vec{V}(t) = \vec{V}(X, Y, Z) \implies \vec{V}'(t) = \vec{V}'(X', Y', Z')$. (4)

1° Si les fonctions $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ sont dérivables sur $[a, b]$, ces fonctions sont continues sur $[a, b]$ et il en est de même de la fonction $\vec{V}(t)$ car : $\forall t_0 \in [a, b]$:

$t \to t_0 \implies X(t) \to X(t_0)$, $Y(t) \to Y(t_0)$, $Z(t) \to Z(t_0) \implies \vec{V}(t) \to \vec{V}(t_0)$.

2° Si $X'(t)$, $Y'(t)$, $Z'(t)$ sont elles-mêmes dérivables sur $[a, b]$, le vecteur $\vec{V}'(t)$ est dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée $\vec{V}''(t)$ est la *dérivée seconde* de $\vec{V}(t)$:

$$\boxed{\vec{V}''(t) = X''\vec{i} + Y''\vec{j} + Z''\vec{k}.} \qquad (5)$$

Lorsque $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ sont dérivables jusqu'à l'ordre n, on peut ainsi définir les dérivées successives de $\vec{V}(t)$ jusqu'à l'ordre n :

$$\boxed{\vec{V}^{(n)}(t) = X^{(n)}\vec{i} + Y^{(n)}\vec{j} + Z^{(n)}\vec{k}.} \qquad (6)$$

172. Interprétation géométrique. — ***Les composantes*** X', Y' Z' ***du vecteur*** $\vec{V}'(t)$ ***sont les paramètres directeurs de la tangente à la courbe*** (C), ***lieu du point*** M ***tel que*** $\overrightarrow{OM} = \vec{V}(t)$.

En effet (fig. 149) : $\vec{V}(t) - \vec{V}(t_0) = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{M_0M}$.

Le vecteur $\overrightarrow{M_0U} = \dfrac{\vec{V}(t) - \vec{V}(t_0)}{t - t_0} = \dfrac{\overrightarrow{M_0M}}{t - t_0}$ admet pour support la droite M_0M.

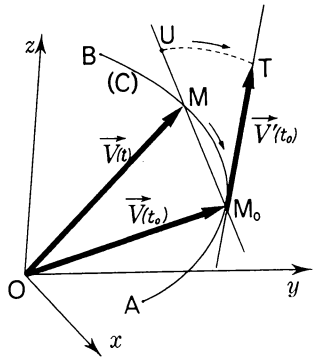


Fig. 149

Lorsque $t \longrightarrow t_0$, le point M tend vers M_0 et le vecteur $\overrightarrow{M_0U}$ tend vers $\vec{V}'(t_0)$. Le support M_0T du vecteur $\vec{V}'(t_0)$ est donc la limite de la sécante M_0M, lorsque M vient en M_0, c'est-à-dire, par définition, la tangente en M_0 à la courbe (C), lieu de M :

Si le vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{V}(t)$ *est dérivable sur* $[a, b]$, *la courbe* (C) *admet en chacun de ses points* M (t) *une tangente de vecteur directeur* $\vec{V}'(t)$.

D'autre part le vecteur $\vec{V}'(t)$, que l'on note aussi $\vec{M}'(t)$ ou $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$, ainsi obtenu a une signification géométrique qui ne dépend ni de l'origine O, ni de la direction des axes :

La dérivation vectorielle est une opération indépendante du repère Oxyz.

173. Projection de la dérivée d'un vecteur. — Si $\vec{V}$ (X, Y, Z) admet pour dérivée $\vec{V}'$ (X′, Y′, Z′), les vecteurs $\vec{U}$ (X, Y, 0) et $\vec{W}$ (0, 0, Z) admettent respectivement pour dérivées $\vec{U}'$ (X′, Y′, 0) et $\vec{W}'$ (0, 0, Z′). Or les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ se projettent respectivement suivant $\vec{U}$ et $\vec{U}'$ sur le plan xOy, suivant $\vec{W}$ et $\vec{W}'$ sur Oz. En choisissant convenablement le repère $Oxyz$:

La dérivée de la projection d'un vecteur, sur un plan ou sur une droite, est la projection de la dérivée de ce vecteur.

On peut donc permuter projection et dérivation d'un vecteur.

174. Dérivée d'un vecteur constant. — Si le vecteur $\vec{V}(t)$ est constant sur $[a, b]$ il en est de même de ses composantes X, Y, Z, ce qui implique :

$$X' = Y' = Z' = 0 \implies \vec{V}'(t) = \vec{0}.$$

La dérivée d'un vecteur constant est le vecteur nul $\vec{0}$.

Réciproquement $\vec{V}'(t) \equiv \vec{0} \implies X' = Y' = Z' = 0$ ce qui montre que X, Y, Z sont des nombres constants α, β, γ et que $\vec{V}(t)$ est un vecteur constant $\vec{U}$ (α, β, γ).

175. Dérivée d'une somme vectorielle. — Si les vecteurs $\vec{V}_1$ $(X_1, Y_1, Z_1) = \vec{V}_1(t)$ et $\vec{V}_2$ $(X_2, Y_2, Z_2) = \vec{V}_2(t)$ sont dérivables sur $[a, b]$, il en est de même des composantes $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$, $Z = Z_1 + Z_2$ de $\vec{U}(t) = \vec{V}_1(t) + \vec{V}_2(t)$. Ce vecteur $\vec{U}(t)$ admet donc sur $[a, b]$ une dérivée $\vec{U}'(t)$ (n° 171) et :

$$X' = X'_1 + X'_2, \quad Y' = Y'_1 + Y'_2, \quad Z' = Z'_1 + Z'_2 \implies \vec{U}'(t) = \vec{V}'_1(t) + \vec{V}'_2(t).$$

La dérivée d'une somme de vecteurs est égale à la somme des dérivées de chacun de ces vecteurs.

Plus généralement :

$$\boxed{\vec{U} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \ldots + \vec{V}_n} \implies \boxed{\vec{U}' = \vec{V}'_1 + \vec{V}'_2 + \ldots + \vec{V}'_n.}$$

176. Dérivée du produit d'un vecteur par un scalaire. — Lorsque le vecteur $\vec{V}(X, Y, Z) = \vec{V}(t)$ et le scalaire $\lambda = \lambda(t)$ sont des fonctions de t dérivables sur $[a, b]$, il en, est de même des composantes λX, λY, λZ du vecteur $\vec{U}(t) = \lambda(t)\vec{V}(t)$.

Ce vecteur $\vec{U}(t)$ admet donc sur $[a, b]$ une dérivée $U'(t)$ telle que :

$$\vec{U}'(t) = (\lambda'X + \lambda X')\vec{i} + (\lambda'Y + \lambda Y')\vec{j} + (\lambda'Z + \lambda Z')\vec{k}.$$

Soit : $\vec{U}'(t) = \lambda'(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) + \lambda(X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k})$.

$$\boxed{\vec{U}(t) = \lambda(t)\,\vec{V}(t)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{U}' = \lambda'\vec{V} + \lambda\vec{V}'.}$$

Cette formule est analogue à la formule de la dérivée d'un produit de fonctions scalaires. Plus généralement, d'après le n° 174 :

$$\boxed{\vec{U} = \Sigma\,\lambda_i\,\vec{V}_i} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{U' = \Sigma_i\,\lambda'_i\,\vec{V}_i + \Sigma\,\lambda_i\,\vec{V}'_i.}$$

Cette formule se réduit à : $\vec{U}' = \Sigma\,\lambda_i\,\vec{V}'_i$ lorsque les λ_i sont constants et à : $\vec{U}' = \Sigma\,\lambda'_i\,\vec{V}_i$ lorsque les vecteurs $\vec{V}_i$ sont constants.

On retrouve ainsi la règle de dérivation du n° 171, puisque $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont fixes :

$$\vec{V}(t) = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \quad \Longrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} V'(t) = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k} \\ V^{(n)}(t) = X^{(n)}\vec{i} + Y^{(n)}\vec{j} + Z^{(n)}\vec{k}. \end{array}\right.$$

177. Dérivée d'un produit scalaire. — Soit $y = \vec{U}(t) \,.\, \vec{V}(t)$ le produit scalaire de deux vecteurs $U(X_1, Y_1, Z_1) = \vec{U}(t)$ et $\vec{V}(X_2, Y_2, Z_2) = \vec{V}(t)$ dérivables sur $[a, b]$. La relation $y = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$ entraîne :

$$y' = (X'_1X_2 + X_1X'_2) + (Y'_1Y_2 + Y_1Y'_2) + (Z'_1Z_2 + Z_1Z'_2)$$

Soit : $y' = (X'_1X_2 + Y'_1Y_2 + Z'_1Z_2) + (X_1X'_2 + Y_1Y'_2 + Z_1Z'_2)$.

$$\boxed{y = \vec{U}\,.\,\vec{V}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y' = \vec{U}'\,.\,\vec{V} + \vec{U}\,.\,\vec{V}'}$$

Cette formule est analogue à celle de la dérivée d'un produit de fonctions.

Cas particulier. — Désignons par $r(t)$ le module du vecteur $\vec{U}(X, Y, Z) = \vec{U}(t)$ et par $z = \vec{U}^2 = r^2$ son carré scalaire :

$z = \vec{U}\,.\,\vec{U} \Longrightarrow z' = \vec{U}'.\vec{U} + \vec{U}.\vec{U}' \Longleftrightarrow z' = 2\vec{U}.\vec{U}'$.

D'autre part : $z = r^2 = \vec{U}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ donne :

$z' = 2rr' = 2\vec{U}\,.\,\vec{U}' = 2(XX' + YY' + ZZ')$.

Si k désigne une constante réelle quelconque :

$r = k \Longleftrightarrow r^2 = k^2 \Longleftrightarrow rr' = 0 \Longleftrightarrow \vec{U}\,.\,\vec{U}' = 0.$

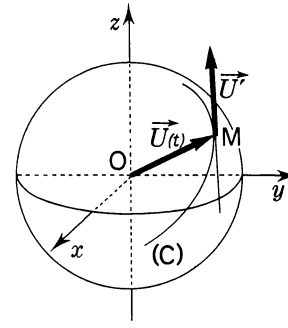


Fig. 150

Pour qu'un vecteur variable $\vec{U}(t)$ ait un module constant, il faut et il suffit qu'il soit orthogonal à sa dérivée $\vec{U}'(t)$.

Il en résulte que le point M, tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{U}(t)$ décrit (fig. 150) une courbe tracée sur la sphère de centre O et de rayon $r = |\vec{U}|$.

178. Mesure de la projection de la dérivée d'un vecteur lié sur le support de ce vecteur.

Soit O l'origine fixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$, fonction de la variable t, et $\rho = \overrightarrow{OM}$, la mesure algébrique de $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe $O\lambda$, de vecteur unitaire $\vec{U}$, support de $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{U} \implies (\overrightarrow{OM})' = \rho'\,\vec{U} + \rho\,(\vec{U})'.$$

La projection orthogonale de $(\overrightarrow{OM})'$ sur l'axe $O\lambda$ a pour mesure :

$$(\overrightarrow{OM})' \cdot \vec{U} = \rho'\,(\vec{U})^2 + \rho\,(\vec{U})' \cdot \vec{U}.$$

Or : $(\vec{U})^2 = 1$ et $\vec{U}' \cdot \vec{U} = 0$ (n° 177).

Donc : $(\overrightarrow{OM})' \cdot U = \rho'$.

HÉLICE CIRCULAIRE

179. Définition de l'hélice circulaire. — Considérons un cylindre de révolution (C) d'axe $\vec{\Delta}$ et dont la section droite par un plan P est un cercle Γ de centre O et de rayon a (fig. 151). Soit M un point quelconque de ce cylindre se projetant orthogonalement en un point m de Γ sur le plan P. Désignons par A l'origine des arcs sur le cercle Γ orienté dans le sens direct autour de l'axe $\vec{\Delta}$ et par $s = \overset{\frown}{Am}$ l'abscisse curviligne du point m sur Γ.

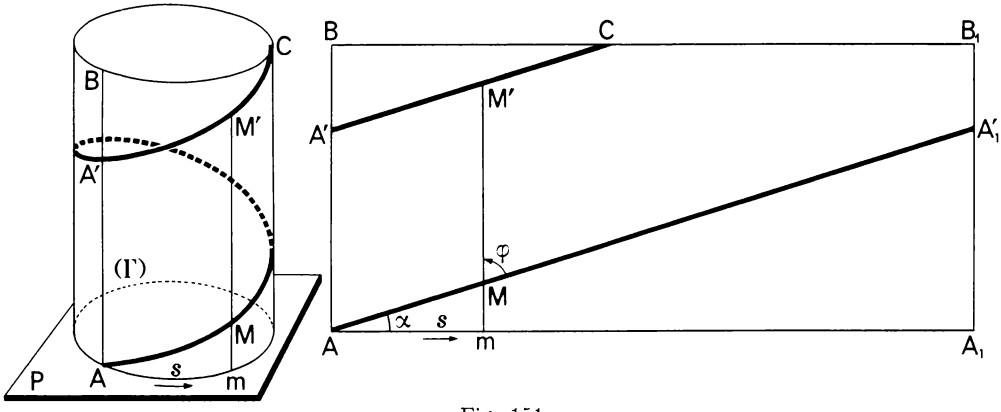


Fig. 151

Le point M ***du cylindre*** (C) ***décrit une hélice circulaire*** (H) ***lorsque la mesure algébrique sur*** $\vec{\Delta}$ ***du vecteur*** $\overrightarrow{mM}$ ***est proportionnelle à l'abscisse curviligne*** $s = \overset{\frown}{Am}$ ***du point*** m ***sur*** Γ.

$$M \in (H) \iff \boxed{\overline{mM} = k\,\overset{\frown}{Am}} \qquad k \in \mathbb{R}^*.$$

Si on développe le cylindre (C) sur un plan, l'hélice (H) donne par suite une droite faisant avec AA_1 développement de Γ un angle α tel que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\overline{mM}}{\overline{Am}} = k$.

180. Représentation paramétrique de l'hélice. — Soit $Oxyz$ un repère orthonormé dont l'axe Oz coïncide avec $\vec{\Delta}$ et dont l'axe Ox admet $\overrightarrow{OA}$ pour vecteur directeur (fig. 152). Désignons par θ la mesure en radians de l'angle polaire $(\vec{Ox}, \vec{Om})$ du point m. On en déduit : $s = \widehat{Am} = a\theta$.

L'abscisse et l'ordonnée du point $M(x, y, z)$ sont celles de m soit : $x = a \cos \theta$ et $y = a \sin \theta$. La cote z de M est $z = \overline{mM} = ks = ka\theta$. En posant $ka = h \in \mathbb{R}^*$ on obtient la représentation paramétrique de l'hélice circulaire (H) :

$$\boxed{x = a \cos \theta \mid y = a \sin \theta \mid z = h\,\theta.} \quad (1)$$

Lorsque θ varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point M décrit l'hélice circulaire (H) dans le sens des z croissants ou décroissants suivant que h est positif ou négatif. L'hélice est dite à *droite* (ou dextrorsum) pour $h > 0$, à *gauche* (ou *sinistrorsum*) pour $h < 0$. (Les filets de vis, l'arête d'un tire-bouchons sont généralement des hélices à droite.)

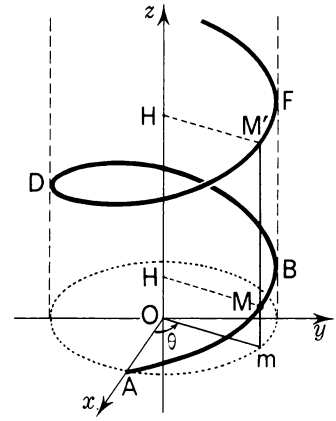


Fig. 152

181. Pas de l'hélice. — Les points M et M′ correspondant aux valeurs θ et $\theta + 2\pi$ du paramètre appartiennent à une même génératrice mM du cylindre (C) et

$$\overline{MM'} = \overline{mM'} - \overline{mM} = h(\theta + 2\pi) - h\,\theta = 2\pi h.$$

La constante $p = 2\pi h$ *est le pas de l'hélice circulaire* H.

L'ensemble des points de l'hélice compris entre les deux points M et M′ constitue une spire de l'*hélice*. On peut obtenir l'hélice H en faisant subir à une spire donnée les translations parallèles à Oz de vecteur $k\,\overrightarrow{MM'}$.

Notons que la constante a des formules (1) est le *rayon* de l'hélice et la constante h est le *pas réduit* : $\frac{p}{2\pi}$.

182. Tangente à l'hélice circulaire (fig. 153).

Le vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{V}(\theta)$ a pour composantes (n° 180) :

$x = a\cos\theta$; $y = a \sin\theta$; $z = h\,\theta$.

Le vecteur dérivé $\vec{M}'(\theta) = \vec{V}'(\theta)$ a donc pour composantes : $x' = -a \sin\theta$, $y' = a\cos\theta$, $z' = h$.

Ces composantes x', y', z' sont les paramètres directeurs de la tangente à l'hélice au point M (θ). Or le vecteur M′ (θ) a un module constant $\sqrt{a^2 + h^2}$ et une projection constante h sur Oz. Il fait donc avec Oz un angle constant φ tel que : $\cos\varphi = \dfrac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \iff \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\vec{Oz}, \vec{V}') = \dfrac{a}{h}$.

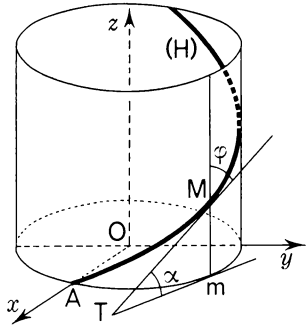


Fig. 153

L'hélice circulaire coupe donc sous l'angle constant φ *les génératrices du cylindre de révolution sur lequel elle est tracée.*

EXERCICES

228. On considère quatre points A, B, C, D et on désigne par I, J, M, N, P, Q les milieux des segments AB, CD, AC, BD, AD et BC.

1° Évaluer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ puis le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$. En déduire que : MN ⊥ PQ $\iff$ AB = CD.

2° Dans le tétraèdre ABCD on suppose que : AB = CD, AC = BD et AD = BC. Démontrer que IJ est la médiatrice des quatre segments AB, CD, MN et PQ. En déduire que le centre de gravité ω du tétraèdre est équidistant des quatre sommets ainsi que des quatre faces du tétraèdre.

229. Soit H l'orthocentre du tétraèdre orthocentrique ABCD. La hauteur AH coupe en A′ la face BCD et en K la sphère ABCD. La droite BA′ coupe en E l'arête CD et en F la sphère ABCD. Enfin le cercle ABE coupe en L la hauteur AH :

1° Montrer que A′ est le milieu de HL et que E est le milieu de A′F ;

2° Dans le plan ABE montrer que les directions EL et FK sont toutes deux antiparallèles à AB par rapport à AK et BF, puis que $\overrightarrow{A'K} = -2\ \overrightarrow{A'H}$.

230. 1° Démontrer la relation de Céva $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$ relative à un point M du plan du triangle ABC en considérant ce point comme le barycentre d'un système A(α), B(β), C(γ).

2° Soit dans un triangle ABC deux transversales αβγ et α′β′γ′ telles que αβ′ soit parallèle à AB et α′γ parallèle à AC. Démontrer que βγ′ est parallèle à BC.

3° On mène dans un triangle deux transversales quelconques αβγ et α′β′γ′, puis les transversales αβ′γ″, α′β″γ et α″βγ′. Démontrer que α″, β″, γ″ sont alignés.

231. *Relations entre les éléments d'un trièdre.* — Dans le trièdre OABC on suppose OB = OC = 1. On désigne par H et K les projections de B et C sur OA et par OA′ le prolongement de OA.

1° Établir l'égalité scalaire : $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$ et la relation fondamentale :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \tag{1}$$

2° Calculer cos A et sin A en fonction de a, b, c et démontrer que :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{(1 + 2\cos a \cos b \cos c - \Sigma \cos^2 a)^{1/2}}{\sin a \sin b \sin c} \tag{2}$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \tag{3}$$

$$\cos b - \cos c = \frac{1 - \cos a}{\sin A} \sin (C - B) \tag{4}$$

3° Compte tenu des inégalités $0 < a < \pi$ et $0 < A < \pi$, établir les relations :

$$b = c \iff B = C \text{ (trièdre isocèle)} \text{ et } a < b < c \iff A < B < C \tag{5}$$

$$|b - c| < a < b + c \quad \text{et} \quad B + C < A + \pi \tag{6}$$

Puis en utilisant le trièdre OA′BC, en déduire que :

$$0 < a + b + c < 2\pi \quad \text{et} \quad \pi < A + B + C < 3\pi. \tag{7}$$

Énoncer les différents théorèmes correspondants.

232. Soit un trièdre trirectangle SABC tel que : SA = a, SB = b et SC = c. On désigne dans le triangle ABC, par H, G, O, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit.

1° Montrer que H est la projection de S sur le plan ABC et que :

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

2° Établir que la droite SG passe par le centre ω de la sphère SABC et que $\overrightarrow{SG} = 2\ \overrightarrow{G\omega}$ (on pourra terminer le parallélépipède construit sur SA, SB et SC comme arêtes).

3° La droite SH recoupe la sphère SABC en K et soit R le rayon du cercle ABC. Montrer que $\overrightarrow{HK} = 2\ \overrightarrow{SH}$ et $R^2 = \overline{OH}^2 + 2\ \overline{HS}^2$.

233. 1° Soit α un point du côté BC du triangle ABC. Comparer les aires algébriques αAB et αAC et démontrer que : $\dfrac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \dfrac{AB}{AC} \cdot \dfrac{\sin (\overrightarrow{A\alpha}, \overrightarrow{AB})}{\sin (\overrightarrow{A\alpha}, \overrightarrow{AC})}$. En déduire la forme trigonométrique suivante de la relation de Céva : $\dfrac{\sin (\overrightarrow{A\alpha}, \overrightarrow{AB})}{\sin (\overrightarrow{A\alpha}, \overrightarrow{AC})} \cdot \dfrac{\sin (\overrightarrow{B\beta}, \overrightarrow{BC})}{\sin (\overrightarrow{B\beta}, \overrightarrow{BA})} \cdot \dfrac{\sin (\overrightarrow{C\gamma}, \overrightarrow{CA})}{\sin (\overrightarrow{C\gamma}, \overrightarrow{CB})} = -1.$

2° Étant donné un point M du plan ABC, on construit la droite Ax antiparallèle à AM par rapport à AB et AC et les droites analogues By et Cz. Montrer que Ax, By et Cx sont concourantes en un point M'. Montrer que les distances algébriques x, y, z de M aux côtés du triangle ABC sont inversement proportionnelles aux distances x', y', z' de M' à ces mêmes côtés. Si M est le barycentre de A (p), B (q), C (r), montrer que M' est le barycentre de A (p'), B (q'), C (r') avec : $p' = \frac{a^2}{p}, q' = \frac{b^2}{q}, r' = \frac{c^2}{r}$.

3° Les deux points M et M' sont dits *inverses* dans le triangle ABC. Montrer que l'orthocentre H et le centre du cercle circonscrit O sont inverses. Construire l'inverse K du centre de gravité G (K est le centre des symédianes, cf n° 131) et les inverses P', Q' et R' des points de rencontre P, Q, R des tangentes en A, B et C au cercle O. Déterminer pour chacun de ces points les valeurs des coefficients p', q' et r'.

234. Dans le plan du triangle ABC de côtés a, b, c et de périmètre $2p$, on désigne par M (α, β, γ), le barycentre du système A (α), B (β), C (γ).

1° Démontrer que le centre du cercle inscrit est le point I (a, b, c) et que les centres des cercles exinscrits sont respectivement J $(-a, b, c)$, K $(a, -b, c)$ et L $(a, b, -c)$.

2° Établir que : $\frac{\overrightarrow{AI}}{p-a} = \frac{\overrightarrow{AJ}}{p} = \frac{\overrightarrow{IJ}}{a}$ et $\frac{\overrightarrow{KA}}{p-c} = \frac{\overrightarrow{AL}}{p-b} = \frac{\overrightarrow{KL}}{a}$.

3° Démontrer, pour tout point O de l'espace, la relation :

$$(p-a)\,\overrightarrow{OJ} + (p-b)\,\overrightarrow{OK} + (p-c)\,\overrightarrow{OL} - p\,\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{0},$$

et que dans le système I $(-p)$, J $(p-a)$, K $(p-b)$, L $(p-c)$ chaque point est le barycentre du système formé par les trois autres.

235. On considère un triangle ABC, dans lequel on désigne par D, E, F les milieux des côtés BC, CA et AB, par A, B, C les angles du triangle et on pose : $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \Sigma$.

1° Montrer que le barycentre du système A (tg A), B (tg B), C (tg C) est le point H (tg A, tg B, tg C), orthocentre du triangle ABC.

2° Établir que le barycentre des points A (tg B + tg C), B (tg C + tg A), C (tg A + tg B) est l'orthocentre du triangle DEF et par suite le centre du cercle ABC, puis que le point ω barycentre de A $(\Sigma + \operatorname{tg} A)$, B $(\Sigma + \operatorname{tg} B)$, C $(\Sigma + \operatorname{tg} C)$ est le centre du cercle d'Euler DEF du triangle ABC.

3° Montrer que ω est le barycentre du système O (2Σ), H (2Σ) et que le centre de gravité G du triangle ABC est le barycentre du système O (2Σ), H (Σ). En déduire la position relative des quatre points H, G, O, ω.

236. 1° Démontrer que, lorsque le point M est le barycentre du système A (α), B (β), C (γ), les aires algébriques des triangles MBC, MCA, MAB sont proportionnelles à α, β, γ. (L'aire MBC sera affectée du signe + ou du signe — suivant que A et M sont ou non du même côté de BC.)

2° En déduire qu'à tout point M du plan ABC on peut affecter trois nombres (α, β, γ) définis à un facteur près, tel que le point M (α, β, γ) soit le barycentre du système A (α), B (β), C (γ). Les nombres α, β, γ sont dits *coordonnées barycentriques* du point M par rapport au triangle ABC.

3° Vérifier ainsi les résultats obtenus aux exercices précédents pour les centres des cercles inscrit ou exinscrits, le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle ABC. On commencera par montrer que ce dernier est le point O (sin 2A, sin 2B, sin 2C).

237. On construit le point I barycentre de A (α_1), B (β_1) et C (γ_1), le point J barycentre de A (α_2), B (β_2) et C (γ_2) et enfin M barycentre de A $(\alpha_1 + k\,\alpha_2)$, B $(\beta_1 + k\,\beta_2)$ et C $(\gamma_1 + k\,\gamma_2)$.

1° Démontrer que $(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)\,\overrightarrow{MI} + k\,(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)\,\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{0}$.

2° Lieu du point M lorsque k varie, les autres coefficients restant fixes ?

238. Dans le plan du triangle ABC, on désigne par M(x, y, z) le barycentre du système A (x), B (y), C (z) et on considère les points A' $(0, \beta, -\gamma)$, B' $(-\alpha, 0, \gamma)$ et C' $(\alpha, -\beta, 0)$.

1° Établir, pour tout point M, la relation : $(\beta - \gamma)\,\overrightarrow{MA'} + (\gamma - \alpha)\,\overrightarrow{MB'} + (\alpha - \beta)\,\overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{0}$ (1)
En prenant M en A', en déduire que les points A', B', C' sont alignés sur une droite Δ (α, β, γ).
En considérant tout point M (x, y, z) de Δ comme le barycentre de B' $[\lambda(\gamma - \alpha)]$ et de C' $[\mu(\alpha - \beta)]$ démontrer que : $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0$. (2)

2° Réciproquement, montrer qu'à toute transversale A'B'C' du triangle ABC, on peut associer trois coefficients : α, β, γ, définis à un facteur près, tels que cette transversale soit la droite Δ (α, β, γ).

3° Soient I, J, K, les milieux des segments AA', BB', CC'. Démontrer, pour tout point M, la relation :

$$\alpha(\beta - \gamma)\,\overrightarrow{MI} + \beta(\gamma - \alpha)\,\overrightarrow{MJ} + \gamma(\alpha - \beta)\,\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{0} \qquad (3)$$

En déduire que *les milieux* I, J, K, *des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.* Démontrer que la droite IJK est la droite Δ $(\beta + \gamma - \alpha, \gamma + \alpha - \beta, \alpha + \beta - \gamma)$.

239. Soient a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC. La tangente en A au cercle ABC de centre O, coupe BC en D et les tangentes en B et C se coupent en P. La médiatrice de BC coupe BC en M et coupe le cercle en I et J, la droite AP coupe BC en E et recoupe le cercle en A'.

1° Démontrer que les deux faisceaux B(MPIJ) et A(MPIJ) sont harmoniques, puis, que la droite AP est symétrique de la médiane AM par rapport aux bissectrices de l'angle BAC : la droite AP est dite *symédiane* du triangle ABC. Montrer que la droite BC est bissectrice de l'angle AMA' et que (AA'EP) = — 1.

2° De la similitude des triangles DAB et DCA, déduire que $b^2\overline{DB} - c^2\overline{DC} = 0$. Démontrer que P est le barycentre de A (— a^2), B (b^2) et C (c^2), que $b^2\overline{EB} + c^2\overline{EC} = 0$ et que (BCDE) = — 1. Démontrer que les trois symédianes AP, BQ et CR du triangle ABC sont concourantes en un point K barycentre de A (a^2), B (b^2) et C (c^2) appelé centre des symédianes ou *point de Lemoine* du triangle ABC.

3° Démontrer que dans tout triangle PQR, les droites joignant les différents sommets aux points de contact A, B, C d'un cercle tangent aux trois côtés sont concourantes.

240. On considère un triangle ABC de côtés a, b, c dans lequel on désigne par G le centre de gravité, par H l'orthocentre, par O le centre du cercle circonscrit (O, R) et par I et J les centres du cercle inscrit (I, r) et du cercle exinscrit dans l'angle A (J, r_a).

1° Démontrer que si M (α, β, γ) est le barycentre du système A (α), B (β), C (γ) sa puissance Ω (M) par rapport à tout cercle Ω du plan vérifie la relation :

$$\alpha\,\Omega(A) + \beta\,\Omega(B) + \gamma\,\Omega(C) = (\alpha+\beta+\gamma)\,\Omega(M) + \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\,\Sigma\,\beta\gamma\,\overline{BC}^2.$$

Étudier le cas où $\gamma = 0$.

2° Déterminer, par rapport au cercle (O, R) les puissances des points G (1, 1, 1), I (a, b, c) et J (— a, b, c). Sachant que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, en déduire : $\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ et les relations d'Euler :

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr \qquad \text{et} \qquad \overline{OJ}^2 = R^2 + 2Rr_a.$$

3° Déterminer, en fonction de a, b, c, R, et r les puissances par rapport au cercle (I, r) des points O et G, puis en déduire la puissance du point ω milieu de OH. Vérifier que cette dernière puissance est égale à $\frac{R^2}{4} - Rr$ et que les cercles (I, r) et $\left(\omega, \frac{R}{2}\right)$ sont tangents intérieurement.

241. Étant donné un triangle ABC de côtés a, b, c on désigne par M (α, β, γ) le barycentre du système A (α), B (β), C (γ) et par R et r les rayons du cercle circonscrit et du cercle inscrit à ABC.

1° Démontrer que les points I(a, b, c), J(— a, b, c), K(a, — b, c) et L(a, b, — c) sont respectivement les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC. Établir les relations telles que :

$$a\overline{IA}^2 + b\overline{IB}^2 + c\overline{IC}^2 = a\overline{JA}^2 - b\overline{JB}^2 - c\overline{JC}^2 = abc$$

et calculer $\overline{AI}^2$, $\overline{AJ}^2$, $\overline{AK}^2$ et $\overline{AL}^2$.

2° Trouver les lieux des points M tels que :

$$b\overline{MB}^2 + c\overline{MC}^2 - a\overline{MA}^2 = abc,$$
$$c\overline{MC}^2 + a\overline{MA}^2 - b\overline{MB}^2 = abc,$$
$$a\overline{MA}^2 + b\overline{MB}^2 - c\overline{MC}^2 = abc.$$

Ces lieux sont trois cercles de rayons ρ_a, ρ_b, ρ_c. Établir la relation :

$$\frac{1}{\rho_a^2} + \frac{1}{\rho_b^2} + \frac{1}{\rho_c^2} = \frac{1}{4Rr}.$$

3° Montrer que le point I est le centre radical des trois cercles précédents et qu'ils sont orthogonaux deux à deux. Construire graphiquement ces trois cercles.

242. On donne les points A, B, C non alignés et M est un point quelconque de l'espace. On considère les vecteurs : $\vec{V}_1 = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$; $\vec{V}_2 = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

1° Lieu du point M lorsque $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2|$.

2° Lieu du point M lorsque $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont perpendiculaires.

3° Lieu du point M lorsque $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = k$, constante donnée.

243. On donne les points A, B, C non alignés et M est un point quelconque de l'espace. On considère les vecteurs : $\vec{V}_1 = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$; $\vec{V}_2 = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

1° Montrer que le vecteur V_2 est un vecteur constant.

2° Trouver le lieu du point M lorsque $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = k$, constante donnée.

— On donne un triangle ABC et une constante k^2. Trouver le lieu du point M dans les cas suivants :

244. $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$.

245. — $aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = k^2$.

246. $aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = k^2$.

247. $MA^2 \sin 2A + MB^2 \sin 2B + MC^2 \sin 2C = k^2$.

248. $MA^2 \operatorname{tg} A + MB^2 \operatorname{tg} B + MC^2 \operatorname{tg} C = k^2$.

249. $aMA^2 + bMB^2 - cMC^2 = k^2$.

250. On donne l'hélice circulaire d'équations : $x = a \cos \theta$; $y = a \sin \theta$; $z = k\theta$.

1° Montrer que la tangente en un point M de cette hélice a pour paramètres directeurs les composantes de la dérivée du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport au paramètre θ.

2° Écrire les équations de la tangente en M à l'hélice. Vérifier qu'elle fait un angle constant avec l'axe $z'z$.

3° Écrire l'équation du cône de sommet O, dont les génératrices sont parallèles aux tangentes à l'hélice.

251. On donne dans un repère orthonormé xOy, les points fixes A $(a, 0)$, B $(-a, 0)$ et le point variable M $(a \cos \varphi, a \sin \varphi)$, φ étant un paramètre variable.

1° Montrer que le lieu de M est le cercle de diamètre AB. Former l'équation de la tangente en M à ce cercle et déterminer les coordonnées des points P, Q, R où cette tangente coupe les droites $x = a$, $x = -a$ et $y = 0$.

2° Calculer le produit $\overline{AP} \cdot \overline{BQ}$ ainsi que l'expression $\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2}$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ sont rectangulaires. Quelle est la puissance de A et de B par rapport au cercle de diamètre PQ ? En déduire que ce cercle est tangent en O à AB.

3° Les droites MB et MA coupent Oy en C et D et coupent respectivement les droites AP et BQ en E et F. Soit d'autre part H la projection de M sur Ox. Montrer que CP et DQ sont parallèles à Ox, que P et Q sont les milieux de AE et BF, et que la division (PQRM) et le faisceau M(ABHR) sont harmoniques.

252. Dans le plan rapporté au repère orthonormé xOy, on considère le point fixe A $(2a, a)$ et le point M $(2\lambda, -\lambda)$ variable sur la droite D d'équation : $x + 2y = 0$.

1° Établir l'équation de la médiatrice de AM et déterminer les coordonnées des points I et J où cette médiatrice coupe Ox et Oy. Former l'équation du cercle de diamètre IJ et trouver le lieu de son centre ω. Par quels points remarquables de la figure le cercle (ω) passe-t-il ?

2° Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$, le rapport de leurs modules et l'angle $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$. Calculer les coordonnées des pieds P et Q sur la droite IJ des bissectrices de l'angle IAJ. Montrer que les points P et Q décrivent deux droites δ et δ', rectangulaires en un point R. Nature du triangle OAR ?

3° Former l'équation du cercle de diamètre IJ. Montrer géométriquement que ce cercle (K) passe par deux points fixes et qu'il est orthogonal au cercle (ω). Déterminer les coordonnées et le lieu de son centre K.

253. Dans un repère orthonormé xOy on considère les deux points variables A$(a + \lambda, 0)$ et B$(0, a - \lambda)$, où a désigne une longueur fixe et λ un paramètre variable.

1° Déterminer le lieu du point C, quatrième sommet du rectangle AOBC. Former l'équation du cercle de diamètre AB et trouver le lieu de son centre I. En déduire que le cercle AOB passe par un deuxième point fixe ω, autre que O. Comparer en module les vecteurs $\overrightarrow{\omega A}$ et $\overrightarrow{\omega B}$. Déterminer l'angle $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B})$.

2° La parallèle menée par O à AB recoupe en M le cercle AOB. Former l'équation du lieu de M et préciser les éléments de ce lieu. Démontrer géométriquement que la droite AB est la médiatrice du segment CM. Former l'équation de la droite CM et montrer qu'elle passe par un point fixe K.

3° Déterminer les coordonnées des points P et Q, projections orthogonales de A et B sur la droite $x + y = 0$, puis les composantes scalaires des vecteurs $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{\omega P}$, $\overrightarrow{\omega Q}$ et les produits scalaires $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{\omega P}$ et $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{\omega Q}$. En déduire le lieu du point H commun aux droites AQ et BP.

254. Dans un repère orthonormé $Oxyz$ on considère les points variables : M $(2a \cos \theta, 0, -a)$ et N $(0, 2a \sin \theta, a)$ a longueur donnée.

1° Déterminer, lorsque θ varie, les lieux de M, N et du milieu I de MN. Former l'équation de la sphère de diamètre MN. Montrer que cette sphère passe par deux points fixes A et B de l'axe Oz.

2° Soit P le barycentre du système M(1), N(λ) et H la projection de P sur Oz. Déterminer les coordonnées de P et H. Pour quelle valeur de λ, la droite HP est-elle perpendiculaire à MN ?

3° Former l'équation du plan issu de O et perpendiculaire à la droite MN. Trouver les coordonnées de la projection orthogonale K du point O sur la droite MN.

255. On donne dans l'espace rapporté au repère orthonormé $Oxyz$ les points fixes A $(0, 0, -a)$ B $(0, 0, a)$ et les points variables P $(u, 0, -a)$ et Q $(0, v, a)$.

1° Montrer que P et Q décrivent deux droites AX et BY. Équation de la sphère de diamètre PQ. Montrer qu'elle passe par deux points fixes. Établir que, pour u et v donnés, la droite PQ admet pour équations paramétriques : $x = \frac{u}{2}(1 - \lambda)$; $y = \frac{v}{2}(1 + \lambda)$; $z = a\lambda$. (λ paramètre variable).

2° Déterminer en fonction de u et v les coordonnées de la projection orthogonale M du point O sur la droite PQ, puis les coordonnées des points H et K pieds de la droite Δ perpendiculaire en H à Oz et en K à PQ.

3° On suppose $uv = 2a^2$ et on pose $u = a\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi$, $v = a\sqrt{2}\,\mathrm{cotg}\,\varphi$. Montrer que PQ est tangent en M à la sphère de diamètre AB et que le lieu de M est un grand cercle (γ) de cette sphère. Établir que la droite PQ coupe sous un même angle constant le cercle (γ) et le plan de ce cercle.

256. On considère l'hélice circulaire, lieu du point M(x, y, z) de coordonnées :

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\sin\theta, \qquad z = h\theta,$$

et on désigne par K la projection orthogonale de M sur l'axe Oz, par P tout point de la droite KM tel que $\overrightarrow{KP} = \lambda\overrightarrow{KM}$.

1° Écrire en fonction de θ et λ les coordonnées de P. Lorsque θ varie la droite KM engendre une surface Σ. Montrer que, pour λ donné, le lieu de P est une hélice (H) tracée sur Σ.

2° La droite KM recoupe le cylindre de révolution : $x^2 + y^2 - ax = 0$ en un point M′. Calculer les coordonnées de M′ dans le repère ωXYZ se déduisant de $Oxyz$ dans la translation $\overrightarrow{O\omega}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$. En déduire qu'il existe sur Σ une double infinité circulaire d'hélices (H′). Comparer les pas d'une hélice (H) et d'une hélice (H′).

3° On considère le point A(a, 0, 0). Montrer que AM′ est perpendiculaire à KM et que le lieu de M_1 symétrique de A par rapport à M′ n'est autre que l'hélice initiale. Que peut-on dire des tangentes en M′ et M_1 aux hélices lieux de M′ et de M_1 ?

257. Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $Oxyz$, on considère le point A ($a\cos\alpha$, 0, 0), le cercle fixe (Γ) d'équations : $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, $z = 0$ ainsi que la droite fixe Δ, lieu du point variable M ($a\cos\alpha$, $\lambda\cos\alpha$, $\lambda\sin\alpha$) où λ désigne un paramètre variable. Le point M se projette en H sur le plan xOy et sur le rayon OB du cercle (Γ). La tangente en B à (Γ) coupe Ox en N.

1° Déterminer en fonction de a, α et de l'angle $\varphi = (Ox, OB)$ les coordonnées des points B, N, H et M. En déduire que MA = NB, MB = NA, puis que la droite AB coupe (quel que soit φ) la droite Δ et le cercle (Γ) sous le même angle.

2° Déterminer l'équation du plan ABM, puis l'angle de ce plan avec la droite BM. En déduire que tout plan (P) issu de Δ coupe (Γ) sous l'angle aigu α.

3° Écrire l'équation de la sphère (S) de centre $\omega(0, 0, m)$ contenant le cercle (Γ). Cette sphère coupe Δ en deux points M′, M″. Former l'équation du 2e degré en λ admettant pour racines λ' et λ'' paramètres de M′ et M″. En déduire, en fonction de m, les coordonnées du milieu I de M′M″, les longueurs ωI et ωM′, puis l'angle aigu IωM′. Établir ainsi que toute sphère (S) contenant (Γ) coupe Δ sous l'angle aigu α.

258. Soit ω le barycentre du système A(α), B(β), C(γ), avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

1° On désigne par $\overrightarrow{Ax}$, $\overrightarrow{By}$, $\overrightarrow{Cz}$, $\overrightarrow{\omega u}$ quatre axes donnés parallèles et de même sens du plan ABC coupés en M, N, P et I par une droite variable D. Établir que : $\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BN} + \gamma\overrightarrow{CP} = (\alpha + \beta + \gamma)\,\overrightarrow{\omega I}$. En déduire l'enveloppe de la droite D sachant que $\alpha\overline{AM} + \beta\overline{BN} + \gamma\overline{CP} = k$ (constante donnée).

2° Soient A′, B′, C′, ω' les projections orthogonales de A, B, C et ω sur une droite variable Δ. Les mesures $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, étant effectuées sur un même axe perpendiculaire à Δ, trouver l'enveloppe de Δ sachant que $\alpha\overline{AA'} + \beta\overline{BB'} + \gamma\overline{CC'} = l$ (constante réelle donnée).

TRANSFORMATIONS PONCTUELLES

8e Leçon

GÉNÉRALITÉS

183. Définition. — ***Étant donnés deux ensembles de points*** A ***et*** B, ***on appelle transformation ponctuelle de l'ensemble*** A ***dans l'ensemble*** B, ***toute correspondance*** T ***qui, à tout point*** M ***de*** A, ***associe un point unique*** M′ ***de*** B.

La transformation ponctuelle T n'est autre qu'une *application* de l'ensemble ponctuel A dans l'ensemble ponctuel B. L'image M′ de M est appelée le *transformé* ou l'*homologue* de M. On écrit :

$$M \xrightarrow{T} M' \qquad \text{ou} \qquad M' = T(M).$$

Lorsque les ensembles A et B sont identiques, on dit que T est une transformation ponctuelle dans A (ou de A sur lui-même). On peut ainsi définir une *transformation dans le plan* ou une *transformation dans l'espace*.

L'ensemble des transformés par T des différents points M d'une figure F est une figure F′ appelée *transformée* ou *homologue* de la figure F dans la transformation ponctuelle T (fig. 154).

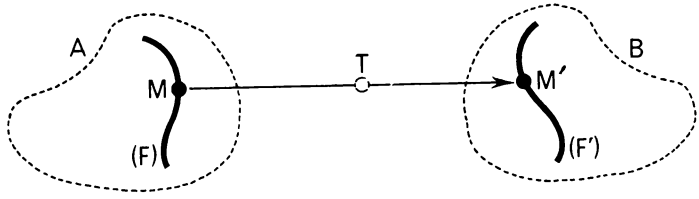


Fig. 154

Deux transformations ponctuelles T *et* T′ *sont équivalentes* si tout point M a même transformé dans T et T′ :

$$M \in A \implies M' = T(M) = T'(M). \qquad \text{On écrit : } T = T'.$$

184. Éléments invariants. — 1° Tout point M qui coïncide avec son homologue M′ dans une transformation ponctuelle T est un *point double* de T ou un *point invariant* par T.

On appelle transformation identique la transformation ponctuelle I ***dans laquelle tout point*** M ***de l'espace (ou du plan) est invariant.***

$$\forall\, M \in (E) \text{ ou } (P) : M = I(M).$$

2° Toute figure F qui coïncide avec sa transformée F′ dans T est dite invariante dans T. La figure F est *invariante point par point* lorsque chacun de ses points est invariant. Elle est *globalement invariante* ou invariante dans son ensemble lorsque ses différents points s'échangent entre eux.

185. Transformations réciproques. — *Une transformation ponctuelle* T *de* A *dans* B *est dite bijective si tout point* M′ *de* B *est le transformé d'un point unique* M *de* A.

Une telle transformation est donc à la fois injective et surjective :

$$M_1 \neq M_2 \quad \Longrightarrow \quad M'_1 = T(M_1) \neq M'_2 = T(M_2) \qquad (\textit{injection})$$

$$\forall\, M' \in B,\ \exists\, M \in A \text{ tel que : } M' = T(M) \qquad (\textit{surjection})$$

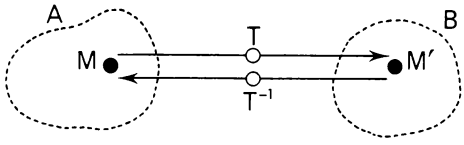


Fig. 155

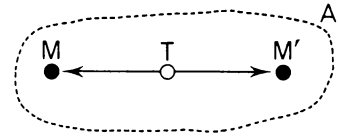


Fig. 156

Toute transformation bijective T ***de*** A ***dans*** B ***définit une transformation bijective de*** B ***dans*** A ***appelée transformation réciproque de*** T ***et notée*** T^{-1}.

En effet à tout point M′ de B correspond un point unique M de A tel que $M' = T(M)$ et réciproquement (fig. 155) :

$$M' = T(M) \quad \Longleftrightarrow \quad M = T^{-1}(M').$$

Les deux bijections T et T^{-1} sont dites réciproques l'une de l'autre.

Une transformation T ***d'un ensemble ponctuel*** A ***en lui-même est dite involutive lorsque tout point*** M ***est le transformé de son homologue*** M′.

$$\forall\, M \in A\,; \quad M' = T(M) \quad \Longrightarrow \quad M = T(M').$$

Une telle transformation T est donc bijective et coïncide avec sa transformation réciproque (fig. 156) : $T^{-1} = T$.

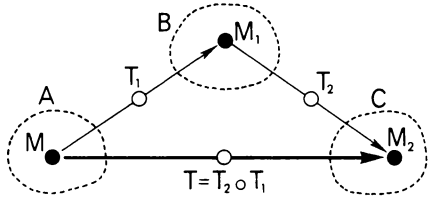


Fig. 157

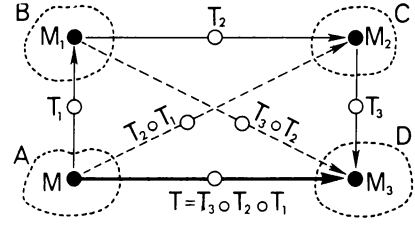


Fig. 158

186. Produit de transformations ponctuelles. — Soient T_1 une transformation de A dans B et T_2 une transformation de B dans C (fig. 157) :

$$\forall\, M \in A,\ \exists\, M_1 \in B \text{ et } M_2 \in C \text{ tels que } M_1 = T_1(M) \text{ et } M_2 = T_2(M_1).$$

On fait ainsi correspondre à tout point M de A un point unique M_2 de C. On définit donc (n° 183) une *transformation* T *de* A *dans* C, *appelée produit des transformations* T_1 *et* T_2. On écrit :

$$M_2 = T(M) = T_2\,[T_1(M)] \quad \Longleftrightarrow \quad M_2 = T_2 \circ T_1(M) \text{ et } T = T_2 \circ T_1.$$

Le produit $T = T_2 \circ T_1$ des transformations ponctuelles T_1 et T_2, effectuées dans cet ordre, est donc une loi de composition interne dans l'ensemble des transformations ponctuelles.

De même le produit $T_3 \circ T_2 \circ T_1 = T_3 \circ (T_2 \circ T_1)$ est le produit des transformations $T_2 \circ T_1$ et T_3 ; le produit $T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ est le produit des transformations $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ et T_4, etc.

187. Propriétés. — *Un produit de transformations est toujours associatif,* car il en est ainsi d'un produit d'applications. Donc (fig. 158) :

$$T_3 \circ (T_2 \circ T_1) = (T_3 \circ T_2) \circ T_1.$$

Il est toujours possible de remplacer deux ou plusieurs transformations consécutives par leur produit ou inversement de remplacer une transformation par un produit équivalent.

2° *Le produit des transformations* T_1 *et* T_2 *est commutatif si :* $T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$.

3° Dans l'ensemble des transformations ponctuelles de l'espace (ou du plan) *la transformation identique* I *est l'élément neutre dans l'opération produit :*

$$\forall\ T : \qquad I \circ T = T \circ I = T.$$

4° *Le produit de deux transformations réciproques* T *et* T^{-1} *est la transformation identique :*

$$M' = T(M) \quad \text{et} \quad M = T^{-1}(M') \Longrightarrow T^{-1} \circ T(M) = M \quad \text{et} \quad T \circ T^{-1}(M') = M'.$$

Donc :

$$T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = I.$$

Il en résulte que si T est une transformation involutive :

$$\forall\ M : T \circ T(M) = M \Longrightarrow T \circ T = T^2 = I.$$

Si T_1 et T_2 sont deux transformations bijectives, il en est de même de $T = T_2 \circ T_1$, car :

$$(T_2 \circ T_1) \,.\, (T_1^{-1} \circ T_2^{-1}) = T_2 \circ I \circ T_2^{-1} = I.$$

La transformation réciproque de $T_2 \circ T_1$ est donc $T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.

188. Groupe de transformations. — Pour qu'un ensemble G de transformations ponctuelles de l'espace ou du plan ait une structure de groupe pour le produit des transformations, il faut et il suffit, puisque l'associativité est toujours réalisée, que :

1° $T_1 \in G$ et $T_2 \in G \Longrightarrow T_2 \circ T_1 \in G$.

2° La transformation identique I appartienne à G : $I \in G$.

3° $\forall\ T \in G \quad \exists\ T^{-1} \in G$ telle que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$.

On voit ainsi que seules des transformations bijectives peuvent former un groupe.

DÉPLACEMENTS PLANS

189. Figures planes égales. — Considérons deux figures superposables F et F′ d'un plan P. Si on peut amener la figure F sur la figure F′ en faisant glisser le plan P sur lui-même, les figures F et F′ sont dites *directement égales dans le plan* P (fig. 159). Dans le cas contraire elles sont dites *inversement égales.*

Notons que dans deux figures F et F′ directement égales du plan deux segments homologues sont égaux et deux angles orientés homologues sont égaux.

190. Déplacement plan. — ***On appelle déplacement plan toute transformation qui, à une figure quelconque*** F ***du plan, fait correspondre une figure*** F′ ***directement égale à la première.***

Un déplacement plan peut être défini, *indépendamment de toute notion de mouvement*, de la façon suivante :

Considérons dans le plan P deux segments fixes égaux AB et A′B′ et un point quelconque M (fig. 159). Construisons le point M′ tel que :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) \text{ et } A'M' = AM. \qquad (1)$$

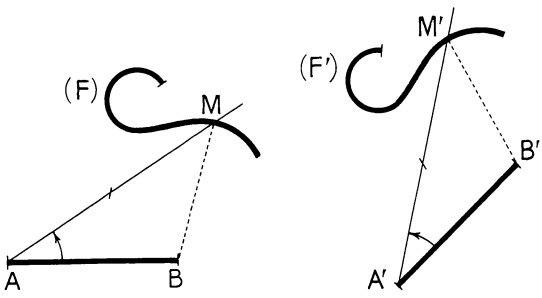


Fig. 159

Le triangle A′B′M′ est directement égal au triangle ABM. Il en résulte que lorsque M décrit une figure quelconque F du plan P le point M′ décrit une figure F′ directement égale à la figure F et dans laquelle les points A′ et B′ sont respectivement les homologues de A et B. En effet, si on fait glisser le plan P sur lui-même de façon à amener A′ en A et B′ en B, tout point M de la figure F coïncide avec son homologue M′ de la figure F′.

191. Corollaires. — 1° ***Un déplacement plan est déterminé lorsque l'on connaît un vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ ***et son transformé de même module*** $\overrightarrow{A'B'}$.

Remarquons qu'il suffit même de connaître la demi-droite Ax et sa transformée $A'x'$.

2° ***Un déplacement plan ne peut posséder plus d'un point double sans se réduire à la transformation identique.***

En effet si A est en A′ et B en B′, tout point M coïncide avec son homologue M′. Donc :

Deux figures planes directement égales F et F′ coïncident lorsque deux points de l'une coïncident avec leurs homologues de la seconde.

3° Connaissant AB = A′B′ on peut également construire l'homologue M′ d'un point quelconque M, non situé sur la droite AB, à l'aide des relations :

$$(A'B', A'M') = (AB, AM) \quad \text{et} \quad (B'A', B'M') = (BA, BM). \qquad (2)$$

Ces relations (2) sont donc, ainsi que les relations (1) du paragraphe (n° 190), suffisantes pour que les triangles ABM et A′B′M′ soient directement égaux.

192. Théorème. — ***Dans tout déplacement plan un vecteur donné fait avec son homologue un angle constant appelé angle du déplacement.***

Soit $\overrightarrow{M'N'}$ l'homologue d'un vecteur quelconque $\overrightarrow{MN}$ dans le déplacement défini par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et son homologue de même module $\overrightarrow{A'B'}$. D'après la définition du déplacement (n° 190) et de la propriété (n° 40) :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) \iff (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}).$$

L'angle de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$ défini à $2k\pi$ près et qui peut toujours être supposé compris entre $-\pi$ et $+\pi$, est l'angle du déplacement.

TRANSLATION PLANE

193. Définition. — ***La translation plane est une transformation ponctuelle dans laquelle le vecteur joignant un point*** M ***à son transformé*** M′ ***est égal à un vecteur donné*** $\vec{T}$ ***du plan.***

Soit $\vec{T}$ le vecteur fixe non nul du plan (fig. 160). Le point M′ transformé du point M dans la translation de vecteur $\vec{T}$ est défini par : $\overrightarrow{MM'} = \vec{T}$.

Lorsque M décrit une figure F, le point M′ décrit la figure F′ transformée de F dans la translation $\vec{T}$. Ce vecteur $\vec{T}$ qui définit la translation est appelé *vecteur-translation.*

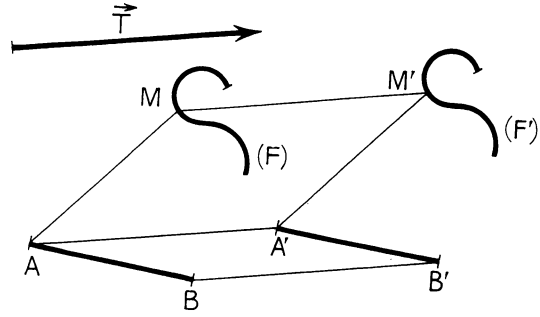


Fig. 160

Remarquons que :

1° Il n'existe pas de point double dans la translation de vecteur $\vec{T} \neq \vec{0}$.

2° Toute droite du plan parallèle au vecteur $\vec{T}$ est globalement invariante dans la translation $\vec{T}$.

3° Si M′ est le transformé de M dans la translation $\vec{T}$, le point M est le transformé de M′ dans la translation de vecteur $-\vec{T}$. La translation plane n'est pas une transformation involutive car $T^{-1} \neq T$ (n° 186).

4° La translation de vecteur $\vec{0}$ est la transformation identique I.

194. Théorème. — ***La translation plane est un déplacement plan d'angle nul.***

1° Soient A et B deux points fixes, M un point quelconque du plan, A′, B′ et M′ leurs homologues respectifs dans la translation $\vec{T}$ (fig. 160). Par définition :

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{MM'} = \vec{T}.$$

Donc : $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}.$$

Les angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ et $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'})$ ont leurs côtés parallèles et de même sens, on a donc : $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}).$$

Cette égalité jointe à AM = A′M′ montre (n° 190) que le point M′ est l'homologue du point M dans le déplacement défini par les segments égaux AB et A′B′.

2° Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ de ce déplacement est égal à zéro.

195. Réciproque. — ***Toute transformation ponctuelle plane dans laquelle le vecteur qui joint deux points quelconques est égal au vecteur qui joint leurs transformés est une translation.***

Soit A un point fixe, M un point variable, A′ et M′ leurs homologues dans la transformation considérée :

$$\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM} \implies \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}.$$

Le point M′ est donc le transformé de M dans la translation $\overrightarrow{AA'}$. Par suite :

196. Corollaire. — ***Tout déplacement plan d'angle nul est une translation.***

En effet un tel déplacement réalise $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$ quels que soient A et M.

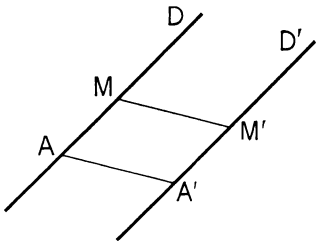


Fig. 161

197. Transformées des figures élémentaires. — 1° La translation étant un déplacement d'angle nul transforme un vecteur $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur égal $\overrightarrow{A'B'}$, une demi-droite Ax en une demi-droite parallèle et de même sens $A'x'$, une droite D en une droite D' de même direction, un angle orienté en un angle orienté égal, un cercle en un cercle égal.

2° Inversement, toute droite D' parallèle à la droite D se déduit de cette dernière dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ joignant un point quelconque A de D à un point quelconque A' de D' (fig. 161).

3° ***Tout cercle de centre ω' égal à un cercle de centre ω se déduit de ce dernier dans la translation de vecteur $\overrightarrow{\omega\omega'}$.***

En effet, deux rayons parallèles et de même sens ωM et $\omega' M'$ sont tels que $\overrightarrow{\omega' M'} = \overrightarrow{\omega M}$ dont $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{\omega\omega'}$.

Si les deux cercles ω et ω' se coupent en A et B (fig. 162), l'homologue B' du point B dans la translation $\overrightarrow{\omega\omega'}$, est diamétralement opposé au point A sur le cercle ω'. La droite BM parallèle à B'M' est donc perpendiculaire à AM'. De même AM est perpendiculaire à BM' et le *quadrangle* ABMM' *est orthocentrique.*

D'autre part, l'égalité : $(\overrightarrow{\omega' B'}, \overrightarrow{\omega' M'}) = (\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega M})$ entraîne $(AB', AM') = (AB, AM)$ et par suite :

$(AM, AM') = (AB, AB') = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{A\omega'})$.

En désignant par V la mesure de l'angle saillant $(\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{A\omega'})$ on voit que :

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est vu du point A *sous un angle de droites constant égal à* $\frac{V}{2}$.

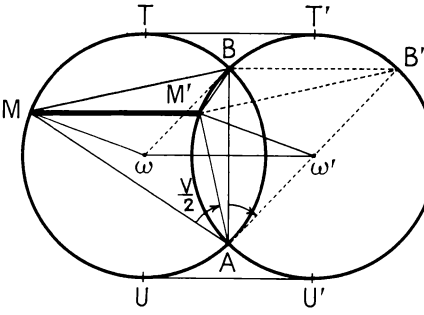


Fig. 162

Les tangentes communes TT' et UU' sont des positions particulières de MM'. Si les points A, B, T, U, sont disposés dans cet ordre sur le cercle ω, on en déduit que :

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT'}) = \frac{V}{2} \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{AU}, \overrightarrow{AU'}) = \frac{V}{2} - \pi.$$

198. Théorème. — ***Le produit des translations de vecteurs $\overrightarrow{T_1}, \overrightarrow{T_2}, \ldots \overrightarrow{T_n}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \ldots + \overrightarrow{T_n}$.***

Désignons par M_1 le transformé de M dans la translation $\overrightarrow{T_1}$, par M_2 le transformé de M_1 dans la translation $\overrightarrow{T_2}$, etc. Par hypothèse :

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{T_1}\,; \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{T_2}\,; \quad \ldots\ldots \quad \overrightarrow{M_{n-1}M_n} = \overrightarrow{T_n}.$$

Donc : $\overrightarrow{MM_n} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \ldots\ldots + \overrightarrow{M_{n-1}M_n} = \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \ldots + \overrightarrow{T_n} = \overrightarrow{T}$.

Le point M_n transformé de M dans le produit des translations considérées se déduit donc du point M dans la translation unique $\overrightarrow{T}$.

199. Groupe des translations planes. — Soit G l'ensemble des translations de vecteurs parallèles à un plan donné P. Désignons par T la translation de vecteur $\vec{T}$:

1° $T_1 \in G$ et $T_2 \in G \implies T_2 \circ T_1 \in G$.

2° $T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$ car $\vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{T_2} + \vec{T_1}$.

3° La transformation identique $I \in G$ car I est la translation de vecteur $\vec{0}$.

4° Si T est définie par $\vec{T}$, T^{-1} est définie par $-\vec{T}$. Donc : $T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = I$ car $\vec{T} + (-\vec{T}) = \vec{0}$.

Il en résulte que l'ensemble G a une structure de groupe abélien pour l'opération-produit.

ROTATION PLANE

200. Définition. — Soit un point fixe O du plan et un angle orienté θ défini à $2k\pi$ près. A tout point M du plan (fig. 163) faisons correspondre le point M′ défini par les égalités :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \quad \text{et} \quad OM' = OM.$$

Le point M′ ***est le transformé du point*** M ***dans la rotation plane de centre*** O ***et d'angle*** θ. En abrégé : *Rotation* (O, θ).

Lorsque le point M décrit une figure F, son homologue M′ décrit la figure F′ transformée de F dans cette rotation.

1° Si θ est nul (à $2k\pi$ près) la rotation se réduit à la transformation identique. Lorsque θ est différent de $2k\pi$ *le centre de rotation* O *est le seul point double de la transformation* et tout cercle de centre O est globalement invariant dans la transformation.

2° Si $\theta = \pm \pi$ le centre de rotation O est le milieu de MM′ (fig. 164). Les points M et M′ sont symétriques par rapport à O. Nous dirons dans ce cas que la rotation est la ***symétrie-point de centre*** O.

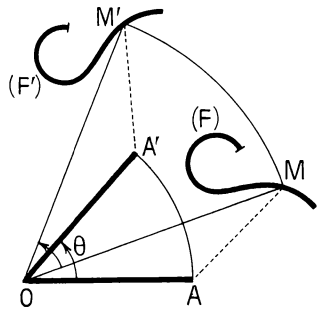


Fig. 163

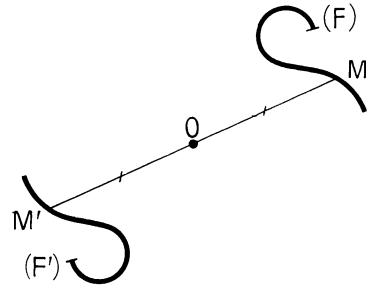


Fig. 164

3° Le point M est le transformé de M′ dans la rotation (O, — θ). La rotation n'est pas une transformation involutive sauf si $\theta = \pm \pi$, c'est-à-dire si la rotation est une symétrie-point.

201. Théorème. — ***La rotation plane est un déplacement plan dont l'angle est égal à l'angle de rotation.***

Soient O et A deux points fixes, M un point quelconque du plan (fig. 163). Leurs homologues respectifs dans la rotation (O, θ) sont O, A′ et M′. Donc :

$$OA = OA' ; \quad OM = OM' ; \quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta + 2k\pi.$$

On en déduit (n° 40) que : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM'})$. Cette égalité jointe à : OM = OM′ montre (n° 190) que M′ est le transformé de M dans le déplacement défini par les vecteurs de même module $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$.

L'angle de ce déplacement est $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta$, c'est-à-dire l'angle de rotation.

Il en résulte que la rotation transforme une droite en une droite, un segment en un segment égal, un angle orienté en un angle orienté égal, un cercle en un cercle égal, etc.

202. Corollaire I. — *Dans toute symétrie-point deux vecteurs homologues sont opposés.*

En effet (fig. 165) on a :

$$AM = A'M' \text{ et } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \pi \implies \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{A'M'}.$$

Réciproquement si $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{A'M'}$, le quadrilatère AMA′M′ est un parallélogramme. Donc M et M′ sont symétriques par rapport au milieu O de AA′.

Pour qu'une transformation ponctuelle soit une symétrie-point il faut et il suffit que le vecteur joignant deux points quelconques et le vecteur joignant leurs transformés soient opposés.

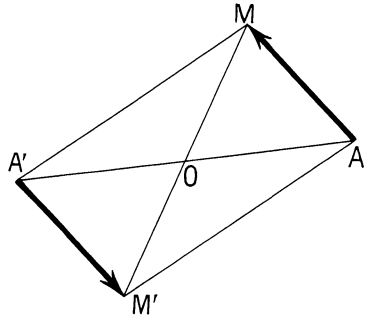


Fig. 165

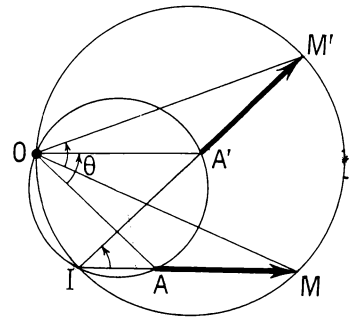


Fig. 166

203. Corollaire II. — *Dans toute rotation, distincte d'une symétrie-point, le centre de rotation, deux points homologues et l'intersection de deux droites homologues issues de ces deux points sur un même cercle.*

Soit I l'intersection de deux droites homologues AM et A′M′ dans la rotation (O, θ) (fig. 166) :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta + 2k\pi \implies (OA, OA') = (IA, IA') = \theta + k\pi.$$

Les quatre points O,A,A′ et I sont cocycliques (n° 57) et il en est de même de O,M,M′ et I.

204. Théorème. — *Tout déplacement plan est une rotation lorsque l'angle du déplacement n'est pas nul, une translation dans le cas contraire.*

Nous avons déjà démontré (n° 196) qu'un déplacement plan d'angle nul est une translation.

Considérons un déplacement d'angle $\theta \neq 2k\pi$ transformant le point fixe A et le point quelconque M en A′ et M′ (fig. 167). Par hypothèse :

$$AM = A'M' \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta.$$

Il existe une rotation unique d'angle θ transformant A en A′. Son centre O, défini par les égalités $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta$ et $OA = OA'$, appartient à l'arc de cercle d'extrémités A et A′, capable de l'angle de vecteurs θ (n° 55) et à la médiatrice du segment AA′. C'est donc le milieu de l'arc AA′. La rotation (O, θ) transforme $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OA'}$, et :

$$(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A'O}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta \implies (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'O}, \overrightarrow{A'M'}).$$

Cette égalité jointe à $AM = A'M'$ montre que M′ est l'homologue de M dans le déplacement qui transforme $\overrightarrow{AO}$ en $\overrightarrow{A'O}$, c'est-à-dire la rotation (O, θ).

Si $\theta = \pm \pi$ l'arc capable AA′ se réduit au segment AA′ (n° 55, 1°) et le point O est le milieu du segment AA′. La rotation (O, θ) est alors la symétrie-point O.

Ce théorème montre que :

1° *Il n'y a pas de déplacement-plan autre que la rotation et la translation ;*

2° *Deux figures directement égales du plan se correspondent en général dans une rotation, éventuellement dans une translation.*

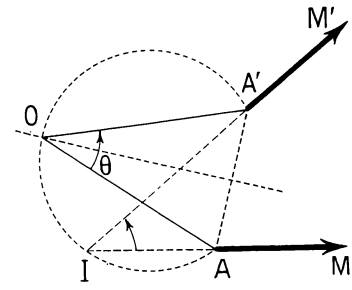


Fig. 167

205. Corollaire. — *Tout déplacement qui admet un point double* O *est une rotation de centre* O.

D'après ce qui précède, seule une rotation de centre O admet le point O comme point double.

On voit d'ailleurs directement que si M et M′ sont homologues dans le déplacement défini par les segments homologues égaux OA et OA′, les relations :

$$OA = OA' ; \quad OM = OM' ; \quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM'})$$

entraînent :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta.$$

La rotation (O, θ) qui transforme A en A′, transforme donc tout point M en son homologue M′ dans le déplacement considéré.

206. Propriétés du centre de rotation. — Soit $\overrightarrow{A'M'}$ l'homologue de $\overrightarrow{AM}$ dans la rotation (O, θ). Désignons par I l'intersection des droites homologues AM et A′M′ :

1° Les égalités telles que $OA = OA'$, $OM = OM'$, etc. montrent que :

Les médiatrices des segments joignant deux points homologues concourent au centre de rotation :

2° Les égalités telles que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta + 2k\pi$ montrent que :

Les arcs capables de l'angle de vecteurs θ ayant pour extrémités deux points homologues concourent au centre de rotation et ont ce point pour milieu.

On sait que les cercles OAA′ et OMM′ passent par I (n° 203). Le point O est donc le second point commun aux cercles IAA′ et IMM′.

3° Les projections H et H′ de O sur les droites AM et A′M′ sont homologues dans la rotation. L'égalité $OH = OH'$ montre (fig. 168) que O appartient à la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IH'})$ et par suite à la bissectrice extérieure des axes homologues $\overrightarrow{Hx}$ et $\overrightarrow{H'x'}$:

La bissectrice extérieure de l'angle de deux axes homologues passe par le centre de rotation.

207. Applications. — 1° La rotation transforme une droite D en une droite D′ telle que (D, D′) soit égal à l'angle de rotation à $k\pi$ près. Inversement, deux droites D et D′ d'un même plan se correspondent dans toute rotation ayant pour centre un point O équidistant de D et D′ et pour angle $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'})$ où H et H′ désignent les projections de O sur les droites D et D′ (fig. 168).

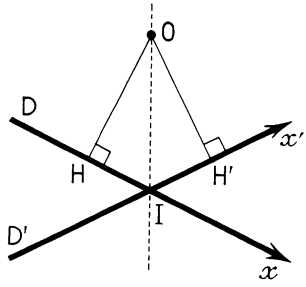


Fig. 168

2° La rotation transforme un cercle en un cercle égal. Réciproquement, deux cercles égaux d'un même plan se correspondent dans toute rotation qui fait correspondre leurs centres. En particulier deux cercles égaux de centres ω et ω′, sécants en A et B (fig. 169) se correspondent dans la rotation de centre A, d'angle $(\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{A\omega'})$.

L'égalité $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega M}) = (\overrightarrow{\omega' A}, \overrightarrow{\omega' M'})$ entraîne l'égalité des angles (BA, BM) et (BA, BM′), ce qui prouve que MM′ passe par B :

Deux cercles sécants égaux se correspondent dans une rotation ayant pour centre l'un des points communs et la droite qui joint deux points homologues passe par le second point commun.

Les deux cercles étant orientés dans le même sens, notons que l'angle $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT'})$ des tangentes orientées en A est égal à l'angle de rotation $(\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{A\omega'}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = V$.

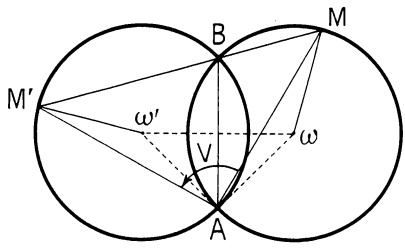


Fig. 169

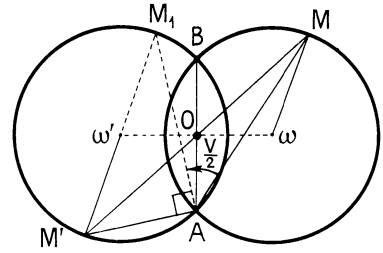


Fig. 170

Deux cercles égaux ω et ω′ se correspondent également dans la symétrie par rapport au milieu O *de* ωω′. Les rayons homologues $\overrightarrow{\omega M}$ et $\overrightarrow{\omega' M'}$ sont opposés (fig. 170). Si les cercles se coupent en A et si M_1 est diamétralement opposé à M′ (n° 197) :

$$(AM, AM') = (AM, AM_1) + (AM_1, AM') = \frac{V}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi + V}{2}.$$

208. Théorème. — ***Le produit de deux déplacements plans*** D_1 ***et*** D_2 ***d'angles respectifs*** α_1 ***et*** α_2 ***est un déplacement plan*** D ***d'angle*** $\alpha_1 + \alpha_2$.

Le déplacement D_1 transforme la figure F en F_1 et le déplacement D_2 transforme F_1 en F_2. Les figures F et F_2 directement égales à F_1 sont directement égales entre elles et se correspondent dans un déplacement D. Désignons par $\overrightarrow{A_1B_1}$ le transformé de $\overrightarrow{AB}$ dans le déplacement D_1 et par $\overrightarrow{A_2B_2}$ le transformé de $\overrightarrow{A_1B_1}$ dans le déplacement D_2. On obtient :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_2B_2}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) + (\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}) = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Le déplacement D a pour angle $\alpha_1 + \alpha_2$. C'est donc (n° 204) une translation si $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ ou $2k\pi$, une rotation dans le cas contraire.

Si $\alpha_1 + \alpha_2 = \pm \pi$, on obtient une symétrie-point.

Ainsi le produit de deux rotations d'angles opposés (O_1, α) et $(O_2, -\alpha)$ est une translation, le produit de deux rotations d'angles droits de même sens est une symétrie-point, etc. En particulier :

Le produit des symétries-points de centres O_1 ***et*** O_2 ***est la translation de vecteur*** $2\overrightarrow{O_1O_2}$.

En effet si M_1 est le symétrique d'un point quelconque M par rapport à O_1 et M_2 le symétrique de M_1 par rapport à O_2 on a (fig. 171) :

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2\,\overrightarrow{O_1M_1} + 2\,\overrightarrow{M_1O_2}$$

$$\text{Soit : } \overrightarrow{MM_2} = 2\,\overrightarrow{O_1O_2}.$$

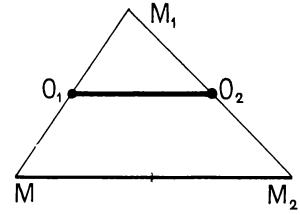


Fig. 171

209. Groupe des déplacements plans. — Soit G l'ensemble des déplacements dans un plan donné P :

1° $D_1 \in G$ et $D_2 \in G \implies D_2 \circ D_1 \in G$ (n° 208).

2° La transformation identique $I \in G$. On peut la considérer comme une translation de vecteur $\vec{0}$ ou une rotation $(O, 2k\pi)$.

3° $\forall D \in G$ il existe un déplacement inverse D^{-1} : c'est la translation de vecteur $-\vec{T}$ si D est la translation de vecteur $\vec{T}$; c'est la rotation $(O, -\theta)$ si D est la rotation (O, θ).

Donc :

L'ensemble des déplacements dans un plan a une structure de groupe pour l'opération produit (n° 188).

L'ensemble G′ des translations dans P est un sous-ensemble de G appelé sous-groupe des translations dans P.

EXERCICES

259. Dans un parallélogramme ABCD les sommets A et B sont fixes. On construit le triangle équilatéral de sens direct CDM. Trouver les lieux géométriques des points D et M lorsque le point C décrit une droite ou un cercle donné.

260. Un cercle ω de rayon R donné passe par un point fixe A. Un diamètre MN de ce cercle conserve une direction fixe. Déterminer les lieux géométriques des points M et N ainsi que l'enveloppe du cercle ω.

261. Dans un triangle variable ABC le sommet A est fixe, l'angle (AB, AC) est constant et le vecteur BC est égal à un vecteur fixe. Trouver :

1° Les lieux géométriques des sommets B et C.

2° L'enveloppe des hauteurs issues de B et de C et celle du cercle ABC.

262. Deux cercles O et O′ se coupent en A et B. Soient C et D les points diamétralement opposés à A dans ces deux cercles. Une sécante variable issue de A coupe en P le cercle O et en Q le cercle O′. La droite CP coupe en M la parallèle à CD menée par Q et la droite DQ coupe en N la parallèle à CD menée par P. Trouver les lieux géométriques des points M et N.

263. On donne un triangle fixe ABC et on construit le parallélogramme BCDE. Les perpendiculaires menées de D à AB et de E à AC se coupent en M. Trouver le lieu du point M lorsque D décrit une droite ou un cercle donné.

264. Construire un quadrilatère convexe ABCD connaissant :

1° Les longueurs AB et CD et les quatre angles.

2° Les longueurs AB, BC et CD et les angles A et D.

265. On donne un quadrilatère convexe ABCD et on construit les vecteurs $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CA}$.

1° Montrer que l'on retrouve dans la figure ABDEF toutes les longueurs et tous les angles formés par le quadrilatère et ses diagonales.

2° Construire un quadrilatère ABCD connaissant les longueurs AC et BD ainsi que l'angle (AC, BD) des diagonales et deux autres éléments (côtés ou angles) du quadrilatère.

266. Construire un trapèze ABCD de bases AB et CD connaissant :

1° L'angle A, les longueurs AD et BC, l'une des longueurs AB ou AC.

2° Les longueurs AC, BD et l'angle (AC, BD) des diagonales et en outre une base, un côté ou un des angles du trapèze.

267. Dans un trapèze isocèle de bases AB et CD, la diagonale AC est bissectrice de l'angle A.

1° On donne AB = l, CD = l'. Construire le trapèze. Discuter.

2° On donne AB + CD = l et la longueur l' des diagonales. Construire le trapèze. Discuter.

268. On considère un cercle fixe C, de centre O, de rayon R et un point fixe A extérieur au cercle tel que OA = d. Soit MM′ un diamètre variable du cercle C. La droite MA recoupe le cercle en Q et coupe en P la parallèle à OA issue de M′. La droite M′A recoupe le cercle en Q′ et coupe en P′ la parallèle à OA issue de M.

1° Montrer que la droite PP′ passe par un point fixe.

2° Trouver le lieu géométrique des points P et P′.

3° Construire le diamètre MM′ connaissant l'angle MAM′ = α. Discuter. Quelle est la valeur maxima de $\alpha = \widehat{MAM'}$ quand le point M décrit le cercle ? (On calculera tg α en fonction de $\theta = \widehat{MOA}$ et on évitera tout calcul de dérivée.)

269. On donne dans un plan P une droite D et un point A non situé sur cette droite :

1° Construire un triangle ABC ayant un sommet en A, sachant que la droite D est médiatrice du côté BC et connaissant la longueur d'un côté ainsi que l'angle opposé à ce côté.

2° Construire ce triangle ABC connaissant la hauteur issue de A et l'angle en A.

3° On suppose, $\widehat{A} = 30°$ et BC = $2a$; a longueur donnée. Le point A restant fixe, la droite D se déplace parallèlement à elle-même. On demande des lieux géométriques des sommets B et C et du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

4° En supposant la droite D fixe et le sommet A se déplaçant sur une droite Δ perpendiculaire à D, trouver les lieux géométriques des sommets B et C, de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

270. Étant donné un triangle AMN, on construit les transformés B et C de A et N dans la rotation (M, α) où α désigne un angle donné, puis le transformé D de N dans la rotation (A, α). Comparer les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ et en déduire la nature du quadrilatère ABCD.

271. 1° Quel est le lieu géométrique des centres des rotations qui, dans un plan P, transforment une droite donnée D en une droite donnée D′ ?

2° Construire les centres ω et ω' des rotations qui transforment D en D′ en faisant correspondre un point donné A de D à un point donné A′ de D′. Montrer que le rapport $\frac{A\omega}{A\omega'}$ ainsi que l'angle $(A\omega, A\omega')$ sont indépendants de A et A′.

272. 1° Quel est le lieu géométrique des centres des rotations qui, dans un plan P, transforment un cercle (O, R) en un cercle égal (O′, R) ?

2° Construire le centre ω de la rotation qui en outre transforme un point donné A du premier cercle en un point donné A′ du second.

273. Soient deux cercles égaux O et O′ sécants en A et B tels que $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) = V$.

1° Construire le centre ω d'une rotation d'angle donnée θ qui transforme O en O′, puis l'homologue M′ d'un point donné M du premier cercle.

2° Démontrer que l'angle (AM, AM′) est constant et égal à $\frac{V + \theta}{2}$.

274. On donne un cercle fixe de centre O et un point fixe ω. On construit un triangle équilatéral ABC de centre ω dont le sommet A décrit le cercle O. Trouver les lieux géométriques des sommets B et C. Reprendre le même problème avec un carré ABCD ou un hexagone régulier de centre ω.

275. Construire un segment AB connaissant son milieu O sachant que le point A appartient à un cercle (ou une droite) donné Γ et que le point B appartient à un cercle (ou une droite) donné Γ'.

276. Construire un triangle équilatéral ABC de sens direct connaissant le sommet A et sachant que B et C appartiennent respectivement à deux cercles (ou droites) donnés.

277. Inscrire un carré MNPQ dans un parallélogramme donné ABCD en plaçant un sommet sur chacun des côtés de ce parallélogramme. (On commencera par montrer que le centre du carré coïncide avec celui du parallélogramme.)

278. On donne deux cercles concentriques de centre O et une droite D.

1° Montrer que les différentes transformées de D par rotation de centre O et d'angle variable restent tangentes à un cercle fixe γ de centre O.

2° Construire un cercle ω tangent aux deux cercles donnés et à la droite D (4 solutions si D coupe le plus grand des deux cercles).

279. On considère un triangle isocèle AOB de sommet O et on mène, à un cercle variable de centre O, les tangentes AC et BD non symétriques par rapport à la hauteur OH.

1° Lieux géométriques de C, de D et du point M intersection de AC et BD.

2° Enveloppes de la droite CD et des bissectrices de l'angle AMB.

3° Démontrer que : $MA.MB = \overline{OA}^2 - \overline{OM}^2$.

280. On construit extérieurement à l'angle BAC du triangle ABC les segments AM, CN et BP respectivement perpendiculaires et égaux à BC, CA et AB.

1° Comparer les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{PC}$, puis $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{NB}$ en module et en direction et montrer que les droites MA, NB et PC sont concourantes.

2° Soient O, I, J, K les milieux des segments BC, PN, NA et AP. Trouver la nature des triangles JMB et KMC.

3° On achève le parallélogramme BACD. Nature des triangles DNP, OJK et IBC ?

281. Soit un triangle isocèle OAB d'angle au sommet $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \alpha$. On désigne par H l'orthocentre et par I, J, K les pieds des hauteurs issues de O, A et B. Soient d'autre part M et N les projections de A et B sur une sécante variable Δ passant par O.

1° Trouver les lieux géométriques de M et N, la valeur de l'angle $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN})$ et comparer en module et en direction les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{KN}$ puis $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{JM}$.

2° Les droites AM et KN se coupent en P, BN et JM se coupent en Q. Lieux géométriques de P et Q et enveloppe de la droite PQ ?

3° Trouver la valeur de l'angle $(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IQ})$ et comparer les segments AP et JQ, puis BQ et KP.

282. Construire, extérieurement au triangle ABC, les triangles équilatéraux A'BC, AB'C et ABC'.

1° Comparer les trois vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ en module et en direction et montrer que leurs supports concourent en un point I.

2° On suppose I intérieur au triangle ABC. On prolonge IB d'une longueur BD = IC. Trouver la nature du triangle A'ID et montrer que AA' = IA + IB + IC.

3° Démontrer la relation vectorielle $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ et en déduire que les deux triangles ABC et A'B'C' ont même centre de gravité G.

283. Soient deux axes rectangulaires Ox et Oy et a une longueur donnée. On prend sur l'axe Ox le point fixe A et le point variable M, sur l'axe Oy, le point fixe B et le point variable N tels que $\overline{OA} = \overline{OB} = a$ et $\overline{OM} + \overline{ON} = 2a$.

1° Comparer en module et en direction les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BN}$. Montrer que la médiatrice de MN passe par un point fixe ω et préciser la nature du triangle ωMN.

2° Trouver le lieu du milieu I de MN, le lieu du sommet P du rectangle MONP, l'enveloppe de la perpendiculaire Pz à MN et le lieu de la projection du point O sur Pz.

3° Construire le segment MN connaissant sa longueur ou sa direction ou bien lorsque la droite MN passe par un point donné S.

284. On considère un triangle ABC (prendre A obtus) et on désigne par I, J, K les milieux des côtés BC, CA et AB, puis on construit les carrés CQAQ' et ARBR' de même sens que le triangle ABC.

1° Comparer en module et en direction $\overrightarrow{RQ'}$ et $\overrightarrow{R'Q}$ et montrer que les droites QR' et Q'R se coupent au pied A' de la hauteur AA' du triangle ABC.

2° On achève le parallélogramme QARP' et Q'AR'P. Montrer que le quadrilatère BPCP' est un carré de même sens que ABC.

3° Comparer les vecteurs $\overrightarrow{IQ}$ et $\overrightarrow{IR}$, $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{QR}$ et donner les autres couples analogues. En déduire que les droites AP, BQ et CR sont concourantes, ainsi que AP', BQ' et CR'.

4° Montrer que les trois triangles ABC, PQR et P'Q'R' ont même centre de gravité.

285. Soit un segment AB = a, un point M variable de ce segment. On construit d'un même côté de AB les triangles équilatéraux PAM et QMB. On désigne par C l'intersection des droites AP et BQ.

1° Lieu géométrique du milieu O de PQ.

2° Montrer que la médiatrice de PQ passe par un point fixe F. Que peut-on dire des cercles circonscrits aux triangles PMQ ?

3° Lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au triangle CPQ.

4° Construire le segment PQ connaissant sa direction ou sa longueur.

286. On donne deux cercles égaux de centres O_1 et O_2, de rayon R. Deux points M_1 et M_2 variables sur les cercles O_1 et O_2 sont tels que $(\overrightarrow{O_1M_1}, \overrightarrow{O_2M_2}) = +\frac{\pi}{2}$.

1° Lieu géométrique de l'intersection des droites O_1M_1 et O_2M_2.

2° Montrer que la médiatrice de M_1M_2 passe par un point fixe I.

3° Construire le segment M_1M_2 dans chacun des cas suivants et discuter :

a) M_1M_2 a une longueur donnée l.

b) M_1M_2 est parallèle à une direction donnée Δ.

c) M_1M_2 est tangente à l'un ou à l'autre des cercles O_1 ou O_2.

SYMÉTRIE AXIALE DANS LE PLAN

210. Figures inversement égales dans le plan. — Deux figures superposables F et F′ d'un plan P sont dites *inversement égales* si, pour amener la figure F sur la figure F′, il faut d'abord retourner le plan P sur lui-même. Dans deux figures inversement égales F et F′, deux segments homologues sont égaux tandis que deux angles orientés homologues sont opposés.

— La correspondance entre deux figures F et F′ inversement égales du plan est appelée *antidéplacement* et peut être définie de la façon suivante :

Considérons dans le plan deux segments égaux AB et A′B′ et un point quelconque M (fig. 172). Construisons le point M′ tel que :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) \quad \text{et} \quad A'M' = AM.$$

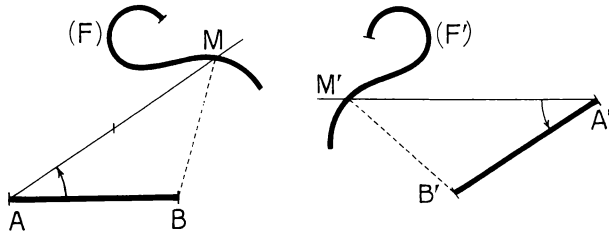


Fig. 172

Le triangle A′B′M′ est inversement égal au triangle ABM. Lorsque le point M décrit une figure F, son homologue M′ décrit une figure F′ inversement égale à F et dans laquelle A′ et B′ sont les homologues de A et de B.

En effet, si on retourne le plan P sur lui-même, on peut amener le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en coïncidence avec $\overrightarrow{A'B'}$. Tout point M de F coïncide alors avec son homologue M′ de la figure F′. Notons que :

1° Un antidéplacement est déterminé quand on connaît un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et son transformé $\overrightarrow{A'B'}$ de même module ;

2° Deux figures F_1 et F_2, inversement égales à la figure F, sont directement égales. Le produit de deux antidéplacements plans est donc un déplacement plan.

211. Symétrie axiale dans le plan. — Rappelons que deux points M et M′ sont symétriques par rapport à une droite Δ, lorsque cette droite est médiatrice du segment MM′.

Considérons dans le plan P, une droite fixe Δ appelée *axe de symétrie* (fig. 173). A tout point M du plan correspond un point M′ symétrique de M par rapport à Δ. On l'obtient en projetant M en H sur Δ et en construisant $\overrightarrow{HM'} = \overrightarrow{MH}$.

La transformation ponctuelle ainsi définie est la symétrie axiale d'axe Δ ***ou symétrie-droite*** Δ. *En abrégé : Symétrie axiale* Δ *ou* S (Δ).

Si M décrit une figure F, M′ décrit une figure F′ symétrique de F par rapport à Δ. Notons que cette transformation est involutive. Elle possède une infinité de points doubles, car tout point de l'axe Δ est invariant. Tout cercle centré sur Δ est globalement invariant ainsi que toute droite perpendiculaire à Δ.

212. Théorème. — ***Deux figures d'un même plan symétriques par rapport à une droite de ce plan sont inversement égales.***

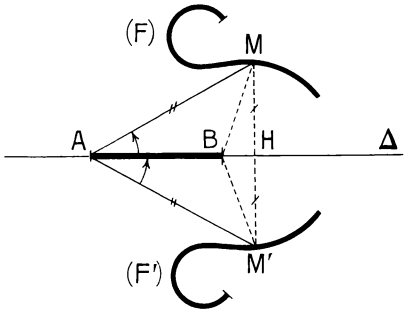


Fig. 173

Soient A et B deux points de l'axe de symétrie Δ, M un point quelconque et M′ son symétrique par rapport à Δ (fig. 173). La droite Δ, médiatrice de MM′, est bissectrice de l'angle au sommet du triangle isocèle AMM′ :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$$

et

$$AM = AM'.$$

Donc (n° 210), lorsque M décrit une figure F du plan, le point M′ décrit une figure F′ inversement égale à F.

213. Conséquences. — Dans toute symétrie axiale du plan deux segments homologues sont égaux et deux angles orientés homologues sont opposés.

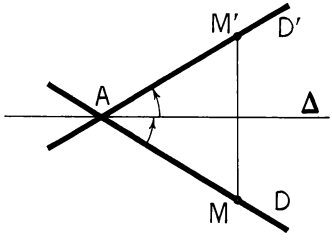


Fig. 174

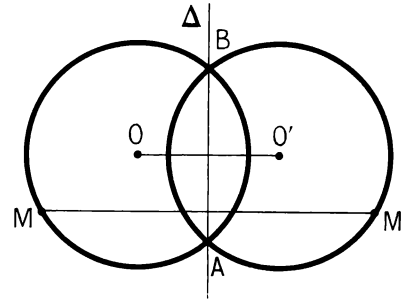


Fig. 175

Deux droites homologues se coupent sur l'axe de symétrie (fig. 174) *ou lui sont parallèles. Cet axe de symétrie est la bissectrice intérieure de deux axes concourants homologues.* Inversement deux droites données sont symétriques par rapport à l'une ou l'autre de leurs bissectrices.

Le symétrique d'un cercle O par rapport à une droite Δ est un cercle égal O′, confondu avec le premier si Δ passe par O. Réciproquement :

Deux cercles égaux O *et* O′ (fig. 175) *se correspondent dans la symétrie par rapport à la médiatrice de* OO′ *et tout cercle se conserve dans la symétrie par rapport à l'un quelconque de ses diamètres.*

Il en résulte que l'axe de symétrie de deux cercles égaux sécants en AB est la corde commune AB et que les points d'intersection A et B de deux cercles quelconques sont symétriques par rapport à la droite des centres.

214. Réciproque. — ***Si deux figures inversement égales d'un plan possèdent un point double, elles sont symétriques par rapport à une droite issue de ce point.***

Soit A le point double, B un point déterminé de la figure F et B′ son homologue de la figure F′ inversement égale à la figure F (fig. 176). La symétrie par rapport à la médiatrice Δ de BB′ transforme AB en AB′ et transforme la figure F en une figure F″ inversement égale à F donc (n° 210) directement égale à F′.

Les deux figures F′ et F″ possédant deux points homologues communs A et B′ sont confondues (n° 191). Autrement dit F′ est symétrique de F par rapport à Δ.

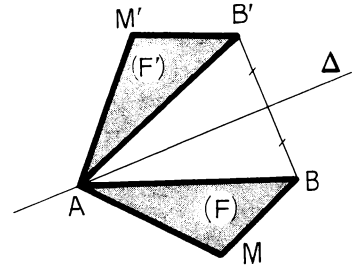


Fig. 176

215. Théorème. — ***Deux figures inversement égales d'un même plan se correspondent dans le produit commutatif d'une symétrie d'axe Δ par une translation parallèle à Δ.***

Soient A et B deux points d'une figure F, A′ et B′ leurs homologues dans la figure F′ inversement égale à F (fig. 177). Par le milieu I de AA′, menons l'axe Δ défini par : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Delta}) = (\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{A'B'})$. La symétrie d'axe Δ transforme F en une figure F_1 inversement égale à F, donc directement égale à F′. Elle transforme en particulier $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$ tel que :

$$\left.\begin{array}{l}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Delta}) = (\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{A_1B_1}) \\ A_1B_1 = AB = A'B'\end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A'B'}.$$

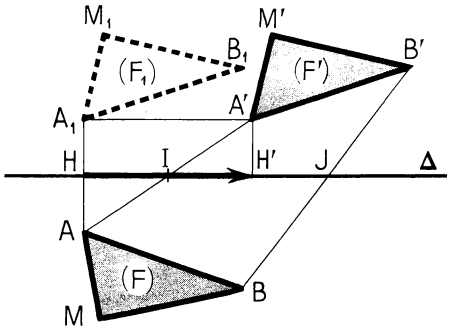


Fig. 177

Il en résulte que F′ est la transformée de F_1 dans la translation $\overrightarrow{A_1A'}$ (n° 196) dont le support est parallèle à Δ puisque Δ passe par les milieux H et I de AA_1 et de AA′. Le produit de la symétrie Δ par la translation $\overrightarrow{A_1A'}$ est d'ailleurs commutatif. Notons que :

La droite Δ est la seule droite invariante dans la transformation. Elle contient le milieu de tout vecteur MM′ *joignant deux points homologues et la projection de ce vecteur* $\overrightarrow{MM'}$ *sur Δ est constante et égale au vecteur de la translation. La droite Δ se nomme axe de l'anti-déplacement.*

PRODUITS DE SYMÉTRIES ET DÉPLACEMENTS

216. Produit de deux symétries-axiales dans le plan. — La symétrie droite Δ_1 transforme toute figure F en F_1 et la symétrie droite Δ_2 transforme F_1 en F_2. Les figures F et F_2, inversement égales à F, sont directement égales. Le produit des deux symétries $S(\Delta_2) \circ S(\Delta_1)$ qui transforme F en F_2 est donc un déplacement.

217. 1er cas : Les deux axes Δ_1 et Δ_2 sont parallèles. — La symétrie Δ_1 transforme le point M en M_1 et la symétrie Δ_2 transforme M_1 en M_2. On a (fig. 178) :

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2\,\overrightarrow{H_1M_1} + 2\,\overrightarrow{M_1H_2} = 2\,\overrightarrow{H_1H_2}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{H_1H_2}$, perpendiculaire à Δ_1 et Δ_2, est indépendant du point M. Donc :

Le produit de deux symétries d'axes parallèles est la translation perpendiculaire aux deux axes, double de celle qui transforme le premier axe en le second.

Le produit n'est pas commutatif car le produit $S(\Delta_1)$ o $S(\Delta_2)$ est équivalent à la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{H_2H_1}$. Réciproquement :

Toute translation de vecteur $\vec{T}$ *est équivalente au produit de deux symétries d'axes perpendiculaires au vecteur* $\vec{T}$, *le second se déduisant du premier dans la translation* $\frac{\vec{T}}{2}$.

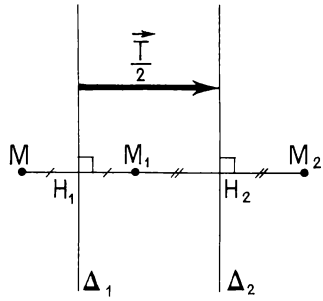


Fig. 178

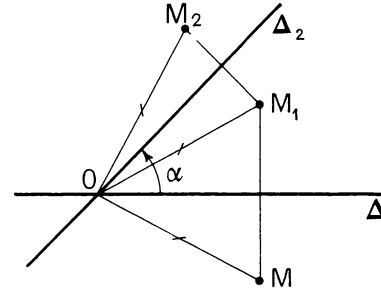


Fig. 179

Construisons un vecteur $\overrightarrow{H_1H_2} = \frac{\vec{T}}{2}$ puis les droites Δ_1 et Δ_2, respectivement perpendiculaires en H_1 et H_2 à la droite H_1H_2. Le produit des symétries d'axes Δ_1 et Δ_2 est la translation $\vec{T}$.

218. 2e cas : Les deux axes Δ_1 et Δ_2 sont concourants. — Soit O leur point commun (fig. 179) et α l'angle de droites (Δ_1, Δ_2). La symétrie Δ_1 transforme OM en OM_1 et la symétrie Δ_2 transforme OM_1 en OM_2.

On a donc $OM = OM_1 = OM_2$ soit $OM = OM_2$. D'autre part Δ_1 et Δ_2 sont les bissectrices intérieures des angles de vecteurs $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1})$ et $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$. On obtient (n° 48) : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}) = 2\,(\Delta_1, \Delta_2) = 2\alpha$ (à $2k\pi$ près). Le point M_2 se déduit donc de M dans la rotation $(O, 2\alpha)$.

Le produit des symétries par rapport à deux droites concourantes en O ***est la rotation de centre*** O ***dont l'angle est le double de l'angle orienté de ces deux droites.***

Ce produit $S(\Delta_2)$ o $S(\Delta_1)$ n'est pas, en général, commutatif, car $S(\Delta_1)$ o $S(\Delta_2)$ équivaut à la rotation $(O, -2\alpha)$. Réciproquement :

Toute rotation plane (O, θ) *est équivalente au produit des symétries par rapport à deux droites issues de* O *et faisant l'angle* $\frac{\theta}{2}$.

Construisons une droite quelconque Δ_1 issue de O, puis la droite Δ_2 issue de O telle que $(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\theta}{2}$. Le produit $S(\Delta_2)$ o $S(\Delta_1)$ est la rotation (O, θ).

219. Cas où les deux axes Δ_1 et Δ_2 sont rectangulaires. — En particulier (fig. 180) si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la rotation $(O, 2\alpha)$ est la symétrie-point de centre O.

Le produit des symétries par rapport à deux droites rectangulaires est la symétrie-point dont le centre est le point commun à ces deux droites.

C'est le seul cas où le produit $S(\Delta_2)$ o $S(\Delta_1)$ est commutatif. Réciproquement :

Toute symétrie par rapport à un point est équivalente au produit des symétries par rapport à deux droites perpendiculaires issues de ce point.

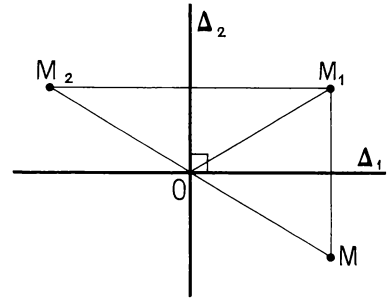


Fig. 180

220. Application au produit de deux déplacements plans. — La décomposition de chacun de ces déplacements en un produit de deux symétries droites permet d'obtenir aisément la forme réduite du produit de ces deux déplacements.

221. Produit de deux rotations (O_1, α_1) et (O_2, α_2). — Désignons (fig. 181) par Δ_2 la droite O_1O_2, par Δ_1 la droite issue de O_1 telle que $(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\alpha_1}{2}$ et par Δ_3 la droite issue de O_2 telle que $(\Delta_2, \Delta_3) = \frac{\alpha_2}{2}$.

Le produit $R(O_2, \alpha_2)$ o $R(O_1, \alpha_1)$ équivaut au produit de quatre symétries :

$$S(\Delta_3) \text{ o } S(\Delta_2) \text{ o } S(\Delta_2) \text{ o } S(\Delta_1).$$

La seconde et la troisième s'associant pour donner la transformation identique, on obtient :

$$R(O_2, \alpha_2) \text{ o } R(O_1, \alpha_1) = S(\Delta_3) \text{ o } S(\Delta_1).$$

Or : $$(\Delta_1, \Delta_3) = (\Delta_1, \Delta_2) + (\Delta_2, \Delta_3) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + k\pi.$$

1° Si $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ ou $2k\pi$, les droites Δ_1 et Δ_3 se coupent en O.

Le produit des deux rotations est la rotation $(O, \alpha_1 + \alpha_2)$.

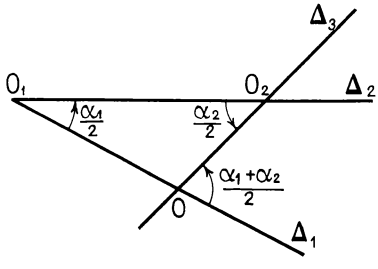


Fig. 181

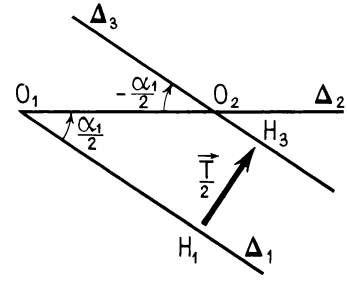


Fig. 182

2° Si $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, on a : $\alpha_2 = -\alpha_1$ (fig. 182), les deux droites Δ_1 et Δ_3 sont parallèles. Le produit des deux rotations est la translation de vecteur $2\overrightarrow{H_1H_3}$.

Le produit de deux rotations d'angles opposés est une translation.

Notons que le produit de deux rotations de centres différents n'est pas commutatif, car O_1 n'a pas même transformé dans les deux cas.

222. Produit d'une symétrie axiale et d'un déplacement. — La symétrie axiale $S(\Delta)$ transforme une figure F_1 en une figure F inversement égale à F. Le déplacement

(D) transforme F_1 en une figure F_2 directement égale à F_1, et par suite inversement égale à F.

Le produit (D) o S(Δ) de la symétrie S(Δ) et du déplacement (D) est donc un antidéplacement (n° 210). Il en est de même du produit (S)Δ o D. Montrons comment on peut obtenir la forme réduite de cet antidéplacement (n° 215).

223. Produit d'une symétrie axiale S(Δ) **et d'une translation** $(\vec{T})$. — Soit A un point de l'axe Δ et A′ son transformé dans $(\vec{T})$ (fig. 183). Désignons par Δ_1 la parallèle à Δ menée par le milieu I de AA′, par A_1 la projection de A′ sur Δ et par A_2 le symétrique de A par rapport à Δ_1. Posons $\overrightarrow{AA_1} = \vec{T}_1$, $\overrightarrow{AA_2} = \vec{T}_2$. On voit que $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$ et que :

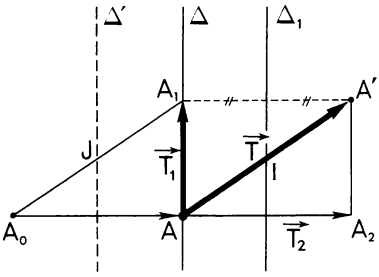


Fig. 183

$$(\vec{T}) \text{ o } S(\Delta) = (\vec{T}_1) \text{ o } (\vec{T}_2) \text{ o } S(\Delta).$$

Or : $(\vec{T}_2) = S(\Delta_1) \text{ o } S(\Delta)$

donc : $(\vec{T}) \text{ o } S(\Delta) = (\vec{T}_1) \text{ o } S(\Delta_1) \text{ o } S(\Delta) \text{ o } S(\Delta)$.

Soit : $(\vec{T}) \text{ o } S(\Delta) = (\vec{T}_1) \text{ o } S(\Delta_1) = S(\Delta_1) \text{ o } (\vec{T}_1)$.

Le produit de la symétrie S(Δ) ***et de la translation*** $(\vec{T})$ ***est équivalent au produit commutatif de la symétrie*** $S(\Delta_1)$ ***et de la translation*** $(\vec{T}_1)$ ***parallèle à*** Δ.

On retrouve la forme réduite d'un antidéplacement (n° 215). L'axe Δ_1 passe par le milieu I du vecteur $\overrightarrow{AA'}$ joignant le point A à son transformé A′ et le vecteur $\vec{T}_1$ de la translation n'est autre que la projection de $\overrightarrow{AA'}$ sur cet axe Δ_1. On verrait de même (fig. 183) que : S (Δ) o T = S (Δ′) o $\vec{T}_1$ = $\vec{T}_1$ o S (Δ′).

224. Produit d'une rotation (O, α) **et d'une symétrie axiale** S (Δ). — Désignons (fig. 184) par ω le symétrique de O par rapport à Δ, par I le milieu de Oω et par Δ_2 la parallèle à Δ menée par O. La translation T $(\overrightarrow{O\omega})$ équivaut au produit S (Δ) o S (Δ_2).

Soit Δ_1 l'homologue de Δ_2 (fig. 184) dans la rotation $\left(O, -\frac{\alpha}{2}\right)$. On obtient :

$$S(\Delta) \text{ o } R(O, \alpha) = S(\Delta) \text{ o } S(\Delta_2) \text{ o } S(\Delta_1)$$
$$= T(\overrightarrow{O\omega}) \text{ o } S(\Delta_1).$$

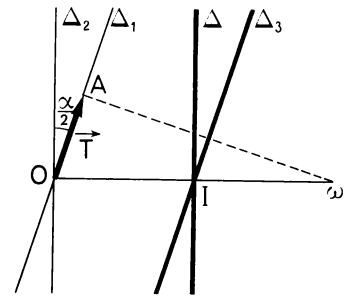


Fig. 184

Le produit S(Δ) o R(O, α) est donc équivalent au produit de la symétrie d'axe Δ_1 par la translation T $(\overrightarrow{O\omega})$. Ce produit transforme O en ω. Si nous désignons par A la projection de ω sur Δ_1 et par Δ_3 la parallèle à Δ_1 menée par I, on voit (n° 223) que :

$$S(\Delta) \text{ o } R(O, \alpha) = T(\overrightarrow{OA}) \text{ o } S(\Delta_3) = S(\Delta_3) \text{ o } T(\overrightarrow{OA}).$$

Le produit de la rotation R (O, α) ***et de la symétrie axiale*** S(Δ) ***est équivalent au produit commutatif de la symétrie d'axe*** Δ_3 ***et de la translation de vecteur*** $\overrightarrow{OA}$ ***parallèle à*** Δ_3.

Si Δ passe par O (fig. 185), le produit S(Δ) . $S(\Delta_2)$ est la transformation identique :

$$S(\Delta) \text{ o } R(O, \alpha) = S(\Delta_1).$$

Dans ce cas le produit se réduit à une symétrie axiale. Ce résultat est en accord avec le n° 214, car ce produit est un antidéplacement possédant le point double évident O.

225. Remarque. — Le produit S(Δ) o R(O, α) n'est pas, en général, commutatif, car il transforme O en ω tandis que le produit R(O, α) o S(Δ) transforme O en ω′ homologue de ω dans R(O, α). Pour que S(Δ) o R(O, α) soit commutatif, il faut que O soit

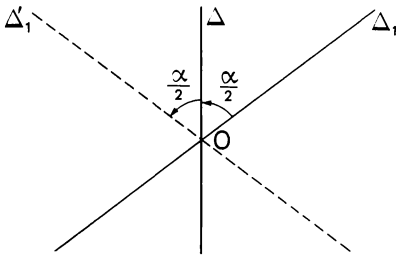


Fig. 185

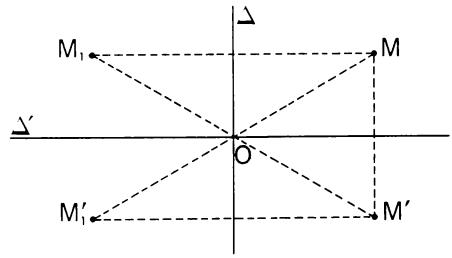


Fig. 186

sur Δ et que α = π. Le produit commutatif de la symétrie-point O et d'une symétrie axiale dont l'axe Δ passe par O est la symétrie axiale dont l'axe Δ′ est perpendiculaire en O à Δ (fig. 186).

226. Groupe des isométries dans le plan.

On appelle isométrie toute transformation ponctuelle dans laquelle la distance AB ***de deux points quelconques*** A ***et*** B ***est égale à la distance*** A′B′ ***de leurs transformés*** A′ ***et*** B′.

Symbolisons par (AB) l'ensemble des points du segment AB :

$$M \in (AB) \iff AB = AM + MB \iff A'B' = A'M' + M'B' \iff M' \in (A'B').$$

Il en résulte qu'une isométrie transforme tout segment en un segment égal, toute division rectiligne en une division rectiligne égale, tout triangle ABC en un triangle égal A′B′C′ et tout point M barycentre du système A(α), B(β), C(γ) en M′ barycentre du système A′(α), B′(β), C′(γ). La superposition des triangles égaux ABC et A′B′C′ entraîne donc celle de M et M′ :

Toute isométrie transforme une figure plane F ***en une figure plane égale*** F′.

Il résulte nos 190 et 210 que :

Toute isométrie dans le plan est un déplacement ou un antidéplacement.

La relation d'isométrie entre deux figures planes F et F′ est donc une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, car :
a) F$\mathcal{R}$F (*réflexivité*) ; b) F$\mathcal{R}$F′ $\Longrightarrow$ F′$\mathcal{R}$F (*symétrie*) ; c) F$\mathcal{R}$F′ et F′$\mathcal{R}$F″ $\Longrightarrow$ F$\mathcal{R}$F″ (*transitivité*).

On en déduit que dans le plan :

1° Le produit de deux isométries est une isométrie (*c*).

2° La transformation identique est une isométrie (*a*).

3° Toute isométrie admet une isométrie réciproque (*b*).

L'ensemble des isométries planes (déplacements et antidéplacements) a une structure de groupe pour le produit de ces transformations.

APPLICATIONS DES DÉPLACEMENTS ET SYMÉTRIES DANS LE PLAN

227. Propriétés géométriques. — Exemple I. — *Démontrer que dans tout triangle la distance d'un sommet à l'orthocentre est double de celle du centre du cercle circonscrit au côté opposé à ce sommet.*

Le symétrique A′ de l'orthocentre H du triangle ABC, par rapport au côté BC, appartient au cercle circonscrit à ce triangle (fig. 187). Les cercles BAC et BHC de centres O et O′, symétriques par rapport à BC, sont égaux. Ils se correspondent dans la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'} = 2\,\overrightarrow{OM}$. Comme dans cette translation l'homologue du sommet A est l'orthocentre H, on a : $\overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{OM}$.

EXEMPLE II. — *Soient* I, J, K *les milieux des côtés* BC, CA *et* AB *du triangle* ABC. *On construit extérieurement au triangle le segment* JN *perpendiculaire au côté* CA *et égal à sa moitié, puis le segment* KP *perpendiculaire à* AB *et égal à sa moitié. Démontrer que les segments* IN *et* IP *sont égaux et perpendiculaires.*

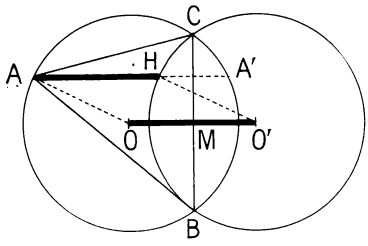


Fig. 187

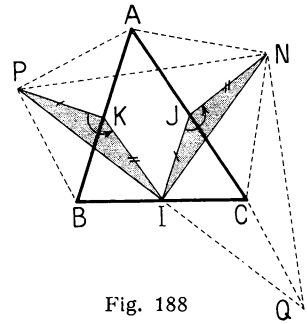


Fig. 188

1° Dans le cas de la figure (n° 188), on voit aisément que : KP = JI, KI = JN et $(\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{JI}) = (\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{JN}) = +\frac{\pi}{2}$ donc $(\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KI}) = (\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JN})$.

Ces égalités prouvent que les deux triangles KPI et JIN sont directement égaux et se correspondent dans une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Les deux segments homologues PI et IN sont donc égaux et perpendiculaires.

2° La rotation $\left(P, +\frac{\pi}{2}\right)$ transforme $\overrightarrow{BP}$ en $\overrightarrow{AP}$ et la rotation $\left(N, +\frac{\pi}{2}\right)$ transforme $\overrightarrow{AP}$ en $\overrightarrow{CQ}$. Le produit de ces deux rotations d'angle $+\frac{\pi}{2}$ est une symétrie-point qui transforme $\overrightarrow{BP}$ en $\overrightarrow{CQ}$. Son centre est donc I milieu de BC et par suite de PQ. Le triangle PNQ étant rectangle isocèle, il en est de même de sa moitié INP.

228. Théorème. — *Les symétriques d'un point* M *du cercle circonscrit par rapport aux côtés du triangle* ABC *sont situés sur une droite passant par l'orthocentre de ce triangle.*

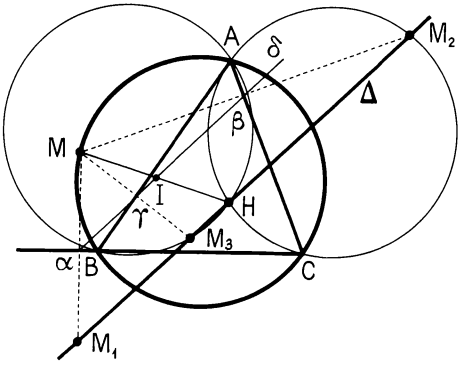


Fig. 189

Les symétriques M_1, M_2 et M_3 du point M du cercle ABC par rapport aux côtés BC, CA et AB (fig. 189) appartiennent respectivement aux cercles HBC, HCA et HAB (n° 62). Le produit des symétries par rapport à AB et AC transforme M_3 en M_2 et le cercle HAB en HAC. Les points M_3 et M_2 sont donc homologues dans la rotation de centre A et d'angle 2 (AB, AC) qui fait correspondre ces deux cercles (n° 217). Il en résulte que M_2, M_3 et H sont alignés (n° 207). On montrerait de même que M_1, M_2 et H sont alignés. La droite Δ qui porte les points M_1, M_2, M_3 et H est la *droite de Steiner* du triangle ABC, relative au point M du cercle circonscrit.

REMARQUE. — Les projections α, β, γ du point M sur les côtés du triangle ABC sont les milieux de MM_1, MM_2 et MM_3. La droite αβγ est donc parallèle à Δ et passe par le milieu I du segment MH.

La droite de Simson relative à un point du cercle circonscrit passe par le milieu du segment qui joint ce point à l'orthocentre du triangle.

229. Divisions rectilignes égales. — ***On dit que deux points variables*** M ***et*** M′ ***décrivent sur deux axes*** Δ ***et*** Δ′ ***des divisions égales si leurs abscisses rapportées à des origines homologues sont égales.***

Soient A et A′ les origines des axes Δ et Δ′ (fig. 190) et :

$$\overline{AM} = \overline{A'M'}.$$

Désignons par I le point d'intersection des deux axes et par α l'angle $(\vec{\Delta}, \vec{\Delta}')$. On obtient : $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \alpha$ et AM = A′M′.

Le vecteur $\overrightarrow{A'M'}$ se déduit donc du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans une rotation fixe (ω, α). Le centre ω de cette rotation est situé sur la médiatrice de AA′ et sur la bissectrice extérieure de l'angle $(\vec{\Delta}, \vec{\Delta}')$ (n° 206). Il en résulte (n° 200) que :

$$\omega M = \omega M' \text{ et } (\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) = \alpha.$$

La médiatrice δ *de* MM′ *et le cercle* IMM′ *passent par le point fixe* ω.

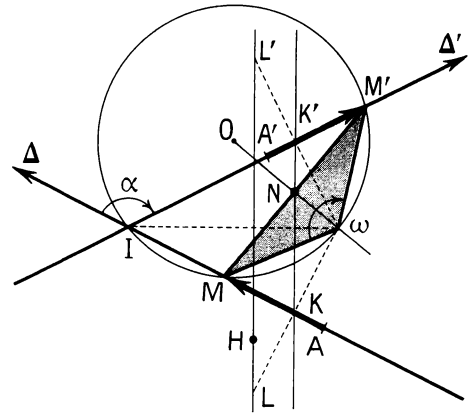


Fig. 190

Les droites de Simson et de Steiner du triangle IMM′ relatives au point ω sont fixes. La première est donc le lieu de la projection de ω sur MM′, c'est-à-dire du milieu N de MM′, et la seconde le lieu de l'orthocentre H du triangle IMM′. Elles sont toutes deux perpendiculaires à Iω.

230. Lieux géométriques. — Lorsque, dans une figure donnée, un point variable M se déduit d'un autre point variable P dans une transformation fixe, le lieu de M se déduit du lieu de P dans cette transformation.

Exemple I. — *Le centre* ω *d'un cercle de rayon donné r décrit un cercle fixe de centre* O *passant par* A. *Trouver le lieu de l'extrémité du rayon* ωM *du cercle* (ω), *parallèle à* OA *et de même sens.*

Soit O′ le point de la demi-droite OA tel que OO′ = *r* (fig. 191). On a : $\overrightarrow{\omega M} = \overrightarrow{OO'}$. Le lieu de M est donc le cercle de centre O′ égal au cercle O.

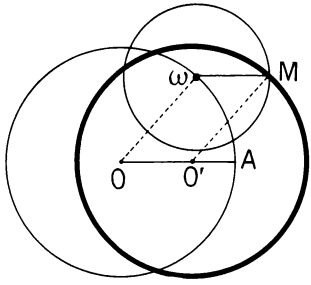


Fig. 191

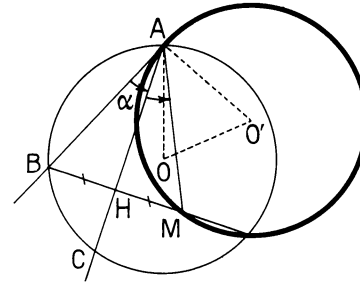


Fig. 192

Exemple II. — *Deux points* B *et* C *varient sur un cercle fixe de centre* O *passant par* A *de telle sorte que* (AB, AC) = α (*angle donné*). *Trouver le lieu du point* M, *symétrique de* B *par rapport à la droite* AC.

On a (fig. 192) : AM = AB et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 2(AB, AC) = 2\alpha$.

Le point M se déduit de B dans la rotation fixe (A, 2α). Le lieu de M est donc le cercle O′ qui se déduit du cercle O dans cette rotation.

231. Constructions géométriques. — La translation et la rotation permettent de construire entre deux lignes données L et L′ un vecteur $\overrightarrow{MM'}$ égal à un vecteur donné ou formant avec un point donné O un triangle isocèle dont on connaît l'angle au sommet $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$.

EXEMPLE I. — *Construire dans un cercle donné* O *de rayon* R *une corde* AB *telle que le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *soit égal à un vecteur* $\vec{V}$ *donné.*

Le point B du cercle O (fig. 193) se déduit du point A dans la translation de vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{OO'}$. Il appartient donc également au cercle de centre O′ qui se déduit du cercle O dans la translation $\overrightarrow{OO'}$. Si les deux cercles se coupent en B on obtient le point A en construisant le vecteur $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{O'O}$.

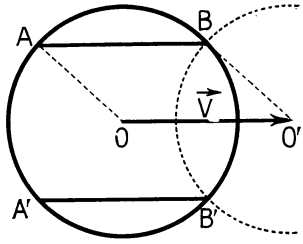


Fig. 193

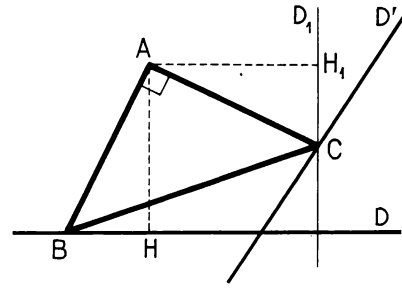


Fig. 194

EXEMPLE II. — *Étant donnée deux droites* D *et* D′ *et un point* A, *construire un triangle rectangle isocèle* ABC *de sommet* A *et de sens direct tel que* B *soit sur* D *et* C *sur* D′.

Le point C (fig. 194) appartient à la droite D′ et aussi à la droite D_1 homologue de D dans la rotation $\left(A, +\frac{\pi}{2}\right)$. Le point B se déduit de C dans la rotation $\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)$.

EXERCICES

287. On donne un triangle isocèle ABC de base BC. Une droite variable Δ passe par le sommet A. On construit le symétrique D du point C par rapport à Δ. La droite BD coupe Δ en M. Trouver les lieux géométriques des points D et M.

288. Soient deux droites D_1 et D_2 issues de O et un point fixe P. Une droite variable Δ issue de P coupe D_1 en A et D_2 en B. Les symétriques de la droite Δ par rapport aux droites D_1 et D_2 se coupent en M. Trouver le lieu géométrique du point M.

289. Dans un triangle ABC les sommets B et C appartiennent à une droite fixe, l'orthocentre H est fixe ainsi qu'un point P du cercle ABC.

1° Trouver le lieu géométrique du centre O du cercle ABC.

2° Construire le triangle ABC connaissant le milieu N du côté AB.

290. Étant donné un triangle ABC tel que AB > AC et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60°$, construire un point M du segment AB et un point N du segment AC tels que BM = CN et $MN = \frac{1}{2}$ BC. Discuter.

291. Construire un carré ABCD sachant que A et C appartiennent à une même droite donnée D_1 et que les sommets B et D appartiennent respectivement à deux autres droites données D_2 et D_3.

292. Construire un triangle ABC connaissant le centre I d'un cercle inscrit ou exinscrit, les supports Ix, Iy et Iz des droites AI, BI et CI et un point P de la droite BC.

293. Dans un triangle ABC on connaît les sommets B et C, la différence α des angles B et C et le pied H de la hauteur issue de A. Construire le triangle ABC. Discuter.

294. Étant donné deux points A et B et une droite D, construire un point M de la droite D de telle sorte que cette droite soit bissectrice de l'angle (MA, MB). Que peut-on dire de la somme MA + MB lorsque A et B sont d'un même côté de D et de la différence MA — MB lorsque A et B sont de part et d'autre de D ?

295. Démontrer que le produit des symétries par rapport à trois points A, B, C est la symétrie par rapport au point D sommet du parallélogramme ABCD.

296. Montrer que le produit des symétries par rapport à trois droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 issues d'un point O est la symétrie par rapport à la droite Δ_4 issue de O et antiparallèle à Δ_2 par rapport à Δ_1 et Δ_3.

297. Démontrer que le produit des deux rotations $\left(O_1, +\frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(O_2, +\frac{\pi}{2}\right)$ est la symétrie par rapport au point O, centre de la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ qui transforme O_2 en O_1.

298. Toute rotation (O, α) est décomposable en un produit de deux rotations de centres B et C donnés pourvu que (OB, OC) $= \frac{\alpha}{2}$. Déterminer les angles β et γ de ces deux rotations.

299. On considère les rotations [A, 2 (AC, AB)], [B, 2 (BA, BC)] et [C, 2 (CB, CA)] qui transforment respectivement M en M_1, M_1 en M_2 et M_2 en M_3.

1° Montrer que leur produit est la transformation identique et que M, M_1 et M_2 sont les symétriques d'un point P par rapport aux côtés du triangle ABC.

2° Trouver les lieux de M, M_1 et M_2 lorsqu'ils sont alignés sur une droite Δ et l'enveloppe de Δ.

300. Soit ABCD un quadrilatère circonscrit à un cercle de centre O.

1° Démontrer que (OA, OB) + (OC, OD) = 0.

2° Établir que le produit des quatre rotations [A, $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$], [B, $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$], [C, $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$] et [D, $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$] est la transformation identique.

301. Montrer que le produit des trois rotations [A, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$], [B, $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$] et [C, $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$] est une symétrie point. Déterminer son centre.

302. On donne un triangle équilatéral de sens direct A'BC et un point A quelconque. On construit les deux triangles équilatéraux de sens direct ACB' et BAC'. Montrer que le produit des rotations $\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)$ et $\left(B, +\frac{\pi}{3}\right)$ transforme $\overrightarrow{AB'}$ en $\overrightarrow{C'A'}$ et que le quadrilatère AB'A'C' est un parallélogramme.

303. On désigne par I, J, K les centres des rotations de même angle $-\frac{2\pi}{3}$ qui transforment respectivement B en C, C en A, et A en B.

1° Étudier le produit des trois rotations et montrer que IJK est un triangle équilatéral de sens direct.

2° La droite AI coupe BC en A'. Établir que $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{c \sin (B + 30°)}{b \sin (C + 30°)}$ et en déduire que les trois droites AI, BJ et CK sont concourantes.

3° Établir que les deux sommes égales $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{IB}$ sont nulles et que les deux triangles ABC et IJK ont même centre de gravité.

304. Dans un triangle ABC dont les angles sont aigus on prend les points D, E, F respectivement sur les segments BC, CA et AB.

1° Montrer que, pour un point D donné, le périmètre du triangle DEF est minimum lorsque la droite EF passe par les symétriques M et N de D par rapport à AB et à AC.

2° Étudier la correspondance entre M et N lorsque D décrit le segment BC et montrer que le périmètre DEF est minimum lorsque D, E et F sont les pieds des hauteurs du triangle ABC.

305. On considère un rectangle ABCD et un point variable M. Les symétries d'axes AB, BC et CD transforment respectivement M en M_1, M_1 en M_2 et M_2 en M_3.

1° Nature de la correspondance entre M et M_3 ?

2° Lieu du milieu de MM_3 et mesure de la projection de MM_3 sur la droite AD.

306. On donne deux cercles égaux de centres O et O', un point fixe A et un point variable M du cercle O, un point fixe A' et un point M' du cercle O' tels que : (OA, AM) = — (O'A', A'M'.)

1° Montrer que le lieu du milieu P de MM′ est porté par une droite Δ qui passe par les milieux I et J de OO′ et AA′. Déterminer ce lieu.

2° Les droites AM et A′M′ coupent Δ en N et N′. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{NN'}$ est constant et égal à la projection de $\overrightarrow{OO'}$ (ou de $\overrightarrow{AA'}$) sur Δ.

307. On considère un triangle équilatéral ABC et les cercles de centres A, B, C ayant pour rayon le côté du triangle.

1° On prend sur le premier cercle (A) un point α. Construire un triangle équilatéral αβγ de même sens que ABC dont les sommets β et γ soient respectivement sur les cercles (B) et (C) (2 solutions αβγ et αβ′γ′).

2° Lorsque α varie sur le cercle (A), montrer que l'un de ces triangles αβγ a des côtés constants en grandeur et direction. Lieu du centre I de ce triangle.

3° Le second triangle αβ′γ′ a son centre fixe. Lieu du milieu M de β′γ′.

308. Soient deux axes Δ et Δ′ issus de O et une droite δ parallèle à l'une des bissectrices de l'angle (Δ, Δ′). Montrer que les points variables M de Δ et M′ de Δ′ décrivent des divisions égales si l'une des conditions suivantes est réalisée :

1° La somme $\overline{OM} + \overline{OM'}$ ou la différence $\overline{OM} - \overline{OM'}$ est constante.

2° Le centre du cercle OMM′ décrit la droite δ.

3° Le milieu de MM′ ou l'orthocentre du triangle OMM′ décrit δ.

4° M et M′ sont les projections sur Δ et Δ′ d'un point P de δ.

5° La projection de $\overrightarrow{MM'}$ sur δ est un vecteur constant.

309. On donne un triangle isocèle OAB tel que OA = OB. Par un point variable P de la droite AB on mène les parallèles à OB et OA qui coupent OA en M et OB en N.

1° Montrer que M et N décrivent des divisions égales sur OA et OB. En déduire l'enveloppe ω de la médiatrice de MN, les lieux du centre I du cercle OMN, du milieu K de MN et de l'orthocentre H du triangle OMN.

2° Trouver l'enveloppe de la perpendiculaire menée de P à MN et le lieu du symétrique Q de P par rapport à MN. Comparer les triangles QMN et ONM ainsi que les angles $(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QM})$ et $(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QN})$.

3° Le cercle J tangent en M à ωM et en N à ωN recoupe OA en M′. Trouver le lieu du point J et démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est constant ainsi que le rapport $\frac{JM}{J\omega}$.

310. Étant donné un quadrilatère ABCD, on construit les points M, N, P et Q centres des rotations d'angle $+\frac{\pi}{2}$ qui transforment respectivement B en A, C en B, D en C et A en D. Soient d'autre part I, J, K, L les milieux respectifs de AC, BD, MP et QN.

1° Montrer que les triangles IMN, IPQ, JNP et JQM sont rectangles isocèles, puis que les segments MP et NQ sont égaux et perpendiculaires.

2° Démontrer que IKJL est un carré et que les quadrangles ABCD et MNPQ ont même centre de gravité.

311. Soit un triangle ABC. On construit les points M, N, P, sommets des triangles rectangles isocèles de même sens MBC, NCA et PAB. On désigne par I, J, K les milieux de BC, CA, AB et par R et S les milieux de AM et de NP.

1° Montrer que les triangles INP, JPM et KMN sont rectangles isocèles. En déduire que les segments AM, BN et CP sont respectivement égaux et perpendiculaires à NP, PM et MN, puis qu'ils sont concourants.

2° Démontrer que JRKS est un carré ayant pour centre le milieu de AI.

3° On achève le parallélogramme NAPQ. Montrer que BMCQ est un carré, puis que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.

312. Soient Ox et Oy deux droites perpendiculaires et Δ une droite fixe qui les rencontre.

1° I étant un point fixe de Δ, construire la droite D passant par I, coupant Ox en M et Oy en N de façon que I soit le milieu de MN.

2° Lorsque I décrit la droite Δ, montrer que le cercle OMN passe par un second point fixe F autre que O et trouver le lieu géométrique de la projection du point F sur la droite D. Montrer que ce lieu passe par un point fixe lorsque O et Δ restant fixes, les droites rectangulaires Ox et Oy tournent autour de O.

313. Un billard rectangulaire ABCD a pour dimensions AB = DC = a; AD = BC = $b > a$. Une bille part de A et frappe successivement les bandes BC, CD et DA en des points M, N, P. Elle s'arrête après avoir bouclé un quadrilatère MNPQ (Q sur AM). L'angle de réflexion est égal, chaque fois, à l'angle d'incidence.

1° Entre quelles limites doit être compris BM = x pour que les bandes soient frappées dans l'ordre donné ? Quelle est alors la forme du quadrilatère MNPQ ?

2° Prouver que les droites supportant les côtés ou la diagonale MP du quadrilatère MNPQ passent chacune par un point fixe.

3° Calculer en fonction de x l'aire du quadrilatère MNPQ. Deux des circonstances suivantes peuvent-elles se produire simultanément : MNPQ rectangle, MNPQ losange, MNPQ d'aire maxima.

314. On donne un triangle ABC. Déterminer l'angle α d'une rotation de centre A et l'angle β d'une rotation de centre B, de telle façon que C soit invariant dans le produit de ces deux rotations effectuées dans l'ordre indiqué.

Montrer que le produit des trois rotations suivantes : (A) de centre A, d'angle 2 (AC, AB) ; (B) de centre B, d'angle 2 (BA, BC) ; (C) de centre C, d'angle 2 (CB, CA) est la transformation identique.

2° *a*) Soient deux cercles égaux ω et ω' sécants en deux points R et S ; si un cercle variable de centre R les coupe en quatre points P, Q et P′, Q′ respectivement, on peut répartir ces points en deux couples P, Q et P′, Q′ tels que $(RP, RP') = (RQ, RQ') = \theta$, constante indépendante du cercle de centre R.

b) La droite PP′ (ou QQ′) passe par un point fixe.

3° Soit M un point quelconque, M′ son transformé par la rotation (A) définie au 1° ; M″ le transformé de M′ par la rotation (B) ; on sait que la rotation (C) transforme M″ en M.

a) Calculer l'angle (M′M, M′M″) en fonction de (M′A, M′B).

b) Lieu de M′ pour que M, M′ et M″ soient alignés.

c) Caractériser ce lieu par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC. Lieux correspondants de M et M″.

d) En utilisant le 2°, démontrer que la droite MM′M″ passe par un point fixe quand M′ décrit son lieu.

e) Caractériser ce point fixe par rapport au triangle ABC.

DÉPLACEMENTS DANS L'ESPACE

232. Figures égales dans l'espace. — Deux figures égales de l'espace sont deux figures superposables. Dans deux figures égales F et F′, deux segments, deux angles, deux triangles homologues sont égaux. Deux dièdres orientés sont égaux, et par suite de même sens.

233. Définition. — ***On appelle déplacement dans l'espace, toute transformation ponctuelle qui, à une figure quelconque*** F, ***fait correspondre une figure*** F′ ***égale à la première.***

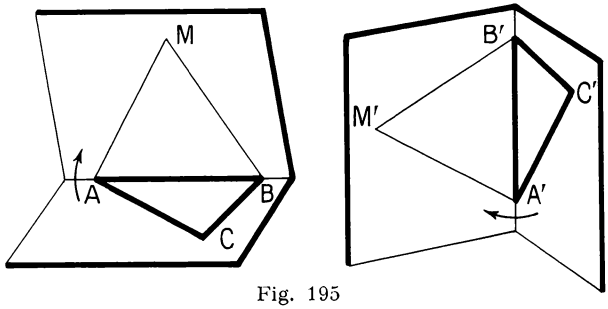


Fig. 195

Un tel déplacement peut être défini, *indépendamment de toute notion de mouvement:*

Considérons (fig. 195) trois points fixes non alignés A,B,C et un *triangle* A′B′C′ *égal au triangle* ABC (où A′, B′, C′ sont respectivement les homologues de A, B et C). A tout point M faisons correspondre le point M′ tel que :

1° *Les dièdres orientés* (C, $\overrightarrow{AB}$, M) *et* (C′, $\overrightarrow{A'B'}$, M′) *soient égaux.*

2° *Les triangles* ABM *et* A′B′M′ *soient égaux.*

La superposition des triangles égaux ABC et A′B′C′ entraîne celle des dièdres (C, $\overrightarrow{AB}$, M) et (C′, $\overrightarrow{A'B'}$, M′) puis celle des points M et M′. Si M décrit une figure F de l'espace, son homologue M′ décrit une figure F′ qui coïncide avec F dans la superposition précédente. La correspondance envisagée définit donc un déplacement dans lequel A, B, C ont pour homologues A′, B′, C′.

234. Corollaires. — 1° ***Un déplacement dans l'espace est déterminé lorsqu'on connaît trois points non alignés*** A, B, C ***et leurs transformés*** A′, B′, C′ ***formant un triangle*** A′B′C′ ***égal au triangle*** ABC.

La construction précédente permet de construire l'homologue M′ de tout point M de l'espace dans ce déplacement.

2° Si A′, B′ et C′ coïncident respectivement avec A, B et C, tout point M coïncide avec son homologue M′. Donc :

Un déplacement dans l'espace ne peut posséder plus de deux points doubles non alignés sans se réduire à la transformation identique.

3° Si F_1 est la transformée de la figure F par le déplacement (D_1) et F_2 la transformée de la figure F_1 par le déplacement (D_2), les figures F et F_2 égales à F_1 sont égales :

Le produit de deux (ou plusieurs) déplacements est un déplacement.

TRANSLATION DANS L'ESPACE

235. Définition. — ***La translation est une transformation dans laquelle le vecteur joignant un point à son transformé est égal à un vecteur donné $\vec{T}$ appelé vecteur-translation.***

Soit $\vec{T}$ un vecteur fixe et non nul. Construisons le point M′ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{T}$ (fig. 196). M′ est le transformé de M par la translation $\vec{T}$ et si M décrit une figure F, le point M′ décrit une figure F′ transformée de la figure F dans la translation $\vec{T}$.

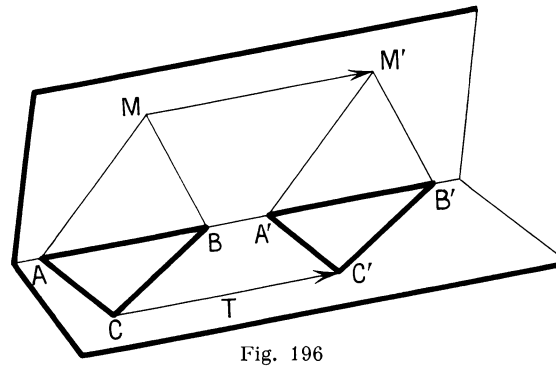


Fig. 196

1° Il n'existe pas de point double dans une translation.

2° Toute droite et tout plan parallèles au vecteur-translation $\vec{T}$ sont globalement invariants dans la translation. Pour toute figure F située dans un plan P parallèle au support de $\vec{T}$ la transformation se réduit à une translation plane donc à un déplacement plan.

3° Si M′ est le transformé de M dans la translation $\vec{T}$, le point M est le transformé de M′ dans la translation $-\vec{T}$. La translation n'est pas une transformation involutive.

REMARQUE. — La translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ sera désignée par $T(\overrightarrow{AA'})$.

236. Théorème. — ***La translation dans l'espace est un déplacement qui transforme un vecteur donné en un vecteur égal.***

1° Soient A, B, C trois points fixes non alignés tels que AB soit parallèle au support du vecteur $\vec{T}$ et M un point quelconque de l'espace (fig. 196). Désignons par A′, B′, C′ et M′ leurs homologues respectifs dans la translation $\vec{T}$. La droite AB, les demi-plans CAB et MAB d'arête AB sont parallèles au vecteur $\vec{T}$, donc globalement invariants dans la translation $\vec{T}$ (n° 235, 2°).

Les dièdres orientés (C, $\overrightarrow{AB}$, M) et (C′, $\overrightarrow{A'B'}$, M′) sont donc égaux. De plus, le triangle A′B′C′ homologue du triangle ABC dans une translation plane lui est égal. De même le triangle A′B′M′ est égal au triangle ABM. Donc (n° 233) M′ est l'homologue de M dans le déplacement défini par les triangles égaux ABC et A′B′C′.

2° Le transformé du vecteur $\overrightarrow{AM}$ est donc le vecteur $\overrightarrow{A'M'}$. Or par définition : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'} = \vec{T}$. Donc : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$.

237. Réciproque. — ***Toute transformation ponctuelle dans laquelle le vecteur qui joint deux points est égal au vecteur qui joint leurs transformés est une translation.***

Soient deux points l'un fixe A, l'autre variable M de l'espace. Leurs transformés A′ et M′ sont, par hypothèse, tels que $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$. Par conséquent : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$. Le point M′ est l'homologue de M dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

238. Applications. — 1° La translation transformant un vecteur en un vecteur égal transforme une droite en une droite parallèle (ou confondue avec la première), une demi-droite et une demi-droite parallèle et de même sens, un angle en un angle à côtés parallèles et de même sens, donc en un angle égal situé dans un plan parallèle à celui du premier (ou confondu avec lui), un plan en un plan parallèle au premier (ou confondu avec lui), un dièdre orienté en un dièdre égal à faces parallèles, un trièdre orienté en un trièdre égal à arêtes parallèles et de même sens, un cercle en un cercle égal situé dans un plan parallèle à celui du premier (ou confondu avec lui).

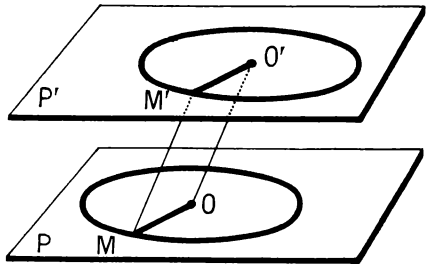


Fig. 197

2° Inversement, un plan P′ parallèle à un plan P est le transformé de ce dernier, dans toute translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ où A désigne un point quelconque de P et A′ un point quelconque de P′. Si deux cercles égaux de centres O et O′ sont situés dans deux plans parallèles (fig. 197) le second est le transformé du premier dans la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ et deux rayons homologues $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{O'M'}$ sont deux vecteurs égaux.

239. Théorème. — ***Le produit de plusieurs translations de vecteurs respectifs*** $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \ldots \vec{T}_n$ ***est la translation de vecteur*** $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \ldots + \vec{T}_n$.

La démonstration est identique à celle du (n° 198) et, réciproquement, on peut décomposer la translation de vecteur $\vec{T}$ en un produit de translations définies par des vecteurs $\vec{T}_1, \vec{T}_2 \ldots \vec{T}_n$ dont la somme est égale au vecteur $\vec{T}$.

240. Groupe des translations. — On voit comme au n° 199 que si G désigne l'ensemble des translations T de vecteur $\vec{T}$:

1° $T_1 \in G$ et $T_2 \in G \implies T_2 \circ T_1 \in G$

2° $T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$ car $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{T}_2 + \vec{T}_1$

3° La transformation identique I coïncide avec la translation de vecteur nul.

4° T^{-1} est définie par le vecteur $-\vec{T}$ et $T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = I$ car $\vec{T} + (-\vec{T}) = \vec{0}$.

Il en résulte que l'ensemble des translations de l'espace a une structure de groupe abélien pour l'opération produit.

Le groupe G′ des translations de vecteurs parallèles à un plan donné P est un sous-ensemble de G ; c'est un sous-groupe de G.

ROTATION DANS L'ESPACE

241. Définition. — Soit un axe $\vec{\Delta}$ et un angle orienté θ défini à $2k\pi$ près, que nous pourrons donc supposer compris entre $-\pi$ et π (fig. 198).

La rotation d'axe $\vec{\Delta}$ ***et d'angle*** θ ***est la transformation ponctuelle qui, à tout point*** M ***de l'espace fait correspondre le point*** M′ ***tel que*** M ***et*** M′ ***aient même projection orthogonale*** O ***sur*** Δ, ***en soient équidistants et que le dièdre orienté*** $(M, \vec{\Delta}, M')$ ***ait pour valeur*** θ.

En abrégé : *Rotation* $(\vec{\Delta}, \theta)$.

L'axe Δ *est l'axe de rotation* et l'angle θ *est l'angle de rotation.*

242. Propriétés. — 1° L'orientation de Δ entraîne celle du plan P contenant MOM′ (n° 152). Dans ce plan M′ est le transformé de M dans la rotation (O, θ) car :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \quad \text{et} \quad OM = OM'.$$

Réciproquement toute rotation (O, θ), *dans un plan orienté* P *définit une rotation* $(\overrightarrow{\Delta}, \theta)$ *dans l'espace autour de la perpendiculaire en* O *au plan* P.

2° *Tout point de l'axe* Δ *est un point double de la rotation.* Tout plan P perpendiculaire à l'axe est globalement invariant. Il en est de même de tout cercle d'axe Δ et par suite de toute surface de révolution d'axe Δ.

3° La droite Δ est l'axe du cercle de centre O passant par M et M′. Il en résulte que :

Tout point A *de l'axe de rotation* Δ *est équidistant des deux points homologues* M *et* M′, *et l'axe* Δ *est situé dans le plan médiateur du segment* MM′.

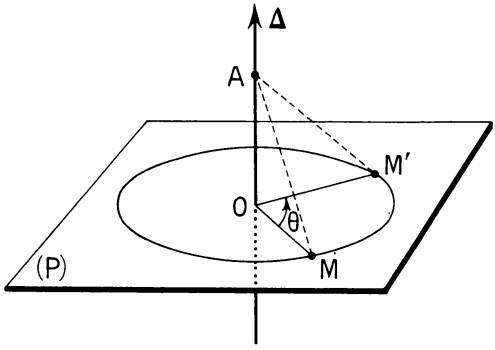


Fig. 198

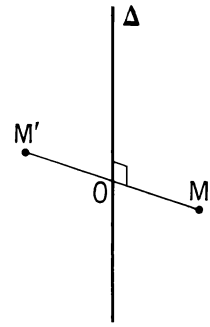


Fig. 199

4° Le point M est l'homologue de M′ dans la rotation $(\overrightarrow{\Delta}, -\theta)$. La rotation n'est donc pas involutive sauf si $\theta = \pm \pi$.

5° ***Dans le cas :*** $\theta = \pm \pi$, l'axe Δ est médiatrice de MM′. Les points M et M′ sont symétriques par rapport à Δ (fig. 199) :

La transformation est la symétrie-droite d'axe Δ ***:*** *Symétrie* (Δ).

Cette transformation involutive et indépendante de l'orientation de Δ est également désignée sous le nom de *demi-tour* ou *retournement* d'axe Δ.

243. Théorème. — ***La rotation dans l'espace est un déplacement possédant une infinité de points doubles alignés.***

Considérons trois points fixes distincts (fig. 200), les deux premiers A et B situés sur l'axe de rotation Δ, le troisième C non situé sur Δ et un point quelconque M de l'espace. Soient A, B, C′, M′ les transformés respectifs de A, B, C, M dans la rotation envisagée (Δ, θ).

Les triangles ABC et ABC′ ont AB en commun, AC = AC′ et BC = BC′ (n° 242, 2°). Ils sont donc égaux. Il en est de même des triangles ABM et ABM′. D'autre part :

$$(C, \overrightarrow{\Delta}, C') = (M, \overrightarrow{\Delta}, M') = \theta, \quad \Longrightarrow \quad (C, \overrightarrow{\Delta}, M) = (C', \overrightarrow{\Delta}, M')$$

D'où : $(C, \overrightarrow{AB}, M) = (C', \overrightarrow{AB}, M')$.

Il en résulte (n° 233) que M′ est le transformé de M dans le déplacement défini par les triangles égaux ABC et ABC′. Dans ce déplacement, tous les points de la droite AB sont invariants.

244. Réciproque I. — *Tout déplacement dans l'espace qui possède deux points doubles distincts* A *et* B *est une rotation d'axe* AB.

Envisageons le déplacement défini par les triangles égaux ABC et ABC′ (fig. 200) et soit $(C, \overrightarrow{AB}, C') = \theta$. La rotation d'axe $\overrightarrow{AB}$ et d'angle θ transforme C en C′ et laisse invariants les points A et B. Elle équivaut donc au déplacement considéré.

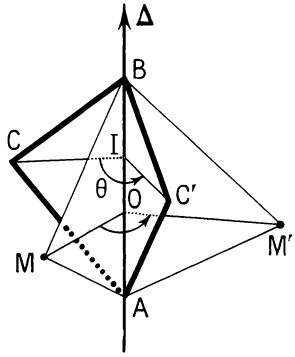


Fig. 200

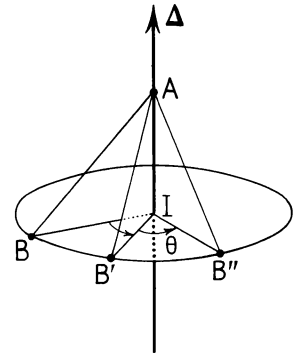


Fig. 201

245. Réciproque II. — *Tout déplacement dans l'espace qui possède un point double* A *est une rotation autour d'un axe issu de* A.

Envisageons (fig. 201) un déplacement (D) qui laisse A invariant, transforme B en B′ et transforme B′ en B″. On a : AB = AB′ = AB″. Le point A appartient à l'axe Δ du cercle circonscrit au triangle BB′B″. De plus BB′ = B′B″ et ces cordes égales sont vues du centre I du cercle BB′B″ sous le même angle. La rotation d'axe $\overrightarrow{\Delta}$, d'angle $(B, \overrightarrow{\Delta}, B') = \theta$ transforme A, B, B′ en A, B′, B″. Elle équivaut donc au déplacement envisagé défini par les triangles égaux ABB′ et AB′B″.

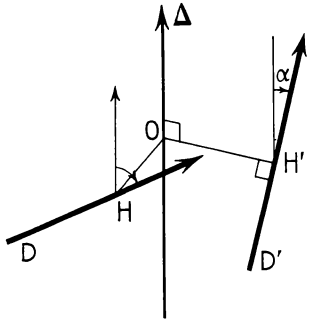


Fig. 202

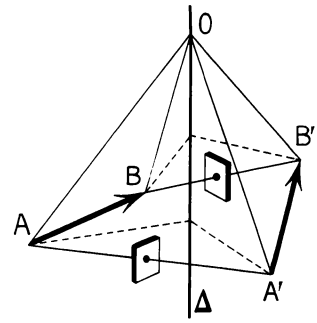


Fig. 203

246. Applications. — 1° La rotation dans l'espace transforme toute figure F en une figure égale F′. En particulier : toute droite D coupant l'axe de rotation Δ en A est transformée en une droite D′ issue de A et faisant avec Δ le même angle que D. Toute droite quelconque D (fig. 202) a pour transformée une droite D′ faisant avec Δ le même angle α que D et telle que les perpendiculaires communes à Δ et D d'une part, à Δ et D′ d'autre part soient égales et aient même pied O sur Δ. Tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour transformé un vecteur de même module $\overrightarrow{A'B'}$ et les plans médiateurs de AA′ et BB′

contiennent Δ. Tout plan P coupant Δ en A a pour transformé un plan P′ passant par A et faisant avec Δ le même angle que P, etc...

2° Inversement, deux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ de même origine et de même module, se correspondent par rotation autour de tout axe Δ issu de O et situé dans le bissecteur de l'angle des deux vecteurs.

Deux vecteurs donnés $\overrightarrow{AB}$ ***et*** $\overrightarrow{A'B'}$ ***de même module se correspondent en général dans une rotation dont l'axe*** Δ ***est l'intersection des plans médiateurs de*** AA′ ***et*** BB′.

En effet (fig. 203), O désignant un point quelconque de Δ, le déplacement défini par les triangles égaux OAB et OA′B′ possède un double O. C'est une rotation dont l'axe appartient à chacun des deux plans médiateurs envisagés.

Toute rotation $(\vec{\Delta}, \theta)$ *est donc définie par la donnée d'un vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *(non situé dans un plan issu de* Δ*) et de son transformé* $\overrightarrow{A'B'}$.

Les plans des deux faces d'un dièdre se correspondent par rotation autour de tout axe Δ coupant l'arête de ce dièdre et situé dans l'un de ses bissecteurs.

RETOURNEMENTS

247. Retournement dans l'espace. — Le retournement d'axe Δ étant une rotation d'angle π autour de Δ conserve globalement toute droite perpendiculaire à Δ et tout plan issu de Δ. (Chaque demi-droite ou demi-plan, limité à Δ, s'échangeant avec son opposé).

Dans tout plan P perpendiculaire en O à Δ, la transformation se réduit à la symétrie-point de centre O et dans tout plan Q issu de Δ, à la symétrie axiale par rapport à Δ.

Deux axes donnés $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ (fig. 204) sont homologues dans le retournement dont l'axe est la médiatrice Δ de leur perpendiculaire commune HH′, faisant des angles égaux avec $\vec{D}$ et $\vec{D'}$: cette droite Δ est l'axe de symétrie des axes $\vec{D}$ et $\vec{D'}$.

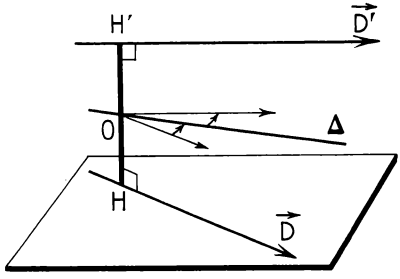


Fig. 204

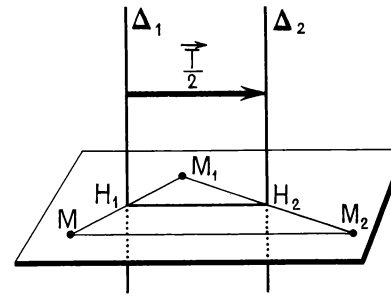


Fig. 205

Deux plans sécants donnés P et P′ se correspondent dans le retournement par rapport à toute droite Δ bissectrice de l'un des rectilignes de l'angle dièdre (P, P′).

248. Produit de deux retournements. — Tout retournement étant un déplacement, il en résulte (n° 234) que le produit des deux retournements d'axes Δ_1 et Δ_2 est un déplacement.

249. Cas où les axes Δ_1 et Δ_2 sont parallèles. — Le retournement Δ_1 transforme le point M en M_1 et le retournement Δ_2 transforme M_1 en M_2 (fig. 205). Les points H_1 et H_2 étant les milieux respectifs de $\overrightarrow{M_1M}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$, on obtient :

$$\overrightarrow{MM_2} = 2\,\overrightarrow{H_1H_2}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{H_1H_2}$ perpendiculaire à Δ_1 et Δ_2 est indépendant de M :

Le produit de deux retournements d'axes parallèles Δ_1 et Δ_2 est la translation perpendiculaire à ces deux axes, double de celle qui transforme le premier axe en le second.

$$S(\Delta_2) \circ S(\Delta_1) = T\,(2\,\overrightarrow{H_1H_2}).$$

Ce produit n'est pas commutatif car : $S(\Delta_1) \circ S(\Delta_2) = T(2\,\overrightarrow{H_2H_1})$, translation réciproque de la précédente. Réciproquement :

Toute translation de vecteur $\vec{T}$ est équivalente d'une infinité de façons au produit de deux retournements d'axes perpendiculaires au vecteur $\vec{T}$, le second se déduisant du premier dans la translation de vecteur $\vec{T}/2$.

Soit un vecteur $\overrightarrow{H_1H_2} = \dfrac{\vec{T}}{2}$. Menons une perpendiculaire Δ_1 quelconque en H_1 à la droite H_1H_2 et par H_2 menons la parallèle Δ_2 à Δ_1. Le produit des retournements d'axes Δ_1 et Δ_2 est la translation $\vec{T}$.

250. Cas où les axes Δ_1 et Δ_2 sont concourants. — Soit D la perpendiculaire commune, en leur point commun O, aux deux axes Δ_1 et Δ_2 (fig. 206). Le produit des deux retournements Δ_1 et Δ_2 est un déplacement dans lequel tout point A de D est invariant. C'est donc une rotation d'axe D (n° 244).

Dans le plan P perpendiculaire en O à D et orienté par $\vec{D}$, les retournements Δ_1 et Δ_2 transforment respectivement $\overrightarrow{OM}$ en $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_1}$ en $\overrightarrow{OM_2}$. La rotation D a donc pour angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2})$ soit $2\,(\Delta_1, \Delta_2)$ (n° 218).

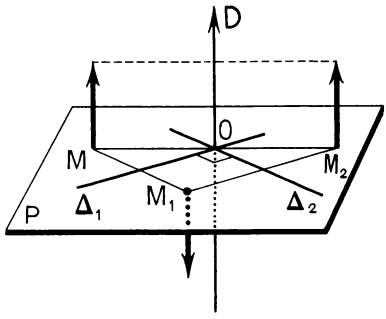


Fig. 206

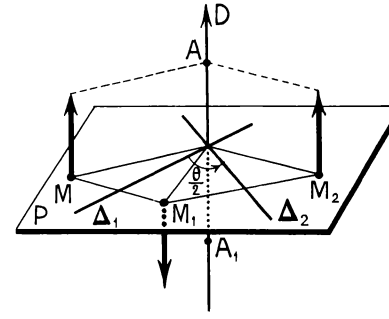


Fig. 207

Le produit de deux retournements d'axes concourants Δ_1 et Δ_2 est la rotation autour de la perpendiculaire commune D à Δ_1 et Δ_2, double de la rotation d'axe D qui transforme Δ_1 en Δ_2.

Le produit $S(\Delta_2) \circ S(\Delta_1)$ n'est pas en général commutatif, car le produit $S(\Delta_1) \circ S(\Delta_2)$ est la rotation d'axe D d'angle $-2\,(\Delta_1, \Delta_2)$. Réciproquement :

Toute rotation $(\vec{D}, \theta)$ ***est équivalente au produit de deux retournements d'axes*** Δ_1 ***et*** Δ_2 ***perpendiculaires en un point*** O ***à*** D ***et tels que*** $(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\theta}{2}$.

Construisons une droite Δ_1 perpendiculaire en O à D, puis la droite Δ_2 qui s'en déduit dans la rotation $\left(\vec{D}, \frac{\theta}{2}\right)$. Le produit $S(\Delta_2)$ o $S(\Delta_1)$ est la rotation $(\vec{D}, \theta)$.

251. Cas où les deux axes Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires. — Si Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires en O (fig. 207), la rotation produit est le retournement d'axe D.

Le produit des retournements par rapport à deux droites perpendiculaires est le retournement par rapport à leur perpendiculaire commune.

Le produit $S(\Delta_2)$ o $S(\Delta_1)$ est alors commutatif. Réciproquement :

Tout retournement d'axe D ***est équivalent au produit commutatif des retournements par rapport à deux droites rectangulaires, perpendiculaires à*** D ***en un même point.***

On pourra choisir arbitrairement l'un de ces retournements.

252. Cas où les deux axes Δ_1 et Δ_2 ne sont pas coplanaires. — Désignons par D la perpendiculaire commune O_1O_2 à Δ_1 et Δ_2 (fig. 208) et par Δ'_2 la parallèle à Δ_2 issue de O_1. Le produit des retournements Δ_1 et Δ_2 est équivalent au produit des quatre retournements : Δ_1, Δ'_2, Δ'_2, Δ_2, soit à : $S(\Delta_2)$ o $S(\Delta'_2)$ o $S(\Delta'_2)$ o $S(\Delta_1)$.

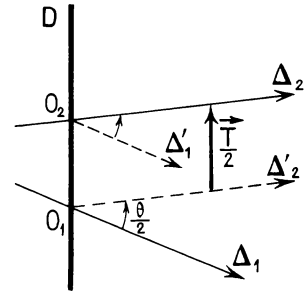


Fig. 208

Or le produit $S(\Delta'_2)$ o $S(\Delta_1)$ est la rotation d'axe $\vec{D}$ et d'angle $\theta = 2\ (\Delta_1, \Delta'_2)$ et le produit $S(\Delta_2)$ o $S(\Delta'_2)$ est la translation de vecteur $\vec{T} = 2\ \overrightarrow{O_1O_2}$.

Le produit de deux retournements d'axes non coplanaires est donc équivalent au produit d'une rotation $(\vec{D}, \theta)$ ***autour de la perpendiculaire commune aux deux axes par une translation de vecteur*** $\vec{T}$ ***parallèle à*** D.

Le produit de la rotation $(\vec{D}, \theta)$ par la translation $\vec{T} = 2\ \overrightarrow{O_1O_2}$ est d'ailleurs commutatif comme on le voit en introduisant, au lieu de Δ'_2, la droite Δ'_1 parallèle à Δ_1 et issue de O_2.

$$S(\Delta_2) \text{ o } S(\Delta_1) = T\ (2\ \overrightarrow{O_1O_2}) \text{ o } R(\vec{D}, \theta) = R(\vec{D}, \theta) \text{ o } T\ (2\ \overrightarrow{O_1O_2}).$$

DÉPLACEMENT HÉLICOÏDAL

253. Définition. — ***On appelle déplacement hélicoïdal d'axe*** D ***le produit commutatif d'une rotation*** $(\vec{D}, \theta)$ ***et d'une translation de vecteur*** $\vec{T}$ ***parallèle à*** D. ***Déplacement hélicoïdal*** $(\vec{D}, \theta, \vec{T})$.

La rotation $R(\vec{D}, \theta)$ transforme (fig. 209) tout vecteur $\overrightarrow{MM_1} = \vec{T}$ en un vecteur égal $\overrightarrow{M_2M'}$. Le point M′ est aussi bien le transformé de M dans $R(\vec{D}, \theta)$ o $\vec{T}$ que dans (T) o $R(\vec{D}, \theta)$, donc :

$$(\vec{D}, \theta, \vec{T}) = R(\vec{D}, \theta) \text{ o } \vec{T} = (\vec{T}) \text{ o } R\ (\vec{D}, \theta).$$

Dans le repère orthonormé $Oxyz$ dont l'axe Oz coïncide avec $\vec{D}$ et dont l'axe Ox est dirigé suivant $\overrightarrow{OM}$, on voit en posant $\overline{OM} = a$ et $\overline{OO'} = h\theta$, que M et M′ appartiennent à l'hélice circulaire (n° 180) :

$$x = a\cos\varphi,\quad y = a\sin\varphi,\quad z = h\varphi.$$

Lorsque φ varie de 0 à θ, le point $M'(\varphi)$ décrit un arc MM′ d'une hélice circulaire d'axe D et de pas réduit h. Il en est de même du transformé de tout point de l'espace. Toute figure F vient donc coïncider avec sa transformée F′ par un mouvement hélicoïdal analogue à celui d'une vis se déplaçant dans un écrou fixe, d'où le nom de *vissage* parfois donné au déplacement hélicoïdal.

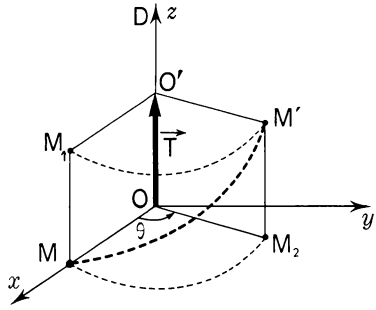


Fig. 209

254. Propriétés. — 1° Le déplacement hélicoïdal $(\vec{D}, \theta, \vec{T})$ se réduit à la rotation $R(\vec{D}, \theta)$ si $\vec{T} = \vec{0}$, au retournement $S(D)$ si $\vec{T} = \vec{0}$ et $\theta = \pi$, à la translation $(\vec{T})$ si $\theta = 0$.

Le déplacement hélicoïdal $(\vec{D}, \theta, \vec{T})$ admet pour réciproque le déplacement opposé $(\vec{D}, -\theta, -\vec{T})$. Il n'est donc involutif que dans le cas d'un retournement.

2° D'après le paragraphe n° 252 on voit (fig. 208) que :

Le produit de deux retournements d'axes Δ_1 et Δ_2 est le déplacement hélicoïdal ayant pour axe la perpendiculaire commune D à Δ_1 à Δ_2, double du déplacement hélicoïdal de même axe transformant Δ_1 en Δ_2.

$$\boxed{S(\Delta_2)\ o\ S(\Delta_1) = (\vec{D}, \theta, \vec{T})} \quad \text{avec} \quad \theta = 2(\Delta_1, \Delta_2) \text{ et } \vec{T} = 2\,\overrightarrow{O_1O_2}.$$

Réciproquement :

3° ***Tout déplacement hélicoïdal*** $(\vec{D}, \theta, \vec{T})$ ***est équivalent au produit de deux retournements d'axes*** Δ_1 ***et*** Δ_2 ***perpendiculaires en*** O_1 ***et*** O_2 ***à*** D ***tels que :***

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{\vec{T}}{2} \text{ et } (\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\theta}{2}.$$

On peut donc ainsi décomposer un déplacement hélicoïdal d'une infinité de façons, car le point O_1 sur D et la direction de Δ_1 (perpendiculaire à D), sont arbitraires.

255. Théorème. — ***Le produit de deux déplacements hélicoïdaux*** $(\vec{D_1}, \theta, \vec{T_1})$ ***et*** $(\vec{D_2}, \theta_2, \vec{T_2})$ ***est un déplacement hélicoïdal.***

Désignons par Δ (fig. 210) la perpendiculaire commune O_1O_2 à D_1 et D_2 et par Δ_1 et Δ_2 les transformés de Δ, dans les déplacements hélicoïdaux $\left(\vec{D_1}, -\frac{\theta_1}{2}, -\frac{\vec{T_1}}{2}\right)$ et $\left(D_2, \frac{\theta_2}{2}, \frac{\vec{T_2}}{2}\right)$:

D'après ce qui précède :

$(D_2)\ o\ (D_1) = [S(\Delta_2)\ o\ S(\Delta)]\ o\ [S(\Delta)\ o\ S(\Delta_1)]$

Soit : $(D_2)\ o\ (D_1) = S(\Delta_2)\ o\ S(\Delta_1)$.

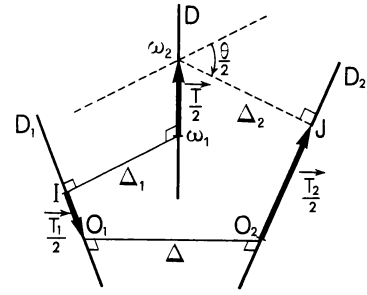


Fig. 210

En désignant par D la perpendiculaire commune $\omega_1\omega_2$ à Δ_1 et Δ_2 et par $\theta/2$, l'angle (Δ_1, Δ_2) autour de $\vec{D}$ on obtient : $(D_2)\ o\ (D_1) = (\vec{D}, \theta, 2\,\overrightarrow{\omega_1\omega_2})$.

Ce produit n'est commutatif si $D_1 \neq D_2$ que dans le cas de deux retournements d'axes perpendiculaires en un point O (n° 251). Il est toujours commutatif si D_1 et D_2 sont confondus, car on obtient un déplacement de même axe tel que $\theta = \theta_1 + \theta_2$ et $\vec{T} = \vec{T_1} + \vec{T_2}$.

Il en résulte que le produit de deux rotations et celui d'une rotation par une translation sont des déplacements hélicoïdaux qui peuvent éventuellement se réduire à une rotation ou à une translation.

256. Théorème. — ***Tout déplacement dans l'espace est équivalent à un déplacement hélicoïdal unique qui se réduit éventuellement à une rotation ou à une translation.***

1° Considérons le déplacement défini par les triangles égaux ABC et A′B′C′. Désignons par (D_1) une rotation transformant A en A′ (ou la translation $\vec{T} = \overrightarrow{AA'}$) et transformant ABC en un triangle $A'B_1C_1$ égal à A′B′C′. Il existe donc (n° 245) une rotation (D_2) transformant $A'B_1C_1$ en A′B′C′. Le produit $(D) = (D_2) \circ (D_1)$ est un déplacement hélicoïdal qui transforme ABC en A′B′C′ et qui est donc équivalent au déplacement considéré.

2° Ce déplacement hélicoïdal (D) est unique, car s'il en existait un second (D′) on pourrait, en désignant par Δ une perpendiculaire commune aux axes D et D′, décomposer ces deux déplacements hélicoïdaux sous la forme :

$$(D) = S(\Delta) \circ S(\Delta_1) \quad \text{et} \quad (D') = S(\Delta) \circ S(\Delta'_1) \quad \text{et voir que :}$$

$$(D) = (D') \implies S(\Delta) \circ (D) = S(\Delta) \circ (D') \implies S(\Delta_1) = S(\Delta'_1).$$

Soit finalement : $(D) = (D') = S(\Delta) \circ S(\Delta_1)$.

Les deux déplacements (D) et (D′) sont donc identiques (n° 252).

REMARQUE. — Dans tout déplacement hélicoïdal $(\vec{D}, \theta, \vec{T})$ d'angle non nul (autre qu'une translation), lorsqu'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal à son transformé $\overrightarrow{A'B'}$, ce vecteur $\overrightarrow{AB}$ est parallèle à D. Mais le support AB de ce vecteur n'est conservé que si ce support est D. L'axe $\vec{D}$ est donc le seul axe invariant dans le déplacement. Cette propriété géométrique détermine $\vec{D}$ d'une façon unique, indépendamment de la façon dont on effectue la réduction de ce déplacement.

257. Groupe des déplacements dans l'espace. — Soit G l'ensemble des déplacements (D) de l'espace :

1° $(D_1) \in G \quad \text{et} \quad (D_2) \in G \implies (D_2) \circ (D_1) \in G.$

2° La transformation identique I est de un élément de G.

3° $(D) = S(\Delta_2) \circ S(\Delta_1) \implies S(\Delta_1) \circ S(\Delta_2) = (D)^{-1}.$

L'ensemble des déplacements de l'espace admet donc une structure de groupe pour l'opération-produit (n° 188).

Ce groupe admet pour sous-groupe le groupe des translations (n° 240).

EXERCICES

315. Soient deux plans sécants P et Q, un point variable M du plan P, un point variable M′ du plan Q. Trouver le lieu géométrique des points M et M′ sachant que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à un vecteur donné $\vec{V}$.

316. On donne trois plans P, Q, R ayant un point commun O. Construire un triangle dont les sommets A, B, C appartiennent respectivement aux plans P, Q et R sachant que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont respectivement égaux à deux vecteurs donnés $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

317. Soient deux sphères S et S′, un point variable M de la première, un point variable M′ de la seconde. Trouver le lieu géométrique des points M et M′ sachant que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à un vecteur donné $\overrightarrow{V}$.

318. Étant donné deux cercles concentriques de rayons R et R′, construire une droite parallèle à une direction donnée sur laquelle les cercles donnés déterminent deux cordes dont la somme ait une longueur donnée $2l$.

319. 1° Construire dans un plan une droite de direction donnée δ sur laquelle deux cercles donnés découpent des cordes égales.

2° Construire un plan de direction donnée sur laquelle deux sphères données découpent des cercles de même rayon.

320. 1° Ensemble des axes des rotations qui transforment un point donné A en un point donné A′.

2° Construire l'axe et l'angle de la rotation qui transforme un vecteur donné $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur donné, de même module $\overrightarrow{A'B'}$ non coplanaire avec $\overrightarrow{AB}$.

321. On considère la rotation (Δ, α) qui transforme la droite D en D′. Soit OA la perpendiculaire commune à Δ et D, OA′ la perpendiculaire commune à Δ et D′ et enfin Δ' l'intersection des plans perpendiculaires en A et A′ à OA et OA′.

1° Montrer que D et D′ coupent Δ' en des points I et J symétriques par rapport au pied K de Δ' sur plan AOA′.

2° Pour que D et D′ soient concourantes il faut et il suffit que D coupe Δ ou lui soit orthogonale.

3° Pour que D et D′ soient parallèles il faut et il suffit que D soit parallèle à Δ.

322. Soient D et D′ deux droites homologues dans la rotation (Δ, θ). On désigne par OA et OA′ les perpendiculaires communes à Δ et D d'une part, Δ et D′ d'autre part.

Montrer que la bissectrice intérieure de l'angle AOA′ est l'axe d'un retournement transformant D en D′. Déterminer un second retournement transformant D en D′

323. Soient Δ et Δ' les axes des retournements transformant l'axe $\overrightarrow{D}$ en l'axe $\overrightarrow{D'}$ et en l'axe $-\overrightarrow{D'}$ opposé à $\overrightarrow{D'}$, δ l'axe d'une rotation $(\overrightarrow{\delta}, \theta)$ transformant $\overrightarrow{D}$ en $\overrightarrow{D'}$, IA et IA′ les perpendiculaires communes au couple δ, D et au couple δ, D′.

1° Décomposer la rotation $(\overrightarrow{\delta}, \theta)$ en un produit de deux retournements et montrer que δ est perpendiculaire en I à Δ'. Construire δ connaissant I.

2° Soit M un point de δ se projetant en K′ sur D′. On effectue le produit de la rotation $(\overrightarrow{\delta}, \theta)$ par le retournement d'axe MK′. Montrer que par M passe l'axe δ' d'une rotation transformant $\overrightarrow{D}$ en $-\overrightarrow{D'}$.

324. Dans une rotation d'axe donné Δ et d'angle variable α, on désigne par P′ le transformé d'un plan P donné.

1° Trouver le lieu de la projection de la droite Δ sur le plan P′ et l'enveloppe du plan P′.

2° Construire les plans P′ dont la trace sur un plan perpendiculaire à l'axe Δ passe par un point fixe ou est parallèle à une direction donnée.

325. On considère un déplacement dans lequel un plan donné P est globalement invariant. Montrer que ce déplacement est soit une translation parallèle à P, soit une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan P.

2° On considère le produit d'une translation donnée de vecteur $\overrightarrow{T}$ par une rotation donnée (Δ, α) dont l'axe Δ est orthogonal au support du vecteur $\overrightarrow{T}$. Montrer que la transformation ainsi définie est une rotation d'angle α autour d'un axe parallèle à Δ.

326. 1° Montrer que tout déplacement qui transforme une figure F d'un plan P en une figure F′ directement égale de ce plan est une rotation d'axe Δ perpendiculaire à P ou une translation de vecteur parallèle à P.

2° Étudier un déplacement qui transforme une figure F du plan P en une figure inversement égale de ce plan.

327. On considère un déplacement dans lequel deux points donnés A et A′ ont pour transformés respectifs les points A′ et A.

1° Montrer que le milieu O de AA′ est invariant et que la transformation est une symétrie autour d'un axe perpendiculaire en O à AA′.

2° Si un déplacement transforme un axe $\overrightarrow{x'x}$ en l'axe opposé $\overrightarrow{xx'}$ c'est une symétrie autour d'un axe perpendiculaire au premier.

328. Démontrer que le produit des retournements autour des trois arêtes d'un trièdre trirectangle est la transformation identique.

329. 1° Dans un retournement les seules droites globalement invariantes sont l'axe du retournement et les droites qui le coupent à angle droit.

2° Dans le produit de deux retournements d'axes quelconques, leur perpendiculaire commune est la seule droite globalement invariante de la transformation.

3° Montrer que si le produit de quatre retournements d'axes D_1, D_2, D_3, D_4 est la transformation identique, ces quatre droites ont même perpendiculaire commune Δ. Quelle est la relation qui lie les angles (D_1, D_2) et (D_3, D_4) mesurés autour d'un axe porté par Δ et quelle est la relation entre les pieds O_1, O_2, O_3 et O_4 des quatre axes sur Δ ?

4° Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le produit de trois retournements soit un retournement ?

330. On considère le déplacement D produit de la rotation d'axe Δ d'angle 2α par la translation définie par un vecteur V de support parallèle à Δ et de mesure $2a$ par rapport à cet axe. Soit M′ le transformé de M dans ce déplacement et P le milieu de MM′. Construire les points M et M′ connaissant le point P.

331. 1° Montrer que tout déplacement d'axe D qui transforme un vecteur donné $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur donné $\overrightarrow{A'B'}$ de même module est le produit de la rotation $(\vec{\Delta}, \theta)$ qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$ par une rotation quelconque d'axe $\overrightarrow{A'B'}$.

2° Soit δ l'axe du retournement qui transforme l'axe $\overrightarrow{AB}$ en l'axe $\overrightarrow{B'A'}$. Montrer que l'axe du déplacement D est la perpendiculaire commune HK à δ et à une droite d perpendiculaire à A′B′ en un point bien déterminé.

3° Montrer que le point d'intersection K de D et d est situé sur un cylindre de révolution dont une génératrice est δ. Construire D connaissant sa direction perpendiculaire à δ.

332. 1° Effectuer le produit d'une translation par un déplacement hélicoïdal ou d'un déplacement hélicoïdal et d'une translation.

2° Effectuer le produit d'un déplacement hélicoïdal et d'une rotation ou d'une rotation et d'un déplacement hélicoïdal.

333. On considère trois figures F_1, F_2 et F_3 égales de l'espace et on désigne par (D_1), (D_2) et (D_3) les déplacements qui transforment F_2 en F_3, F_3 en F_1 et F_1 en F_2.

1° Démontrer qu'il existe trois retournements d'axes Δ_1, Δ_2 et Δ_3 tels que : $(D_1) = S(\Delta_3) \circ S(\Delta_2)$, $(D_2) = S(\Delta_1) \circ S(\Delta_3)$ et $D_3 = S(\Delta_2) \circ S(\Delta_1)$.

2° En déduire que F_1, F_2 et F_3 sont les transformés d'une même figure F dans trois retournements distincts.

334. On donne, dans deux plans distincts, deux triangles égaux ABC et A′B′C′. Par un point donné O on mène les vecteurs $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OD'}$, $\overrightarrow{OE'}$ respectivement égaux à $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$. Soit d l'intersection des plans médiateurs de DD′ et EE′.

1° Montrer qu'il existe une rotation $(\vec{d}, \theta)$ transformant ODE en OD′E′ et que les projections orthogonales de $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ sur $\vec{d}$ sont des vecteurs égaux à un vecteur $\vec{T}$.

2° Construire l'axe D du déplacement hélicoïdal $(\vec{D}, \theta, \vec{T})$ transformant A en A′. Démontrer qu'il est équivalent au déplacement défini par les triangles ABC et A′B′C′.

335. Étant donné deux points A et A′, on considère l'ensemble des droites D axes des déplacements hélicoïdaux transformant A en A′. On désigne par O et O′ les projections de A et A′ sur D et par I et J les milieux de OO′ et AA′.

1° Montrer que IJ est la perpendiculaire commune à OO′ et AA′. En déduire le lieu de I et la construction d'une droite D quelconque.

2° Caractériser les droites D issues d'un point donné S ou situées dans un plan donné P.

336. Soit un déplacement hélicoïdal (D). On désigne par d' la transformée d'une droite d.

1° Construire une droite d passant, ainsi que sa transformée d', par un point donné A. Caractériser le plan d, d'. Quelle sont les bissectrices de l'angle (d, d') ?

2° Trouver une droite d située, ainsi que sa transformée d', dans un plan donné P.

SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UN POINT

258. Définition. — Deux points M et M′ sont symétriques par rapport à un point si ce point est le milieu du segment MM′.

Considérons un point fixe O, *centre de symétrie* (fig. 211). A tout point M de l'espace correspond un point M′ symétrique de M par rapport à O. On l'obtient en construisant $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

La transformation ponctuelle ainsi définie est la symétrie par rapport au point O. En abrégé : *Symétrie-point de centre* O *ou* S(O).

Si le point M décrit une figure F, le point M′ décrit une figure F′ symétrique de la figure F par rapport au point O.

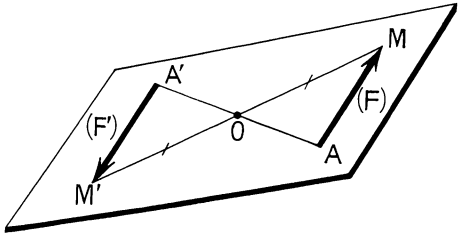


Fig. 211

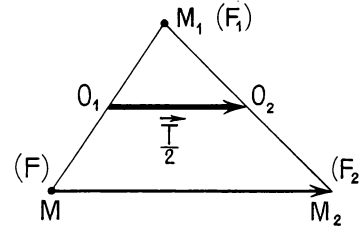


Fig. 212

La symétrie-point est une transformation involutive admettant pour seul point double le centre O. Toute droite et tout plan issus de O, tout cercle et toute sphère de centre O sont globalement invariants.

259. Théorème. — ***La symétrie-point transforme un vecteur en un vecteur opposé.***

En effet, dans le plan OAM (fig. 211), la symétrie par rapport à O (n° 222) transforme le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en $\overrightarrow{A'M'} = -\overrightarrow{AM}$. Réciproquement :

Toute transformation ponctuelle dans laquelle le vecteur joignant deux points et le vecteur joignant les deux points homologues sont opposés est une symétrie-point.

260. Théorème. — ***Le produit des symétries-point de centres*** O_1 ***et*** O_2 ***est la translation de vecteur*** $2\,\overrightarrow{O_1O_2}$.

Soient M_1 le symétrique de M par rapport à O_1 et M_2 le symétrique de M_1 par rapport à O_2 (fig. 212). Les points O_1 et O_2 étant les milieux respectifs de $\overrightarrow{MM_1}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$, on obtient : $\overrightarrow{MM_2} = 2\,\overrightarrow{O_1O_2}$ et :

$$S(O_2) \circ S(O_1) = T(2\,\overrightarrow{O_1O_2}).$$

Réciproquement :

Toute translation de vecteur $\vec{T}$ ***est équivalente d'une infinité de façons au produit des symétries par rapport aux points*** O_1 ***et*** O_2 ***tels que*** $\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{T}/2$.

On peut donc choisir arbitrairement l'un de ces points.

261. Corollaire. — ***Les figures symétriques d'une figure donnée par rapport à deux centres distincts*** O_1 ***et*** O_2 ***sont égales et se correspondent dans la translation de vecteur*** $2\ \overrightarrow{O_1O_2}$.

Le point M_1 a pour transformés respectifs M et M_2 dans les symétries par rapport à O_1 et O_2 (fig. 212) et : $\overrightarrow{MM_2} = 2\ \overrightarrow{O_1O_2}$. Lorsque le point M_1 décrit une figure donnée F_1, la figure F_2 décrite par M_2 est la transformée de la figure F décrite par M dans la translation de vecteur $2\ \overrightarrow{O_1O_2}$. Autrement dit :

Toutes les figures, symétriques d'une figure donnée F, *par rapport aux différents points de l'espace sont égales entre elles.*

On pourra donc choisir le centre de symétrie le plus avantageux pour l'étude de la transformée par symétrie-point, d'une figure donnée F.

262. Applications. — 1° La symétrie-point de centre O transformant un vecteur en un vecteur opposé (n° 259) transforme une droite ou un plan en une droite ou un plan parallèle, un angle en un angle égal à côtés respectivement parallèles et de sens contraires, un cercle ou une sphère en un cercle ou une sphère de même rayon, et toute figure plane en une figure plane égale.

2° Réciproquement deux droites ou deux plans parallèles sont symétriques par rapport au milieu O du segment joignant un point de l'un à un point de l'autre. Deux cercles égaux, situés dans des plans parallèles, ou deux sphères de même rayon sont symétriques par rapport au milieu du segment joignant leurs centres.

3° Soit O un point de l'arête Δ du dièdre orienté (P, $\vec{\Delta}$, Q) (fig. 213). La symétrie de centre O transforme ce dièdre en (P, $\vec{\Delta}'$, Q) ou $\vec{\Delta}'$ est l'axe opposé à $\vec{\Delta}$.

La symétrie de centre quelconque O_1 transforme le dièdre (P, $\vec{\Delta}$, Q) en un dièdre (P_1, $\vec{\Delta}_1$, Q_1) égal au dièdre (P, $\vec{\Delta}'$, Q) (n° 261) donc de sens contraire au dièdre (P, $\vec{\Delta}$, Q). Donc :

Dans l'espace, la symétrie par rapport à un point n'est pas un déplacement.

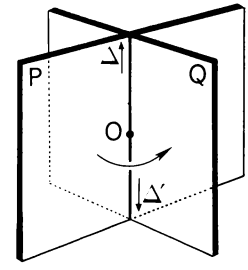


Fig. 213

SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UN PLAN

263. Définition. — Deux points M et M′ sont symétriques par rapport à un plan, lorsque ce plan est le plan médiateur du segment MM′.

Considérons un plan fixe P, appelé *plan de symétrie* (fig. 214). A tout point M de l'espace correspond un point M′ symétrique de M par rapport au plan P.

On l'obtient en projetant orthogonalement M en H sur le plan P et en construisant $\overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$.

La transformation ponctuelle ainsi définie est la symétrie par rapport au plan P. En abrégé : *Symétrie-plan* P ou S(P).

Si le point M décrit une figure F, le point M′ décrit une figure F′, symétrique de la figure F par rapport au plan P.

La symétrie par rapport au plan P ***est une transformation involutive dans laquelle tout point du plan*** P ***est invariant.***

Toute droite, tout plan perpendiculaire au plan P sont globalement invariants ainsi que toute sphère dont le centre est dans le plan P.

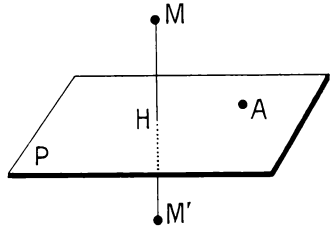


Fig. 214

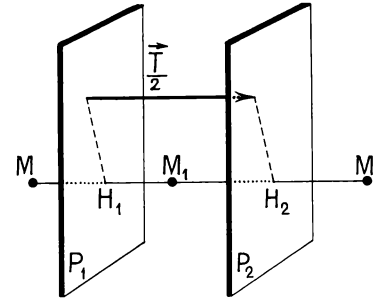


Fig. 215

264. Théorème. — ***Le produit des symétries par rapport à deux plans parallèles*** P_1 ***et*** P_2 ***est la translation perpendiculaire à ces deux plans double de celle qui transforme le premier plan en le second.***

Soit M_1 le transformé du point M dans la symétrie par rapport au plan P_1 et M_2 le transformé de M_1 dans la symétrie par rapport au plan P_2 parallèle au plan P_1 (fig. 215). Les trois points M, M_1 et M_2 sont alignés et les points H_1 et H_2 étant les milieux de $\overrightarrow{M_1M}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$, on obtient : $\overrightarrow{MM_2} = 2\,\overrightarrow{H_1H_2}$.

Donc : $$S(P_2) \circ S(P_1) = T(2\,\overrightarrow{H_1H_2}).$$

Ce produit n'est pas commutatif car : $S(P_1) \circ S(P_2) = T(2\,\overrightarrow{H_2H_1})$.

Réciproquement :

Toute translation de vecteur $\vec{T}$ ***est équivalente, d'une infinité de façons, au produit des symétries par rapport à deux plans perpendiculaires au vecteur*** $\vec{T}$ ***tels que le second soit le transformé du premier dans la translation de vecteur*** $\frac{\vec{T}}{2}$.

Soit $\overrightarrow{H_1H_2}$ un vecteur quelconque égal à $\frac{\vec{T}}{2}$ et soient P_1 et P_2 les plans perpendiculaires en H_1 et H_2 à la droite H_1H_2. Le produit $S(P_2) \circ S(P_1)$ est la translation de vecteur $\vec{T}$.

265. Théorème. — ***Le produit des symétries par rapport à deux plans sécants*** P_1 ***et*** P_2 ***est la rotation autour de leur intersection, double de la rotation qui, autour de cet axe, transforme le premier plan en le second.***

Soit Δ l'intersection des plans P_1 et P_2 (fig. 216) et α la mesure du dièdre orienté $(P_1, \vec{\Delta}, P_2)$. La symétrie-plan P_1 transforme M en M_1 et la symétrie-plan P_2 transforme M_1 en M_2. Les points M, M_1, M_2 sont dans un plan R perpendiculaire en O à Δ. Ce plan R coupe P_1 et P_2 suivant les médiatrices Ox et Oy de MM_1 et M_1M_2. Dans le plan R, orienté par $\vec{\Delta}$, le point M_2 est le transformé de M dans la rotation de centre O et d'angle

2 $(Ox, Oy) = 2\alpha$ (n° 218). Le point M_2 est donc le transformé de M dans la rotation d'axe Δ et d'angle $2\ (P_1, \vec{\Delta}, P_2) = 2\alpha$.

Donc : $$S(P_2) \circ S(P_1) = R(\vec{\Delta}, 2\alpha).$$

Ce produit n'est pas, en général, commutatif car : $S(P_1) \circ S(P_2) = R(\vec{\Delta}, -2\alpha)$.

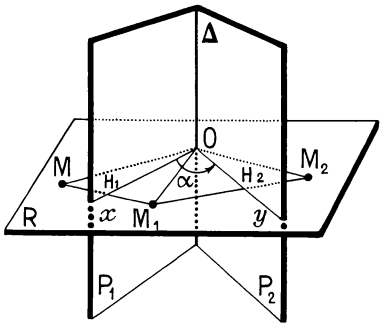


Fig. 216

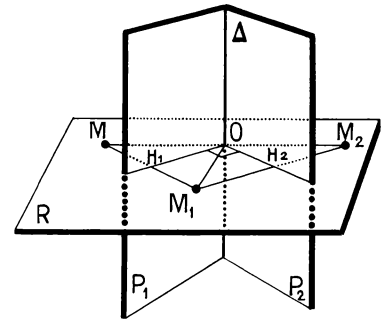


Fig. 217

Réciproquement :

Toute rotation $(\vec{\Delta}, \theta)$ ***est équivalente, d'une infinité de façons, au produit des symétries par rapport à deux plans*** P_1 ***et*** P_2 ***issus de*** Δ ***tels que le dièdre orienté*** $(P_1, \vec{\Delta}, P_2)$ ***soit égal*** $\frac{\theta}{2}$.

Soit P_1 un plan quelconque issu de Δ et P_2 le transformé de P_1 dans la rotation $\left(\vec{\Delta}, \frac{\theta}{2}\right)$. Le produit $S(P_2) \circ S(P_1)$ est la rotation $(\vec{\Delta}, \theta)$.

266. Corollaire. — ***Le produit commutatif des symétries par rapport à deux plans rectangulaires est le retournement autour de leur intersection.***

En effet si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ la rotation $(\vec{\Delta}, 2\alpha)$ est la symétrie par rapport à la droite Δ (fig. 217). C'est le seul cas où le produit $S(P_2) \circ S(P_1)$ est commutatif. Réciproquement :

Tout retournement d'axe Δ ***est équivalent d'une infinité de façons au produit des symétries par rapport à deux plans rectangulaires issus de*** Δ.

L'un de ces plans peut être choisi arbitrairement.

267. Théorème. — ***Les figures symétriques d'une figure donnée par rapport à deux plans distincts*** P_1 ***et*** P_2 ***sont égales.***

Soient F_1 et F_2 les figures symétriques d'une figure donnée F par rapport à chacun des deux plans P_1 et P_2. La figure F_2 est la transformée de F_1 dans le produit des symétries par rapport à P_1 et à P_2, soit dans une translation (n° 264) ou dans une rotation (n° 265) :

Toutes les figures symétriques d'une figure donnée F *par rapport aux différents plans de l'espace sont égales entre elles.*

268. Applications. — 1° Les transformées R′ et F′ d'un plan R et d'une figure F de ce plan (fig. 218) dans la symétrie-plan P sont aussi les transformés de R et F dans le produit S(P) o S(R) donc dans un déplacement car la symétrie-plan S(R) conserve

chaque point de R. Il en résulte que R′ est un plan tel que l'angle dièdre (R, R′) admette le plan P pour bissecteur, et que F′ est une figure plane égale à F. La symétrie-plan

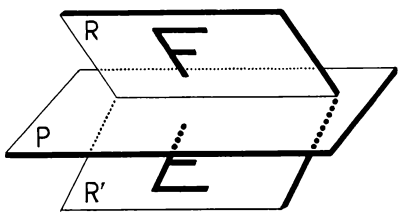


Fig. 218

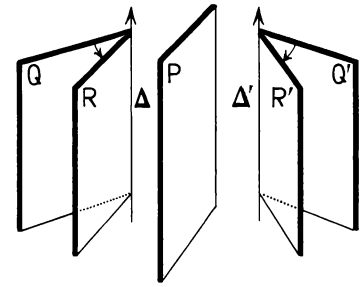


Fig. 219

transforme donc une droite en une droite, un segment ou un angle en un segment ou un angle égal, un cercle ou une sphère en un cercle ou une sphère de même rayon, etc.

2° Réciproquement deux droites concourantes ou deux plans sécants sont symétriques par rapport à l'un de leurs bissecteurs, deux sphères de centres O et O′ et de même rayon sont symétriques par rapport au plan médiateur du segment OO′, etc.

3° Soit $(Q', \vec{\Delta}', R')$ le transformé du dièdre orienté $(Q, \vec{\Delta}, R)$ dans la symétrie-plan P (fig. 219). Le symétrique du dièdre $(Q, \vec{\Delta}, R)$ par rapport à son bissecteur intérieur est le dièdre $(R, \vec{\Delta}, Q)$. Les deux dièdres orientés $(Q', \vec{\Delta}', R')$ et $(R, \vec{\Delta}, Q)$ sont égaux (n° 267). Le dièdre $(R, \vec{\Delta}, Q)$ étant opposé au dièdre $(Q, \vec{\Delta}, R)$, on en déduit que la symétrie-plan transforme un dièdre orienté en un dièdre orienté opposé :

La symétrie par rapport à un plan n'est pas un déplacement.

COMPARAISON DES DEUX SYMÉTRIES

269. Théorème fondamental. — ***Le produit de la symétrie par rapport à un plan*** P ***et de la symétrie par rapport à un point*** O ***de ce plan est la symétrie par rapport à la droite*** Δ ***perpendiculaire en*** O ***au plan*** P.

Soient M_1 le transformé d'un point M dans la symétrie par rapport au plan P et M_2 le transformé de M_1 dans la symétrie par rapport au point O de ce plan (fig. 220). Les droites Δ et MM_1, perpendiculaires au plan P sont parallèles. La droite Δ qui passe par le milieu O de M_1M_2 coupe MM_2 en son milieu I. Les points H et O étant les milieux de M_1M et M_1M_2, la droite MM_2 est parallèle à OH et perpendiculaire à Δ. La droite Δ est donc médiatrice du segment MM_2, ce qui montre que M_2 est le transformé de M dans le retournement d'axe Δ.

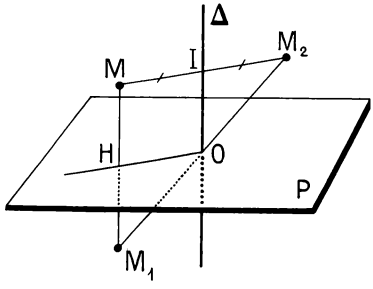


Fig. 220

270. Corollaires. — On voit aisément (fig. 220) que l'une des trois symétries S (O), S(P) et S(Δ) est équivalente au produit commutatif des deux autres. Ainsi la symétrie S(O) qui transforme M_1 en M_2 est le produit de la symétrie S(P) qui transforme M_1 en M et de la symétrie S(Δ) qui transforme M en M_2 :

Toute symétrie-point de centre O *est équivalente au produit commutatif de la symétrie par rapport à un plan* P *passant par* O *et de la symétrie par rapport à la droite* Δ *perpendiculaire en* O *au plan* P.

La symétrie-droite d'axe Δ étant elle-même équivalente au produit des symétries par rapport à deux plans rectangulaires P_1 et P_2 issus de Δ (n° 266) il en résulte que :

Toute symétrie-point de centre O *est équivalente au produit des symétries par rapport à trois plans* P, P_1 *et* P_2 *issus de* O *et deux à deux perpendiculaires.*

Ce produit est indépendant de l'ordre des trois plans (n° 266).

271. Théorème. — *Les figures symétriques d'une figure donnée par rapport à un point et par rapport à un plan quelconque de l'espace sont égales.*

Toutes les figures symétriques de la figure F par rapport aux différents points de l'espace étant égales entre elles (n° 261) on peut choisir le centre de symétrie O dans le plan de symétrie P. Soient F_1 et F_2 les transformées de la figure F dans la symétrie-plan P et dans la symétrie-point O. La figure F_2 est la transformée de F_1 dans le produit de ces deux symétries, c'est-à-dire (n° 269) dans la symétrie par rapport à la droite Δ perpendiculaire en O au plan P. Les figures F_1 et F_2 sont donc égales.

272. Figures symétriques. — *Deux figures* F *et* F′ *de l'espace sont dites symétriques lorsque l'une d'elles est égale à la transformée de l'autre dans une symétrie-plan ou une symétrie-point.*

Le centre ou le plan de la symétrie est indifférent (n° 271).

Toutes les figures symétriques d'une figure donnée sont égales. Dans deux figures symétriques F et F′ deux segments, deux triangles, deux angles homologues sont égaux. Par contre deux dièdres orientés homologues sont opposés et deux dièdres homologues sont de sens contraires.

Deux figures symétriques de l'espace ne peuvent donc pas se correspondre par éléments homologues dans un déplacement.

On appelle ***antidéplacement*** toute transformation ponctuelle qui transforme une figure F en une figure symétrique F′. Un antidéplacement est le produit d'une symétrie point (ou plan) et d'un déplacement.

273. Théorèmes. — 1° ***Deux polygones plans symétriques sont équivalents.***

Un polygone plan est invariant dans la symétrie par rapport à son plan. Deux polygones symétriques sont égaux et ont par conséquent même aire.

2° ***Deux polyèdres symétriques ont même volume.***

La symétrique d'une pyramide par rapport au plan de sa base (fig. 221) est une pyramide de même base B et de même hauteur *h*. Elle est donc équivalente à la première et deux pyramides symétriques quelconques sont donc équivalentes.

Deux polyèdres symétriques P et P′ peuvent être décomposés en pyramides homologues symétriques et équivalentes. Il en résulte que deux polyèdres symétriques sont équivalents.

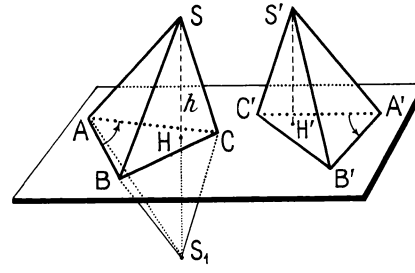


Fig. 221

274. Isométries dans l'espace. — Nous avons vu (n° 226) que toute isométrie transforme une figure plane en une figure égale. Il en résulte que dans toute isométrie (I) l'homologue d'un tétraèdre ABCD est un tétraèdre A′B′C′D′ dont les faces et les dièdres sont respectivement égaux à ceux de ABCD. Tout point M barycentre de A(α), B (β), C(γ) et D(δ) a pour homologue le point M′ barycentre de A′(α), B′(β), C′(γ) et D′(δ). Désignons par (D) le déplacement qui transforme ABC en A′B′C′.

1° Si les dièdres orientés (C, $\overrightarrow{AB}$, D) et (C′, $\overrightarrow{A'B'}$, D′) sont de même sens, le déplacement (D) transforme également D en D′ et par suite M en M′. *Ce déplacement* (D) *est donc équivalent à l'isométrie* (I) *qui est dite positive.*

2° Si les dièdres orientés (C, $\overrightarrow{AB}$, D) et (C′, $\overrightarrow{A'B'}$, D′) sont de sens contraires, le déplacement (D) transforme D en D_1 et M en M_1. Les points D_1 et M_1 sont respectivement symétriques de D′ et M′ par rapport au plan P du triangle A′B′C′ et dans ce cas (I) = S(P) o (D).

L'isométrie (I), *qui est dite négative, est un antidéplacement* (n° 272). Donc :

Toute isométrie dans l'espace est donc un déplacement ou un antidéplacement.

On démontre comme au n° 220 que :

Les isométries dans l'espace ont une structure de groupe pour l'opération-produit.

Le groupe des déplacements dans l'espace est un sous-groupe du groupe des isométries.

ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE D'UNE FIGURE

275. Définition. — *On dit qu'une figure* F *admet un centre de symétrie* O, *un axe de symétrie* Δ, *un plan de symétrie* P, *lorsqu'elle est globalement invariante dans la symétrie de centre* O, *d'axe* Δ *ou de plan* P.

EXEMPLES. — 1° *Une droite* D admet un point quelconque de cette droite comme centre de symétrie, la droite D et toute perpendiculaire à D comme axe de symétrie, tout plan contenant D et tout plan perpendiculaire à D comme plan de symétrie.

Un plan P admet l'un quelconque de ses points comme centre de symétrie, toute droite du plan P ou perpendiculaire à ce plan comme axe de symétrie, le plan P lui-même et tout plan perpendiculaire à P comme plans de symétrie.

2° *Un cercle de centre* O admet le point O pour centre de symétrie, son axe et ses diamètres comme axes de symétrie, son plan et les plans issus de son axe comme plans de symétrie.

Une sphère de centre O admet le point O pour centre de symétrie, tout diamètre comme axe de symétrie et tout plan diamétral pour plan de symétrie.

3° Un polygone régulier de n côtés admet les bissectrices intérieures de ses angles et les médiatrices de ses côtés pour axes de symétrie (n au total), son plan P et les n plans perpendiculaires à P suivant les n axes de symétrie précédents pour plans de symétrie. Si n est pair son centre O est un centre de symétrie et l'axe Δ du cercle circonscrit est un axe de symétrie.

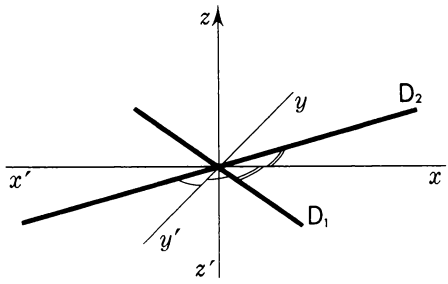


Fig. 222

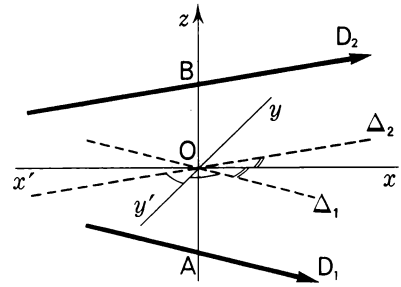


Fig. 223

4° La figure formée par deux droites D_1 et D_2 concourantes en O (fig. 222) admet le point O pour centre de symétrie, les bissectrices $x'x$ et $y'y$ de l'angle (D_1, D_2) et leur perpendiculaire commune $z'z$ pour axes de symétrie. Enfin elle admet son plan xOy et les plans bissecteurs zOx et zOy de l'angle (D_1, D_2) pour plans de symétrie.

La figure formée par deux droites non concourantes D_1 et D_2 (fig. 223) admet pour axes de symétrie $z'z$ perpendiculaire commune en A et B aux deux droites ainsi que $x'x$ et $y'y$ bissectrices de l'angle (Δ_1, Δ_2) obtenu en menant par O, milieu de AB les

parallèles à D_1 et D_2. En effet $S(x'x)$ par exemple est le produit des symétries-plans $S(xOz)$ o $S(xOy)$ qui transforme D_1 en D_2. Pour les axes $\vec{D_1}$ et $\vec{D_2}$ (cf. n° 247) seul subsiste l'axe $x'x$ bissectrice de $(\vec{\Delta_1}, \vec{\Delta_2})$.

276. Théorèmes. — 1° ***Toute figure qui admet deux axes de symétries*** Δ_1 ***et*** Δ_2 ***perpendiculaires en*** O ***en admet un troisième, leur perpendiculaire commune*** Δ.

Cela résulte du n° 251. Dans le plan P qui contient Δ_1 et Δ_2, la symétrie Δ se réduit à la symétrie-point O (n° 219) et l'existence des éléments de symétrie Δ_1 et O entraîne celle de Δ_2.

2° ***Toute figure qui admet deux plans de symétrie rectangulaires*** P_1 ***et*** P_2 ***admet leur intersection*** Δ ***pour axe de symétrie*** (n° 266).

Réciproquement : l'existence du plan de symétrie P_1 contenant l'axe de symétrie Δ entraîne celle du second plan de symétrie P_2.

3° ***Toute figure qui admet un plan de symétrie*** P ***issu d'un centre de symétrie*** O ***admet un axe de symétrie*** Δ ***perpendiculaire en*** O ***à*** P (n° 269).

Réciproquement, l'existence de deux des trois éléments de symétrie, P, O et Δ entraîne celui du troisième (n° 270). On en déduit que :

Toute figure qui admet trois plans de symétrie deux à deux perpendiculaires admet trois axes de symétrie issus d'un centre de symétrie.

277. Exemples. — 1° ***Figure formée par deux plans sécants.*** — La figure (P, Q) admet pour plans de symétrie (fig. 224) les deux plans bissecteurs π_1 et π_2 (n° 268, 1°) et tout plan π perpendiculaire en O à l'intersection Δ des deux plans P et Q. Ces plans étant deux à deux rectangulaires on en déduit (n° 276, 2°) que Δ et les intersections Δ_1 et Δ_2 de π par π_1 et π_2 sont des axes de symétrie et que O est un centre de symétrie (n° 276, 3°). En résumé, l'angle de plans (P, Q) admet les éléments de symétrie de l'un quelconque de ses rectilignes $(x'x, y'y)$.

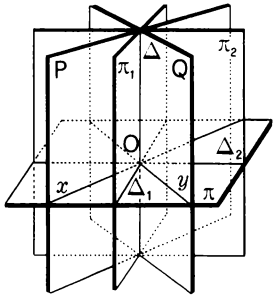


Fig. 224

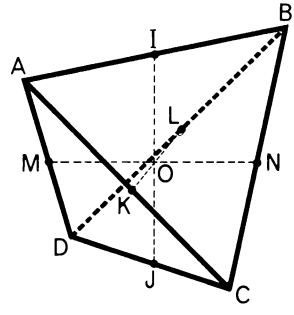


Fig. 225

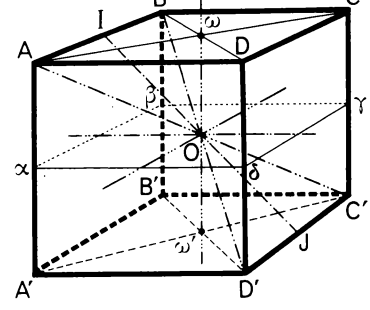


Fig. 226

2° ***Tétraèdre régulier.*** — Un tétraèdre régulier ABCD admet six plans de symétrie: les plans médiateurs de ses six arêtes (fig. 225). Les plans médiateurs de deux arêtes opposées AB et CD sont rectangulaires. Leur intersection IJ, qui joint les milieux de ces deux arêtes, est donc (n° 276, 2°) un axe de symétrie. Les trois axes de symétrie analogues sont deux à deux perpendiculaires en O, milieu des trois segments tels que IJ.

3° ***Cube.*** — Le cube ABCDA'B'C'D' (fig. 226) admet 9 plans de symétrie, les 3 plans médiateurs des arêtes de même direction et les 6 plans diagonaux tels que ABC'D'. Les

3 plans médiateurs sont deux à deux rectangulaires et se coupent (n° 276, 2°) suivant trois axes de symétrie tels que la droite $\omega\omega'$ joignant les centres de deux faces opposées et issus du point O, centre de symétrie (n° 276, 3°). Tout plan médiateur est perpendiculaire à deux plans diagonaux d'où 6 nouveaux axes de symétrie tels que la droite IJ médiatrice commune de deux arêtes opposées AB et C'D'.

278. Axe de répétition d'une figure. — Étant donné un nombre entier n :

Une figure F ***admet un axe de répétition*** Δ ***d'ordre*** n ***lorsque cette figure est globalement invariante dans une rotation d'axe*** Δ ***et d'angle*** $\frac{2\pi}{n}$.

Pour qu'il en soit ainsi il suffit que la figure F admette deux plans de symétrie sécants (n° 265) ou deux axes de symétrie concourants (n° 250) faisant entre eux l'angle $\frac{\pi}{n}$.

Deux plans de symétrie d'un tétraèdre régulier (fig. 227) font un angle aigu de $\frac{\pi}{3}$. Le tétraèdre régulier admet donc quatre axes de répétition d'ordre 3 ou *quatre axes ternaires*. Ce sont les 4 hauteurs du tétraèdre telles que AO.

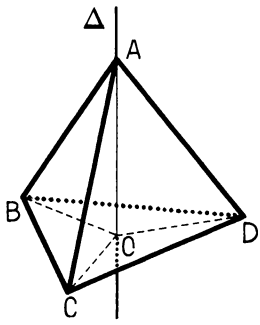


Fig. 227

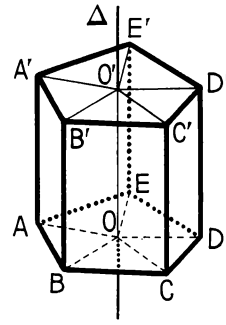


Fig. 228

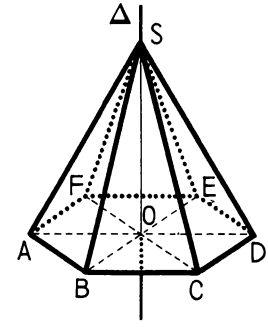


Fig. 229

Deux plans de symétrie consécutifs, issus de l'axe Δ d'un polygone régulier convexe de n côtés font entre eux l'angle $\frac{\pi}{n}$. L'axe Δ de ce polygone est donc un axe de répétition d'ordre n. Il s'ensuit que l'axe Δ d'un prisme régulier (fig. 228), d'une pyramide régulière (fig. 229), d'un angle polyèdre régulier de n faces latérales est un axe de répétition d'ordre n.

Dans un cube (fig. 226) la droite $\omega\omega'$ qui joint les centres de deux faces opposées est donc un *axe quaternaire* (d'ordre 4). Toute diagonale telle que AC' est un *axe ternaire*, car c'est un axe ternaire commun aux deux tétraèdres réguliers AB'CD' et A'BC'D.

EXERCICES

337. Étant donné deux triangles égaux de l'espace ABC et A'B'C' tels que les plans médiateurs de AA', BB' et CC' se coupent en un point unique O, démontrer que les deux tétraèdres OABC et OA'B'C' sont symétriques.

338. Démontrer que l'on peut, par un produit de deux symétries-plans, transformer un triangle donné OAB en un triangle donné égal OA'B'. Retrouver ainsi la nature d'un déplacement de l'espace qui admet un point double.

339. Soit un plan P et un point extérieur O. On désigne par Δ la perpendiculaire au plan P issue de O et par H la projection de O sur le plan P.

1° Montrer que le produit de la symétrie-point O par la symétrie-plan P est équivalent au produit commutatif de la symétrie d'axe Δ par la translation de vecteur $2\overrightarrow{OH}$.

2° Effectuer de même le produit S(O) o S(P). Est-il commutatif ?

340. Montrer que le produit de deux rotations d'axes parallèles $(\overrightarrow{\Delta_1}, \alpha_1)$ et $(\overrightarrow{\Delta_2}, \alpha_2)$ est en général une rotation $(\overrightarrow{\Delta}, \alpha_1 + \alpha_2)$ d'axe parallèle à $\overrightarrow{\Delta_1}$ et $\overrightarrow{\Delta_2}$ et éventuellement une translation dont le vecteur $\overrightarrow{T}$ est orthogonal à Δ_1 et Δ_2. (Décomposer chaque rotation en un produit de deux symétries-plans, l'un des plans de symétrie étant le plan Δ_1, Δ_2.)

341. Effectuer comme à l'exercice précédent le produit de deux rotations d'axes Δ_1 et Δ_2 concourants en O et montrer qu'il équivaut à une rotation d'axe issu de O. Retrouver ainsi le produit de deux symétries d'axes concourants.

342. Montrer que le produit de la symétrie-point O par une rotation dont l'axe Δ ne passe pas par O est équivalent au produit commutatif de la symétrie par rapport au plan P issu de O et perpendiculaire à Δ par une rotation dont l'axe D est parallèle à Δ ou par une translation dont le vecteur $\overrightarrow{T}$ est orthogonal à Δ. [On décomposera S(O) en $S(\Delta_1)$ o S(P) où Δ_1 est parallèle à Δ.]

343. Montrer que le produit de la symétrie par rapport à un plan P et d'une rotation dont l'axe Δ coupe P en O est équivalent :

1° Au produit de la symétrie-point O par une rotation dont l'axe D est issu de O [décomposer S(P) en $S(\Delta_1)$ o S(O) où Δ_1 est perpendiculaire à P].

2° Au produit de la symétrie par rapport au plan R perpendiculaire en O à D par une autre rotation d'axe D.

3° En déduire le produit des symétries par rapport à trois plans P, P_1 et P_2 issus de O.

344. Soit Δ un axe parallèle au plan P. On désigne par Q le plan projetant de Δ. Montrer que le produit des symétries par rapport à Δ et à P est équivalent au produit de la symétrie par rapport au plan Q par une translation dont le vecteur est perpendiculaire au plan P.

345. Démontrer que le produit de la symétrie par rapport à un plan P par une rotation dont l'axe Δ est parallèle à P est équivalent :

1° Au produit de la symétrie par rapport à la projection Δ_1 de Δ sur le plan P et de la symétrie par rapport à un plan Q issu de Δ.

2° Au produit de la symétrie par rapport à un plan R issu de Δ_1 et perpendiculaire à Q et d'une translation dont le vecteur est perpendiculaire au plan Q.

3° En déduire le produit des symétries par rapport à trois plans parallèles à une même droite.

346. Soient F_2 et F_3 les transformées d'une figure donnée F_1 dans des rotations d'axes Oz et Oy.

1° Montrer que F_3 se déduit de F_2 dans une rotation d'axe Ox formant avec Oy et Oz un véritable trièdre $Oxyz$.

2° Démontrer que les figures F_1, F_2 et F_3 sont les symétriques d'une même figure F′ par rapport aux plans des trois faces du trièdre $Oxyz$.

3° Démontrer que les trois figures F_1, F_2 et F_3 sont les transformées d'une même figure F dans les retournements ayant pour axes les perpendiculaires OX, OY, OZ aux trois plans yOz, zOx et xOy.

347. On *appelle antidéplacement* la transformation (Ω) qui, à une figure F donnée, fait correspondre une figure symétrique F′. On désigne par A et A′ deux points homologues de F et F′ et par I le milieu de AA′.

1° Montrer que la transformation Ω est le produit de la symétrie-point de centre I par une rotation d'axe δ issu de A′.

2° Soit P le plan issu de I, perpendiculaire à δ, et δ' la parallèle à δ issue de I. Montrer en décomposant S(I) en $S(\delta')$ o S(P) que Ω est le produit de la symétrie-plan P par une rotation d'axe Δ perpendiculaire en O au plan P ou par une translation parallèle au plan P.

3° En déduire que les deux figures F et F′ admettent en général un point double O, et que les milieux des segments joignant deux points homologues de ces figures sont tous situés dans un même plan P.

348. On considère un tétraèdre ABCD *équifacial* dont les quatre faces sont des triangles équivalents, donc de même aire.

1° Démontrer que les bissecteurs extérieurs des dièdres d'arêtes AB et CD sont parallèles et que la droite MN qui joint les milieux des arêtes AB et CD est leur perpendiculaire commune. En déduire trois axes de symétrie du tétraèdre et démontrer que les quatre faces sont des triangles égaux dont les angles sont aigus (cf. ex. n° 231, 3°).

2° Démontrer que le centre de gravité O du tétraèdre est en même temps le centre de la sphère inscrite et celui de la sphère circonscrite. Comparer à l'aide de considérations de volume la valeur h des hauteurs du tétraèdre, le rayon r de la sphère inscrite et la valeur r' des rayons des sphères exinscrites.

3° Montrer que les bissecteurs extérieurs des six dièdres du tétraèdre délimitent un parallélépipède rectangle de centre O et de diagonales AA′, BB′, CC′ et DD′. Calculer en fonction des dimensions a, b, c de ce parallélépipède rectangle l'aire d'une face, la hauteur, le volume et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre. Que représentent A′, B′, C′ et D′ pour le tétraèdre ABCD ?

349. 1° Démontrer que tout déplacement transformant un vecteur $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ opposé de même support est le produit de deux symétries-plans rectangulaires l'une par rapport au plan médiateur de AA′ et de BB′, l'autre par rapport à un plan issu de la droite AB.

2° En déduire que tout déplacement transformant un axe $\overrightarrow{x'x}$ en l'axe opposé $\overrightarrow{xx'}$ est un retournement autour d'une perpendiculaire d à cet axe.

350. On donne deux axes $\overrightarrow{x'x}$ et $\overrightarrow{y'y}$ et on désigne par AB leur perpendiculaire commune, par Δ et Δ' les axes des retournements transformant Ax en By et en By'. On désigne d'autre part par R(δ, θ) toute rotation transformant $\overrightarrow{x'x}$ en $\overrightarrow{y'y}$ et par R (δ', θ') toute rotation transformant $\overrightarrow{x'x}$ en $\overrightarrow{yy'}$.

1° Soit IM la perpendiculaire commune à un axe δ et à $x'x$, IN la perpendiculaire commune à δ et à $y'y$. Démontrer que R (δ, θ) = S (Δ') o S (IM) = S (IN) o S (Δ'), et que $\overline{AM} = -\overline{BN}$. En déduire le lieu de I lorsque δ varie et montrer que δ est parallèle à un plan fixe.

2° Soient I′M′ et I′N′ les perpendiculaires communes à δ' et $x'x$ d'une part et à δ' et $y'y$ d'autre part. Formuler les conclusions analogues pour R (δ', θ'), $\overline{AM'}$ et $\overline{BN'}$, le lieu de I′ et la direction de δ'.

3° Démontrer que tout produit R (δ', $-\theta'$) o R (δ, θ) est un retournement d'axe d (cf. exercice précédent). En déduire que toute droite δ rencontre toute droite δ' et que les plans (δ, d) et (δ', d) sont rectangulaires. Conclusions analogues pour tout produit R (δ, $-\theta$) o R (δ', θ').

351. On considère une sphère de centre O, de diamètre AB et deux axes $\overrightarrow{x'x}$ et $\overrightarrow{y'y}$ tangents respectivement en A et B à la sphère et tels que $(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = 2\alpha$.

1° Montrer que de tout point P de la demi-droite Ax on peut mener à la sphère une tangente coupant la demi-droite By en Q et de même de tout point P de Ax' une tangente coupant By' en Q. On désigne par δ toute tangente PQ et par M son point de contact.

2° Démontrer que le produit des symétries par rapport aux plans médiateurs de MA et de MB est un retournement fixe, d'axe Δ qui échange les axes $\overrightarrow{x'x}$ et $\overrightarrow{y'y}$. En déduire que le lieu de M est un cercle γ d'axe Δ coupé sous un angle constant par toute droite δ.

3° Démontrer que deux droites δ se correspondent dans une rotation d'axe Δ. On désigne par d la transformée de $x'x$ (ou $y'y$) dans une telle rotation. Démontrer que toute droite d rencontre toute droite δ et que le lieu des droites d et des droites δ est une même surface de révolution (H) d'axe Δ.

352. 1° Démontrer qu'une figure F qui admet deux axes de symétrie parallèles Δ_1 et Δ_2 en admet une infinité d'autres. Étudier leur disposition et montrer que la figure F se conserve par translation et est illimitée.

2° Reprendre l'étude précédente lorsque la figure F admet deux éléments de symétrie tels que :

a) Deux centres ou un centre et un plan ne contenant pas le centre.

b) Deux plans parallèles ou un axe et un plan parallèles.

c) Un centre et un plan ou un axe ne passant pas par ce centre.

353. Démontrer qu'une figure limitée de l'espace :

1° Ne peut admettre qu'un seul centre de symétrie.

2° Ne peut admettre que des axes et des plans de symétrie concourants issus du centre de symétrie lorsqu'il existe.

354. 1° Si la figure F admet deux plans de symétrie P_1 et P_2 issus de la droite Δ et tels que $(P_1, P_2) = \frac{\pi}{n}$, montrer qu'elle admet Δ comme axe de répétition d'ordre n et n plans de symétrie issus de Δ.

2° Si la figure F admet deux axes de symétrie Δ_1 et Δ_2 perpendiculaires en O à l'axe Δ et tels que $(\overrightarrow{\Delta_1}, \overrightarrow{\Delta_2}) = \frac{\pi}{n}$, elle admet Δ comme axe de répétition d'ordre n et n axes de symétrie issus de O.

3° Vérifier les considérations précédentes sur un polygone régulier, une pyramide régulière ou un prisme régulier. Cas du tétraèdre régulier ou du cube.

355. Étudier les symétriss et translations d'une figure plane F admettant :

1° Trois centres de symétries formant un triangle isocèle dont l'angle au sommet est égal à 60° ou à 90°.

2° Deux centres de répétition d'ordre 3.

356. Une figure illimitée F admet deux axes de symétrie Δ_1 et Δ_2 non situés dans un même plan et tels que $(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\pi}{n}$ (n entier). Montrer que la figure F admet une infinité d'axes de symétrie dont on étudiera la disposition et qu'elle se conserve par translation.

357. Déterminer les éléments de symétrie ou de répétition d'un polygone régulier de n côtés, d'un prisme régulier de n faces latérales, d'une pyramide régulière. Étudier le cas du tétraèdre.

358. Les six arêtes d'un cube qui ne sont pas issues de deux sommets opposés (extrémités d'une même diagonale) forment un hexagone gauche.

1° Étudier les symétries de cet hexagone gauche de côté a.

2° Montrer que les milieux de ses côtés sont les sommets d'un hexagone régulier. Calculer son côté en fonction de a.

359. Démontrer que si une figure F admet trois plans de symétrie tels que l'un des trièdres formés par ces trois plans ait une face de 90° adjacente à deux dièdres de 45°, la figure F admet tous les éléments de symétrie d'un cube.

360. Démontrer qu'un polyèdre régulier convexe admet :

1° Le plan médiateur d'une arête et le bissecteur intérieur du dièdre correspondant pour plans de symétrie, leur intersection comme axe de symétrie.

2° L'axe d'une face et l'axe d'un angle polyèdre pour axes de répétition.

3° Vérifier pour un tétraèdre régulier et pour un cube.

361. Montrer que l'octaèdre régulier qui a pour sommets les centres des faces d'un cube admet les mêmes éléments de symétrie et de répétition que ce cube.

362. On considère dans un plan P un pentagone régulier ABCDE de côté a et d'un même côté du plan P on construit les segments AA′, BB′, CC′, DD′, EE′ de longueur a formant des trièdres réguliers tels que ABEA′. On achève les cinq pentagones réguliers tels que A′ABB′M dont les nouveaux côtés forment un décagone gauche A′MB′NC′PD′QE′R.

1° Montrer que les deux pentagones A′B′C′D′E′ et PQRMN sont symétriques par rapport à un point O de l'axe du pentagone ABCDE.

2° En déduire que la symétrie de centre O transforme les six pentagones initiaux en six autres qui se raccordent aux précédents suivant le décagone gauche pour former un dodécaèdre régulier convexe. Étudier ses symétries.

3° Les centres de trois faces du dodécaèdre issues d'un même sommet forment un triangle équilatéral. Montrer que les vingt triangles analogues sont les faces d'un icosaèdre régulier convexe admettant les mêmes éléments de symétrie ou de répétition.

HOMOTHÉTIE

279. Définition. — Soient un point fixe O et un nombre réel non nul k :

L'homothétie de centre O ***et de rapport*** k ***est la transformation ponctuelle qui, à tout point*** M, ***fait correspondre le point*** M′ ***tel que*** $\overrightarrow{OM'} = k\ \overrightarrow{OM}$.

En abrégé : *Homothétie* (O, k) ou H (O, k).

Lorsque le point M décrit une figure F, le point M′ décrit une figure F′ homothétique de la figure F dans le rapport k.

L'homothétie est *positive* (ou directe) pour $k > 0$ (fig. 230), *négative* (ou inverse) pour $k < 0$ (fig. 231). Elle se réduit à la transformation identique pour $k = 1$ et à la symétrie-point de centre O pour $k = -1$.

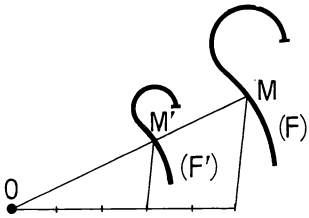


Fig. 230

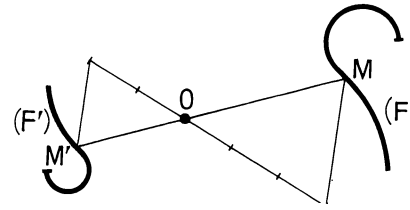


Fig. 231

Pour $k \neq -1$ la transformation n'est pas involutive, car M est l'homologue de M′ dans l'homothétie $\left(O, \frac{1}{k}\right)$. Dans toute homothétie, *le centre* O *est le seul point invariant.* Les trois points O, M et M′ étant alignés, il en résulte que toute droite et tout plan issus de O sont invariants et que :

Toute droite ou tout plan invariant passe par le centre de l'homothétie.

La relation $\dfrac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OM}} = k$ montre que O est le point qui divise le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ dans le rapport k. Par suite :

Une homothétie est définie lorsque l'on connaît son rapport et deux points homologues.

280. Théorème. — ***L'homothétique d'un vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ ***est un vecteur*** $\overrightarrow{A'B'}$ ***tel que*** $\overrightarrow{A'B'} = k\ .\ \overrightarrow{AB}$.

Soit M′ le transformé dans l'homothétie (O, k), d'un point variable M du segment AB (fig. 232 et 233). On obtient :

$$\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OA'} = k\ \overrightarrow{OM} - k\ \overrightarrow{OA} = k\ (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}).$$

Donc :
$$\overrightarrow{A'M'} = k\ \overrightarrow{AM}.$$

Lorsque M décrit le vecteur $\overrightarrow{AB}$, le point M′ décrit, sur la parallèle à AB issue de A′, un vecteur $\overrightarrow{A'B'} = k\ \overrightarrow{AB}$.

281. Réciproque. — ***Toute transformation dans laquelle le vecteur qui joint deux points quelconques*** A ***et*** M ***et celui qui joint leurs transformés*** A′ ***et*** M′, ***vérifient la relation*** $\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{AM}$ ***est une homothétie pour*** $k \neq 1$, ***une translation pour*** $k = 1$.

1° Si $k \neq 1$, l'homothétie (O, k) qui transforme A en A′, transforme M en M_1 tel que : $\overrightarrow{A'M_1} = k\,\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$. Les points M′ et M_1 sont confondus.

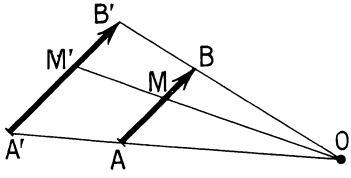


Fig. 232

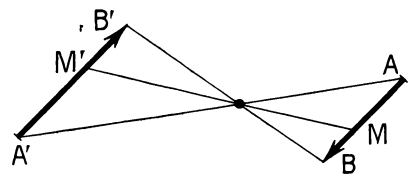


Fig. 233

2° Si $k = 1$, $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$. La transformation est donc (n° 195) la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ qui apparaît ainsi comme un cas limite de l'homothétie (O, k) qui transforme A en A′ lorsque k tend vers 1.

282. Corollaire. — ***Une homothétie est définie par la donnée de deux vecteurs homologues*** $\overrightarrow{AB}$ ***et*** $\overrightarrow{A'B'}$ ***parallèles et inégaux.***

On connaît en effet le rapport $k = \dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} \neq 1$ et deux points homologues A et A′ de cette homothétie (n° 279). Son centre O est l'intersection des droites AA′ et BB′.

La relation $\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{AM}$ permet la construction de l'homologue M′ de tout point M, sans utiliser le centre O. Lorsque M n'appartient pas à la droite AB, le point M′ est l'intersection des droites A′M′ et B′M′ respectivement parallèles à AM et BM.

283. Théorème. — ***Le produit de deux homothéties de rapports*** k_1 ***et*** k_2 ***est une homothétie de rapport*** k_1k_2 ***si*** $k_1k_2 \neq 1$, ***une translation si*** $k_1k_2 = 1$.

Soient A_1M_1 le transformé du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans l'homothétie H_1 (O_1, k_1) et $\overrightarrow{A_2M_2}$ le transformé de $\overrightarrow{A_1M_1}$ dans l'homothétie H_2 (O_2, k_2) (fig. 234) :

$$\overrightarrow{A_2M_2} = k_2\,\overrightarrow{A_1M_1} \text{ et } \overrightarrow{A_1M_1} = k_1\,\overrightarrow{AM} \implies \overrightarrow{A_2M_2} = k_1k_2\,\overrightarrow{AM}. \qquad (1)$$

Cette relation étant vérifiée quel que soit M, on en conclut (n° 281) que le point M_2 est l'homologue de M dans une homothétie (O, k_1k_2) si $k_1k_2 \neq 1$, dans une translation dans le cas contraire.

Posons $k = k_1k_2$. Le produit $k\,k_1k_2$ est positif et contient 0 ou 2 facteurs négatifs :

Dans trois homothéties dont l'une est le produit des deux autres il existe une ou trois homothéties positives.

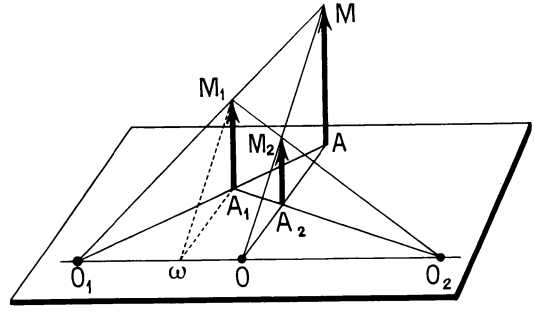


Fig. 234

284. Centre de l'homothétie produit. — 1° Si O_2 est confondu avec O_1, ce point invariant dans chacune des homothéties H_1 et H_2, est invariant dans leur produit H. C'est aussi le centre O de l'homothétie H.

Les trois homothéties sont dites concentriques.

2° Si O_1 et O_2 sont distincts, la droite O_1O_2, invariante dans chacune des homothéties H_1 et H_2 est invariante dans leur produit H. Le centre O de celle-ci appartient donc à la droite O_1O_2.

Les centres de deux homothéties et de celui de leur produit sont alignés.

Précisons la position du centre O. L'homothétie H_1 transforme O en ω et l'homothétie H_2 transforme donc ω en O. Les relations :

$$\overrightarrow{O_1\omega} = k_1 \overrightarrow{O_1O} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O_2O} = k_2 \overrightarrow{O_2\omega} = k_2(\overrightarrow{O_2O} + \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1\omega})$$

donnent :

$$\overrightarrow{O_2O} = k_2 \overrightarrow{O_2O} + k_2 \overrightarrow{OO_1} + k_2 \cdot k_1 \overrightarrow{O_1O}.$$

$$(1 - k_2) \overrightarrow{O_2O} = k_2 (k_1 - 1) \overrightarrow{O_1O}.$$

Soit :

$$\frac{\overrightarrow{OO_1}}{\overrightarrow{OO_2}} = \frac{1 - k_2}{k_2 (k_1 - 1)}.$$

Cette formule montre que le produit de deux homothéties n'est pas commutatif.

285. Corollaires. — 1° *Le produit d'une translation par une homothétie ou d'une homothétie par une translation est une homothétie de même rapport.*

La relation (1) du n° 283 subsiste en effet avec k_1 ou k_2 égal à 1 si on remplace l'homothétie H_1 ou l'homothétie H_2 par une translation.

2° *Toute homothétie négative* (O, — *k*) *est le produit de l'homothétie positive* (O, *k*) *par la symétrie-point de centre* O.

Le produit H (O, — 1) o H (O, *k*), est en effet équivalent à l'homothétie H (O, — *k*).

3° ***Deux figures*** F_1 ***et*** F_2 ***homothétiques de la figure*** F ***dans les rapports respectifs*** k_1 ***et*** k_2 ***se correspondent dans une homothétie de rapport*** $\frac{k_2}{k_1}$ ***si*** $k_1 \neq k_2$ ***dans une translation si*** $k_2 = k_1$.

Si F_1 et F_2 sont les transformées de F dans les homothéties (O_1, k_1) et (O_2, k_2) la figure F_2 est la transformée de F_1 dans le produit H (O_2, k_2) o H $\left(O_1, \frac{1}{k_1}\right)$ donc (n° 283) dans une homothétie $\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right)$ si $\frac{k_2}{k_1} \neq 1$, dans une translation si $k_1 = k_2$.

286. Théorème. — ***Toute homothétie*** (O, *k*) ***est équivalente au produit de l'homothétie*** (O_1, k) ***par une translation parallèle à*** $\overrightarrow{OO_1}$.

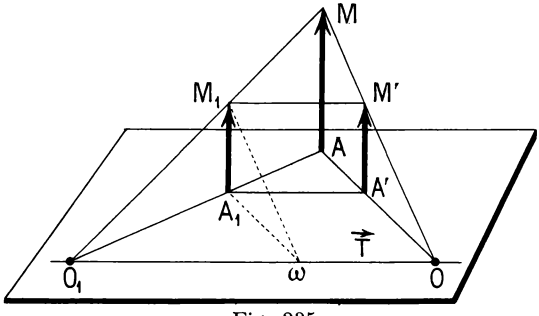


Fig. 235

Soit M′ le transformé d'un point quelconque M dans l'homothétie H (O, *k*) et $\overrightarrow{\omega M_1}$ le transformé du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans l'homothétie $H_1(O_1, k)$ (fig. 235).

Les relations : $\overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}$ et (n° 280) : $\overrightarrow{\omega M_1} = k \overrightarrow{OM}$ entraînent : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{\omega M_1}$ et $\overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{\omega O}$.

Le point M′ est donc le transformé de M_1 dans la translation de vecteur $\vec{T} = \overrightarrow{\omega O}$, parallèle à OO_1.

Le produit de l'homothétie (O_1, k) par la translation $\vec{T}$ est équivalent à l'homothétie H (O, *k*).

287. Groupe des homothéties et translations. — Soit G l'ensemble des homothéties et des translations du plan (ou de l'espace) et T une transformation de cet ensemble :

1° $T_1 \in G$ et $T_2 \in G \implies T_2 \circ T_1 \in G$.

2° La transformation identique I (homothétie de rapport 1 ou translation de vecteur nul) appartient à G.

3° Tout élément $T \in G$ a un inverse $T' \in G$: c'est l'homothétie $\left(O, \frac{1}{k}\right)$ lorsque T est l'homothétie (O, k), c'est la translation de vecteur $-\vec{V}$ si T est la translation de vecteur $\vec{V}$. Il en résulte que :

L'ensemble des homothéties et translations du plan (ou de l'espace) a une structure de groupe pour l'opération-produit.

On peut noter que l'ensemble G^+ des homothéties positives ou translations du plan ou de l'espace constitue un sous-groupe du groupe précédent G.

288. Homothétiques des figures fondamentales. — Pour étudier la transformée d'une figure F dans une homothétie de rapport k on peut (n° 286) choisir le centre O_1 le plus avantageux et transformer la figure par translation :

1° L'homothétique d'une droite ou d'un plan par rapport à l'un de ses points est la droite elle-même ou le plan lui-même. Par rapport à un point extérieur (fig. 236) :

L'homothétique d'une droite ou d'un plan est une droite ou un plan parallèle.

De même l'homothétique d'une demi-droite est une demi-droite de même direction, de même sens si $k > 0$, de sens contraire si $k < 0$.

Réciproquement, deux droites ou deux plans parallèles se correspondent dans une infinité d'homothéties.

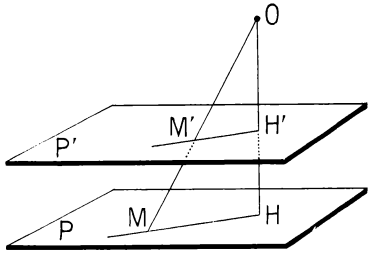


Fig. 236

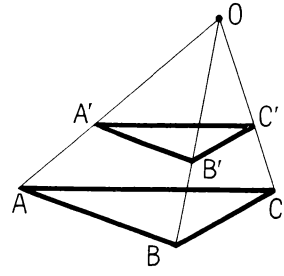


Fig. 237

L'homothétique d'un angle est donc un angle égal dont les côtés sont respectivement parallèles à ceux du premier.

2° *L'homothétique d'un triangle est un triangle semblable à côtés respectivement parallèles, le rapport de similitude étant* $|k|$. Réciproquement, deux triangles ABC et A'B'C' à côtés parallèles se correspondent dans l'homothétie ou la translation qui transforme le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$ (fig. 237).

3° L'homothétique d'un dièdre (P, Δ, Q) par rapport à un point de l'arête est le dièdre lui-même si $k > 0$, le dièdre opposé par l'arête si $k < 0$; comme l'arête $\vec{\Delta}$ est conservée pour $k > 0$, transformée en $\vec{\Delta}'$ opposé à $\vec{\Delta}$ si $k < 0$: Deux dièdres orientés homothétiques sont égaux ou opposés selon que k est positif ou négatif.

4° L'homothétique d'un cercle ou d'une sphère par rapport à son centre est un cercle ou une sphère concentrique. Donc :

L'homothétique d'un cercle est un cercle situé dans le même plan ou dans un plan parallèle et l'homothétique d'une sphère est une sphère.

Les centres de ces deux cercles ou de ces deux sphères sont homologues et leurs rayons R et R′ vérifient la relation $R' = |k|\ R$. De plus, deux rayons homologues sont parallèles.

289. Théorème. — ***Deux cercles inégaux situés dans le même plan ou dans deux plans parallèles sont homologues dans deux homothéties dont les centres sont les points qui divisent le segment joignant les centres de ces deux cercles dans le rapport de leurs rayons.***

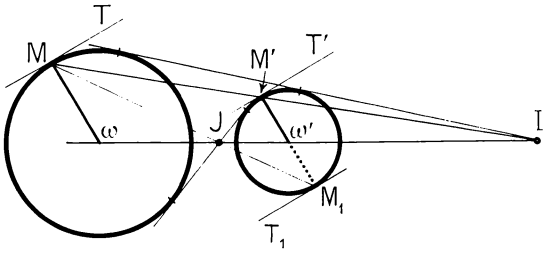


Fig. 238

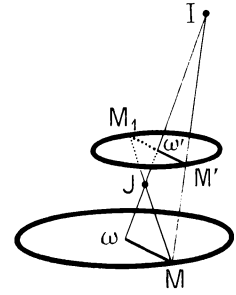


Fig. 239

Considérons dans un même plan (fig. 238) ou dans deux plans parallèles (fig. 239) deux cercles inégaux de centres ω et ω′ et de rayons R et R′.

Soient ωM et ω′M′ deux rayons variables parallèles et de même sens.

On a : $\overrightarrow{\omega'M'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{\omega M}$. Le point M′ est donc l'homologue de M dans l'homothétie positive de rapport $\frac{R'}{R}$ et dont le centre I est défini par l'égalité $\frac{\overrightarrow{I\omega'}}{\overrightarrow{I\omega}} = \frac{R'}{R}$ (n° 282).

Soit ω′M′$_1$ le rayon opposé à ω′M′. On a : $\overrightarrow{\omega'M_1} = -\frac{R'}{R}\overrightarrow{\omega M}$. Le point M$_1$ est l'homologue de M dans l'homothétie négative de rapport $-\frac{R'}{R}$ et dont le centre J est défini par l'égalité : $\frac{\overrightarrow{J\omega'}}{\overrightarrow{J\omega}} = -\frac{R'}{R}$.

Les points I et J se nomment *centre d'homothétie positive* et *centre d'homothétie négative* des deux cercles.

Remarque. — Si R = R′, les deux cercles sont égaux et $\overrightarrow{\omega M} = \overrightarrow{\omega'M'} = -\overrightarrow{\omega'M_1}$.

Les deux cercles sont homologues dans la translation de vecteur $\overrightarrow{\omega\omega'}$ *et dans la symétrie-point dont le centre* J *est le milieu de* ωω′.

290. Corollaires — 1° Les extrémités de deux rayons parallèles sont homologues dans l'une des deux homothéties I ou J. Il en est donc de même des points de contact de deux tangentes parallèles.

2° Lorsqu'elles existent, les tangentes communes extérieures à deux cercles d'un même plan passent par le point I et les tangentes communes intérieures passent par J.

3° Lorsque deux cercles d'un même plan sont tangents, leur point de contact est un centre d'homothétie : I s'ils sont tangents intérieurement, J s'ils sont tangents extérieurement.

291. Axes d'homothétie de trois cercles. — Soient trois cercles $\omega_1(R_1)$, $\omega_2(R_2)$ et $\omega_3(R_3)$ deux à deux homothétiques et dont les centres ne sont pas alignés.

Les centres d'homothéties positive et négative sont I_1 et J_1 pour (ω_2) et (ω_3), I_2 et J_2 pour (ω_3) et (ω_1), I_3 et J_3 pour (ω_1) et (ω_2) (fig. 240).

L'homothétie positive $\left(I_1, \frac{R_3}{R_2}\right)$ transforme (ω_2) en (ω_3) et l'homothétie positive $\left(I_2, \frac{R_1}{R_3}\right)$ transforme (ω_3) en (ω_1). Le produit de ces deux homothéties est l'homothétie positive qui transforme (ω_2) en (ω_1), c'est-à-dire l'homothétie $\left((I_3, \frac{R_1}{R_2}\right)$. Il en résulte (n° 284) que I_1, I_2 et I_3 sont alignés. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il en est de même de I_1, J_2 et J_3, puis de J_1, I_2, et J_3, et enfin de J_1, J_2 et I_3.

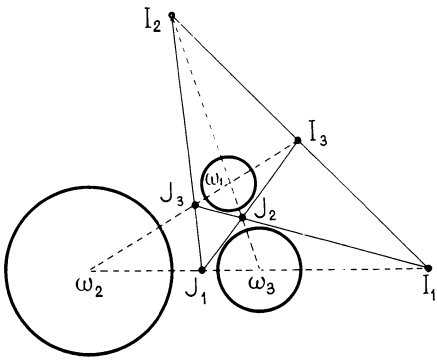


Fig. 240

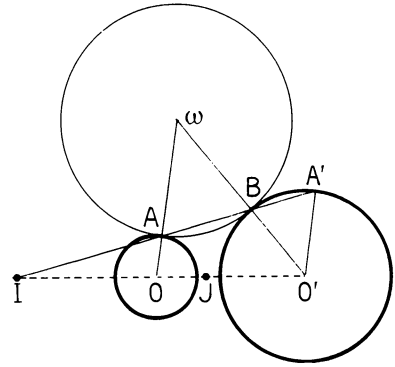


Fig. 241

Les six centres d'homothétie de trois cercles deux à deux homothétiques sont répartis sur quatre droites appelées axes d'homothétie.

Les six centres d'homothétie sont donc les sommets d'un quadrilatère complet dont chacun des côtés contient zéro ou deux centres d'homothétie négative.

292. Application. — Considérons deux cercles O et O′ et un cercle ω tangent en A au cercle O et en B au centre O′. Le point A est un centre d'homothétie de ω et O, le point B un centre d'homothétie de ω et O′. La droite AB est donc un axe d'homothétie des trois cercles et passe par l'un des centres d'homothétie I ou J des cercles O et O′ (fig. 241).

Réciproquement si la sécante AB, passant par l'un des points I ou J, recoupe le cercle O′ en A′ tel que OA et O′A′ soient parallèles, l'homothétie $\left(B, \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BA'}}\right)$ transforme le cercle O′ en un cercle ω tangent en A au cercle O et tangent en B au cercle O′.

Les points de contact d'un cercle tangent à deux cercles donnés sont alignés avec un centre d'homothétie de ces deux cercles sans être homologues dans l'homothétie correspondante.

293. Homothéties de deux ou trois sphères. — Le théorème (n° 289) s'étend sans changement à deux sphères inégales ω (R) et ω′ (R′), qui admettent toujours *deux centres d'homothétie* I *et* J.

Tout plan tangent commun extérieur passe par I et tout plan tangent commun intérieur passe par J. D'autre part si I (ou J) est extérieur aux deux sphères, il est le sommet d'un cône de révolution circonscrit commun aux deux sphères.

De même les centres d'homothétie de trois sphères prises deux à deux sont disposés sur *quatre axes d'homothétie* qui ne sont autres que ceux des grands cercles de ces sphères, situés dans le plan des centres.

294. Courbes et surfaces homothétiques. — 1° ***Si une courbe*** (C) ***admet en*** A, ***une tangente*** AT, ***toute courbe homothétique*** (C′) ***admet, au point*** A′ ***homologue de*** A, ***une tangente homothétique*** A′T′, ***parallèle à*** AT.

Par définition, la tangente AT à la courbe (C) est la position limite de la sécante AM lorsque M tend vers A (fig. 242). Dans ces conditions, le point M′, homologue de M, tend sur la courbe (C′) vers le point A′, et la sécante A′M′, parallèle à AM, tend vers la position limite A′T′ parallèle à AT et homothétique de cette dernière.

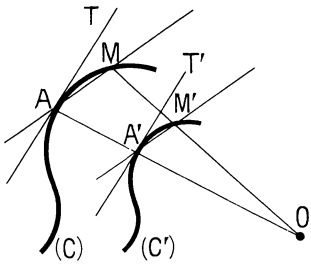


Fig. 242

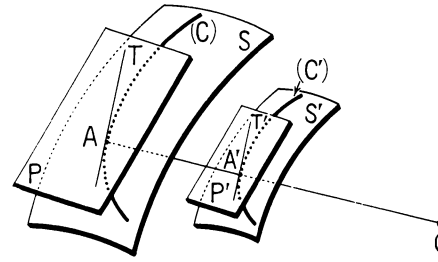


Fig. 243

2° ***Si une surface*** (S) ***admet en*** A ***un plan tangent*** P ***toute surface homothétique*** (S′) ***admet au point*** A′ ***homologue de*** A, ***un plan tangent homothétique*** P′ ***parallèle à*** P.

Lorsqu'il existe (fig. 243), le plan P tangent en A à la surface (S) est le lieu de la tangente AT à toute courbe (C) passant par A sur la surface (S). Sur toute surface (S′) homothétique de (S), la tangente A′T′ homologue de AT engendre donc le plan P′ homologue de P et parallèle à ce dernier.

295. Théorème. — ***Dans toute homothétie l'angle, en un point commun*** A, ***de deux courbes ou de deux surfaces est égal à l'angle de leurs transformées au point*** A′ ***homologue de*** A.

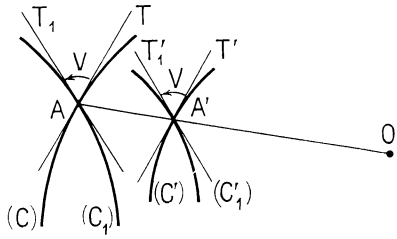


Fig. 244

L'angle (AT, AT_1) en A des courbes (C) et (C_1) et l'angle (A′T′, $A'T'_1$) en A′ des courbes transformées (C′) et (C'_1) sont homologues dans l'homothétie envisagée (fig. 244). Ils sont donc égaux.

Il en est de même de l'angle (P, P_1) en A de deux surfaces (S) et (S_1) et de l'angle (P′, P'_1) en A′ de leurs transformées (S′) et (S'_1) ou même de l'angle en A d'une surface (S) et d'une courbe (C) et de l'angle en A′ de leurs transformées (S′) et (C′) :

L'homothétie conserve les angles.

APPLICATIONS DE L'HOMOTHÉTIE

296. Théorème de Menélaüs. — ***Pour que les points*** α, β, γ ***pris respectivement sur les côtés*** BC, CA ***et*** AB ***du triangle*** ABC ***soient alignés, il faut et il suffit que l'on ait :*** $\dfrac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \dfrac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \dfrac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma C}} = 1.$

On peut, de ce théorème déjà établi (n° 27), donner la démonstration suivante : l'homothétie $\left(\beta, \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}}\right)$ transforme C en A (fig. 245) et l'homothétie $\left(\gamma, \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma A}}\right)$ transforme A en B. Leur produit est donc l'homothétie de rapport $\frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}} \cdot \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\beta A}}$ qui transforme C en B. Son centre est l'intersection de BC et de $\beta\gamma$ (n° 284). Pour que ce soit le point α, il faut et il suffit que :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}} \cdot \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma C}} \iff \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1.$$

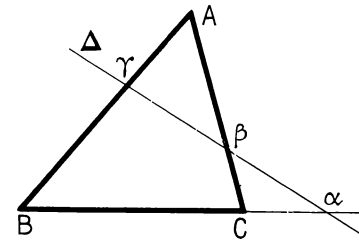


Fig. 245

297. Droite et cercle d'Euler d'un triangle. — Soient M, N, P les milieux des côtés BC, CA et AB du triangle ABC (fig. 246). Le triangle MNP dont les côtés sont respectivement parallèles à ceux du triangle ABC est le transformé de ce dernier dans une homothétie de rapport $\frac{\overline{NP}}{\overline{BC}} = -\frac{1}{2}$. Le centre G de cette homothétie est commun aux droites AM, BN et CP et tel que $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$. On retrouve la propriété des médianes du triangle.

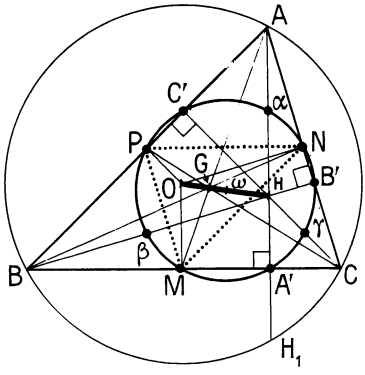


Fig. 246

1° Dans cette homothétie (G, — 1/2) la hauteur issue de A du triangle ABC a pour homologue la hauteur issue de M du triangle MNP, c'est-à-dire la médiatrice de BC. L'orthocentre H du triangle ABC a donc pour homologue le centre O du cercle ABC et $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH} \iff \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$.

La droite OH est la *droite d'Euler* du triangle ABC et comme $\overrightarrow{MO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$ on retrouve la propriété du n° 227 (I).

Dans tout triangle, le centre de gravité G ***est situé au tiers du segment*** OH ***qui joint le centre du cercle circonscrit à l'orthocentre.***

2° Le centre ω du cercle MNP est l'homologue de O et le vecteur $\overrightarrow{O\omega}$ l'homologue de $\overrightarrow{HO}$ donc $\overrightarrow{O\omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$. Le point ω est le milieu de OH. L'égalité $\overrightarrow{H\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$ montre que H est le centre d'homothétie positive des cercles ABC et MNP. Dans cette homothétie $\left(H, \frac{1}{2}\right)$ le transformé de A est le milieu α de AH, et le transformé du point H_1 où la droite AH recoupe le cercle ABC est le pied A′ de la hauteur AH (n° 61). Les points α et A′ appartiennent donc au cercle MNP :

Dans tout triangle, les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets sont situés sur un même cercle appelé cercle d'Euler ou cercle des neuf points du triangle.

Son rayon ρ est la moitié du rayon R du cercle ABC car : $\overrightarrow{\omega M} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$. Son centre ω est le milieu du segment OH qui joint l'orthocentre au centre du cercle circonscrit. D'autre part le cercle (ω) qui passe par les milieux des côtés de chacun des triangles HBC, HCA et HAB est appelé cercle d'Euler du quadrangle orthocentrique ABCH.

PROBLÈMES DE CONSTRUCTION

298. 1er Problème. — *Construire un cercle tangent à un cercle donné et à une droite donnée connaissant l'un des points de contact.*

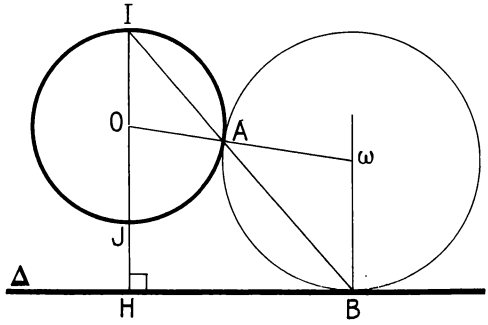


Fig. 247

Soit (fig. 247) un cercle ω tangent en A et B respectivement au cercle donné O et à la droite donnée Δ. Le cercle O est l'homologue du cercle ω dans une homothétie de centre A qui transforme B en l'une des extrémités I ou J du diamètre du cercle O perpendiculaire à Δ.

1° Si le point A est donné, la droite IA, par exemple, coupe Δ en B et l'homothétie $\left(A, \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AI}}\right)$ transforme le cercle O en un cercle ω tangent en A au cercle O, en B à la droite Δ (une deuxième solution avec JA).

2° Si le point B est donné, la droite IB coupe le cercle O en A et l'homothétie $\left(A, \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AI}}\right)$ donne un cercle ω tangent en B à Δ, et en A au cercle O (une deuxième solution en considérant JB).

REMARQUE. — La construction d'un cercle tangent à un cercle donné O et tangent en un point donné B à un cercle donné O′ se ramène au problème précédent, car on connaît la tangente Δ en B au cercle O′ (cf. n° 292).

299. 2e Problème. — *Construire un cercle passant par un point donné et tangent à deux droites concourantes données.*

Soit à construire (fig. 248) un cercle ω tangent aux deux côtés de l'angle xOy et passant par le point intérieur donné A.

Désignons par I le centre d'un cercle quelconque tangent aux deux côtés de l'angle xOy et coupant la droite OA en M et M′. Les deux homothéties $\left(O, \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OM}}\right)$ et $\left(O, \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OM'}}\right)$ transforment le cercle I en deux cercles ω et ω′ répondant à la question.

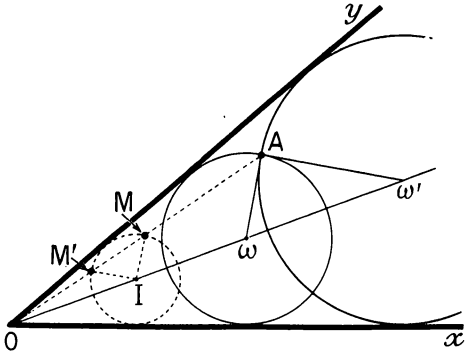


Fig. 248

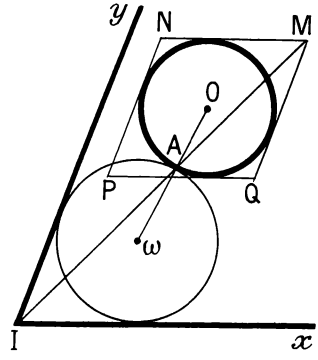


Fig. 249

300. 3e Problème. — *Construire un cercle tangent à un cercle et à deux droites concourantes donnés.*

Soit (fig. 249) ω le centre d'un cercle tangent en A au cercle donné O et tangent aux deux droites Ix et Iy. Les tangentes au cercle O parallèles à Ix et à Iy déterminent un losange MNPQ et l'homothétie $\left(A, \frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{A\omega}}\right)$ transforme I en l'un des points M, N, P ou Q.

Réciproquement, soit A un point commun au cercle O et à l'une des quatre droites IM, IN, IP ou IQ, soit IM par exemple. L'homothétie $\left(A, \frac{\overrightarrow{AI}}{\overrightarrow{AM}}\right)$ transforme le cercle O en un cercle ω tangent en A au cercle O et tangent aux droites Ix et Iy. On obtient 8 solutions si Ix et Iy sont sécantes au cercle O, 6 solutions si une d'elles est tangente, l'autre sécante et 4 solutions dans les autres cas.

EXERCICES

363. Les sommets B et C du triangle ABC sont fixes. Trouver les lieux des milieux des côtés AB et AC et du centre de gravité lorsque le sommet A décrit une droite Δ ou un cercle (Γ) donné.

364. Dans un quadrilatère ABCD les sommets A, B et C sont fixes et on connaît la longueur AD ou l'angle (DA, DB). Trouver dans chacun des deux cas :

1° Les lieux des milieux de DA, DB et DC.

2° Le lieu du milieu du segment RS qui joint les milieux de AC et BD.

365. On donne deux droites fixes D et D′ se coupant en O ; on projette un point variable M en A sur D et en B sur D′. Trouver le lieu du point M lorsque la droite AB a une direction donnée.

366. Soit un angle aigu xOy. Un point variable M de Oy se projette en A sur Ox et on mène par M un segment MP parallèle à Ox et de même sens tel que $MP = k\ MA$ où k est un nombre positif donné. Trouver le lieu géométrique du point P.

367. Deux cercles fixes égaux O et O′ se coupent en A et B. Une sécante variable passant par A coupe le premier en P, le second en Q. Soit M le point de cette sécante tel que $\overline{AM} = k\ (\overline{AP} + \overline{AQ})$. Trouver le lieu géométrique du point M.

368. Un cercle variable est tangent à une droite fixe D en un point fixe A. Trouver les lieux géométriques des points de contact avec le cercle des tangentes parallèles à une direction donnée Δ.

369. Un cercle variable est tangent à deux droites sécantes données Ox et Oy. Trouver les lieux géométriques des points de contact avec le cercle des tangentes parallèles à une direction donnée Δ.

370. On donne un angle xOy et un point variable M intérieur à cet angle. Les parallèles menées par M à Ox et Oy coupent Oy en B et Ox en A de façon que $MA = k\ MB$ où k est un nombre donné. Trouver le lieu géométrique du point M.

371. Deux cercles inégaux O et O′ sont tangents en A. On mène dans le premier une corde variable AB et dans l'autre la corde AC perpendiculaire à AB.

1° Montrer que la droite BC passe par un point fixe.

2° Trouver les lieux géométriques de la projection P de A sur la droite BC et du milieu M de BC.

372. On considère sur une droite quatre points A, B, C, D, disposés dans cet ordre.

1° Montrer que I, centre d'homothétie positive des cercles de diamètres AB et CD, est également le centre d'homothétie positive des cercles de diamètres AC et BD, ainsi que le pied de l'axe radical des cercles de diamètres AD et BC.

2° Montrer que J, centre d'homothétie négative des cercles de diamètres AB et CD est également le centre d'homothétie positive des cercles de diamètre AD et BC et le pied de l'axe radical des cercles de diamètres AC et BD.

3° Montrer que K, pied de l'axe radical des cercles de diamètres AB et CD est également le centre d'homothétie négative des cercles de diamètres AC et BD, ainsi que le centre d'homothétie négative des cercles de diamètres AD et BC.

373. 1° On considère le cercle C de diamètre AB. Un point P de ce cercle se projette en M sur AB. Montrer que la tangente en P à C est tangente aux cercles de centres A et B passant par M.

2° Soit Q le second point d'intersection du cercle C avec le cercle de diamètre PM, E le centre de celui-ci, I le point d'intersection des droites AB et PQ. Montrer que la droite IE est parallèle à la tangente en P au cercle C et qu'elle est tangente aux cercles de diamètres AM et BM en ses points d'intersection avec le cercle de diamètre PM.

374. D'un point P de l'axe radical des cercles O(R) et O′(R′) on mène à ces deux cercles les tangentes respectives PM et PM′.

1° Montrer qu'il existe un cercle ω tangent en M au cercle O et tangent en M′ au cercle O′. En déduire que la droite MM′ passe par l'un ou l'autre de deux points fixes. Soit I le point fixe.

2° Si P varie le produit $\overline{IM} \cdot \overline{IM'}$ est constant. Trouver sa valeur en fonction de R, R′ et $OO' = d$.

3° Construire le cercle ω sachant qu'il passe par un point donné A.

375. Deux cercles ω et ω′ sécants en A et B admettent I et J pour centres d'homothétie positive et négative. On désigne par M′ et M_1 les transformés, sur le cercle ω′, du point M du cercle ω et on pose $(\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{A\omega'}) = V$.

1° On mène $\overrightarrow{Ax}$, parallèle à $\overrightarrow{\omega M}$ et $\overrightarrow{\omega M'}$ et de même sens. Montrer que AM et AM′ sont les bissectrices des angles $(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{A\omega})$ et $(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{A\omega'})$. En déduire que : *Les vecteurs* $\overrightarrow{MM'}$ *et* $\overrightarrow{MM_1}$ *sont vus du point* A *sous les angles de droites constants* $(AM, AM') = \frac{V}{2}$ *et* $(AM, AM_1) = \frac{V + \pi}{2}$.

2° Soient TT′ et UU′ les tangentes communes aux deux cercles, les points A, B, T, U étant disposés dans cet ordre sur le cercle ω. En déduire que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT'}) = \frac{V}{2}$ et $(\overrightarrow{AU}, \overrightarrow{AU'}) = \frac{V}{2} - \pi$. Les droites IA et IB recoupent le cercle ω en A_0 et B_0, le cercle ω′ en A′ et B′. Montrer que AB_0 et BA_0 se coupent au milieu H de TU, que AB′ et BA′ se coupent au milieu H′ de T′U′ et que AB est bissectrice des angles HAH′ et HBH′ que l'on évaluera en fonction de V. Nature du quadrilatère AHBH′ ?

3° Les points A et B sont fixes et tels que AB = 2a. Les cercles ω et ω′ varient de façon que l'angle V soit constant et égal à 2 φ. Trouver les lieux de T et de T′ (ou U et U′). Comparer les triangles HAT, H′T′A et calculer en fonction de a et φ le produit $\overline{HT} \cdot \overline{HT'}$.

376. On considère deux cercles ω et ω′ sécants en A et B et un point variable P qui décrit une sécante issue de B coupant les cercles en C et C′. Soit M l'intersection du premier cercle avec la bissectrice intérieure de l'angle PAC et M′ l'intersection du second avec la bissectrice intérieure de PAC′.

1° Calculer (AM, AM′) en fonction de $(\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{A\omega'})$ et montrer que MM′ passe par un point fixe.

2° Lieu du milieu I de MM′. Comparer les cercles AMM′ et BMM′.

377. Soient deux cercles inégaux O et O′, de diamètres AB et AC tangents en A à la droite Δ. D'un point M de Δ on mène les tangentes MP et MQ aux deux cercles O et O′. Les droites AQ et BP se coupent en R et les droites AP et CQ en S.

1° Montrer que les droites BP, CQ et Δ sont concourantes et que RS est perpendiculaire à Δ.

2° Montrer que le cercle de diamètre RS est tangent aux cercles O et O′.

3° La droite OP coupe AR en I et la droite O′Q coupe AS en J. Trouver l'enveloppe des droites PQ et IJ lorsque M varie sur Δ.

378. Dans un triangle ABC les sommets B et C sont fixes et les médianes issues de B et C sont perpendiculaires.

1° Lieu géométrique de A. Démontrer que $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 5\ \overline{BC}^2$.

2° Construire le triangle ABC connaissant l'angle BAC.

379. 1° Lieu des points dont le rapport des distances à deux plans donnés est constant ?

2° En déduire le lieu des points dont les distances à trois plans donnés sont proportionnelles à des nombres donnés α, β, γ.

3° Montrer qu'il y a en général 8 points dont les distances aux plans des 4 faces d'un tétraèdre sont proportionnelles à des nombres donnés α, β, γ, δ.

380. Les six centres d'homothétie positive de quatre sphères prises deux à deux sont, dans un même plan, les six sommets d'un quadrilatère complet. Montrer qu'il y a, en considérant des homothéties négatives, huit plans analogues.

381. Soient M, N, P, A′, B′, C′ et α, β, γ les neuf points du cercle d'Euler ω d'un triangle ABC d'orthocentre H.

1° Démontrer que MB′ = MC′ et αB′ = αC′, puis que αM est bissectrice de B′MC′ et B′αC′ et médiatrice de B′C′, que αA′ est bissectrice de B′A′C′ et que βγ est médiatrice de HA′.

2° Les droites A′B′ et βγ se coupent en E, les droites B′C′ et αβ se coupent en F. Montrer que E, F, H sont alignés. Donner deux autres droites analogues à EF.

382. 1° Montrer que les droites de Simson du triangle ABC relatives à deux points M et M′ diamétralement opposés sur le cercle ABC sont rectangulaires et que le lieu de leur point commun lorsque M varie sur le cercle est le cercle d'Euler du triangle ABC.

2° La droite de Simson relative à M coupe le cercle d'Euler du triangle ABC en deux points N et P. Montrer que les arcs décrits par N et P lorsque M varie sont dans le rapport — 2.

3° En déduire qu'il y a sur le cercle ABC trois points dont la droite de Simson est tangente au cercle d'Euler. Étudier la figure formée par ces trois points M_1, M_2 et M_3 et par les points M'_1, M'_2, M'_3, correspondants.

— Construire un triangle ABC connaissant :

383. L'angle A et les longueurs des médianes issues de B et C.

384. Les angles B et C ainsi que la distance OH du centre du cercle circonscrit à l'orthocentre.

385. Le sommet A, le centre de gravité G et sachant que les sommets B et C appartiennent à deux droites (ou cercles) données.

386. Le rapport des côtés AB et AC, l'angle A et le périmètre du triangle.

387. Les longueurs AB et AC ainsi que celle de la bissectrice intérieure AD.

388. Étant donné un triangle ABC, inscrire dans ce triangle un carré MNPQ de telle sorte que M et N soient sur le côté BC, P sur le côté CA et Q sur le côté AB.

389. Étant donné un demi-cercle de diamètre AB, inscrire dans ce demi-cercle un carré MNPQ de façon que M et N soient sur AB, P et Q sur l'arc du demi-cercle.

390. On donne un cercle C et une droite D. Construire un cercle dont le centre ω soit sur la droite D, passant par un point donné A de cette droite et tangent au cercle C.

391. 1° Lieux des points de contact des plans parallèles à un plan P, tangents à une sphère variable ω inscrite dans un cône de révolution (Γ) donné.

2° Construire une sphère ω inscrite à (Γ) et tangente à P.

392. Le sommet A et le cercle O circonscrit au triangle ABC sont fixes, tandis que l'angle de droites (AB, AC) est constant. On achève le parallélogramme BACD.

1° Lieux du centre de gravité G et de l'orthocentre H du triangle ABC.

2° Lieu du point D et déterminer l'orthocentre H_1 du triangle BCD.

3° Lieux du centre de gravité G_1 et du centre du cercle O_1 circonscrit au triangle BCD.

393. On considère deux cercles fixes $\omega(R)$ et $\omega'(R')$ tangents intérieurement et deux rayons parallèles et de même sens $\overrightarrow{\omega M}$ et $\overrightarrow{\omega' M'}$.

1° Soit O (ρ) un cercle quelconque et $\overrightarrow{OP}$ le rayon parallèle à $\overrightarrow{\omega M}$ et de même sens. Montrer que les enveloppes de MM', PM et PM' sont trois points fixes alignés I, A et A'.

2° On se donne deux points A et A' alignés avec I. Le lieu du point de rencontre de AM et A'M'.

394. On donne dans un plan deux droites rectangulaires Ox et Oy et sur Ox deux points fixes P et P' de part et d'autre de O. Un point variable I est équidistant de P et P' et les droites IP et IP' coupent Oy en A et A'.

1° Soient ω et ω' les centres des cercles POA et P'OA'. Montrer que $O\omega I\omega'$ est un parallélogramme, que l'un des centres d'homothétie des deux cercles est fixe et trouver le lieu de l'autre.

2° Les deux cercles ω et ω' se coupent en O et M. Trouver le lieu de M et démontrer que les points I, A, A', M sont cocycliques.

3° Montrer que le cercle décrit sur AA' comme diamètre reste tangent à deux droites fixes.

395. Soient G, H et O le centre de gravité, l'orthocentre et le centre de la sphère circonscrite relatifs au tétraèdre orthocentrique ABCD. On désigne par A_1, B_1, C_1, D_1 les centres de gravité des faces, par A', B', C' et D' les pieds des hauteurs.

1° Montrer que H, G et O appartiennent au plan $AA'A_1$ et sont alignés, puis que :

$$\overrightarrow{GA} = -3\,\overrightarrow{GA_1} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GO} = \overrightarrow{0}.$$

2° Soit ω la sphère circonscrite au tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$. Montrer qu'elle se déduit de la sphère O par les homothéties $\left(G, -\frac{1}{3}\right)$ et $\left(H, +\frac{1}{3}\right)$ et qu'elle passe en outre par A', B', C', D' et par les points α, β, γ, δ qui divisent $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{DH}$ dans le rapport -2 (*Sphère d'Euler ou des 12 points*).

3° Montrer que les milieux des arêtes et les pieds des perpendiculaires communes à deux arêtes opposées sont également 12 *points d'une même sphère de centre* G qui contient les cercles d'Euler des quatre faces du tétraèdre ABCD.

396. Soient deux axes rectangulaires Ox et Oy, un point fixe A sur la demi-droite Ox, un point fixe B sur la demi-droite Oy (OA > OB). On désigne par (α) un cercle quelconque tangent en A à Ox et par (β) un cercle quelconque tangent en B à Oy.

1° Un cercle (α) étant donné, construire les cercles (β) tangents à ce cercle (α). Nombre de solutions.

2° M désignant le point de contact de deux cercles (α) et (β) tangents entre eux, on appellera B' le point où la droite AM recoupe (β) et A' le point où la droite BM recoupe (α). Montrer que le lieu de B' quand les cercles (α) et (β) varient en restant tangents se compose de deux droites que l'on appellera b_1 et b_2. De même, le lieu de A' se compose de deux droites a_1 et a_2 respectivement parallèles à b_1 et b_2.

3° On suppose que les cercles (α) et (β) varient en restant tangents, A' étant sur a_1 et B' sur b_1. Montrer que le lieu de M est un cercle Γ et que la tangente commune aux cercles (α) et (β) coupe Γ sous un angle constant. Qu'arrive-t-il si l'on suppose A' sur a_2 et B' sur b_2 ?

4° Déterminer les cercles (α) et (β) de telle manière qu'ils soient tangents entre eux et égaux. Nombre de solutions.

397. Le plan est rapporté à deux axes rectangulaires Ox et Oy. On marque sur Oy le point fixe A d'ordonnée $\overline{OA} = h$. On considère un triangle variable T de sommet A, dont l'axe Ox porte les deux autres sommets B et C et tel que le cercle circonscrit soit tangent en A à la droite Oy.

1° Que peut-on dire de l'orthocentre H du triangle T ? Trouver le lieu de son centre de gravité. Examiner comment varie le cercle passant par les milieux des trois côtés.

2° On projette orthogonalement le point A en K et K′ et en L et L′ sur les bissectrices intérieures et extérieures des angles B et C du triangle T. Montrer que les quatre points K, K′, L, L′ sont alignés sur une droite fixe.

3° Quelle relation indépendante de h vérifient constamment les côtés du triangle ABC ?

398. On considère en géométrie plane la transformation ponctuelle T définie de la façon suivante : on donne une droite fixe (D) et deux points fixes distincts A et B ; on suppose que B n'est pas sur (D) et que la droite AB n'est pas parallèle à (D). Le point M transformé de m par la transformation T est l'homothétique de A dans l'homothétie de centre variable m qui transforme B en un point variable P de la droite (D).

1° Construire M quand on se donne m en dehors de la droite (U) menée par B parallèlement à (D). Construire m quand on se donne M en dehors de la droite (V) déduite de (D) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

2° Soient M et M′ les transformés respectifs de m et m', P et P′ les points où les droites mB et m'B′ rencontrent (D). Le vecteur $\overrightarrow{P'M'}$ correspond au vecteur $\overrightarrow{PM}$ dans une homothétie (ou une translation) variable avec m et m'. En déduire que les droites mm' et MM′ concourent sur (D) ou sont parallèles à (D).

3° Démontrer que le lieu de M est une droite L quand m décrit une droite l distincte de (U).

4° Montrer que L est parallèle à la droite qui joint A au point I intersection des droites l et U.

399. Soit un repère orthonormé xOy et une droite D coupant Ox en M et Oy en P.

1° Lieu géométrique du centre ω du cercle Γ circonscrit au triangle OMP lorsque la droite D varie en restant parallèle à elle-même, l'abscisse de M étant positive. Montrer que les cercles Γ sont tangents en O à une droite fixe dont on précisera la direction par rapport à D. Lieu des points de contact des tangentes aux cercles Γ parallèles à Ox.

2° On considère une droite fixe Δ d'équation $y = a$ coupant les cercles Γ définis au 1° en B et C. Lieux géométriques des centres des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle O au triangle OBC lorsque le cercle Γ varie.

3° Construire le cercle Γ de façon que $OB = k\ OC$, k nombre arithmétique donné.

4° Les tangentes en B et C au cercle Γ se coupent en A et F est le milieu de BC. Lieux des centres I et J des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle A au triangle ABC. Si m désigne la pente de la droite OI, quelles sont les équations des lieux de I et J ? Que peut-on dire des points A, F, I, J ? Quelle relation existe entre les ordonnées de A, de I et de J ? En déduire l'équation du lieu de A. Cas où $m = 1$.

400. Dans un plan on donne deux points fixes O, O′ ($\overline{OO'} = d$) et un nombre positif $k \neq 1$. A tout cercle C du plan, de centre O, de rayon R on associe le cercle C′, de centre O′, de rayon kR.

1° Montrer que C′ est homothétique de C dans le rapport k et aussi dans le rapport $-k$. Construire les centres respectifs S, S′ de ces homothéties. Calculer $\overline{OS}$, $\overline{OS'}$ sur l'axe OO′ ainsi que la distance SS′.

2° Quelles sont suivant les valeurs de R les positions relatives des cercles C et C′ ? Quel est le lieu Γ de leurs points communs quand R varie ?

3° On donne le pied A sur OO′ de l'axe radical de C et C′ par son abscisse $\overline{OA} = a$. Calculer R en fonction de d, a, k. Montrer que la puissance de A par rapport au cercle C vaut $\overline{AS} \cdot \overline{AS'}$. Construire le cercle C. Discuter.

4° On suppose $k < 1$. Un cercle passant par O et O′ coupe le lieu Γ en M_1 et M_2. Soient α, O_1, O'_1 les angles en M_1, O et O′ du triangle M_1OO'. Calculer tg O_1 en fonction de k et de α au moyen des relations : $\sin O_1 = k \sin O'_1$ et $O_1 + O'_1 = \pi - \alpha$.

Soient $\pi - \alpha$, O_2, O'_2 les angles en M_2, O et O′ du triangle M_2OO'. Calculer de même tg O_2. En déduire la relation entre $\sin \alpha$ et tg O, O étant l'angle en O du quadrilatère $OM_1O'M_2$. Cas particulier où $SS' = OO'$.

SIMILITUDE PLANE DIRECTE

301. Définition. — ***On appelle similitude plane directe le produit d'une homothétie par un déplacement dans le plan.***

Or toute homothétie négative H(O, — k) est le produit de l'homothétie positive H(O, k) par la symétrie-point S(O). Dans le plan, le produit de la symétrie-point S(O) par le déplacement (D) est un déplacement (D′). On obtient donc :

$$(D) \circ H(O, -k) = (D) \circ S(O) \circ H(O, k) = (D') \circ H(O, k).$$

Toute similitude plane directe est le produit d'une homothétie positive de rapport k par un déplacement d'angle θ.

k est le rapport de la similitude et θ l'angle de la similitude. Deux figures F et F′ homologues dans une similitude plane directe sont dites *directement semblables.* Notons qu'un déplacement plan est une similitude de rapport 1 et qu'une homothétie dans le plan est une similitude d'angle nul ou égal à π.

302. Propriétés. — Dans toute similitude plane directe D de rapport k et d'angle θ :

1° ***Le rapport de deux segments homologues est égal au rapport de similitude et l'angle de deux vecteurs homologues est égal à l'angle de la similitude.***

L'homothétie positive (O, k) transforme $\overrightarrow{AM}$ en $\overrightarrow{A_1M_1} = k\,\overrightarrow{AM}$ et le déplacement D transforme $\overrightarrow{A_1M_1}$ en $\overrightarrow{A'M'}$ tel que $A'M' = A_1M_1$ et $(\overrightarrow{A_1M_1}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$.

Donc : $\qquad A'M' = k\,AM \quad$ et $\quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta.$

2° ***Un angle orienté a pour homologue un angle orienté égal.***

$\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}) \implies (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'})$. (n° 40)

303. Théorème. — ***Toute similitude plane directe est définie par la donnée de deux vecteurs homologues $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$.***

Toute similitude transformant $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$ (fig. 250) a pour rapport $k = \dfrac{A'B'}{AB}$.

D'après ce qui précède, l'homologue M′ d'un point quelconque M vérifie :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$$
$$\text{et} \quad A'M' = k\,AM.$$

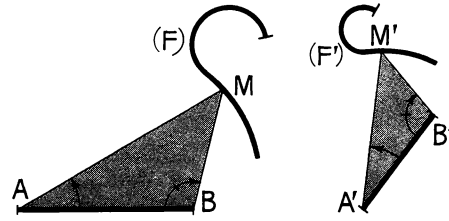


Fig. 250

Ce qui suffit à déterminer le point M′.
C'est le point qui avec A′ et B′ forme un triangle A′B′M′ directement semblable au triangle ABM.

304. Corollaires. — 1° *Si le point* M *n'est pas sur la droite* AB, *son homologue* M′ *est défini par :* (A′B′, A′M′) = (AB, AM) *et* (A′B′, B′M′) = (AB, BM).

Ces relations suffisent donc pour que les deux triangles ABM et A′B′M′ soient directement semblables (cf. n° 65) :

Pour que deux triangles soient directement semblables, il faut et il suffit qu'ils aient deux angles de droites respectivement égaux.

2° Une similitude plane directe ne peut avoir plus d'un point double, car si A et B coïncident avec A′ et B′, il en est de même de M et M′ et la similitude se réduit à la transformation identique.

305. Théorème fondamental. — ***Toute similitude plane directe, autre qu'une translation, admet un point double unique*** O ***et est équivalente au produit commutatif d'une homothétie et d'une rotation de même centre*** O.

1° Soit S une similitude de rapport k et d'angle θ définie par les vecteurs homologues $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ (fig. 251). Donc (n° 302) :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta \quad \text{et} \quad A'B' = k\,AB. \tag{1}$$

Le point double O, s'il existe, vérifie les relations :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta \cdot \quad \text{et} \quad OA' = k\,OA. \tag{2}$$

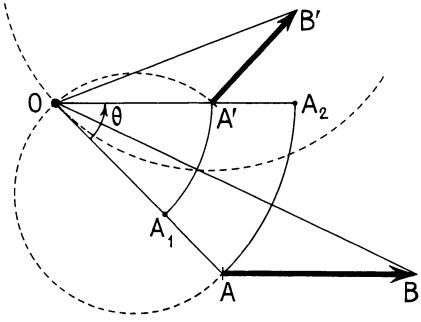


Fig. 251

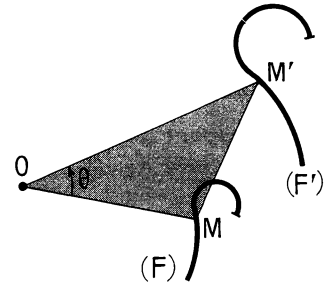


Fig. 252

Le point O est donc l'intersection unique de l'arc de cercle AA′ capable de l'angle de vecteurs θ (n° 55) et du cercle (ou droite) lieu des points M du plan tels que $\frac{MA'}{MA} = k$ (n° 24). Il n'y a exception que si l'on a simultanément $k = 1$ et $\theta = 0$, c'est-à-dire si S est une translation.

Les relations (1) et (2) entraînent alors :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \implies (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'O}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}).$$

Cette relation jointe à $A'O = k\,AO$ montre que le point O est invariant dans la similitude S définie par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$.

2° La similitude S est donc, aussi bien, définie par les vecteurs homologues $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$. Or l'homothétie (O, k) transforme $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OA_1}$ et la rotation (O, θ) transforme $\overrightarrow{OA_1}$ en $\overrightarrow{OA'}$. De même la rotation (O, θ) transforme $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OA_2}$ et l'homothétie (O, k) transforme $\overrightarrow{OA_2}$ en $\overrightarrow{OA'}$. Le produit commutatif de l'homothétie (O, k) par la rotation (O, θ) est une similitude directe qui transforme $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OA'}$ donc (n° 303) équivalente à S.

Le point O *se nomme centre de la similitude* S que nous représenterons par le symbole S (O, k, θ). Notons que cette similitude est aussi le produit de l'homothétie négative H (O, $-k$) par la rotation (O, $\theta + \pi$).

306. Corollaires. — 1° ***La similitude*** S (O, k, θ) ***qui transforme*** M ***en*** M′ ***est caractérisée par les relations :***

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \quad \textbf{\textit{et}} \quad OM' = k\,OM. \tag{1}$$

Le triangle OMM′ qui reste directement semblable à lui-même est le *triangle caractéristique* de la similitude S (fig. 252).

2° ***Toute similitude est définie par son centre*** O ***et un couple de points homologues*** M ***et*** M′. Les relations (1) déterminent k et θ.

3° D'autre part, le point M est le transformé de M′ dans la similitude S $\left(O, \frac{1}{k}, -\theta\right)$. La transformation n'est donc involutive que dans le cas où $k = 1$, $\theta = \pi$, c'est-à-dire dans le cas de la symétrie par rapport à O.

307. Propriétés du centre de similitude. — 1° Soit $\overrightarrow{A'M'}$ le transformé du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la similitude S (O, k, θ).

D'après les relations :

$$OM' = k\,OM \text{ et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta :$$

Le centre de similitude appartient aux cercles lieux des points dont le rapport des distances à deux points homologues M′ *et* M *est égal à* k *et aux arcs capables de l'angle de vecteurs* θ *relatifs à deux points homologues.*

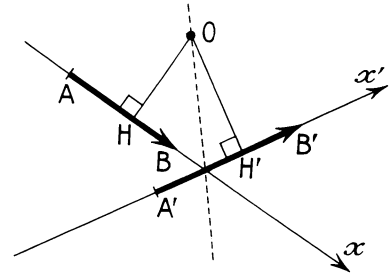


Fig. 253

2° Soient H et H′ les projections de O sur les axes homologues $\overrightarrow{Ax}$ et $\overrightarrow{A'x'}$ qui se coupent en I (fig. 253). Les points H et H′ sont homologues dans la similitude : $(\overrightarrow{Hx}, \overrightarrow{HO}) = (\overrightarrow{H'x'}, \overrightarrow{H'O})$ et $OH' = k\,OH$. On a donc entre les distances orientées de O aux deux axes A′x' et Ax la relation :

$$[O, \overrightarrow{A'x'}] = k\,[O, \overrightarrow{Ax}].$$

Le centre de similitude appartient aux droites lieux des points dont le rapport des distances orientées à deux axes homologues A′x' *et* Ax *est égal à* $+ k$.

308. Théorème. — ***Le centre de similitude, deux points homologues et l'intersection de deux droites homologues issues de ces points sont sur un même cercle.***

Soit I le point d'intersection des droites homologues AM et A′M′ dans la similitude S (O, k, θ) (fig. 254). L'égalité : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta + 2k\pi$ entraîne $(OA, OA') = (IA, IA') = \theta + k\pi$. Les quatre points O, I, A et A′ sont donc sur un même cercle et il en est de même de O, I, M et M′.

Le centre O de la similitude définie par $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'M'}$ est donc le second point commun aux cercles IAA′ et IMM′.

309. Remarques. — 1° Soit O le centre de la similitude S (O, k, θ) qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$ (fig. 255). Les triangles OAA′ et OBB′ sont directement semblables (n° 306) et il en est de même des triangles OAB et OA′B′, car ils ont homologues dans la similitude S :

Si deux triangles OAA′ ***et*** OBB′ ***sont directement semblables il en est de même des triangles*** OAB ***et*** OA′B′.

2° Les triangles OAA′ et OBB′ étant directement semblables se correspondent dans une similitude S′ de centre O qui transforme $\overrightarrow{AA'}$ en $\overrightarrow{BB'}$. Donc :

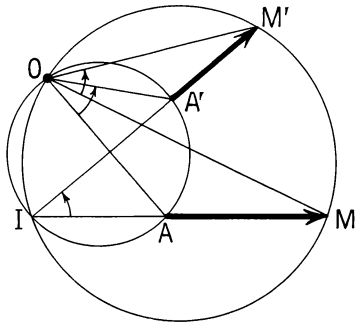


Fig. 254

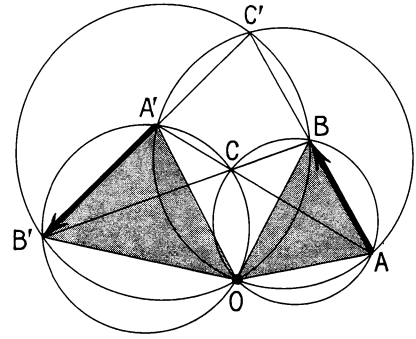


Fig. 255

Le centre de la similitude qui transforme $\overrightarrow{AB}$ ***en*** $\overrightarrow{A'B'}$ ***est aussi celui de la similitude qui transforme*** $\overrightarrow{AA'}$ ***en*** $\overrightarrow{BB'}$.

3° En désignant par C le point de rencontre de AA′ et BB′ et par C′ le point de rencontre de AB et A′B′, on voit d'après le théorème n° 308 que les quatre cercles AA′C′, BB′C′, ABC et A′B′C sont concourants en O. On retrouve la propriété du quadrilatère complet établie au n° 64.

310. Transformées d'une droite et d'un cercle. — 1° Toute similitude transforme une droite D en une droite D′. Réciproquement la droite donnée D′ est la transformée de la droite donnée D dans toute similitude qui transforme un vecteur donné $\overrightarrow{AB}$ de D en un vecteur donné $\overrightarrow{A'B'}$ de D′. La droite D′ est aussi la transformée de D (fig. 253) dans la similitude qui a pour centre un point O quelconque non situé sur D ou D′ et dans laquelle la projection H de O sur D a pour homologue la projection H′ de O sur D′.

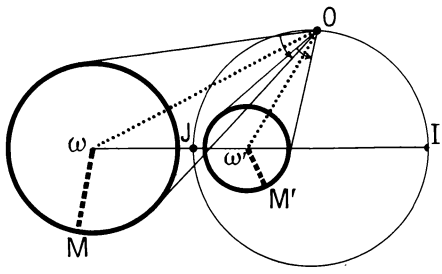


Fig. 256

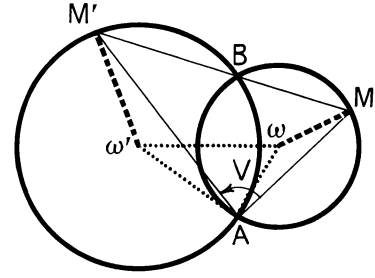


Fig. 257

2° La similitude (O, k, θ) transforme (fig. 256) le cercle donné (ω, R) en un cercle (ω′, R′). Le centre ω′ de ce cercle est le transformé de ω et son rayon R′ est égal à kR. Lorsqu'il existe l'angle des tangentes menées de O au cercle ω est égal à l'angle des tangentes menées de O au cercle ω′.

On dit que les cercles ω et ω′ sont vus du point O sous le même angle.

Réciproquement un cercle donné (ω′, R′) est le transformé du cercle donné (ω, R) dans toute similitude de rapport $k = \frac{R'}{R}$ qui transforme le point ω en ω′. Pour qu'un point O soit le centre d'une telle similitude, il faut et il suffit que : $\frac{O\omega'}{O\omega} = \frac{R'}{R}$. Le lieu du point O est donc le cercle ayant pour diamètre le segment IJ qui joint les centres d'homothétie I et J des deux cercles ω et ω′.

Ce cercle est le cercle de similitude de deux cercles donnés et le lieu des points d'où on les voit sous le même angle.

En particulier (fig. 257) si les cercles donnés sont sécants en A et B, il se correspondent dans la similitude de centre A qui transforme ω en ω′. L'égalité des angles homologues $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega M}) = (\overrightarrow{\omega' A}, \overrightarrow{\omega' M'})$ entraîne l'égalité (BA, BM) = (BA, BM′) ce qui montre que MM′ passe par B.

Deux cercles sécants se correspondent dans une similitude qui a pour centre l'un de leurs points communs, et la droite qui joint deux points homologues sur ces cercles passe par l'autre point commun.

Il en résulte que *le triangle* AMM′ *reste directement semblable au triangle* Aωω′, que l'angle de la similitude $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})$ est égal à l'angle $(\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{A\omega'})$ = V, c'est-à-dire à l'angle en A des deux cercles orientés dans le même sens (n° 66).

311. Produit de similitudes planes directes. — La similitude directe S_1 (O_1, k_1, θ_1) transforme la figure F en F_1 et la similitude directe $S_2(O_2, k_2, \theta_2)$ transforme la figure F_1 en F_2. Les figures F et F_2 directement semblables à F_1 sont directement semblables entre elles et se correspondent dans une similitude S. Désignons par $\overrightarrow{A_1B_1}$ le transformé de $\overrightarrow{AB}$ dans la similitude S_1 et par $\overrightarrow{A_2B_2}$ le transformé de $\overrightarrow{A_1B_1}$ dans la similitude S_2 :

$$A_2B_2 = k_2\, A_1B_1 = k_1k_2\, AB$$

et
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_2B_2}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) + (\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}) = \theta_1 + \theta_2.$$

Le produit des similitudes S_1 et S_2 est donc une similitude S dont le rapport k est égal à k_1k_2 et dont l'angle θ est égal à $\theta_1 + \theta_2$. Ce résultat se généralise :

Le produit de plusieurs similitudes directes de rapports respectifs $k_1, k_2, \ldots k_n$ ***et d'angles*** $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ ***est une similitude directe*** S ***de rapport*** $k = k_1\, k_2 \ldots k_n$ ***et d'angle*** $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n$:

$$S = S_n \circ \ldots \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1.$$

En réduisant la valeur de θ de façon à avoir $-\pi < \theta \leqslant \pi$ les différentes éventualités pour S sont données par le tableau :

	$\theta = 0$	$\theta = \pi$	$\theta \neq 0$ et π
$k = 1$	Translation	Symétrie-point O	Rotation (O, θ)
$k \neq 1$	Homothétie (O, k)	Homothétie (O, $-k$)	Similitude (O, k, θ)

312. Groupe des similitudes planes directes. — Soit G l'ensemble des similitudes planes directes S qui comprend aussi toute homothétie ou tout déplacement :

1° $S_1 \in G$ et $S_2 \in G \implies S_2 \circ S_1 \in G$.

2° La transformation identique I est un élément de G car $I = S(O, 1, 0)$.

3° $S(O, k, \theta) \circ S\left(O, \frac{1}{k}, -\theta\right) = I$. Toute similitude S admet une similitude réciproque S^{-1}.

Il en résulte que :

L'ensemble des similitudes planes directes a une structure de groupe pour l'opération-produit :

Ce groupe admet pour sous-groupe le groupe des déplacements dans le plan ainsi que le groupe des homothéties-translations dans le plan.

313. Similitude plane inverse. — C'est le produit d'une similitude plane directe par une symétrie droite, donc le produit d'une homothétie positive de rapport k par un antidéplacement.

Dans une similitude plane inverse deux segments homologues sont dans un rapport constant et deux angles orientés homologues sont opposés.

Une similitude plane inverse est donc définie par la donnée de deux vecteurs homologues $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$. Si $A'B' = k\,AB$, l'homologue M′ de tout point M est défini par :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) \text{ et } A'M' = k\,AM.$$

Les propriétés de la similitude plane inverse sont proposées en exercices (nos 435 et suivants).

Le produit des deux similitudes planes inverses Σ_1 et Σ_2 de rapport k_1 et k_2 est une similitude plane directe S de rapport k_1k_2, tandis que le produit d'une similitude plane directe S de rapport k_1, par une similitude plane inverse Σ_2 de rapport k_2 est une similitude plane inverse Σ de rapport k_1k_2.

Il en résulte comme au n° 312 que :

L'ensemble des similitudes planes admet une structure de groupe pour l'opération-produit.

Ce groupe admet pour sous-groupe celui des isométries planes (n° 225) et celui des similitudes planes directes (n° 312).

APPLICATIONS

314. Propriétés géométriques. — La similitude permet d'établir un grand nombre de propriétés, en particulier des relations angulaires ou métriques entre les éléments d'une figure.

Exemple. — *On considère un triangle* ABC *et un point donné D. On construit les triangles* ADE *et* DBF *directement semblables au triangle* ABC.

Comparer les triangles ABD, ACE *et* CBF. *Trouver la nature du quadrilatère* CEDF.

1° Les triangles ABC et ADE étant directement semblables (fig. 258) il en est de même des triangles ABD et ACE. Les triangles BAC et BDF étant directement semblables il en est de même des triangles BAD et BCF. Les trois triangles ABD, ACE et CBF sont donc directement semblables. On peut donc échanger les rôles de C et D.

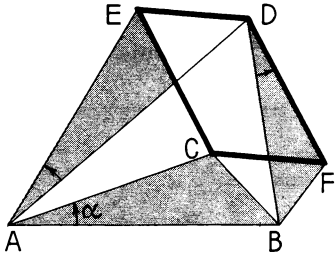


Fig. 258

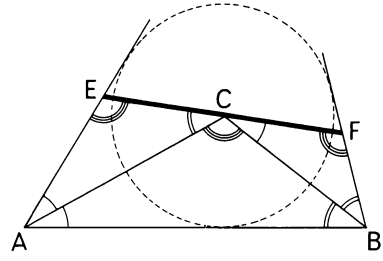


Fig. 259

2° Désignons par α l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et posons $AC = k\,AB$. La similitude (A, k, α) transforme $\overrightarrow{BD}$ en $\overrightarrow{CE}$ tandis que la similitude (D, k, α) transforme $\overrightarrow{BD}$ en $\overrightarrow{FD}$. D'où :

$$CE = k\,BD \text{ et } FD = k\,BD \Longrightarrow CE = FD$$

$$(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE}) = \alpha \text{ et } (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{FD}) = \alpha, \Longrightarrow (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{FD}) = 0.$$

Les deux vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont égaux et le quadrilatère CDEF est un parallélogramme.

REMARQUE. — Si on prend D en C (fig. 259) on obtient $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FC}$. Le point C est le milieu de EF et est le centre d'un cercle tangent aux trois droites AB, AE et BF.

Si le quadrangle ABCD est harmonique (fig. 116) les points E et F sont confondus au milieu J de CD.

315. Lieux géométriques. — Établissons la propriété suivante :

Lorsqu'un triangle OMM′ ***qui a un sommet*** O ***fixe varie dans son plan en restant directement semblable à lui-même :***

1° ***Les courbes décrites par*** M ***et*** M′ ***sont directement semblables.***

2° ***Tout point*** P ***formant avec*** M ***et*** M′ ***un triangle directement semblable à un triangle fixe décrit une courbe semblable aux deux premières.***

1° Posons $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$ et $OM' = k\,OM$ (fig. 260). Les deux nombres θ et k sont constants. Le point M′ se déduit du point M dans la similitude (O, k, θ). La courbe (C′) décrite par M′ est donc directement semblable à la courbe (C) décrite par M.

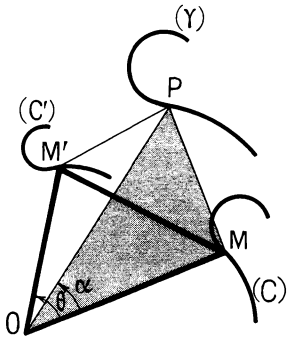


Fig. 260

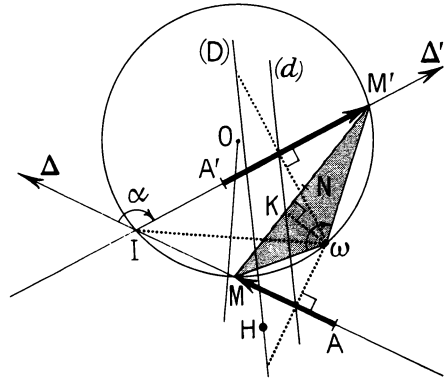


Fig. 261

2° Le quadrangle OMM′P reste semblable à lui-même. Il en est de même du triangle OMP et le lieu de P est une courbe (γ) directement semblable à (C) et à (C′).

Notons que la propriété subsiste lorsque P est un point qui divise MM′ dans un rapport algébrique donné.

316. Divisions rectilignes semblables. — En particulier (fig. 261) si un point M décrit un axe Δ, son transformé M′ dans la similitude donnée (ω, k, α) décrit un axe Δ′. A toute division de l'axe Δ correspond une division semblable de l'axe Δ′. En désignant par A′ et B′ les transformés des points A et B de Δ on a :

$$\overline{A'M'} = k\,\overline{AM} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}. \tag{1}$$

Le cercle ωMM′ *passe par l'intersection* I *de* Δ *et* Δ′ (n° 308). D'après ce qui précède :

Tout point remarquable lié au triangle ωMM′ *décrit une droite* et la division décrite sur cette droite est semblable à celle décrite par M sur Δ.

Il en est ainsi de tout point P divisant le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ dans un rapport donné, du milieu N de MM′, de la projection K de ω sur $\overrightarrow{MM'}$, qui décrit la droite de Simson fixe de ω par rapport au triangle IMM′, du centre O du cercle ω MM′ (médiatrice de ωI). Il en est de même de l'orthocentre H du triangle IMM′ qui décrit la droite de Steiner $\omega_1\omega_2$ fixe de ω par rapport au triangle IMM′, et MH restant parallèle à elle-même, les divisions décrites par M et H sont semblables d'après le théorème de Thalès.

Réciproquement M et M′ décrivent sur Δ et Δ′ des divisions semblables :

1° Si M et M′ vérifient l'une des relations (1) car elles entraînent :

$$A'M' = k\,AM \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \alpha.$$

2° Si le cercle IMM′ coupe le cercle IAA′ en un point fixe ω car (n° 309) les triangles ωAM et ωA′M′ restent directement semblables.

3° Si le point M_0 décrivant une droite Δ_0, les droites M_0M et M_0M' sont respectivement parallèles à des directions fixes.

317. Divisions circulaires directement semblables. — Lorsque (fig. 262) le point M décrit un cercle (O, R) son transformé M′ dans la similitude (ω, k, α) décrit un cercle (O′, R′). Si A et A′ sont des positions particulières de M et M′ on a la relation caractéristique :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'M'}).$$

Le point d'intersection N de OM et O′M′ décrit (deux fois) le cercle ωOO′ de centre I ; le point d'intersection P de AM et A′M′ décrit le cercle ωAA′ de centre J_0 et *tout point*

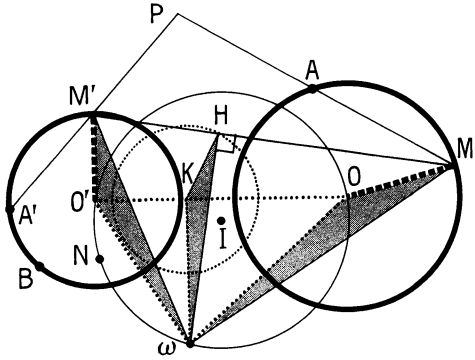


Fig. 262

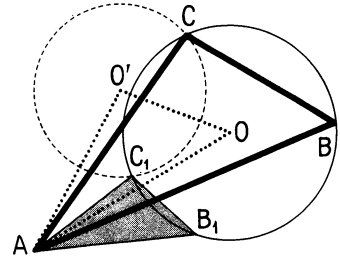


Fig. 263

remarquable du triangle ωMM′ *décrit un cercle ayant pour centre son homologue du triangle semblable* ωOO′ *et vu de* ω *sous le même angle que les cercles* O *et* O′.

Il en est ainsi du milieu de MM′ (cercle centré au milieu de OO′), de la projection H de ω sur MM′ (cercle centré en K projection de ω sur OO′), du centre J du cercle ωMM′ (cercle centré en I et passant par J_0), etc.

Réciproquement on reconnaît que M et M′ décrivent respectivement sur deux cercles donnés O et O′ des divisions directement semblables si l'un des angles $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'})$, (AM, A′M′) ou (AM, BM′) est constant, si en particulier AM et BM′ sont parallèles ou perpendiculaires et d'une façon générale si M et M′ décrivent des arcs homologues de même mesure algébrique. Si les cercles O et O′ sont sécants en A, il suffit que l'angle (AM, AM′) soit constant.

318. Problème de construction. — *Construire un triangle* ABC *directement semblable à un triangle donné* αβγ *connaissant le point* A *et sachant que* B *et* C *appartiennent à un cercle donné* O.

Soit ABC un triangle répondant à la question (fig. 263). Construisons le triangle AOO′ semblable à αβγ. Le point C appartient au cercle O et aussi au cercle O′ transformé du cercle O dans la similitude de centre A qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$. Si les deux cercles O et O′ sont sécants, le point B qui correspond au point d'intersection C est le transformé de C dans la similitude qui transforme $\overrightarrow{AO'}$ en $\overrightarrow{AO}$.

319. Théorème. — ***Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal au carré du rapport de similitude.***

Que la similitude de rapport k soit directe ou inverse, le rapport de deux segments homologues est égal à k. Soient AH et A'H' les hauteurs homologues des deux triangles semblables ABC et A'B'C'. On obtient (fig. 264) :

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} B'C' \cdot A'H' = \frac{1}{2} k\,BC \cdot k\,AH = k^2 \frac{1}{2} BC \cdot AH = k^2 S_{ABC}.$$

Si le polygone F, d'aire S, se décompose en triangles d'aires s_1, s_2 ... s_n le polygone semblable F', d'aire S', se décompose en triangles respectivement homologues, d'aires s'_1, s'_2 ... s'_n. On obtient :

$$S' = s'_1 + s'_2 + \ldots + s'_n$$
$$\text{Donc : } S' = k^2 s_1 + k^2 s_2 + \ldots + k^2 s_n$$
$$S' = k^2(s_1 + s_2 + \ldots + s_n) = k^2 S$$

Soit : $\boxed{\frac{S'}{S} = k^2.}$

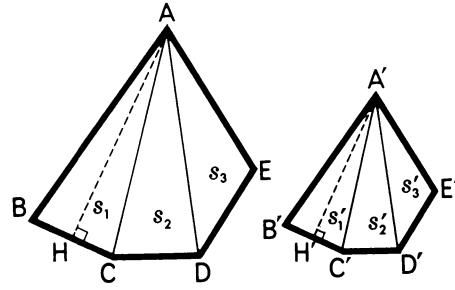


Fig. 264

TRANSFORMATION : $z' = az + b$

320. Plan complexe. — Le plan étant rapporté à un repère orthonommé xOy, rappelons qu'il existe une application bijective de l'ensemble des points M du plan sur le corps C des nombres complexes telle que :

$$M(x, y) \longleftrightarrow z = x + iy.$$

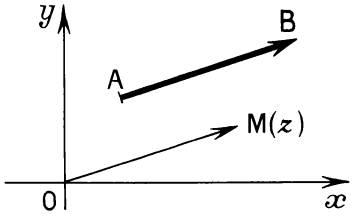


Fig. 265

L'*affixe* z_M *du point* M est donc le nombre complexe qui a pour module la longueur OM et pour argument l'angle polaire $(\vec{Ox}, \vec{OM})$ [mod. 2π].

La mesure complexe [AB] *de tout vecteur libre* $\vec{AB}$ est l'affixe du point M tel que $\vec{OM} = \vec{AB}$. Ce complexe [AB] a pour module $\rho = AB$ et pour argument $\theta_{\vec{AB}} = (\vec{Ox}, \vec{AB})$. D'autre part :

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \iff [AB] = z_B - z_A.$$

Le rapport complexe k de deux vecteurs libres $\vec{AB}$ *et* $\vec{CD}$ est le rapport de leurs mesures complexes [AB] et [CD]. Donc :

$$\frac{\vec{AB}}{\vec{CD}} = k \quad \text{ou} \quad \vec{AB} = k\,\vec{CD} \iff \frac{[AB]}{[CD]} = k \quad \text{ou} \quad [AB] = k\,[CD].$$

Le rapport complexe $\dfrac{\vec{AB}}{\vec{CD}}$ a pour module le rapport $\rho = \dfrac{AB}{CD}$ et pour argument l'angle $\theta = \theta_{\vec{AB}} - \theta_{\vec{CD}} = (\vec{CD}, \vec{AB})$ [mod. 2π]. Par suite, dans le plan complexe :

L'égalité $\dfrac{\vec{AB}}{\vec{AC}} = \dfrac{\vec{A'B'}}{\vec{A'C'}}$ ***caractérise la similitude directe des triangles*** ABC ***et*** A'B'C'.

En effet : $\dfrac{\vec{AB}}{\vec{AC}} = \dfrac{\vec{A'B'}}{\vec{A'C'}} \iff \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{A'B'}, \vec{A'C'})$.

321. Transformation : $z' = az + b$.

Soient $a \neq 0$ et b deux nombres complexes donnés. La relation $z' = az + b$ qui établit une correspondance bijective entre le point M(z) et le point M'(z'), définit une transformation ponctuelle T dans le plan complexe :

$$z' = az + b \iff M'(z') = T.M(z). \qquad (1)$$

On dit que la relation (1) est l'opérateur de la transformation T. Cherchons les points invariants dans cette transformation. Pour que le point ω (z_0) soit invariant, il faut et il suffit que : $z_0 = az_0 + b \iff z_0 (1 - a) = b.$ (2)

322. 1° Cas particulier : $a = 1$.

Pour $b = 0$, la relation (1) devient : $z' = z$ et la relation (2) est vérifiée identiquement. La *transformation* T *est la transformation* identique.

Pour $b \neq 0$, la relation (2) est impossible et il n'existe pas de point invariant. Désignons par B le point d'affixe b (fig. 266). La relation (1) entraîne :

$$z' = z + b \iff \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} \iff \boxed{\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OB}.} \qquad (3)$$

***Le point* M' *est l'homologue de* M *dans la translation de vecteur* $\overrightarrow{OB}$.**

Le point B est l'homologue de O car $z = 0 \Longrightarrow z' = b$.

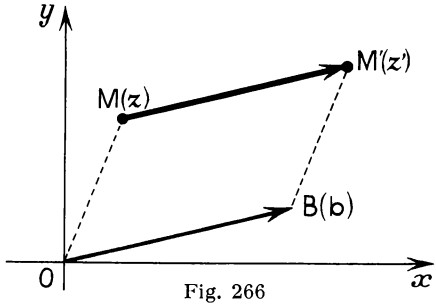


Fig. 266

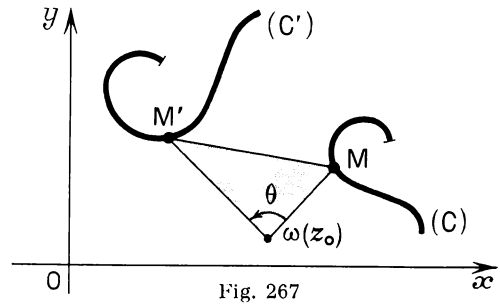


Fig. 267

2° Cas général : $a \neq 1$.

Il existe un point invariant unique ω d'affixe $z_0 = \dfrac{b}{1 - a}$ (ffg. 267). Compte tenu de $z_0 = az_0 + b$, la relation $z' = az + b$ s'écrit :

$$z' - z_0 = a(z - z_0) \iff [\omega M'] = a\,[\omega M] \quad \text{ou} \quad \boxed{\overrightarrow{\omega M'} = a\,\overrightarrow{\omega M}.} \qquad (4)$$

Désignons par k et θ le module et l'argument du nombre complexe a. Nous obtenons :

$$\frac{\overrightarrow{\omega M'}}{\overrightarrow{\omega M}} = a\,(k, \theta) \iff \begin{cases} \omega M' = k\,\omega M \\ (\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) = \theta \text{ [mod. } 2\pi]. \end{cases} \qquad (5)$$

***Le point* M' *est l'homologue de* M *dans la similitude plane directe* S (ω, k, θ).**

Exemple. — Pour $z' = (1 + i\sqrt{3})\,z + (1 + i)\sqrt{3}$ on obtient :

$$z_0 = \frac{(1 + i)\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = -1 + i, \quad k = 2 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{3}.$$

La transformation T est la similitude plane directe de centre ω (— 1 ; 1), d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

Le nombre a (k, θ) *est le rapport complexe de la similitude* S (ω, k, θ). Notons que :

Pour $k = 1$, $\theta \neq 0$, la transformation est la rotation R (ω, θ).

Pour $\theta = 0$, $k \neq 1$, on obtient l'homothétie positive H (ω, k).

Pour $\theta = \pi$, on obtient l'homothétie négative H (ω, — k).

323. Résumé. — On voit que la transformation T définie dans le plan complexe par la relation $z' = az + b$ appartient au groupe G des similitudes directes dans ce plan (n° 312).

Les formules (3), (4) ou (5) du paragraphe précédent montrent que réciproquement :

Toute similitude directe dans le plan complexe se traduit par une relation $z' = az + b$ entre les affixes des points homologues M(z) ***et*** M′(z').

On peut vérifier dans une telle similitude où $a \neq 1$, que les relations telles que $\overrightarrow{\omega A'} = a\,\overrightarrow{\omega A}$ entraînent : $\overrightarrow{A'B'} = a\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'C'} = a\,\overrightarrow{AC}$.

D'où la similitude directe des triangles ABC et A′B′C′.

324. Remarque. — Le produit $S_2 \circ S_1$ des transformations $S_1 : z_1 = a_1 z + b_1$ et $S_2 : z_2 = a_2 z_1 + b_2$ est la transformation de même forme $z_2 = a_2 (a_1 z + b_1) + b_2$ soit $z_2 = a_1 a_2 z + a_2 b_1 + b_2$. Ainsi la transformation $z' = az + b$ est le produit de la similitude S (O, k, θ) : $z_1 = az$ par la translation définie par : $z' = z_1 + b$.

EXERCICES

401. On considère dans le plan une droite Δ, un point fixe A non situé sur Δ et un triangle rectangle isocèle variable ABC ayant le sommet de l'angle droit B sur Δ.

1° Lieu du sommet C lorsque B décrit Δ.

2° Lieu des milieux des côtés et du centre de gravité du triangle ABC.

402. Soit un triangle AOB rectangle en O. Un point variable M décrit la perpendiculaire en A à la droite AB. La perpendiculaire en O à OM coupe AB en M′.

1° Montrer que le triangle MOM′ reste semblable à un triangle fixe.

2° Lieu du milieu de MM′ et du sommet P du rectangle MAM′P.

403. Une similitude plane directe de centre O transforme A en A′. Construire un point M et son transformé M′ connaissant :

1° La droite MM′.

2° Un vecteur $\overrightarrow{V}$ égal à $\overrightarrow{MM'}$.

3° Le milieu P de MM′.

4° La médiatrice de MM′.

404. Soit ω le point commun aux cercles ABC, AB′C′, etc. du quadrilatère complet ABCA′B′C′. Démontrer que les trois angles $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega A'})$, $(\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega B'})$, $(\overrightarrow{\omega C}, \overrightarrow{\omega C'})$ ont même bissectrice et que les trois produits $\omega A . \omega A'$, $\omega B . \omega B'$ et $\omega C . \omega C'$ sont égaux.

405. Un angle $xOy = 2\alpha$ tourne autour de son sommet fixe O de façon que le point fixe A reste à son intérieur.

1° Lieu des centres des cercles ω passant par A et tangents aux côtés de l'angle xOy.

2° Lieux des points de contact des cercles ω et des côtés de l'angle.

406. Soient deux droites parallèles Δ et Δ' et un point fixe O. Une sécante variable issue de O coupe Δ et Δ' en M et M′. Soit ω le centre du cercle de diamètre MM′.

1° Lieux des points de contact des tangentes issues de O au cercle ω.

2° Montrer que le cercle ω détermine une corde de longueur constante sur chacun de ces lieux.

407. Un triangle variable ABC a son sommet A fixe, la droite BC fixe et l'angle (AB, AC) constant.

1° Lieux des pieds des hauteurs BB′ et CC′ du triangle ABC. Préciser la position de ces lieux et trouver l'enveloppe de la droite B′C′.

2° Soit AA′ la hauteur issue de A. Dans le cas où les trois angles du triangle ABC restent aigus, montrer que le périmètre du triangle A′B′C′ est constant.

408. Soient deux triangles directement semblables OAM et OA′M′ de hauteurs OH et OH′. On

désigne par ω, I, J les milieux de AA′, MA′ et M′A. Comparer les deux triangles ωIJ et OHH′ et en déduire que les droites IJ et HH′ sont perpendiculaires.

409. On donne un cercle fixe de diamètre AB, un point M variable sur ce cercle et on construit le carré de sens direct AMNP. Trouver les lieux des points N et P.

410. Étant donné un point A, un cercle de centre O, construire une corde BC de ce cercle telle que le triangle ABC soit directement semblable à un triangle donné $\alpha\beta\gamma$. En déduire les triangles ABC inversement semblables au triangle $\alpha\beta\gamma$.

411. Soit un parallélogramme ABCD de centre O :

1° Montrer que tout parallélogramme inscrit MNPQ a même centre O.

2° Construire un losange d'angles donnés inscrit dans ce parallélogramme.

412. 1° Lieux des sommets des triangles ABC semblables au triangle donné $\alpha\beta\gamma$ et dont les côtés BC, CA et AB passent par des points fixes M, N, P donnés.

2° Montrer que deux tels triangles se correspondent dans une similitude de centre fixe D.

3° Construire le triangle ABC connaissant un point remarquable du triangle ou la longueur BC.

413. Soient I, J, K les milieux des côtés BC, CA et AB du triangle ABC, puis M, N, P les sommets de l'angle droit des triangles rectangles isocèles de sens direct BMC, CNA et APB.

1° Appliquer au vecteur $\overrightarrow{IN}$ le produit des similitudes $\left(C, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(B, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

2° Comparer les triangles BMN et MCP et montrer que les trois droites AM, BN et CP sont concourantes.

414. On construit les triangles équilatéraux de sens direct BA′C, CB′A et AC′B de centres respectifs I, J, K.

1° Appliquer au vecteur $\overrightarrow{IJ}$ le produit des similitudes $\left(C, \sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ et $\left(B, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ et en déduire la nature du triangle IJK.

2° Démontrer que les trois triangles ABC, A′B′C′ et IJK ont même centre de gravité.

415. 1° Étudier le produit des trois similitudes qui transforment respectivement $\overrightarrow{BC}$ en $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CB}$.

2° Démontrer que la produit des similitudes $\left(O_1, \operatorname{tg}\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(O_2, \operatorname{cotg}\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ est une symétrie point dont le centre I est celui de la rotation d'angle 2α qui transforme O_2 en O_1.

416. La similitude S_A transforme $\overrightarrow{AB_1}$ en $\overrightarrow{AB}$, la similitude S_B transforme $\overrightarrow{BA}$ en $\overrightarrow{BA_1}$ et la similitude S_C de centre C transforme $\overrightarrow{A_1B}$ en $\overrightarrow{AB_1}$.

1° Quel est le produit de ces trois similitudes ?

2° Soit C_1 le transformé de C dans S_A. Démontrer que les trois triangles A_1BC, AB_1C, ABC_1 sont directement semblables puis que les trois droites AA_1, BB_1, CC_1 sont concourantes en D.

417. 1° Construire un quadrilatère $ACBC_1$ connaissant les points A et B, les angles $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}) = \alpha$ et $(\overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{BC}) = \beta$ et les rapports $\frac{AC_1}{AC} = k$ et $\frac{BC}{BC_1} = h$. (Construire d'abord un quadrilatère semblable AMPN et lui appliquer la similitude qui transforme $\overrightarrow{AP}$ en $\overrightarrow{AB}$).

2° Montrer que C est le centre de la similitude produit S_B (B, h, β) o S_A (A, k, α) et C_1 celui de la similitude S_A o S_B.

418. Dans un quadrilatère convexe inscriptible ABCD, on désigne par a, b, c, d les longueurs des côtés AB, BC, CD et DA. Soit E l'homologue de A dans la similitude de centre C qui transforme D en B.

1° Montrer que le point E appartient au prolongement de AB.

2° Calculer la longueur BE et trouver le rapport des segments CA et CE.

3° Construire le quadrilatère connaissant les longueurs de ses côtés.

419. On considère un triangle ABC et trois triangles directement semblables entre eux BMC, CNA, APB. Soit Q le symétrique de M par rapport au milieu de BC.

1° Quelle est la nature des quadrilatères BMCQ et NAPQ ?

2° Démontrer que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité et établir la relation $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{0}$.

420. On considère un quadrilatère convexe inscriptible ACBD et on construit les triangles ADE et DBF directement semblables à ABC.

1° Montrer que E et F sont sur CD et que DE + DF = DC.

2° Évaluer les produits AD . BC et AC . BD et en déduire la relation de Ptolémée :

$$AB.CD = AC.BD + AD.BC.$$

421. On construit trois triangles directement semblables OAB, COB et CDO.

1° Démontrer que O est le milieu de AD, qu'il est équidistant de AB, BC et CD puis que :

$$\overline{OA}^2 = \overline{OD}^2 = AB.CD.$$

2° Étudier le cas de l'angle A ou de l'angle B du triangle OAB égal à un droit.

422. On sait que si les trois triangles ABC, ADE et DBF sont directement semblables le quadrilatère CEDF est un parallélogramme de centre O.

1° On construit le triangle ABR directement semblable à AOE. Démontrer que les triangles ACR et AOD puis DOR sont directement semblables. En déduire les relations : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OR})$ et $\overline{OC}^2 = \overline{OD}^2 = \overline{OA}.\overline{OR}$.

2° Connaissant A, B, E, F et par suite O et R, justifier la construction suivante de C et D : On prend les intersections de la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OR})$ avec le cercle passant par A et R centré sur la bissectrice extérieure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OR})$.

423. Soit un quadrilatère complet ABCA'B'C' et ω le point commun aux cercles ABC et AB'C'. On achève les parallélogrammes BA'B'D et CA'C'E.

1° Démontrer que les triangles AωB' et ABD ainsi que AωC et AC'E sont semblables.

2° Les trois points A, D, E sont alignés et $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{AB}\,.\,\overline{AB'}}{\overline{AC}\,.\,\overline{AC'}}$.

3° Montrer que les milieux de AA', BB' et CC' sont alignés.

424. Soit J le centre de la similitude directe qui transforme $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{CB}$ et D le symétrique de C par rapport à J.

1° Montrer que J est aussi le centre de la similitude qui transforme $\overrightarrow{AD}$ en $\overrightarrow{DB}$. Montrer que les cercles ACJ et CBJ sont tangents en C à BC et AC.

2° Montrer que le triangle DAB est directement semblable à JAC et JCB et que le quadrangle ABCD est inscriptible.

3° Construire un tel quadrangle connaissant A, B et J.

425. On considère quatre triangles directement semblables ABM, CDN, ADP et CBQ.

1° Préciser la nature du quadrilatère MPNQ.

2° On achève les parallélogrammes AMBR et CNDS. Montrer que les deux quadrangles ABCD et PQRS ont même centre de gravité.

426. Soit O le centre de la similitude directe qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$. On construit les triangles ADM et CBN semblables à ABO. Montrer que M et N sont symétriques par rapport au point O.

427. Étant donné un quadrilatère ABCD et O le milieu de AD, on construit les triangles ABM et DNC directement semblables à OBC. Démontrer que ces triangles sont semblables au triangle ONM.

428. Un quadrilatère ABCD est circonscrit à un cercle de centre O. Les droites AB et CD se coupent en E et la perpendiculaire en O à EO coupe AB et CD en I et J.

1° Démontrer la similitude des triangles OIB, COB et CJO, puis que l'on a les relations :

$\overline{OI}^2 = \overline{OJ}^2 = \overline{IB}.\overline{JC} = \overline{IA}.\overline{JD}$. Comparer les divisions AIB et CJD.

2° Démontrer que le centre O du cercle inscrit dans le quadrilatère est situé sur la droite MN qui joint les milieux des diagonales AC et BD et que la division MON est semblable à chacune des deux divisions AIB et CJD.

429. Soit ω le centre d'une similitude directe qui transforme le cercle O en le cercle O' et soient, sur ces deux cercles, deux points homologues M et M'.

1° Démontrer que le lieu de la projection H de ω sur MM' est un cercle ayant pour centre la projection K de ω sur OO'.

2° Soit ω' le symétrique de ω par rapport à OO' et H' la projection de ω' sur MM'. Montrer que le produit $\overline{\omega H}.\overline{\omega' H'}$ est constant et qu'il en est de même de l'aire du triangle $\omega' MM'$.

430. Étant donné un triangle IAA′ et un rapport algébrique k, on fait correspondre à tout point P de la droite AA′ le point M de IA et le point M′ de IA′ tels que $\overrightarrow{PM'} = k\,\overrightarrow{PM}$.

Montrer que P, M et M′ décrivent des divisions semblables relatives au même centre ω que l'on construira.

431. Deux points M et M′ décrivent sur deux droites Ix et Ix′ les divisions semblables définies par AB et A′B′. Par M et M′ on mène les droites Mz et M′z′ respectivement parallèles à deux directions données δ et δ'.

1° Montrer que le lieu du point M_1 commun à Mz et M′z′ est une droite A_1B_1.

2° En déduire les lieux de l'orthocentre H du triangle IMM′ et du point P diamétralement opposé à I sur le cercle IMM′.

3° Montrer que les lieux de H et P sont antiparallèles par rapport à Ix et Ix′ puis que IH et IP sont dans un rapport constant.

432. On considère les divisions décrites sur Δ et Δ' par deux points M et M′ se correspondant dans une similitude directe de centre ω.

1° Construire le lieu Δ_1 de la projection H de ω sur la droite MM′.

2° En déduire la construction de M et M′ connaissant la longueur MM′, la direction de MM′ ou un point de la droite MM′.

433. Reprendre le problème précédent en remplaçant Δ et Δ' par deux cercles Γ et Γ'.

434. La similitude directe (ω, k, θ) transforme un point M du cercle O en un point M′ du cercle O′ qui coupe le cercle O en A. On pose $V = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'})$.

1° Démontrer que l'angle (AM, AM′) est égal à $\frac{1}{2}(V + \theta)$.

2° Les cercles O et O′ sécants en A étant donnés, construire le point ω correspondant à (AM, AM′) = α (angle donné).

435. *Similitude plane inverse.* — Soit Σ une similitude inverse de rapport $k \neq 1$ transformant A en A′ et A′ en A″. La tangente en A′ au cercle AA′A″ coupe la droite AA″ en ω. On désigne par Δ et Δ' les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $A\omega A'$.

1° Comparer les triangles $\omega AA'$ et $\omega A'A''$. En déduire que ω est un point double et que : *La similitude Σ est équivalente au produit commutatif de l'homothétie positive* $H(\omega, k)$ *et de la symétrie axiale* $S(\Delta)$: similitude $\Sigma(\omega, k, \Delta)$. La similitude Σ est aussi équivalente au produit commutatif de l'homothétie négative $(H(\omega, -k))$ par la symétrie axiale $S(\Delta')$.

2° Établir que le centre ω, l'axe positif Δ et l'axe négatif Δ' sont les seuls éléments invariants dans Σ. Si M′ est le transformé d'un point quelconque M, les axes Δ et Δ' sont les lieux des points I et J qui divisent le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ dans les rapports $-k$ et $+k$. Établir que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{\Delta}) = (\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{A'M'})$. Que peut-on dire des couples (AB, CD) et (A′B′, C′D′) ?

3° Montrer que le produit d'une similitude inverse Σ par elle-même est l'homothétie $H(\omega, k^2)$, que le centre ω est le milieu du segment joignant les pieds des bissectrices issues de A′ dans le triangle AA′A″ et que Δ et Δ' sont les médiatrices de ces bissectrices.

4° Montrer que les triangles $\omega AB'$ et $\omega BA'$ sont équivalents, que les produits scalaires $\overrightarrow{\omega A} \cdot \overrightarrow{\omega B'}$ et $\overrightarrow{\omega B} \cdot \overrightarrow{\omega A'}$ sont égaux. Que peut-on en conclure pour les distances orientées de ω aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$, aux vecteurs $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{BA'}$ et pour les puissances de ω par rapport aux cercles de diamètres AB′ et BA′ ?

436. On désigne par O et ω les centres des similitudes directe S et inverse Σ qui transforment $\overrightarrow{BA}$ en $\overrightarrow{AC}$ et tout point variable M de la droite BA en un point N de la droite AC. Soit A′ le symétrique de A par rapport à O et k le rapport de AC et BA.

1° Montrer que le quadrangle AA′BC est harmonique, inscrit dans un cercle de centre K et, que le point ω est le pôle de AA′ par rapport au cercle K. En déduire la disposition relative des points A, K, ω et O.

2° Montrer que les axes Δ et Δ' de la similitude inverse Σ sont les lieux des pieds I et I′ des bissectrices de l'angle O du triangle OMM′. Trouver le lieu du centre γ du cercle de diamètre II′. Montrer que ce cercle est orthogonal au cercle AOMM′ et trouver le lieu du point de rencontre variable P de ces deux cercles.

3° Soient φ_1 et φ_2 les symétriques de O par rapport à AB et AC. Montrer que $\overrightarrow{O\varphi_1}$ et $\overrightarrow{O\varphi_2}$ sont homologues dans S tandis que $\overrightarrow{O\varphi_1}$ et $\overrightarrow{\varphi_2 O}$ sont homologues dans Σ. Nature des produits $S^{-1} \circ \Sigma$ et $\Sigma^{-1} \circ S$? Montrer que ω, φ_1, φ_2 sont alignés sur une droite D, antiparallèle à ωO par rapport à ωA et ωB, lieu du symétrique R de O par rapport à MM′ et lieu de l'orthocentre H du triangle AMN. Montrer que D est l'axe radical des cercles de diamètres AM et BN, ainsi celui des cercles de diamètres AN et CM. Quel est le centre radical de ces quatre cercles ?

437. Une similitude inverse est le produit de l'homothétie positive (O, k) par la symétrie par rapport à une droite Δ issue de O. Construire un point M et son transformé M′ connaissant :

1° La droite MM′, un vecteur égal à $\overrightarrow{MM'}$ ou le cercle OMM′ ;

2° Le milieu P de MM′ (transformer P en P′ et montrer que OM est parallèle à PP′) ;

3° La médiatrice de MM′ (elle coupe Δ sur le cercle OMM′).

438. Soit un triangle ABC et les deux points variables M et N tels que :

$$\overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{NC} + \lambda\overrightarrow{NA} = \vec{0}.$$

1° Démontrer que lorsque λ varie, les points M et N se correspondent dans les deux similitudes directe et inverse de centres respectifs O et ω qui transforment $\overrightarrow{BA}$ en $\overrightarrow{AC}$. Préciser les éléments de ces deux similitudes.

2° Que peut-on dire des cercles AOB, AOC et ABC par rapport à AC, AB et Aω ? Montrer que OA et Oω sont les bissectrices de l'angle BOC, que les triangles ωAM et ωNB sont équivalents et qu'il en est de même des triangles ωAN et ωMC.

3° Démontrer que l'axe radical des cercles de diamètres AN et MC est une droite fixe Δ tandis que l'axe radical des cercles de diamètres AN et MB passe par un point fixe S. Préciser les positions de Δ et S. (On pourra opérer vectoriellement en calculant $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IN}$ en fonction de $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IC}$ et λ puis en écrivant que $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IN}$ est égal à $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IM}$ ou à $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IM}$ quel que soit λ.)

439. On considère un quadrilatère ABA′B′ dont les diagonales AA′ et BB′ se coupent en ω, et on désigne par I le centre de la similitude inverse qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{B'A'}$ et par J le centre de la similitude inverse qui transforme $\overrightarrow{AB'}$ en $\overrightarrow{BA'}$.

1° Montrer que les triangles IAA′ et IBB′ ont même angle en I et sont équivalents et qu'il en est de même des triangles JAA′ et JB′B. Nature du faisceau ω (ABIJ).

2° Montrer que la droite IJ est l'axe radical des cercles de diamètres AA′ et BB′.

3° On complète le quadrilatère complet ABCA′B′C′. Montrer qu'il existe six points analogues à I ou J situés sur la droite Δ qui contient les orthocentres des quatre triangles du quadrilatère complet.

440. Soit un quadrilatère ABCD. On construit les points I et I′ qui divisent $\overrightarrow{AC}$ dans le rapport $\frac{AB}{CD}$ et les points J et J′ qui divisent $\overrightarrow{BD}$ dans le même rapport.

1° Montrer que IJ et I′J′ sont parallèles aux bissectrices de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ et perpendiculaires en ω.

2° Les cercles de diamètre II′ et JJ′ se coupent en ω et en O. Comparer les triangles OAB et OCD, ωAB et ωCD et enfin ωAD et ωBC.

441. On considère un cercle de diamètre AB et deux parallèles AA′ et BB′. La tangente en C coupe ces parallèles en A′ et B′ et coupe AB en I.

1° Démontrer que le cercle de diamètre A′B′ est tangent en C′ à AB. Comparer les triangles ABC et A′B′C′.

2° Démontrer que CC′ est antiparallèle à AA′ par rapport à IA et IC.

442. Dans un triangle ABC, on projette A en A′ sur BC, B et C en B′ et C′ sur une droite donnée Ax et enfin B en B_1 sur AC et C en C_1 sur AB.

1° Comparer les triangles ABC et A′B′C′. Étudier le cas où Ax est bissectrice ou médiane.

2° Comparer les triangles B′BB_1 et C′C_1C.

443. Dans un quadrilatère ABCD on projette A et C en A′ et C′ sur BD, B et D en B′ et D′ sur AC :

1° Montrer que les quadrilatères A′B′C′D′ et ABCD sont inversement semblables.

2° Construire le quadrilatère ABCD connaissant A′B′C′D′.

444. *Similitude dans l'espace.* — On désigne par A′, B′, C′, M′ les homologues de A, B, C, M dans une similitude S de l'espace directe ou inverse (produit d'une homothétie positive ou négative par un déplacement).

1° Montrer que S est équivalente au produit d'une homothétie positive ou négative (I, k) qui transforme M en M′ par une rotation R $(\vec{\delta}, \theta)$ dont l'axe δ passe par M′ et que S admet un *plan invariant* P passant par I et perpendiculaire à δ.

2° Dans le plan P, la similitude S se réduit à une similitude plane directe (O, k, θ) transformant tout triangle ABC en un triangle A′B′C′ directement semblable. Soit $\vec{\Delta}$ l'axe parallèle à $\vec{\delta}$ mené par O. Montrer que : *La similitude* S *équivaut au produit commutatif de l'homothétie* H(O, k) *par* la *rotation* R(Δ, θ) *dont l'axe* Δ *est issu de* O : $S = H(O, k) \circ R(\vec{\Delta}, \theta) = R(\vec{\Delta}, \theta) \circ H(O, k)$.

Le point invariant O, et la droite invariante Δ sont *le centre* et *l'axe* de la similitude S qui est notée $S(O, k, \Delta, \theta)$.

3° Montrer que Δ et P font des angles égaux avec deux droites ou deux plans homologues et que P est le lieu des points divisant les vecteurs tels que $\overrightarrow{M'M}$ dans le rapport k. Construire les points M et M′ connaissant le milieu J de MM′.

445. Les points M et M′ qui décrivent deux divisions rectilignes semblables sur les droites Qx et Qx' se correspondent dans la similitude directe (O, k, α). Soient Q et R les transformés de P et Q dans cette similitude.

1° Démontrer que OQ est bissectrice de $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OR})$ et que $OR = k^2OP$. Déterminer le lieu (D) du symétrique φ de O par rapport à MM′. Que représente (D) pour le triangle QMM′ ?

2° Les pieds I et I′ des bissectrices intérieure et extérieure issues de O du triangle OMM′ décrivent deux droites Δ et Δ' perpendiculaires en ω. Démontrer que le lieu du milieu K de II′ est la médiatrice de $O\omega$. Cette médiatrice coupe Qx et Qx' en K_1 et K_2 homologues dans la similitude de centre O. En déduire que ω est situé sur D.

3° Le produit de l'homothétie (ω, k) par la symétrie droite d'axe Δ transforme MPQ en M′QR. En déduire que ω divise $\overrightarrow{RP}$ dans le rapport k^2, que l'angle $(O\omega, OQ)$ est droit et que le cercle PQR, tangent en Q à ωQ, est centré sur $O\omega$.

446. Soient deux axes rectangulaires Ox et Oy, un point fixe A sur Ox tel que $\overline{OA} = a > 0$, un point fixe B sur Oy tel que $\overline{OB} = b > 0$ et soit I le milieu de AB. On décrit les cercles de centres respectifs A et B passant par O. Ces cercles se coupent en S. On fait pivoter autour de O un angle droit dont un côté coupe en C le cercle A et l'autre côté coupe en D le cercle B. Soit θ l'angle saillant $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OC})$.

1° Calculer en fonction de a, b, θ les longueurs OC, OD et CD. Montrer que les triangles OAB et OCD sont directement semblables et trouver l'enveloppe de CD.

2° Montrer que la projection H de O sur CD décrit le cercle de diamètre OS et que le milieu M de CD et le point de rencontre N de AC et BD décrivent le cercle de diamètre AB. Comparer les arcs homologues décrits par M et N.

3° Soit Q le point de rencontre des tangentes en C et D aux cercles A et B. Démontrer que les points O, C, D, N et Q sont sur un cercle de centre M et que IM est médiatrice de ON. La droite OQ recoupe le cercle de diamètre AB en R, démontrer que $\overrightarrow{RQ} = 2\ \overrightarrow{IM}$.

447. On donne dans un plan deux cercles fixes O et O′, sur le premier un point fixe A et un point mobile M, sur le second un point fixe A′ et un point mobile M′ tels que les droites AM et A′M′ soient parallèles.

1° Montrer que l'on peut d'une infinité de façons remplacer respectivement A et A′ par deux autres points fixes B et B′ des cercles O et O′ de telle sorte que BM et B′M′ restent parallèles. En particulier on peut remplacer A et A′ par les points diamétralement opposés C et C′.

2° Sur chacune des droites MM′, BB′ on prend le point M_1 ou le point B_1 définis par les relations $\overline{MM_1} = k\ \overline{M'M_1}$; $\overline{BB_1} = k\ \overline{B'B_1}$ où k est un nombre réel. Montrer que le lieu géométrique de chacun des points M_1, B_1 est un même cercle Γ.

3° Trouver le lieu du centre du cercle Γ lorsque k varie. Construire les cercles Γ de rayon donné. Montrer qu'il existe en général un rayon minimum. Comment doivent être disposés A et A′ pour que le minimum soit nul ?

4° Comment doivent être disposés les cercles O et O′ ainsi que les points A et A′ pour que les points M et M′ puissent venir coïncider pour une position particulière ou pour que la longueur MM′ reste constante.

448. Étant donné deux cercles O et O′ et deux rayons OA et O′A′ construire le centre ω de la similitude directe qui transforme $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{O'A'}$ et un point variable M du cercle O en M′. Soit N le point commun à OM et O′M′, P le point commun à AM et A′M′, Q le point commun aux tangentes en M et M′ aux cercles O et O′.

1° Montrer que les six points ω, M, M′, N, P et Q sont situés sur un même cercle dont le centre J décrit un cercle (γ) de même centre I que le cercle $\omega OO'$.

2° Montrer que IJ est la médiatrice de ωN et que la tangente en J au cercle (γ) est la médiatrice de ωQ.

3° On désigne par R le point de rencontre de ωQ avec le cercle $\omega OO'$. Démontrer que $\overrightarrow{RQ} = 2\ \overrightarrow{IJ}$ et que la longueur QR est constante.

4° Soit M_1 le point du cercle $\omega MM'$ tel que $(\omega M, \omega M_1) = \alpha$ (angle donné). Montrer que le lieu de M_1 est un cercle dont on précisera le centre O_1, que la tangente en M_1 à ce cercle passe par Q et que, lorsque α varie, tous les cercles O_1 sont vus du point ω sous le même angle.

449. Dans un plan on considère deux droites $u'u$ et $v'v$ se coupant en O en faisant un angle de 45°. Sur $u'u$ on porte un segment MN de longueur $2\,h$ et de milieu A distinct de O. Sur $v'v$ on porte un segment PQ de longueur $2\,h\sqrt{2}$ et de milieu B distinct de O.

1° Déterminer les similitudes directes qui transforment le vecteur MN en le vecteur PQ ou en le vecteur QP.

2° Montrer que les centres I_1 et I_2 de ces similitudes sont sur le cercle OAB et montrer que la droite I_1I_2 coupe le rayon issu de A au milieu de ce rayon.

3° On fait tourner PQ d'un angle droit autour de A. Préciser la position du segment RS obtenu. Déterminer le centre de la rotation qui transforme le vecteur PQ en le vecteur SR.

450. On donne dans un plan une droite Δ et un point A à une distance $AH = a$ de Δ.

1° A tout point M de Δ on fait correspondre les points P et P′ définis par :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MP}) = \frac{\pi}{2}; \qquad MP = k\ MA \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MP'}) = -\frac{\pi}{2}; \qquad MP' = \frac{1}{k}\ MA,$$

où k est un nombre positif donné. Montrer que, lorsque M décrit Δ, les points P et P′ décrivent des droites D et D′ et que le cercle PAP′ passe par un point fixe Q autre que A.

2° Trouver le lieu du point Q lorsque k varie, A restant fixe.

3° On suppose que k restant constant, A varie. Montrer que la droite AQ reste parallèle à une direction fixe, et que le milieu de AQ reste sur Δ. En déduire le lieu de Q lorsque A décrit une droite Δ_1 qui coupe Δ en un point B.

451. Dans un plan on donne une droite fixe D, un point fixe A sur D, un point fixe B, non situé sur D, se projetant orthogonalement en J sur D. Soit I le milieu de AB et α la détermination comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ de l'angle de droites (AB, D). Un cercle variable O passe par A et B et recoupe la droite D en M. Soit T la tangente en M à ce cercle.

1° On projette B en u sur OM et en u' sur T. Montrer que M est le transformé de O dans une similitude S de centre B. Déterminer son angle et son rapport en fonction de α. Montrer que O et u, O et u', u et u' sont respectivement couples homologues dans des similitudes S_1, S_2, S_3 que l'on déterminera.

2° Quel est le lieu Δ de u ? Chercher ses points d'intersection avec D et AB. Quel est le lieu Δ' de u' ? En quel point Δ' coupe-t-elle D ? Quel est l'angle de Δ et Δ' ?

3° On considère deux cercles O′ et O″ de la famille. Les tangentes T′ à O′ en M′ et T″ à O″ en M″ se coupent en P. Montrer que le cercle circonscrit au triangle PM′M″ passe par B.

452. On considère les cercles C du plan tels que les tangentes qu'on peut leur mener d'un point fixe O soient rectangulaires.

1° Quel est le lieu des centres de ceux des cercles C qui passent par un point donné A, distinct de O.

2° On considère ceux des cercles C qui sont centrés sur une droite D ne passant pas par O. Quel est le lieu des points de contact T et T′ avec ces cercles des tangentes issues de O ?

3° Construire les cercles C centrés sur D donnée et passant par A donné.

4° Que deviennent les résultats précédents lorsqu'on substitue à la famille des cercles C celle des cercles ω dont les tangentes issues de O font un angle constant donné différent de $\frac{\pi}{2}$?

— Étudier dans le plan complexe les transformations définies par les relations suivantes :

453. $z' = z + i$; $z' = (1 + i)z$; $z' = iz$.

454. $z' = z + 1 + i$; $z' = 3\ z + 2\ i$; $z' = -iz + 1$.

455. $z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\ z$; $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\ (1 + i)\ z$; $z' = -z + 2\ (1 - i)$.

456. $z' = 2\ z + 1 - i$; $z' = iz + 1 + i$; $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 3 + i\sqrt{3}$.

457. $z' = -2\ iz + 5$; $z' = (1 + i\ \text{tg}\ \alpha)z + \text{tg}\ \alpha$; $z' = (3 + 4\ i)z - 4 - 8\ i$.

458. On donne par leurs affixes dans le plan complexe les points A (a), B (b), A′ (a') et B′ (b').

1° Déterminer l'affixe z_0 du centre ω de la similitude directe transformant $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$ ou transformant $\overrightarrow{AA'}$ en $\overrightarrow{BB'}$.

2° Calculer le rapport complexe de l'une ou l'autre similitude.

459. On désigne par a, b, c les affixes des points A, B, C et par α, β, γ les affixes de M, N, P.

1° Montrer que la similitude directe des triangles ABC et MNP s'écrit :

$$a\,(\beta - \gamma) + b\,(\gamma - \alpha) + c\,(\alpha - \beta) = 0.$$

2° En déduire la relation vectorielle : $\alpha\,\overrightarrow{BC} + \beta\,\overrightarrow{CA} + \gamma\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

3° A quelle condition A, B, C sont-ils alignés ?

460. On désigne par 1, j et j^2 les racines cubiques complexes de l'unité.

1° Démontrer que si le triangle ABC est équilatéral de sens direct on a : $\overrightarrow{BC} = j\,\overrightarrow{AB}$.

2° Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que : $\overrightarrow{OA} + j\,\overrightarrow{OB} + j^2\,\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

461. Soient A, B, C les points d'affixes respectifs a, b, c.

1° Établir que : $(b - c)\,\overrightarrow{OA} + (c - a)\,\overrightarrow{OB} + (a - b)\,\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

2° On construit les vecteurs $\overrightarrow{OE} = \dfrac{b - c}{b - a}\,\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OF} = \dfrac{a - c}{a - b}\,\overrightarrow{OB}$. Comparer les triangles ABC, AOE et OBF. Quelle est la nature du quadrilatère DECF ?

462. On donne dans le plan complexe d'origine O, les points A(a) et B(b).

1° Construire les triangles AEO et OFB directement semblables à AOB et déterminer les affixes de E et F.

2° Montrer que O est le milieu de EF et qu'il est équidistant des trois droites AB, AE et BF. Établir que $OE^2 = OF^2 = AE \cdot BF$.

463. Dans le plan complexe un quadrangle ABCD est harmonique si : $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = -\dfrac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$. On désigne par I et J les milieux de AB et CD et par E le symétrique de D par rapport à A.

1° Établir les relations entre les mesures complexes : $[IA]^2 = [IB]^2 = [IC]\,[ID]$ ainsi que $[CA]\,[CB] = [CD]\,[CI]$. En déduire la similitude directe des triangles IAC, IDA et ABC.

2° Démontrer que : $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AE}} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BD}} = \dfrac{\overrightarrow{IC}}{\overrightarrow{IA}}$. En déduire la similitude directe des triangles CAE, CBD et CIA puis la relation : $[AC]^2 + 2\,[CI]\,[AJ] = 0$.

464. Soient a, b, c les affixes des sommets du triangle ABC et trois coefficients réels α, β, γ distincts. On construit les points A′, B′, C′ définis par :

$$\beta\,\overrightarrow{A'B} - \gamma\,\overrightarrow{A'C} = \vec{0}; \qquad \gamma\,\overrightarrow{B'C} - \alpha\,\overrightarrow{B'A} = \vec{0}; \qquad \alpha\,\overrightarrow{C'A} - \beta\,\overrightarrow{C'B} = \vec{0}.$$

1° Calculer les affixes des points A′, B′, C′. Établir la relation : $(\gamma - \alpha)\,\overrightarrow{A'B'} + (\alpha - \beta)\,\overrightarrow{A'C'} = \vec{0}$ et montrer que les points A′, B′, C′ sont alignés.

2° Établir que l'affixe z_0 du centre ω de la similitude directe qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{B'A'}$ vérifie la relation : $z_0\,\Sigma\,\alpha(b - c) = \Sigma\,\alpha a(b - c)$.

3° En déduire que ω est également le centre de la similitude directe qui transforme $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{C'A'}$ ou $\overrightarrow{BC}$ en $\overrightarrow{C'B'}$.

465. On considère dans le plan complexe les points A(a), B($-a$), M(m) et N(n).

1° Établir l'équation en z donnant l'affixe d'un point E tel que les triangles AME et BEN soient directement semblables. Montrer qu'il existe deux tels points E et F symétriques par rapport à O ou confondus en O.

2° Démontrer que le triangle FMN est directement semblable à chacun des triangles AME et BEN. Cas où E et F sont confondus en O ?

3° Déterminer l'affixe r du point R tel que le triangle NRM soit directement semblable à OAM. Vérifier la relation $[OE]^2 = [OF]^2 = [OR]\,[OM]$ et en déduire une construction des points E et F.

AFFINITÉ DANS LE PLAN

325. Définition. — Considérons, dans le plan, une droite Δ et une direction δ non parallèle à Δ (fig. 268) et soit d'autre part un nombre réel non nul k. Tout point M du plan se projette, parallèlement à δ, en μ sur Δ :

L'affinité d'axe Δ, ***de direction*** δ ***et de rapport*** k ***est la transformation ponctuelle qui, à tout point*** M ***du plan, fait correspondre le point*** M′ ***tel que :***

$$\overrightarrow{\mu M'} = k \cdot \overrightarrow{\mu M}.$$

Cette affinité $\mathcal{A}(\Delta, \delta, k)$ est positive pour $k > 0$, négative pour $k < 0$. Elle est dite *orthogonale* si δ est perpendiculaire à Δ.

Pour $k \neq 1$, les seuls points invariants sont ceux de l'axe Δ et toute droite parallèle à δ est invariante.

Le point M est l'homologue de M′ dans l'affinité réciproque $\mathcal{A}\left(\Delta, \delta, \frac{1}{k}\right)$. L'affinité ne peut être involutive que pour $k = \frac{1}{k} \iff k^2 = 1$ ou $k = \pm 1$.

Pour $k = 1$, tout point M est confondu avec son homologue M′ et l'affinité est la *transformation identique.*

Pour $k = -1$, le point μ est le milieu du segment MM′. L'affinité est dans ce cas la *symétrie oblique d'axe* Δ *et de direction* δ. Si cette affinité est orthogonale, on retrouve la symétrie axiale d'axe Δ.

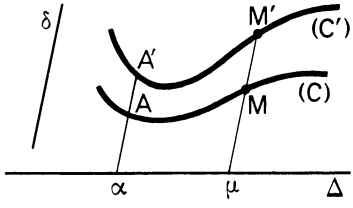


Fig. 268

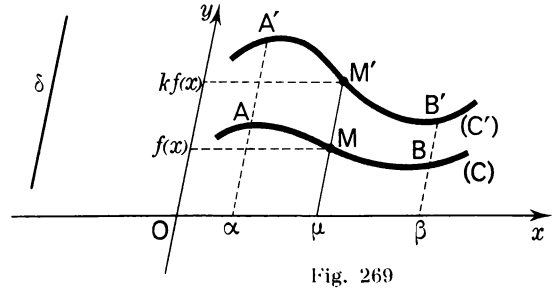


Fig. 269

326. Étude analytique. — Prenons pour repère cartésien xOy, l'axe Ox suivant Δ et l'axe Oy parallèle à la direction δ (fig. 269). Les coordonnées des points homologues $M(x, y)$ et $M'(X, Y)$ sont liées par les relations :

$$\boxed{X = x\,;\ Y = ky.} \qquad (1)$$

Lorsque le point M décrit dans le plan la courbe (C) d'équation $F(x, y) = 0$, le point M′ décrit la courbe (C′) d'équation $F\left(X, \frac{Y}{k}\right) = 0$. La courbe (C′) est la transformée de (C) dans l'affinité considérée. En particulier, la transformée de la courbe $y = f(x)$ est la courbe $Y = k\,f(X)$.

EXEMPLE. — Si (C) est le cercle : $x^2 + y^2 = a^2$ dans le repère orthonormé xOy, l'affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport $k = \frac{1}{2}$ transforme ce cercle en une courbe (C') d'équation : $X^2 + 4\,Y^2 = a^2$.

327. Affinités de même axe et de même direction. — Considérons les affinités $\mathcal{A}(\Delta, \delta, k_1)$ et $\mathcal{A}(\Delta, \delta, k_2)$. La première transforme M en M_1 (fig. 270) et la seconde transforme M_1 en M_2 :

$$\overrightarrow{\mu M_1} = k_1 \overrightarrow{\mu M} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mu M_2} = k_2 \overrightarrow{\mu M_1}$$

entraînent $\overrightarrow{\mu M_2} = k_1 k_2 \overrightarrow{\mu M}$.

Donc :

Le produit de deux affinités d'axe Δ, de direction δ et de rapports respectifs k_1 et k_2 est une affinité de même axe et de même direction de rapport $k_1 k_2$:

$$\mathcal{A}(\Delta, \delta, k_2) \circ \mathcal{A}(\Delta, \delta, k_1) = \mathcal{A}(\Delta, \delta, k_1 k_2).$$

Ce produit est commutatif et se réduit à la transformation identique pour $k_1 k_2 = 1$.

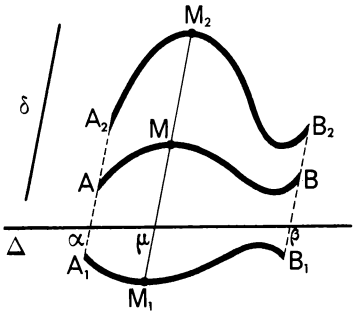


Fig. 270

328. Groupe des affinités d'axe et de direction donnés. — Désignons par G l'ensemble des affinités d'axe Δ et de direction δ :

1° $\mathcal{A}_1 \in G$ et $\mathcal{A}_2 \in G \implies \mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1 \in G$.

2° $\mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_2$.

3° $I = \mathcal{A}(D, \delta, 1)$ est un élément de G.

4° $\forall\, \mathcal{A} = \mathcal{A}(\Delta, \delta, k) \in G$, $\exists\, \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}\left(\Delta, \delta, \frac{1}{k}\right) \in G$.

L'ensemble des affinités d'axe donné Δ et de direction donnée δ a une structure de groupe abélien pour l'opération-produit.

329. Transformée d'une droite. — 1° Si la droite donnée D est parallèle à δ elle est globalement invariante dans l'affinité $\mathcal{A}(\Delta, \delta, k)$.

2° Si la droite D est parallèle à l'axe Δ de l'affinité (fig. 271), les vecteurs $\overrightarrow{\mu M}$, $\overrightarrow{\mu M'}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont constants et respectivement égaux à $\overrightarrow{\alpha A}$, $\overrightarrow{\alpha A'}$ et $\overrightarrow{AA'}$. La transformée de D est son homologue dans la translation $T(\overrightarrow{AA'})$. C'est donc une droite D' parallèle à D et à Δ.

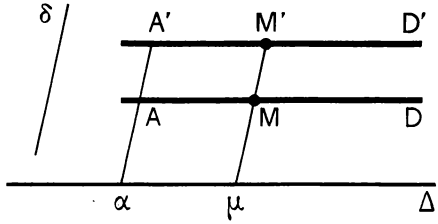


Fig. 271

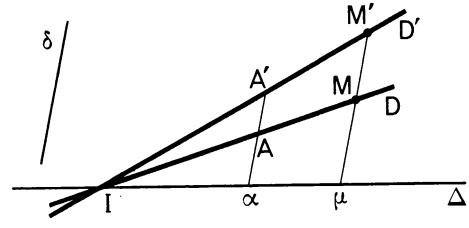


Fig. 272

3° Soit I le point d'intersection de D et Δ (fig. 272), et soit A' le transformé du point fixe A de D. Quel que soit le point M de D, la droite μM coupe la droite IA' en un point M'. Les divisions μMM' et αAA' sont homothétiques par rapport à I et :

$$\overrightarrow{\alpha A'} = k \overrightarrow{\alpha A} \implies \overrightarrow{\mu M'} = k \overrightarrow{\mu M}.$$

Le point M′ est donc le transformé de M dans l'affinité $\mathcal{A}$ (Δ, δ, k). Il décrit la droite D′ définie par I et A′ lorsque le point M décrit la droite D. En résumé :

Dans toute affinité l'homologue d'une droite D ***est une droite*** D′ ***qui coupe l'axe*** Δ ***de l'affinité au même point que*** D.

Si le point d'intersection I est rejeté à l'infini les deux droites D et D′ sont parallèles à Δ.

On vérifie d'ailleurs analytiquement d'après les formules (1) du n° 326 que :

a) $x = \alpha \Longrightarrow X = \alpha \Longrightarrow$ D et D′ sont confondues.

b) $y = \beta \Longrightarrow Y = k\beta \Longrightarrow$ D et D′ sont parallèles à Ox.

c) $y = m(x - \alpha) \Longrightarrow Y = km\,(X - \alpha) \Longrightarrow$ D et D′ se coupent sur Ox.

330. Corollaires. — 1° L'affinité $\mathcal{A}$ (Δ, δ, k) transforme deux droites concourantes en A, en deux droites concourantes en A′ homologue de A, un segment AB en un segment A′B′, un triangle ABC en un triangle A′B′C′.

2° ***Deux droites parallèles ont pour transformées deux droites parallèles.***

En effet si deux droites D et D_1 ont même coefficient directeur m, leurs transformées D′ et D'_1 ont même coefficient directeur km. Elles sont donc parallèles (fig. 273).

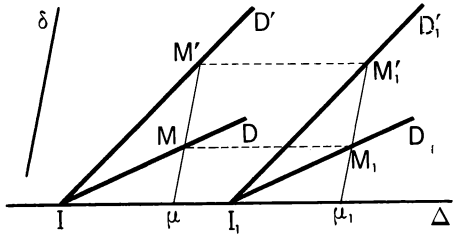


Fig. 273

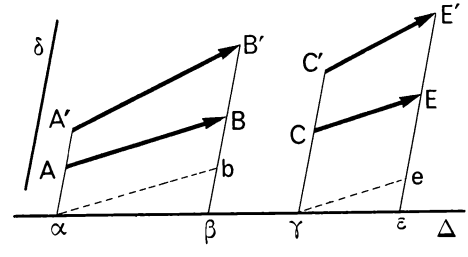


Fig. 274

On peut également voir que si D′ et D'_1 étaient concourantes en A′, les droites D et D_1 seraient concourantes en A, homologue de A′ dans l'affinité réciproque $\mathcal{A}^{-1}$:

Tout parallélogramme a pour transformé un parallélogramme.

3° ***Dans toute affinité le rapport de deux vecteurs parallèles est égal au rapport de leurs transformés.***

En effet (fig. 274) : $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CE} \iff \overrightarrow{A'B'} \parallel \overrightarrow{C'E'}$ et $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CE}} = \dfrac{\overrightarrow{\alpha\beta}}{\overrightarrow{\gamma\varepsilon}} = \dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'E'}}$.

Donc : $\boxed{\overrightarrow{AB} = \lambda\,\overrightarrow{CE} \iff \overrightarrow{A'B'} = \lambda\,\overrightarrow{C'E'}.}$

Toute division rectiligne ABCD *a pour homologue une division semblable* A′B′C′D′.
En particulier : (ABCD) $= -1 \iff$ (A′B′C′D′) $= -1$.

Remarque. — L'affinité ne conserve pas, en général, le rapport de deux segments non parallèles et par suite elle ne conserve pas les angles. Sinon elle transformerait tout triangle en un triangle semblable ce qui est impossible car une similitude plane ne peut avoir une droite de points doubles (le cas de la transformation identique et de la symétrie axiale mis à part).

331. Règle d'homologie. — D'après la définition (n° 325) et la propriété (n° 329) :

Dans toute affinité d'axe Δ *et de direction* δ *:*

1° *Deux points homologues* M *et* M′ *sont situés sur une parallèle à* δ.

2° *Deux droites homologues* D *et* D′ *se coupent sur* Δ *ou lui sont parallèles.*

Supposons (fig. 275) que l'affinité soit définie par la donnée de son axe Δ, d'un point extérieur A et de son transformé A′ : la direction δ est celle de AA′ et $k = \frac{\overline{\alpha A'}}{\overline{\alpha A}}$.

On construit d'abord le transformé B′ d'un second point B situé sur la droite IA en coupant la droite IA′ par la parallèle à AA′ menée par B.

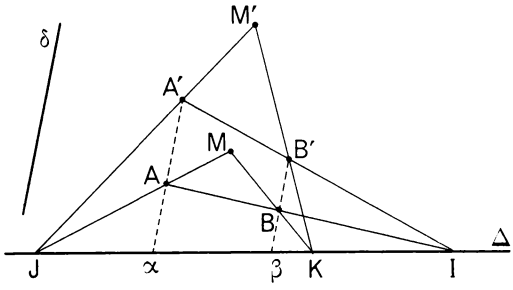


Fig. 275

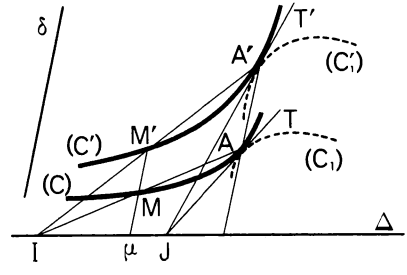


Fig. 276

On peut alors obtenir le transformé M′ de tout autre point M avec la règle comme seul instrument. Il suffit de mener MA et MB qui coupent Δ en J et K, puis les droites JA′ et KB′ qui se coupent en M′. Si les points J et K sont en dehors de la feuille à dessin, on construit les homologues de deux points C et D pour remplacer A et B.

332. Transformée d'une courbe. — ***Si une courbe*** (C) ***admet au point*** A, ***une tangente*** AT, ***la transformée par affinité*** (C′), ***admet au point*** A′ ***homologue de*** A ***une tangente*** A′T′, ***homologue de*** AT.

Par définition la tangente AT à la courbe (C) est la position limite de la sécante AM lorsque M vient se confondre avec A (fig. 276). Dans ces conditions le point M′, homologue de M, tend sur la courbe (C′) vers le point A′. La sécante A′M′ homologue de AM, tend vers la position limite A′T′ homologue de AT. Si AT coupe Δ en J, il en est de même de A′T′.

On vérifie analytiquement que si la courbe (C) a pour équation $y = f(x)$, la courbe (C′) a pour équation $y = kf(x)$ (n° 326). La tangente AT a pour coefficient directeur $f'(x)$ et la tangente A′T′ pour coefficient directeur $kf'(x)$, ce qui montre (n° 329) que les deux tangentes sont homologues dans l'affinité et se coupent sur Δ.

Pour construire la courbe (C′), connaissant (C), on peut alors construire autant de points qu'il est utile en associant à chaque point A′ la tangente A′T′ homologue de AT. On obtient ainsi une construction de (C′) par *points* et *tangentes*.

333. Corollaire. — ***Lorsque deux courbes*** (C) ***et*** (C_1) ***sont tangentes en*** A, ***leurs transformées*** (C′) ***et*** (C'_1) ***sont tangentes en*** A′ ***homologue de*** A.

Si les courbes (C) et (C_1) admettent en A la même tangente AT, leurs transformées (C′) et (C'_1) admettent en A′, homologue de A, la même tangente A′T′, transformée de AT. Les courbes (C′) et (C'_1) sont tangentes en A′. On traduit ceci en disant que *l'affinité conserve les contacts.*

334. Affinité orthogonale. — Une affinité $\mathcal{A}$ (Δ, δ, k) est orthogonale lorsque la direction δ de cette affinité est perpendiculaire à son axe Δ. Une telle affinité est notée $\mathcal{A}$ (Δ, k). Désignons par θ et θ' les angles (Δ, D) et (Δ, D') formé avec Δ par deux droites homologues D et D′ (fig. 277) :

$$\overrightarrow{\alpha A'} = k\overrightarrow{\alpha A} \Longrightarrow \frac{\overline{\alpha A'}}{\overline{I\alpha}} = k\frac{\overline{\alpha A}}{\overline{I\alpha}} \Longrightarrow \operatorname{tg}\theta' = k \operatorname{tg}\theta.$$

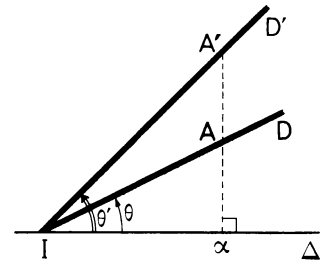


Fig. 277

Montrons la relation qui existe entre la projection orthogonale sur un plan d'une figure plane F et sa transformée par affinité orthogonale.

Considérons deux plans P et Q dont l'intersection est la droite Δ (fig. 278) et désignons par α l'un des dièdres orientés $(P, \overrightarrow{\Delta}, Q)$. Tout axe $\overrightarrow{\mu z}$ du plan P, perpendiculaire en μ à Δ, a pour homologue, dans la rotation $R(\Delta, \alpha)$, un axe $\overrightarrow{\mu z_1}$ du plan Q, perpendiculaire en μ à Δ. Tout point M de $\overrightarrow{\mu z}$ se projette orthogonalement sur le plan Q en un point M′ de $\overrightarrow{\mu z_1}$ et a pour homologue le point M_1 de μz_1 dans la rotation $R(\Delta, \alpha)$. On obtient : $\overline{\mu M'} = \overline{\mu M}\cos\alpha$ et $\overline{\mu M_1} = \overline{\mu M} \Longrightarrow \overline{\mu M'} = \overline{\mu M_1}\cos\alpha$.

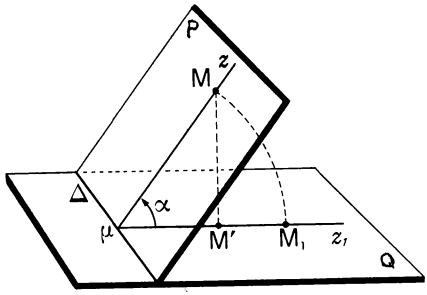


Fig. 278

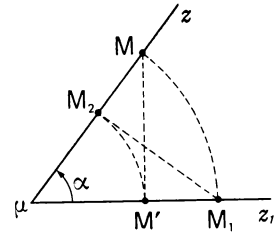


Fig. 279

Dans le plan Q, le point M′ est donc l'homologue de M_1 dans l'affinité orthogonale $\mathcal{A}(\Delta, \cos\alpha)$.

La projection orthogonale $\pi(P/Q)$ ***du plan*** P ***sur le plan*** Q ***est donc le produit de la rotation*** $R(\Delta, \alpha)$ ***qui transforme*** P ***en*** Q, ***par l'affinité orthogonale*** $\mathcal{A}(\Delta, \cos\alpha)$.

$$\pi(P/Q) = \mathcal{A}(\Delta, \cos\alpha) \circ R(\Delta, \alpha).$$

Inversement toute affinité orthogonale (Δ, k) du plan Q transformant M_1 en M′ et telle que $|k| < 1$ peut s'obtenir en transformant le plan Q en P par une rotation d'axe Δ et d'angle $-\alpha$ tel que $\cos\alpha = k$ et en projetant orthogonalement le plan P sur le plan Q car : $\mathcal{A}(\Delta, \cos\alpha) = \pi(P/Q) \circ R(\Delta, -\alpha)$.

On peut aussi (fig. 279) projeter le plan Q sur le plan P, puis transformer P en Q par la rotation $R(\Delta, \alpha)$ car : $\mathcal{A}(\Delta, \cos\alpha) = R(\Delta, \alpha) \circ \pi(P/Q)$.

On voit donc finalement que :

La projection orthogonale F′ *de toute figure plane* F *du plan* P *sur le plan* Q *est égale à sa transformée dans une affinité orthogonale dont le rapport est le cosinus de l'angle des plans* P *et* Q.

GÉNÉRALITÉS SUR L'INVERSION

335. Définition. — Étant donnés un point fixe O et un nombre réel non nul k :

On appelle inversion la transformation ponctuelle qui, à tout point M ***du plan ou de l'espace, fait correspondre le point*** M′ ***de la droite*** OM ***tel que*** $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$.

Le point O est appelé *pôle* ou centre de l'inversion (O, k). Le nombre k est le *module* ou la *puissance* de cette inversion qui est dite positive ou négative suivant que k est positif (fig. 280) ou négatif (fig. 281).

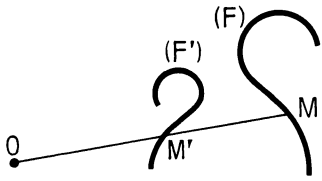


Fig. 280

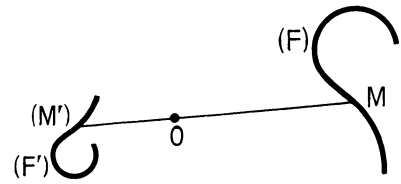


Fig. 281

L'homologue de M′ est le point M. La transformation est donc involutive et les deux points M et M′ sont dits *inverses* l'un de l'autre. De même deux figures F et F′ homologues dans l'inversion sont dites inverses par rapport à O.

Lorsque le point M décrit une droite ou un plan passant par O il en est de même de M′ : *Toute droite et tout plan passant par le pôle* O *sont globalement invariants.*

Si le point M′ s'éloigne à l'infini sur la droite Ox le point M vient en O. Pour qu'à un point donné ne corresponde qu'un seul transformé nous conviendrons, dans cette étude, de dire que l'inverse du centre O d'une inversion est un point unique appelé point à l'infini.

336. Cercle et sphère d'inversion. — Pour qu'un point P soit invariant dans l'inversion (O, k) il faut et il suffit que $\overline{OP}^2 = k$. Ceci n'est possible que si k est positif et alors $OP = \sqrt{k}$. Donc :

1° ***Le lieu des points doubles d'une inversion positive*** (O, k) ***est le cercle*** $O(\sqrt{k})$ ***dans le plan, la sphère*** $O(\sqrt{k})$ ***dans l'espace que l'on nomme respectivement cercle et sphère d'inversion.***

En désignant par R le rayon $\sqrt{k}$ de ce cercle (fig. 282) ou de cette sphère (Γ) on voit que deux points homologues quelconques M et M′ sont tels que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = R^2$. Les points M et M′ divisent harmoniquement un diamètre de (Γ) et l'un d'eux est le pied de la polaire (ou du plan polaire) de l'autre par rapport à (Γ). *On dit que* M *et* M′ *sont inverses par rapport à* (Γ).

2° Si l'inversion est négative il n'y a pas de point double.

337. Théorème. — ***Tout cercle passant par deux points homologues distincts*** A ***et*** A′ ***d'une inversion est globalement invariant dans cette inversion.***

Soit M un point variable sur le cercle ω passant par A et A′ (fig. 282 et 283). La droite OM recoupe le cercle ω en un point M′ tel que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = k$.

Le point M′ est donc l'homologue de M dans l'inversion envisagée et décrit le cercle ω en même temps que M. On obtient ainsi une construction simple de M′ à partir de O, A et A′.

338. Remarques. — 1° Pour qu'un cercle (ω) soit invariant dans l'inversion (O, k) il suffit que son plan passe par O et que $\omega(O) = \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$. Donc si $k = R^2$ le

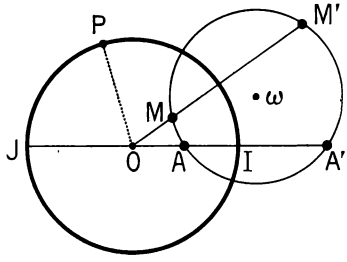


Fig. 282

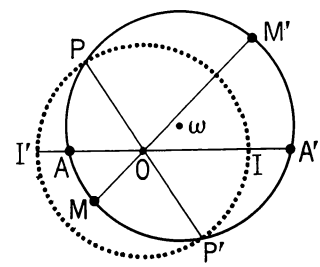


Fig. 283

cercle ω est orthogonal au cercle (ou à la sphère) d'inversion O(R) (fig. 282). Si $k = -R^2$ le cercle ω coupe diamétralement le cercle (ou la sphère) O(R) (fig. 283).

2° Toute sphère passant par A et A′ est de même globalement invariante dans l'inversion (O, k) et deux cercles invariants passant par A et A′ appartiennent à un même plan invariant ou à une même sphère invariante.

339. Propriété fondamentale. — *Dans toute inversion, deux couples de points homologues distincts non alignés appartiennent à un même cercle.*

Si les points O, A, B ne sont pas alignés, la relation $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = k$ montre (fig. 284) que les quatre points A, A′, B, B′ appartiennent à un même cercle

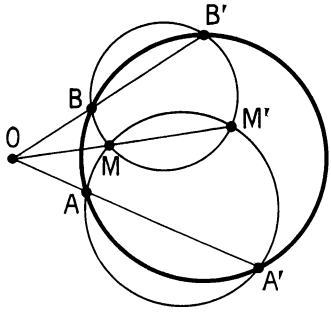


Fig. 284

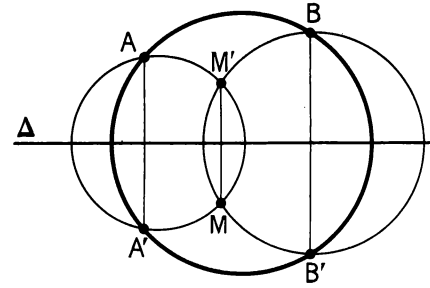


Fig. 285

du plan OAB, globalement invariant dans l'inversion considérée (O, k). Il en résulte que le transformé M′ de tout point M appartient aux deux cercles coplanaires ou cosphériques AA′M et BB′M. C'est donc leur second point commun.

340. Réciproque. — *Toute transformation ponctuelle dans laquelle deux couples quelconques de points homologues distincts appartiennent à une même droite ou à un même cercle est en général une inversion, éventuellement une symétrie-plan dans l'espace ou une symétrie axiale dans le plan.*

Désignons par (A, A′) et (B, B′) deux couples fixes d'un même cercle et par (M, M′) un couple quelconque de points homologues. Les points AA′BB′ sont dans un même plan et par hypothèse les deux cercles AA′M et BB′M se recoupent en M′ (l'un de ces deux cercles pouvant se réduire à une droite).

1° Si les droites AA′ en BB′ sont concourantes en O (fig. 284), on obtient :

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = k \neq 0.$$

L'inversion (O, k) transforme A en A′, B et B′ et transforme M en le second point commun aux cercles AA′M et BB′M, c'est-à-dire en M′. La transformation envisagée est donc l'inversion (O, k).

2° Si AA′ et BB′ sont parallèles (fig. 285) les points A et A′, B et B′ sont symétriques par rapport au plan (π) médiateur des segments AA′ et BB′. Il en est de même des cercles AA′M et BB′M, donc de M et M′. La transformation envisagée est alors la symétrie par rapport au plan (π) dans l'espace. Elle se réduit à une symétrie-droite Δ dans le plan AA′BB′.

Nous considérerons cette symétrie comme le cas limite d'une inversion positive dont le pôle est rejeté à l'infini, la sphère (ou le cercle) d'inversion ayant pour limite le plan (ou l'axe) de cette symétrie.

341. Théorème. — ***Toute inversion est déterminée par deux couples de points homologues distincts situés sur une même droite ou sur un même cercle.***

Si les deux couples donnés A, A′ et B, B′ appartiennent à un même cercle, le pôle O de l'inversion est le point de rencontre de AA′ et BB′ et sa puissance k est égale à $\overline{OA} \cdot \overline{OA'}$ ou $\overline{OB} \cdot \overline{OB'}$.

Si les deux couples appartiennent à une même droite, le pôle O est le point de cette droite tel que $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$. Il se trouve sur l'axe radical de deux cercles sécants l'un passant par A et A′ l'autre par B et B′. C'est d'ailleurs le centre d'homothétie des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{B'A'}$.

Dans les deux cas si les segments AA′ et BB′ ont même plan médiateur l'inversion dégénère en une symétrie-plan (ou une symétrie axiale).

342. Produit de deux inversions de même pôle. — L'inversion $I_1(O, k_1)$ transforme le point M en M_1 et l'inversion $I_2(O, k_2)$ transforme M_1 en M_2 (fig. 286). Les points O, M, M_1, M_2 sont alignés et :

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM_1} = k_1 ; \quad \overline{OM_1} \cdot \overline{OM_2} = k_2 \implies \frac{\overline{OM_2}}{\overline{OM}} = \frac{k_2}{k_1} \implies \overrightarrow{OM_2} = \frac{k_2}{k_1}\overrightarrow{OM}.$$

Donc :

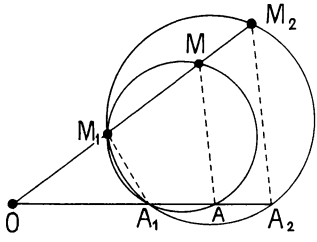


Fig. 286

Le produit de deux inversions (O, k_1) ***et*** (O, k_2) ***est l'homothétie*** $\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right)$.

$$I_2(O, k_2) \circ I_1(O, k_1) = H\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right).$$

De même : $I_1(O, k_1) \circ I_2(O, k_2) = H\left(O, \frac{k_1}{k_2}\right)$.

Il en résulte que l'ensemble des inversions n'a pas une structure de groupe pour l'opération produit.

343. Produit d'une inversion et d'une homothétie de même centre. — L'inversion $I_1(O, k_1)$ transforme M_1 en M (fig. 286) et l'homothétie $\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right)$ transforme M en M_2. Donc :

L'inversion (O, k_2) ***est le produit de l'inversion*** (O, k_1) ***par l'homothétie*** $\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right)$.

$$I_2(O, k_2) = H\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right) \circ I_1(O, k_1).$$

De même : $I_1(O, k_1) = H\left(O, \frac{k_1}{k_2}\right) \circ I_2(O, k_2)$.

En particulier :

Toute inversion négative $(O, -k)$ *est équivalente au produit commutatif de l'inversion positive* (O, k) *par la symétrie-point de centre* O.

$$I(O, -k) = S(O) \circ I(O, k) = I(O, k) \circ S(O).$$

344. Relations métriques dans l'inversion. — 1° Soient (fig. 287) deux couples de points cocycliques A, A′ et B, B′, homologues dans l'inversion (O, k). Les triangles OAB et OB′A′ sont inversement semblables. Donc :

$$\frac{A'B'}{BA} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OA \cdot OA'}{OA \cdot OB} = \frac{|k|}{OA \cdot OB}$$

$$\Longrightarrow \boxed{A'B' = \frac{|k|\, AB}{OA \cdot OB}} \qquad (1)$$

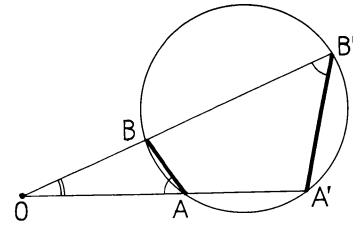


Fig. 287

2° Cette relation est valable si les points O, A, A′, B, B′ sont alignés. La relation $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$ permet d'écrire :

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'} - \overline{OB'}}{\overline{OB} - \overline{OA}} = -\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OA'}}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}} = \frac{k}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}.$$

D'où la relation algébrique plus précise : $\overline{A'B'} = -\dfrac{k\,\overline{AB}}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}$. (2)

3° Si M et M′ sont homologues dans l'inversion (ω, k) on peut écrire :

$$\frac{\overrightarrow{\omega M'}}{\overrightarrow{\omega M}} = \frac{\overline{\omega M'}}{\overline{\omega M}} = \frac{\overline{\omega M} \cdot \overline{\omega M'}}{\overline{\omega M^2}} = \frac{k}{\overline{\omega M^2}} \Longrightarrow \overrightarrow{\omega M'} = \frac{k}{\overline{\omega M^2}}\,\overrightarrow{\omega M}. \qquad (3)$$

Cette relation permet de déterminer les coordonnées de M′ connaissant celles du pôle d'inversion ω et celles du point M.

345. Tangentes aux courbes inverses d'un plan. — 1° ***Lorsqu'une courbe*** (γ) ***admet une tangente en*** A, ***sa transformée par inversion*** (γ') ***admet une tangente au point*** A′ ***homologue de*** A.

2° ***Les tangentes à deux courbes inverses*** (γ) ***et*** (γ') ***en deux points homologues*** A ***et*** A′ ***sont symétriques par rapport à la médiatrice du segment*** AA′.

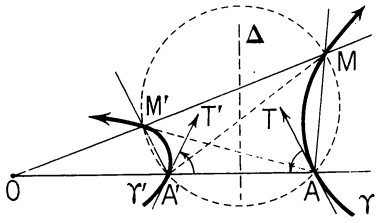


Fig. 288

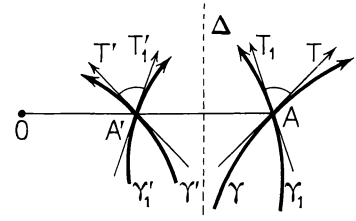


Fig. 289

Désignons (fig. 288) par A et M deux points de la courbe (γ), par A′ et M′ leurs

homologues de la courbe (γ') transformée de la courbe (γ) dans l'inversion (O, k). Les quatre points A, A′, M, M′ sont sur un même cercle et (à $k\pi$ près) :

$$(AM, AM') = (A'M, A'M').$$

Lorsque le point M, se déplaçant sur la courbe (γ) vient se confondre avec le point A, le point M′ se déplace sur la courbe (γ') et vient se confondre avec le point A′. Dans ces conditions la droite AM a, par hypothèse, pour position limite la tangente AT à la courbe (γ). L'angle (AM, AM′) a pour limite l'angle (AT, AA′). Son égal (A′M, A′M′) a donc une limite (A′A, A′T′) égale à (AT, AA′). Ceci montre que la sécante A′M′ admet une position limite A′T′ qui est, par définition, la tangente en A′ à la courbe (γ'). De l'égalité (AA′, A′T′) = (AT, AA′) = — (AA′, AT) il résulte que les tangentes AT et A′T′ sont symétriques par rapport à la médiatrice Δ de AA′.

346. Théorème. — ***L'angle de deux courbes*** γ ***et*** γ_1, ***en un point commun*** A ***est égal à l'angle de leurs inverses*** γ' ***et*** γ'_1 ***au point*** A′ ***homologue de*** A.

Soient AT et AT_1 les tangentes aux courbes γ et γ_1 se coupant en A (fig. 289). Les courbes inverses, γ' et γ'_1 admettent, au point A′ homologue de A, des tangentes A′T′ et $A'T'_1$ respectivement symétriques de AT et AT_1 par rapport à la médiatrice Δ de AA′. Les angles (AT, AT_1) et $(A'T', A'T'_1)$ sont donc opposés.

Si les courbes γ et γ_1 sont orientées (fig. 289) les angles $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT_1})$ et $(\overrightarrow{A'T'}, \overrightarrow{A'T'_1})$ sont également opposés. Ils se correspondent en effet dans la symétrie droite d'axe Δ si l'inversion est positive, dans le produit d'une symétrie-droite et d'une symétrie-point si l'inversion est négative (n° 343).

On exprime cette propriété en disant que l'*inversion conserve les angles*. En particulier, à deux courbes tangentes en A correspondent deux courbes tangentes en A′ : *l'inversion conserve les contacts*. A deux courbes orthogonales en A correspondent deux courbes orthogonales en A′.

Si A et A′ sont deux points homologues sur deux courbes inverses γ et γ', tout cercle invariant ω passant par A et A′ coupe ces deux courbes sous le même angle. S'il est tangent à l'une, il est tangent à l'autre. S'il est orthogonal à l'une il est orthogonal à l'autre.

Dans une inversion positive le cercle d'inversion Γ fait en un point A des angles égaux avec deux courbes inverses γ et γ' passant par A.

EXERCICES

466. Déterminer une affinité orthogonale d'axe donné Δ transformant deux droites données D_1 et D_2 en deux droites D'_1 et D'_2 rectangulaires ou faisant un angle donné $(D_1, D_2) = \theta + k\pi$.

467. Trouver une affinité d'axe donné Δ transformant les droites D_1 et D_2 en deux droites de directions données.

468. Démontrer que l'on peut toujours par une affinité orthogonale transformer un faisceau harmonique en un faisceau de deux droites et de leurs deux bissectrices.

469. Trouver les affinités d'axe donné Δ transformant un faisceau harmonique en un faisceau de quatre droites deux à deux rectangulaires.

470. Montrer qu'il existe en général une affinité d'axe BC transformant un triangle ABC en un triangle A′BC directement semblable à un triangle donné $\alpha\beta\gamma$.

471. 1° Démontrer que le produit de l'affinité $\mathcal{A}$ (Δ, δ, k) et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{T}$ parallèle à Δ est commutatif.

2° Utiliser cette propriété pour montrer que l'affinité $\mathcal{A}$ transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles.

472. On considère les deux affinités $\mathfrak{A}(\Delta_1, \delta, k)$ et $\mathfrak{A}(\Delta_2, \delta, k)$ d'axes parallèles, de même direction et de même rapport. La première transforme M en M_1 et la seconde M en M_2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est constant. En déduire que le produit $\mathfrak{A}(\Delta_2, \delta, k) \circ \mathfrak{A}\left(\Delta_1, \delta, \frac{1}{k}\right)$ est une translation.

473. *Affinité généralisée.* — Soit $\mathfrak{A}$ l'affinité d'axe Δ définie par le point A et son transformé A'. On désigne par a la projection orthogonale de A sur Δ.

1° Montrer que l'homologue M' de tout point M du plan se projetant orthogonalement en m sur Δ est défini par la condition : *le triangle mMM' est directement semblable au triangle aAA'.*

2° Étudier le cas où l'angle aAA' est droit. La transformation $\mathfrak{T}$ ainsi définie, possède les mêmes propriétés que l'affinité et transforme une droite en une droite, avec conservation des rapports. La règle d'homologie s'applique en prenant MM' parallèle à Δ.

3° Démontrer que le produit de deux symétries obliques de même axe Δ est une transformation $\mathfrak{T}$ Établir la réciproque.

474. Démontrer que le produit des affinités de même axe $\mathfrak{A}(\Delta, \delta_1, k_1)$ et $\mathfrak{A}(\Delta, \delta_2, k_2)$ est une affinité $\mathfrak{A}(\Delta, \delta, k_1k_2)$ pour $k_1k_2 \neq +1$, une affinité généralisée pour $k_1k_2 = 1$ (cf. ex. n° 473).

475. On considère deux affinités d'axes Δ_1 et Δ_2 concourants en O, de même direction δ et de rapports respectifs k_1 et k_2. On suppose $k_1k_2 \neq 1$.

1° Démontrer que sur toute parallèle à δ coupant Δ_1 et Δ_2 en ω_1 et ω_2, le produit T des deux affinités se réduit au produit des homothéties $H(\omega_2, k_2) \circ H(\omega_1, k_1)$, donc à une homothétie H (ω, k_1k_2).

2° Démontrer que le lieu du centre ω est une droite Δ, issue de O et que le produit T des deux affinités est l'affinité $\mathfrak{A}(\Delta, \delta, k_1k_2)$.

476. Reprendre l'étude précédente :

1° pour Δ_1 et Δ_2 concourants et $k_1k_2 = 1$. Le produit T est une affinité généralisée (ex. n° 473).

2° pour Δ_1 et Δ_2 parallèles et $k_1k_2 \neq 1$, puis pour $k_1k_2 = 1$ (cf. ex. n° 472).

477. Démontrer que le produit $\pi_2 \circ \pi_1$ des projections orthogonales du plan P sur le plan Q et du plan Q sur le plan P est, dans le plan P, une affinité orthogonale $(\Delta, \cos^2\alpha)$ dont l'axe Δ est l'intersection de P et Q et où α désigne l'angle des deux plans.

478. Soit Δ l'intersection de deux plans P et Q. On désigne par $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ les projections de P sur Q et de Q sur P effectuées parallèlement à δ_1 et δ_2 respectivement.

1° Si les trois directions Δ, δ_1, δ_2 ne sont pas coplanaires, un plan parallèle à δ_1 et δ_2 coupe le plan P suivant une direction δ et le produit $\mathfrak{P}_2 \circ \mathfrak{P}_1$ est, dans le plan P, une affinité d'axe Δ et de direction δ.

2° Étudier le cas où les trois directions Δ, δ_1 et δ_2 sont coplanaires. Le produit $\mathfrak{P}_2 \circ \mathfrak{P}_1$ définit alors une affinité généralisée d'axe Δ (cf. ex. n° 473).

479. 1° Démontrer qu'une affinité est déterminée quand on se donne deux couples de points homologues (A, A') et (B, B') tels que $\overrightarrow{AA'}$ soit parallèle à $\overrightarrow{BB'}$ et en outre soit le rapport de l'affinité, soit pour $\overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{BB'}$ la direction de l'axe Δ. Étudier le cas où l'affinité est orthogonale.

2° Démontrer qu'une affinité est en général déterminée par la donnée de trois couples de points homologues (A, A'), (B, B') et (C, C') tels que les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ soient parallèles.

480. On donne dans le plan deux segments OA et OB inégaux et non perpendiculaires. La rotation $R\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ transforme A en A_1 et la rotation $R\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$ transforme B en B_1. Le cercle de centre I, milieu de AB_1, passant par O, coupe la droite AB_1 en P et Q. Les deux droites rectangulaires OP et OQ coupent respectivement la droite A_1B en P_1 et Q_1.

1° Montrer que la division $Q_1A_1BP_1$ est homologue de PAB_1Q dans la rotation $R\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$. En déduire que les segments AQ et BQ_1 sont égaux et perpendiculaires et qu'il en est de même de AP et BP_1.

2° On construit $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{QA}$ et $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{Q_1B}$. Démontrer que A' et B' sont homologues de A et B dans l'affinité orthogonale d'axe OP et de rapport $k = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}$.

3° En déduire que l'on peut, de deux manières différentes, transformer par affinité orthogonale un parallélogramme ABCD de centre O en un carré A'B'C'D' de même centre, ou un faisceau harmonique de sommet O en un faisceau harmonique de quatre droites deux à deux rectangulaires de même sommet O.

481. On appelle *transformation affine plane* (T) toute transformation bijective dans le plan, dans laquelle toute division rectiligne a pour homologue une division rectiligne semblable et réciproquement. Un produit de similitudes et d'affinités dans le plan est une transformation affine.

1° Soit A'B'C' le transformé du triangle ABC dans la transformation affine (T). Démontrer que M

barycentre du système $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ a pour homologue le point M′ barycentre de $A'(\alpha)$, $B'(\beta)$, $C'(\gamma)$. En déduire qu'une transformation affine plane est définie par la donnée des homologues de trois points non alignés.

2° On considère la similitude directe (S) qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$ et C en C_1. Si C_1C' n'est pas parallèle à A′B′, on désigne par $(\mathcal{A})$ l'affinité d'axe A′B′ qui transforme C_1 en C′. En déduire que $(T) = (\mathcal{A}) \circ (S)$.

3° Si C_1C' est parallèle à A′B′ les triangles A′B′C′ et A′B′C_1 sont équivalents. On peut alors échanger C avec l'un des points A ou B de façon à modifier le rapport de la similitude (S) à moins que C_1 et C′ soient confondus, ce qui entraîne (T) = (S).

Établir que les transformations affines planes constituent un groupe de transformations admettant pour sous-groupe le groupe des similitudes.

482. *Triangles homologiques.* — Soient deux triangles ABC et A′B′C′ d'un même plan. Les côtés BC et B′C′, CA et C′A′, AB et A′B′ se coupent respectivement en α, β et γ.

Démontrer que si les trois droites AA′, BB′ et CC′ sont concourantes en O (ou parallèles) les trois points α, β, γ sont alignés sur une droite Δ et réciproquement. Le point O peut-il être situé sur Δ ?

483. On se donne une droite Δ, un point extérieur O et un rapport k. A tout point M du plan (O, Δ) on associe le point M′ de la droite OM qui coupe Δ en μ, tel que $\dfrac{\overline{M'O}}{\overline{M'\mu}} = k\,\dfrac{\overline{MO}}{\overline{M\mu}}$ [*homologie* (O, Δ, k)].

1° Montrer que dans cette transformation toute droite d a pour homologue une droite d' et que les trois droites d, d' et Δ sont concourantes ou parallèles. En déduire une construction à la règle de M′ connaissant M et un couple de points homologues A et A′ alignés avec O (applicable même si O est sur Δ).

2° Soient H, H′ et K les projections de M, M′ et O sur Δ. Démontrer que MH′ et M′H passent par deux points fixes I et J′ de OK symétriques par rapport au milieu de OK.

484. On considère un point A et une droite (D). On désigne par (D′) la parallèle à (D) menée par A, par Δ la parallèle à (D) et (D′) équidistante de ces deux droites. A tout point M du plan on fait correspondre le point M′ de AM conjugué harmonique de M par rapport à A et au point d'intersection de AM et (D).

1° Montrer que lorsque M décrit une droite (δ), M′ décrit une droite (δ') qu'on appellera homologue de (δ). Montrer qu'en général (δ) et (δ') coupent (D′) en deux points symétriques par rapport à A. Cas de (δ) parallèle à (D).

2° Étudier les homologues de deux droites (δ) parallèles, de deux droites (δ) se coupant sur Δ.

3° Montrer que trois points dont l'un est le milieu du segment formé par les deux autres ont pour homologues trois points formant une division harmonique avec le point d'intersection de la droite qui les porte et de Δ.

485. Soient A′ et M′ les inverses de A et M dans l'inversion (O, k), démontrer les relations :

$$A'M' = \frac{k\,AM}{OA \cdot OM}; \qquad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{A'M'}) = -(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MA}) \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{M'A'}) = -(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}).$$

486. Soient A′, B′, M′ les homologues des points A, B, M du plan dans l'inversion (O, k) :

1° Démontrer que $(\overrightarrow{M'A'}, \overrightarrow{M'B'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$. En déduire le lieu de M′ lorsque M décrit la droite AB, le cercle OAB ou un arc de cercle d'extrémités A et B.

2° Démontrer que $\dfrac{M'A'}{M'B'} = \dfrac{MA}{MB} : \dfrac{OA}{OB}$. En déduire le lieu de M′ lorsque M décrit la médiatrice de AB ou un cercle du faisceau de points limites A et B.

487. On considère quatre points A, B, C, D du plan et leurs homologues A′, B′, C′, D′ dans l'inversion (O, k). Démontrer que :

$$\frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'}) - (\overrightarrow{D'A'}, \overrightarrow{D'B'}) = -[(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})].$$

488. Dans le plan complexe, on désigne par [ABCD] le birapport complexe des points A, B, C, D d'affixes respectifs a, b, c, d : $[ABCD] = \dfrac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \dfrac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = \dfrac{c-a}{c-b} : \dfrac{d-a}{d-b}$.

1° Déterminer le module de [ABCD] en fonction des longueurs CA, CB, DA, DB et son argument en fonction des angles $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ ou de l'angle en A, des arcs $\overset{\frown}{ACB}$ et $\overset{\frown}{ADB}$. Quelle est la disposition des points ABCD lorsque [ABCD] est réel, imaginaire pur ou égal à -1 ?

2° Soient A′, B′, C′, D′ les homologues de A, B, C, D dans l'inversion (O, k). En utilisant les résultats de l'exercice précédent démontrer que [A′B′C′D′] et [ABCD] sont deux nombres complexes conjugués.

489. Soient quatre points A, B, C, D sur un axe d'origine O. A partir des relations de Chasles et de Stewart, établir par inversion les relations suivantes:

1° $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0.$

2° $\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} - \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DB} + \overline{CD} \cdot \overline{DA} \cdot \overline{AC} - \overline{DA} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BD} = 0.$

490. On désigne par H le pied de la polaire Δ du point P par rapport au cercle O(R) et par M un point variable de cette polaire. Les droites MO et MP recoupent en M′ et M″ le cercle de diamètre OP.

1° Montrer que les quadrilatères PHMM′ et OHMM″ sont inscriptibles. Établir que :

$$OM \cdot OM' = R^2 \qquad \text{et} \qquad PM \cdot PM'' = OP^2 - R^2.$$

2° En déduire que la polaire du point P par rapport au cercle O(R) est l'homologue du cercle de diamètre OP dans l'inversion (O, R^2) ou dans l'inversion $(P, PO^2 - R^2)$. C'est aussi l'homologue du cercle de centre P, passant par O, dans l'inversion $(O, 2R^2)$.

491. On donne un cercle O(R) et un point M. Le cercle de centre M passant par O coupe le cercle O en A et B. Les cercles de centres A et B passant par O se recoupent en M′. Démontrer que M′ est l'homologue de M dans l'inversion (O, R^2).

492. On considère un cercle de centre ω et de rayon R. Soit O un point extérieur.

1° Quel est le transformé du cercle (ω) dans l'inversion de pôle O et de puissance $\mathcal{P} = O\omega^2 - R^2$? Montrer que l'homologue du point ω est le pied H de la polaire de O par rapport au cercle (ω).

2° L'homothétie (O, k) transforme le cercle (ω) en un cercle (ω'). Montrer que les cercles (ω) et (ω') sont homologues dans l'inversion $(O, k, \mathcal{P})$.

493. *Produit de deux inversions.* — On considère dans le plan le produit (T) de l'inversion (O, k) qui transforme M en M_1 par l'inversion (O', k') qui transforme M_1 en M′.

1° Montrer que le cercle ω passant par M, M_1 et M′ est invariant dans (T) et appartient à un faisceau de cercles (Φ) d'axe radical OO′ dont on déterminera la droite des centres Δ. Démontrer que (T) admet deux points doubles, points de base ou points limites du faisceau (Φ).

2° Soient MN′ et M′N les cordes du cercle ω parallèles à OO′. Les droites MN et M′N′ coupent OO′ en I et J′. Montrer que les quadrangles $MM_1O'I$ et $M'M_1OJ'$ sont inscriptibles et que les points I et J′ sont fixes. Comparer les triangles IOM et J′M′O′.

3° Soit $\mathcal{P}$ la puissance de I et de J′ par rapport aux cercles ω. Démontrer que (T) est le produit de l'inversion $(I, \mathcal{P})$ par la symétrie axiale Δ ou le produit de la symétrie Δ par l'inversion $(J', \mathcal{P})$.

494. Déduire de l'exercice précédent (3°) que dans le plan :

1° Un produit d'inversions en nombre impair est équivalent au produit d'un déplacement par une inversion ou à une similitude inverse.

2° Un produit d'inversions en nombre pair est équivalent au produit d'un antidéplacement par une inversion ou à une similitude directe.

INVERSION DANS LE PLAN

347. Inverse d'une droite. — Si une droite Δ passe par le centre d'inversion O elle est globalement invariante (n° 335). Ce cas écarté montrons que :

L'inverse d'une droite ne passant pas par le pôle d'inversion est un cercle passant par ce pôle.

Désignons par H la projection du pôle d'inversion O sur la droite donnée Δ (fig. 290 et 291) par A son homologue dans l'inversion (O, k) et par M un point variable de la

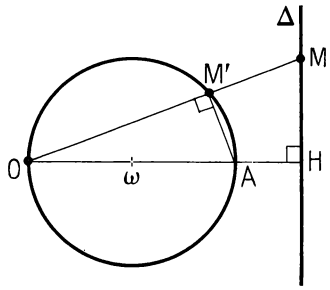


Fig. 290

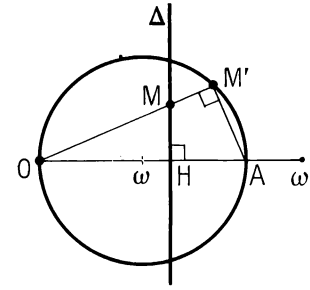


Fig. 291

droite Δ. Pour que le point M′ de la droite OM soit le transformé de M il faut et il suffit (n° 339) que les quatre points A, H, M, M′ soient cocycliques, donc que :

$$(M'A,\ M'M) = (HA,\ HM) \iff (M'A,\ M'O) = \frac{\pi}{2}.$$

Le lieu du point M′ est donc (n° 56) le cercle ω de diamètre OA.

348. Inverse d'un cercle passant par le pôle d'inversion. — La transformation étant involutive, l'inverse du cercle de diamètre OA est la droite Δ perpendiculaire à OA au point H, homologue de A dans l'inversion (O, k) envisagée.

L'inverse d'un cercle passant par le pôle d'inversion est une droite perpendiculaire au diamètre issu de ce pôle.

L'inverse ω′ du centre du cercle ω est le point de la droite OA tel que :

$$\overline{O\omega'}.\overline{O\omega} = \overline{OA}.\overline{OH} = 2\,\overline{O\omega}.\overline{OH} \implies \overline{O\omega'} = 2\,\overline{OH}.$$

Le point ω′ est donc le symétrique du pôle d'inversion O par rapport à la droite Δ (fig. 291).

349. Théorème. — ***Un cercle et une droite se correspondent en général dans deux inversions, dans une seule lorsque la droite est tangente au cercle.***

Si un cercle de centre O et une droite Δ se correspondent dans une inversion (fig. 292

et 293), le pôle de celle-ci ne peut être que l'une des extrémités du diamètre IJ de ce cercle, perpendiculaire en H à la droite Δ. Si H est distinct de I et de J, les deux inversions $(I, \overline{IJ}.\overline{IH})$ et $(J, \overline{JI}.\overline{JH})$ échangent effectivement la droite Δ et le cercle de diamètre IJ. Si le point H est en J (fig. 294), c'est dire si Δ est tangente au cercle O, l'inversion de centre J disparaît.

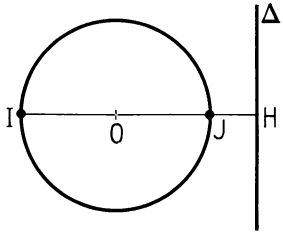


Fig. 292

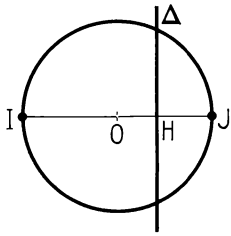


Fig. 293

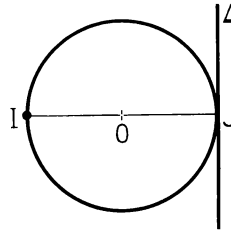


Fig. 294

Notons que les deux inversions I et J sont positives si la droite Δ coupe le cercle O, (fig. 293) l'une est positive, l'autre négative si Δ est extérieure au cercle O (fig. 292). Enfin l'inversion $(I, \overline{IJ}^2)$ est positive lorsque Δ est tangente en J au cercle O.

350. Inverse d'un cercle quelconque. — Soit à déterminer (fig. 295) le transformé, dans l'inversion (O, k) du cercle ω(R) ne passant pas par O. Désignons par $\mathcal{P}$ la puissance non nulle du point O par rapport au cercle ω. L'inversion (O, k) est équivalente (n° 343) au produit de l'inversion $(O, \mathcal{P})$ qui laisse le cercle ω invariant, par l'homothétie $\left(O, \frac{k}{\mathcal{P}}\right)$ qui transforme le cercle ω en un cercle ω′ de rayon $R' = \left|\frac{k}{\mathcal{P}}\right| R$:

L'inverse d'un cercle ne passant pas par le pôle d'inversion est un cercle analogue. Le pôle d'inversion est un centre d'homothétie des deux cercles.

On vérifie d'ailleurs, en désignant par M et M′ deux points homologues des cercles ω et ω′ et par M_1 le point où la droite OMM′ recoupe le cercle ω, que les relations $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$ et $\overline{OM}.\overline{OM_1} = \mathcal{P}$ entraînent :

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM_1}} = \frac{k}{\mathcal{P}} \iff \overrightarrow{OM'} = \frac{k}{\mathcal{P}}\overrightarrow{OM_1}.$$

Le cercle ω′ est donc l'homologue dans l'homothétie $\left(O, \frac{k}{\mathcal{P}}\right)$ du cercle ω.

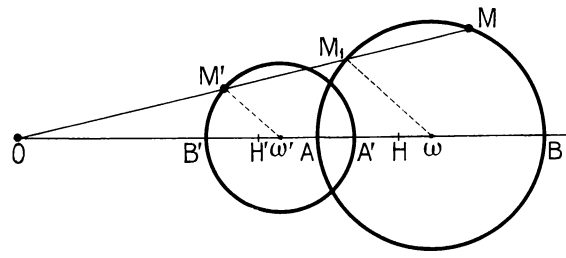


Fig. 295

Il résulte d'autre part de cette homothétie que $\frac{O\omega}{R} = \frac{O\omega'}{R'} \neq 1$. Le point O est donc soit intérieur, soit extérieur aux deux cercles.

351. Remarque. — Les centres ω et ω′ des deux cercles ne sont pas homologues dans l'inversion (O, k). L'inversion $(O, \mathcal{P})$ transforme le point ω en un point H tel que $\overline{O\omega}.\overline{OH} = \overline{OA}.\overline{OB}$, donc (n° 6) conjugué harmonique de O par rapport à A et B. L'homothétie $\left(O, \frac{k}{\mathcal{P}}\right)$ transforme H en H′ conjugué de O par rapport à A′ et B′, donc

pied de la polaire de O par rapport au cercle ω'. L'inversion étant involutive on peut dire que :

Lorsque deux cercles se correspondent dans une inversion l'homologue du centre de l'un est le pied de la polaire du pôle d'inversion par rapport à l'autre.

352. Théorème. — ***Deux cercles donnés se correspondent dans deux inversions s'ils ne sont pas tangents, dans une seule inversion lorsqu'ils sont tangents.***

Si une inversion fait correspondre deux cercles inégaux donnés O(R) et O′(R′) (fig. 296 et 297) elle admet pour pôle l'un des points I ou J, centres d'homothétie positif et négatif de ces deux cercles. Désignons par $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ les puissances respectives de I et de J par rapport au cercle O, par MM_1 une sécante variable au cercle O issue de I et par M′ le point du cercle O′ homologue du point M_1 dans l'homothétie de centre I :

$$\overline{IM}.\overline{IM_1} = \mathcal{P} \quad \text{et} \quad \overline{IM'} = \frac{R'}{R}\overline{IM_1} \implies \overline{IM}\,.\,\overline{IM'} = \mathcal{P}\frac{R'}{R}.$$

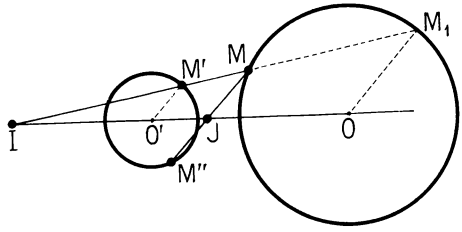


Fig. 296

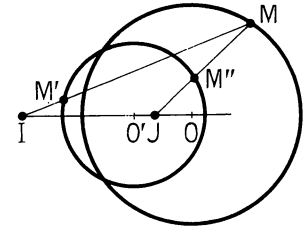


Fig. 297

L'inversion de pôle I et de puissance $k = \mathcal{P}\dfrac{R'}{R}$ transforme M en M′. Elle échange donc les cercles O et O′. Il en est de même de l'inversion de pôle J et de puissance $k_1 = -\mathcal{P}_1\dfrac{R'}{R}$. L'une de ces deux inversions disparaît lorsque $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{P}_1$ est nul, c'est-à-dire lorsque les cercles O et O′ sont tangents. Si les deux cercles O et O′ deviennent égaux, l'inversion (I, k) dégénère en la symétrie par rapport à la médiatrice de OO′.

353. Remarque. — Les deux inversions (I, k) et (J, k_1) sont respectivement du signe de $\mathcal{P}$ et de $-\mathcal{P}_1$:

1° Si les cercles O et O′ sont extérieurs, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ sont positifs dont k est positif et k_1 est négatif. Lorsque ces deux cercles deviennent tangents extérieurement seule subsiste l'inversion positive (I, k).

2° Si les cercles O et O′ sont sécants, $\mathcal{P}$ est positif, $\mathcal{P}_1$ est négatif. Les deux inversions I et J sont toutes deux positives.

3° Si les cercles O et O′ sont intérieurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ sont négatifs, dont k_1 est positif et k négatif. Lorsque ces deux cercles deviennent tangents intérieurement seule subsiste l'inversion positive (J, k_1).

Finalement l'une au moins, des inversions I ou J, est positive. Donc :

Deux cercles inégaux donnés admettent deux cercles d'inversion s'ils sont sécants, un seul dans les autres cas.

Si les deux cercles donnés O et O′ sont égaux leur axe de symétrie remplace un cercle d'inversion.

354. Points inverses sur deux cercles. — Un point M du cercle O et un point M′ du cercle O′ sont dits inverses sur ces deux cercles s'ils sont homologues dans une inversion échangeant les deux cercles.

Pour qu'il en soit ainsi (fig. 298) il faut et il suffit que la droite MM′ recoupe le cercle O en un point M_1 homologue de M′ dans une homothétie faisant correspondre le cercle O au cercle O′, donc tel que OM_1 et O′M′ soient parallèles. Le triangle OMM_1 étant isocèle, cette condition équivaut à la relation :
(MM′, OM) = — (MM′, O′M′)
ou, en désignant par ω le point commun aux tangentes MT et M′T′ aux cercles O et O′, à l'une des relations :

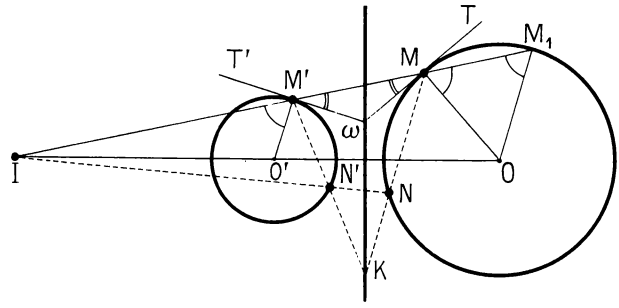


Fig. 298

$$(MM', MT) = -(MM', M'T') \iff \omega M = \omega M'.$$

Cette dernière montre que le point ω doit appartenir à l'axe radical des deux cercles (n° 71) :

Pour que deux points soient inverses sur deux cercles donnés il faut et il suffit que les tangentes en ces deux points se coupent sur l'axe radical de ces deux cercles.

D'autre part si M et M′, N et N′ sont deux couples de points inverses relatifs à la même inversion sur les cercles O et O′, les quatre points M, M′, N, N′, appartiennent à un même cercle (n° 339). Le point K, commun aux droites MN et M′N′ est le centre radical des cercles O, O′ et MNM′N′. Il appartient à l'axe radical des cercles O et O′.

Deux cordes dont les extrémités sont respectivement homologues dans une inversion échangeant deux cercles se coupent sur l'axe radical des deux cercles.

Il en résulte que si deux sécantes issues de deux points inverses M et M′ se coupent sur l'axe radical des deux cercles elles recoupent respectivement ces deux cercles en deux points N et N′ homologues dans l'inversion qui échange M et M′.

APPLICATIONS DE L'INVERSION

355. Méthode de résolution par inversion. — L'inversion constitue un moyen remarquable de démonstration. Outre les relations géométriques qu'elle entraîne entre les éléments de deux figures homologues :

L'inversion permet de déduire de toute proposition relative à une figure donnée une proposition correspondante relative à la figure transformée.

Ainsi pour démontrer une proposition *P* de la figure F, on peut transformer cette figure par une inversion convenablement choisie ramenant la proposition *P* à une proposition *P′* de la figure transformée F′, évidente ou plus facile à établir.

Donnons quelques applications de ce *procédé de démonstration par inversion.*

356. Théorème de Ptolémée. — Pour qu'un quadrilatère convexe ABCD soit inscriptible dans un cercle (fig. 299) il faut et il suffit que l'inversion positive (D, k) transforme les trois points A, B, C en trois points A′, B′, C′ alignés dans cet ordre, donc tels que :

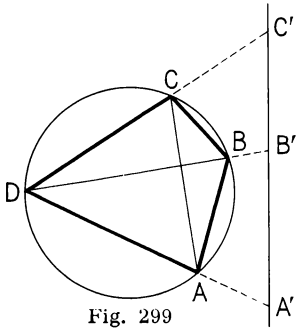


Fig. 299

$$A'C' = A'B' + B'C'. \qquad (1)$$

Or (n° 324) : $A'C' = \dfrac{k\,AC}{DA \cdot DC}$;

$$A'B' = \frac{k\,AB}{DA \cdot DB} \quad \text{et} \quad B'C' = \frac{k\,BC}{DB \cdot DC}.$$

La relation (1) est donc équivalente à :

$$\frac{k\,AC}{DA \cdot DC} = \frac{k\,AB}{DA \cdot DB} + \frac{k\,BC}{DB \cdot DC}.$$

Soit à : $\boxed{AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.}$ (2)

Pour qu'un quadrilatère convexe soit inscriptible dans un cercle il faut et il suffit que le produit de ses diagonales soit égal à la somme des produits de ses côtés opposés.

La relation (2) est la transformée de la relation (1) relative aux trois points alignés A′, B′, C′ dans une inversion de pôle D.

357. Théorème de Feuerbach. — ***Le cercle d'Euler d'un triangle est tangent au cercle inscrit et aux cercles exinscrits à ce triangle.***

Dans un triangle ABC (fig. 300) désignons par M, D et A′ les pieds de la médiane, de la bissectrice intérieure et de la hauteur issues de A, par G le centre de gravité, par I le centre du cercle inscrit, par J le centre du cercle exinscrit dans l'angle A et enfin par E et F les points de contacts des cercles I et J avec le côté BC. On sait que la division ADIJ est harmonique et le milieu de IJ, centre du cercle BICJ, est sur la médiatrice de BC. Par projection sur BC, on voit que la division A′DEF est harmonique et que M est le milieu de EF ; c'est-à-dire (n° 6) que :

$$\overline{ME}^2 = \overline{MF}^2 = \overline{MD} \cdot \overline{MA'}.$$

L'inversion (M, $\overline{ME}^2$) laisse invariants le cercle I et le cercle J, et transforme A′ en D. Le cercle d'Euler ω du triangle ABC passant par M et A′ est transformé en une droite Δ passant par D et parallèle à la tangente en M au cercle ω. Or dans l'homothétie (G, 1/2) le cercle ω est l'homologue du cercle ABC et le point M est l'homologue du point A. La tangente en M au cercle ω est donc parallèle à la tangente en A au cercle ABC et par suite antiparallèle à BC par rapport aux droites AB et AC (n° 60). Il en est de même de la droite Δ qui est par conséquent symétrique de BC par rapport à la bissectrice AD. La droite Δ est donc la deuxième tangente commune E′F′ aux cercles I et J.

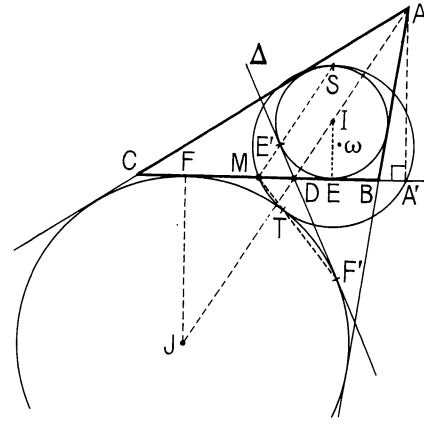


Fig. 300

Il en résulte que le cercle ω est tangent aux cercles I et J aux points S et T où ME′ et MF′ recoupent ces cercles.

358. Inverse d'un faisceau de cercles. — ***Dans le plan, l'inverse d'un faisceau de cercles est en général un faisceau de cercles de même nature.***

Dans une inversion de pôle O :

1° Un faisceau de cercles sécants en A et B se transforme en un faisceau de cercles sécants en A′ et B′ respectivement inverses de A et B. Toutefois, si le centre de l'inversion est en A, on obtient le faisceau des droites issues de B′ et réciproquement le faisceau des droites issues de B′ a pour inverse un faisceau de cercles sécants.

2° Un faisceau de cercles tangents en A se transforme en un faisceau de cercles tangents en A′ inverse de A. Cependant si le centre d'inversion est en A on obtient une famille de droites parallèles à l'axe radical du faisceau. Réciproquement une famille de droites parallèles a pour inverse un faisceau de cercles tangents.

3° Un faisceau (F) à points limites I et J est orthogonal au faisceau (Φ) des cercles sécants en I et J. Ce dernier se transforme par inversion, en un faisceau (Φ′) de cercles sécants en I′ et J′ inverses respectifs de I et J. Le faisceau (F′) transformé de F est orthogonal au faisceau (Φ′) et admet donc I′ et J′ pour points limites.

Si le centre d'inversion est en I, le faisceau (Φ′) est celui des droites issues de J′ et le faisceau (F′) celui des cercles de centre J′. Réciproquement un faisceau de cercles concentriques a pour inverse un faisceau à points limites.

REMARQUE. — Notons que lorsque le faisceau transformé est effectivement un faisceau de cercles :

L'axe radical du faisceau transformé est l'homologue du cercle du faisceau donné, passant par le centre d'inversion.

359. Théorème. — ***L'inverse, par rapport à un point de son support*** Δ, ***d'une division harmonique*** ABCD ***est une division harmonique*** A′B′C′D′.

En effet les cercles de diamètres AB et CD (fig. 301) sont orthogonaux (n° 88) et ils se transforment en deux cercles orthogonaux de diamètres A′B′ et C′D′ ce qui entraîne (A′B′C′D′) = — 1. Si le centre O de l'inversion est en D, le point D′ est rejeté à l'infini et le point C′ est le milieu de A′B′.

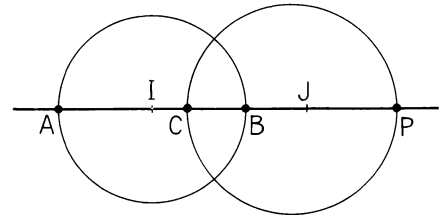


Fig. 301

360. Cercles orthogonaux à deux cercles du plan. — Soit ω le centre d'un cercle orthogonal en M et N au cercle O, en M′ et N′ au cercle O′ (fig. 302). Les droites ωM et ωN sont tangentes au cercle O, les droites ωM′ et ωN′ sont tangentes au cercle O′ et le point ω appartient à l'axe radical des deux cercles. Il en résulte (n° 354) que les couples (M, M′), (M, N′), (N, M′) et (N, N′) sont des couples de points inverses sur les deux cercles. Les droites MM′ et NN′ concourent au pôle d'inversion I tandis que MN′ et NM′ concourent au pôle d'inversion J. Donc (n° 337) :

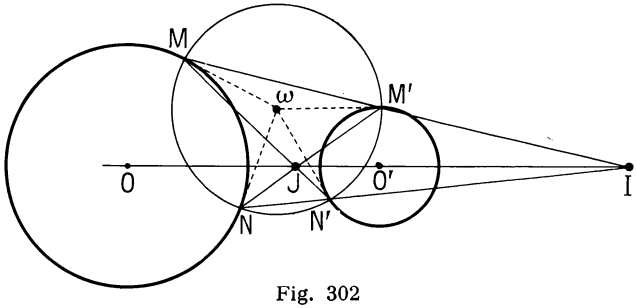


Fig. 302

Tout cercle orthogonal à deux cercles donnés est invariant dans chacune des inversions qui échangent les deux cercles.

REMARQUES. — 1° Le cercle ω est donc orthogonal à tout cercle d'inversion Γ des cercles donnés (n° 338). Ce cercle Γ fait donc partie du faisceau (O) (O′) conjugué de celui des cercles ω :

Tout cercle d'inversion de deux cercles donnés appartient au faisceau défini par ces deux cercles.

2° Si les cercles O et O′ sont sécants en A et B, il y a deux cercles d'inversion Γ_I et Γ_J. Chacun d'eux fait en A (ou en B) des angles opposés avec les cercles O et O′ (n° 346) :

Les cercles d'inversion de deux cercles sécants sont appelés leurs cercles bissecteurs. On voit d'ailleurs (n° 289) que AI et AJ sont les bissectrices de l'angle (AO, AO').

361. Cercles tangents à deux cercles du plan. — Soit ω le centre d'un cercle tangent en M au cercle O, et en M' au cercle O' (fig. 303 et 304). Les tangentes communes en M et M' se coupent en K tel que KM = KM'. Le point K est un point de l'axe radical des deux cercles et (n° 354) :

Lorsqu'un cercle ω est tangent à deux cercles donnés les points de contact sont inverses sur les deux cercles et le cercle ω est invariant dans l'inversion correspondante.

Réciproquement le cercle qui passe par deux points inverses M et M' et qui est tangent en M au cercle O est un cercle invariant. Il est donc (n° 346) tangent en M' au cercle O' :

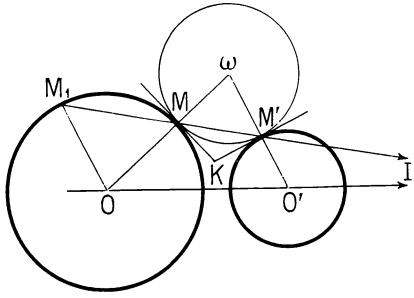


Fig. 303

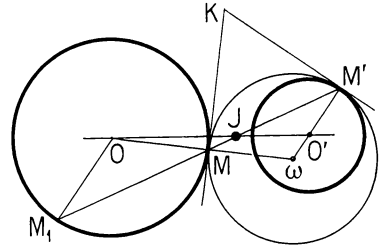


Fig. 304

Il existe donc deux familles de cercles tangents à deux cercles donnés selon que les points de contact sont homologues dans l'inversion I *ou dans l'inversion* J.

Si les cercles O et O' sont tangents, l'une des familles est constituée par le faisceau défini par ces deux cercles.

Remarque. — Si I est le centre d'homothétie positif des cercles O et O', tout cercle ω de la famille correspondante est tangent soit intérieurement, soit extérieurement aux deux cercles O et O', car les homothéties de centres M et M' qui transforment ω en O et en O' sont de même signe (n° 292). On dit que *les contacts sont de même nature.*

Si J est le centre d'homothétie négatif, tout cercle ω' de la famille correspondante est tangent intérieurement à l'un des cercles O et O', extérieurement à l'autre car les homothéties M et M' sont alors de signes contraires. *Les contacts sont de natures différentes.*

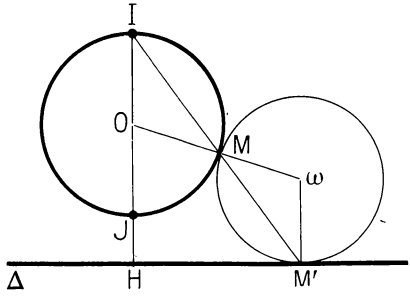


Fig. 305

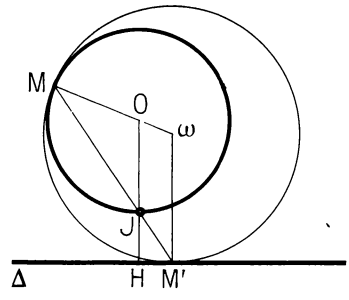


Fig. 306

362. Cercles tangents à un cercle et à une droite. — Soit ω le centre d'un cercle tangent en M au cercle donné O et en M' à la droite donnée Δ (fig. 305 et 306). Le point

M étant un centre d'homothétie des deux cercles O et ω, la droite MM′ passe par l'une des extrémités du diamètre IJ du cercle O perpendiculaire à Δ, c'est-à-dire par l'un des pôles d'inversion du cercle O et de la droite Δ :

Lorsqu'un cercle ω est tangent à une droite et à un cercle, les points de contact sont inverses sur la droite et sur le cercle.

Réciproquement le cercle ω qui passe par deux points M et M′ homologues dans l'une des inversions qui échangent la droite et le cercle et qui est tangent en M au cercle O est un cercle invariant dans cette inversion. Il est donc tangent en M′ à la droite Δ (n° 346). Il en résulte l'existence de deux familles de cercles tangents à un cercle et à une droite.

363. Propriétés invariantes par inversion. — Les propriétés signalées aux n° 346, 358, 359 en donnent des exemples. Démontrons le théorème suivant :

Lorsque deux figures F ***et*** F′ ***sont inverses par rapport à un point*** I, ***toute inversion de pôle*** O ***les transforme en deux figures*** *f* ***et*** *f′* ***inverses par rapport à un point*** J ***de la droite*** OI.

L'inversion I est définie par deux couples de points homologues A, A′ et B, B′ alignés ou sur un cercle (fig. 307). L'inversion O les transforme en deux couples *a*, *a′* et *b*, *b′* alignés ou sur un cercle qui

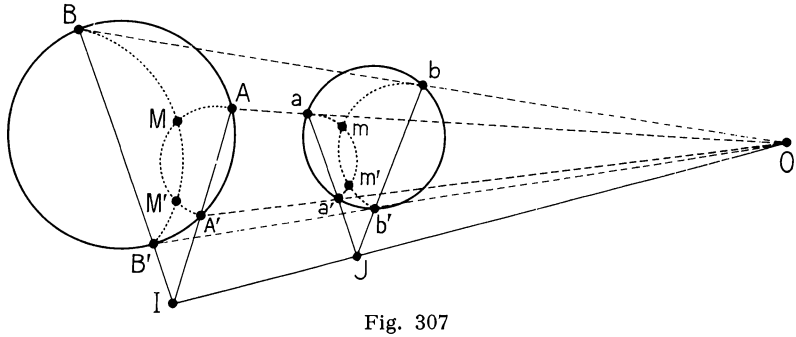


Fig. 307

définissent une inversion de pôle J. Deux points M et M′ homologues de F et F′ sont communs à deux cercles AA′MM′ et BB′MM′ (n° 339). Leurs transformés *m* et *m′* dans l'inversion O sont communs aux cercles *aa′mm′* et *bb′mm′* transformés des précédents. Donc *m* et *m′* sont homologues dans l'inversion J. Si le point M appartient à la droite OI, il en est de même de M′, *m* et *m′*. Comme *mm′* passe par J, le point J appartient à la droite OI (invariante dans les trois inversions).

Les inversions I et J sont de même signe car à tout point double de l'une correspond un point double de l'autre. Il en résulte que les cercles d'inversion I et J, lorsqu'ils existent, sont homologues dans l'inversion donnée O.

364. Corollaire. — ***Deux figures*** F ***et*** F′ ***homologues dans une inversion positive peuvent, par inversion, être transformées en deux figures symétriques par rapport à une droite.***

Si on prend le point O sur le cercle d'inversion Γ de l'inversion I qui échange F et F′, les figures *f* et *f′* sont alors symétriques par rapport à la droite Δ homologue de Γ dans l'inversion O.

Ainsi deux cercles donnés ω et ω′ d'un même plan admettent toujours au moins un cercle d'inversion Γ (n° 353). En les transformant par une inversion dont le centre O appartient à Γ, on obtient deux cercles symétriques par rapport à la droite Δ, inverse de Γ.

On peut, par inversion, transformer deux cercles quelconques du plan en deux cercles égaux.

365. Lieux géométriques et enveloppes. — L'inversion permet parfois de ramener la recherche d'un lieu géométrique ou d'une enveloppe à un problème plus simple.

EXEMPLE I. — *On considère trois points fixes* A, B *et* C. *Trouver le lieu géométrique du point* M *commun à deux cercles orthogonaux variables* ABM *et* ACM.

Une inversion de pôle A transforme B et C en B′ et C′ et les deux cercles ABM et

ACM en deux droites rectangulaires B′M′ et C′M′. Le lieu de M′ étant le cercle de diamètre B′C′, on en déduit que le lieu de M est le cercle orthogonal en B et C au cercle ABC.

Lorsque l'angle BAC est droit, ce lieu devient la droite BC.

EXEMPLE II. — *On donne un cercle fixe* Γ *et un point fixe* A *non situé sur le cercle. Trouver l'enveloppe des cercles* μ *passant par* A *et coupant le cercle* Γ *sous un angle donné* α.

Une inversion de pôle A transforme le cercle Γ en un cercle Γ′ et les cercles μ en droites μ′ coupant Γ′ sous l'angle α. L'enveloppe des droites μ′ étant un cercle C′ concentrique à Γ′, l'enveloppe des cercles μ est un cercle du faisceau défini par le cercle point A et le cercle Γ (n° 358).

366. Problèmes de construction.

EXEMPLE I. — *Construire les cercles passant par deux points donnés* A *et* B *et tangents à un cercle donné* O.

Ce problème a déjà été étudié (n° 110). En voici une solution par inversion :

Transformons la figure dans l'inversion de pôle A qui conserve le cercle O (fig. 308). Nous sommes ramenés à construire les tangentes au cercle O issues du point B′ homologue de B. Soient φ et φ′ les points de contact de ces tangentes. Les droites Aφ et Aφ′ recoupent le cercle O en M et M′, points de contact des cercles ABM et ABM′ avec le cercle donné.

On peut traiter d'une façon analogue la construction des cercles passant par A et B et tangents à une droite Δ en utilisant l'inversion (A, AB^2).

EXEMPLE II. — *Construire les cercles passant par un point donné* A *et tangents à deux cercles donnés* O *et* O′.

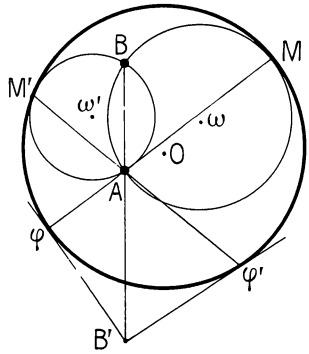


Fig. 308

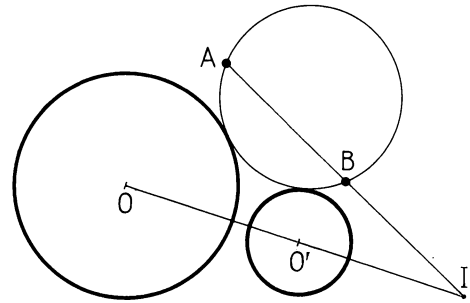


Fig. 309

1° Tout cercle ω tangent aux cercles O et O′ (fig. 309) est invariant dans l'une des inversions I ou J qui échangent les deux cercles (n° 361). Le cercle ω qui passe par A passe donc par le point B ou le point C homologues de A dans les inversions I et J. Réciproquement tout cercle passant par A et B par exemple, et tangent au cercle O, est tangent au cercle O′. Nous sommes donc ramenés à la construction des cercles passant par A et B (ou A et C) et tangents au cercle O. Au plus 4 solutions.

2° En transformant la figure dans une inversion de pôle A on se ramène à la construction des tangentes communes à deux cercles. On peut aussi prendre pour pôle d'inversion un point commun ou un point limite du faisceau (O, O′) et se ramener à un problème plus simple.

367. Conseil pratique. — Les exemples précédents donnent un aperçu de l'efficacité de la méthode de résolution par inversion. C'est pourquoi :

Lorsque la solution d'un problème n'est pas immédiate, on peut essayer de le transformer par inversion en un problème plus simple.

Ce procédé est surtout utile dans le cas d'une figure composée de cercles et de droites se coupant sous des angles donnés. Il y a souvent avantage à choisir pour pôle d'inversion un point commun à deux ou plusieurs cercles de la figure. Il est bon de savoir que l'on peut :

1° Transformer deux cercles sécants ou tangents en A en deux droites concourantes ou parallèles par une inversion de pôle A.

2° Transformer deux cercles intérieurs ou extérieurs en deux cercles concentriques par une inversion ayant pour pôle un point limite du faisceau défini par ces deux cercles.

3° Transformer deux cercles quelconques (ou un cercle et une droite) en deux cercles égaux par une inversion ayant pour pôle un point d'un cercle d'inversion des deux cercles donnés.

EXERCICES

495. Montrer, par inversion, que l'angle aigu des deux cercles ABC et ABD est égal à l'angle aigu des cercles ACD et BCD.

Préciser la relation entre l'angle en A des arcs $\overset{\frown}{ABC}$ et $\overset{\frown}{ABD}$ et l'angle en C des arcs $\overset{\frown}{CDA}$ et $\overset{\frown}{CDB}$.

496. Soient trois points fixes A, B, C et un point M mobile sur un cercle O passant par B et C. Démontrer que l'angle en A, des cercles AMB et AMC est constant. Comparer sa valeur à celle de l'angle en B des cercles ABC et MBC.

497. Dans un quadrilatère convexe inscriptible ABCD on pose AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = x et BD = y. Démontrer par inversion que : $\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$ et calculer x et y en fonction de a, b, c et d.

498. Dans un triangle ABC, on désigne par O(R) le cercle circonscrit, par I(r) le cercle inscrit et on pose OI = d.

1° Démontrer que l'inversion (I, $d^2 - R^2$) transforme les trois côtés du triangle ABC en trois cercles égaux et de rayon R.

2° En déduire la relation d'Euler : $d^2 = R^2 - 2Rr$.

499. Construire dans le plan, en utilisant une inversion de pôle A :

1° Les cercles passant par A orthogonaux ou tangents à deux cercles donnés C_1 et C_2 (ou à un cercle C et une droite D).

2° Les cercles passant par A, coupant C_1 sous l'angle aigu α et coupant C_2 sous l'angle aigu β.

500. 1° Transformer par inversion les sommets d'un quadrilatère convexe inscriptible ABCD donné en ceux d'un rectangle A'B'C'D'.

2° Démontrer que si quatre points A, B, C, D du plan vérifient la relation AB.CD = AD.BC leurs inverses A', B', C', D' vérifient la relation analogue A'B'.C'D' = A'D'.B'C'. Déterminer le pôle d'inversion pour que le quadrilatère A'B'C'D' soit un losange.

501. 1° Démontrer que toute inversion du plan transforme en général les sommets du quadrangle harmonique ABCD en ceux d'un quadrangle harmonique A'B'C'D'. En déduire que les cordes A'B' et C'D' sont conjuguées par rapport au cercle A'B'C'D'.

2° Trouver les pôles d'inversion ω pour lesquels le quadrilatère A'C'D'B' est un carré.

502. Soit O le centre de la similitude plane directe qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DC}$ et soient I et J les points de la bissectrice intérieure de l'angle AOC tels que : $\overline{OI}^2 = \overline{OJ}^2 = OA.OC$.

1° Nature des quadrangles IJAC et IJBD ? Montrer que les cercles IAB et ICD sont tangents et qu'il en est de même des cercles IAD et IBC.

2° Montrer que, dans une inversion de pôle I ou J, les homologues de A, B, C, D sont les sommets d'un parallélogramme A'B'C'D'.

503. Un cercle variable ω passe par les points fixes B et C et coupe la médiatrice de BC en M et N. Soit A un point fixe de la droite BC. Les droites AM et AN recoupent le cercle ω en M' et N'. Trouver le lieu géométrique de M' et N'.

504. On mène d'un point fixe P deux sécantes variables PAB et PCD à un cercle O.

1° Démontrer que le lieu du point de rencontre M des cercles PAC et PBD et du point de rencontre N des cercles PAD et PBC est le cercle de diamètre OP.

2° Établir que la droite MN passe par un point fixe I de la droite OP.

505. On donne un cercle fixe O(R), un point fixe A et un point M variable sur une droite fixe Δ. Le cercle OAM coupe le cercle O en B et C. La droite BC coupe OM en M'.

Démontrer que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = R^2$ et déterminer le lieu du point M'.

506. Deux cercles orthogonaux variables ω et ω' se coupant en M et M′ sont respectivement tangents aux points fixes A et B à la droite AB.

1° Trouver les lieux de P et P′ homologues de M et M′ dans l'inversion $(A, \overline{AB}^2)$.

2° En déduire les lieux de M et de M′.

507. Soit un angle xOy, un point fixe A de Ox et un point fixe B de Oy. Deux cercles orthogonaux variables ω et ω' sont respectivement tangents en A à Ox, en B à Oy et se coupent en M et M′. Soient P et P′ les homologues de M et M′ dans l'inversion $(A, \overline{AB}^2)$.

1° Déterminer les lieux de P et P′ et en déduire ceux de M et M′.

2° Étudier le cas où l'angle xOy est droit.

508. On considère les tangentes fixes AP et AQ au cercle I(R) et une tangente variable qui coupe AP en B et AQ en C.

1° Montrer que, dans l'inversion (I, R^2), les transformés de AB, BC, CA et du cercle ABC sont quatre cercles égaux.

2° En déduire l'enveloppe du cercle ABC lorsque BC varie.

509. Un cercle variable ω passe par deux points fixes O et P et coupe en A et B un cercle fixe de centre I. Trouver le lieu du point M du cercle ω tel que le faisceau O (ABPM) soit harmonique. Cas où le point P est sur le cercle de diamètre OI.

510. On donne un cercle O(R) et un point fixe A. Soit B le pied de la polaire de A par rapport au cercle O. Un cercle variable ω passant par A, tangent en M au cercle O, recoupe MB en P et le cercle OMB en Q. Trouver les lieux géométriques des points P et Q.

511. On donne une droite Δ et deux points A et B. Soient M et M′ les points de contact avec Δ des cercles ω et ω' tangents à Δ et passant par A et B. On construit les symétriques C et D de A par rapport à Δ et par rapport au point I commun à Δ et à AB.

1° Montrer, par une inversion de pôle A, que M et M′ appartiennent au cercle BCD.

2° Justifier cette propriété par des considérations angulaires ou autres.

512. On désigne par M et M′ les points de contact, avec un cercle O donné, des cercles ω et ω' passant par deux points donnés A et B. La polaire de A par rapport au cercle O coupe AO en C et AB en D.

1° Démontrer par une inversion de pôle A que M et M′ appartiennent au cercle BCD.

2° Montrer que les droites CM et CM′ recoupent respectivement les cercles ω et ω' en deux points N et N′ alignés avec A, sur la polaire de C par rapport au cercle O.

513. On considère un cercle fixe O et un point fixe A extérieur. Une sécante variable BC à ce cercle passe par le point fixe I.

1° Démontrer que le cercle ABC passe par un second point fixe P.

2° Les droites AB et AC recoupent le cercle O en D et E. Démontrer que la droite DE et le cercle ADE passent respectivement par deux points fixes J et Q.

3° Trouver le lieu géométrique du point de rencontre M des droites BC et DE ainsi que du point de rencontre N des cercles ABC et ADE.

514. On donne un cercle fixe O et un point F intérieur. Un cercle variable de centre M, passant par F, est tangent en I au cercle O et la droite FI recoupe ce cercle O en J.

1° Montrer que la tangente en J au cercle O est perpendiculaire en K à la droite MF et que : $2\,\overline{FK}.\overline{FM} = \overline{FI}.\overline{FJ}$.

2° Soit ω le pôle de la droite FI par rapport au cercle M. Montrer que le cercle de centre ω passant par F engendre un faisceau de cercles.

3° Le cercle de centre J passant par F, recoupe le cercle ω en D tandis que les droites Mω et OJ se coupent en E. Démontrer que les points D, E, F sont alignés et que les points ω, I, J, D, E appartiennent à un même cercle.

515. Un cercle ω est dit *isogonal* à plusieurs cercles d'un même plan s'il les coupe sous le même angle aigu.

1° Démontrer que les cercles isogonaux à deux cercles donnés sont les cercles invariants dans une des inversions qui échangent les deux cercles.

2° Les cercles isogonaux à trois cercles donnés forment quatre faisceaux dont les axes radicaux sont les axes d'homothétie des trois cercles et dont les droites des centres passent par le centre radical des trois cercles.

3° Étudier le cas où l'un des trois cercles précédents est remplacé par une droite.

516. *Cercles tangents à trois cercles donnés.* — On donne dans le plan trois cercles O, O_1 et O_2. A tout point M du cercle O on associe son homologue M_1 dans l'inversion de pôle I, qui échange les cercles O et O_1 et son homologue M_2 dans l'inversion de pôle J qui échange les cercles O et O_2. Le cercle MM_1M_2 recoupe le cercle O en M′ et la droite MM′ coupe la droite IJ en K.

1° Démontrer que le cercle MM_1M_2 appartient à un faisceau de cercles d'axe radical IJ et que le point K reste fixe lorsque M décrit le cercle O.

2° Soient A et B les points de contact des tangentes au cercle O issues de K. Démontrer que les cercles AA_1A_2 et BB_1B_2 sont tangents aux trois cercles O, O_1 et O_2.

3° Démontrer que les droites AB, A_1B_1 et A_2B_2 sont concourantes en ω centre radical des cercles O, O_1 et O_2. En déduire une autre construction des cercles précédents en montrant que AB passe par le pôle de la droite IJ par rapport au cercle O.

517. Étendre les constructions de l'exercice précédent à la construction des cercles tangents à deux cercles et à une droite donnés.

518. On donne un cercle fixe O et un point fixe extérieur P. Soit AB un diamètre variable du cercle O. Les droites PA et PB recoupent le cercle O en A′ et B′.

1° Montrer que le cercle PAB passe par un deuxième point fixe I et que la droite A′B′ passe par un point fixe J.

2° Montrer que le cercle PA′B′ est orthogonal au cercle O et qu'il passe par un second point fixe K. Montrer que IO = OK et que (PKOJ) = — 1.

3° Trouver le lieu de l'orthocentre H du triangle PAB et celui du second point d'intersection L des cercles PAB et PA′B′. Montrer que le cercle d'Euler du triangle PAB passe par deux points fixes.

519. On donne un cercle de centre O et de diamètre AB. Un point M décrit la droite D perpendiculaire en H à AB. Les droites MA et MB recoupent le cercle O en P et Q.

1° Montrer que le cercle MPQ est orthogonal au cercle O et à la droite D et qu'il engendre un faisceau de cercles lorsque M varie.

2° Démontrer que la droite PQ passe par un point fixe K et trouver le lieu du point N commun aux cercles MAB et MPQ.

520. On considère un segment fixe AB de milieu J et sa médiatrice Δ :

1° Construire un cercle γ passant par A et tangent à Δ, puis les deux cercles γ_1 et γ_2 orthogonaux en A à γ et tangents à Δ. Le cercle γ recoupe γ_1 en M et γ_2 en P. Démontrer que lorsque γ varie le lieu de M et de P est un cercle du faisceau de points limites A et B.

2° Soit γ_3 le cercle tangent en A à γ et tangent à Δ. Il coupe γ_1 en Q et γ_2 en N. Démontrer que les quadrangles ABMN et ABPQ sont inscriptibles dans deux cercles orthogonaux, puis que le point I est le centre de similitude directe de MP et de QN.

3° Montrer que MN et PQ passent par un même point fixe K lorsque γ varie.

521. On donne dans le plan deux points fixes A et A′, le milieu O de AA′, la médiatrice D de AA′ et l'on pose OA = a. A tout point M du plan on fait correspondre son symétrique M_1 par rapport à la droite AA′ puis l'inverse M′ de M_1 dans l'inversion de pôle O, de puissance a^2.

1° Montrer qu'on peut aussi passer de M à M′ par une symétrie par rapport à la droite D suivie d'une inversion de pôle O dont on déterminera la puissance. Montrer que les points M, M′, A, A′ sont en général sur un même cercle.

2° Quels sont les points M qui coïncident avec leurs homologues M′ ? Quelles sont les droites telles que si M décrit l'une d'elles, M′ décrit la même droite ?

3° Montrer qu'il existe une double infinité de cercles tels que si M décrit l'un d'eux, M′ décrit le même cercle.

4° Montrer que MA.M′A′ = MA′.M′A.

522. On donne un diamètre A′D d'un cercle (A) de centre A, de rayon R et un point I du segment AD tel que $AI = \frac{R}{3}$. Une droite variable passant par I coupe le cercle (A) en M et N.

1° Les tangentes en M et N au cercle (A) se coupent en E. Lieu du point E ?

2° Dans l'inversion (I) de pôle I, de puissance $\overline{IA}.\overline{IA'}$ les homologues de M et N sont M′ et N′. Trouver le lieu (B) de ces points. Quel est le centre de (B) ?

3° Les tangentes en M′ et N′ au cercle (B) se coupent en F. Montrer que E, I, F sont alignés. Lieu de F.

4° Montrer qu'il existe un cercle tangent en M au cercle (A), en M′ au cercle (B) et que ce cercle reste orthogonal à un cercle fixe lorsque M varie.

523. Soit un triangle ABC dont le côté BC est porté par une droite fixe D, dont l'angle A a une valeur constante $\alpha < 1^D$ et dont l'orthocentre H est fixe. On désigne par $2k$ la distance de H à D et on considère l'inversion (I) de pôle H, de puissance $4k^2$.

1° Montrer que le cercle ABC passe par un point fixe. Si B′ et C′ sont les homologues de B et C dans l'inversion (I), déterminer l'enveloppe de la droite B′C′ et montrer que le cercle HBC reste tangent à un cercle fixe dont on calculera le diamètre en fonction de k et α.

2° Montrer que le cercle ABC reste tangent à un cercle fixe.

3° Montrer que le cercle de diamètre BC reste tangent à deux cercles fixes symétriques par rapport à BC.

524. On donne dans un plan le cercle C (O, R).

1° M étant un point quelconque du plan et D une droite quelconque passant en M dans le plan, construire les cercles α et β passant par M et tangents à la droite D et au cercle C. (On pourra utiliser une inversion du pôle M.) A et B étant les points de contact avec C, montrer que le cercle ABM est orthogonal à la droite D et au cercle C.

2° Soit M′ le point diamétralement opposé à M sur le cercle ABM. Montrer que le lieu de M′ quand la droite D tourne autour de M supposé fixe est une droite *m*. Quel est, dans les mêmes conditions, le lieu du point de rencontre des tangentes en A et B au cercle C ?

525. Soient C et C′ des cercles de rayons R et R′, de centres O et O′ tangents extérieurement en S. Ces cercles coupent la droite OO′ en S et respectivement en A et A′. Une tangente commune autre que la tangente D au point S coupe D en P et la droite des centres en S′. Les points de contact sont M et M′ tandis que T est le milieu de OO′.

1° Montrer que le cercle de diamètre OO′ est tangent en P à MM′. Évaluer SS′ et ST en fonction des rayons.

2° Montrer que A, A′, M, M′ sont sur un même cercle Γ dont le centre ω est diamétralement opposé à P sur le cercle de diamètre OO′ et que les droites AM et A′M′ se coupent en P′ sur D. Soient α et β les projections de ω sur OO′ et sur D. Montrer que les quatre points S′PTβ sont sur un même cercle ainsi que les quatre points S′P′$\alpha\beta$.

3° Les droites SM et SM′ recoupent Γ en N et N′. Montrer que la droite NN′ est perpendiculaire à D et que sa distance à S vaut 2 SP. Montrer que S′P′ est l'axe radical de Γ et du cercle-point S.

4° En supposant la droite OO′ et le point S fixes et les rayons variant de manière que l'on ait : R — R′ = *d*, longueur donnée, déterminer le lieu de ω.

526. On considère un cercle fixe O(R) et un diamètre fixe AB de ce cercle. Un point M décrit la droite D perpendiculaire en C à AB. Les tangentes MP′ et MQ′ au cercle O coupent la tangente Δ en A respectivement en P et Q. Les droites BP′ et BQ′ coupent la droite Δ en P″ et Q″.

1° Montrer que la droite P′Q′ passe par un point fixe et que les points P et Q sont respectivement les milieux des segments AP″ et AQ″.

2° On considère l'inversion (B, $4R^2$). Montrer que le cercle transformé de la droite P′Q′ passe par deux points fixes et que le produit AP.AQ est constant.

3° La droite MO coupe le cercle Γ circonscrit au triangle MPQ au point L et O′ désigne le centre du cercle exinscrit au triangle MPQ dans l'angle M. Trouver les lieux géométriques des points O′ et L.

4° Montrer que le cercle MPQ reste tangent à une droite fixe, qu'il est invariant dans une inversion de pôle A et en déduire qu'il reste tangent aussi à un cercle fixe.

527. On donne un cercle O et une droite D ni sécants, ni tangents. Soit I l'un des pôles d'inversion transformant O en D, A le point diamétralement opposé à I sur le cercle O, M et M′ deux points inverses, M étant sur le cercle O.

1° Montrer qu'il existe un cercle Γ tangent en M à O et en M′ à D.

2° La tangente en A au cercle O coupe Γ en P et Q. Montrer que les droites MP et MQ sont conjuguées harmoniques par rapport à MI et MA. En déduire que les droites M′P et M′Q coupent IA en deux points fixes et que le rapport $\frac{AP}{AQ}$ est constant.

528. On considère un cercle fixe C tangent à une droite fixe Δ en un point donné O de cette droite. On étudie les cercles Γ tangents au cercle C en M et à la droite Δ en N.

1° Montrer que la droite MN passe par un point fixe I. En déduire que les cercles Γ restent orthogonaux à un cercle fixe.

2° On effectue l'inversion de pôle O, de puissance $\overline{OI}^2$. Quels sont les transformés de la droite Δ, du cercle C, des cercles Γ ?

3° Utiliser cette inversion pour résoudre les questions suivantes :

a) Lieux géométriques des points d'intersection de deux cercles Γ orthogonaux.

b) On considère une droite D passant par O ; montrer qu'il existe deux cercles Γ, soient Γ_1 et Γ_2 tangents à la droite D. Les construire. P_1 et P_2 désignant leurs points de contact avec D, montrer que le produit $\overline{OP_1}.\overline{OP_2}$ est indépendant de la position de D.

c) Les cercles Γ_1 et Γ_2 sont ainsi tangents à trois lignes passant par O : les droites Δ et D et le cercle C. Montrer qu'il existe encore un cercle passant par O et tangent à Γ_1 et Γ_2. Lieu de son centre quand la droite D varie en passant par O.

529. On donne deux cercles Γ et Γ' de rayons R et R′ dont la distance des centres est *d*. Soit γ l'inverse de Γ dans l'inversion (O′, R'^2) et γ' l'inverse de Γ' dans l'inversion (O, R^2).

1° Calculer les rayons *r* et *r′* des cercles γ et γ' en fonction de R, R′ et *d*. Soient ω et ω' les centres des cercles γ et γ'. Calculer $\overline{O\omega}$ et $\overline{O'\omega'}$ (sens positif de O vers O′).

2° Montrer que si $R \neq R'$, la relation $r = r'$ entraîne soit : $d^2 = R^2 + R'^2 - RR'$ (1), soit $d^2 = R^2 + R'^2 + RR'$ (2). Réciproque ? Montrer que dans chacune de ces hypothèses les cercles Γ et Γ' se coupent et calculer l'angle OAO' (A étant un de leurs points communs).

3° Montrer que dans chacune des hypothèses (1) ou (2) les cercles γ et γ' sont confondus. Calculer alors le rapport $\frac{\overline{\omega O}}{\overline{\omega O'}}$ et dire quelle position remarquable occupe le point ω.

530. On considère dans un plan un cercle de centre I et un point A non situé sur le cercle. L'inversion de pôle A et de puissance k transforme le cercle I en un cercle de centre M et de rayon r. Montrer que si $AM = d$, le rayon du cercle I est égal à la valeur absolue de $\frac{kr}{d^2 - r^2}$.

2° On donne deux points A et B et sur AB un point C entre A et B. On appelle O, O', O'' les centres des cercles de diamètres respectifs AB, AC et CB. Donner une construction simple d'un cercle I tangent aux trois cercles précédents (on pourra utiliser une inversion de pôle A). On pose $AB = 2a$ et $AO' = x$. Calculer le rayon du cercle I en fonction de a et de x.

3° On suppose dans tout ce qui suit que les cercles O et O' sont fixes et on envisage les cercles Γ qui sont tangents à ces deux cercles. Montrer que les cercles Γ sont orthogonaux à un cercle fixe. Quel est le lieu des points de contact de deux cercles Γ tangents entre eux ? Montrer que la corde des contacts d'un cercle Γ avec les cercles O et O' passe par un point fixe.

531. *Inversion dans l'espace.* — 1° Démontrer qu'en deux points homologues A et A', les tangentes à deux courbes inverses C et C' sont symétriques par rapport au plan médiateur de AA' et qu'il en est de même des plans tangents à deux surfaces inverses S et S'. En déduire que l'inversion conserve l'angle de deux courbes, de deux surfaces ou d'une courbe et d'une surface. Étudier le cas de deux courbes ou surfaces orthogonales ou tangentes, des angles formés avec la sphère d'inversion.

2° Démontrer que, dans l'inversion (O, k), l'inverse d'un plan P ne passant pas par O est une sphère S passant par O et réciproquement ; que l'inverse d'une sphère Ω ne passant pas par O est une sphère analogue Ω' homologue de Ω dans l'homothétie $[O, k/\Omega(O)]$. Quels sont les homologues des centres de ces sphères ?

3° Étudier les inversions échangeant un plan P et une sphère S ou deux sphères Ω et Ω'.

532. *Cercles inverses dans l'espace.* — 1° Démontrer que l'inverse d'un cercle γ, intersection d'un plan P et d'une sphère S passant le pôle d'inversion O est le cercle γ', intersection de la sphère S' et du plan P' respectivement inverses de P et S.

2° Montrer que les deux cercles γ et γ' sont situés sur une même sphère invariante dans l'inversion O, que le centre ω' du cercle γ' est situé sur la droite joignant le pôle O au point K, centre de la sphère orthogonale à S suivant γ et pôle de P par rapport à S.

3° Deux cercles γ et γ' d'une même sphère sont en général inverses par rapport aux deux points I et J, pôles des inversions qui échangent les extrémités des diamètres AB et A'B' de ces deux cercles situés dans leur plan de symétrie commun. Cas où AB' et A'B sont parallèles ? En déduire que le produit de l'inversion (I, IA.IB) et de la symétrie-plan qui échange les demi-droites IA et IB laisse le cercle γ invariant.

533. On appelle *transposition circulaire* de points doubles A et B et de centre I milieu de AB, le produit commutatif $(\mathcal{J})$ de l'inversion (I, IA^2) par la symétrie-droite d'axe AB dans le plan.

1° Montrer que $(\mathcal{J})$ est involutive, que deux points homologues M et M' forment avec A et B un quadrangle harmonique. Étudier les cercles invariants.

2° Soient P et P' deux points homologues. Montrer que les triangles IP'M' et IMP sont directement semblables. Construire I connaissant M, P, M' et P'.

3° Montrer que pour construire A et B connaissant I, M et M', il suffit de couper la bissectrice intérieure de l'angle MIM' par le cercle passant par M et M' et centré sur la bissectrice extérieure de MIM'. En déduire par analogie la construction des points M et M' connaissant A et B et le milieu J de MM'.

N. B. — Dans le plan complexe (n° 320) la transformation précédente est définie par la relation $[IM].[IM'] = [IA]^2 = [IB]^2$ ou en désignant par a, z, z' les affixes de A, M, M' dans un repère orthonormé d'origine I, par la relation : $zz' = a^2$, d'où le nom d'*inversion complexe* également donné à $(\mathcal{J})$.

534. Déterminer les transpositions circulaires échangeant deux cercles ou un cercle et une droite donnés. Enveloppe de leurs axes et lieu de leurs points doubles.

1° Soit A'B'C' une transversale au triangle ABC. Montrer qu'il existe une transposition circulaire échangeant A, B, C, avec A', B', C'.

2° Démontrer que si $\overline{OO'}^2 = k + k'$ le produit des inversions (O, k) et (O', k') est une transposition circulaire. Déterminer ses points doubles (deux cas).

535. Une *transformation circulaire directe* $(\mathcal{D})$ dans le plan est le produit d'une transposition circulaire de centre I par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ'}$. Les points I et J' sont les points limites et le milieu O de IJ' est le point central.

1° Étudier les transformés par $(\mathcal{H})$ d'une droite et d'un cercle. Soient A′ et M′ les homologues de A et M. Montrer que les triangles IAM et J′M′A′ sont directement semblables.

2° La transformation $(\mathcal{H})$ est aussi le produit de la symétrie-point de centre O par une transposition circulaire de centre J′. En déduire l'existence de deux points doubles E et F symétriques par rapport à O, de la transformation $(\mathcal{H})$. On construit le triangle AA′S directement semblable au triangle AOJ′. Démontrer que le quadrangle ASEF est harmonique et en déduire une construction de E et F. Ces points peuvent-ils être confondus ?

3° Montrer que les trois triangles IMF, J′FM′ et EMM′ sont directement semblables.

Les points E, F, A, M ont pour homologues E, F, A′, M′. En déduire (cf. ex. n° 487) que le birapport $\frac{M'E}{M'F} : \frac{ME}{MF}$ est constant, que l'angle en E des arcs $\overset{\frown}{EMF}$ et $\overset{\frown}{EM'F}$ est constant.

Montrer qu'il en est de même des angles en M des arcs $\overset{\frown}{MEF}$ et $\overset{\frown}{MM'F}$ ou des angles en M′ des arcs $\overset{\frown}{M'EF}$ et $\overset{\frown}{M'MF}$ (utiliser une inversion de pôle F).

N. B. — Dans le plan complexe la transformation est définie par la relation $[IM]\,[J'M'] = k$ ou $\frac{[M'E]}{[M'F]} = \lambda \frac{[ME]}{[MF]}$. Si z et z' sont les affixes de M et M′, elle se traduit par une relation de la forme : $zz' - \alpha z' - \beta z + \gamma = 0$ (*homographie complexe*).

536. On appelle *transmuée par l'inversion* (I) d'une transformation donnée (T) le produit des trois transformations (I) o (T) o (I). Démontrer que dans le plan :

1° La transmuée d'une inversion est une inversion ou une symétrie-droite.

2° La transmuée d'une symétrie-point est une transposition circulaire (cf. ex. n° 533).

3° La transmuée d'une similitude plane directe est une transformation circulaire directe (cf. ex n° 535). Étudier le cas où cette similitude est une homothétie, une rotation ou une translation.

537. *Une droite focale d'un cercle* Γ de centre O et de rayon R est une droite Δ perpendiculaire en A à un diamètre de ce cercle et faisant avec le plan P de ce cercle un angle aigu α tel que $OA = R \cos \alpha$.

Désignons par M un point quelconque de Δ, par H sa projection sur le plan P, par B et B′ les extrémités du diamètre de Γ passant par H, par K la projection de A sur BB′ et par N et N′ les intersections de OA avec les tangentes en B et B′ au cercle Γ.

1° Démontrer que AM = BN, que BM = AN et que le tétraèdre ABMN admet pour axe de symétrie la droite IJ qui joint les milieux de AB et de MN. En déduire que tout plan (π) issu de Δ coupe Γ sous l'angle α et coupe le plan P suivant une droite δ faisant des angles égaux avec Δ et Γ. Démontrer que $MB + MB' = NN'$, $|MB - MB'| = 2\,OA$ et que le trièdre MABB′ admet le plan MAK pour plan de symétrie.

2° Montrer (cf. ex. n° 531 et 532) que le produit de l'inversion (M, MB.MB′) par la symétrie par rapport au plan MAK laisse Γ et Δ invariants. En déduire que toute sphère S passant par Γ coupe Δ sous l'angle α et que l'intersection γ d'une sphère S et d'un plan (π) issu de Δ est un cercle coupant Δ et Γ sous un même angle. Établir l'existence d'une infinité de cercles γ coupant orthogonalement Γ et Δ en deux points chacun.

3° Démontrer que la somme des distances de B et B′ à Δ est égale à 2R et que le rapport des distances de B à Δ et à la polaire de A par rapport à Γ est égal à $\cos \alpha$.

4° Soit ω le point de MB homologue de O dans la symétrie d'axe IJ. Démontrer que $\omega A = R$, $\omega B = OA$ et que l'angle $MA\omega$ est droit. Le cercle de centre ω et de rayon OA, situé dans le plan MAB, engendre, lorsque M varie sur Δ, une surface de révolution d'axe Δ, appelée *tore*. Démontrer qu'il existe sur ce tore deux familles de cercles égaux à Γ.

16e Leçon

PARABOLE

368. Définition. — ***La parabole est le lieu géométrique des points du plan équidistants d'un point fixe*** F ***et d'une droite fixe*** D.

Le point fixe F est le *foyer* et la droite fixe D *la directrice* de la parabole (fig. 310). Tout point M se projetant en H sur D appartient à la parabole si :

$$MF = MH.$$

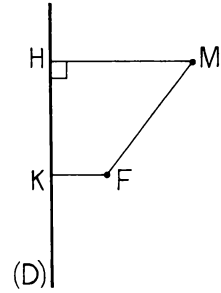


Fig. 310

La distance FK = p du foyer F à la directrice est le *paramètre de la parabole* que nous supposerons non nul.

Il est clair que toute homothétie positive de rapport k transforme le trapèze rectangle MFKH en un trapèze semblable. Elle transforme donc la parabole en une autre parabole de paramètre kp.

Toute courbe semblable à une parabole est une parabole.

En particulier deux paraboles de même paramètre sont égales.

369. Tracé continu de la parabole. — Attachons à la pointe B d'une équerre AHB (fig. 311) une des extrémités d'un fil souple inextensible. Puis à une pointe fixée en F attachons l'autre extrémité du fil de façon que sa longueur entre B et F soit égale au côté HB de l'angle droit de l'équerre.

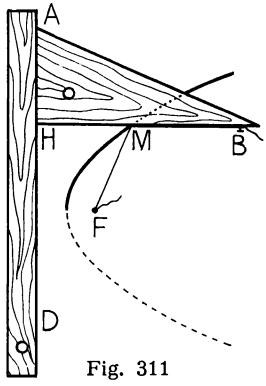


Fig. 311

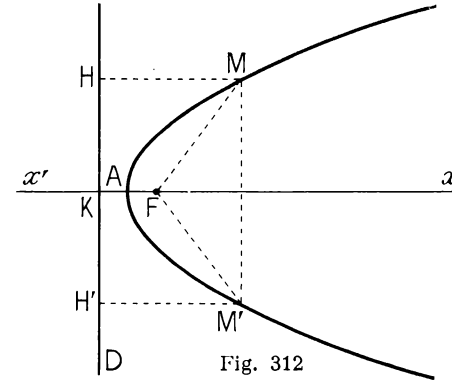


Fig. 312

Faisons glisser l'équerre contre la règle placée le long de D en maintenant le fil tendu à l'aide de la pointe M du crayon appuyée contre le côté HB de l'équerre. Le point M décrit une courbe telle que HB = HM + MF donc MF = MH. C'est donc un arc de la parabole de foyer F et de directrice D.

370. Axe et sommet de la parabole. — Désignons par $x'x$ la droite FK (fig. 311). Si un point M appartient à la parabole il en est de même du point M′ symétrique de M par rapport à $x'x$. La droite $x'x$ est donc un axe de symétrie de la courbe, appelé *axe de la parabole.*

Tout point de la parabole situé sur l'axe $x'x$ est équidistant de F et de K. Par suite, seul le milieu A du segment FK appartient à la parabole. Ce point est appelé *sommet de la parabole.*

371. Constructions par points de la parabole. — 1° Soit une droite δ perpendiculaire en P à l'axe $x'x$ (fig. 313). Tout point M de la parabole situé sur cette droite est tel que MF = PK. Il appartient donc au cercle de centre F et de rayon PK. Ce cercle coupe effectivement la droite δ en deux points M et M′ symétriques par rapport à $x'x$ si PF < PK c'est-à-dire si P appartient à la demi-droite Ax.

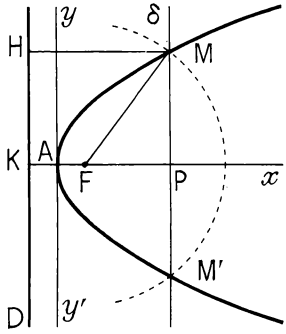


Fig. 313

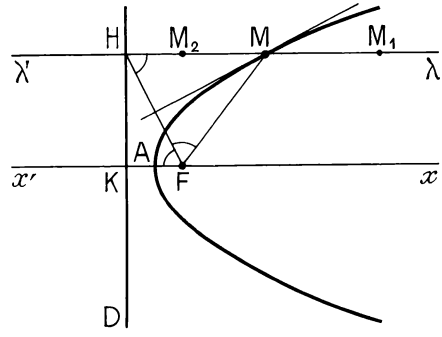


Fig. 314

Cette construction montre que la parabole est tout entière située du même côté que le foyer F par rapport à la droite $y'y$ perpendiculaire en A à $x'x$.

2° Menons une droite $\lambda'\lambda$ perpendiculaire en H à la directrice D (fig. 314). Pour qu'un point M de cette droite appartienne à la parabole, il faut et il suffit que MF = MH, donc que M soit situé sur la médiatrice de FH. L'angle FHλ étant aigu, il y a un point M et un seul de la demi-droite Hλ répondant à la question.

En répétant l'une ou l'autre des constructions précédentes, on obtient un tracé par points de la parabole.

372. Direction asymptotique de la parabole. — La droite $\lambda'\lambda$ (fig. 314) pouvant être aussi éloignée qu'on le désire, il en est de même du point M. La parabole admet donc deux branches infinies. Pour que le point M s'éloigne indéfiniment sur l'une de ces branches, il faut et il suffit que le point H s'éloigne à l'infini sur D, donc que l'angle AFH tende vers un droit. Comme $\widehat{AFH} = \widehat{FHM} = \widehat{HFM}$, on voit que l'angle AFM tend vers deux droits et que la position limite de la demi-droite FM est la demi-droite Fx.

La parabole admet une direction asymptotique unique, celle de son axe.

Comme la droite Mλ, parallèle à cette direction asymptotique, s'éloigne indéfiniment en même temps que M, il en résulte que la parabole n'admet pas d'asymptote.

373. Intérieur et extérieur de la parabole. — D'après l'étude du n° 371 (fig. 314), la parabole partage toute parallèle $\lambda'\lambda$ à son axe en deux parties Mλ' et Mλ. Elle partage donc le plan en deux régions distinctes. Celle qui contient le foyer F est *l'intérieur* de la parabole et l'autre *l'extérieur* de la parabole.

Tout point M_1 de la demi-droite $M\lambda$ est un *point intérieur*. Il est situé du même côté que F par rapport à la médiatrice de FH, donc : $\boxed{M_1F < M_1H.}$

Tout point M_2 de la demi-droite $M\lambda'$ est un *point extérieur*. Il est situé du même côté que H par rapport à la médiatrice de FH, donc : $\boxed{M_2F > M_2H.}$

Il en résulte par réciprocité que :

Un point est intérieur ou extérieur à la parabole suivant que sa distance au foyer est inférieure ou supérieure à sa distance à la directrice.

374. Théorème. — *La parabole est le lieu des centres des cercles tangents à une droite fixe et passant par un point fixe non situé sur cette droite.*

1° Tout point M de la parabole de foyer F et de directrice D est tel que MF = MH (fig. 315). Le cercle de centre M passant par F est donc tangent en H à la droite D.

2° Si un cercle de centre M, tangent en H à la droite donnée D, passe par le point fixe F, son rayon MF est égal à la distance MH de son centre à la droite D. Donc MF = MH et le point M appartient à la parabole de foyer F et de directrice D.

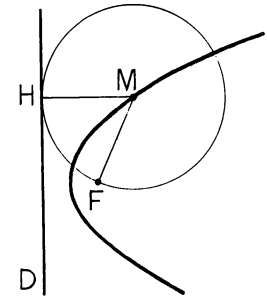


Fig. 315

ÉQUATION DE LA PARABOLE

375. Parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet. — Considérons une parabole Γ de sommet O, de foyer F et de directrice D (fig. 316). Rapportons le plan au repère orthonormé xOy formé par l'axe Ox de la parabole, sa tangente au sommet Oy et de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Si nous désignons par p (*paramètre algébrique*) la mesure algébrique de $\overline{KF}$ sur Ox, le foyer est le point $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et la directrice D est la droite $x = -\frac{p}{2}$.

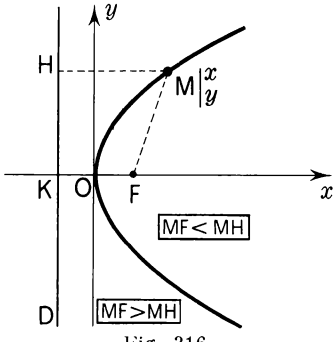


Fig. 316

Tout point M (x, y) du plan se projette orthogonalement en H $\left(-\frac{p}{2}, y\right)$ sur la directrice et :

$$\overline{MF}^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 ; \qquad \overline{MH}^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

$$\text{Donc : } \overline{MF}^2 - \overline{MH}^2 = y^2 - 2px. \qquad (1)$$

Pour que le point M(x, y) appartienne à la parabole Γ il faut et il suffit que :

$$MF = MH \iff \overline{MF}^2 - \overline{MH}^2 = y^2 - 2px = 0 \iff \boxed{y^2 = 2px.} \quad (2)$$

L'équation $y^2 = 2px$ est l'équation d'une parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet.

La parabole $y^2 = 2px$ a pour paramètre $KF = |p|$ et tourne sa concavité du côté des x positifs pour $p > 0$, du côté des x négatifs pour $p < 0$.

376. Remarques. — 1° Dans le repère rectangulaire XOY de vecteurs de base $\vec{I} = \alpha\vec{i}$ et $\vec{J} = \beta\vec{j}$, on obtient pour tout point M (x, y) : $x = \alpha X$, $y = \beta Y$ et :

$$y^2 = 2px \iff (\beta Y)^2 = 2p\alpha X \iff Y^2 = 2\frac{p\alpha}{\beta^2}X.$$

L'équation conserve la même forme : $Y^2 = 2PX$ en posant $\frac{p\alpha}{\beta^2} = P$.

2° Dans un repère rectangulaire xOy, la courbe $y = ax^2 \iff x^2 = \frac{1}{a}y$ est une parabole d'axe Oy, tangente en O à Ox. Si le repère xOy est orthonormé, le foyer est le point $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ et la directrice la droite $y = -\frac{1}{4a}$.

Plus généralement l'équation $y = ax^2 + bx + c$ qui s'écrit :

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y - \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

est l'équation d'une parabole dont l'axe est la droite $x = -\frac{b}{2a}$ et la tangente au sommet : $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

377. Régions limitées par la parabole $y^2 = 2px$. — On sait (n° 373) qu'un point M (x,y) est extérieur ou intérieur à la parabole (F, D) suivant que MF est supérieur ou inférieur à la distance MH à D (fig. 314), donc (n° 375, formule 1) suivant que la différence $MF^2 - MH^2 = y^2 - 2px$ est positive ou négative en ce point.

Un point M (x, y) *est extérieur ou intérieur à la parabole* $y^2 - 2px = 0$ *suivant qu'en ce point l'expression* $y^2 - 2px$ *est positive ou négative.*

378. Tangente et normale à la parabole. — 1° En tout point M(x, y) de la parabole $y^2 = 2px$ (fig. 317), l'ordonnée $y = \pm\sqrt{2px}$ est une fonction de x. Cette fonction admet une dérivée y' et :

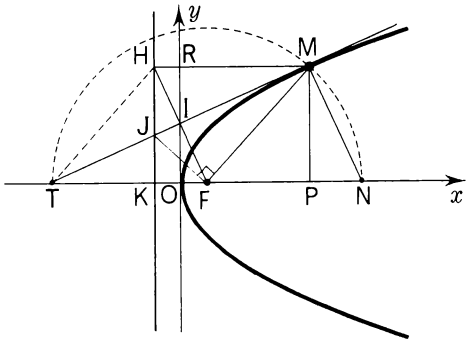


Fig. 317

$$y^2 = 2px \implies 2yy' = 2p \iff y' = \frac{p}{y}.$$

L'équation de la tangente en M (x, y) s'écrit :

$$Y - y = \frac{p}{y}(X - x)$$

soit : $\boxed{yY = p(X + x)}$ (1)

et celle de la normale :

$$\boxed{Y - y = -\frac{y}{p}(X - x).} \quad (2)$$

2° Si on pose $y = t$, on obtient pour tout point M (x, y) de la parabole :

$$x = \frac{t^2}{2p}; \qquad y = t. \quad (3)$$

On sait (n° 172) que le vecteur $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ de composantes : $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{p}$ et $\frac{dy}{dt} = 1$ est dirigé suivant la tangente en M à la parabole. Cette tangente a donc pour paramètres directeurs $\left(\frac{t}{p}, 1\right)$ ou (t, p) et son équation s'écrit :

$$\frac{X - \frac{t^2}{2p}}{t} = \frac{Y - t}{p} \iff tY = p\left(X + \frac{t^2}{2p}\right). \quad (4)$$

De même l'équation de la normale s'écrit :

$$\left(X - \frac{t^2}{p}\right) t + p\,(Y - t) = 0 \iff Y - t = -\frac{t}{p}\left(X - \frac{t^2}{p}\right). \qquad (5)$$

Compte tenu des valeurs (3) de x et y, on retrouve les équations (1) et (2).

379. Sous-tangente et sous-normale. — Désignons (fig. 317) par P la projection orthogonale du point M sur l'axe de la parabole, T et N les intersections respectives de la tangente et de la normale en M avec cet axe.

Les segments PT ***et*** PN, ***projections sur l'axe de la parabole de la tangente*** MT ***et de la normale*** MN, ***sont appelés respectivement sous-tangente et sous-normale relatives au point*** M.

Les abscisses des points T et N s'obtiennent en faisant $Y = 0$ dans les équations (1) et (2). On obtient :

$\overline{OT} = X_T = -x$. Or $\overline{OP} = x$, donc $\overline{OT} + \overline{OP} = 0$.

$\overline{ON} = X_N = x + p$. Donc $\overline{ON} = \overline{OP} + p$ et $\overline{PN} = p$.

Le point O est le milieu du segment PT et $\overrightarrow{PN}$ a une mesure constante égale à p. De plus : $\overline{OT} + \overline{ON} = p = 2\,\overline{OF}$, ce qui montre que F est le milieu du segment TN. Ainsi :

1° ***Le milieu de la sous-tangente coïncide avec le sommet de la parabole.***

2° ***La sous-normale a une mesure constante égale au paramètre de la parabole.***

3° ***Le foyer est le milieu du segment découpé sur l'axe par la tangente et la normale en un point de la parabole.***

On construira la tangente en M en joignant ce point au symétrique T de P par rapport à O. On construira la normale en portant sur l'axe la parabole $\overline{PN} = p$ et en joignant MN.

380. Théorème. — ***La tangente et la normale en*** M ***sont respectivement la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure de l'angle*** FMH.

Le segment MF est la médiane relative à l'hypoténuse du triangle rectangle TMN (fig. 317). Donc $MF = FN = FT$.

Or par définition : $MF = MH \implies MF = MH = FN = TF$ et $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{TF}$.

Le quadrilatère HMFT est donc un losange dont la diagonale MT est bissectrice intérieure de l'angle FMH. Par suite, la normale MN en est la bissectrice extérieure.

381. Corollaires. — 1° Les diagonales MT et FH du losange HMFT (fig. 317) sont médiatrices l'une de l'autre et le centre I de ce losange, milieu de FH, appartient à la tangente au sommet Oy:

Le symétrique du foyer par rapport à une tangente quelconque appartient à la directrice de la parabole.

La projection orthogonale du foyer sur une tangente à la parabole appartient à la tangente au sommet.

2° Soit J l'intersection de la directrice D et de la tangente MT. Les points F et H étant symétriques par rapport à MJ, on voit que la tangente MT est bissectrice de l'angle FJH et que l'angle MFJ est égal à l'angle droit MHJ.

La portion de tangente comprise entre le point de contact et la directrice est vue du foyer de la parabole sous un angle droit.

3° L'égalité $FM = FN = FT$ montre que le cercle de centre F passant par M coupe l'axe de la parabole en T et N, si bien que la première construction par points de la parabole (n° 371) permet d'obtenir la tangente et la normale en M.

De même la deuxième construction qui utilise la médiatrice de FH fournit, en même temps que le point M, la tangente en M.

382. Paraboles homofocales. — ***Deux ou plusieurs paraboles sont dites homofocales si elles ont même foyer et même axe*** (fig. 318).

1° Il existe une infinité de paraboles homofocales admettant un point donné O pour foyer et la droite Ox pour axe. L'une d'elles est déterminée par la donnée de sa directrice D perpendiculaire à Ox. Si p désigne le paramètre algébrique de cette parabole, sa directrice a pour équation $x = -p$ et la relation $MO = M\varphi$ ou $MO^2 = M\varphi^2$ s'écrit :

$$x^2 + y^2 = (x + p)^2 \iff \boxed{y^2 = 2px + p^2.}$$

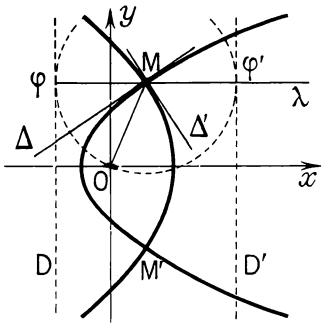


Fig. 318

2° Par un point donné M du plan passent deux paraboles Γ et Γ′ de cette famille. Leurs directrices D et D′ sont les parallèles à Oy tangentes en φ et φ' au cercle de centre M passant par O. Les tangentes en M à ces deux paraboles sont les bissectrices de l'angle OMφ. Elles sont donc rectangulaires et les paraboles sont orthogonales en M ainsi qu'en M′ symétrique de M par rapport à Ox :

Les paraboles d'une famille de paraboles homofocales constituent un réseau orthogonal.

3° Il existe une parabole et une seule de cette famille tangente à une droite donnée Δ non parallèle à Ox. Sa directrice D passe par le symétrique φ du foyer O par rapport à Δ.

383. Théorème. — ***Le lieu des centres des cercles tangents à un cercle donné*** (F) ***et à une droite donnée*** Δ ***se compose en général de deux paraboles homofocales de foyer*** F.

Tout cercle tangent à un cercle et à une droite donnés est invariant dans l'une ou l'autre des deux inversions qui échangent la droite et le cercle (n° 362).

Si (fig. 319) le cercle M est tangent au cercle F(R) et à la droite Δ en deux points N et N′ homologues dans l'inversion (ω, k), la parallèle menée par F à la droite ωNN′ coupe la droite MN′ en un point φ tel que $\overrightarrow{N'\varphi} = \overrightarrow{\omega F}$. Le lieu de φ est une droite D parallèle à Δ. Le triangle MFφ, homothétique du triangle MNN′, est isocèle et par suite : MF = Mφ. Lorsque N décrit le cercle F et N′ la droite Δ, le point φ décrit la droite D en entier :

Le lieu du point M *est la parabole* Γ *de foyer* F *et de directrice* D.

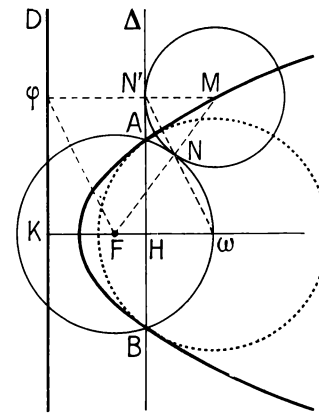


Fig. 319

Le paramètre KF de cette parabole est égal à la distance Hω du point ω à la droite Δ car : $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{\varphi N'} = \overrightarrow{F\omega}$ donc $\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{H\omega}$.

En considérant l'inversion (ω', k') qui échange également le cercle (F, R) et la droite Δ, on obtient une deuxième parabole Γ′ de foyer F d'axe FH et dont la directrice D′ est symétrique de D par rapport à Δ. Toutefois, si la droite Δ est tangente en ω' au cercle F(R), cette deuxième parabole dégénère en la droite Fω'.

384. Remarque. — Si le cercle F(R) et la droite Δ sont sécants en A et B, l'inversion (ω, k) admet A et B pour points doubles et le cercle $(\omega, \omega A)$ pour cercle d'inversion.

Les points A et B appartiennent à la parabole Γ, car, lorsque N vient en A, il en est de même de N′ et M. La droite ωN, parallèle à Fφ est perpendiculaire à la tangente en M à Γ. La droite ωA, position limite de ωN, est donc la normale en A à Γ :

Le cercle d'inversion (ω, ωA) *est bitangent en* A *et* B *à la parabole* Γ.

EXERCICES

— Construire une parabole (on se bornera à déterminer son foyer et sa directrice) connaissant :

538. Le foyer et deux points de la courbe.

539. Le foyer et deux tangentes.

540. Le foyer, un point et une tangente.

541. La directrice et deux points de la courbe.

542. La directrice et deux tangentes.

543. La directrice, un point et une tangente.

544. La directrice, un point et le paramètre.

545. Le foyer, un point et le paramètre.

546. Déterminer l'enveloppe de la tangente Δ au sommet d'une parabole Γ de foyer donné F passant par un point donné A.

547. Une parabole Γ de foyer F passe par le point donné A et admet pour tangente au sommet une droite donnée Δ. Montrer que le cercle de diamètre AF est tangent à Δ et trouver le lieu de F.

— Construire une parabole Γ connaissant un point A de la courbe et :

548. Le foyer F et un point P de la tangente au sommet Δ.

549. Le foyer F et l'axe Fx de la courbe.

550. Le sommet S et l'axe Sx de la courbe.

551. Le paramètre p et la tangente au sommet Δ.

552. Le foyer F et la longueur de la normale en A limitée à l'axe.

553. 1° Construire les points communs et la tangente commune à deux paraboles Γ et Γ′ de même foyer F et de directrices respectives D et D′.

2° Évaluer l'angle sous lequel se coupent Γ et Γ′ en fonction de l'angle α de leurs axes orientés. Dans quel cas Γ et Γ′ sont-elles orthogonales ?

554. On considère une corde AB d'une parabole de foyer F et on désigne par I et J les projections du milieu M de AB sur la directrice D et sur l'axe de la parabole.

1° Montrer que la droite IF est perpendiculaire à AB.

2° La médiatrice de AB coupe l'axe en P. Démontrer que JP est égal au paramètre de la parabole.

555. 1° Deux paraboles se déduisent l'une de l'autre par une translation parallèle à leur axe. Démontrer qu'elles découpent des cordes de même milieu sur toute sécante à ces deux courbes.

2° Trouver le lieu du milieu des cordes d'une parabole issues d'un point donné P de son plan.

556. 1° Construire les normales à une parabole issues d'un point de son axe.

2° Construire les points M d'une parabole tels que la normale MN limitée à son point d'intersection N avec l'axe ait une longueur donnée.

557. Démontrer que toute affinité orthogonale par rapport à la tangente au sommet d'une parabole Γ transforme la parabole Γ en une parabole Γ′ de même axe. Déterminer la relation entre les paramètres p et p' de Γ et de Γ′ et le rapport k de l'affinité.

558. Un point variable M d'une parabole de foyer F se projette en H sur la tangente au sommet. Les perpendiculaires menées du sommet A et du point H à la droite AM coupent respectivement MH en K et AF en P. Démontrer que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{KH} = 4\,\overrightarrow{AF}$. En déduire l'enveloppe de HP et le lieu du point K.

559. On donne un point fixe A et une droite Δ. La perpendiculaire à Δ en un point variable K coupe en M la perpendiculaire menée par A à AK. Trouver le lieu du milieu I de MK et celui du point M.

560. Un point fixe P se projette en A sur une droite Δ. La perpendiculaire à Δ en un point variable H et la perpendiculaire menée de A à PH se coupent en M. Déterminer le lieu du milieu I de HM.

561. On donne une droite fixe Δ, un point fixe F situé à la distance d de Δ et une longueur a. Un point M du plan se projette en H sur Δ. Déterminer dans chacune des hypothèses $a < d$, $a = d$ et $a > d$ le lieu du point M lorsque :

1° $MF + MH = a$. 2° $MF - MH = a$. 3° $MH - MF = a$.

562. 1° Lieu des pieds des normales et des points de contact des tangentes issues d'un point P de leur axe aux paraboles homofocales de foyer F et d'axe Fx.

2° Une parabole variable Γ se déduit d'une parabole Γ_0 par translation parallèle à son axe. Trouver le lieu des pieds des normales et le lieu des points de contact des tangentes à Γ issues d'un point fixe P de son axe.

563. Une parabole variable a pour sommet un point fixe A et reste tangente à une droite donnée Δ. Le foyer F de cette parabole se projette en H sur la droite Δ.

1° Montrer que le cercle FAH est tangent à Δ.

2° Trouver le lieu du milieu de FH et celui du foyer F.

564. Soit M un point variable sur une parabole de sommet A. La perpendiculaire en A à AM coupe la directrice D en J et la perpendiculaire en J à D coupe AM en P. Évaluer le rapport de $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AM}$ et trouver le lieu de P.

565. On considère les paraboles γ admettant une directrice donnée D et passant par un point donné A.

1° Lieu du foyer F de ces paraboles. Construire celles qui passent par un point donné M. Discuter et montrer que M doit se trouver à l'intérieur d'une courbe Γ.

2° La demi-droite AF coupe Γ en P. Démontrer que la parabole γ de foyer F est tangente en P à Γ et en déduire l'enveloppe des paraboles γ.

566. Une corde variable issue d'un point fixe P coupe en A et B une parabole Γ de foyer F. Les points A, B et P se projettent en α, β et J sur la directrice Δ de Γ. On désigne par θ l'angle aigu de AB et de Δ.

1° Montrer que le cercle de diamètre $\alpha\beta$ engendre un faisceau d'axe radical JP et démontrer que le produit $\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cos^2\theta$ est constant. En déduire que :

2° *Pour que quatre points* A, B, C, D *d'une parabole appartiennent à un même cercle il faut et il suffit que les cordes* AB *et* CD *soient également inclinées sur l'axe* ou que le centre de gravité du quadrangle ABCD appartienne à cet axe.

567. Utiliser la propriété précédente pour déterminer :

1° Le quatrième point d'intersection D d'une parabole et d'un cercle passant par trois points A, B, C de cette parabole.

2° Les points d'intersection C et D d'une parabole et d'un cercle passant par deux points A et B de cette parabole (on recherchera le milieu de CD).

568. 1° On mène d'un point extérieur P la tangente PM et la sécante PAB à une parabole. La parallèle à l'axe issue de M coupe AB en I. Démontrer par projection sur la directrice que :

$$PI^2 = PA \cdot PB \text{ et } \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{IA}^2}{\overline{IB}^2}.$$

2° Construire une parabole passant par trois points A, B, C connaissant la direction de l'axe.

3° Construire une parabole passant par les quatre sommets d'un quadrilatère convexe ABCD.

569. 1° On *donne* deux points fixes A et F dont la distance est désignée par $2d$. Deux droites D_1 et D_2 rectangulaires se coupent en A.

a) On suppose D_1 et D_2 fixes ; montrer qu'il existe une parabole (P) admettant F pour foyer et D_1 et D_2 pour tangentes ; construire la directrice de cette parabole.

b) A et F restant fixes, D_1 et D_2 tournent autour de A en restant rectangulaires ; la parabole (P) varie : montrer que sa directrice passe en un point fixe et trouver le lieu de son sommet.

c) A et F restant *seuls* donnés, construire les paraboles (P) passant par un point donné M. Dans quelle région du plan doit se trouver M pour que le problème soit possible ?

2° On remplace les droites D_1 et D_2 par deux droites Δ_1, Δ_2 tournant autour de A et faisant entre elles un angle constant α, et on étudie la parabole variable (π) ayant F pour foyer et Δ_1 et Δ_2 pour tangentes. A et F restant fixes :

a) Montrer que la directrice de (π) reste tangente à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon en fonction de d et de α.

b) Construire les paraboles (π) passant par un point donné M. Étudier le nombre de solutions suivant la position de M dans le plan.

570. Dans un plan fixe Q, on donne une parabole P, de foyer F, de directrice D dont on désigne le paramètre par p. La droite Δ, parallèle à la directrice D et issue de F, coupe la parabole P aux points A et B. Un cercle variable C, ayant pour centre un point O de la parabole P, est tangent à Δ en un point H.

1° Démontrer que le cercle C reste tangent au cercle E de diamètre AB.

2° Le cercle α, de diamètre HA, et le cercle β, de diamètre HB, recoupent le cercle C aux points M et N, respectivement. Démontrer que la droite HM passe par un point fixe I et que la droite HN passe par un autre point fixe J (on pourra utiliser l'inversion de pôle H, de puissance HA . HB). Déterminer le lieu Γ des points M et N quand C varie.

571. Dans un plan fixe, on fait correspondre à tout point M le point M′ tel que le triangle OMM′ soit directement semblable au triangle donné OAA′. On suppose connus les angles $AOA' = \alpha$ et $OAA' = \beta$.

1° Construire M et M′, connaissant le milieu de MM′.

2° Construire M et M′, sachant qu'ils sont respectivement sur deux droites données (D) et (D′). Discuter.

3° Montrer que le lieu de M, quand le cercle OMM′ reste tangent à une droite (δ), est une parabole ; connaissant la distance d du point O à la droite (δ), calculer le paramètre de la parabole et l'angle que fait son axe avec (δ).

4° Quand M décrit un cercle Γ, M′ décrit un cercle Γ'. Calculer l'angle que font entre elles les tangentes menées de O à Γ quand Γ et Γ' sont tangents extérieurement.

572. On donne un segment de droite AB ; M pris entre A et B décrit ce segment ; d'un même côté de AB on construit les carrés de côtés AM, MB, soient AMCD, MBEF, de centres I et J.

1° Quels sont les segments de droite décrits par I et J ? Montrer que les trois droites AE, BD, IJ se coupent en un point P de MC et que $\overline{PM}^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PF}$.

2° En prenant pour axe la médiatrice de AB (qu'on appellera Oy) et AB comme axe des x, posant $AB = 2a$, on déterminera le lieu du point P, arc de parabole dont on précisera les éléments.

3° Soit ω le point de rencontre des lieux de I et J, O le milieu de AB. Montrer que ω, I, J, M, O sont sur un même cercle. Montrer que J se déduit de I par une rotation d'un droit autour de O. En déduire que l'enveloppe de IJ est la parabole trouvée au 2°.

573. 1° Le lieu des points dont la différence des carrés des distances à un point fixe ω et à une droite fixe Δ est une constante k, est une parabole Γ.

2° Le lieu des points M dont la distance MH à une droite fixe Δ est égale à la longueur de la tangente MT à un cercle fixe $\omega(\rho)$ est une parabole Γ.

574. Préciser les éléments des paraboles lieux des centres des cercles tangents à un cercle F (R) et à une droite donnée Δ située à la distance d de F suivant que l'on a : $d > R$, $d = R$ ou $d < R$.

575. Un cercle variable de centre M passe par un point fixe A et découpe sur une droite donnée Δ un segment BC de longueur constante $2a$.

1° Montrer que le cercle A (a) est orthogonal au cercle de centre M tangent à Δ.

2° Trouver le lieu du point M et préciser ses éléments.

576. Un point P décrit la perpendiculaire en A au segment donné AB. La perpendiculaire en P à AP et la perpendiculaire menée de A à BP se coupent en M.

1° Le cercle de centre M et de rayon MP est orthogonal au cercle de diamètre AB. En déduire le lieu de M.

2° Le cercle de centre B et de rayon BA est orthogonal au cercle de diamètre MP. En déduire le lieu du milieu I de MP.

577. On donne un segment AB et une droite quelconque Δ. La perpendiculaire en P à Δ et la perpendiculaire menée de A à BP se coupent en M.

1° On suppose que le point A est sur Δ. Montrer que le cercle de centre M et tangent à Δ est orthogonal au cercle O de diamètre AB. En déduire que le lieu de M est la parabole bitangente au cercle O en A et en A′ projection de B sur Δ.

2° Lorsque A se projette en K sur Δ, la translation de vecteur $\overrightarrow{KA}$ transforme Δ, P et B en Δ', P′ et B′. Déterminer comme ci-dessus le lieu de M.

578. Dans le triangle ABC le côté BC est fixe et le point A décrit une parallèle Δ au côté BC. Soit A′ la projection de A sur BC et H l'orthocentre du triangle ABC.

1° Le cercle de diamètre AH est orthogonal au cercle de diamètre BC. En déduire le lieu du milieu α de AH et par affinité, celui du point H.

2° Montrer que le sommet D du parallélogramme A'ACD est fixe et que le cercle de centre H et tangent à BC, est orthogonal au cercle de diamètre BD. Retrouver ainsi le lieu de H.

579. Soit un cercle fixe C de centre O et une droite fixe D qui coupe C en deux points A et B.

1° Démontrer que tout point M du plan tel que sa puissance par rapport au cercle C soit égale au carré de sa distance MK à la droite D (K étant la projection orthogonale de M sur D) est centre d'un cercle λ tangent à D et orthogonal à C. Énoncer et démontrer la réciproque.

2° A l'aide d'une inversion de pôle A, démontrer que les cercles λ (c'est-à-dire les cercles tangents à D et orthogonaux au cercle C) sont aussi tangents au cercle fixe γ qui passe en A, en B et en O.

3° A l'aide de la même inversion, démontrer que les cercles tangents à D et tangents à γ comprennent, outre les cercles λ, une deuxième famille de cercles λ_1 qui sont tous orthogonaux à un cercle fixe C_1 qu'on précisera.

4° Démontrer que le lieu géométrique des points M définis au 1° est une parabole P dont le foyer est F, centre de γ et dont on précisera la directrice.

580. Dans le repère orthonormé xOy on désigne par M (p, q) le point de coordonnées réelles p et q et on considère l'équation en z : $z^2 - 2pz + q = 0$ (1) dont les racines peuvent être réelles ou complexes. Ainsi, à tout point M, est associée une équation (1) et réciproquement.

1° Déterminer et représenter sur une même figure les ensembles A, B, C des points M tels que (1) possède : *a*) des racines complexes ; *b*) des racines réelles et distinctes ; *c*) une racine double. Calculer les racines dans chacun des trois cas.

2° Former l'équation de la tangente à C en son point d'abscisse c ; montrer que si M (p, q) appartient à B, l'équation (1) donne les abscisses des points de C où la tangente passe en M.

— Dans les deux questions suivantes, k désigne un nombre réel positif donné ; pour répondre à ces questions, on pourra examiner successivement les cas où M appartient à A ou à B.

3° Déterminer l'ensemble E_k des points M tels que le module de la différence entre les racines de l'équation (1) associée à M soit inférieur à $2k$. Représenter sur une figure les ensembles A, B, C, E_k et hachurer ce dernier.

4° Déterminer l'ensemble F_k des points M tels que les modules des racines de l'équation (1) associée à M soient, *tous deux*, inférieurs à k. Représenter sur une figure les ensembles A, B, C, F_k et hachurer ce dernier.

5° On donne un nombre positif k ; quel est le plus grand nombre, k', tel que l'ensemble F_k, soit inclus dans l'ensemble E_k ? Est-il possible de répondre en tout ou en partie à cette question sans utiliser les résultats des deux questions précédentes ?

6° On suppose que M appartient à B et l'on désigne par Γ_M le cercle qui a son centre sur la droite $x'Ox$ et qui coupe cette droite aux points dont les abscisses sont les racines de l'équation (1) associée à M. Écrire l'équation du cercle Γ_M. Montrer qu'un sous-ensemble de cercles Γ_M est un faisceau linéaire si, et seulement si, les points M correspondants appartiennent à une même droite, Δ, non parallèle à Oy, qu'on déterminera par une équation de la forme $y = mx + h$.

Montrer que la nature du faisceau est liée au nombre des points communs à Δ et à C ; peut-on caractériser géométriquement, lorsqu'ils existent, les points de Poncelet du faisceau ?

581. Dans le repère orthonormé xOy, on considère la droite variable (D) d'équation :

$$my^2 + 2mx + 2a = 0,$$

où a est une constante réelle et m un paramètre.

1° Discuter le nombre des droites (D) passant par un point donné A (x_0, y_0) du plan. Construire le lieu C des points A où passent deux droites confondues.

2° Trouver le lieu des points A où passent deux droites (D) perpendiculaires.

582. Sur un axe $x'x$ d'origine O on donne deux points fixes, A et B, tels que $\overline{OA} = -a$ et $\overline{OB} = b$; a et b sont deux nombres réels tels que $a > b > 0$. Un axe $z'z$ tourne autour de O.

1° N désignant le symétrique de A par rapport à $z'z$ et P celui de B par rapport à $z'z$, déterminer chacun des ensembles de points auxquels appartiennent N et P.

2° Les droites AP et NB se coupent en M.

a) Montrer que M appartient à $z'z$.

b) La perpendiculaire en M à $z'z$ coupe $x'x$ en O'. Prouver que O' est un point fixe.

c) En déduire que l'ensemble des points M, lorsque $z'z$ varie, est un cercle (M), dont on calculera le rayon et dont on précisera l'abscisse du centre, noté F.

3° Démontrer que le cercle (M) précédent et le cercle (MAB) circonscrit au triangle MAB sont orthogonaux. En déduire la tangente en M au cercle (MAB) et l'enveloppe de cette tangente.

4° On pose $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta \pmod{2\pi}$.

a) Déterminer l'intervalle de variation de θ lorsque M décrit tout l'ensemble auquel il appartient.

b) Calculer BM^2 en fonction de a, b et θ.

c) Faisant l'hypothèse supplémentaire $a = 2b$, étudier les variations et construire la courbe représentative de la fonction $y = BM$.

583. Ce problème est un problème plan ; les axes $x'Ox$ et $y'Oy$ sont orthonormés et tous les segments sont mesurés avec le même segment unitaire.

On considère la parabole (P) de foyer O et de directrice $y = 2$.

1° Former l'équation de (P).

2° Soit la droite (D) $y = ax + b$; comment choisir a et b pour que (P) et (D) soient tangentes ?

3° On envisage la transformation ponctuelle (T) qui, au point m (x, y), associe le point M (X, Y) tel que :

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad Y = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

On pose $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om}) = \alpha$, $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \beta$ (mod. 2π). Calculer sin α, cos α, sin β, cos β, OM $\times$ Om en fonction de x et de y, puis préciser la transformation (T) ; donner alors, si possible sans aucun calcul, les expressions de x et de y en fonction de X et de Y.

4° m est dorénavant, et pour toute la suite, la projection orthogonale de O sur (D) ; calculer successivement :

x et y	en fonction de	a	et de	b ;
a et b	en fonction de	x	et de	y ;
a et b	en fonction de	X	et de	Y.

5° (D) est maintenant tangente à (P) ; préciser l'ensemble (ou lieu) (L) des points M. Quelle est la transformation classique (non ponctuelle) qui permute (P) et (L) ?

584. Soit un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ et un point I de coordonnées a et b. Écrire l'équation du cercle (C) de centre I, de rayon R, puis choisir R pour que la puissance de l'origine O par rapport au cercle (C) soit égale à 1. Soit E l'ensemble des cercles (C) ainsi définis. On propose, dans toute la suite du problème, l'étude de certains sous-ensembles, E_1, E_2, E_3, de l'ensemble E.

1° Soit E_1 l'ensemble des cercles (C_1), appartenant à E et tels que $b = 2a$.

a) Quel est l'ensemble des centres de ces cercles ?

b) Déterminer les cercles (C_1) qui passent par un point donné M, de coordonnées $(x_0, +1)$. Discuter.

c) Caractériser géométriquement l'ensemble E_1 et donner une solution géométrique de la question précédente.

2° Soit E_2 l'ensemble des cercles (C_2), appartenant à E, qui passent par le point P $(+1, +1)$.

a) Quel est l'ensemble des centres de ces cercles ?

b) Démontrer que ces cercles passent par un deuxième point fixe, P'.

c) Déterminer par le calcul et construire géométriquement les cercles (C_2) tangents à $x'Ox$.

3° Soit E_3 l'ensemble des cercles (C_3) appartenant à E et tangents à la droite (D) d'équation $y = -1$.

a) Quel est l'ensemble des centres de ces cercles ?

b) Retrouver géométriquement cet ensemble en faisant une inversion de centre O, de puissance 1, et en montrant que les cercles (C_3) sont tangents à un cercle fixe.

585. Dans le repère orthonormé xOy, on donne la parabole (P) d'équation $x^2 = 2py$. Soient M' et M'' les points de (P) d'abscisses x' et x''.

1° Former l'équation de la droite M'M''. Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que M'M'' passe par le foyer F de la parabole est : $x'x'' = -p^2$.

2° Dans ces conditions montrer que les tangentes en M' et M'' à la parabole sont perpendiculaires.

3° Dans les mêmes conditions montrer que l'intersection N des normales en M' et M'' à la parabole est telle que la droite joignant N au milieu de M'M'' est parallèle à l'axe Oy.

ELLIPSE

385. Définition. — ***L'ellipse est le lieu géométrique des points du plan dont la somme des distances à deux points fixes*** F ***et*** F′ ***est constante et égale à une longueur*** $2a$.

Les points F et F′ sont les *foyers* de l'ellipse (fig. 320). Les segments MF et MF′ sont les *rayons vecteurs* du point M de cette ellipse. Ils vérifient la relation :

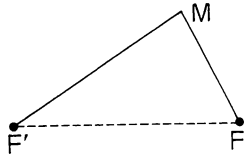


Fig. 320

$$\boxed{MF + MF' = 2a.}$$

La distance $FF' = 2c$ est la *distance focale*. L'inégalité $MF + MF' > FF'$ entraîne $a > c$. Le rapport $= \frac{c}{a} = e$, inférieur à l'unité est l'*excentricité* de l'ellipse. Si $c = 0$, les foyers F et F′ sont confondus et l'ellipse est un cercle de rayon a. Si $c = a$ l'ellipse se réduit au segment FF′.

Toute homothétie positive de rapport k transforme le triangle MFF′ en un triangle semblable $M_1F_1F'_1$ tel que : $M_1F_1 + M_1F'_1 = 2ka$ et $F_1F'_1 = 2kc$. Le lieu du point M_1 est donc une ellipse d'excentricité e :

Toute courbe semblable à une ellipse est une ellipse de même excentricité.

386. Tracé continu de l'ellipse. — Fabriquons un anneau de fil fin et inextensible de longueur l, entourant deux épingles (ou les pointes sèches d'un compas) piquées en F et F′ (fig. 321). Si nous maintenons tendu le fil de l'anneau, à l'aide de la pointe du crayon placée en M, cette pointe en se déplaçant décrit d'un trait continu une ellipse de foyers F et F′ telle que $MF + MF' = l - FF'$.

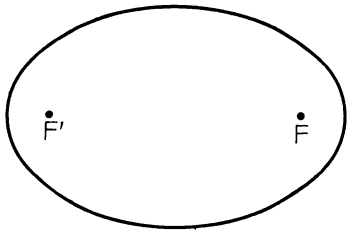


Fig. 321

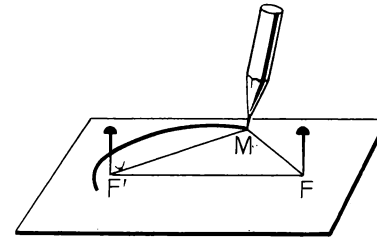


Fig. 322

En répétant ce tracé avec différentes valeurs pour FF′, on voit que l'ellipse est une courbe de forme ovale (fig. 322) qui ressemble à un cercle d'autant plus aplati que l'excentricité est voisine de 1.

387. Construction par points d'une ellipse. — Pour construire géométriquement des points appartenant à une ellipse de foyers F et F′, il suffit de prendre (fig. 323) les intersections M et M′ de deux cercles de centres F et F′ et de rayons respectifs ρ et ρ' tels que : $\rho + \rho' = 2a$. Ces deux cercles se coupent effectivement lorsque $|\rho - \rho'| \leqslant FF' = 2c$, c'est-à-dire si ρ et ρ' sont compris entre $a - c$ et $a + c$.

En faisant varier ρ entre ces deux limites, on obtient autant de points de l'ellipse qu'on le juge désirable. Il suffit de les joindre par une courbe continue que l'on tracera avec le plus de soin possible.

388. Symétries de l'ellipse. — Désignons (fig. 324) par $x'x$ la droite FF′, par $y'y$ la médiatrice du segment FF′ et par O le milieu de FF′. Si un point M appartient à l'ellipse, il en est de même des points M′, M_1 et M'_1 respectivement symétriques de

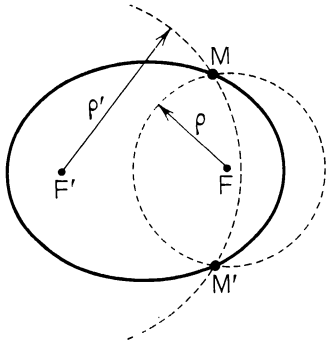


Fig. 323

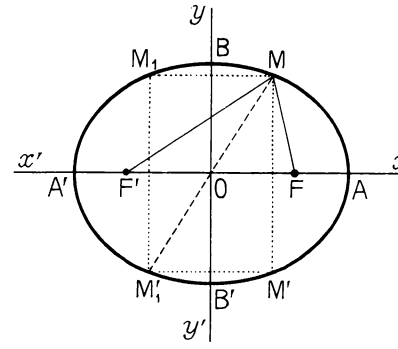


Fig. 324

M par rapport à $x'x$, à $y'y$ et au point O. L'ellipse admet donc les droites $x'x$ et $y'y$ pour axes de symétrie et le point O pour centre de symétrie :

L'axe de symétrie $x'x$ ***est appelé axe focal, l'axe de symétrie*** $y'y$ ***axe non focal et le point*** O ***centre de l'ellipse.***

Deux points tels que M et M'_1, symétriques par rapport à O, sont dits *diamétralement opposés sur l'ellipse* et le segment MM'_1 est appelé *diamètre* de l'ellipse.

389. Sommets et longueurs des axes. — Les sommets d'une ellipse sont les points situés sur les axes de symétrie.

Si un point M de la droite $x'x$ appartient à l'ellipse (fig. 325), il ne peut être situé entre F et F′ car on aurait : $MF + MF' = FF' = 2c < 2a$.

Il appartient donc à l'un des prolongements du segment FF′ et :

$$MF + MF' = 2\,MO = 2a.$$

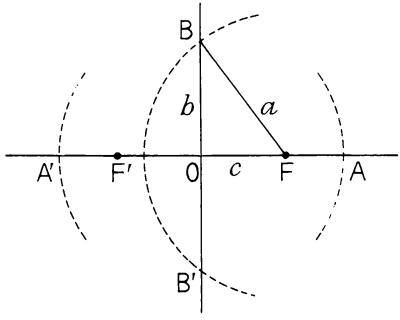


Fig. 325

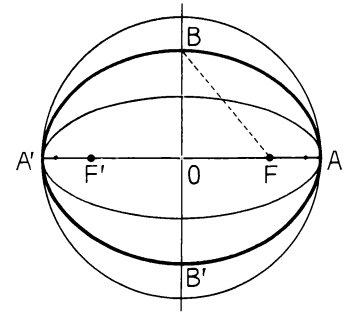


Fig. 326

L'ellipse admet donc pour sommets les points A et A′ de l'axe $x'x$ tels que

$$OA = OA' = a.$$

Tout point de l'axe $y'y$ étant équidistant de F et de F′, les intersections B et B′ de cet axe avec le cercle de centre F et de rayon a, sont des sommets de l'ellipse. Posons $OB = OB' = b$. La relation $\overline{OB}^2 = \overline{FB}^2 - \overline{OF}^2$ donne :

$$b^2 = a^2 - c^2 \qquad \text{ou} \qquad \boxed{a^2 = b^2 + c^2.}$$

La longueur $AA' = 2a$ *est le grand axe de l'ellipse et la longueur* $BB' = 2b$ *est le petit axe de l'ellipse.*

Une ellipse est définie par ses quatre sommets A, A′, B ***et*** B′.

La longueur $2a$ est la longueur AA′ et les foyers F et F′ sont les intersections de l'axe focal AA′ par le cercle de centre B et de rayon a.

390. Étude de la forme de l'ellipse. — Donnons-nous (fig. 326) le grand axe $AA' = 2a$ d'une ellipse et faisons varier $OF = c$ de 0 à a. La longueur $OB = b$ varie de a à 0. L'ellipse, initialement confondue avec le cercle de diamètre AA′, s'aplatit de plus en plus tandis que ses foyers F et F′ décrivent les segments OA et OA′. Finalement lorsque F et F′ viennent se confondre avec A et A′, l'ellipse se réduit au segment AA′.

Notons que le rapport $\dfrac{a-b}{a}$, qui varie de 0 à 1, est parfois appelé *aplatissement de l'ellipse.*

391. Intérieur et extérieur de l'ellipse. — Lorsqu'un point M (fig. 327) parcourt une demi-droite F′λ issue du foyer F′, la somme MF + MF′ croît depuis la valeur $2c$ jusqu'à une valeur infiniment grande. En effet :

$$M_1F < M_1M_2 + M_2F \implies M_1F + M_1F' < M_2F + M_2F'.$$

Cette somme MF + MF′ prend une fois et une seule la valeur $2a$. Il existe donc sur la demi-droite F′λ un point M et un seul appartenant à l'ellipse. Il en résulte que :

L'ellipse est une courbe fermée qui partage le plan en deux régions.

La région qui contient les foyers est l'*intérieur de l'ellipse*, et l'autre l'*extérieur de l'ellipse.* Tout point M_1 situé sur le segment F′M est *intérieur* à l'ellipse. D'après ce qui précède on a :

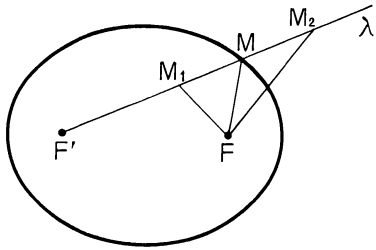


Fig. 327

$$M_1F + M_1F' < MF + MF' = 2a.$$

Donc : $\boxed{M_1F + M_1F' < 2a.}$

Tout point M_2 situé sur le prolongement Mλ de F′M est *extérieur* et :

$$M_2F + M_2F' > MF + MF'.$$

Donc : $\boxed{M_2F + M_2F' > 2a.}$

Par réciprocité on voit que :

Un point donné est intérieur ou extérieur à une ellipse donnée suivant que la somme de ses distances aux foyers de cette ellipse est inférieure ou supérieure au grand axe de l'ellipse.

392. Théorème. — ***L'ellipse est le lieu géométrique des centres des cercles tangents à un cercle fixe et passant par un point fixe intérieur à ce cercle.***

1° Considérons un point M d'une ellipse de foyers F et F′ et de grand axe $2a$ (fig. 328) et prolongeons le rayon vecteur F′M d'une longueur $M\varphi = MF$. Nous obtenons :

$$F'\varphi = MF + MF' = 2a.$$

Le point φ est donc sur le cercle de centre F′ et de rayon $2a$ qui admet le foyer F pour point intérieur. Le cercle de centre M passant par F est tangent en φ au cercle précédent.

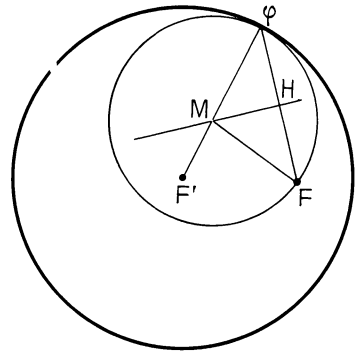


Fig. 328

2° Réciproquement considérons un cercle de centre F′ et de rayon $2a$, un point fixe intérieur F et un cercle quelconque de centre M, passant par F et tangent en φ au cercle F′. Les points F′, M et φ sont alignés dans cet ordre et comme $MF = M\varphi$ on obtient :

$$MF + MF' = M\varphi + MF' = F'\varphi = 2a.$$

Le point M appartient donc à l'ellipse de foyers F et F′ et de grand axe $2a$.

**393. Cercles directeurs. — *On appelle cercles directeurs d'une ellipse, de foyers* F *et* F′ *et de grand axe* $2a$*, les cercles de centres respectifs* F *et* F′ *et de rayon* $2a$.

D'après le théorème précédent :

L'ellipse est le lieu des centres des cercles passant par un foyer et tangents au cercle directeur relatif à l'autre foyer.

On appelle *cercle principal de l'ellipse* le cercle ayant pour diamètre le grand axe AA′ de cette ellipse (fig. 326). C'est le cercle de centre O et de rayon a. Comme O est le milieu de FF′, il en résulte que :

Le cercle principal est l'homologue du cercle directeur F′($2a$) ***dans l'homothétie*** (F, 1/2).

Notons que cette homothétie transforme le cercle de centre M tangent en φ au cercle F′ en un cercle de diamètre MF tangent au cercle principal.

394. Deuxième construction par points de l'ellipse. — L'intersection M d'un rayon quelconque F′φ du cercle directeur F′ et de la médiatrice HM du segment Fφ, est le centre d'un cercle passant par F et tangent en φ au cercle F′ (fig. 328). Le point M est donc un point de l'ellipse. En répétant cette construction, on obtient un nouveau tracé par points de l'ellipse.

HYPERBOLE

395. Définition. — *L'hyperbole est le lieu géométrique des points du plan dont la différence des distances à deux points fixes* F *et* F′ *est constante et égale à une longueur* $2a$.

Les points F et F′ sont les *foyers* de l'hyperbole (fig. 329) et les segments MF et MF′ les *rayons vecteurs* du point M de l'hyperbole. Ils vérifient la relation :

$$\boxed{|\ MF' - MF\ | = 2a.} \qquad (1)$$

La distance $FF' = 2c$ est la *distance focale*. L'inégalité $|\ MF - MF'\ | < FF'$ entraîne $a < c$ et le rapport $\frac{c}{a} = e > 1$ est l'*excentricité* de l'hyperbole.

Toute homothétie positive de rapport k transforme le triangle MFF′ en un triangle

semblable $M_1F_1F'_1$ tel que $|M_1F'_1 - M_1F_1| = 2ka$ et $F_1F'_1 = 2kc$. Le lieu de M_1 est par suite une hyperbole de même excentricité e que l'hyperbole proposée.

Toute courbe semblable à une hyperbole est une hyperbole de même excentricité.

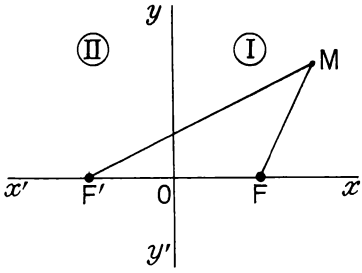


Fig. 329

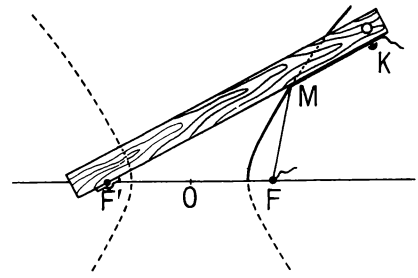


Fig. 330

396. Tracé continu de l'hyperbole. — Considérons (fig. 330) une règle à laquelle est fixé un petit anneau lui permettant de pivoter sans glisser, autour d'une pointe piquée en F′, et un fil fin, souple, inextensible attaché d'une part à une pointe piquée en F et d'autre part à l'extrémité K de la règle. Si nous maintenons, le fil tendu à l'aide de la pointe du crayon placée en M contre la règle, cette pointe en se déplaçant décrit un arc de l'hyperbole de foyers F et F′, dont la longueur $2a$ est la différence entre la longueur F′K et la longueur FMK $= l$ du fil.

En retournant la règle puis en échangeant les rôles de F et F′, on obtient ainsi quatre arcs analogues, mais on ne peut obtenir toute la courbe, car on est toujours limité par la longueur de la règle.

397. Branches de l'hyperbole. — Désignons (fig. 329) par $x'x$ la droite FF′, par $y'y$ la médiatrice de FF′ et par O le milieu de FF′. La relation (1) du n° 395 se décompose en :

$$MF' - MF = 2a \qquad (2) \qquad \text{et} \qquad MF - MF' = 2a. \qquad (3)$$

Les points qui vérifient la relation (2) sont situés dans le demi-plan (I) limité par $y'y$ et contenant F. Ceux qui vérifient la relation (3) sont situés dans le demi-plan (II) contenant F′. Comme il ne peut exister de points vérifiant les deux relations (2) et (3), l'hyperbole se compose de deux parties distinctes que l'on appelle les *branches de l'hyperbole.*

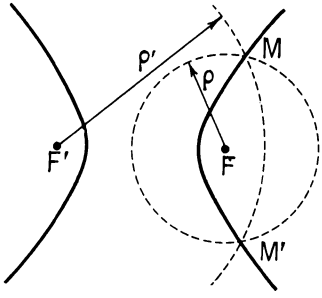


Fig. 331

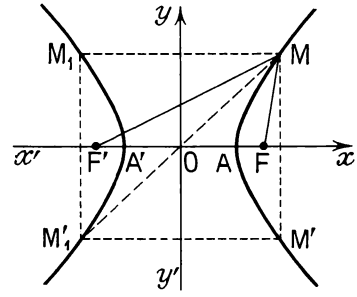


Fig. 332

398. Construction par points de l'hyperbole. — Pour obtenir des points de l'hyperbole, il suffit (fig. 331) de prendre les intersections M et M′ de deux cercles de centres F et F′ dont les rayons respectifs ρ et ρ' vérifient la relation $|\rho' - \rho| = 2a$.

Puisque $FF' = 2c > 2a$, ces deux cercles se coupent si $\rho + \rho' \geqslant FF' = 2c$, c'est-à-dire si le plus petit de leurs rayons est au moins égal à $c - a$. En faisant varier ρ et ρ' on obtient un tracé par points de l'hyperbole.

Comme ρ et ρ' peuvent prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut, il y a toujours des points de la courbe que l'on ne peut construire : *l'hyperbole possède des branches infinies.*

399. Symétries de l'hyperbole. — Si un point M appartient à l'hyperbole (fig. 332) il en est de même des points M′, M_1 et M'_1 respectivement symétriques de M par rapport à $x'x$, $y'y$ et par rapport à O. L'hyperbole admet donc les droites $x'x$ et $y'y$ pour axes de symétries et le point O pour centre de symétrie.

L'axe de symétrie $x'x$ est appelé axe focal ou axe transverse, l'axe de symétrie $y'y$ axe non focal ou axe non transverse et le point O, centre de symétrie de la courbe.

La symétrie $x'x$ transforme chaque branche en elle-même tandis que les symétries O et $y'y$ échangent ces deux branches. Deux points tels que M et M'_1 sont dits *diamétralement opposés* et le segment MM'_1 est un *diamètre* de l'hyperbole.

400. Sommets de l'hyperbole. — Il n'y a aucun point M de l'hyperbole sur $y'y$, car cela conduirait à $|MF' - MF| = 0 \neq 2a$, ni sur les prolongements du segment FF′, car cela conduirait à $|MF' - MF| = FF' > 2a$. Pour tout point M du segment FF′, on a : $\overline{MF} + \overline{MF'} = 2\,\overline{MO}$ et $|MF' - MF| = 2\,MO$. Les points A et A′ du segment FF′ tels que $OA = OA' = a$ appartiennent à l'hyperbole et sont appelés *sommets de l'hyperbole* (fig. 332). La longueur $AA' = 2a$ est la longueur de l'axe focal de l'hyperbole.

401. Intérieur et extérieur de l'hyperbole. — Étudions (fig. 333) comment varie la différence (MF′ — MF) lorsque M décrit une demi-droite Kλ du demi-plan (I), perpendiculaire en K à Oy. Si $KM_1 < KM$, on a, dans le trapèze $F'FMM_1$ dont les diagonales se coupent en I :

$$M_1F' < IM_1 + IF' \quad \text{et} \quad MF < IM + IF. \quad \text{Soit par addition :}$$
$$M_1F' + MF < MF' + M_1F \iff M_1F' - M_1F < MF' - MF.$$

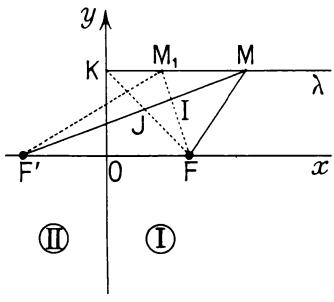


Fig. 333

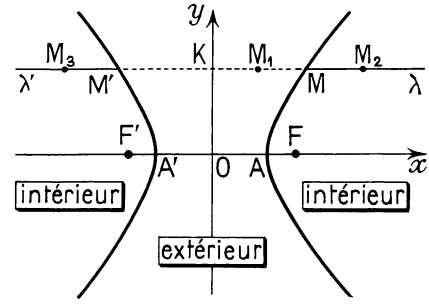


Fig. 334

La différence MF′ — MF nulle lorsque M est en K augmente donc avec KM. Désignons par J le point de rencontre de KF et MF′ :

$$MF < MJ + JF = MF' - JF' + JF \implies JF' - JF < MF' - MF < FF'.$$

Lorsque M s'éloigne indéfiniment sur Kλ, le point J vient en F et JF′ — JF a pour limite $FF' = 2c$. Il en est donc de même de MF′ — MF. Ainsi, lorsque M décrit Kλ la différence MF′ — MF croît de 0 à $2c$ et prend une fois et une seule la valeur $2a$ comprise entre 0 et $2c$. Par symétrie par rapport à Oy on voit que (fig. 334) sur une droite λ′λ parallèle à l'axe focal FF′, il existe deux points M et M′ de l'hyperbole, partageant cette droite en trois parties.

L'hyperbole partage le plan en trois régions contenant respectivement les points O, F ***et*** F′. La première est dite *extérieure* à l'hyperbole et les deux autres *intérieures* à l'hyperbole.

Tout point M_1 du segment MM′ est *extérieur*. D'après ce qui précède, on a :

$$|M_1F - M_1F'| < |MF' - MF| = 2a \qquad \text{donc} \qquad \boxed{|M_1F' - M_1F| < 2a.}$$

Tout point M_2 de la demi-droite Mλ est intérieur ainsi que tout point M_3 de la demi-droite M′λ′ et on a de même :

$$\boxed{M_2F' - M_2F > 2a} \qquad \boxed{M_3F - M_3F' > 2a.}$$

Il en résulte, par réciprocité, que :

Un point donné est extérieur ou intérieur à l'hyperbole suivant que la différence de ses distances aux foyers de cette hyperbole est inférieure ou supérieure à l'axe transverse $AA' = 2a$ *de cette hyperbole.*

402. Théorème. — ***L'hyperbole est le lieu géométrique des centres des cercles tangents à un cercle fixe et passant par un point fixe extérieur à ce cercle.***

1° Considérons (fig. 335 et 336) un point M de l'hyperbole de foyers F et F′ et d'axe transverse égal à $2a$. Sur la demi-droite MF′ portons dans le sens MF′ une longueur $M\varphi = MF$. Le segment $F'\varphi$ étant égal à $2a$, le point φ appartient au cercle de centre F′ et de rayon $2a$ qui laisse le foyer F à son extérieur. Le cercle de centre M passant par F est tangent en φ à ce cercle.

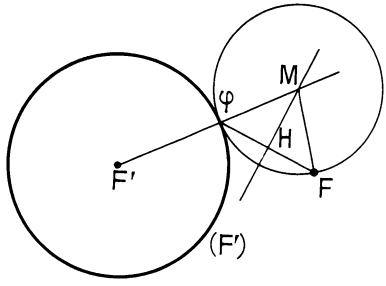


Fig. 335

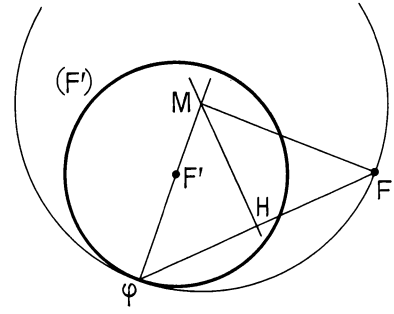


Fig. 336

2° Réciproquement considérons un cercle fixe de centre F′ et de rayon $2a$, un point fixe extérieur F et un cercle de centre M, passant par F et tangent en φ au cercle F′. Quelle que soit la nature du contact, le point M appartient à l'un des prolongements du segment $F'\varphi$. On a donc : $|M\varphi - MF'| = F'\varphi$ c'est-à-dire puisque $M\varphi = MF$ et $F'\varphi = 2a$:

$$|MF - MF'| = 2a.$$

Le point M appartient à l'hyperbole de foyers F et F′ et dont l'axe transverse a pour longueur $2a$.

403. Cercles directeurs. — ***On appelle cercles directeurs de l'hyperbole les cercles ayant pour centres respectifs les foyers*** F ***et*** F′ ***et pour rayon*** $2a$.

L'hyperbole est donc le lieu des centres des cercles passant par un foyer et tangents au cercle directeur relatif à l'autre foyer (fig. 335 et 336).

On appelle *cercle principal* de l'hyperbole le cercle admettant l'axe focal AA′ pour diamètre (fig. 340). C'est le cercle de centre O et de rayon a. Comme O est le milieu du segment FF′ :

Le cercle principal est l'homologue du cercle directeur F′(2a) ***dans l'homothétie*** (F, 1/2).

Notons que cette homothétie transforme le cercle de centre M passant par F en un cercle de diamètre MF tangent au cercle principal.

404. Deuxième construction par points de l'hyperbole. — Soit (fig. 337) un point quelconque φ du cercle directeur F′(2a). La droite F′φ et la médiatrice de Fφ se coupent en général en un point M, centre d'un cercle passant par F et tangent en φ au cercle directeur F′. Le point M appartient donc à l'hyperbole. En répétant cette construction, on obtient un nouveau tracé par points de l'hyperbole.

Discussion. — Désignons par T et T′ les points de contact du cercle directeur F′ avec les tangentes FT et FT′ issues du foyer F. Lorsque φ appartient à l'arc TT′, intérieur au cercle FTF′T′, l'angle FφF′ est obtus et le point φ est situé entre M et F′. On a : MF′ — MF = 2a et le point M appartient à la branche la plus voisine de F.

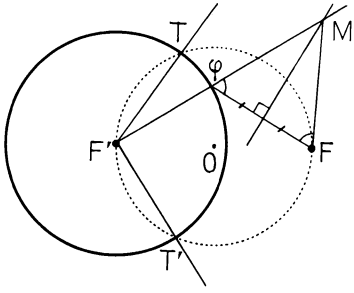


Fig. 337

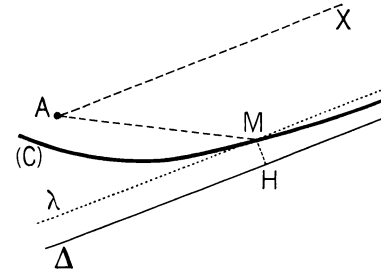


Fig. 338

Lorsque φ appartient à l'arc TT′ extérieur au cercle FTF′T′, l'angle FφF′ est aigu et on a : MF — MF′ = 2a. Le point M appartient à l'autre branche.

Lorsque φ tend vers T ou T′, l'angle FφF′ devient droit et le point M s'éloigne indéfiniment dans la direction F′T ou F′T′.

Les directions F′T *et* F′T′ *sont dites directions asymptotiques de l'hyperbole.*

405. Définition. — On dit qu'une droite Δ est *asymptote* à une courbe (C) si la distance MH d'un point M de cette courbe à la droite Δ tend vers zéro lorsque le point M s'éloigne indéfiniment sur la courbe (fig. 338).

Si A désigne un point fixe donné, la droite AM admet pour position limite la parallèle AX à Δ. L'asymptote Δ est parallèle à une direction asymptotique AX de la courbe (C). D'autre part, l'asymptote Δ constitue la position limite de la droite Mλ, menée par M parallèlement à la direction asymptotique AX.

406. Théorème. — ***L'hyperbole admet deux asymptotes issues de son centre et parallèles à ses directions asymptotiques.***

La parallèle à F′T menée par O (fig. 339) est la médiatrice OS du segment FT. Soit M un point de l'hyperbole, centre d'un cercle passant par F et tangent en φ au cercle directeur F′. La droite FT coupe OS en K, recoupe le cercle M en G et coupe en I la

tangente commune en φ aux cercles F′ et M. La distance MH de M à la droite OS est égale à sa projection mK sur FT. Comme m et K sont les milieux de FT et FG on a : $MH = mK = \frac{1}{2} GT$.

Lorsque le point φ vient se confondre avec T, le point M s'éloigne indéfiniment sur l'hyperbole. Le point I, pôle de la droite T φ par rapport au cercle F′, vient se confondre avec T et, comme $\overline{IT}^2 = \overline{I\varphi}^2 = \overline{IF} \cdot \overline{IG}$, on voit que IG tend vers zéro. Le point G vient en T, ce qui montre que GT tend vers zéro, et il en est de même de sa moitié MH. La droite OS est donc une asymptote de l'hyperbole. Il en est de même de OS′ médiatrice de FT′.

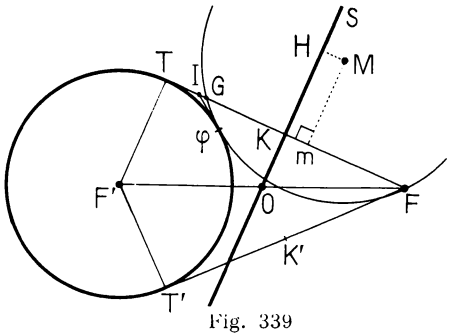


Fig. 339

Notons que OS est la position limite de la droite Mm, parallèle à la direction asymptotique F′T lorsque M s'éloigne indéfiniment.

407. Position et angle des asymptotes. — L'homothétie (F, 1/2) montre (fig. 340) que les asymptotes passent par les points de contact K et K′ des tangentes au cercle principal issues du foyer F. Autrement dit :

Les projections d'un foyer sur les asymptotes sont situées sur le cercle principal.

Ces asymptotes coupent le cercle de diamètre FF′ aux sommets d'un rectangle dont les côtés opposés CC′ et DD′ sont les perpendiculaires en A et A′ à FF′ (égalité des triangles OFK et OCA). Les côtés CD et C′D′ sont perpendiculaires en B et B′ à l'axe non focal. On pose : OB = OB′ = b. Comme $\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$, on obtient :

$$b^2 = c^2 - a^2 \iff \boxed{a^2 + b^2 = c^2.}$$

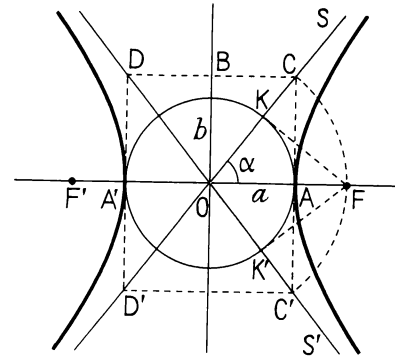


Fig. 340

Le segment BB′ est appelé *axe non transverse* de l'hyperbole. L'angle COC′ = 2α est l'angle des asymptotes et l'on obtient :

$$\cos\alpha = \frac{a}{c}; \quad \sin\alpha = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2ab}{c^2} \quad \text{et} \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{a^2 - b^2}{c^2}.$$

Lorsque les asymptotes sont rectangulaires, *l'hyperbole est dite équilatère.*

Dans ce cas : $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $a = b = \frac{c}{2}\sqrt{2}$. D'où : $e = \sqrt{2}$.

Dans une hyperbole équilatère, les asymptotes sont les bissectrices de l'angle formé par les axes et l'excentricité est égale à $\sqrt{2}$.

EXERCICES

— Construire une ellipse (on se bornera à déterminer les foyers et la longueur $2a$ de l'axe focal) connaissant :

586. Les foyers et un point de la courbe.

587. Les foyers et l'excentricité ou le rapport des axes.

588. Un foyer, deux points et la longueur $2a$.

589. Deux sommets consécutifs et la distance focale $2c$.

590. Un cercle directeur et deux points de l'ellipse.

591. Un foyer et trois points.

592. 1° Un point M décrit une ellipse de foyers F et F′. Déterminer l'enveloppe du cercle de diamètre MF et celle du cercle de diamètre MF′.

2° Un cercle variable ω reste tangent à un cercle fixe O et passe par un point fixe F intérieur à ce cercle. Lieu du point M diamétralement opposé au point F sur le cercle ω ?

593. Une ellipse variable E de grand axe donné $2a$ et de foyer donné F passe par le point fixe A tel que $FA = 2(a - l)$.

1° Lieu du foyer F′ de l'ellipse E. Construire les ellipses E passant par un point donné P. Discuter et montrer que P doit se trouver à l'intérieur d'une courbe Γ.

2° La demi-droite AF′ coupe Γ en M. Montrer que le point M appartient à l'ellipse E correspondante de foyers F et F′.

594. 1° Lieu des centres des ellipses dont le grand axe a une longueur donnée $2a$, ayant un foyer donné et passant par un point donné.

2° Construire le centre d'une ellipse ayant un foyer donné, passant par un point donné et dont les axes ont des longueurs données. Discuter.

595. On considère une ellipse de foyers F et F′ dans laquelle la distance focale $FF' = 2c$ est égale à la longueur $2b$ du petit axe ; la longueur du grand axe est $2a$.

1° M étant un point quelconque de cette ellipse, calculer les longueurs $MF = x$ et $MF' = y$ en fonction de a et de l'angle $FMF' = \alpha$. Quelle est la valeur maximum de α ?

2° Calculer, en fonction de x, y, α, puis en fonction de a et α, la puissance du point M par rapport au cercle de diamètre FF′. Déduire de ce résultat l'expression de la puissance du point M par rapport au cercle principal ; quelle est la longueur de la corde du cercle principal perpendiculaire à OM ? O est le milieu de FF′.

3° Les droites MF et MF′ recoupent le cercle de diamètre FF′ en P et P′. Calculer, en fonction de a et α, la distance PP′ et déterminer α pour que la droite PP′ soit perpendiculaire à FF′.

— Construire une hyperbole (on se bornera à déterminer les foyers et la longueur de l'axe focal $2a$) connaissant :

596. Les foyers et un point de la courbe.

597. Les foyers et une asymptote.

598. Les foyers et l'excentricité.

599. Un foyer, deux points et la longueur $2a$.

600. Un foyer et trois points.

601. Construire une hyperbole connaissant :

1° Les asymptotes et l'une des longueurs $2a$ ou $2c$.

2° Un foyer, une asymptote et un point.

3° Un foyer, une asymptote et l'une des distances $2a$ ou $2c$.

602. Trouver, dans chacun des trois cas que l'on peut envisager, le lieu du second foyer F′ d'une ellipse ou d'une hyperbole Γ admettant un foyer donné F et passant par deux points donnés P et Q.

603. Un cercle de centre O est tangent aux deux droites rectangulaires Ax et Ay. Une tangente variable à ce cercle coupe Ax et Ay en P et Q. On désigne par M le milieu de PQ.

1° Montrer que le cercle de diamètre AM est tangent au cercle O.

2° Trouver le lieu Γ du point M et préciser ses éléments.

604. Montrer que le lieu des centres des cercles orthogonaux à un cercle fixe $\omega(\rho)$ et tangents à un cercle fixe F(R) (ou à une droite fixe Δ) est une conique Γ. La conique Γ est bitangente en A et B au cercle $\omega(\rho)$ lorsque ce cercle coupe le cercle F(R) (ou la droite Δ) en A et B.

605. Préciser la nature et les éléments des coniques lieux des centres des cercles tangents à deux cercles inégaux donnés F(R) et F'(R') tels que $FF' = 2c$ suivant que les cercles sont extérieurs, sécants ou intérieurs.

606. On considère une circonférence (C) et sa tangente (T) en un des points, O.

1° Trouver le lieu des centres des circonférences (Γ) tangentes à la fois à (C) et à (T) respectivement aux points M et N, distincts en général de O.

2° Montrer que MN passe par un point fixe I et que les cercles (Γ) sont orthogonaux à un cercle fixe que l'on déterminera.

3° Que deviennent les cercles (Γ) dans l'inversion de pôle O et de puissance OI^2 ?

4° On considère tous les couples de cercles (Γ) orthogonaux entre eux et se coupant aux points A et B. Trouver le lieu des points A et B.

607. Deux cercles (C) et (C') de centres O et O', de rayons R et R' sont tangents extérieurement en A. La droite OO' recoupe (C) en K et (C') en K'. On appelle (Γ) tout cercle tangent à (C) et à (C').

1° Soient M et M' les contacts de (Γ) avec (C) et (C'). Démontrer que la droite MM' passe par un point fixe S. En déduire la construction d'un cercle (Γ).

2° De S on mène une tangente à (Γ). Quel est le lieu (L) du point T de contact quand (Γ) varie ? Réciproquement, T étant donné sur (L), combien existe-t-il de cercles (L) tangents en T à la droite ST ? Effectuer la construction de ces cercles.

3° On transforme la figure dans une inversion de pôle A et de puissance $\overline{AK} \cdot \overline{AK'}$; construire avec soin les transformés de (C), (C'), (Γ) et (L).

4° Quel est le lieu des centres ω des cercles (Γ) ? Prenant OO' pour axe des x et la médiatrice du segment OO' pour axe des y, donner l'équation de ce lieu. Calculer le rayon ρ de (Γ) en fonction de l'abscisse x de son centre ω.

Discuter le nombre des cercles (Γ) ayant un rayon ρ donné suivant la valeur de ρ.

608. On donne le triangle ABC de hauteur AH ; H est entre B et C et on a AH = 2, BH = 4, CH = 1. Un point O décrit le segment HA ; il est défini par $HO = x$ $(0 < x < 2)$. On trace la circonférence de centre O, de rayon x ; on lui mène les tangentes issues de B et de C ; soit M leur point de rencontre ; soient E et G leurs points de contact.

1° Quels sont les lieux des points E et G ? Quel est le lieu du centre du cercle exinscrit dans l'angle M du triangle BMC et quel est le rayon de ce cercle ? Montrer que M décrit un arc de conique ; préciser cet arc ; construire sa tangente en M.

2° Calculer sin HBM et sin HCM en fonction de x. Étudier les variations de ces fonctions et construire les courbes représentatives sur une même figure. Quels sont les points communs à ces deux courbes ?

3° On pose $HBO = \beta$ et $HCO = \gamma$. Soit K le point de rencontre des droites BC et EG. Montrer que l'angle CKG est égal à $\gamma - \beta$. En déduire que le point K est fixe.

609. On considère un cercle fixe (O) de centre O et de rayon R, et un point fixe A tel que OA = 2R. On désigne par (C) un cercle de centre C passant par A et tangent au cercle (O).

1° Quel est le lieu du centre C ? On précisera les éléments remarquables de ce lieu : foyers, centre axes, sommets, excentricité, asymptotes.

2° On désigne par M le point de contact des cercles (O) et (C) : les tangentes en A et M à (C) se coupent en P. Quel est le lieu de P ? Montrer que ce lieu peut se déduire de la polaire de A par rapport au cercle (O) au moyen d'une transformation très simple.

3° On désigne par (C') et (C'') deux cercles tangents à (O) et se coupant en A sous l'angle donné V. Quel est le lieu de leur second point d'intersection ? Donner une construction précise de ce lieu lorsque V est droit, puis lorsque $V = \frac{\pi}{3}$.

610. On donne une droite (D) et un point A situé à une distance AH = h de D. Un angle de grandeur constante A pivote autour de son sommet A et l'on appelle B et C les points où ses côtés coupent la droite (D). Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

1° Démontrer que les tangentes en B et C au cercle (O) conservent chacune une direction fixe.

2° On effectue une inversion de pôle A et de puissance p. Montrer que la figure inverse du cercle (O) reste tangente à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon en fonction de p, h et A. En déduire que le cercle (O) reste tangent à un cercle fixe (K) de centre K. Calculer AK et le rayon du cercle (K) en fonction de h et A. Constater que A est extérieur au cercle (K).

3° Trouver le lieu des centres des cercles (O). Déterminer les principaux éléments de ce lieu.

4° Si l'on fait varier l'angle BAC, le cercle (K) varie. Montrer que tous les cercles (K) sont orthogonaux à une infinité de cercles fixes.

611. On donne deux cercles (C) et (C')), de centres O et O', de rayons R et R' (R > R'), tangents extérieurement en un point H, la tangente commune étant la droite $x'Hx$. Soient P un point de $x'x$, Pt et Pt' les tangentes (autres que $x'x$) menées de P à (C) et à (C'), M le point de contact de Pt et de (C), M' celui de Pt' et de (C'). En supposant que P décrive la droite $x'x$ et que HP = x, on demande :

1° de montrer que la droite MM' passe par un point fixe, qu'on précisera ;

2° de trouver le lieu du point Q, où se coupent les droites OM et O'M' ;

3° de calculer en fonction de R, R' et x le cosinus y de l'angle θ des deux vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PM'}$;

4° d'étudier les variations de y lorsque x varie de 0 à $+\infty$, et de les représenter par une courbe ;

5° de construire géométriquement P, et de calculer la valeur correspondante de x, de façon que l'angle (PM, PM') soit droit, ou soit égal à un angle donné α.

612. On donne dans un plan un cercle (O) de centre O et de rayon R et l'on appelle cercle (ω) tout cercle qui coupe le cercle (O) en deux points M et M' diamétralement opposés.

1° Montrer que tout cercle (ω) qui passe par un point P du plan passe également par un second point P'. Lieu de P' lorsque P décrit une droite ne passant pas par O ou un cercle tangent au cercle (O).

2° On considère maintenant un axe Ox qui coupe (O) en A et un diamètre MM' du cercle (O) défini par $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.

Construire le cercle (ω) qui passe par M et M' et qui est tangent à un cercle (O') de même rayon R que le cercle (O) et tangent à celui-ci au point A. Montrer que le problème admet en général une solution. Cas d'exception. Montrer que, lorsque θ varie, les cercles (ω) ainsi construits restent tangents à un deuxième cercle fixe (O'') et que le lieu de leurs centres est une conique dont on indiquera les foyers et les sommets. Si le cercle (ω) touche (O') et (O'') en T et T', quelles sont les enveloppes de TT' et de la médiatrice du segment TT' ?

3° Calculer en fonction de R et de θ les côtés et les angles du triangle $\omega OO'$ ainsi que le rayon ρ du cercle (ω). Montrer que les résultats sont différents suivant que l'on a $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Étudier les variations de ρ lorsque θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et tracer la courbe représentative.

ÉQUATION DES CONIQUES A CENTRE

408. Définitions. — Nous verrons (20e leçon) que les trois courbes : parabole, ellipse et hyperbole, que nous venons d'étudier séparément, peuvent être obtenues comme sections planes d'un cône de révolution. C'est pourquoi on les désigne sous le nom général de *sections coniques* ou plus brièvement de *coniques*.

La parabole qui n'admet pas de centre de symétrie est définie par la donnée de son foyer unique F et de sa directrice D : *parabole* (F, D).

L'ellipse et l'hyperbole qui admettent un centre de symétrie sont des *coniques à centre*. Une telle conique Γ est définie par la donnée de ses deux foyers F, F′ et la longueur $2a$ de son axe focal : *conique* (F, F′, $2a$). On obtient une ellipse pour $2a > FF' = 2c$, une hyperbole pour $2a < FF' = 2c$.

Lorsqu'on veut établir l'équation d'une conique à centre Γ, la traduction analytique de la relation $MF + MF' = 2a$ ou $|MF - MF'| = 2a$ conduit à des calculs irrationnels. C'est pourquoi on considère l'expression :

$$f(M) = [(MF + MF')^2 - 4a^2].\,[(MF - MF')^2 - 4a^2]. \qquad (1)$$

Montrons que :

409. Théorème. — ***La relation*** $f(M) = 0$ ***exprime une condition nécessaire et suffisante pour que le point*** M ***appartienne à la conique à centre*** (F, F′, $2a$).

1° Pour $a > c$, la relation $|MF - MF'| \leqslant FF' = 2c < 2a$ entraîne :

$$(MF - MF')^2 - 4a^2 < 0$$

et : $f(M) = 0 \iff (MF + MF')^2 - 4a^2 = 0 \iff MF + MF' = 2a$.

L'ensemble des points M tels que $f(M) = 0$ est l'ellipse de foyers F et F′ et d'axe focal de longueur $2a$.

2° Pour $a < c$, la relation $MF + MF' \leqslant FF' = 2c > 2a$ entraîne :

$$(MF + MF')^2 - 4a^2 > 0$$

et : $f(M) = 0 \iff (MF - MF')^2 - 4a^2 = 0 \iff |MF - MF'| = 2a$.

L'ensemble des points M tels que $f(M) = 0$ est l'hyperbole de foyers F et F′ et d'axe focal $2a$.

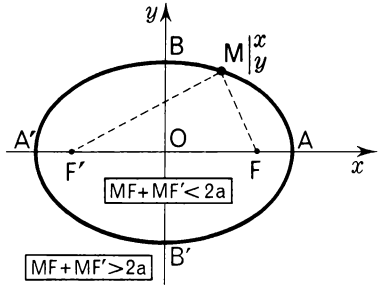


Fig. 341

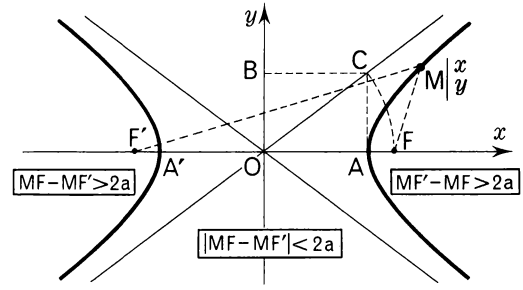


Fig. 342

410. Équations de l'ellipse et de l'hyperbole. — Dans le repère orthonormé xOy (fig. 341 et 342), considérons la conique de foyers F (c, 0), F′ (— c, 0), d'axe focal $2a$ et exprimons $f(M)$ en fonction des coordonnées du point M(x, y) :

$$f(M) = (MF^2 - MF'^2)^2 - 8a^2(MF^2 + MF'^2) + 16\,a^4.$$

Des relations : $MF^2 = (x - c)^2 + y^2$ et $MF'^2 = (x + c)^2 + y^2$, on tire :

$$MF^2 - MF'^2 = -4\,cx \quad \text{et} \quad MF^2 + MF'^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2)$$

soit : $$f(M) = 16\,c^2x^2 - 16\,a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 16\,a^4$$
$$= 16\,[(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 + a^2(a^2 - c^2)].$$

Donc, pour $a \neq c$: $$f(M) = 16\,a^2(c^2 - a^2)\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1\right] \qquad (2)$$

et $$f(M) = 0 \iff \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.} \qquad (3)$$

Cette relation est l'équation de la conique à centre (F, F′, 2a).

1° Dans le cas d'une ellipse où $a > c$, on pose $a^2 - c^2 = b^2$ (n° 389) :

Rapportée à ses axes, de longueurs $2a$ ***et*** $2b$ ***une ellipse a pour équation :***

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.} \qquad (4)$$

2° Dans le cas d'une hyperbole où $a < c$, on pose $c^2 - a^2 = b^2$ (n° 407) :

Rapportée à son axe focal Ox ***de longueur*** $2a$ ***et à son axe non focal*** Oy ***de longueur*** $2b$***, une hyperbole a pour équation :***

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \qquad (5)$$

Les asymptotes de l'hyperbole ont pour coefficients directeurs $\pm \operatorname{tg}\alpha = \pm \frac{b}{a}$ n° 407) et ont par suite pour équations : $y = \pm \frac{bx}{a} \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$ (6)

Si l'hyperbole est équilatère, l'équation de la courbe se réduit à : $\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$ (7)
et les asymptotes ont pour équations : $y = \pm x \iff x^2 - y^2 = 0.$

411. Remarque. — Dans un repère rectangulaire XOY de vecteurs de base $\vec{I} = \alpha\vec{i}$ et $\vec{J} = \beta\vec{j}$, on obtient : $x = \alpha X$ et $y = \beta Y$. Les équations précédentes (4) et (5) deviennent :

$$\frac{\alpha^2X^2}{a^2} + \frac{\beta^2Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha^2X^2}{a^2} - \frac{\beta^2Y^2}{b^2} = 1.$$

En posant : $a = \alpha A$ et $b = \beta B$, elles conservent la même forme :

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{B^2} = 1.$$

412. Régions limitées par une conique à centre. — Utilisons les résultats de l'étude effectuée aux n^{os} précédents (fig. 341 et 342) :

1° Dans le cas d'une ellipse $a > c \Longrightarrow (MF - MF')^2 - 4a^2 < 0$. Le signe de $(MF + MF' - 2a)$ ou de $(MF + MF')^2 - 4a^2$ est donc celui de $-f(M)$, c'est-à-dire, puisque $c^2 - a^2 < 0$, celui de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1$. Il en résulte (n° 391) que :

Un point M(x, y) *est extérieur ou intérieur à l'ellipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *suivant qu'en ce point l'expression* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ *est positive ou négative.*

2° Dans le cas d'une hyperbole $c > a \Longrightarrow (MF + MF')^2 - 4a^2 > 0$. Le signe de $|MF - MF'| - 2a$ ou de $(MF - MF')^2 - 4a^2$ est donc celui de $f(M)$, c'est-à-dire puisque $c^2 - a^2 > 0$, celui de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1$. Il en résulte (n° 401) que :

Un point $M(x, y)$ *est intérieur ou extérieur à l'hyperbole* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *suivant qu'en ce point l'expression* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ *est positive ou négative.*

413. Équations paramétriques de l'ellipse et de l'hyperbole.

1° L'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ montre qu'à tout point $M(x, y)$ de l'ellipse on peut associer un angle $\varphi \in [0, 2\pi]$ tel que $\cos\varphi = \frac{x}{a}$ et $\sin\varphi = \frac{y}{b}$.

On obtient :

$$\boxed{x = a\cos\varphi \quad | \quad y = b\sin\varphi.} \qquad (1)$$

Ces relations constituent un système d'équations paramétriques de l'ellipse qui est décrite en entier lorsqu'on fait varier φ sur un intervalle d'amplitude 2π rd.

2° De même l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $\frac{a^2}{x^2} + \frac{a^2y^2}{b^2x^2} = 1$, montre qu'à tout point de l'hyperbole on peut associer un angle $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que :

$\cos\theta = \frac{a}{x}$ et $\sin\theta = \frac{ay}{bx} \Longrightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{b}$. On obtient :

$$\boxed{x = \frac{a}{\cos\theta} \quad | \quad y = b\operatorname{tg}\theta.} \qquad (2)$$

Ce sont des équations paramétriques de l'hyperbole qui est décrite en entier lorsqu'on fait varier θ sur un intervalle de 2π rd.

414. Rayons vecteurs d'une ellipse et d'une hyperbole. — 1° Les rayons vecteurs MF et MF' d'une ellipse (fig. 341) vérifient (n° 410) :

$$MF + MF' = 2a\,; \quad MF'^2 - MF^2 = 4cx \Longrightarrow MF' - MF = 2\frac{cx}{a}.$$

Donc :

$$\boxed{MF = a - \frac{cx}{a} \quad | \quad MF' = a + \frac{cx}{a}.}$$

Dans l'ellipse $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, on obtient :

$$MF = a - c\cos\varphi\,; \quad MF' = a + c\cos\varphi.$$

2° Les rayons vecteurs MF et MF' d'une hyperbole vérifient (fig. 342) :

Pour $x > 0$: $MF' - MF = 2a$ et $MF'^2 - MF^2 = 4cx \Longrightarrow MF + MF' = 2\frac{cx}{a}$.

Soit : $$MF = \frac{cx}{a} - a\,; \quad MF' = \frac{cx}{a} + a.$$

Pour $x < 0$: $MF - MF' = 2a$ et $MF'^2 - MF^2 = 4cx \Longrightarrow MF + MF' = -2\frac{cx}{a}$.

Soit : $$MF = a - \frac{cx}{a}\,; \quad MF' = -\left(a + \frac{cx}{a}\right).$$

Ces formules montrent que dans tous les cas :

$$\boxed{MF = \left| a - \frac{cx}{a} \right| \quad | \quad MF' = \left| a + \frac{cx}{a} \right|.}$$

Dans l'hyperbole $x = \frac{a}{\cos\theta}$, $y = b \operatorname{tg} \theta$, on obtient :

$$\mathrm{MF} = \left| a - \frac{c}{\cos\theta} \right| ; \quad \mathrm{MF}' = \left| a + \frac{c}{\cos\theta} \right|.$$

415. Tangente et normale à l'ellipse : $x = a \cos\varphi$; $y = b \sin\varphi$.

En tout point M (φ), la tangente MT a pour paramètres directeurs (n° 172) :

$$x' = -a \sin\varphi ; \quad y' = b \cos\varphi.$$

La tangente MT a donc pour équation :

$$\frac{X - a\cos\varphi}{-a\sin\varphi} = \frac{Y - b\sin\varphi}{b\cos\varphi} \iff \boxed{\frac{X}{a}\cos\varphi + \frac{Y}{b}\sin\varphi = 1.}$$

L'équation de la normale MN s'écrit :

$$(X - a\cos\varphi)(-a\sin\varphi) + (Y - b\sin\varphi)(b\cos\varphi) = 0,$$

soit, compte tenu de $a^2 - b^2 = c^2$: $\boxed{aX\sin\varphi - bY\cos\varphi = c^2 \sin\varphi\cos\varphi.}$

La tangente et la normale coupent respectivement l'axe Ox en T et N tels que (fig. 343) :

$$\overline{\mathrm{OT}} = \frac{a}{\cos\varphi} ; \quad \overline{\mathrm{ON}} = \frac{c^2}{a}\cos\varphi \implies \overline{\mathrm{OT}}.\overline{\mathrm{ON}} = c^2 = \overline{\mathrm{OF}}^2 = \overline{\mathrm{OF}'}^2.$$

La division (FF'TN) et le faisceau M(FF'TN) sont harmoniques. Les rayons rectangulaires MT et MN sont donc les bissectrices de l'angle FMF'. Comme $\mathrm{OT} \geqslant a > c$ on en déduit que :

La tangente en tout point d'une ellipse est bissectrice extérieure de l'angle des rayons vecteurs de ce point.

La normale MN est par suite bissectrice intérieure de l'angle FMF'.

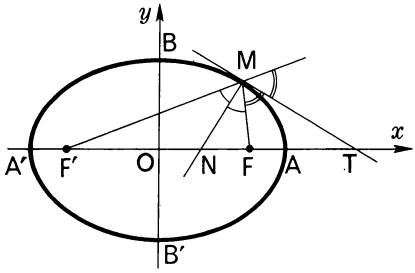


Fig. 343

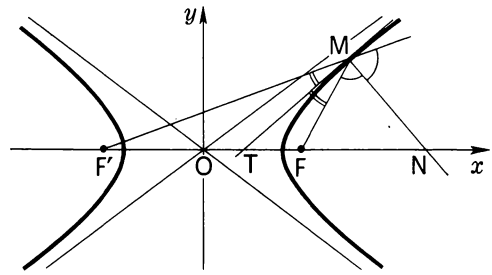


Fig. 344

416. Tangente et normale à l'hyperbole : $x = \frac{a}{\cos\theta}$; $y = b \operatorname{tg} \theta$.

En tout point M(θ), la tangente MT a pour paramètres directeurs (n° 172) :

$x' = \frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}$ et $y' = \frac{b}{\cos^2\theta}$ soit : $a\sin\theta$ et b. La tangente MT a donc pour coefficient directeur $\frac{b}{a\sin\theta}$ et son équation s'écrit :

$$Y - b\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a\sin\theta}\left(X - \frac{a}{\cos\theta}\right) \iff \boxed{\frac{X}{a} - \frac{Y}{b}\sin\theta = \cos\theta.}$$

La normale MN a pour équation : $\left(X - \frac{a}{\cos\theta}\right) a \sin\theta + (Y - b \operatorname{tg}\theta)\, b = 0,$

soit, puisque : $a^2 + b^2 = c^2$:

$$\boxed{aX \sin\theta \cos\theta + bY \cos\theta = c^2 \sin\theta.}$$

La tangente et la normale coupent respectivement l'axe Ox en T et N (fig. 344) tels que : $\overline{OT} = a \cos\theta$; $\overline{ON} = \frac{c^2}{a \cos\theta} \Longrightarrow \overline{OT} \cdot \overline{ON} = c^2 = \overline{OF}^2 = \overline{OF'}^2$.

Comme pour l'ellipse on voit que la division (FF'TN) et le faisceau M (FF'TN) sont harmoniques. Les rayons rectangulaires MT et MN sont les bissectrices de l'angle FMF'. Comme $OT \leqslant a < c$, on en déduit que :

La tangente en un point d'une hyperbole est bissectrice intérieure de l'angle des rayons vecteurs de ce point.

La normale MN est par suite bissectrice extérieure de l'angle FMF'.

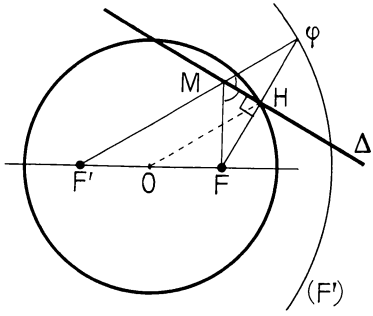


Fig. 345

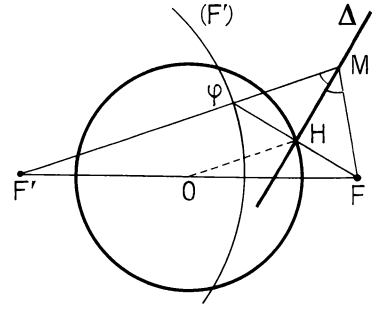


Fig. 346

417. Corollaires. — Soit φ le point de contact du cercle M(MF) et du cercle directeur F' ($2a$) d'une ellipse (fig. 345) ou d'une hyperbole (fig. 346) de foyers F et F'. La droite Δ, tangente en M à cette conique, bissectrice intérieure de l'angle FMφ, est par suite médiatrice du segment Fφ :

Le symétrique d'un foyer par rapport à une tangente à une conique à centre appartient au cercle directeur relatif à l'autre foyer.

En utilisant l'homothétie (F, 1/2) on en déduit que :

La projection d'un foyer sur une tangente à une conique à centre appartient au cercle principal.

D'autre part, la deuxième construction d'un point M d'une ellipse (n° 394) ou d'une hyperbole (n° 404) fournit la médiatrice de Fφ, c'est-à-dire la tangente en M.

418. Ellipses et hyperboles homofocales. — ***Les ellipses et les hyperboles admettant mêmes foyers*** F ***et*** F' ***sont dites homofocales.***

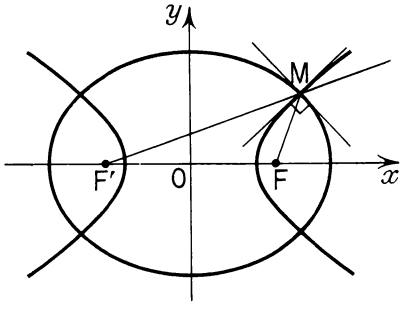


Fig. 347

1° Si 2λ désigne la longueur de l'axe focal d'une conique de foyers F (c, 0) et F' ($-c$, 0), son équation s'écrit (n° 410) :

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1.$$

2° Par un point M donné du plan passent une ellipse et une hyperbole de foyers F et F'. Les valeurs correspondantes de 2λ étant MF + MF' et | MF' — MF |. Les tangentes en M à ces deux courbes, bissectrices de l'angle FMF', sont perpendiculaires :

Les ellipses et les hyperboles homofocales de foyers F ***et*** F' ***constituent un réseau orthogonal.***

3° Il existe une courbe et une seule de cette famille tangente à une droite donnée Δ. Si on désigne par φ le symétrique de F par rapport à Δ, c'est l'ellipse ou l'hyperbole définie par le foyer F et le cercle directeur de centre F′ et de rayon F′φ (fig. 345).

419 Théorème. — ***Le lieu des centres des cercles tangents à deux cercles de centres*** F ***et*** F′ ***se compose en général de deux coniques homofocales de foyers*** F ***et*** F′.

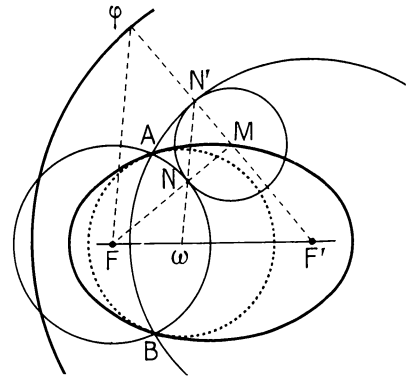


Fig. 348

Les cercles tangents à deux cercles donnés sont invariants dans l'une ou l'autre des inversions échangeant les deux cercles (n° 361). Étudions (fig. 348) le lieu du centre M d'un cercle variable tangent aux deux cercles donnés F(R) et F′(R′) en deux points N et N′ homologues dans l'inversion (ω, *k*). La parallèle menée par F à la droite ωNN′ coupe F′N′ en φ. Le triangle MNN′ étant isocèle, il en est de même du triangle MFφ et on a : Mφ = MF. D'autre part le théorème de Thalès donne : $\frac{F'\varphi}{F'F} = \frac{F'N'}{F'\omega}$, soit $F'\varphi = \frac{F'F \cdot F'N'}{F'\omega}$. La longueur F′φ est donc une constante 2*a* égale à R + R′ ou | R — R′ | et le cercle de centre M passant par F est tangent en φ au cercle fixe F′(2*a*). Lorsque N décrit le cercle F(R) et N′ le cercle F′(R′) le point φ décrit le cercle F′(2*a*) :

Le lieu du point M *est la conique* Γ *de foyer* F *et de cercle directeur* F′(2*a*).

C'est donc une conique de foyers F et F′. On en obtiendrait une seconde Γ′ en considérant l'inversion (ω′, *k*′) qui échange également les deux cercles F(R) et F(R′). Toutefois si les cercles F(R) et F′(R′) sont tangents en ω′, cette deuxième conique dégénère en la droite FF′. Si les cercles F (R) et F′(R′) sont sécants en A et B, on démontre (cf. n° 384) que le cercle d'inversion ω (ωA) est bitangent en A et B à la conique Γ.

FOYERS ET DIRECTRICES

420. Relations entre les trois coniques. — Il résulte des n^{os} 374, 392 et 402 que :

Toute conique est le lieu des centres des cercles passant par un point fixe F ***et tangents à un cercle fixe*** F′ ***ou à une droite fixe*** D.

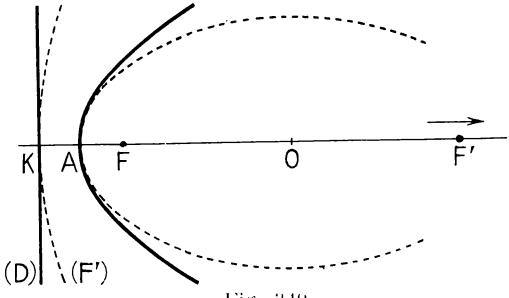


Fig. 349

L'ellipse et l'hyperbole correspondent au cas d'un point F intérieur au cercle F′ (2*a*). Si, dans une telle conique (fig. 349), le foyer F et le sommet voisin A restant fixes, le point F′ s'éloigne indéfiniment sur l'axe focal AF, le cercle directeur F′ vient se confondre avec une droite D perpendiculaire en K à AF.

La parabole apparaît ainsi comme la limite d'une conique à centre dont l'excentricité tend vers 1.

Par définition nous dirons que la parabole est une conique d'excentricité 1.

$0 \leqslant e < 1$: *Ellipse*	$e = 1$: *Parabole*	$e > 1$: *Hyperbole.*

421. Théorème fondamental. — ***Toute conique, autre qu'un cercle, est le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe*** F ***et à une droite fixe*** D ***est un nombre constant égal à l'excentricité de la conique.***

Dans le cas de la parabole ce théorème se confond avec la définition (n° 368).

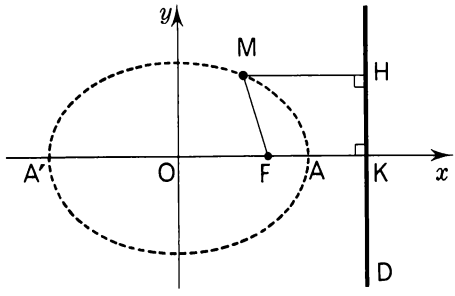


Fig. 350

Considérons une conique Γ de centre O, rapportée au repère orthonormé xOy et d'équation (n° 410) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

Soit F le foyer d'abscisse $\overline{OF} = c$.

1° Que la conique Γ soit une ellipse ou une hyperbole (n° 414), le rayon vecteur MF joignant le foyer F au point M(x, y) de Γ a pour longueur :

$$MF = \left| a - \frac{cx}{a} \right| = \frac{c}{a} \left| \frac{a^2}{c} - x \right| ;$$

Introduisons (fig. 350) la droite D, d'équation $x = \frac{a^2}{c}$ et soit H $\left(\frac{a^2}{c}, y\right)$ la projection orthogonale du point M(x, y) sur D. On voit que : $MH = \left| \frac{a^2}{c} - x \right|$ donc puisque : $MF = \frac{c}{a} \left| \frac{a^2}{c} - x \right|$.

Tout point M *de la conique* Γ *vérifie la relation* $MF = \frac{c}{a} MH$.

2° Réciproquement pour qu'un point M(x, y) vérifie cette relation, il faut et il suffit que :

$$\overline{MF}^2 = \frac{c^2}{a^2} \overline{MH}^2 \iff (x - c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2} \left(\frac{a^2}{c} - x\right)^2.$$

Soit : $x^2 + y^2 + c^2 = a^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

On retrouve l'équation de Γ, ce qui montre que l'ensemble des points M tels que : $MF = \frac{c}{a} MH \iff \frac{MF}{MH} = e$ est la conique Γ.

422. Directrices d'une conique à centre. — La droite D d'équation $x = \frac{a^2}{c}$ est appelée *directrice associée au foyer* F. Désignons par K le pied de D sur l'axe focal Ox et par A et A′ les sommets de Γ situés sur cet axe focal (fig. 351 et 352). Le cercle de diamètre AA′ est le cercle principal de Γ. La relation : $\overline{OK} = \frac{a^2}{c}$ ou $\overline{OF} \cdot \overline{OK} = a^2$ entraîne : $\overline{OF} \cdot \overline{OK} = \overline{OA}^2 = \overline{OA'}^2 \iff (AA'FK) = -1$.

La directrice D ***associée au foyer*** F ***est la polaire du point*** F ***par rapport au cercle principal de la conique.***

Il existe une deuxième directrice D′ associée au foyer F′ et polaire de F′ par rapport au cercle principal O(a). Les deux directrices sont symétriques par rapport au centre O de la conique.

Dans le cas d'une hyperbole (fig. 352) la relation $OF > a \implies OK < a$. La directrice coupe le cercle principal O(a) aux points de contact I et J des tangentes issues de F, c'est-à-dire sur les asymptotes (n° 407). Il en résulte que :

Les projections d'un foyer sur les asymptotes d'une hyperbole sont situées sur la directrice associée à ce foyer.

423. Théorème. — ***Une conique à centre est définie par un foyer*** F, ***la directrice*** D ***associée à ce foyer et son excentricité*** *e* **:** *Conique* (F, D, *e*).

D'après le théorème n° 421, les sommets A et A′ de l'axe focal sont les points de la

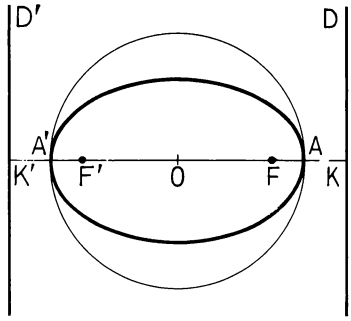


Fig. 351

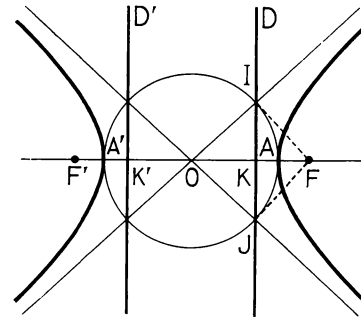


Fig. 352

droite FK tels que $\frac{AF}{AK} = \frac{A'F}{A'K} = e$. Le cercle principal étant le cercle de diamètre AA′, la conique est déterminée par son foyer F et son cercle principal.

424. Corollaire. — ***Le lieu géométrique des points du plan dont le rapport des distances à un point fixe*** F ***et à une droite fixe*** D ***est un nombre donné*** *k* ***est la conique de foyer*** F, ***de directrice*** D ***et d'excentricité*** *k*.

Si $k = 1$ on a affaire à la parabole de foyer F et de directrice D.

Si $k \neq 1$, le théorème fondamental (n° 421) montre que la conique de foyer F, de directrice associée D et d'excentricité *k* est précisément le lieu demandé.

425. Construction par points d'une conique à centre. — Soit à construire les points d'une conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité *e* situés sur une droite Hλ perpendiculaire en H à D. Le problème a été étudié dans le cas de la parabole (n° 371). Supposons donc $e \neq 1$ (fig. 353 et 354). Déterminons d'abord les sommets A et A′ situés sur l'axe focal. Les tangentes en A et A′ à la conique coupent la droite FH en deux points α et α′ tels que $\frac{\alpha F}{\alpha H} = \frac{\alpha' F}{\alpha' H} = \frac{AF}{AK} = e$.

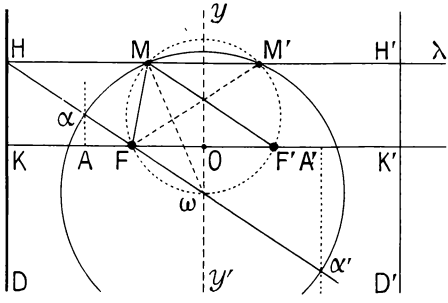


Fig. 353

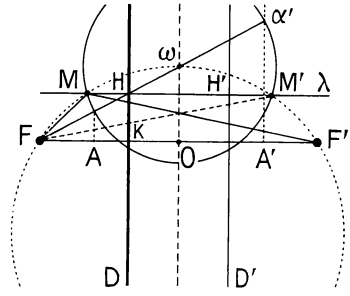


Fig. 354

La relation $\frac{MF}{MH} = e$ montre que tout point M de la conique, situé sur Hλ appartient au cercle ω, lieu des points dont le rapport des distances à F et à H est égal à *e*. Ce

cercle admet pour diamètre $\alpha\alpha'$ et son centre ω est situé sur la médiatrice de AA′ c'est-à-dire sur l'axe non focal $y'y$.

Les intersections M et M′ de Hλ et du cercle ω sont, lorsqu'elles existent, les points demandés. Ils sont symétriques par rapport à $y'y$.

La division $(\alpha\alpha' FH)$ est harmonique et ω est le milieu de $\alpha\alpha'$. Donc (n° 6) $\overline{HF} \cdot \overline{H\omega} = \overline{H\alpha} \cdot \overline{H\alpha'} = \overline{HM} \cdot \overline{HM'}$. Les points F, ω, M et M′ appartiennent à un même cercle, centré sur $y'y$, et passant par suite par F′. Le point ω étant le milieu de l'arc FωF′, la droite Mω est donc une bissectrice de l'angle FMF′, intérieure si $e < 1$, extérieure si $e > 1$. La droite Mω est par suite la normale en M à la conique. Cette propriété qui permet de construire la tangente en M à la conique montre que *le cercle ω est bitangent en* M *et* M′ *à la conique.*

426. Sécantes focales. — Considérons une conique $\Gamma(F, D, e)$ et une droite Δ passant par le foyer F, coupant la directrice associée D en I (fig. 355) et faisant avec cette directrice l'angle aigu θ. Si H désigne la projection orthogonale d'un point M quelconque de Δ sur D on obtient $MH = MI \sin\theta$. Tout point commun M à la droite Δ et à la conique Γ vérifie donc $MF = eMH = e\,MI \sin\theta$. Il existe en général deux points communs M et M′ tels que :

$$\frac{MF}{MI} = \frac{M'F}{M'I} = e \sin\theta \implies (MM'FI) = -1.$$

Un foyer et la directrice associée divisent harmoniquement toute sécante focale à une conique.

Si la droite Δ est parallèle à une asymptote (n° 407) :

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \implies \sin\theta = \cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{e} \implies e \sin\theta = 1.$$

Le point M′ est rejeté à l'infini sur Δ et M est le milieu du segment IF.

Un point* M *est intérieur ou extérieur à la conique* Γ *suivant que le rapport* $\frac{MF}{MH}$ *est inférieur ou supérieur à l'excentricité.

Quelle que soit Δ on vérifie que tout point intérieur M_1 et tout point extérieur M_2 sont caractérisés par :

$$\frac{M_1F}{M_1I} < \frac{MF}{MI} < \frac{M_2F}{M_2I} \iff \frac{M_1F}{M_1H_1} < \frac{MF}{MH} < \frac{M_2F}{M_2H_2}.$$

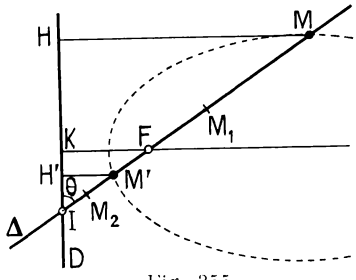


Fig. 355

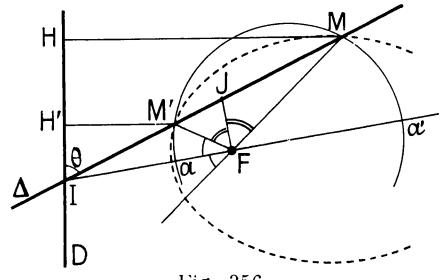


Fig. 356

427. Sécantes quelconques. — Soit Δ une droite ne passant pas par le foyer F de la conique Γ, coupant la directrice associée en I (fig. 356) et faisant avec cette directrice l'angle aigu θ. En désignant par H la projection orthogonale de tout point M de Δ sur la directrice D, on voit que la condition pour M soit un point commun à Δ et à D s'écrit :

$$MF = e\,MH \iff MF = e\,MI \sin\theta \iff \frac{MF}{MI} = e \sin\theta.$$

Soient a et a' les points qui divisent le vecteur FI dans le rapport $e \sin\theta$. Les points

M et M′ sont, lorsqu'ils existent, les intersections de Δ et du cercle de diamètre aa'. Ce cercle se réduit à la médiatrice de FI lorsque Δ est parallèle à une asymptote :

Une droite Δ ne peut couper une conique qu'en deux points au plus.

Les points M et M′ situés sur toute sécante Δ vérifient :

$$\frac{MF}{MI} = \frac{M'F}{M'I} = e \sin\theta \implies \frac{IM}{IM'} = \frac{FM}{FM'}.$$

Dans le triangle FMM′, le point I divise le côté MM′ en deux segments IM et IM′ proportionnels aux côtés FM et FM′. Donc :

Lorsqu'une sécante MM′ à une conique coupe en I la directrice associée au foyer F, la droite FI est bissectrice de l'angle MFM′.

La droite FI est bissectrice extérieure ou intérieure de l'angle MFM′ suivant que les points M et M′ appartiennent à une même branche ou à deux branches distinctes de la conique.

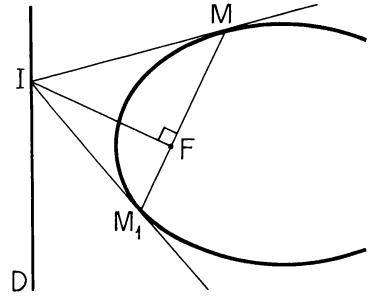


Fig. 357

428. Tangente à la conique. — Supposons (fig. 356) que les points M et M′ appartiennent à une même branche de la conique. Lorsque le point M′, se déplaçant sur la courbe, tend vers M, la bissectrice intérieure FJ de l'angle MFM′ tend vers FM. La droite MM′ devient la tangente en M à la courbe et la droite FI devient la perpendiculaire en F au rayon vecteur FM (fig. 357) :

La portion d'une tangente à une conique comprise entre son point de contact et une directrice est vue du foyer associé sous un angle droit.

Pour construire la tangente en M à la conique de foyer F et de directrice D, il suffit donc de joindre le point M au point I intersection de la directrice D et de la perpendiculaire en F à FM. Il en résulte que :

Les tangentes aux extrémités d'une corde focale MM′ et la perpendiculaire en F à cette corde concourent en un point de la directrice.

Le foyer F est donc (fig. 357) le pied de la hauteur relative au côté MM′ du triangle IMM′ formé par les tangentes à la conique issues d'un point quelconque I de la directrice.

EXERCICES

613. Dans un repère orthonormé xOy, on considère l'ellipse (E) de foyers F $(c, 0)$ et F′ $(-c, 0)$, décrite par le point M $(x = a\cos\varphi\,;\ y = b\sin\varphi)$.

1° Établir, en fonction de φ, les équations de la tangente et de la normale en M à (E). Ces deux droites coupent l'axe Ox en T et N, l'axe Oy en T′ et N′.

2° Calculer les produits $\overline{OT}.\overline{ON}$ et $\overline{OT'}.\overline{ON'}$. Montrer que le cercle de diamètre T′N′ passe par F et F′ et qu'il est orthogonal en M et P au cercle de diamètre TN.

3° Nature du quadrangle FF′MP ? Comparer les directions de OM et OP, puis calculer le produit $\overline{OM}\ .\ \overline{OP}$.

614. La tangente au point M (φ) de l'ellipse : $x = a\cos\varphi\,;\ y = b\sin\varphi$, coupe Ox en S, les tangentes aux sommets du grand axe AA′ en T et T′.

1° Déterminer les coordonnées des points S, T et T′. Démontrer les relations :

$$\overline{AT}\ .\ \overline{A'T'} = b^2 \qquad \text{et} \qquad (MSTT') = -1.$$

2° Équation du cercle de diamètre TT′ ? Démontrer que ce cercle passe par les foyers F et F′ de l'ellipse.

3° Les droites FT′ et F′T se coupent en I, les droites FT et F′T′ se coupent en J. Démontrer que la droite IJ est la normale en M à l'ellipse. Que représentent les points I, J, T et T′ pour le triangle MFF′ ? Conséquences angulaires.

615. La normale en un point variable M ($x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$) d'une ellipse de foyers F et F', coupe l'axe focal Ox en N, l'axe non focal Oy en P.

1° Calculer les coordonnées de N et démontrer les relations :

$$\frac{\overline{MP}}{a^2} = \frac{\overline{MN}}{b^2} = \frac{\overline{NP}}{c^2}\ ; \qquad PM = \frac{c}{a}PF\ ; \qquad \overline{MN^2} = -\frac{b^2}{c^2}\overline{NF}.\overline{NF'}.$$

2° Démontrer que le cercle de centre P passant par les foyers F et F' coupe la droite MP aux centres I et J des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle M du triangle MFF'. Soient K, D et E les projections orthogonales des points N, I et J sur MF. Calculer MD et ME en fonction des côtés du triangle MFF' puis en fonction de a et c.

3° La division (MKDE) est harmonique. En déduire que la longueur de la projection MK de MN sur MF est constante et égale à $\frac{b^2}{a}$ (*paramètre* de l'ellipse).

616. Dans un repère orthonormé xOy, on considère l'hyperbole (H) de foyers F (c, 0) et F' (— c, 0) décrite par le point M ($x = a/\cos\theta$, $y = b\ \mathrm{tg}\ \theta$).

1° Établir, en fonction de θ, les équations de la tangente et de la normale en M à (H). Ces deux droites coupent l'axe Ox en T et N, l'axe Oy en T' et N'.

2° Calculer les produits OT.ON et OT'.ON'. Montrer que le cercle de diamètre T'N' passe par F et F' et qu'il est orthogonal en M et P au cercle de diamètre TN.

3° Montrer le quadrangle FF'MP est harmonique. En déduire le produit OM.OP et les bissectrices de l'angle MOP.

617. La tangente au point M(θ) de l'hyperbole $x = a/\cos\theta$, $y = b\ \mathrm{tg}\ \theta$ coupe l'axe Ox en S et les tangentes aux sommets de l'axe focal AA' en T et T'.

1° Déterminer les coordonnées des points S, T, T', et démontrer que :

$$\overline{AT}.\overline{AT'} = -b^2 \qquad \text{et} \qquad (MSTT') = -1.$$

2° Équation du cercle de diamètre TT'. Démontrer que ce cercle passe par les foyers F et F' de l'hyperbole.

3° Les droites FT et F'T' se coupent en K, les droites FT' et F'T se coupent en L. Démontrer que la droite KL est la normale en M à l'hyperbole. Que représentent les points K, L, T, T' pour le triangle MFF' ? Conséquences angulaires.

618. La normale en un point variable M ($x = a/\cos\theta$, $y = b\ \mathrm{tg}\ \theta$) d'une hyperbole de foyers F et F' coupe l'axe focal Ox en N, l'axe non focal Oy en P.

1° Écrire l'équation de cette normale et déterminer les coordonnées de N et P. Démontrer que :

$$\frac{\overline{MP}}{a^2} = \frac{\overline{NM}}{b^2} = \frac{\overline{NP}}{c^2}\ ; \qquad PM = \frac{c}{a}PF\ ; \qquad \overline{MN^2} = \frac{b^2}{c^2}\overline{NF}\ .\ \overline{NF'}.$$

2° Démontrer que le cercle de centre P passant par les foyers F et F' coupe la droite MP aux centres K et L des cercles exinscrits dans les angles F et F' au triangle MFF'. Soient H, D et E les projections orthogonales des points N, K et L sur MF. Calculer MD et ME en fonction des côtés du triangle MFF' puis en fonction de a et c.

3° Établir que (MHDE) = — 1 et en déduire que la longueur MK de la projection de MN sur le rayon vecteur MF est constante et égale à $\frac{b^2}{a}$ (*paramètre* de l'hyperbole).

619. Dans un repère orthonormé xOy on considère l'ellipse (E) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dont le grand axe a pour sommets A (— a, 0) et B (a, 0). Une parallèle à Oy d'équation $x = a\cos\theta$ coupe (E) en M et M'.

1° Déterminer les coordonnées de M et M'. Établir les équations des droites AM et BM' et trouver les coordonnées de leur point commun P.

2° Quel est le lieu (H) du point P ? Montrer que c'est aussi le lieu du point P' intersection de AM' et BM et que les courbes (E) et (H) sont réciproques.

3° On suppose $a = b$. Montrer que les angles de droite (Ox, AP) et (Ox, BP) ont une somme constante et égale à $\frac{\pi}{2}$.

620. On considère une ellipse (C) définie par l'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Soient F_1 et F_2 ses foyers. Considérons un point M de (C), tel que l'angle F_1MF_2 des rayons vecteurs F_1M et F_2M soit égal à une valeur donnée φ.

1° Exprimer les quantités $\rho_1 = F_1M$ et $\rho_2 = F_2M$ en fonction de a, b et φ.

2° Exprimer les coordonnées x_0, y_0 du point M en fonction de a, b et φ.

3° On pose $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $\cos\varphi = \frac{1}{3}$; trouver l'angle que la tangente à (C), au point M correspondant, fait avec l'axe Ox.

— Déterminer une conique connaissant :

621. Un foyer, la directrice associée et un point de la courbe.

622. Un foyer, la directrice associée et une tangente.

623. Une directrice, deux points et l'excentricité.

624. Une directrice, l'excentricité, une tangente et son point de contact.

625. Un foyer, deux points et l'excentricité.

626. Un foyer, l'excentricité, une tangente et son point de contact.

627. 1° Trouver le lieu du foyer F d'une conique dont on connaît deux points A et B ainsi que la directrice D associée à F.

2° Préciser sur ce lieu les foyers des paraboles, des ellipses et des hyperboles.

628. Construire une conique Γ connaissant une directrice D et de plus :

1° Trois points de la courbe.

2° Deux points et la tangente en l'un d'eux.

3° Un point et le centre de la courbe.

629. 1° Une conique de foyer F donné passe par deux points A et B. Montrer que la directrice D associée à F passe par l'un ou l'autre de deux points fixes.

2° Construire une conique de foyer F connaissant trois points de la courbe ou deux points et la tangente en l'un d'eux.

630. Le cercle qui a pour centre un point M d'une hyperbole et qui passe par le foyer F coupe la directrice D associée à F en deux points R et R'. Démontrer que les droites MR et MR' sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.

631. 1° Trouver le lieu du centre M d'un cercle passant par un point fixe F et coupant une droite donnée D sous un angle donné α.

2° Enveloppe du cercle (M).

632. On donne une droite fixe D et un point F. Un cercle variable de centre M passe par F et est vu, de la projection H de M sur D, sous l'angle donné 2α. Trouver le lieu du point M et l'enveloppe du cercle (M).

633. Trouver le lieu du centre M d'un cercle variable tangent à une droite fixe D et :

1° Vu d'un point fixe F sous un angle donné 2α.

2° Coupant la perpendiculaire en F à MF sous l'angle α.

634. On donne un point fixe A et deux points B et C qui varient sur une droite fixe D de telle sorte que (AB, AC) = α (angle constant).

1° Lieu géométrique du centre ω du cercle ABC.

2° Lieux des centres des cercles inscrit et exinscrit au triangle ABC. Cas où l'angle α est droit.

635. On considère un trapèze variable ABCD dont la base AB est fixe et tel que BC = CD = DA. Déterminer les lieux des sommets C et D.

636. Soient deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy, une droite fixe Δ, d'équation $x = d$ et sur Ox le point fixe ω tel que $\overline{O\omega} = kd$. Un point M du plan se projette en H sur Δ et on désigne par h une constante donnée.

1° Montrer que le lieu des points M tels que $\overline{M\omega^2} - k\,\overline{MH^2} = h$ est une conique Γ de centre O dont on établira l'équation. Discuter sa nature.

2° On suppose que $h = \rho^2$. Montrer que Γ est le lieu des points dont la puissance par rapport au cercle ω (ρ) est égale à $k\,\overline{MH^2}$ et que Γ passe par les points A et B communs à Δ et au cercle ω lorsqu'ils existent.

3° La droite AM recoupe le cercle ω en C et le point H se projette en P sur AM. Montrer que MC = k MP et en déduire que Γ est bitangente au cercle ω.

637. On donne un triangle AA'B de hauteur BK. Une droite variable Δ perpendiculaire en P à AA' coupe AB en N et A'B en N'. Les droites A'N et AN' se coupent en un point M se projetant en H sur AA'.

1° Démontrer que le lieu de M est la conique Γ d'axe AA′ qui passe par B.

2° Trouver la nature du faisceau B(AA′MP) et déterminer l'enveloppe de la droite MP. En déduire que la tangente en B à Γ coupe le segment NN′ en son milieu I.

3° Démontrer que la droite IM est tangente en M à Γ.

638. Un cercle variable dont le centre ω décrit la médiatrice du segment donné FF′ a pour rayon $r = e\,\omega F$ (e constante donnée).

1° Montrer que le pied K de la polaire F par rapport au cercle (ω) décrit une droite D. Calculer le rapport des longueurs FK et Fω.

2° La perpendiculaire en K à D coupe le cercle (ω) en M et M′. Démontrer que $MF = e\,MK$ et trouver le lieu Γ de M et M′. Le cercle FMK étant orthogonal au cercle (ω), montrer que ce dernier est bitangent en M et M′ à Γ.

3° On désigne par (I) une position donnée du cercle (ω) par L, A et A′ les positions correspondantes de K, M et M′. Le cercle FKL est orthogonal aux cercles (ω) et (I) et l'axe radical de ces deux cercles est la médiatrice de KL. Démontrer que la puissance de M par rapport au cercle I est dans un rapport constant avec le carré de la distance MH de M à la droite AA′.

639. Dans un repère orthonormé xOy, on considère les points fixes A(a, 0) et B($-a$, 0) ainsi que les axes Au et Bv parallèles à Oy. Un point P varie sur Au, un point Q varie sur Bv de telle sorte que $\overline{AP} \cdot \overline{BQ} = ka^2$ (k réel donné).

1° Si P′Q′ est une position quelconque de PQ, montrer que les droites P′Q et PQ′ se coupent en J sur Ox et que PQ et P′Q′ se coupent en I sur la polaire de J par rapport à Au et Bv. En déduire que le point de contact M de la droite PQ avec son enveloppe Γ et le point de rencontre N de PQ et de Ox sont conjugués harmoniques par rapport à P et Q.

2° Soient H la projection de M sur Ox, P_1 et Q_1 les symétriques de P et Q par rapport à Ox. Démontrer que P_1Q et PQ_1 se coupent en H et que $\overline{HM}^2 = -k\,\overline{HA} \cdot \overline{HB}$. En déduire l'équation de Γ lieu de M et enveloppe de PQ. Montrer que Γ est une conique de foyers F et F′ tangente en A et B à Au et Bv.

3° Calculer les puissances de A, B et O par rapport au cercle ω de diamètre PQ et montrer que ce cercle fait partie d'un faisceau de points de base ou de points limites F et F′. Démontrer que dans tous les cas : $AP.BQ = AF.BF$ et que les triangles APF et BFQ sont directement semblables, ce qui entraîne : (FP, FQ) = (FA, Oy).

4° Pour $k > 1$, montrer que les cercles PFF′ et QFF′ sont tangents à PQ et se coupent sous un angle constant égal à l'angle AFB. Réciproquement trouver l'enveloppe d'une droite PQ tangente commune à deux cercles variables d'un faisceau de points de base F et F′ et se coupant sous un angle donné 2α.

640. Soient, dans un repère orthonormé xOy, une ellipse de foyers F et F′($x = \pm c$, $y = 0$), d'axes $2a$ et $2b$, et une droite D passant par l'origine et de coefficient directeur m.

1° Une parallèle D′ à D coupe l'ellipse en M et M′. Lieu Δ du milieu de MM′ lorsque D′ se déplace parallèlement à D. Solutions algébrique et géométrique.

2° Soient I et J les points de rencontre de la directrice relative à F avec la droite D et avec la droite Δ. Démontrer que $\overline{KI}.\overline{KJ} = -\overline{KO}.\overline{KF}$ (K est l'intersection de la directrice et de l'axe focal).

3° Montrer que le cercle circonscrit au triangle OIJ passe par un point fixe lorsque D tourne autour de O. En déduire l'orthocentre du triangle OIJ.

4° La parallèle à OI menée par F coupe en R la droite Δ. On appelle P et P′ les points de rencontre de l'ellipse et de la droite Δ. Démontrer que $OP^2 = \overline{OR} \cdot \overline{OJ}$.

641. On donne une droite Δ et un point fixe A à la distance $AH = h$ de la droite Δ. Les côtés d'un angle α de sommet A coupent Δ en B et C. L'angle α pivote autour de A, *en restant constant.*

1° Montrer que le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC décrit une portion de conique dont on précisera la nature. (On pourra chercher la relation qui existe entre α, OA et la distance OI de O à Δ). Distinguer deux cas selon que α est aigu ou obtus. Cas où $\alpha = \pi/2$.

2° Soient M et N les pieds des hauteurs du triangle ABC issues de B et C. Montrer que chacune des droites HM et HN reste fixe.

3° On transforme la figure par une inversion de pôle A, de puissance $AH^2 = h^2$. Construire les figures inverses de la droite Δ et du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que ce dernier cercle est tangent à un cercle fixe. Construire ce cercle. Ne pouvait-on prévoir ce résultat ?

642. Soient un segment AB, Δ sa médiatrice, ω le centre d'un cercle variable (ω) passant par A et B. Le cercle (ω) coupe Δ en D et D′ et les droites BD et BD′ coupent respectivement la tangente en A à (ω) en C et C′.

1° Montrer que AD et AD′ sont bissectrices de l'angle BAC. En déduire que le lieu de C et C′ est une hyperbole (H) de foyer A et de directrice Δ. Préciser les éléments de cette hyperbole. Déterminer en particulier le foyer F autre que A.

2° Soit P le pôle de la droite BC par rapport à (ω). Montrer que la droite CP coupe AB en Q symétrique en A par rapport à B. En déduire que la tangente, autre que CA, menée de C à (ω) coupe AB en F.

3° Le point C étant du même côté que A par rapport à Δ, démontrer que les côtés BC = a, CA = b, AB = c du triangle ABC vérifient la relation $a^2 = b(b + c)$. Montrer que l'on doit avoir $b < a < 2b$.

643. Le plan est rapporté à un repère orthonormé xOy. Sur Ox, deux points fixes F et F′ ont respectivement pour abscisses $(+ c)$ et $(— c)$, c nombre positif donné. Un cercle variable Γ passant par F et F′ coupe l'axe Oy en deux points N et T (dont les rôles seront interchangeables au cours du problème).

1° Construire un point M du cercle Γ tel que NF = e. NM, e étant un nombre positif donné < 1. La parallèle à Ox passant par M coupe NF en un point K. Comparer les triangles NMF et NKM. Évaluer le rapport $\frac{NF}{NK}$. Lieu de K. En déduire le lieu de M, dont on précisera les divers éléments. Quelle est la tangente en M à ce lieu ? (On posera $\frac{c}{e} = a$.)

2° La droite MT coupe le lieu de K en un point I. Montrer que le quadrilatère MFIK est inscriptible dans un cercle C. En supposant fixe le cercle Γ initial, on fait une inversion de pôle T, de puissance TF^2. Préciser l'inverse du cercle Γ, le position du point M′ inverse de M, celle du transformé du cercle C, enfin celle de l'inverse I′ du point I.

Que devient dans cette inversion le cercle Ω circonscrit au triangle TFI ? Que peut-on dire des positions respectives de Γ et Ω ? De Ω et Oy ? Lieu du centre de Ω quand le cercle Γ varie ?

COURBES : $y^2 = ax^2 + bx + c$

429. Généralités. — Plaçons-nous d'abord dans le cas général où $a \neq 0$ et posons : $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation proposée s'écrit :

$$y^2 = ax^2 + bx + c \iff y^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Désignons par ω le point $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$ et par $X\omega Y$, le repère qui se déduit du repère xOy dans la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$. On obtient : $X = x + \frac{b}{2a}$ et $Y = y$.

D'où : $$Y^2 = aX^2 - \frac{\Delta}{4a} \iff \boxed{4a^2X^2 - 4aY^2 = \Delta} \qquad (1)$$

430. 1er cas : a positif. — 1° Pour $\Delta > 0$, on peut poser : $\frac{\Delta}{4a^2} = \alpha^2$, $\frac{\Delta}{4a} = \beta^2$. L'équation (1) s'écrit : $\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$. C'est l'équation d'une hyperbole de centre ω et d'axe transverse OX (fig. 358). En posant $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ on en déduit aisément que cette hyperbole admet pour foyers les points $F(X = \gamma, Y = 0)$, $F'(X = -\gamma, Y = 0)$, pour directrices les droites $D\left(X = \frac{\alpha^2}{\gamma}\right)$; $D'\left(X = -\frac{\alpha^2}{\gamma}\right)$ et pour asymptotes les droites $Y = \pm \frac{\beta}{\alpha} X$.

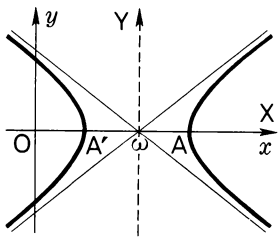


Fig. 358

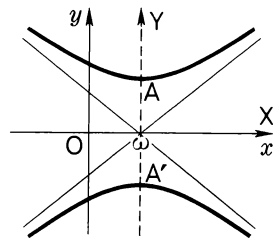


Fig. 359

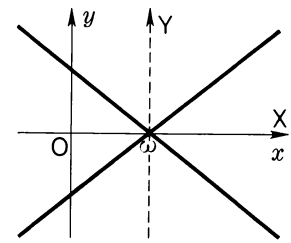


Fig. 360

2° Pour $\Delta < 0$, on peut poser $\frac{\Delta}{4a^2} = -\alpha^2$ et $\frac{\Delta}{4a} = -\beta^2$. L'équation (1) qui s'écrit : $\frac{Y^2}{\beta^2} - \frac{X^2}{\alpha^2} = 1$ est l'équation d'une hyperbole de centre ω et d'axe transverse ωY (fig. 359).

En posant $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, on voit que cette hyperbole admet pour foyers les points $F(X = 0, Y = \gamma)$, $F'(X = 0, Y = -\gamma)$, pour directrices $D\left(Y = \frac{\beta^2}{\gamma}\right)$, $D'\left(Y = -\frac{\beta^2}{\gamma}\right)$ et pour asymptotes les deux droites $Y = \pm \frac{\beta}{\alpha} X$.

3° Pour $\Delta = 0$ l'équation (1) s'écrit $Y^2 = aX^2 \iff Y = \pm mX$ en posant : $a = m^2$. C'est donc l'équation d'un faisceau de deux droites issues de ω symétriques par rapport à Ox (fig. 360).

431. 2e cas : a négatif. — 1° Pour $\Delta > 0$, on peut poser $\frac{\Delta}{4a^2} = \alpha^2$, $\frac{\Delta}{4a} = -\beta^2$. L'équation (1) qui s'écrit : $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$ est l'équation d'une ellipse d'axes ωX et ωY (fig. 361).

Pour $-1 < a < 0$, on obtient $\alpha^2 > \beta^2$ et $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$. L'ellipse admet pour axe focal Ox, pour foyers $F(X = \gamma, Y = 0)$, $F'(X = -\gamma, Y = 0)$ et pour directrices les droites $D\left(X = \frac{\alpha^2}{\gamma}\right)$ et $D'\left(X = -\frac{\alpha^2}{\gamma}\right)$.

Pour $a < -1$, on obtient $\alpha^2 < \beta^2$ et $\gamma = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$. L'ellipse admet pour axe focal ωY, pour foyers $F(X = 0, Y = \gamma)$, $F'(X = 0, Y = -\gamma)$ et pour directrices les droites $D\left(Y = \frac{\beta^2}{\gamma}\right)$, $D'\left(Y = -\frac{\beta^2}{\gamma}\right)$.

Pour $a = -1$ la courbe est le cercle de centre ω : $x^2 + y^2 - bx - c = 0$.

2° Pour $\Delta < 0$, l'équation (1) est impossible et pour $\Delta = 0$, elle est vérifiée par le seul point $\omega(X = 0, Y = 0)$.

432. Cas particulier : $a = 0$. — L'équation proposée est alors : $y^2 = bx + c$. (2)

1° Pour $b \neq 0$, elle s'écrit $y^2 = b\left(x + \frac{c}{b}\right)$. En prenant, comme ci-dessus, pour origine du repère $X\omega Y$, le point $\omega\left(-\frac{c}{b}, 0\right)$, on obtient $Y^2 = bX$. C'est donc l'équation d'une parabole de sommet ω, d'axe ωX, de foyer $F\left(X = \frac{b}{4}, Y = 0\right)$ et de directrice $X = -\frac{b}{4}$ (fig. 360).

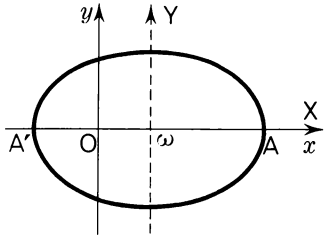


Fig. 361

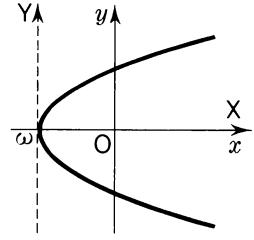


Fig. 362

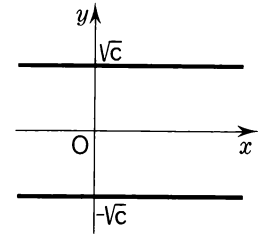


Fig. 363.

2° Pour $b = 0$, l'équation se réduit à : $y^2 = c$. Elle représente (fig. 363) deux droites parallèles à Ox d'équations $y = \pm\sqrt{c}$ pour $c > 0$, deux droites confondues avec Ox pour $c = 0$. Elle est impossible pour $c < 0$. Soit en résumé-:

COURBE : $y^2 = ax^2 + bx + c$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac$		
$a > 0$	$\Delta > 0$	Hyperbole d'axe focal Ox.
	$\Delta < 0$	Hyperbole d'axe non focal Ox.
	$\Delta = 0$	Deux droites concourantes.
$a < 0$	$\Delta > 0$	Ellipse d'axe Ox.
	$\Delta = 0$	Point isolé de Ox.
	$\Delta < 0$	Équation impossible.
$a = 0$	$b \neq 0$	Parabole d'axe Ox.
	$b = 0$, $c > 0$	Deux droites parallèles à Ox.
	$b = 0$, $c = 0$	Une droite double : Ox.
	$b = 0$, $c < 0$	Équation impossible.

433. Problème. — *On donne deux points fixes* A *et* A′ *et un nombre réel* $k \neq 0$. *Trouver le lieu d'un point* M, *se projetant orthogonalement en* H *sur la droite* AA′ *de façon que :* $\overline{HM}^2 = k\,\overline{HA}\,.\,\overline{HA'}$.

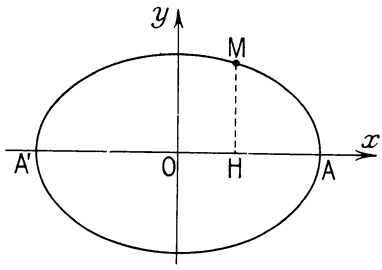


Fig. 364

Soit O le milieu de AA′. Opérons dans le repère orthonormé xOy, dans lequel l'axe Ox admet $\overrightarrow{OA}$ pour vecteur directeur (fig. 364). Posons $\overline{OA} = -\overline{OA'} = a$.

Pour qu'un point M(x, y) appartienne au lieu, il faut et il suffit que :

$$y^2 = k\,(a - x)\,(-a - x) \iff y^2 = k(x^2 - a^2)$$

Soit : $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{ka^2} = 1.$$

Pour $k < 0$ le lieu est une ellipse dont les axes sont $AA' = 2a$ et $BB' = 2a\sqrt{-k}$.

Cette ellipse est pour $k = -1$, un cercle d'équation : $x^2 + y^2 = a^2$.

Pour $k > 0$, le lieu est une hyperbole admettant $AA' = 2a$ pour axe focal et $2a\sqrt{k}$ pour axe non focal. Cette hyperbole est équilatère pour $k = 1$ et : $\overline{HM}^2 = \overline{HA}\,.\,\overline{HA'} \iff x^2 - y^2 = a^2$.

ELLIPSE AFFINE D'UN CERCLE

434. Théorème fondamental. — ***L'ellipse d'axes*** $AA' = 2a$ ***et*** $BB' = 2b$ ***est l'homologue de son cercle principal dans l'affinité orthogonale d'axe*** AA′ ***et de rapport*** $\frac{b}{a}\left(\text{ou } -\frac{b}{a}\right)$.

Supposons l'ellipse rapportée à ses axes (fig. 365) et soit $M_1(x_1, y_1)$ un point de son cercle principal de diamètre AA′ et d'équation : $x_1^2 + y_1^2 = a^2$.

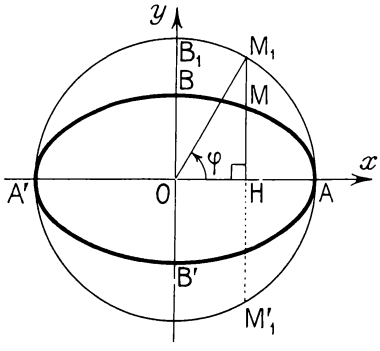


Fig. 365

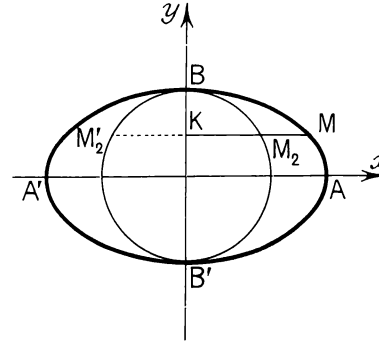


Fig. 366

Soit M(x, y) le transformé de M_1 dans l'affinité $\left(AA', \pm\frac{b}{a}\right)$, On obtient (n° 326) :

$$x = x_1\,;\ y = \pm\frac{b}{a}y_1 \iff x_1 = x\,;\ y_1 = \pm\frac{a}{b}y \quad \text{et :}$$

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 \iff x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le lieu de M(x, y) est donc l'ellipse d'axes $AA' = 2a$ et $BB' = 2b$.

REMARQUE. — En posant $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_1})$ on obtient : $x_1 = a \cos \varphi$; $y_1 = a \sin \varphi$ et $\overrightarrow{HM} = \frac{b}{a} \overrightarrow{HM_1} \Longrightarrow$ | $x = a \cos \varphi$ | $y = b \sin \varphi$ |

On retrouve les équations paramétriques de l'ellipse.

435. Corollaires. — 1° ***L'ellipse est l'homologue de son cercle secondaire de diamètre*** BB′, ***dans l'affinité orthogonale d'axe*** BB′ ***et de rapport*** $\pm \frac{a}{b}$.

Tout point $M_2(x_2, y_2)$ de ce cercle (fig. 366) vérifie l'équation : $x_2^2 + y_2^2 = b^2$. Son transformé $M(x, y)$ dans l'affinité orthogonale $\left(BB', \pm \frac{a}{b}\right)$ est tel que $x_2 = \pm \frac{bx}{a}$ et $y_2 = y$. Il vérifie donc l'équation : $\frac{b^2}{a^2} x^2 + y^2 = b^2 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2° ***L'homologue d'un cercle dans une affinité orthogonale de rapport*** k ***ayant pour axe un de ses diamètres est une ellipse admettant ce cercle pour cercle principal si*** $|k| < 1$, ***pour cercle secondaire si*** $|k| > 1$.

L'affinité orthogonale (Ox, k) transforme le cercle $x^2 + y^2 = a^2$ en l'ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{k^2 a^2} = 1$. Le diamètre $AA' = 2a$ porté par Ox est le grand de l'ellipse pour $|k| < 1$, le petit axe pour $|k| > 1$.

436. Construction par points et tangentes de l'ellipse. — Supposons tracés les cercles de diamètres $AA' = 2a$ et $BB' = 2b$ (fig. 367). Par le centre O, menons une demi-droite coupant le premier cercle en M_1 le second en M_2. Les parallèles M_1H à BB′ et M_2K à AA′ se coupent en M et : $\frac{\overline{HM}}{\overline{HM_1}} = \frac{\overline{OM_2}}{\overline{OM_1}} = \frac{b}{a}$. Le lieu du point M est l'ellipse d'axes AA′ et BB′. Soit T le point où la tangente en M_1 au cercle (AA′) coupe Ox. La tangente en M à l'ellipse homologue de M_1T est la droite MT.

Notons que la règle d'homologie (n° 331) permet de ramener tout problème de construction relatif à l'ellipse à un problème analogue relatif au cercle principal.

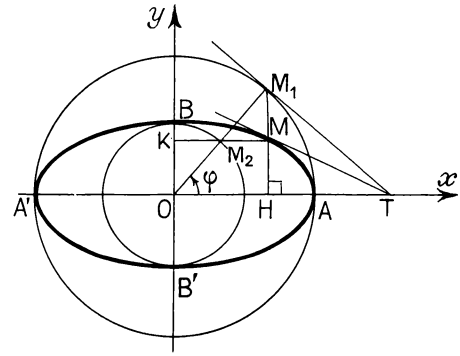


Fig. 367

437. Théorème. — ***Lorsque les extrémités*** P ***et*** Q ***d'un segment de longueur constante décrivent respectivement deux droites rectangulaires*** Ox ***et*** Oy, ***un point donné*** M ***de la droite*** PQ ***décrit une ellipse dont les axes sont portés par*** Ox ***et*** Oy ***et ont respectivement pour demi-longueurs*** $QM = a$ ***et*** $PM = b$.

Le point M peut être entre P et Q (fig. 368) ou à l'extérieur (fig. 369). Achevons le parallélogramme $OQMM_1$. On a $OM_1 = QM = a$ et la droite MM_1 est perpendiculaire en H à Ox. L'homothétie $\left(H, \frac{\overline{MH}}{\overline{HM_1}}\right)$ transforme O en P, donc :

$$\frac{HM}{HM_1} = \frac{HP}{HO} = \frac{MP}{MQ} = \pm \frac{b}{a}.$$

Le lieu du point M_1 étant le cercle $O(a)$, le lieu de M est donc l'ellipse d'axes $AA' = 2a$ et $BB' = 2b$ qui se déduit de ce cercle dans l'affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport $\pm \frac{b}{a}$.

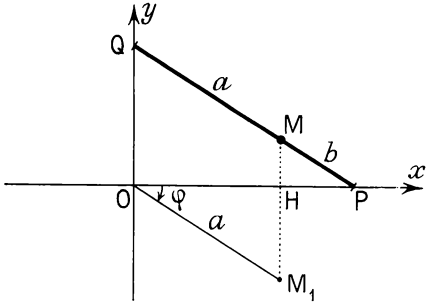


Fig. 368

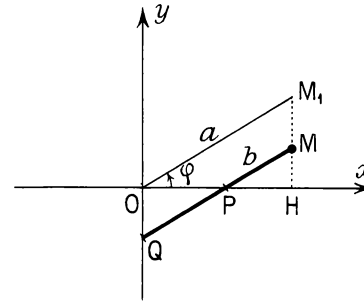


Fig. 369

Notons que si M est le milieu de PQ, le lieu de M est le cercle $O(a)$.

438. Construction d'une ellipse à l'aide d'une bande de papier. — Pour construire un point d'une ellipse dont les axes portés par les droites rectangulaires Ox et Oy ont pour longueurs respectives $AA' = 2a$ et $BB' = 2b$ (fig. 370), on marque sur le bord d'une bande de papier fort, de préférence dans cet ordre, les points P, M, Q tels $QM = a$ et $MP = b$. En plaçant simultanément P sur Ox et Q sur Oy on obtient en M un point de l'ellipse. La répétition de cette opération conduit à un tracé par points relativement rapide de l'ellipse.

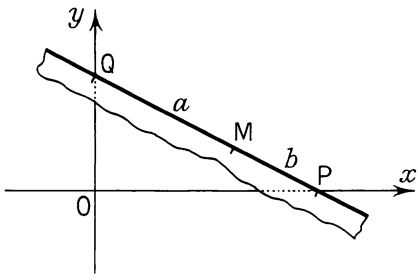


Fig. 370

439. Théorème. — ***La projection orthogonale d'un cercle sur un plan parallèle au diamètre*** AA′ ***de ce cercle est une ellipse dont le grand axe est la projection de*** AA′.

La projection d'une figure reste égale à elle-même lorsqu'on remplace le plan de projection par un plan parallèle. Nous pouvons donc supposer que le plan de projection Q est issu du diamètre AA′ du cercle (C) situé dans le plan P (fig. 371).

Désignons par α l'angle aigu $(P, \overrightarrow{A'A}, Q)$. On sait (n° 334) que la projection orthogonale $\pi(P/Q)$ du plan P sur le plan Q, est le produit de la rotation $R(\overrightarrow{A'A}, \alpha)$ par l'affinité $\mathcal{A}(A'A, \cos\alpha)$ dans le plan Q. Le transformé du cercle donné (C_0) de diamètre AA′ du plan P, dans la rotation est le cercle (C_1) de diamètre AA′ du plan Q, et le transformé de (C_1) dans l'affinité est l'ellipse de grand axe $AA' = 2a$ et de petit axe $BB' = 2a\cos\alpha$.

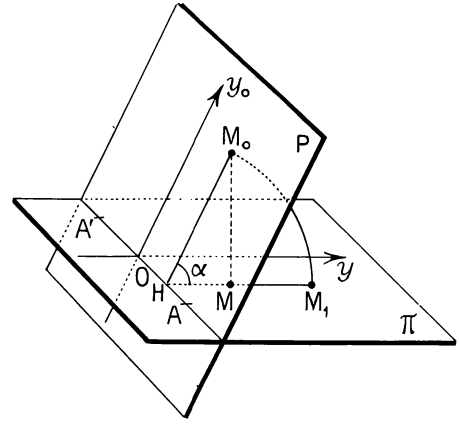


Fig. 371

Réciproquement toute ellipse d'axes AA′ = 2*a* et BB′ = 2*b* est la projection orthogonale sur son plan Q, du cercle de diamètre AA′ situé dans un plan P, homologue de Q dans une rotation $R(\overrightarrow{A'A}, \pm \alpha)$ telle que : $\cos \alpha = \frac{b}{a}$.

REMARQUE. — A toute propriété du cercle se conservant en projection orthogonale, correspond une propriété analogue de l'ellipse. On peut ainsi montrer que le lieu des milieux des cordes parallèles à un diamètre CC′ de l'ellipse est le diamètre DD′ de l'ellipse joignant les points de contact des tangentes parallèles à CC′.

440. Aire de l'ellipse. — L'aire S_0 du cercle (C_0), dont l'ellipse est la projection orthogonale, est la limite de l'aire Σ_0 d'un polygone régulier convexe inscrit lorsque le nombre de ses côtés augmente indéfiniment. Il en résulte que l'aire S de l'ellipse est la limite de l'aire Σ de la projection du polygone précédent :

$$\Sigma = \Sigma_0 \cos \alpha \implies S = S_0 \cos \alpha = \pi a^2 \times \frac{b}{a} \implies \boxed{S = \pi ab}$$

On voit que $S^2 = \pi a^2 . \pi b^2$. L'aire de l'ellipse est moyenne proportionnelle entre les aires de son cercle principal et de son cercle secondaire.

HYPERBOLE RAPPORTÉE A SES ASYMPTOTES

441. Équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes. — Dans le plan du repère orthonormé *x*O*y*, de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (fig. 372), considérons l'hyperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, de foyers F (*c*, 0) et F′(— *c*, 0). Les asymptotes font avec l'axe focal O*x* l'angle aigu α tel que (n° 407) :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} ; \qquad \cos \alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin \alpha = \frac{b}{c} \quad \text{et} \quad \sin 2\alpha = \frac{2ab}{c^2}.$$

Adoptons pour nouveau repère, le repère normé XOY formé par les asymptotes et de vecteurs unitaires $\vec{I}$ et $\vec{J}$, d'angles polaires —α et α, donc tels que (fig. 373) :

$$\vec{I} = \vec{i} \cos \alpha - \vec{j} \sin \alpha ; \quad \vec{J} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha.$$

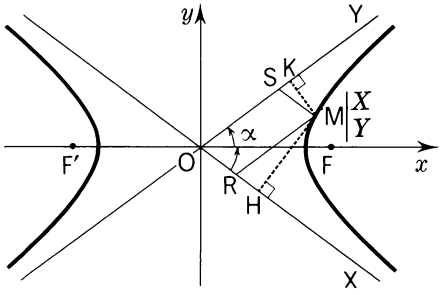


Fig. 372

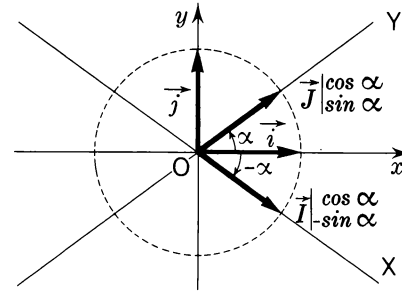


Fig. 373

Pour tout point M(*x*, *y*) du plan :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{I} + Y\vec{J} = (X + Y)\vec{i} \cos \alpha + (Y - X)\vec{j} \sin \alpha.$$

Donc : $x = (X + Y) \cos \alpha = \frac{a}{c}(X + Y)$; $y = (Y - X) \sin \alpha = \frac{b}{c}(Y - X)$.

et $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \frac{(X + Y)^2}{c^2} - \frac{(Y - X)^2}{c^2} = 1 \iff \boxed{XY = \frac{c^2}{4}}$.

Rapportée au repère normé constitué par ses asymptotes orientées symétriquement par rapport à l'axe focal, toute hyperbole de distance focale $2c$, ***a pour équation :*** $XY = \frac{c^2}{4}$.

Les parallèles aux asymptotes menées par M coupent OX en R et OY en S (fig. 372).

On obtient : $\overline{OR} = X_M$ et $\overline{OS} = Y_M \implies \boxed{\overline{OR} \cdot \overline{OS} = \frac{c^2}{4}}$.

442. Corollaire. — ***Le produit des distances d'un point*** M ***de l'hyperbole à ses asymptotes est constant et égal à*** $\frac{a^2b^2}{c^2}$.

Soient MH et MK les distances du point M à OX et OY (fig. 372) :

$$MH = RM \sin 2\alpha \quad \text{et} \quad MK = SM \sin \alpha, \quad \text{d'où :}$$

$$MH.MK = RM.SM \sin^2 2\alpha = OR.OS \sin^2 2\alpha = \frac{c^2}{4}\left(\frac{2ab}{c^2}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}.$$

443. Remarques. — 1° En conservant OX et OY pour axes, mais en prenant pour vecteurs de base $m\vec{I}$ et $n\vec{J}$, l'équation de l'hyperbole s'écrit :

$$xy = \frac{c^2}{4mn} \implies xy = k.$$

Dans tout repère xOy ***la courbe*** $xy = k$ ***est une hyperbole d'asymptotes*** Ox ***et*** Oy.

2° L'hyperbole est équilatère si l'angle XOY est égal à $\frac{\pi}{2}$, donc si $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Dans ce cas : $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$ et dans le repère orthonormé XOY l'équation de cette hyperbole s'écrit : $XY = \frac{a^2}{2}$.

SÉCANTES A L'HYPERBOLE

444. Théorème. — ***L'hyperbole et ses asymptotes découpent sur toute sécante commune deux segments qui ont même milieu.***

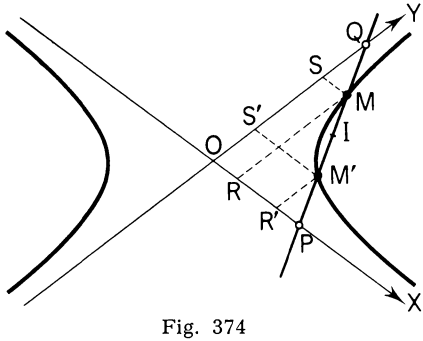


Fig. 374

Désignons par P et Q les points où la corde MM′ de l'hyperbole $XY = k$ coupe ses asymptotes. La relation $\overline{OR} \cdot \overline{OS} = \overline{OR'} \cdot \overline{OS'} = k$ entraîne (fig. 374) :

$$\frac{\overline{OR}}{\overline{OR'}} = \frac{\overline{OS'}}{\overline{OS}} \iff \frac{\overline{QM}}{\overline{QM'}} = \frac{\overline{PM'}}{\overline{PM}}$$

soit : $\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \overline{M'P} \cdot \overline{M'Q}$.

Les points M et M′ ont donc même puissance par rapport au cercle de diamètre PQ et de centre I. Donc : $\overline{IM}^2 - \overline{IP}^2 = \overline{IM'}^2 - \overline{IP}^2$ et $\overline{IM}^2 = \overline{IM'}^2$. Le milieu I de PQ est aussi celui de MM′.

445. Applications. — 1° Toute sécante issue d'un point donné A d'une hyperbole (fig. 375) recoupe la courbe en M et les asymptotes OX et OY en P et Q. Les segments

AM et PQ ayant même milieu I, il en résulte que $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AQ}$. En faisant pivoter la sécante PQ autour de A, on obtient ainsi un procédé commode, pouvant se réaliser avec une *bande de papier*, pour construire par points, l'hyperbole définie par le point A et les asymptotes OX et OY.

2° Le lieu du milieu I de PQ se déduit du lieu de M dans l'homothétie (A, 1/2) :

Le lieu du milieu du segment PQ *déterminé par deux droites fixes* OX *et* OY *sur une sécante variable issue du point fixe* A *est une hyperbole de diamètre* OA *dont les asymptotes sont parallèles à* OX *et* OY.

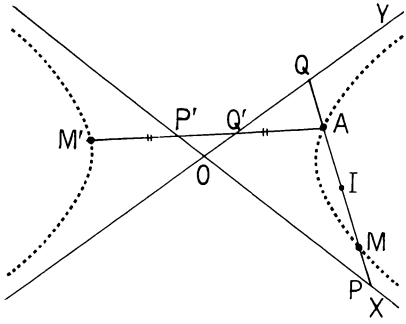


Fig. 375

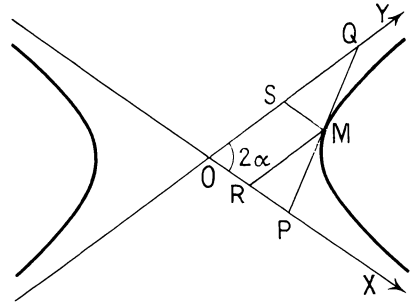


Fig. 376

446. Théorème. — ***Le point de contact*** M ***d'une tangente à une hyperbole est le milieu du segment*** PQ ***déterminé sur cette tangente par les asymptotes.***

En effet si M′ vient se confondre avec le point M (fig. 374) le point I, milieu commun de MM′ et PQ vient se confondre avec M (fig. 376) et PM = MQ.

Achevons le parallélogramme ORMS. Le point M étant le milieu de PQ, les points R et S sont les milieux de OP et OQ. Cette propriété permet d'obtenir la tangente en M à l'hyperbole en construisant $\overrightarrow{OP} = 2\,\overrightarrow{OR}$ ou $\overrightarrow{OQ} = 2\,\overrightarrow{OS}$.

Remarque. — Ceci se vérifie analytiquement en cherchant l'équation de la tangente à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes. En effet :

$$y = \frac{k}{x} \implies y' = -\frac{k}{x^2} = -\frac{y}{x}.$$

L'équation de la tangente en M(x, y) est donc :

$$Y - y = -\frac{y}{x}(X - x) \iff \boxed{\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = 2.}$$

Pour Y = 0 et X = 0, on obtient : $X_P = 2x$ et $Y_Q = 2y$.

Donc $\overline{OP} = 2\,\overline{OR}$ ou $\overline{OQ} = 2\,\overline{OS}$ $\implies$ M est le milieu de PQ.

447. Corollaires. — 1° ***Le produit*** $\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ ***des segments déterminés sur les asymptotes par une tangente variable à l'hyperbole est constant et égal à*** c^2.

Les relations : $\overline{OP} = 2\,\overline{OR}$, $\overline{OQ} = 2\,\overline{OS}$ et $\overline{OR} \cdot \overline{OS} = \frac{c^2}{4}$ (n° 441) entraînent :

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = 4\,\overline{OR} \cdot \overline{OS} = c^2$$

soit : $$\boxed{\overline{OF}^2 = \overline{OF'}^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OQ}.}$$

Comme OF est la bissectrice intérieure de l'angle POQ, il en résulte que le quadrangle FF'PQ est harmonique (n° 130). Le cercle circonscrit à ce quadrangle a pour centre le point ω où la normale en M à l'hyperbole, coupe l'axe non focal Oy (fig. 377). On vérifie que la tangente PQ est bissectrice intérieure de l'angle FMF' et on voit que (FP, FQ) = (OF', OQ) = (OP, OF') = α. Le segment PQ est vu du foyer F sous un angle de droites constant.

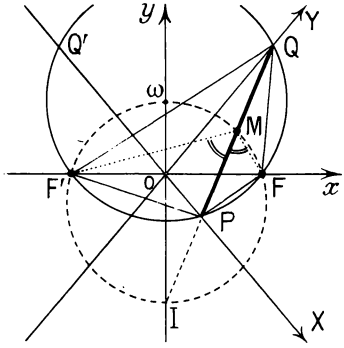


Fig. 377

2° ***L'aire du triangle*** OPQ ***déterminé par les asymptotes et une tangente variable est constante et égale à*** ab.

L'aire S du triangle OPQ est égale à :

$$S = \frac{1}{2}\,\overline{OP}\,.\,\overline{OQ}\,\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\,c^2.\,\frac{2ab}{c^2} \Longrightarrow \boxed{S = ab.}$$

On retrouve aisément cette valeur en plaçant le point M en A, sommet situé sur l'axe focal.

448. Sécantes parallèles à une direction donnée. — Considérons (fig. 378), une direction Oλ et une sécante Δ parallèle à Oλ et issue d'un point variable M de l'hyperbole. Cette droite Δ fait avec les asymptotes des angles aigus constants β et γ. Dans les triangles rectangles MHP et MKQ on obtient : MH = MP sin β et MK = MQ sin γ, il en résulte que (n° 442) :

$$MP.MQ = \frac{MH\,.\,MK}{\sin\beta\,\sin\gamma} = \frac{a^2\,b^2}{c^2\,\sin\beta\,\sin\gamma} = C^{te}.$$

Le produit $\overline{MP}\,.\,\overline{MQ}$, *positif ou négatif suivant que* Oλ *est intérieur ou extérieur à l'angle* XOY, *est constant.*

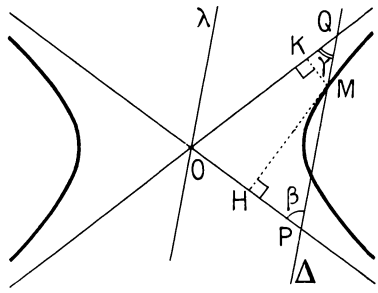


Fig. 378

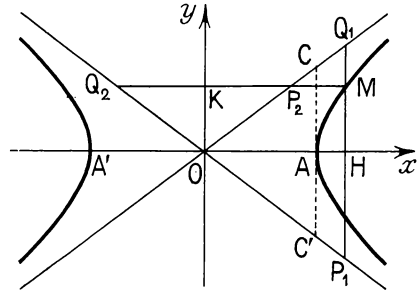


Fig. 379

1° Si la sécante P_1Q_1 est perpendiculaire à l'axe focal Ox (fig. 379), on voit en prenant M en A que : $\overline{MP_1}\,.\,\overline{MQ_1} = \overline{AC}\,.\,\overline{AC'} \Longrightarrow \boxed{\overline{MP_1}\,.\,\overline{MQ_1} = -\,b^2.}$

2° Si la sécante P_2Q_2 est parallèle à Ox, on voit en prenant de même M en A, que $\overline{MP_2}\,.\,\overline{MQ_2} = \overline{AO}^2 \Longrightarrow \boxed{\overline{MP_2}\,.\,\overline{MQ_2} = a^2.}$

EXERCICES

644. On se propose d'étudier, suivant les valeurs du paramètre $m \geqslant 0$, la forme des courbes (C) représentant les équations (1) : $y = \sqrt{m^2x^2 - 2x + 1}$.

1° Que peut-on dire de ces courbes par rapport aux courbes (C_1) représentant les équations (2) : $y^2 = m^2x^2 - 2x + 1$? En déduire l'étude des courbes (C) suivant les valeurs de m.

a) On envisagera, en premier lieu, le cas $m = 0$.

b) Si $m > 0$, montrer que (2) peut s'écrire sous la forme (3) : $y^2 = m^2(x - a)^2 + h$, où a et h sont des quantités dépendant du paramètre m. Que représente l'équation (3), suivant le signe de h ?
Cas particulier où $h = 0$. Préciser à quelles valeurs de m ($m > 0$) correspondent ces résultats.

645. Dans un repère orthonormé xOy une conique E a pour équation :

$$12x^2 + 16y^2 + 12ax - 9a^2 = 0,$$

où a désigne la mesure d'une longueur donnée ($a > 0$).

1° Calculer les coordonnées de son centre, de ses foyers, de ses sommets. Écrire les équations de ses directrices D et D′ (on désignera par D celle qui rencontre l'axe focal en un point d'abscisse positive). Calculer son excentricité e.
Soit M un point quelconque de E. Calculer en fonction de a et de l'abscisse x de M l'expression rationnelle de la longueur OM. On pose : $OM = \rho$ et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta$. Calculer ρ en fonction de a et de θ.

2° A chaque point M de E, de coordonnées x, y, on associe le nombre complexe $z = x + iy$, affixe de M. Écrire l'expression trigonométrique de z (on désignera par θ son argument et l'on exprimera le module de z en fonction de a et de θ). Soit z' et z'' les affixes des deux points M′ et M″ de E, d'arguments respectifs α et $\alpha + \pi$.

a) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z' - z''$ et en déduire la longueur du segment M′M″.

b) On considère, dans le plan, le point P dont l'affixe Z est définie par la relation : $\frac{2}{Z} = \frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}$.
Écrire l'expression trigonométrique de Z. En déduire le lieu géométrique de P quand α varie. Que peut-on dire de la figure formée par les points O, P, M′, M″ ?

3° Soit (J) l'inversion de pôle O qui laisse invariant le cercle principal de E et m', m'', p les transformés de M′, M″, P par (J). Quelle particularité présente la figure formée par les trois points m', m'', p ? Calculer la longueur du segment $m'm''$. Quel est le lieu géométrique de p ? En déduire une définition géométrique de la courbe transformée de E par (J).

646. Soit un repère cartésien orthonormé xOy, une longueur donnée a et le point fixe A, sur l'axe $x'Ox$, d'abscisse $\frac{4a}{3}$. Étant donné un point quelconque M de l'axe $y'Oy$, on désigne par (M) le cercle de centre M et de rayon égal à $\frac{1}{2}$ AM.

1° Si I est le conjugué de A par rapport au cercle (M) situé sur la droite AM, quel est l'ensemble des points I quand M décrit l'axe $y'Oy$? Soit D la parallèle à $x'Ox$ issue de I ; elle coupe (M) en deux points, P_1 et P_2. On appelle u l'ordonnée de M. Donner, en fonction de u, l'équation du cercle (M), l'équation de la droite D, les coordonnées des points P_1 et P_2. En déduire l'équation de la courbe (C) décrite par les deux points P_1 et P_2 lorsque M décrit l'axe $y'Oy$. On trouvera : $y^2 - 3x^2 + \frac{4a^2}{3} = 0$.

2° Construire cette courbe (C) et préciser ses éléments (sommets, foyers, directrices, asymptotes). Montrer que la courbe (C) est tangente au cercle (M) aux deux points correspondants, P_1 et P_2.

3° Soit (M′) le cercle inverse du cercle (M) dans l'inversion de pôle A et de puissance $2a^2$; on appelle M′ son centre. Quel est l'ensemble des points M′ quand M décrit $y'Oy$? Calculer le rayon de (M′) en fonction de AM′. Montrer que les cercles (M′) restent orthogonaux à un cercle fixe, que l'on précisera, quand M décrit $y'Oy$. Préciser la position des points P'_1 et P'_2 inverses des points P_1 et P_2. Quelle est, en P'_1 (ou P'_2), la tangente à la courbe (C′) décrite par ces deux points quand M décrit $y'Oy$? Montrer que la droite $P'_1P'_2$ passe par un point fixe. En déduire que la courbe (C′) se conserve dans une inversion, que l'on précisera.
La droite AP'_1 (ou AP'_2) recoupe la courbe décrite par M′ en h'_1 (ou h'_2). Montrer que la longueur $P'_1h'_1$ (ou $P'_2h'_2$) est constante et égale à a. [Cette propriété pourrait permettre de construire (C′) point par point.]

647. 1° Étudier les variations de la fonction : $y = \sqrt{2x(4 - x)}$.
Tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé. Préciser la nature de cette courbe. Quelle est l'aire de la surface limitée par cette courbe et l'axe des abscisses ?

2° On considère la droite : $mx - y - 5m + 2\sqrt{2} = 0$.

Démontrer qu'elle passe par un point fixe quand on fait varier m. Utiliser la courbe obtenue au 1° pour discuter l'équation :

$$\sqrt{2x\ (4 - x)} = mx - 5\ m + 2\sqrt{2}.$$

3° Montrer que la réunion de la courbe du 1° et de sa symétrique par rapport à l'axe Ox est l'ensemble des points vérifiant la relation : $2x^2 + y^2 - 8x = 0$.

On considère l'équation du 2e degré :

$$(x - 4)\ t^2 - 2yt - 2x = 0,$$

où t est l'inconnue et (x, y) les coordonnées d'un point M du plan. Quel est l'ensemble des points M du plan pour lesquelles l'équation admet : *a*) Deux racines réelles distinctes ? *b*) Une racine double ? *c*) Deux racines complexes conjuguées ?

648. Déterminer une ellipse connaissant les sommets de l'un des axes et un point de la courbe (ou une tangente).

649. Construire une ellipse connaissant les droites qui portent les axes et en plus : *a*) Deux points de la courbe ; *b*) Deux tangentes ; *c*) Une tangente et son point de contact.

650. Soit M et M′ les extrémités de deux demi-diamètres rectangulaires d'une ellipse d'axe focal Ox tel que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM'}) = \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$.

1° Exprimer les coordonnées de M et M′ en fonction de θ, $\rho = OM$ et $\rho' = OM'$ et démontrer la relation : $\frac{1}{\overline{OM}^2} + \frac{1}{\overline{OM'}^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

2° Soit H la projection du centre O sur MM′. Calculer $\overline{OH}^2$ et trouver l'enveloppe des côtés des losanges inscrits dans l'ellipse.

651. On considère sur l'ellipse d'équations paramétriques : $x = a \cos\theta$, $y = b \sin\theta$, les points M et M′ correspondant aux valeurs θ et $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$.

1° Que peut-on dire des rayons OM_1 et OM'_1 correspondants du cercle principal ?

2° Démontrer la relation : $OM^2 + OM'^2 = a^2 + b^2$.

3° Démontrer que l'aire du parallélogramme MOM′P est constante et égale à ab.

652. On considère un point M variable sur l'ellipse de foyers F et F′, de distance focale $2c$ et d'axes $AA' = 2a$ et $BB' = 2b$. Les cercles de centres F et F′ passant par M se coupent en M et M′. La droite MM′ est perpendiculaire en H à FF′ et coupe en M_1 la tangente commune TT′ aux deux cercles F et F′.

1° Nature du quadrilatère TFF′T′ ? Montrer que M_1 est le milieu de TT′ et trouver le lieu de M_1.

2° Établir la relation $HM^2 = HM_1^2 - M_1T^2$. On pose $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OM_1}) = \varphi$. Calculer en fonction de φ les longueurs OH, HM_1, M_1T et HM. Retrouver ainsi la valeur du rapport $\frac{\overline{HM}}{\overline{HM_1}}$.

653. *Théorème de la Hire.* — Une plaque triangulaire ABM glisse dans son plan de façon que les points A et B décrivent respectivement les droites fixes Ou et Ov.

1° Montrer que le cercle OAB a un rayon constant et que la diamètre PQ passant par M est invariablement lié au triangle ABM.

2° Montrer que les points P et Q se déplacent sur deux droites rectangulaires Ox et Oy et que le lieu du point M est une ellipse de centre O dont les axes portés par Ox et Oy ont pour longueurs 2 QM et 2 PM.

654. Dans le repère orthonormé xOy, on considère les points variables.

$$\text{I} \begin{cases} x = (a + b)\cos\varphi \\ y = (a + b)\sin\varphi \end{cases} \qquad \text{J} \begin{cases} x = (a - b)\cos\varphi \\ y = (b - a)\sin\varphi \end{cases}$$

1° Montrer que le lieu du milieu M du segment IJ est une ellipse (E) de foyers F$(c, 0)$ et F′ $(-c, 0)$ avec $c^2 = a^2 - b^2$. Les lieux de I et J sont deux cercles appelés *cercles de Chasles* de l'ellipse (E).

2° Montrer que le quadrangle FF′IJ est harmonique et en déduire que IJ est la normale en M à l'ellipse.

3° Soit P et Q les projections de I sur Ox et Oy. Démontrer que le segment PQ a une longueur constante, qu'il passe par ω milieu de IJ et qu'il constitue la bande de papier relative à M.

655. 1° Démontrer que la puissance d'un point M d'une ellipse par rapport au cercle principal est proportionnelle au carré de sa distance au grand axe.

2° Montrer que la longueur de la tangente menée du point M au cercle secondaire est proportionnelle à sa distance au petit axe.

3° Construire une ellipse connaissant deux points de la courbe et soit le cercle principal, soit le cercle secondaire.

656. 1° Démontrer que deux ellipses, homothétiques par rapport à leur centre commun découpent sur toute sécante commune des cordes de même milieu.

2° Trouver le lieu du milieu M d'une corde AB d'une ellipse issue d'un point fixe P.

657. 1° Soit M_1 et M_2 les points du cercle principal et du cercle secondaire homologues d'un point donné M d'une ellipse. Démontrer que, si M_1 et M_2 sont alignés avec le centre O de l'ellipse, le cercle MM_1M_2 est tangent au cercle principal et au cercle secondaire.

2° Construire une ellipse connaissant son centre, les longueurs $2a$ et $2b$ de ses axes et un point donné M. Peut-on retrouver cette construction à l'aide de la bande de papier ?

658. 1° Deux cordes AB et CD d'une ellipse issues du point P sont respectivement parallèles aux demi-diamètres OI et OJ. Démontrer que :

$$\frac{\overline{PA}\,.\,\overline{PB}}{\overline{OI}^2} = \frac{\overline{PC}\,.\,\overline{PD}}{\overline{OJ}^2}.$$

2° *Pour que quatre points* A, B, C, D *d'une ellipse appartiennent à un même cercle, il faut et il suffit que les cordes* AB *et* CD *soient également inclinées sur les axes.*

3° Utiliser cette propriété pour construire le quatrième point D commun à une ellipse et à un cercle passant trois points A, B, C de l'ellipse. Cas où le cercle est tangent en A à l'ellipse et la recoupe en B et C ?

659. On considère dans le plan un triangle ABC dont les sommets B et C sont fixes, A étant variable de façon que $b + c$ reste constant et égal à une longueur donnée l.

1° On appelle P, T, T′ les points de contact du cercle exinscrit dans l'angle B avec les côtés BC, AB et AC respectivement. Montrer que P est fixe et est l'un des sommets de l'ellipse décrite par le point A. Quels sont les lieux de T et T′ ?

2° Montrer que le produit $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\,.\,\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ reste constant.

3° Si l'on appelle ω le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC et H son point de contact avec le côté BC, montrer que le rapport $\frac{\overline{H\omega}^2}{\overline{HB}.\overline{HC}}$ reste constant. En déduire que le lieu de ω est une ellipse de grand axe BC.

660. Déterminer une hyperbole connaissant son centre, un point et la tangente en ce point, ainsi que l'angle des asymptotes.

661. Déterminer une hyperbole admettant une asymptote donnée, connaissant en outre :

1° Trois points de la courbe ;

2° Deux points et la tangente en l'un d'eux ;

3° Deux points et l'excentricité ou l'angle des asymptotes.

662. 1° Par les points A et B d'une hyperbole on mène les parallèles aux asymptotes et on forme un parallélogramme APBQ. Montrer que la droite PQ est conjuguée harmonique de la direction AB par rapport aux asymptotes.

2° Construire une hyperbole connaissant trois points A, B, C de la courbe et les directions des asymptotes.

663. 1° Démontrer que deux hyperboles de mêmes asymptotes découpent sur une sécante commune quelconque des cordes de même milieu.

2° En déduire le lieu du milieu M d'une corde AB d'une hyperbole issue d'un point donné P.

664. On donne deux droites fixes Ox et Oy et un point fixe P. Une sécante variable issue de P coupe Ox et Oy en A et B.

1° Déterminer le lieu du milieu M de AB. Préciser ses éléments.

2° Plus généralement déterminer le lieu d'un point N de la droite AB tel que $\overline{PN} = \alpha\overline{PA} + \beta\overline{PB}$ (α et β étant des constantes données).

665. 1° Par un point A d'une hyperbole on mène les parallèles $A\lambda$ et $A\mu$ aux asymptotes OX et OY de l'hyperbole. La droite qui joint au centre O un point variable M de l'hyperbole coupe $A\lambda$ et $A\mu$ en P et Q. Démontrer que $\overline{OM}^2 = \overline{OP}\,.\,\overline{OQ}$.

2° Une droite variable issue d'un point fixe P coupe deux droites fixes Ox et Oy en A et B. Trouver le lieu des points M et M′ de cette droite tels que : $\overline{PM}^2 = \overline{PM'}^2 = \overline{PA}\,.\,\overline{PB}$.

666. 1° On désigne par A et B deux points fixes et par M un point variable d'une hyperbole L'asymptote OY coupe en P et Q les droites MA et MB et en A′ et B′ les parallèles à l'asymptote OX menées par A et B. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ reste égal au vecteur $\overrightarrow{A'B'}$.

2° Deux points variables P et Q décrivent des divisions égales sur une même droite Δ. Par deux points fixes A et B on mène les droites AP et BQ. Trouver le lieu du point d'intersection M de ces deux droites.

667. Soit AB et CD deux cordes parallèles de milieux respectifs I et J d'une hyperbole de centre O. Les droites AC et BD se coupent en K et les droites AD et BC se coupent en L.

1° Démontrer que les points O, I, J, K et L sont alignés.

2° En déduire que la droite OI passe par le point de rencontre M des tangentes en A et B ainsi que par les points P et Q communs aux parallèles aux asymptotes menées par A et B.

3° Démontrer que la division (OMPQ) est harmonique.

668. Soit A un point quelconque et deux points B et C diamétralement opposés d'une hyperbole. On désigne par I et J les milieux de AB et AC et par P et Q les points de rencontre de AC et des asymptotes OX et OY. Les tangentes en A et B se coupent en un point M de OI et la parallèle à AM menée par O coupe AC en K.

1° Démontrer que les directions OI et OJ sont conjuguées harmoniques par rapport aux asymptotes et que la division (AKPQ) est harmonique. Établir que : $\overline{OM}.\overline{OI} = \overline{AP}.\overline{AQ}$.

2° On suppose que OI coupe la courbe en D et E. Démontrer que : $\overline{OD}^2 = \overline{OE}^2 = \overline{OM}.\overline{OI}$.

669. Soit M un point variable sur une hyperbole de centre O et de foyers F et F′. On trace les cercles de centres F et F′ passant par M et se recoupant en M′.

1° Construire une tangente commune TT′ à ces deux cercles. Trouver les lieux de T et T′ et du milieu M_1 de TT′. Montrer que M_1 est sur la droite MM′ et préciser la longueur et la direction du vecteur $\overrightarrow{TT'}$.

2° Soit H l'intersection de MM′ avec l'axe focal Ox. Déduire de ce qui précède la relation : $\overline{M_1M}.\overline{M_1M'} = b^2$, puis que : $\overline{HM}^2 = \overline{HM_1}^2 - b^2$ et retrouver ainsi l'équation de l'hyperbole.

3° Démontrer que TT′ coupe Ox au pied N des normales en M et M′ et que le cercle bitangent en M et M′ à l'hyperbole est orthogonal au cercle de diamètre TT′.

670. On désigne par P et Q les intersections de la tangente en un point variable M d'une hyperbole avec les asymptotes OS et OS′, par I et J les intersections de la normale en M avec l'axe non focal Oy et l'axe focal Ox. Soit A et A′ les projections sur les asymptotes du point I et soient B et B′ celles du point J.

1° Démontrer que les points O, P, Q sont situés sur le cercle de diamètre IJ et que M est l'intersection de AA′ et de BB′. En déduire une construction de la normale en M à l'hyperbole.

2° Établir la relation $\overline{IM}^2 - \overline{IA}^2 = a^2$. Montrer que le cercle de centre I, bitangent en M et M_1 à l'hyperbole, découpe sur une asymptote un segment de longueur constante $2a$.

3° Établir la relation : $\overline{JB}^2 - \overline{JM}^2 = b^2$. En déduire que le cercle de centre J, tangent aux asymptotes, découpe sur la tangente en M un segment de longueur constante $2b$.

671. 1° Soient AB et CD deux cordes d'une hyperbole antiparallèles par rapport aux asymptotes qu'elles coupent respectivement en P et Q et en R et S. Démontrer que les quatre points A, B, C, D appartiennent à un cercle ω concentrique au cercle PQRS.

2° En déduire une construction des points d'intersection d'une droite donnée Δ et d'une hyperbole définie par ses asymptotes OX et OY et un point de la courbe.

3° Un cercle variable ω passe par deux points fixes P et Q et recoupe les droites fixes OP et OQ en R et S. Le cercle de centre ω passant par un point donné A de la droite PQ coupe la droite RS en M et M′. Lieu des points M et M′.

672. Une sécante variable issue d'un point fixe M coupe une hyperbole donnée en A et B et coupe ses asymptotes OX et OY en P et Q. On désigne par λ le produit des coordonnées obliques X et Y de A dans le repère XOY et par μ celui des coordonnées analogues de M.

1° Établir la relation $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MP}.\overline{MQ} - \overline{AP}.\overline{AQ}$ et montrer que les produits $\overline{MP}.\overline{MQ}$; $\overline{AP}.\overline{AQ}$ et $\overline{MA}.\overline{MB}$ sont proportionnels à des nombres constants.

2° *Pour que quatre points* A, B, C, D *d'une hyperbole appartiennent à un même cercle de centre* ω *il faut et il suffit que les cordes* AB *et* CD *soient également inclinées sur les axes* ou qu'elles coupent les asymptotes en quatre points P, Q, R, S d'un cercle de même centre ω.

3° Utiliser la propriété précédente pour construire le quatrième point D commun à une hyperbole et au cercle ABC défini par trois points donnés A, B, C de cette hyperbole.

673. Soient deux axes de coordonnées orthonormées $x'Ox$, $y'Oy$. On considère les triangles variables AOB ayant pour bissectrice intérieure l'axe Ox et pour côtés des segments OA et OB de longueurs m et n respectivement ($m > n$). On suppose l'angle $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA})$ variant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

1° Exprimer les coordonnées des points A et B et celles du milieu, M, de AB. Équation du lieu de M lorsque φ varie ?

2° Si P est le point qui partage AB dans le rapport algébrique $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\lambda$ ($\lambda > 0$), calculer les coordonnées de P et trouver le lieu de ce point lorsque φ varie.

3° On mène par M la parallèle à OA, qui coupe $x'x$ en E, $y'y$ en F. Montrer que les longueurs ME et MF sont constantes et retrouver géométriquement le lieu de M.

4° Par P on mène la parallèle à OA, qui coupe $x'x$ en G et $y'y$ en H. Montrer que les longueurs PG et PH sont constantes et retrouver géométriquement le lieu de P.

5° On fait subir à OM une rotation de centre O et d'angle φ ; OM vient en OM′. Lieu de M′ ?

6° On fait subir à OM une rotation de centre O et d'angle $-\varphi$; OM vient en OM″. Lieu de M″ ?

7° Reprendre les questions 5° et 6° pour le point P : lieux des points P′ et P″ obtenus après les deux rotations ?

674. A tout point m du plan complexe, d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M d'affixe $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1° Déterminer les coordonnées X, Y, de M en fonction de celles, x, y, de m.

2° Montrer que, lorsque m décrit un cercle de centre O et de rayon r, le point M décrit une ellipse (E), dont on déterminera les axes et les foyers. Inversement, on se donne une ellipse (E) de la famille trouvée ; de quel cercle est-elle la transformée ?

3° Montrer que, lorsque m décrit une droite issue de O, le point M décrit une hyperbole (H), dont on déterminera les axes, les foyers et les asymptotes. Inversement, on se donne une hyperbole (H) de la famille trouvée. De quelle droite est-elle la transformée ?

4° En combien de points se coupent une ellipse (E) et une hyperbole (H) quelconques ? Montrer qu'en chacun de leurs points communs elles se coupent orthogonalement.

675. On donne un système d'axes orthonormé, $x'Ox$, $y'Oy$; soit A l'extrémité du vecteur unitaire sur l'axe des x. On considère la transformation ponctuelle (T) qui, à un point P du plan, fait correspondre le point M par la construction suivante : P se projette orthogonalement en H sur $y'y$; M est l'intersection de la droite AP avec la parallèle à AH menée par O.

1° Le point M est-il bien défini pour tout point P du plan ? On considère l'intersection, I, de la droite AP avec $y'y$. Montrer que M et P se correspondent dans une inversion de pôle I et de puissance IA^2. Comment faut-il modifier cette conclusion lorsque I n'existe pas ? Montrer que cette nouvelle détermination du point M est équivalente à la construction initiale, lorsque P n'est pas sur $x'x$. Peut-on, dans un langage conventionnel, définir le transformé d'un point situé sur $y'y$?

2 On désigne par (x, y) les coordonnées de P, par (X, Y) celles de M. Établir les relations qui déterminent x et y en fonction de X et Y, puis celles qui donnent X et Y en fonction de x et y.

Les deux questions suivantes pourront être traitées, au choix, par la géométrie ou par le calcul.

3° Démontrer que (T) transforme une droite (U) en une droite (V). Donner une détermination géométrique simple de (V) lorsque (U) est donnée.

4° Démontrer que (T) transforme un cercle (K), de centre A et de rayon k (k positif) en une conique, (C), dont on discutera le genre, suivant les valeurs de k. Mettre en place les foyers, les sommets et les asymptotes de la conique correspondant à $k = \sqrt{2}$.

SECTIONS PLANES D'UN CÔNE DE RÉVOLUTION

449. Généralités. — Nous nous proposons de montrer que toute conique : ellipse, hyperbole ou parabole, peut être considérée comme une section plane d'un cône de révolution, en utilisant la méthode classique de Dandelin (géomètre belge 1794-1847).

Considérons une surface conique de révolution de sommet S, d'axe Sz et de demi-angle au sommet θ. Désignons par P un plan donné faisant avec Sz l'angle $\varphi \leqslant 1^{D}$. Lorsque le plan P passe par S (fig. 380), il coupe le cône suivant deux génératrices distinctes, deux génératrices confondues ou au seul point S selon que l'angle φ est inférieur, égal ou supérieur à θ, c'est-à-dire selon que le plan P est sécant, tangent ou extérieur au cône S. D'autre part lorsque le plan P est perpendiculaire en O à l'axe Sz, il coupe le cône suivant un cercle de centre O. Dans ce qui suit, nous écarterons ces cas particuliers et nous supposerons donc que le plan P ne contient pas le sommet S du cône et n'est pas perpendiculaire à l'axe Sz de ce cône.

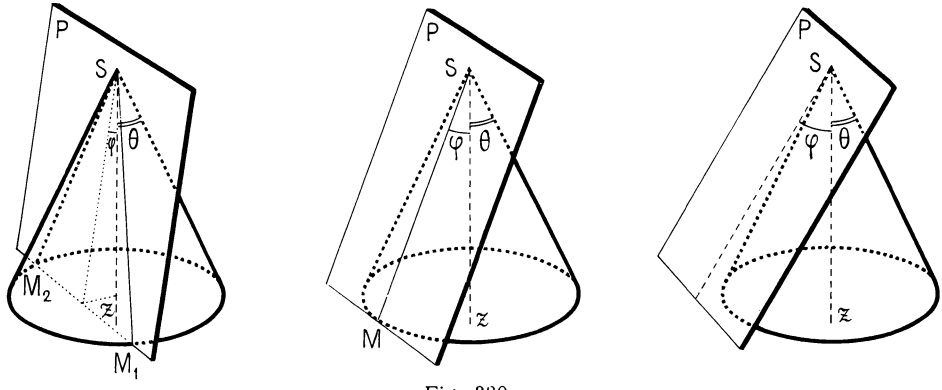


Fig. 380

450. Théorème. — ***La section d'un cône de révolution par un plan ne passant pas par le sommet du cône est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.***

La figure formée par le cône de révolution S et le plan sécant P admet pour plan de symétrie, le plan méridien issu de l'axe Sz et perpendiculaire au plan P (fig. 381). Ce plan de symétrie coupe le cône suivant deux génératrices Su et Sv dont l'une au moins Su coupe le plan P en A. Désignons par Ax la trace du plan de symétrie ASz sur le plan P. La droite Ax est la projection de Sz sur le plan P et fait avec Sz l'angle aigu φ. L'axe Sz coupe une des bissectrices de l'angle SAx en un point ω, centre d'un cercle tangent en C à Su, en C′ à Sv et en F à Ax. La sphère (ω) admettant le cercle FCC′ pour grand cercle est inscrite dans le cône suivant un petit cercle γ, d'axe Sz et de diamètre CC′. Le rayon ωF étant perpendiculaire au plan P, la sphère (ω) est tangente en F au plan P. Le plan (π) qui contient le cercle γ est perpendiculaire au plan de symétrie SAx et coupe le plan P suivant une droite D perpendiculaire en K à Ax et à CC′.

1° Tout point M commun au plan P et au cône S appartient à une génératrice du cône qui coupe γ en T. Soient N et H les projections de M sur le plan (π) et sur la droite D. Les droites MN et MH étant respectivement parallèles à Sz et Ax, les angles aigus NMT et NMH sont respectivement égaux à θ et à φ, ce qui montre que :

$$MN = MT \cos\theta = MH \cos\varphi.$$

Or les segments MT et MF sont égaux comme tangentes issues de M à la sphère (ω). On en déduit que $MF \cos\theta = MH \cos\varphi$ soit :

$$\frac{MF}{MH} = \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

Le point M *appartient donc à la conique* Γ *de foyer* F, *de directrice associée* D *et d'excentricité* $\dfrac{\cos\varphi}{\cos\theta}$ (n° 424).

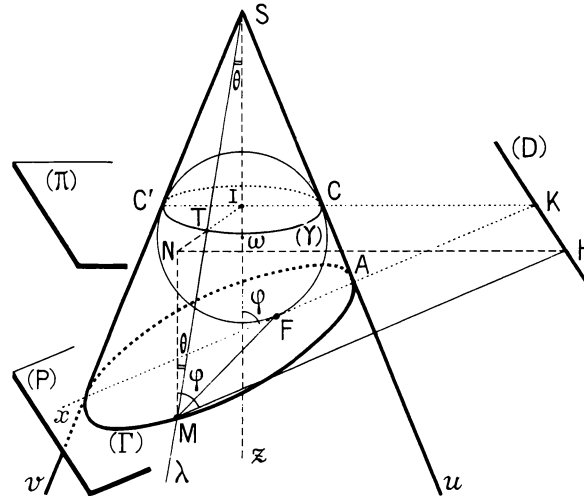


Fig. 381

2° Réciproquement, soit M un point quelconque de cette conique Γ. Menons par la droite SM un plan Q coupant le cône suivant deux génératrices $S\lambda_1$ et $S\lambda_2$ non parallèles au plan P. D'après ce qui précède, ces génératrices coupent le plan P en deux points distincts M_1 et M_2 de la conique Γ. Le point M qui appartient à la conique Γ et à la droite M_1M_2 intersection des plans P et Q coïncide avec l'un des points M_1 ou M_2. Donc :

Tout point de la conique Γ *fait partie de l'intersection du cône S et du plan P.*

451. Nature de la section. — Menons par le sommet S le plan P′ parallèle au plan P. Trois cas peuvent se présenter :

1° $\varphi > \theta \iff \cos\varphi < \cos\theta \iff e = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\theta} < 1.$

Le plan P′ est extérieur au cône et la conique Γ est *une ellipse.*

2° $\varphi = \theta \iff \cos\varphi = \cos\theta \iff e = 1.$

Le plan P′ est tangent au cône et la conique Γ est une *parabole.*

3° $\varphi < \theta \iff \cos\varphi > \cos\theta \iff e = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\theta} > 1.$

Le plan P′ coupe le cône suivant deux génératrices et Γ est une *hyperbole.*

Une section plane d'un cône de révolution est une ellipse, une parabole ou une hyperbole selon que le plan issu du sommet et parallèle au plan sécant est extérieur, tangent ou sécant au cône.

Notons que, lorsque le plan sécant P se déplace parallèlement à lui-même, les sections obtenues sont homothétiques l'une de l'autre par rapport à S.

452. Section elliptique. — Dans ce cas (fig. 382), la section Γ appartient à une même nappe du cône. Le plan P coupe les deux génératrices du plan de symétrie uSv en A et A′, extrémités du grand axe de l'ellipse Γ. Il existe deux sphères ω et ω' inscrites dans le cône et tangentes en F et F′ au plan P. Ces sphères sont situées de part et d'autre du plan P et leurs cercles de contact γ et γ' de diamètres CC′ et EE′ coupent la génératrice SM en deux points T et T′ de part et d'autre de M. Comme MF = MT et MF′ = MT′ :

$$MF + MF' = MT + MT' = TT' = CE.$$

L'ellipse Γ *admet pour foyers les points de contact* F *et* F′ *des sphères inscrites au cône et tangentes à son plan. Son grand axe* AA′ *est égal au segment déterminé sur une génératrice du cône par les cercles de contact de ces sphères.*

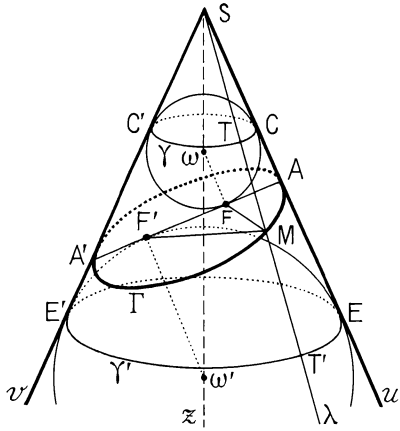


Fig. 382

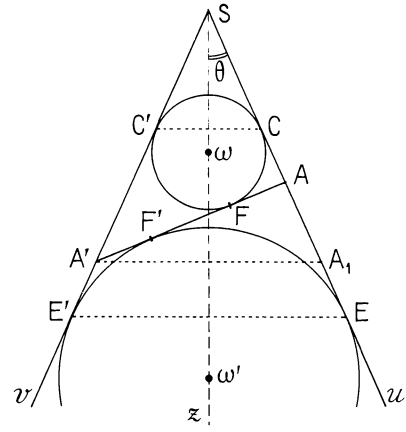


Fig. 383

D'autre part (fig. 383) désignons par A_1 le point où la parallèle à CC′ menée par A′ coupe la génératrice SA. Les égalités AF = AC, A′F′ = A′E′ et AA′ = CE montrent que les deux divisions AFF′A′ et CAA_1E sont égales. Par suite :

$$AA_1 = FF' = 2c \quad \text{et} \quad |\, SA - SA' \,| = |\, SA - SA_1 \,| = AA_1 = 2c.$$

453. Cônes de révolution contenant une ellipse donnée. — Soit Γ une ellipse de foyers F et F′ et de grand axe AA′, située dans un plan P (fig. 384). Le sommet S d'un cône de révolution contenant Γ appartient au plan P′ perpendiculaire au plan P suivant AA′ et (n° 452) vérifie la relation :

$$|\, SA - SA' \,| = FF' = 2c.$$

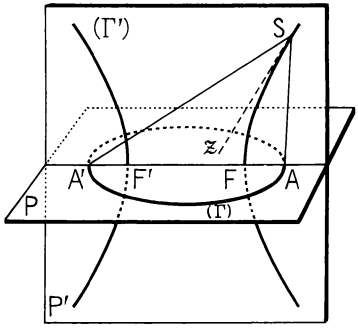


Fig. 384

Le point S appartient donc à l'hyperbole Γ′ du plan P′, de foyers A et A′ et de sommets F et F′.

Réciproquement soit S un point quelconque de l'hyperbole Γ′ et Sz la tangente en S, bissectrice intérieure de l'angle ASA′. Le cône de révolution de sommet S, d'axe Sz et d'angle au sommet ASA′ coupe le plan P suivant une ellipse de sommets A et A′ et dont la distance focale | SA — SA′ | est égale à FF′. Cette ellipse coïncide avec Γ. Autrement dit :

Le cône de sommet S et de directrice Γ est un cône de révolution.

454. Définition. — ***Une ellipse et une hyperbole sont dites focales lorsqu'elles sont situées dans deux plans perpendiculaires et telles que les foyers de l'une soient les sommets de l'axe focal de l'autre.***

Il est clair que l'une de ces deux courbes est déterminée dès que l'on connaît l'autre. On peut donc énoncer le théorème :

Le lieu des sommets des cônes de révolution contenant une ellipse Γ ***est l'hyperbole focale*** Γ′.

Notons que l'hyperbole Γ′ est aussi l'enveloppe des axes des cônes de révolution contenant Γ.

455. Section hyperbolique. — Dans ce cas (fig. 385) on a $\varphi < \theta$. Le plan sécant P coupe les deux génératrices Su et Sv en deux points A et A′ n'appartenant pas à une même nappe du cône. Il existe encore deux sphères ω et ω' inscrites dans le cône et tangentes en F et F′ au plan P. Ces deux sphères étant situées d'un même côté du plan P, leurs cercles de contact γ et γ' de diamètres CC′ et EE′ coupent la génératrice SM en deux points T et T′ situés d'un même côté du point M. Comme MF = MT et MF′ = MT′ on obtient :

$$| MF' - MF | = | MT' - MT | = TT' = CE.$$

L'hyperbole Γ *admet pour foyers les points de contact* F *et* F′ *des sphères inscrites dans le cône* S *et tangentes au plan* P. *Son axe focal* AA′ *est égal au segment déterminé sur une génératrice du cône par les cercles de contact de ces sphères.*

Désignons (fig. 386) par A_1 le point où la parallèle à CC′ issue de A′, coupe la génératrice SA. Les égalités AA′ = CE, AF = AC et A′F′ = A′E′ = A_1E montrent que les deux divisions FAA′F′ et ACEA_1 sont égales. Par suite :

$$AA_1 = FF' = 2c \quad \text{et} \quad SA + SA' = SA + SA_1 = AA_1 = 2c.$$

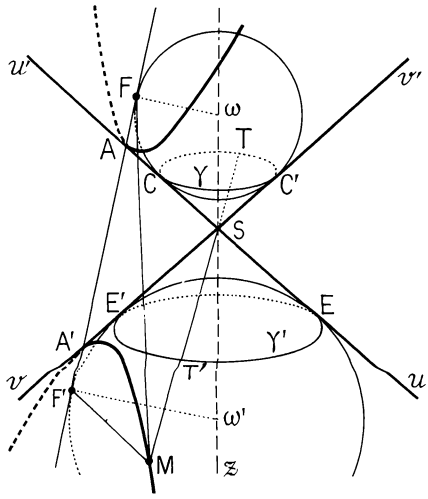


Fig. 385

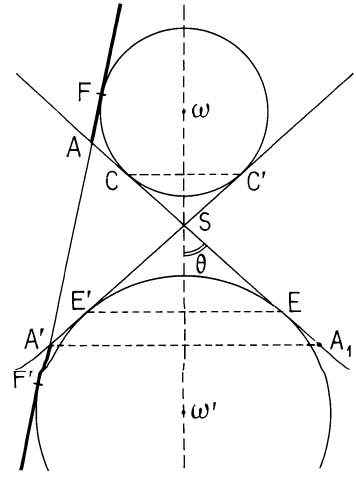


Fig. 386

456. Cônes de révolution contenant une hyperbole donnée. — Soit Γ une hyperbole de foyers F et F′, d'axe focal AA′, située dans un plan P (fig. 387).

Le sommet S d'un cône de révolution contenant Γ se trouve dans le plan P′ perpendiculaire au plan P suivant AA′ et on doit avoir (n° 455) :

$$SA + SA' = FF' = 2c.$$

Le point S appartient donc à l'ellipse Γ' focale de l'hyperbole Γ (n° 454).

Réciproquement le cône de révolution ayant pour sommet un point quelconque S de cette ellipse Γ', pour axe la tangente Sz à Γ' et pour génératrices SA et SA′, coupe le plan P suivant une hyperbole de sommets A et A′, de distance focale SA + SA′ = FF′. Cette hyperbole coïncide avec Γ.

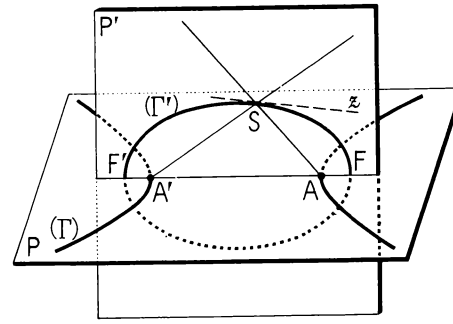


Fig. 387

Le lieu des sommets des cônes de révolution contenant une hyperbole Γ ***est l'ellipse focale*** Γ'.

L'ellipse Γ' est aussi l'enveloppe des axes des cônes de révolution qui contiennent l'hyperbole Γ.

457. Section parabolique. — Dans ce cas (fig. 388) on a $\varphi = \theta$ et MF = MH. La section Γ est la parabole de foyer F, de directrice D et de paramètre p = FK. Le plan P de Γ est parallèle à la génératrice Sv du cône et il en est de même de l'axe Ax

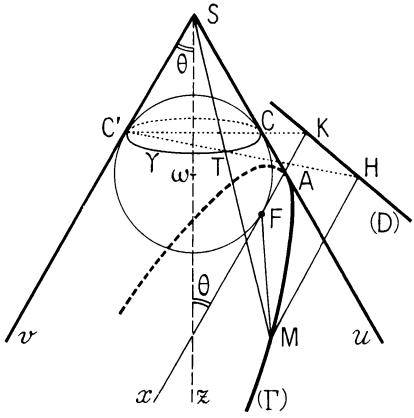


Fig. 388

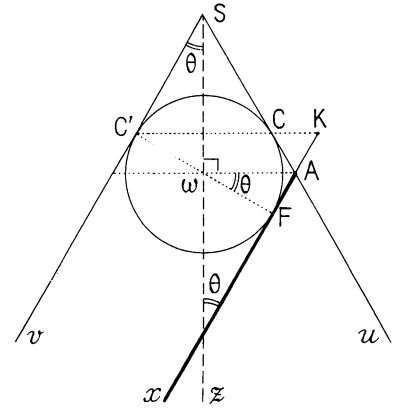


Fig. 389

de la parabole Γ. Il n'y a cette fois qu'une seule sphère ω, inscrite dans le cône et tangente au plan P car l'axe Sz du cône est parallèle à l'une des bissectrices de l'angle SAx. Cette sphère qui touche le cône, suivant le cercle γ, est tangente en F à Ax, en C à Su, en C′ à Sv. Le triangle SωA est rectangle en ω et (fig. 389) on en déduit que :

$$SC = SC'; \quad AC = AF = \frac{p}{2} \quad \text{et} \quad \widehat{A\omega F} = \theta.$$

Remarquons que SC′ et MH étant parallèles C′, T et H sont alignés sur l'intersection du plan SC′M et du plan du cercle γ. Comme ST = SC′ les deux triangles semblables STC′ et MTH sont isocèles. On a donc MT = MH et on retrouve ainsi l'égalité MF = MT = MH.

458. Cônes de révolution contenant une parabole donnée. — Soit Γ une parabole de foyer F et de sommet A située dans un plan P (fig. 390). Le sommet S d'un cône de révolution contenant Γ se trouve dans le plan P′ perpendiculaire au plan P suivant l'axe Ax de la parabole Γ. Désignons par ω le cercle tangent en F à Ax et en C et C′ aux génératrices Su et Sv du cône S situées dans le plan P′. L'angle AωS étant droit, la droite Aω coupe Sv en un point H′ symétrique de A par rapport à Sω. Le point H′ appartient à la droite Δ perpendiculaire au plan P en K′ symétrique de A par rapport à F. Comme d'autre part SA = SH′ le point S est équidistant de A et de Δ. Il appartient donc à la parabole Γ' de foyer A et de directrice Δ.

Réciproquement soit S un point quelconque de Γ' se projetant en H′ sur Δ. Le milieu ω de AH′ se projette en F sur Ax et appartient à la bissectrice intérieure Sz de l'angle ASH′. Il est donc équidistant de Ax, SH′ et SA et le cercle de centre ω, tangent en F à Ax, est tangent à SH′ et SA. Le cône de révolution d'axe Sz admettant SA et SH′ pour génératrices est coupé par le plan P suivant une parabole de foyer F et de sommet A, c'est-à-dire suivant la parabole Γ. Les paraboles égales Γ et Γ', de

même axe Ax, situées dans deux plans perpendiculaires et telles que le foyer de l'une soit le sommet de l'autre sont dites *focales* l'une de l'autre (fig. 391). Il en résulte que :

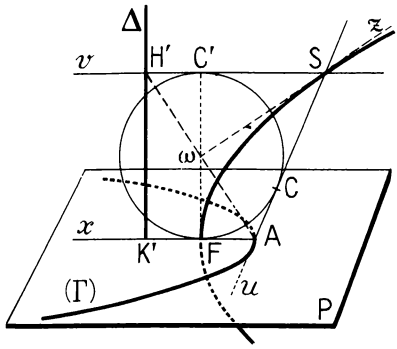


Fig. 390

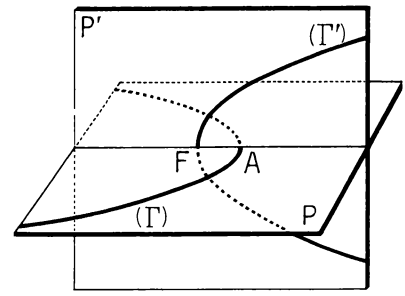


Fig. 391

***Le lieu des sommets des cônes de révolution contenant une parabole* Γ *est la parabole focale* Γ'.**

Remarquons que l'axe Sz du cône S est la tangente en S à Γ'. Cette parabole est donc l'enveloppe des axes des cônes de révolution contenant Γ.

459. Problème. — *Placer une conique donnée* Γ *d'excentricité e, sur un cône de révolution donné* S *de demi-angle au sommet* θ.

D'après la formule $e = \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}$ (n° 450), il faut couper le cône S par un plan P faisant avec l'axe Sz du cône S un angle φ tel que : $\cos\varphi = e\cos\theta$.

Ceci est toujours possible pour une ellipse ou une parabole car $e \leqslant 1 \Longrightarrow e\cos\theta < 1$.

Pour une hyperbole Γ cela n'est possible que si $e\cos\theta \leqslant 1 \iff e \leqslant \frac{1}{\cos\theta}$.

En désignant par 2α l'angle des asymptotes de cette hyperbole on voit (n° 407) que

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\cos\alpha} \Longrightarrow \frac{1}{\cos\alpha} \leqslant \frac{1}{\cos\theta} \iff \cos\theta \leqslant \cos\alpha \iff \alpha \leqslant \theta.$$

Il faut que l'angle des asymptotes de l'hyperbole Γ soit au plus égal à l'angle au sommet du cône.

Ayant obtenu une section Γ' d'excentricité e, une homothétie de centre S permettra d'obtenir une section égale à la conique Γ donnée.

460. Sections planes d'un cylindre de révolution. — Les méthodes utilisées aux n^{os} 450 et 452, pour le cône s'appliquent au cas d'un cylindre de révolution.

La figure formée par un cylindre de révolution d'axe $z'z$ et un plan P coupant les génératrices sous l'angle aigu φ, admet pour plan de symétrie le plan méridien issu de $z'z$ et perpendiculaire au plan P (fig. 392). Ce plan de symétrie contient les génératrices $u'u$ et $v'v$ qui coupent le plan P en A et A'. La droite AA' est la projection de $z'z$ sur le plan P et fait avec $z'z$ l'angle φ.

L'axe $z'z$ coupe la bissectrice intérieure de l'angle A'Au en un point ω, centre d'une sphère tangente en F au segment AA', en C à Au et en C' à A'v. Cette sphère, tangente en F au plan P, est inscrite dans le cylindre suivant un cercle γ de diamètre CC' et dont le plan (π) est perpendiculaire au plan de symétrie Azz'. Les deux plans P et (π) se coupent suivant une droite D perpendiculaire en K à AA' et à CC'.

Tout point M commun au cylindre et au plan P appartient à une génératrice $y'y$ coupant le cercle γ en T. Le point M se projette en T sur le plan (π),en H sur la droite D

et l'angle aigu en M du triangle rectangle MTH est égal à φ, d'où : MT = MH cos φ. Or MT = MF comme tangentes issues de M à la sphère ω. On en déduit que :

$$MF = MH \cos \varphi \quad \text{ou} \quad \frac{MF}{MH} = \cos \varphi.$$

Le point M *appartient donc à l'ellipse* Γ *de foyer* F, *de directrice* D *et d'excentricité :* $e = \cos \varphi$.

Tout point M de cette ellipse Γ fait partie de l'intersection car le plan M*zz'* contient deux génératrices du cylindre qui coupent le plan P en deux points distincts M_1 et M_2 de Γ. Le point M appartenant à Γ et à la droite M_1M_2 commune aux plans P et M*zz'* coïncide avec l'un des deux points M_1 ou M_2 :

461. Théorème. — ***La section d'un cylindre de révolution par un plan coupant les génératrices sous un angle*** φ ***est une ellipse d'excentricité*** $e = \cos \varphi$.

Il est clair que le segment AA' = 2*a* est le grand axe de cette ellipse. D'autre part, il existe une deuxième sphère ω' symétrique de la sphère ω par rapport au milieu O de AA', tangente en F' au plan P et inscrite dans le cylindre suivant le cercle γ' de diamètre EE'. Les cercles γ et γ' étant situés de part et d'autre du plan P, coupent la génératrice $\lambda'\lambda$ en deux points T et T' de part et d'autre de M. Comme MF' = MT', on en déduit que : MF + MF' = MT + MT' = TT' = CE.

L'ellipse Γ *admet pour foyers les points de contact* F *et* F' *des sphères inscrites dans le cylindre et tangentes à son plan. Son grand axe* AA' = 2*a est égal au segment déterminé sur une génératrice du cylindre par les cercles de contact de ces sphères.*

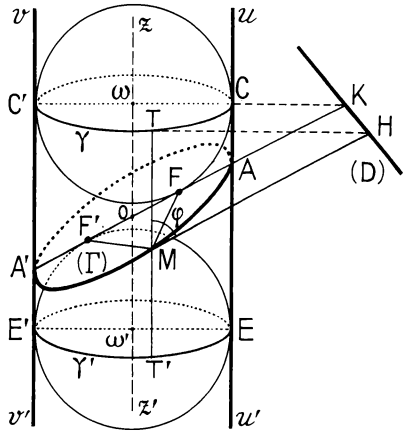


Fig. 392

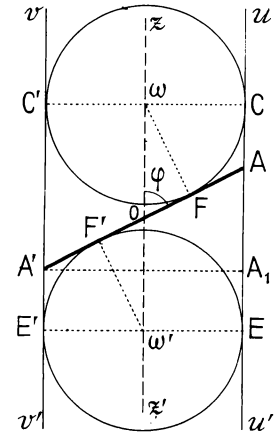


Fig. 393

Désignons par A_1, le point où la parallèle à CC', menée par A', coupe *uu'* (fig. 393) Les égalités A'F' = A'E' = A_1E et AA' = CE, AF = AC montrent que les divisions AFF'A' et CAA_1E sont égales. Donc AA_1 = FF' = 2*c*.

Dans le triangle rectangle AA_1A' on a d'autre part :

$\overline{A'A_1}^2 = \overline{A'A}^2 - \overline{AA_1}^2 = 4a^2 - 4c^2 = 4b^2 \Longrightarrow A'A_1 = 2b.$

Le petit axe de l'ellipse Γ *est égal au diamètre du cylindre.*

Cette dernière propriété résulte d'ailleurs du fait que le diamètre BB' du cylindre perpendiculaire en O au plan AO*z* est un axe de symétrie de la figure. Il coïncide avec le petit axe de l'ellipse Γ.

462. Remarques. — 1° Une ellipse d'excentricité e ne peut par suite être placée sur un cylindre donné que si son petit axe est égal au diamètre du cylindre. Tout plan faisant avec l'axe de ce cylindre un angle φ tel que $\cos\varphi = e$ coupe alors le cylindre suivant une ellipse Γ égale à l'ellipse donnée.

2° Tout cylindre de révolution contenant une ellipse donné Γ a un diamètre égal au petit axe de Γ. Son axe $z'z$ passe par le centre O de Γ. Il se projette sur le plan P de cette ellipse suivant l'axe focal Ox et fait avec Ox un angle φ tel que $\cos\varphi = \frac{c}{a} = \frac{OF}{OA}$.

Il y a donc deux positions possibles pour $z'z$: ce sont les asymptotes de l'hyperbole focale de l'ellipse Γ (n° 454).

463. Propriétés projectives des coniques. — Considérons une conique Γ intersection d'un plan P et d'un cône de révolution de sommet S. désignons par γ la section de ce cône par un plan π perpendiculaire à son axe :

***La conique* Γ *est l'homologue du cercle* γ *dans la projection ou perspective de centre* S *du plan* π *sur le plan* P.

Il en résulte qu'une conique possède toutes les propriétés du cercle qui se conservent en projection centrale. Citons le théorème du n° 30 et les propriétés des n°s 126 et 127.

La division harmonique se conservant en projection, on peut étendre aux coniques la définition des points conjugués (n° 112) et les propriétés des pôles et polaires (n°s 117 à 124).

EXERCICES

676. On considère un cône de révolution S et un point fixe intérieur F.

1° Déterminer les coniques de foyer F situées sur le cône.

2° Discuter la nature des coniques trouvées et trouver le lieu des foyers des paraboles situées sur le cône.

677. On donne un cône de révolution et une droite Δ orthogonale à l'axe du cône.

1° Déterminer les coniques de directrice Δ situées sur le cône.

2° Étudier la nature des coniques trouvées.

678. 1° Soit θ le demi-angle au sommet d'un cône de révolution S. Déterminer l'angle φ que fait avec l'axe de ce cône un plan P coupant le cône suivant une hyperbole équilatère. Discuter.

2° Lieux des foyers des hyperboles équilatères situées sur S.

679. Un plan P coupe un cône de sommet S suivant une conique Γ qui se projette suivant une courbe Γ' sur le plan π perpendiculaire en S à l'axe du cône. Démontrer que Γ' est une conique de foyer S. Préciser sa directrice et son excentricité.

680. Deux cônes de révolution ont leurs sommets S et S′ dans un plan P perpendiculaire à la direction commune de leurs axes. On désigne par α et β les demi-angles au sommet de ces cônes.

1° Montrer que la projection de l'intersection Γ de ces deux cônes sur le plan P est en général un cercle.

2° Étudier le cas où $\alpha = \beta$ et déterminer dans ce cas la courbe Γ.

681. 1° Trouver le plan d'une conique Γ située sur un cône de révolution donné connaissant le centre O de cette conique.

2° Démontrer que deux cônes de révolution égaux dont les axes sont parallèles se coupent suivant une conique dont on précisera le centre et le plan.

682. Deux cylindres de révolution de même rayon b ont des axes $x'x$ et $y'y$ concourants en un point ω. La sphère de centre ω et de rayon b est inscrite dans le premier cylindre suivant un cercle γ, dans le second suivant un cercle γ'. Les deux cercles γ et γ' se coupent aux extrémités d'un diamètre BB′ de la sphère de centre ω.

1° Montrer que tout point M commun aux deux cylindres est équidistant des plans π et π' des cercles γ et γ' et appartient à l'un ou l'autre de deux plans rectangulaires P et P' issus de BB'. Étudier la réciproque.

2° En déduire que l'intersection des deux cylindres se compose de deux ellipses de petit axe $2b$ et de grands axes respectifs $2a$ et $2a'$. Démontrer la relation : $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a'^2} = \frac{1}{b^2}$.

683. Un cône de sommet S est coupé suivant une hyperbole par un plan P parallèle aux génératrices $S\lambda$ et $S\mu$. Soit M un point quelconque de cette hyperbole Γ.

1° Les droites $S\lambda$ et $S\mu$ sont les directions asymptotiques de Γ et le plan $MS\lambda$ coupe le plan P suivant une droite $M\lambda'$ parallèle à $S\lambda$.

2° En déduire que les asymptotes de Γ sont les intersections du plan P par les plans tangents au cône S suivant $S\lambda$ et $S\mu$.

684. Une sphère Σ et un plan P sont tangents en F. On considère les cônes de révolution de sommets S circonscrits à la sphère Σ et coupés par le plan P suivant une conique Γ de centre O. donné.

1° Lieu géométrique du centre ω de la deuxième sphère inscrite dans le cône et tangente au plan P. Lieu du point S ?

2° Limiter les lieux précédents et distinguer sur le lieu de S les points pour lesquels la conique Γ est une ellipse ou une hyperbole.

685. Une sphère Σ et un plan P sont tangents en F. On considère les cônes de révolution de sommets S circonscrits à la sphère Σ et coupant le plan P suivant une conique tangente à deux droites données D_1 et D_2.

1° Montrer que les cônes S sont tangents à deux plans fixes et trouver le lieu de leurs sommets.

2° En déduire le lieu du second foyer F' de la conique Γ et celui du centre de la sphère ω' tangente en F' au plan P et inscrite dans le cône.

686. On considère une sphère Σ, un plan fixe P non tangent à Σ et dans ce plan un point fixe F.

1° Lieu des sommets S des cônes circonscrits à Σ et coupant le plan P suivant une conique Γ admettant F pour foyer.

2° Lieu des centres des sphères inscrites dans le cône et tangentes au plan P.

687. 1° Un point M décrit une conique Γ de foyer F et soient S et S' deux points de la conique focale Γ'. Démontrer que l'une des expressions | MS — MF | ou (MS + MF) est constante et qu'il en est de même de | MS — MS' | ou (MS + MS'). Distinguer, suivant les positions de F, S et S' sur Γ'.

2° Démontrer que si A et C appartiennent à Γ, B et D à la conique focale Γ', la somme de deux côtés du quadrilatère ABCD est égale à la somme des deux autres.

688. On donne un cône de révolution S coupé par un plan P suivant une conique Γ. Une sphère quelconque Σ, inscrite dans le cône suivant le cercle γ, coupe le plan P suivant un cercle ω et le plan de γ coupe le plan P suivant une droite Δ. D'un point variable M de Γ on mène la tangente MT au cercle ω et on projette M en H sur Δ.

1° Montrer que MT = e MH (où e désigne l'excentricité de Γ). Les cercles ω obtenus en faisant varier Σ sont les *cercles focaux* de première espèce de la conique Γ.

2° Si la droite Δ coupe le cône S en deux points A et B, le cercle ω correspondant est bitangent en A et B à la conique Γ.

3° Soient MT et MT' les tangentes à deux cercles focaux ω et ω' et d la distance des droites Δ et Δ' correspondantes. Montrer que l'on a : MT + MT' = ed ou | MT — MT' | = ed suivant que M est compris entre les droites Δ et Δ' ou non.

689. Une sphère variable S de centre ω passe par deux points fixes A et B et est tangente en M au plan fixe P.

1° Trouver le lieu (C) du point M et le lieu (Γ) du point ω.

2° Montrer que le cercle γ passant par A, B et M est tangent en M au plan P et que l'enveloppe de l'axe Δ de ce cercle est la courbe Γ.

690. Reprendre le problème précédent en remplaçant le plan P par une sphère Σ.

691. Une conique Γ est la section par un plan (R) d'un cône de révolution de sommet S. On désigne par γ la section de ce cône par un plan (π) perpendiculaire à son axe et à tout point M du plan (R) on associe le point m du plan (π), situé sur SM, et réciproquement. A toute droite Δ du plan (R) est associée une droite δ du plan (π).

1° Déterminer les intersections M_1 et M_2 de Γ par une droite Δ du plan (R) et construire les tangentes PM et PM' à Γ issues d'un point P du plan (R).

2° Si un triangle MNP est circonscrit à Γ, les droites MA, NB et PC joignant chaque sommet au point de contact du côté opposé sont concourantes en un point I et les intersections D, E, F des côtés des triangles ABC et MNP sont alignées. En déduire que la tangente en C à Γ, est conjuguée harmonique de CP par rapport à CA et CB.

3° Établir que tout quadrangle ABCD inscrit dans Γ et le quadrilatère complet formé par les tangentes aux sommets ont même triangle diagonal.

692. Une conique Γ est définie par trois de ses points A, B et C et le point ω commun aux tangentes en A et B.

1° Établir, par projection, que la tangente CT est la polaire de ω par rapport aux droites CA et CB.

2° Justifier la construction suivante par points et tangentes de Γ : on mène par ω une sécante arbitraire coupant CA, CB et CT en α, β et *t*. Les droites Aβ et Bα se coupent en un point M de Γ et la droite M*t* est la tangente en M à Γ.

3° Construire le point D diamétralement opposé à C sur Γ et le centre O de Γ, puis les points I et J intersections des tangentes ωA et ωB par les tangentes parallèles à ωB et ωA.

693. On considère un triangle ABC. Le cercle inscrit de centre I, de rayon *r*, est fixe. Il est tangent en F au côté BC dont le support est fixe. Le sommet A décrit une droite D parallèle au côté BC. La hauteur, constante, relative à BC est égale à *h*.

1° Démontrer que, pour tous les triangles ABC ainsi définis, il existe un rapport constant entre le demi-périmètre *p* et la longueur *a* du côté BC (on pourra utiliser l'aire du triangle ABC). En déduire la valeur du produit FB.FC en fonction de *r* et de *h* (cette valeur est constante).

2° On fait tourner autour de IF le cercle inscrit et la tangente en F, engendrant ainsi une sphère S et un plan P. On considère les cônes de sommet A tangents à la sphère S. Quelle est la nature des sections de ces cônes par le plan P ? En préciser les éléments.

3° On revient à la figure primitive. Sur le cercle (O) de centre O, circonscrit au triangle ABC, on désigne par M le milieu de l'arc BC ne contenant pas le point A. Montrer que le rayon du cercle exinscrit dans l'angle A a une valeur constante. En déduire le lieu du point M.

4° Montrer que le cercle (O) est tangent à un cercle fixe, passant par F, lui-même tangent à D (on pourra utiliser une inversion de pôle F). Quel est le lieu géométrique du point O ?

694. Par un point O pris dans un plan (P) on mène une droite OD dans le plan et la perpendiculaire ON en O au plan (P). *Ces deux droites sont supposées fixes dans tout ce qui suit.*

1° On considère le cône (S) de révolution de sommet O, d'axe OD et dont le demi-angle au sommet est noté *x*. Déterminer la nature de la conique (H) section du cône (S) par le plan (Q) parallèle au plan (P) et coupant ON en O′ tel que $OO' = h = c \sin x$, *c* désignant une longueur donnée et fixe. Quel est le lieu des foyers F et F′ de (H) quand, *c* restant fixe, *x* varie ?

2° M étant un point quelconque de (H), calculer la longueur OM = *r* en fonction de *c* et du cosinus de l'angle aigu *y* que fait avec ON le plan (R) passant par OD et M. En déduire que le lieu du point M, lorsque *x* varie, le plan (R) restant fixe, est un cercle (C) dont la projection orthogonale sur le plan (P) est une ellipse (E). Préciser la position des foyers G et G′ de E).

695. On donne un plan (P), un point F à une distance *p* du plan (P) ($p \neq 0$) et l'on considère l'ensemble des sphères (S) passant par F et tangentes au plan (P).

1° Construire (S) connaissant le point de contact. Quel est le lieu géométrique des centres des sphères (S) situés dans un plan (Q) passant par F et perpendiculaire au plan (P) ? En déduire une génération simple de la surface (γ) lieu des centres de toutes les sphères (S). Déterminer les sections de cette surface par des plans parallèles à (P).

2° On considère les sphères (S) dont les centres sont situés dans un plan (λ) passant par F. Soit I l'intersection du plan (P) et de la perpendiculaire en F au plan (λ). Déterminer le lieu des points de contact de ces sphères (S) et du plan P. Montrer que le lieu des centres de ces sphères est une ellipse (E). Que représente cette ellipse pour la surface (γ) ?

3° Calculer les longueurs des axes et l'excentricité de l'ellipse (E) en fonction de *p* et de l'angle θ du plan (λ)′ et du plan (P) $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.

4° Trouver le lieu des points de contact avec le plan (P) des sphères (S) passant par un point donné G (on désignera par J l'intersection du plan (P) et de la droite FG). Lieu des centres de ces sphères.

Déterminer la section de la surface (γ) par un plan donné quelconque (λ′) non parallèle à (P). Lieu du centre de cette section quand le plan (λ′) se déplace parallèlement à un plan fixe.

696. α) Sur la circonférence d'un cercle, de centre I et de rayon *r*, sont marqués cinq points : *i*, *p*, *p*′, *i*′, et O. Les quatre premiers sont des sommets successifs d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle ; ces quatre points forment un trapèze isocèle dont les côtés non parallèles (*ip* et *i*′*p*′) concourent en un point S. Le cinquième point, O, est celui des deux points de la circonférence situé à l'intersection avec l'axe de symétrie OIS de la figure et tel que I soit compris à l'intérieur du segment OS.

Exprimer, en fonction du rayon r, la longueur $Op = Op' = a$; vérifier les relations :

$$2r = a(\sqrt{6} - \sqrt{2}), \qquad OS = a\sqrt{2}.$$

β) On considère la pyramide régulière SABCD dont la base est un carré ABCD de côté $2a$ et dont les faces sont quatre triangles équilatéraux.

1° Exprimer en fonction de a la hauteur $SO = h$ du solide. Déterminer la sphère circonscrite, c'est-à-dire la sphère qui passe par cinq points S, A, B, C, D.

2° Il existe une sphère (O) tangente aux huit arêtes du solide, les points de contact étant situés sur ces arêtes non prolongées. Définir cette sphère par son centre et par son rayon.

3° Déterminer la sphère (de centre I et de rayon r) qui est située à l'intérieur du solide et qui est tangente aux faces et au plan de base. Vérifier que la relation entre r et a n'est autre que celle de la première partie du problème.

4° Les sphères (O) du 2° et (I) du 3° ont en commun un cercle dont on déterminera le centre P, le plan et le rayon en fonction de r. Que peut-on dire du cône ayant ce cercle pour base et le sommet en S ? Quel est le second cercle d'intersection de ce cône et de la sphère (I) ?

5° Les deux cercles d'intersection de la sphère (I) et du cône (S) précédent définissent une seconde surface conique de révolution dont la position du sommet S′ sera précisée par rapport aux points I et P. On considère ensuite un plan tangent à ce nouveau cône (S′) et l'on demande d'étudier l'ellipse (E) de section du premier cône (S) par ce plan. On exprimera (en fonction de r) les longueurs des axes 2α et 2β, la distance focale 2γ de (E), ainsi que la distance d'un foyer F à la directrice qui lui est associée.

CINÉMATIQUE

21e Leçon

MOUVEMENT D'UN POINT

464. Notion de mouvement. — Considérons, dans l'espace rapporté à un repère cartésien $Oxyz$, un point quelconque $M(x, y, z)$.

1° Si les coordonnées x, y, z du point M sont invariables, on dit que *le point* M *est fixe dans le repère* $Oxyz$ (fig. 394).

Tout ensemble de points fixes dans un repère donné constitue une figure géométrique invariable ou solide S auquel est attaché le repère envisagé.

2° Si les coordonnées du point M dépendent de l'instant où on les considère, on dit que *le point* M *est mobile* (*ou en mouvement*) *dans le repère* $Oxyz$ (fig. 395).

On appelle trajectoire d'un point mobile M ***le lieu géométrique de ses positions successives.***

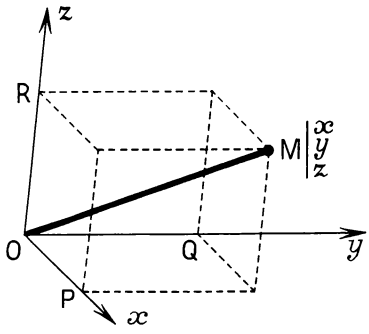


Fig. 394

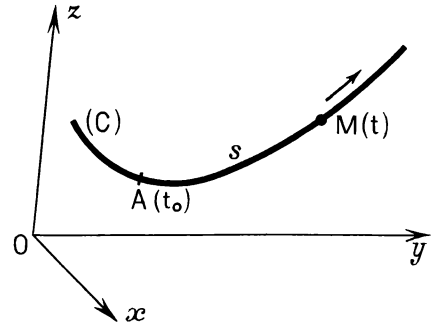


Fig. 395

En d'autres termes la trajectoire est la ligne décrite par le point M. Le mouvement du point M est dit *curviligne* lorsque sa trajectoire est une courbe C (fig. 395), *rectiligne* lorsque sa trajectoire est une droite D.

465. Relativité du mouvement. — Le mouvement d'un point M est ainsi défini par rapport à un repère déterminé $Oxyz$ ou *solide de référence*. Par rapport à un autre repère $O_1x_1y_1z_1$, le mouvement du point M peut être complètement différent.

Ainsi un objet P, placé sur la banquette d'une voiture (ou d'un wagon) en marche, est fixe par rapport à tout repère attaché à cette voiture. Par contre cet objet P est mobile par rapport à tout repère attaché au sol.

Toute notion de mouvement est relative à un repère ou solide de référence préalablement choisi.

Pour les mouvements usuels de faible amplitude, on se contente d'un repère attaché au sol. Mais pour étudier le mouvement d'un satellite artificiel ou d'une fusée interplanétaire, il faut se rapporter à un repère dont les axes ont des directions déterminées par rapport aux étoiles et dont l'origine est soit le centre de la terre, soit celui du soleil.

466. Notion de temps. — Nous considérons comme intuitive la notion de temps qui, dans la pratique, se mesure à l'aide des horloges, montres, chronomètres, etc.

L'unité principale de temps est la seconde (*s*).

La seconde vaut $\frac{1}{86\,400}$ *du jour solaire moyen tel qu'il est calculé et diffusé par le Bureau International de l'Heure.*

On utilise aussi les *sous-multiples décimaux de la seconde* et ses multiples : *la minute* (1 mn = 60 s), *l'heure* (1 h = 60 mn = 3 600 s) et *le jour* (1 j = 24 h).

L'unité de temps étant choisie, il faut définir une *origine des temps*, permettant de mesurer le temps t écoulé entre l'instant origine ($t = 0$) et l'instant à repérer. On compte positivement les temps postérieurs à l'instant origine, négativement les temps antérieurs. Le nombre relatif t ainsi défini et qui correspond à un instant donné est aussi appelé sa *date*.

Exemple. — Si une horloge marque 8 h 23 mn 30 s à l'instant origine ($t = 0$) elle marquera 8 h 23 mn 45 s au temps (ou à la date) $t = +15$ s. Elle marquait 8 h 23 mn 10 s au temps $t = -20$ s.

467. Équations d'un mouvement. — 1° Le mouvement d'un point M(x, y, z) par rapport au repère $Oxyz$ est déterminé lorsque l'on connaît ses coordonnées en fonction du temps t :

$$\boxed{x = f(t) \mid y = g(t) \mid z = h(t)} \qquad (1)$$

Ces relations constituent les équations cartésiennes du mouvement. Elles permettent de construire la trajectoire du point M.

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ ***est le vecteur-espace du point*** M :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \iff \overrightarrow{OM} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}. \qquad (2)$$

2° La position du point M sur sa trajectoire (C) orientée est déterminée par son abscisse curviligne $s = \overset{\frown}{AM}$ en fonction du temps t (fig. 395).

La relation $s = F(t)$ ***est l'équation horaire du point*** M ***sur sa trajectoire.***

C'est cette relation que l'on se donne lorsqu'on veut définir le mouvement d'un point mobile sur une courbe donnée (C). Le graphe de la fonction $s = F(t)$ constitue le *diagramme* du mouvement.

3° Plus généralement, considérons une courbe donnée (C) sur laquelle les coordonnées d'un point mobile M sont connues en fonction d'un paramètre θ. Les coordonnées du point M en fonction du temps t sont déterminées par une relation $\theta = \varphi(t)$, *loi horaire du mouvement.*

Exemple. — Considérons l'hélice circulaire (H) définie dans un repère orthonormé par :

$$x = a\cos\theta\ ;\quad y = a\sin\theta\ ;\quad z = h\theta.$$

La relation $\theta = \omega t + \alpha$ définit sur cette hélice le mouvement du point M de coordonnées :

$$x = a\cos(\omega t + \alpha)\ ;\quad y = a\sin(\omega t + \alpha)\ ;\quad z = h(\omega t + \alpha).$$

468. Remarques. — 1° Les équations (1) du paragraphe précèdent se réduisent à deux : $x = f(t)$, $y = g(t)$ lorsque le mouvement s'effectue dans le plan xOy.

2° Elles se réduisent à $x = f(t)$ dans le cas d'un mouvement rectiligne s'effectuant sur Ox. Dans ce cas $x = f(t)$ est l'*équation horaire* du point M sur sa trajectoire.

VECTEUR-VITESSE D'UN POINT

469. Vecteur-vitesse moyenne. — Considérons (fig. 396) un point M, se déplaçant sur sa trajectoire (C). Entre les instants t et t_1, ce mobile passe de la position initiale M à la position finale M_1. L'accroissement du vecteur-espace $\overrightarrow{OM}$ pendant cet intervalle de durée $t_1 - t$ s'écrit :

$$\overrightarrow{\Delta M} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM_1}.$$

L'accroissement moyen $\vec{V}_m = \dfrac{\overrightarrow{\Delta M}}{\Delta t} = \dfrac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1 - t}$ constitue le *vecteur-vitesse moyenne* durant l'intervalle $[t_1 - t]$. Ce vecteur $\vec{V}_m$ n'est autre que le vecteur-vitesse d'un mobile fictif P, animé d'un mouvement uniforme sur la droite MM_1, qui passerait en M au temps t, en M_1 au temps t_1.

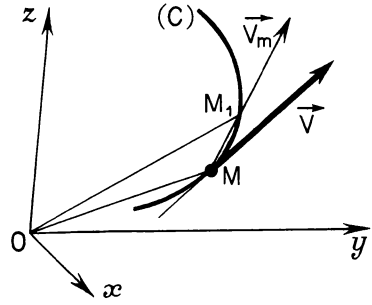


Fig. 396

470. Vecteur-vitesse instantanée. — Lorsque t_1 tend vers t, on sait que le rapport $\dfrac{\overrightarrow{\Delta M}}{\Delta t} = \dfrac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1 - t}$ admet pour limite la dérivée $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps t. Donc la vitesse moyenne $\vec{V}_m$ admet pour limite $\vec{V} = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$:

Le vecteur lié d'origine M, ***équipollent à*** $\vec{V} = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$, ***est le vecteur-vitesse du mobile*** M ***au temps*** t.

Ce vecteur $\vec{V}$ est donc (n° 172) porté par la tangente en M à la trajectoire (C) et son sens est celui du déplacement de M sur la courbe (sens t croissant).

Le vecteur-vitesse $\vec{V}$ serait le vecteur décrit par le point M pendant l'unité de temps si, à partir de l'instant t, il poursuivait son mouvement suivant un mouvement rectiligne uniforme.

471. Composantes cartésiennes du vecteur-vitesse. — D'après le n° 171 :

Les composantes du vecteur-vitesse $\vec{V}$ ***sont les dérivées*** x', y', z' ***par rapport au temps, des composantes*** x, y, z ***du vecteur espace*** $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{V} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}.}$$

Les composantes de $\vec{V}$ sont donc : $x' = \frac{dx}{dt}$; $y' = \frac{dy}{dt}$; $z' = \frac{dz}{dt}$.

Dans le cas où $\overrightarrow{OM}$ est défini par : $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, on obtient :

$$\vec{V} = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}.$$

472. Vitesse algébrique sur la trajectoire. — Supposons connue la trajectoire (C) du point M et la loi horaire $s = F(t)$ définissant l'abscisse curviligne M en fonction de t. Posons $\overset{\frown}{MM_1} = s_1 - s$.

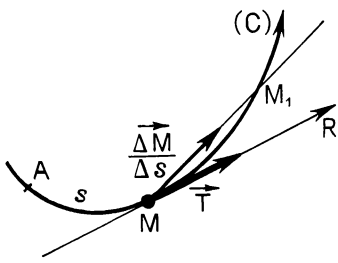


Fig. 397

Lorsque t_1 tend vers t, s_1 tend vers s et le vecteur $\frac{\overrightarrow{MM_1}}{s_1 - s} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\overset{\frown}{MM_1}}$ tend vers la dérivée $\frac{d\vec{M}}{ds} = \vec{T}$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport à s. Ce vecteur $\vec{T}$ est donc un vecteur porté par la tangente en M à (C) et orienté (fig. 397) dans le sens positif sur la trajectoire (sens s croissant).

D'autre part nous admettons que sur tout arc de courbe mesurable, le rapport entre la longueur de la corde MM_1 et de la longueur de l'arc $\overset{\frown}{MM_1}$ tend vers 1, lorsque M_1 tend vers M. Par suite le module du vecteur $\frac{\overrightarrow{MM_1}}{s_1 - s} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\overset{\frown}{MM_1}}$ tend vers 1, module de $\vec{T}$, lorsque M_1 tend vers M.

Le vecteur $\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds}$ ***est un vecteur unitaire tangent en*** M ***à la trajectoire et orienté dans le sens positif sur cette trajectoire.***

Ceci posé le vecteur-vitesse moyenne s'écrit :

$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1 - t} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{s_1 - s} \cdot \frac{s_1 - s}{t_1 - t}.$$

Lorsque t_1 tend vers t, $\frac{\overrightarrow{MM_1}}{s_1 - s}$ tend vers $\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds}$ et $\frac{s_1 - s}{t_1 - t}$ tend vers la dérivée $v = \frac{ds}{dt}$ de s par rapport à t. Donc :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d\vec{M}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \text{ou} \quad \vec{V} = \vec{T} \cdot v \implies \boxed{\vec{V} = v\,\vec{T}.}$$

La dérivée $v = \frac{ds}{dt}$ ***est la vitesse algébrique du point*** M ***sur sa trajectoire orientée.***

La relation $\frac{ds}{dt} = v$ montre que le mobile M se déplace sur la trajectoire dans le sens positif ou le sens négatif suivant que v est positif ou négatif. D'autre part :

$$\vec{V} = v\,\vec{T} \implies |\vec{V}| = |v| \quad \text{et} \quad \vec{V}^2 = v^2.$$

Donc $\vec{V}$ a pour module $|v|$.

473. Remarque. — Si le repère $Oxyz$ est orthonormé, le vecteur-vitesse $\vec{V}$ de composantes x', y', z' a pour module $|v| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. Connaissant le sens du

déplacement de M sur sa trajectoire, on peut alors en déduire : $\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ puis, déterminer l'équation horaire $s = F(t) = \int_0^t v dt = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$ et la longueur $s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt$ de l'arc décrit pendant l'intervalle $[t_1, t_2]$.

474. Exemple. — *Déterminer le vecteur-vitesse, la vitesse algébrique et l'équation horaire du mouvement défini dans le repère orthonormé Oxyz par :*

$x = 2t$; $y = t^2$; $z = \frac{1}{3}t^3$ (fig. 398).

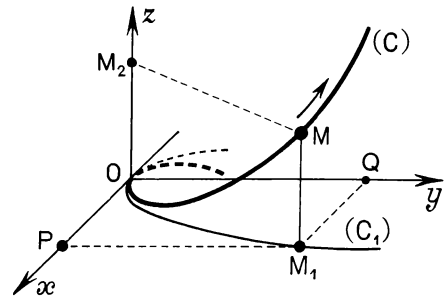


Fig. 398

Le vecteur-vitesse $\vec{V}$ a pour composantes : $x' = 2$, $y' = 2t$, $z' = t^2$.

En orientant la trajectoire (C) dans le sens t croissant, on obtient :

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = t^2 + 2$$

et $\frac{ds}{dt} = t^2 + 2 \implies s = \frac{t^3}{3} + 2t + C$. En prenant O pour origine des arcs sur (C) on obtient $s = 0$ pour $t = 0$, d'où $C = 0$ et $s = \frac{t^3}{3} + 2t$.

VECTEUR-ACCÉLÉRATION D'UN POINT

475. Hodographe d'un mouvement. — Considérons le mouvement du point M tel que : $\overrightarrow{OM} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$.

Pour chaque valeur de t, construisons (fig. 399) le vecteur $\overrightarrow{Om}$ égal au vecteur-vitesse du point M : $\overrightarrow{Om} = \vec{V} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}$.

Lorsque t varie le point m décrit une courbe (H) appelée *hodographe du mouvement.*

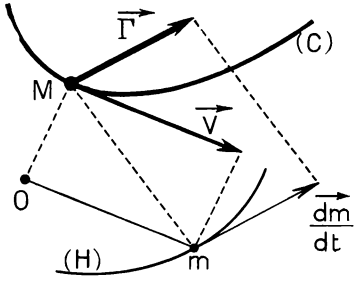


Fig. 399

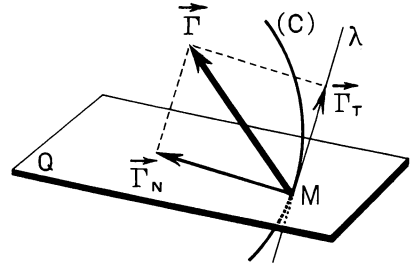


Fig. 400

476. Vecteur-accélération du point M. — Le point m se déplace, en fonction de t, sur l'hodographe et admet pour vecteur-vitesse :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\overrightarrow{m}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right) = \frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2}$$

Le vecteur lié d'origine M, ***équipollent à*** $\vec{\Gamma} = \dfrac{d^2\vec{M}}{dt^2}$ ***vecteur-vitesse du point*** m, ***est appelé vecteur-accélération du point*** M.

Les composantes du vecteur-accélération $\vec{\Gamma}$ du point M(x, y, z) sont donc :

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2}\,; \qquad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}\,; \qquad z'' = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \implies \boxed{\vec{\Gamma} = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}}$$

Dans le cas où $\vec{OM} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$, on obtient :

$$\vec{\Gamma} = f''(t)\vec{i} + g''(t)\vec{j} + h''(t)\vec{k}.$$

477. Accélération tangentielle et accélération normale. — La relation $\vec{V} = v\vec{T}$ entraîne :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt}.$$

Or $\vec{T}$ est un vecteur unitaire et la relation $\vec{T}^2 = 1$ donne par dérivation : $2\vec{T} \cdot \dfrac{d\vec{T}}{dt} = 0$.

Le vecteur $\dfrac{d\vec{T}}{dt}$ est donc perpendiculaire à $\vec{T}$ et par suite normal à la tangente en M à la trajectoire (fig. 400).

Le vecteur-accélération $\vec{\Gamma}$ ***se décompose en un vecteur*** $\vec{\Gamma}_T = \dfrac{dv}{dt}\vec{T}$ ***porté par la tangente en*** M ***et un vecteur*** $\vec{\Gamma}_N = v\dfrac{d\vec{T}}{dt}$ ***normal en*** M ***à la trajectoire.***

La mesure algébrique γ_T de la composante tangentielle $\vec{\Gamma}_T$ sur la tangente Mλ orientée par $\vec{T}$ est donc la dérivée $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ de l'abscisse curviligne de M. Elle constitue l'*accélération tangentielle* (ou accélération numérique) du point M sur sa trajectoire :

$$\boxed{\gamma_T = \frac{d^2s}{dt^2}.}$$

Par suite γ_T est donc la mesure algébrique de la projection de $\vec{\Gamma}$ sur la tangente orientée par $\vec{T}$. On obtient :

$$\gamma_T = \vec{\Gamma}.\vec{T} = \vec{\Gamma}.\frac{\vec{V}}{v} = \frac{1}{v}\vec{V}.\vec{\Gamma} \implies \boxed{\vec{V}.\vec{\Gamma} = v\,.\,\gamma_T.}$$

Cette relation découle, par dérivation, de la relation : $\vec{V}^2 = v^2$ car cette dernière entraîne $2\vec{V}.\dfrac{d\vec{V}}{dt} = 2v.\dfrac{dv}{dt}$ ou $2\vec{V}.\vec{\Gamma} = 2v\,.\,\gamma_T$.

La composante normale $\vec{\Gamma}_N = \vec{\Gamma} - \vec{\Gamma}_T$ est située dans le plan P défini par le point M(x, y, z) et les vecteurs directeurs $\vec{V}(x', y', z')$ et $\vec{\Gamma}(x'', y'', z'')$ et aussi dans le plan Q normal en M(x, y, z) au vecteur $\vec{V}(x', y', z')$.

Son module γ_N *est l'accélération normale du point* M. Lorsqu'on connaît le module de $\vec{\Gamma}$ et celui de γ_T, on peut calculer γ_N par la formule $\gamma_T^2 + \gamma_N^2 = \vec{\Gamma}^2$.

478. Mouvement uniforme. Mouvement varié. — Le mouvement d'un point M sur sa trajectoire est dit *uniforme* lorsque sa vitesse algébrique $\frac{ds}{dt}$ est une constante v ce qui entraîne : $s = s_0 + vt$. Le diagramme du mouvement dans un repère tOs est une droite de coefficient directeur v (fig. 401).

Dans le cas contraire le *mouvement est dit varié*. Un tel mouvement est dit *accéléré* ou *retardé* suivant que la valeur absolue de sa vitesse est une fonction croissante ou décroissante de t. Or $|\ v\ |$ varie comme le carré scalaire $\vec{V}^2 = v^2$ dont la demi-dérivée est : $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} = v \cdot \frac{dv}{dt} = v \cdot \gamma_T$. D'où en supposant $v \neq 0$:

1° $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} = v \cdot \gamma_T > 0$. La vitesse v et l'accélération tangentielle γ_T sont de même signe : *le mouvement est accéléré.*

2° $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} = v \cdot \gamma_T < 0$. Cette fois v et γ_T sont de signes contraires. *Le mouvement est retardé.*

3° $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} = v \cdot \gamma_T = 0 \implies \gamma_T = 0$ et $v = C^{te}$. On a affaire à un mouvement uniforme où l'accélération $\vec{\Gamma}$ est, à chaque instant, normale à la trajectoire.

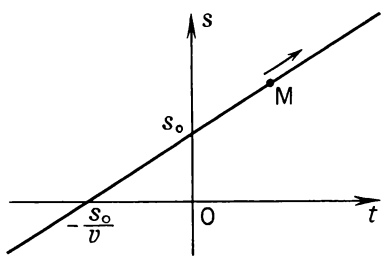


Fig. 401

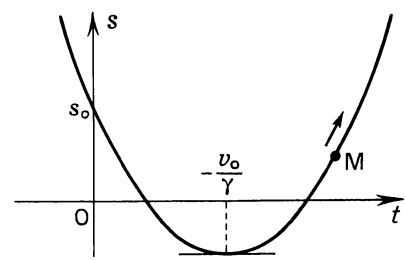


Fig. 402

Un mouvement est dit uniformément varié lorsque son accélération tangentielle $\gamma_T = \frac{d^2s}{dt^2}$ est une constante γ, ce qui entraîne :

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 + \gamma t \qquad \text{et} \qquad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

où v_0 et s_0 désignent les valeurs de v et s au temps $t = 0$.

Le diagramme des espaces (fig. 402) est une parabole admettant pour sommet le point $t = -\frac{v_0}{\gamma}$, $s = s_0 - \frac{v_0^2}{2\gamma}$. Comme $v \cdot \gamma_T = \gamma^2 \left(t + \frac{v_0}{\gamma}\right)$, on voit que le mouvement est retardé pour $t < -\frac{v_0}{\gamma}$, accéléré pour $t > -\frac{v_0}{\gamma}$.

479. Exemple. — *Reprenons le mouvement du n° 474 défini par :*

$$\overrightarrow{OM} : x = 2t; \qquad y = t^2; \qquad z = \frac{1}{3}t^3.$$

On obtient :

$$\vec{V} : x' = 2; \quad y' = 2t; \quad z' = t^2.$$
$$\vec{\Gamma} : x'' = 0; \quad y'' = 2; \quad z'' = 2t.$$

D'autre part $s = \frac{t^3}{3} + 2t$, $v = \frac{ds}{dt} = t^2 + 2 \implies \gamma_T = \frac{d^2s}{dt^2} = 2t$.

On vérifie que : $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} = x'x'' + y'y'' + z'z'' = 4t + 2t^3 = (t^2 + 2) \cdot 2t = v \cdot \gamma_T$.
Le mouvement est retardé pour $t < 0$, accéléré pour $t > 0$.

Enfin : $\gamma_N^2 = \vec{\Gamma}^2 - \gamma_T^2 = (4 + 4t^2) - 4t^2 = 4 \implies \gamma_N = 2$.
L'accélération normale γ_N est constante et égale à 2.

480. Mouvement plan. — Dans un plan rapporté au repère xOy, le mouvement d'un point mobile M(x, y) est défini par les relations :

$$\overrightarrow{OM} : \qquad x = f(t) ; \qquad y = g(t). \qquad (1)$$

L'étude du signe des composantes $x' = \dfrac{dx}{dt}$ et $y' = \dfrac{dy}{dt}$ du vecteur-vitesse permet d'obtenir les variations de x et y, puis de construire la trajectoire (C) du point M. Notons que l'élimination de t entre les relations (1) donne l'équation $F(x, y) = 0$ d'une courbe, à laquelle appartient la trajectoire (C), mais que le mobile M peut décrire seulement en partie (exemple : droite support d'un mouvement rectiligne vibratoire).

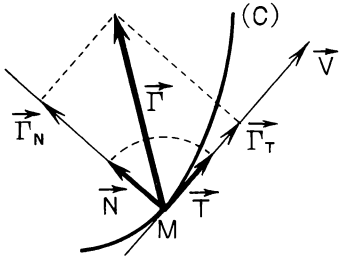


Fig. 403

Outre le vecteur unitaire $\vec{T}(\alpha, \beta) = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds} = \dfrac{\vec{V}}{v}$ tangent en M à (C) (fig. 403), on peut définir le vecteur unitaire normal $\vec{N}$ $(-\beta, \alpha)$ tel que $(\vec{T}, \vec{N}) = +\dfrac{\pi}{2}$. Le produit scalaire $\vec{\Gamma} \cdot \vec{N}$ donne alors l'accélération normale γ_N, mesurée algébriquement sur la normale en M orientée par $\vec{N}$.

481. Exemple. — *Étudier, dans le plan du repère orthonormé xOy le mouvement du point* M *défini pour* $0 \leqslant t \leqslant \pi$ *par :*

$$x = a(1 + \cos t)\cos t ; \qquad y = a(1 + \cos t)\sin t.$$

On obtient par dérivation :

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} \begin{cases} x' = -a(\sin t + \sin 2t) = -2a \sin \dfrac{3t}{2} \cos \dfrac{t}{2} \\ y' = a(\cos t + \cos 2t) = 2a \cos \dfrac{3t}{2} \cos \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

$$\vec{\Gamma} = \frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2} \begin{cases} x'' = -a(\cos t + 2\cos 2t) \\ y'' = -a(\sin t + 2\sin 2t). \end{cases}$$

D'où le tableau de variation :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
x'	0	$-$	$-a\sqrt{3}$	$-$	0	$+$	0
x	$2a$	↘	$\frac{3a}{4}$	↘	$-\frac{a}{4}$	↗	0
y	0	↗	$\frac{3a\sqrt{3}}{4}$	↘	$\frac{a\sqrt{3}}{4}$	↘	0
y'	$2a$	$+$	0	$-$	$-a$	$-$	0

La trajectoire est la courbe (C) de la figure 404. Le coefficient directeur de la tangente en M : $\dfrac{y'}{x'} = -\operatorname{cotg} \dfrac{3t}{2}$, tend vers 0 lorsque t tend vers π. Notons que $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg} t$ et que :

$\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = t \Longrightarrow \overline{OM} = a(1 + \cos\theta)$. Désignons par B le point $(x = a, y = 0)$. Le point P, d'angle polaire θ, sur le cercle de diamètre OB, est tel que $\overline{OP} = a\cos\theta$ et la droite OP coupe la trajectoire (C) en M tel que $\overline{PM} = a$, ce qui permet une construction simple de (C). Orientons cette trajectoire dans le sens t croissant et désignons par A le point $(x = 2a, y = 0)$. On obtient :

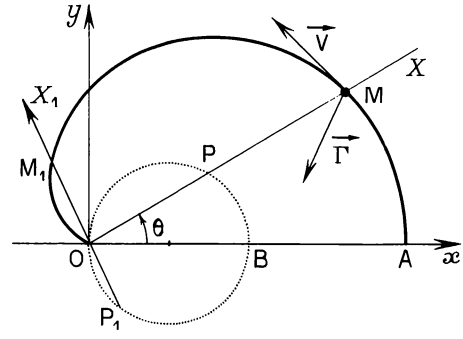


Fig. 404

$$v^2 = (x'^2 + y'^2) = 4\,a^2 \cos^2 \frac{t}{2} \implies v = 2\,a \cos \frac{t}{2}.$$

Le mouvement est retardé de A vers O . En prenant le point A pour origine des arcs, il vient :

$$s = \int_0^t v\,dt = \int_0^t 2\,a \cos \frac{t}{2}\,dt = 4\,a \sin \frac{t}{2}.$$

La relation $s = 4\,a \sin \frac{t}{2}$ est l'équation horaire du mouvement. La longueur totale L de la trajectoire est : $L = \int_0^{\pi} v\,dt = \left[4\,a \sin \frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = 4\,a.$

Les vecteurs unitaires tangent $\vec{T} = \frac{\vec{V}}{v}$ et normal $\vec{N}$ s'écrivent :

$$\vec{T}\left(-\sin \frac{3\,t}{2}, \cos \frac{3\,t}{2}\right) \quad \text{et} \quad \vec{N}\left(-\cos \frac{3\,t}{2}, -\sin \frac{3\,t}{2}\right).$$

L'accélération tangentielle $\gamma_T = \frac{dv}{dt} = -\,a \sin \frac{t}{2}$ est bien égale au produit scalaire $\vec{\Gamma} \cdot \vec{T}$ tandis que l'accélération normale est $\gamma_N = \vec{\Gamma} \cdot \vec{N} = 3\,a \cos \frac{t}{2}$.

EXERCICES

— Étudier les mouvements suivants où a et b représentent des longueurs données et où t représente le temps. On déterminera la trajectoire dans un repère orthonormé, les composantes du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération et s'il y a lieu l'hodographe et les variations de v^2.

697. $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ **698.** $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ y = b \operatorname{tg} t \end{cases}$ **699.** $\begin{cases} x = a\,e^t \\ y = b\,e^{-t} \end{cases}$

700. $\begin{cases} x = at \\ y = \dfrac{b}{t} \end{cases}$ **701.** $\begin{cases} x = a\,\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{2\,bt}{1 + t^2} \end{cases}$ **702.** $\begin{cases} x = a\,\dfrac{t^2 + 1}{2\,t} \\ y = b\,\dfrac{t^2 - 1}{2\,t} \end{cases}$

703. $\begin{cases} x = \dfrac{a\,(1 + \sin^2 t)}{\cos^2 t} \\ y = \dfrac{2\,a \sin t}{\cos^2 t} \end{cases}$ **704.** $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2}\,(e^t + e^{-t}) \\ y = \dfrac{b}{2}\,(e^t - e^{-t}) \end{cases}$ **705.** $\begin{cases} x = \dfrac{2\,a\,e^t}{e^{2t} + 1} \\ y = \dfrac{b\,(e^{2t} - 1)}{e^{2t} + 1} \end{cases}$

706. $\begin{cases} x = a \cos 2\,t \\ y = a \cos t \end{cases}$ **707.** $\begin{cases} x = a \sin 2\,t \\ y = b \sin t \end{cases}$ **708.** $\begin{cases} x = a \sin 2\,t \\ y = a \sin 3\,t \end{cases}$

709. Les coordonnées d'un mobile M par rapport à un repère orthonormé xOy sont définies en fonction de $t > 0$ par : $x = \frac{1}{t}$; $y = t^2$.

1° Former l'équation de sa trajectoire. Construire cette courbe et indiquer le sens du déplacement du point M.

2° Calculer les composantes du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération du mobile M à un instant quelconque de son mouvement. Déterminer l'hodographe de ce mouvement construit à partir de l'origine O des coordonnées.

3° Construire la position du mobile M à l'instant $t = 1$ ainsi que son vecteur-vitesse et son vecteur-accélération à cet instant.

710. Dans un plan rapporté au repère orthonormé xOy, les coordonnées d'un point M sont données en fonction de l'instant t par : $x = e^t$; $y = e^{-t}$ où t prend toute valeur.

1° Construire la trajectoire (C) du point M. Donner les composantes du vecteur-vitesse et du vecteur accélération à l'instant t.

2° On mène le vecteur $\overrightarrow{Om}$ équipollent au vecteur-vitesse de M à l'instant t. Construire la courbe (H) décrite par m. Comparer (H) et (C).

3° Construire le vecteur-vitesse $\overrightarrow{MM'}$ et le vecteur-accélération $\overrightarrow{MM''}$. Montrer que M' décrit Ox. Quelle est la courbe décrite par M'' ?

711. Dans un plan rapporté au repère orthonormé xOy, on considère le point mobile M dont les coordonnées en fonction du temps t sont données par :

$$x = \cos t; \qquad y = \sin t - \cos t.$$

1° Étudier les variations de x et y en fonction de t. Construire la trajectoire et trouver son équation cartésienne.

2° Après avoir mis r^2 sous la forme $a + b \cos(2t + \alpha)$, étudier les variations de la longueur $OM = r$. Quelle relation y a-t-il entre les valeurs de t pour lesquelles r a une valeur donnée ?

3° Déterminer le vecteur-vitesse et son module v. Montrer que l'hodographe relatif à O est la trajectoire elle-même. Quelle relation y a-t-il entre r et v ?

4° Déterminer le vecteur-accélération. Relation avec $\overrightarrow{OM}$.

712. On considère dans le plan rapporté au repère orthonormé xOy un point mobile M de coordonnées : $x = e^t$; $y = \text{Log } t$ où t est positif.

1° Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire (Γ) du mobile M et celle de l'hodographe (H) de son mouvement. Construire ces deux courbes.

2° Calculer, en fonction de t, les composantes du vecteur-accélération de M.

713. 1° On considère la fonction : $y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}$. Étudier ses variations. Tracer le graphe (points et tangentes remarquables) .En déduire la résolution et la discussion graphiques de l'équation en x : $\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x} = a$ où a est un nombre donné.

2° On pose $x = \cos t$ en supposant $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Exprimer y en fonction de t ; rendre logarithmique l'expression obtenue. En passant par l'intermédiaire de la variable t, étudier les variations de y en fonction de x et résoudre l'équation du paragraphe 1°.

3° En supposant que t représente le temps, les expressions de x et y définissent le mouvement d'un mobile. Étudier ce mouvement dans l'intervalle $(0, \pi)$: trajectoire, déplacement du mobile sur la trajectoire, vecteur-vitesse, vecteur-accélération, hodographe par rapport à l'origine des coordonnées (nature et tracé de l'hodographe).

714. Le temps étant désigné par t, on étudie à partir de l'instant $t = 0$, le mouvement du point M de coordonnées :

$$x = t + 2; \qquad y = \frac{1}{t^2 + 4t + 3}.$$

1° Montrer que la trajectoire de M appartient à la courbe $y = \frac{1}{x^2 - 1}$. Dans quel sens est-elle parcourue ?

2° Calculer les composantes du vecteur-vitesse. En déduire la courbe à laquelle appartient l'hodographe et la particularité du vecteur-accélération.

715. Dans un plan rapporté au repère orthonormé xOy on considère un point mobile M de coordonnées $x = 2 \text{ Log } t$ et $y = t + \frac{1}{t}$.

1° Déterminer t en fonction de x, puis y en fonction de x. Construire la trajectoire du mobile M et préciser comment se déplace M lorsque t varie de 0 à $+\infty$.

2° Déterminer les composantes du vecteur-vitesse $\vec{V}$ et du vecteur-accélération $\vec{\Gamma}$. Montrer que l'hodographe est une demi-parabole de foyer O et de directrice $y = 2$.

3° La trajectoire étant orientée dans le sens t croissant, on prend pour origine des arcs le point A $(t = 1)$. Calculer la vitesse algébrique v et la longueur de l'arc AM décrit entre les instants 1 et t.

716. On considère dans le repère orthonormé xOy de base $(\vec{i}, \vec{j})$ le point M de coordonnées $x = 2a\sqrt{2} \cos t$, $y = a \sin t \cos t$ dont la trajectoire (C) est orientée dans le sens t croissant avec pour origine des arcs s le point A $(t = 0)$.

1° Construire la trajectoire (C) et donner son équation sous la forme $y^2 = f(x^2)$.

2° Calculer les composantes du vecteur-vitesse $\vec{V}$, du vecteur-accélération $\vec{\Gamma}$, la vitesse algébrique v et établir l'équation horaire $s = \varphi(t)$ donnant l'abscisse curviligne du point M sur (C). Construire l'hodographe et étudier la nature du mouvement.

3° Déterminer les composantes du vecteur unitaire $\vec{T}$ tangent en M à (C) et du vecteur unitaire normal $\vec{N}$ tel que $(\vec{T}, \vec{N}) = +\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'accélération tangentielle γ_T et l'accélération normale γ_N. Montrer que le vecteur $\vec{\Gamma}$ fait des angles opposés avec $\vec{T}$ et $\vec{J}$ opposé à $\vec{j}$ ou avec $\vec{N}$ et $\vec{I}$ opposé à $\vec{i}$. En posant $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{2}\sin t$, déterminer en fonction de φ les angles polaires de $\vec{T}$, $\vec{N}$ et du support de $\vec{\Gamma}$.

717. Dans le plan rapporté au repère orthonormé xOy, on considère le point mobile M de coordonnées $x = a\cos\varphi + c$; $y = b\sin\varphi$ où les constantes positives a, b, c sont liées par la relation $a^2 = b^2 + c^2$. On pose $OM = \rho$ et on désigne par θ l'angle polaire $(\vec{Ox}, \vec{OM})$.

1° Montrer que le lieu du point M est une ellipse (E) de foyer O. Calculer, en fonction de φ, la valeur de ρ, de $\cos\theta$, de $\sin\theta$ et établir la double relation : $\rho = a + c\cos\varphi = \dfrac{b^2}{a - c\cos\theta}$.

2° L'angle φ variant en fonction du temps t suivant la loi horaire : $a\varphi + c\sin\varphi = bt$, calculer en fonction de φ, les dérivées $\varphi' = \dfrac{d\varphi}{dt}$, $\theta' = \dfrac{d\theta}{dt}$ et la valeur des produits $\rho\varphi'$ et $\rho^2\theta'$. Montrer que θ' conserve un signe constant et calculer la période T du mouvement : durée d'une révolution sur (E).

3° Trouver en fonction de φ les composantes du vecteur-vitesse $\vec{V}$ et du vecteur-accébration $\vec{\Gamma}$ du point M. Vérifier que $\vec{\Gamma} = -\dfrac{ab^2}{\rho^3}\vec{OM}$ et montrer que l'hodographe est un cercle égal au cercle principal de l'ellipse (E).

PROJECTION D'UN MOUVEMENT

482. Mouvement projeté sur un plan. — Étant donné un point M, en mouvement sur sa trajectoire (C), considérons un plan fixe P et une droite Δ qui coupe le plan P en O.

Au point mobile M associons sa projection M_1, effectuée parallèlement à Δ, sur le plan P (fig. 405). Il est clair que la *trajectoire* (C_1) *du point* M_1 est la projection sur le plan P de la trajectoire (C) du point mobile M. D'autre part comme la dérivée de la projection d'un vecteur est la projection de la dérivée de ce vecteur (n° 173), on en déduit que :

Le vecteur-vitesse $\vec{V}_1$ ***et le vecteur-accélération*** $\vec{\Gamma}_1$ ***du point*** M_1 ***sont respectivement les projections sur le plan*** P, ***du vecteur-vitesse*** $\vec{V}$ ***et du vecteur-accélération*** $\vec{\Gamma}$ ***du point*** M.

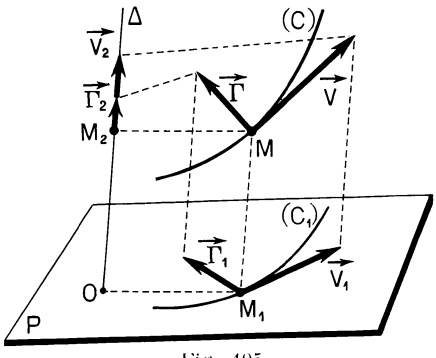


Fig. 405

M_1 projection de M implique :

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = \dfrac{\overrightarrow{dM_1}}{dt} \text{ projection de } \vec{V} = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} \\ \vec{\Gamma}_1 = \dfrac{\overrightarrow{d^2M_1}}{dt^2} \text{ projection de } \vec{\Gamma} = \dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2} \end{cases}$$

En prenant les axes Ox et Oy dans le plan P, Oz suivant Δ, on vérifie que : $\overrightarrow{OM}$ (x, y, z), $\vec{V}$ (x', y', z') et $\vec{\Gamma}$ (x'', y'', z'') ont respectivement pour projections sur le plan P : $\overrightarrow{OM_1}$ $(x, y, 0)$, $\vec{V}_1$ $(x', y', 0)$ et $\vec{\Gamma}_1$ $(x'', y'', 0)$ et par suite que $\vec{V}_1$ et $\vec{\Gamma}_1$, projections de $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$, sont bien les dérivées $\dfrac{\overrightarrow{dM_1}}{dt}$ et $\dfrac{\overrightarrow{d^2M_1}}{dt^2}$.

483. Mouvement projeté sur un axe. — Au point M mobile sur (C) associons cette fois sa projection M_2 sur Δ effectuée parallèlement au plan P. On voit de même que :

Le vecteur-vitesse $\vec{V}_2$ ***et le vecteur-accélération*** $\vec{\Gamma}_2$ ***du point*** $\overrightarrow{M_2}$ ***sont respectivement les projections sur*** Δ, ***du vecteur-vitesse*** $\vec{V}$ ***et du vecteur-accélération*** Γ ***du point*** M.

$$M_2 \text{ projection de } M \Longrightarrow \begin{cases} \vec{V}_2 = \dfrac{\overrightarrow{dM_2}}{dt} \text{ projection de } \vec{V} = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} \\ \vec{\Gamma}_2 = \dfrac{\overrightarrow{d^2M_2}}{dt^2} \text{ projection de } \vec{\Gamma} = \dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}. \end{cases}$$

Avec le même repère que ci-dessus on vérifie que :

$$\overrightarrow{OM_2}\ (0, 0, z)\ ; \quad \vec{V}_2\ (0, 0, z') \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}_2\ (0, 0, z'')$$

sont les projections sur Oz de $\overrightarrow{OM}$, $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$.

484. Exemple. — *Reprenons le mouvement* (n° 474) *défini par :*

$$\overrightarrow{OM} : \qquad x = 2t; \qquad y = t^2; \qquad z = \frac{1}{3}t^3.$$

En projection sur le plan xOy, on obtient le mouvement du point M_1 ($x = 2t$, $y = t^2$, $z = 0$). La trajectoire est la parabole $x^2 = 4y$, $z = 0$ décrite dans le sens x croissant. On vérifie que le vecteur-vitesse $\overrightarrow{V_1}$ (2, 2 t, 0) et le vecteur-accélération $\overrightarrow{\Gamma_1}$ (0, 2, 0) sont bien les projections sur le plan xOy de $\overrightarrow{V}$ (2, 2 t, t^2) et $\overrightarrow{\Gamma}$ (0, 2, 2 t).

En projection sur Oz, on obtient le mouvement du point M_2 ($x = y = 0$, $z = \frac{1}{3}t^3$) dont le vecteur-vitesse $\overrightarrow{V_2}$ (0, 0, t^2) et le vecteur-accélération $\overrightarrow{\Gamma_2}$ (0, 0, 2 t) sont respectivement les projections sur Oz de $\overrightarrow{V}$ (2, 2 t, t^2) et de $\overrightarrow{\Gamma}$ (0, 2, 2 t).

485. Mouvements composés. — Si on connaît les mouvements des points M_1 et M_2, on peut en déduire (fig. 406) le mouvement du point M défini par :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}. \qquad (1)$$

Le mouvement du point M ***est dit résulter de la composition à partir de*** O ***des mouvements de*** M_1 ***et*** M_2.

Or la relation (1) donne par dérivation :

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dM_1}}{dt} + \frac{\overrightarrow{dM_2}}{dt} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2} = \frac{\overrightarrow{d^2M_1}}{dt^2} + \frac{\overrightarrow{d^2M_2}}{dt^2}.$$

Le vecteur-vitesse et le vecteur-accélération du point M ***sont respectivement la somme des vecteurs-vitesse et des vecteurs-accélération de*** M_1 ***et de*** M_2 (fig. 406).

Ceci se généralise pour plusieurs points M_1, M_2... M_k en posant : $\overrightarrow{OM} = \Sigma\, \overrightarrow{OM_\alpha}$, on obtient :

$$\overrightarrow{V} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \Sigma\, \frac{\overrightarrow{dM_\alpha}}{dt} = \Sigma\, \overrightarrow{V_\alpha}$$

et

$$\overrightarrow{\Gamma} = \frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2} = \Sigma\, \frac{\overrightarrow{d^2M_\alpha}}{dt^2} = \Sigma\, \overrightarrow{\Gamma_\alpha}.$$

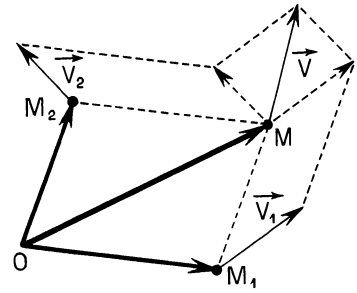


Fig. 406

Pour étudier le mouvement d'un point M dans l'espace, on pourra donc commencer par étudier le mouvement de sa projection M_1 sur le plan xOy et celui de sa projection M_2 sur Oz. Ou bien encore commencer par étudier le mouvement de ses projections sur les trois axes de coordonnées.

Ainsi dans le mouvement du point M du n° 474 sa projection P ($x = 2t$) sur Ox est animée d'un mouvement uniforme, sa projection Q ($y = t^2$) sur Oy est animée d'un mouvement uniformément accéléré tandis que sa projection M_2 sur Oz a pour cote $z = \frac{1}{3}t^3$. La projection M_1 ($x = 2t$, $y = t^2$) du point M sur le plan xOy décrit la parabole $x^2 = 4y$. Le vecteur $\overrightarrow{M_1M}$ ayant pour mesure $\overline{M_1M} = z_M = \frac{t^3}{3}$ on peut ainsi se rendre compte comment est décrite la trajectoire (C) tracée sur le cylindre $x^2 - 4y = 0$ (fig. 398).

MOUVEMENT A ACCÉLÉRATION CONSTANTE

486. Problème. — Nous nous proposons d'étudier le mouvement d'un point M dont le vecteur-accélération reste équipollent à un vecteur fixe $\overline{\Gamma}$, connaissant en outre la position initiale M_0 et la vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ au temps $t = 0$. C'est le cas du mouvement d'un point matériel dans le vide sous l'effet de la pesanteur, d'une particule électrique

dans un champ électrique uniforme, etc. Nous supposerons le mouvement rapporté à un repère $Oxyz$. Rappelons que :

1° *Si un vecteur $\vec{U}$ a une dérivée nulle quel que soit t, le vecteur $\vec{U}$ est un vecteur constant*

$$\frac{d\vec{U}}{dt} \equiv \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{U} = \vec{A} \text{ (vecteur constant).}$$

En effet si les dérivées des composantes X, Y, Z de $\vec{U}$ sont nulles, ces composantes sont des constantes $X = \alpha$, $Y = \beta$, $Z = \gamma$ indépendantes de t.

2° *Si deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{U}_1$ ont même dérivée pour toute valeur de t, leur différence est un vecteur constant.*

$$\frac{d\vec{U}}{dt} \equiv \frac{d\vec{U}_1}{dt} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(\vec{U} - \vec{U}_1) \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{U} - \vec{U}_1 = \vec{C} \text{ (vecteur constant)}$$

et par suite : $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{C}$.

487. Cas d'un vecteur-accélération nul. — Supposons d'abord que le vecteur-accélération du point M soit constamment nul. La relation :

$$\frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} \equiv \vec{0} \qquad \text{entraîne} \qquad \vec{V} = \vec{A} \text{ (vecteur constant).}$$

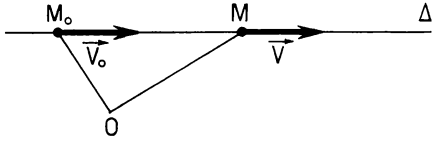


Fig. 407

Le vecteur-vitesse $\vec{V}$ du point M, garde la valeur $\vec{V}_0 = \vec{A}$ qu'il avait au temps $t = 0$. La relation $\vec{V} = \vec{V}_0$ ou $\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{V}_0$ montre que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $t\vec{V}_0$ ont même dérivée, ce qui donne :

$$\overrightarrow{OM} = t\vec{V}_0 + \vec{C} \qquad (\vec{C} \text{ vecteur constant}).$$

Pour $t = 0$, on obtient : $\overrightarrow{OM}_0 = \vec{C}$, d'où finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_0 + t\vec{V}_0.} \qquad (1)$$

On voit immédiatement que la trajectoire du point M est la droite Δ issue de M_0 et de vecteur directeur $\vec{V}_0$ (fig. 407). En prenant cette droite pour axe Ox et en posant $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$, $\vec{V}_0 = v\vec{i}$, on obtient l'équation horaire :

$$\boxed{x = x_0 + vt.}$$

Tout point mobile dont le vecteur-accélération est constamment nul est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Cependant si $\vec{V}_0 = \vec{0}$, la vitesse initiale étant nulle, la vitesse du point M reste nulle et la relation (1) donne $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_0$. Le point M est fixe dans le repère $Oxyz$.

488. Cas d'un vecteur-accélération constant $\vec{\Gamma} \neq \vec{0}$. — La relation $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{\Gamma}$ quel que soit t, montre que les deux vecteurs $\vec{V}$ et $t\vec{\Gamma}$ ont même dérivée. Donc :

$$\vec{V} = t\vec{\Gamma} + \vec{A} \quad (\vec{A} \text{ vecteur constant}).$$

Pour $t = 0$, on obtient $\vec{V}_0 = \vec{A} \Longrightarrow$ $\boxed{\vec{V} = \vec{V}_0 + t\vec{\Gamma}.}$ (2)

La relation $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t\vec{V}_0 + \frac{1}{2}t^2\vec{\Gamma}\right)$ montre que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur

$t\vec{V}_0 + \frac{1}{2}t^2\vec{\Gamma}$ ont une différence constante $\vec{C}$. Pour $t = 0$, on obtient $\vec{C} = \overrightarrow{OM}_0$:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_0 + t\vec{V}_0 + \frac{1}{2}t^2\vec{\Gamma}.} \qquad (3)$$

1° $\vec{V}_0$ ***est nul ou parallèle à*** $\vec{\Gamma}$. — On peut poser $\vec{V}_0 = \lambda\vec{\Gamma}$ et on obtient :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_0 + \left(\lambda t + \frac{1}{2}t^2\right)\vec{\Gamma}$$

D'où : $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{\Gamma}$.

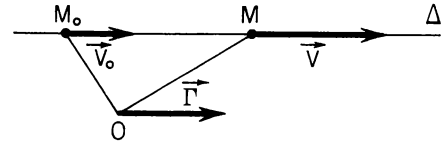


Fig. 408

Le point M se déplace donc sur la droite Δ issue de M_0 et de vecteur directeur $\vec{\Gamma}$ (fig. 408). En prenant cette droite pour axe Ox et en posant $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$, $\vec{V}_0 = v_0\vec{i}$ et $\vec{\Gamma} = \gamma\vec{i}$, la relation (3) s'écrit :

$$\boxed{x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}\gamma t^2.}$$

Le mouvement du point M *est un mouvement rectiligne uniformément varié dont la trajectoire est parallèle à* $\vec{\Gamma}$.

2° $\vec{V}_0$ ***et*** $\vec{\Gamma}$ ***ont des directions distinctes.*** — La relation (3) ci-dessus qui s'écrit $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{V}_0 + \frac{1}{2}t^2\vec{\Gamma}$ montre que le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ est une combinaison linéaire de $\vec{V}_0$ et de $\vec{\Gamma}$. Le point M se déplace donc dans le plan R issu de M_0 et de vecteurs directeurs $\vec{V}_0$ et $\vec{\Gamma}$. Prenons dans ce plan le repère XM_0Y, d'origine M_0 et de vecteurs de base : $\vec{\Gamma}$ sur M_0X et $\vec{V}_0$ sur M_0Y (fig. 409). La relation (3) s'écrit :

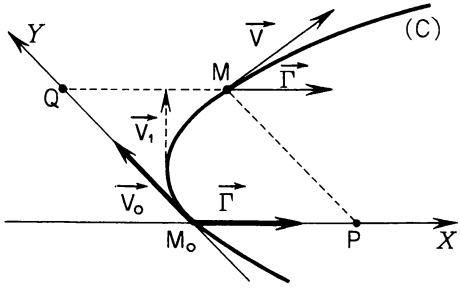


Fig. 409

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{V}_0 + \frac{1}{2}t^2\vec{\Gamma} = X\vec{\Gamma} + Y\vec{V}_0$$

Soit : $\qquad X = \frac{t^2}{2}; \quad Y = t.$

La trajectoire (C) est donc, dans le plan R, la parabole $Y^2 = 2X$.

Lorsque $\vec{V}_0$ *et* $\vec{\Gamma}$ *ont des directions distinctes, la trajectoire du point* M *est une parabole tangente en* M_0 *à* $\vec{V}_0$ *et dont l'axe est parallèle à* $\vec{\Gamma}$.

489. Étude du mouvement parabolique. — Désignons par $\overrightarrow{M_0P}$ et $\overrightarrow{M_0Q}$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ suivant les directions M_0X et M_0Y :

$$\overrightarrow{M_0M} = \frac{1}{2}t^2\vec{\Gamma} + t\vec{V}_0 \implies \overrightarrow{M_0P} = \frac{1}{2}t^2\vec{\Gamma} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_0Q} = t\vec{V}_0.$$

Le mouvement de M *résulte de la composition à partir de* M_0, *du mouvement rectiligne uniformément varié de* P *sur* M_0X *et du mouvement rectiligne uniforme de* Q *sur* M_0Y.

Le point Q se déplaçant toujours dans le même sens sur M_0Y, le point M décrit la parabole dans le sens correspondant à celui de $\vec{V}_0$ (sens t croissant).

L'hodographe (H) du mouvement (fig. 410), défini par $\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_0} + t\overrightarrow{\Gamma}$ est donc une droite parallèle à $\overrightarrow{\Gamma}$. Le produit scalaire $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\Gamma}$ égal à $\overrightarrow{V_0} \cdot \overrightarrow{\Gamma} + t\overrightarrow{\Gamma}^2$ s'annule pour la valeur de t égale à $t_1 = -\dfrac{\overrightarrow{V_0} \cdot \overrightarrow{\Gamma}}{\overrightarrow{\Gamma}^2}$. Cet instant t_1 qui correspond à $\overrightarrow{V}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{\Gamma}$, est donc celui où le point M passe au sommet S de la parabole.

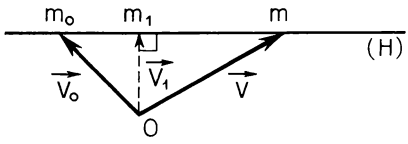


Fig. 410

La relation $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\Gamma} = (t - t_1)\,\overrightarrow{\Gamma}^2$ montre que :

Le point M *est animé d'un mouvement retardé avant son passage au sommet* S *de la parabole, d'un mouvement accéléré après son passage à ce sommet.*

On vérifie sur l'hodographe que $Om = |\overrightarrow{V}|$ est décroissant pour $t < t_1$, croissant pour $t > t_1$.

490. Mouvement d'un point pesant dans le vide. — Précisons les résultats ci-dessus, dans le cas du mouvement dans le vide, d'un point pesant M rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$ de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Nous supposons que l'axe Oz est vertical ascendant et qu'au temps $t = 0$, le point M est en O, avec un vecteur-vitesse $\overrightarrow{V_0}$ situé dans le plan vertical xOz. Nous désignons par v_0 le module de $\overrightarrow{V_0}$ et par α l'angle aigu $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{V_0})$ compté positivement dans le sens de $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz})$. On obtient :

$$\overrightarrow{V_0} = v_0\,(\vec{i}\cos\alpha + \vec{k}\sin\alpha).$$

Le point M est uniquement soumis à la pesanteur qui lui communique une accélération verticale descendante constante égale à g ($g = 9{,}81$ m/s² environ). D'où :

$$\overrightarrow{\Gamma} = -g\vec{k}.$$

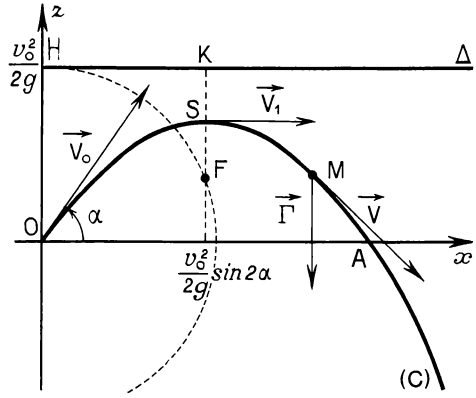


Fig. 411

La relation (3) du n° 488 qui s'écrit, puisque M_0 est en O :

$$\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{V_0} + \frac{1}{2}t^2\overrightarrow{\Gamma} \implies \overrightarrow{OM} = v_0 t\,(\vec{i}\cos\alpha + \vec{k}\sin\alpha) - \frac{1}{2}gt^2\vec{k}.$$

D'où les équations du mouvement :

$$\overrightarrow{OM} : \quad \boxed{x = v_0 t\cos\alpha \;\big|\; y = 0 \;\big|\; z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha.} \qquad (4)$$

Le mouvement du point pesant M ***résulte de la composition d'un mouvement uniforme suivant l'horizontale*** Ox ***et d'un mouvement uniformément varié, d'accélération descendante, suivant la verticale*** Oz.

Notons les composantes de $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\Gamma}$:

$$\overrightarrow{V} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} : x' = v_0\cos\alpha\,; \quad y' = 0\,; \quad z' = -gt + v_0\sin\alpha \qquad (5)$$

$$\overrightarrow{\Gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2} : x'' = 0 \quad ; \quad y'' = 0\,; \quad z'' = -g. \qquad (6)$$

491. Équation de la trajectoire. — Opérons dans le plan xOz et éliminons t entre les relations (4) :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{z = -\frac{gx^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha.} \qquad (7)$$

La trajectoire du point M est donc une parabole d'axe vertical, tangente en O à $\vec{V}_0$ et dont la concavité est dirigée du côté des z négatifs (fig. 411).

Cette parabole recoupe Ox pour $z = 0$, c'est-à-dire pour $t = \frac{2 v_0}{g} \sin \alpha$ et au point A : $x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2 \alpha$; $z = 0$.

Le sommet S de la trajectoire correspond à $z' = 0$, c'est-à-dire à $t = \frac{v_0}{g} \sin \alpha$. On en déduit les coordonnées de S :

$$x_S = \frac{v_0^2}{2 g} \sin 2 \alpha ; \quad z_S = \frac{v_0^2}{2 g} \sin^2 \alpha.$$

L'équation de la parole s'écrit :

$$\left(x - \frac{v_0^2}{2 g} \sin 2 \alpha\right)^2 = -2 \frac{v_0^2}{g} \cos^2 \alpha \left(z - \frac{v_0^2}{2 g} \sin^2 \alpha\right)$$

donc sous la forme : $(x - x_S)^2 = 2 p (z - z_S)$. Le paramètre algébrique de cette parabole est : $p = -\frac{v_0^2}{g} \cos^2 \alpha$.

On en déduit que la directrice Δ a pour équation :

$$z = z_S - \frac{p}{2} = \frac{v_0^2}{2 g} \sin^2 \alpha + \frac{v_0^2}{2 g} \cos^2 \alpha \quad \text{soit : } z = \frac{v_0^2}{2 g}$$

et que le foyer F $\left(x = x_S,\ z = z_S + \frac{p}{2}\right)$ a pour coordonnées :

$$x_F = \frac{v_0^2}{2 g} \sin 2 \alpha ; \quad z_F = -\frac{v_0^2}{2 g} \cos 2 \alpha.$$

Soit H le point où la directrice Δ coupe Oz. On vérifie que $OF = OH = \frac{v_0^2}{2 g}$ donc que O est équidistant de F et de Δ.

Notons que O appartient à la branche ascendante de la trajectoire si α est positif à la branche descendante si α est négatif.

492. Étude de la vitesse. — Le vecteur $\vec{V}$, de module $|v|$ a pour composantes :

$$x' = v_0 \cos \alpha \quad \text{et} \quad z' = -gt + v_0 \sin \alpha.$$

D'où : $$v^2 = x'^2 + z'^2 = v_0^2 - 2 v_0 gt \sin \alpha + g^2 t^2.$$

Soit $$v^2 - v_0^2 = -2 g \left(v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2\right) = -2 gz$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 - 2 gz.}$$

Pour v_0 donné on voit que la vitesse $|v|$ du point M ne dépend que de sa cote z c'est-à-dire de sa hauteur au-dessus du sol. On vérifie que le mouvement est retardé lorsque z croît (car v^2 est décroissant), accéléré lorsque z décroît. La vitesse est minimum lorsque M est en S sommet de la trajectoire.

EXERCICES

718. Démontrer que si, dans le mouvement d'un point M, l'hodographe relatif à l'origine O est une droite issue de O, on a $\overrightarrow{OM} = A(t)\,\vec{I} + \vec{K}$ où $\vec{I}$ et $\vec{K}$ désignent des vecteurs constants et $A(t)$ une fonction de t. En déduire que le mouvement du point M est un mouvement rectiligne.

719. Si l'hodographe relatif au point O est une droite ne passant pas par O, démontrer les relations (où $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ sont des vecteurs constants) :

$$\overrightarrow{Om} = \vec{V} = a(t)\,\vec{I} + \vec{J} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM} = A(t)\,\vec{I} + t\,\vec{J} + \vec{K}.$$

En déduire que le mouvement du point M résulte de la composition de deux mouvements rectilignes, l'un d'eux étant uniforme, et que la trajectoire est plane.

720. Démontrer que si l'hodographe relatif à O est situé dans un plan P passant par O et de vecteurs de base $\vec{I}$ et $\vec{J}$, on a les relations :

$$\vec{V} = a(t)\,\vec{I} + b(t)\,\vec{J} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM} = A(t)\,\vec{I} + B(t)\,\vec{J} + \vec{K}.$$

En déduire que la trajectoire du point M est située dans un plan parallèle à P.

721. Lorsque l'hodographe relatif à O est dans un plan P ne passant par O, on peut écrire, en désignant par $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$, $\vec{L}$ des vecteurs constants tels que $\vec{K}$ soit perpendiculaire au plan P contenant $\vec{I}$ et $\vec{J}$:

$$\vec{V} = a(t)\,\vec{I} + b(t)\,\vec{J} + \vec{K} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM} = A(t)\,\vec{I} + B(t)\,\vec{J} + t\,\vec{K} + \vec{L}.$$

En déduire que le mouvement de M résulte de la composition d'un mouvement curviligne dans le plan P et d'un mouvement rectiligne uniforme, suivant une droite Δ perpendiculaire au plan P.

722. 1° Dans tout mouvement uniforme, l'hodographe relatif au point O est une courbe tracée sur une sphère de centre O et le plan normal en tout point m de l'hodographe passe par O.

2° Démontrer que l'une des deux propriétés précédentes entraîne l'autre et que dans ce cas on a affaire à un mouvement uniforme.

723. Un point M mobile dans l'espace rapporté au repère $Oxyz$ est soumis a une accélération définie par $\dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2} = -\omega^2\,\overrightarrow{OM}$.

1° Démontrer que les coordonnées x, y, z de M vérifient la même équation différentielle $x'' + \omega^2 x = 0$ dont la solution s'écrit $x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$.

En déduire que $\overrightarrow{OM} = \vec{I}\cos\omega t + \vec{J}\sin\omega t$ où $\vec{I}$ et $\vec{J}$ sont deux vecteurs arbitraires constants.

2° Soient M_0 et $\vec{V}_0$ la position et la vitesse initiales du point M au temps $t = 0$. Exprimer $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OM_0}$ et $\vec{V}_0$. Que peut-on en conclure pour la trajectoire de M ?

3° En posant $\omega t = \varphi - \alpha$, écrire $\overrightarrow{OM}$ sous la forme $\overrightarrow{OA}\cos\varphi + \overrightarrow{OB}\sin\varphi$ et déterminer α pour que l'on ait $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$. En déduire que la trajectoire est une ellipse de centre O.

724. Dans un repère orthonormé xOy le mouvement du point M (x, y) est défini en fonction du temps par :

$$x = 2t - 1\,; \qquad y = 2t^2 - 2t + 1.$$

1° Déterminer et construire la trajectoire du point M.

2° Calculer les composantes du vecteur-vitesse et construire ce vecteur-vitesse à l'instant $t = 1$. Calculer les composantes du vecteur-accélération et montrer que ce vecteur reste équipollent à un vecteur fixe. Construire le vecteur accélération à l'instant $t = 1$.

3° Construire l'hodographe du mouvement relatif au point O. Calculer la valeur absolue de la vitesse et indiquer quand t varie de 0 à $+\infty$ la nature du mouvement (accéléré ou retardé).

725. On considère, dans un repère orthonormé xOy, la parabole (P) d'équation $y^2 = 2px$ $(p > 0)$. Un point M, mobile sur cette parabole, est tel que sa projection K sur Oy est animée d'un mouvement uniforme de vitesse positive a et passe en O à la date $t = 0$. On désigne par $\overrightarrow{MR}$ le vecteur-vitesse du point M et par $\overrightarrow{MS}$ son vecteur-accélération.

1° Calculer en fonction du temps t les coordonnées x et y de M et les composantes des vecteurs $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{MS}$.

2° Trouver l'hodographe du mouvement, puis l'ensemble des points S.

3° Calculer les coordonnées du point R. Par quelle transformation ponctuelle passe-t-on de la parabole (P) à la courbe décrite par R ?

4° Soient O le sommet et F le foyer de la parabole (P). Soient M et M′ deux points de P, K et K′ leurs projections orthogonales sur Oy et soit Q l'intersection de la droite M′K′ et de la tangente en M à (P). Démontrer la relation $4\,\overline{QM'}\,.\,\overline{OF} = \overline{KK'}^2$.

En déduire l'ensemble des points Q lorsque, M décrivant la parabole P, la distance KK′ reste égale à une longueur constante a.

726. 1° Calculer $\cos 3t$ en fonction de $\cos t$.

2° Un point M, mobile sur la courbe d'équation $y = 4x^3 - 3x$, a pour abscisse $x = \cos t$ à l'instant t. Construire dans un repère orthonormé xOy la trajectoire de M. Montrer que le mouvement projeté de M sur Oy est un mouvement sinusoïdal dont on précisera le centre, l'amplitude, la période.

3° Calculer les abscisses du mobile à ses passages aux points de sa trajectoire d'ordonnée $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

727. Dans le plan du repère orthonormé xOy, un point mobile P décrit Ox d'un mouvement uniforme de vitesse $a > 0$ et a pour abscisse x_0 au temps $t = 0$. Un deuxième point mobile Q décrit Oy d'un mouvement uniformément varié. Au temps $t = 0$, il a pour ordonnée y_0 et une vitesse $v_0 > 0$ et au temps $t = 1$, sa vitesse est égale à $v_0 - g$ (g constante positive donnée).

1° Donner les coordonnées à l'instant t des mobiles P et Q. Construire la trajectoire (C) du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$. Équation de cette trajectoire (C) et coordonnées x_1, y_1 de son sommet.

2° Former la relation indépendante de t à laquelle doivent satisfaire les données pour que les mobiles P et Q se rencontrent en O et indiquer la date de cette rencontre.

3° *a*) On se donne x_0 et y_0, montrer qu'il existe une valeur et une seule de v_0 pour laquelle il y a une rencontre de P et Q.

b) On se donne v_0 et y_0. Montrer que, sous certaine condition, il y a deux valeurs de x_0 pour lesquelles il y a rencontre. Calculer les valeurs de la vitesse v du mobile Q au moment de ces rencontres et montrer qu'elles sont de signes différents.

728. 1° Un projectile est lancé verticalement vers le haut à partir du point O avec une vitesse v_0 qui lui permet d'atteindre une hauteur de 25 m. Calculer $\frac{{v_0}^2}{g}$ où $g = 9{,}81$ m/s² désigne l'accélération due à la pesanteur. Dans la suite du problème, v_0 désigne la valeur ainsi définie.

2° On lance le projectile à partir de O, avec la vitesse v_0 suivant une direction Ou faisant avec l'horizontale Ox un angle de tir $(Ox, Ou) = \alpha$ tel que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Déterminer le point P où le projectile atteint le plan horizontal H de cote — 6,25 m, au-dessous du point O.

3° Trouver un deuxième angle de tir β permettant d'atteindre le même point P. Calculer le rapport des durées des trajets de ces deux mouvements. Sous quel angle γ faut-il tirer, avec la même vitesse initiale v_0 pour atteindre un point aussi éloigné que possible sur le plan H (on pourra calculer $\cos 2\gamma$).

729. Dans le plan du repère orthonormé xOz où Oz est vertical ascendant, on considère le mouvement d'un projectile pesant M défini par :

$$x = v_0 t \cos\alpha ; \qquad z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha .$$

dans lequel le module v_0 de $\overrightarrow{V_0}$ est donné, mais où on fait varier l'angle de tir α de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.

1° Étudier le cas où $\alpha = +\frac{\pi}{2}$. Calculer l'altitude maximum z atteinte par M. Exprimer à tout instant le carré de la vitesse v^2 du point M uniquement en fonction de g et de $h = z_1 - z$.

2° Déterminer l'ensemble des positions du projectile M à un instant donné t lorsque α varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$. Écrire l'équation de la trajectoire C_α correspondant à une valeur donnée de α. Montrer que la directrice de C_α est une droite fixe Δ de cote $z = z_1$. Lieux du foyer F et du sommet S de C_α. Exprimer v^2 en fonction de g et $h = z_1 - z$.

3° Déterminer α, par sa tangente, pour que la trajectoire C_α passe par un point donné A (x_0, y_0). Établir l'existence d'une parabole (Γ) dite de *sûreté*, limitant l'ensemble des points A pouvant être atteints par le projectile M. Montrer qu'en tout point de (Γ) la trajectoire unique C_α qui y passe est tangente en ce point à (Γ). Quelle relation y a-t-il entre les deux valeurs de α permettant d'atteindre un point B $(x = a, y = 0)$ de Ox ?

MOUVEMENT CIRCULAIRE

493. Mouvement circulaire. — Considérons, dans un plan rapporté au repère orthonormé xOy, le cercle (C) de centre O et de rayon R (fig. 412). Ce cercle coupe Ox en A (R, 0), Oy en B (0, R). La position d'un point M sur le cercle est déterminée par son *angle polaire* : $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ mesuré en radians à $2k\pi$ près ou par son *abscisse curviligne* :

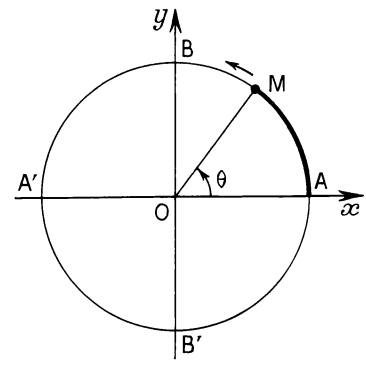


Fig. 412

$$s = \overset{\frown}{AM} \Longrightarrow \boxed{s = R\theta} \qquad (1)$$

Les coordonnées de M sont alors :

$$\boxed{x = R\cos\theta \mid y = R\sin\theta.} \qquad (2)$$

Comme $\overrightarrow{OA} = R\vec{i}$ et $\overrightarrow{OB} = R\vec{j}$ le vecteur $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{i}\cos\theta + R\vec{j}\sin\theta \iff \boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}\cos\theta + \overrightarrow{OB}\sin\theta.} \qquad (3)$$

Lorsque le point M est mobile sur le cercle, le mouvement est déterminé par la relation $\theta = f(t)$. On obtient l'équation horaire :

$$s = R\theta \Longrightarrow s = Rf(t). \qquad (4)$$

494. Vitesse angulaire. — En posant $\frac{d\theta}{dt} = f'(t) = \theta'$, la vitesse algébrique du point M s'écrit :

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \iff \boxed{v = R\theta'.} \qquad (5)$$

Cette vitesse est donc le produit de R par θ' :

La dérivée $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$ ***de l'angle polaire*** θ ***du point*** M ***est appelée vitesse angulaire du point*** M ***sur le cercle.***

L'unité de vitesse angulaire est le radian par seconde (1 rd/s). C'est la vitesse angulaire d'un mobile parcourant un arc de 1 radian par seconde.

De même en posant $\frac{d^2\theta}{dt^2} = f''(t) = \theta''$ (accélération angulaire) on voit que l'accélération tangentielle s'écrit :

$$\gamma_T = \frac{d^2s}{dt^2} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} \Longrightarrow \gamma_T = R\theta''. \qquad (6)$$

Lorsque θ'' est nul quel que soit t, la vitesse angulaire θ' est une constante ω et la vitesse algébrique $v = R\omega$ est constante. Le mouvement circulaire est uniforme.

495. Composantes cartésiennes de $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$. — Compte tenu des relations : $\theta = f(t)$, $\theta' = \frac{d\theta}{dt} = f'(t)$ et $\theta'' = \frac{d^2\theta}{dt^2} = f''(t)$, nous obtenons :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \vec{V} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\begin{cases} x' = -R\theta'\sin\theta \\ y' = R\theta'\cos\theta. \end{cases}$$

et

$$\vec{\Gamma} = \frac{d^2M}{dt^2}\begin{cases} x'' = -R\theta''\sin\theta - R\theta'^2\cos\theta \\ y'' = R\theta''\cos\theta - R\theta'^2\sin\theta. \end{cases}$$

Pour interpréter ces formules, il faut chercher les projections de $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ sur le rayon OM et la tangente Mλ au cercle. Il est plus facile d'opérer comme suit.

496. Composantes tangentielles et normales de $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$. — Désignons par $\vec{I}$ et $\vec{J}$ les vecteurs unitaires d'angles polaires θ et $\theta + \frac{\pi}{2}$ (fig. 413).

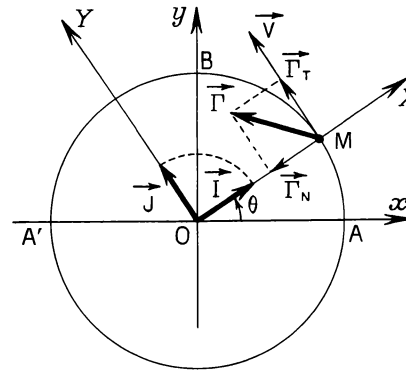


Fig. 413

On obtient : $\vec{I}\begin{cases}\cos\theta \\ \sin\theta\end{cases}$

$$\vec{J}\begin{cases} \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta \\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta. \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{I}$ n'est autre que le vecteur unitaire de l'axe $\overrightarrow{OM}$. La relation $(\vec{I}, \vec{J}) = +\frac{\pi}{2}$ montre que $\vec{J}$ est égal au vecteur unitaire $\vec{T}$ tangent en M à la trajectoire et orienté dans le sens direct (θ croissant). Par dérivation, on obtient :

$$\frac{\vec{dI}}{d\theta}\begin{cases}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{cases} \text{ et } \frac{\vec{dJ}}{d\theta}\begin{cases}-\cos\theta \\ -\sin\theta\end{cases} \Longrightarrow \frac{\vec{dI}}{d\theta} = \vec{J} \text{ et } \frac{\vec{dJ}}{d\theta} = -\vec{I}.$$

Comme $\overrightarrow{OM} = R\vec{I}$, on obtient en dérivant par rapport à t :

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = R\frac{\vec{dI}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow \boxed{\vec{V} = R\theta'\vec{J}} \qquad (7)$$

et

$$\vec{\Gamma} = \frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2} = R\theta''\vec{J} + R\theta'\frac{\vec{dJ}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow \boxed{\vec{\Gamma} = R\theta''\vec{J} - R\theta'^2\vec{I}.} \qquad (8)$$

La relation $\vec{V} = R\theta'\vec{J}$ montre que le vecteur-vitesse, d'origine M, est porté par la tangente et a, sur cette tangente orientée par $\vec{J}$, pour mesure algébrique : $R\theta'$, c'est-à-dire $v = \frac{ds}{dt}$ (n° 472).

La relation $\vec{\Gamma} = R\theta''\vec{J} - R\theta'^2\vec{I}$ montre que le vecteur-accélération $\vec{\Gamma}$ admet pour composantes $\vec{\Gamma}_T = R\theta''\vec{J}$ sur la tangente et $\vec{\Gamma}_N = -R\theta'^2\vec{I}$ sur la normale OM.

La mesure algébrique de la composante $\vec{\Gamma}_T$ sur la tangente est *l'accélération tangentielle* $\gamma_T = R\theta'' = \frac{d^2s}{dt^2}$ (n° 477). La composante $\vec{\Gamma}_N$ portée par MO et dirigée vers le centre du cercle (C) est donc située dans la concavité de la trajectoire. Son module $\gamma_N = R\theta'^2$ est *l'accélération normale*. Compte tenu de la relation $v = R\theta'$ on obtient :

$$\gamma_N = R\theta'^2 = \frac{v^2}{R}.$$

497. Mouvement circulaire uniforme. — Un mouvement circulaire est uniforme lorsque sa vitesse angulaire θ' est une constante ω, ce qui implique $\theta'' = 0$ et $\theta = \omega t + \alpha$.

Le point M décrit le cercle (C) d'une façon uniforme dans le sens direct pour $\omega > 0$ (fig. 414), dans le sens rétrograde pour $\omega < 0$. En supposant ω positif on voit que *la période* T *du mouvement* vérifie :

$$\omega T = 2\pi \iff T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

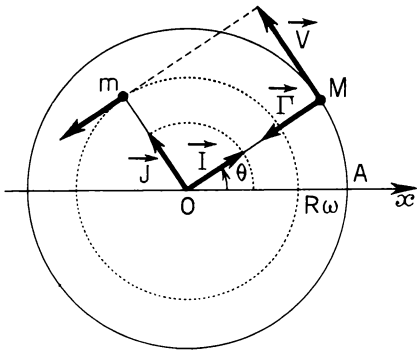


Fig. 414

C'est la durée d'une révolution du point M sur le cercle.

La fréquence du mouvement est le nombre de tours (ou cycles) par seconde :

$$n = \frac{1}{T} \iff n = \frac{\omega}{2\pi}.$$

En posant $\overrightarrow{OM} = R\vec{I} = R\vec{i}\cos\theta + R\vec{j}\sin\theta$, on obtient :

$$x = R\cos(\omega t + \alpha); \qquad y = R\sin(\omega t + \alpha).$$

Le vecteur-vitesse $\vec{V} = R\omega\vec{J}$ a un module constant $|v| = R\omega$ et l'hodographe est un cercle de rayon $R\omega$ décrit d'un mouvement uniforme.

Le vecteur-accélération se réduit à $\vec{\Gamma} = -R\omega^2\vec{I}$. L'accélération tangentielle est nulle et l'accélération normale est $\gamma_N = R\omega^2$, c'est-à-dire $\gamma_N = \frac{v^2}{R}$. D'autre part puisque $\overrightarrow{OM} = R\vec{I}$, on obtient : $\vec{\Gamma} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$.

498. Mouvement rectiligne vibratoire simple. — Rappelons que lorsqu'un point M décrit le cercle (C) de centre O et de rayon R d'un mouvement uniforme tel que $\theta = \omega t + \alpha$, sa projection orthogonale P sur Ox est animée (fig. 415) d'un mouvement vibratoire simple (ou sinusoïdal) :

$$x = R\cos(\omega t + \alpha) \iff \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}\cos(\omega t + \alpha).$$

Le point P décrit, alternativement dans chaque sens, le segment AA'. La période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et la phase $\omega t + \alpha$ du mouvement sont celles du mouvement circulaire du point M. Notons que le vecteur-vitesse et le vecteur-accélération de P :

$$\frac{\overrightarrow{dP}}{dt} = -\omega\overrightarrow{OA}\sin(\omega t + \alpha)$$

et $$\frac{\overrightarrow{d^2P}}{dt^2} = -\omega^2\overrightarrow{OA}\cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2\overrightarrow{OP}$$

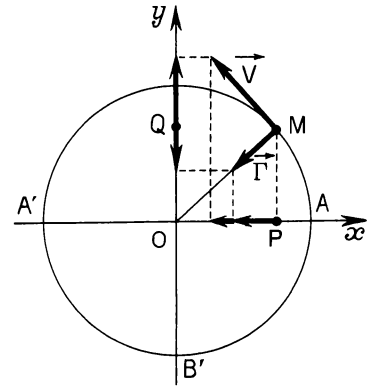


Fig. 415

sont respectivement les projections orthogonales sur Ox des vecteurs $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ et $\frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}$.

De même la projection orthogonale Q du point M sur Oy est définie par :

$$y = R\sin(\omega t + \alpha) \iff \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB}\sin(\omega t + \alpha) = \overrightarrow{OB}\cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

Le point Q est donc animé d'un mouvement sinusoïdal de même centre O, de même période T et de même amplitude R que celui du point P, mais déphasé de $\frac{\pi}{2}$.

La relation $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ montre que :

Tout mouvement circulaire uniforme résulte de la composition de deux mouvements

sinusoïdaux de même centre, de même amplitude et de même période, mais déphasés de $+\frac{\pi}{2}$ *et s'effectuant dans deux directions rectangulaires.*

Lorsque $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}\cos(\omega t + \alpha) + \overrightarrow{OB}\sin(\omega t + \alpha)$ le mouvement de M est un mouvement circulaire uniforme si OA = OB et $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$.

Comme à tout vecteur $\overrightarrow{OA}$ on peut associer un vecteur $\overrightarrow{OB}$ de même module que $\overrightarrow{OA}$ et perpendiculaire à $\overrightarrow{OA}$, on voit réciproquement, que tout mouvement sinusoïdal $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}\cos(\omega t + \alpha)$ peut être considéré comme la projection orthogonale d'un mouvement circulaire uniforme.

MOUVEMENT HÉLICOÏDAL UNIFORME

499. Hélice circulaire. — Dans le repère orthonormé $Oxyz$, considérons l'hélice circulaire (H) définie (fig. 416) en fonction du paramètre θ par :

$$\overrightarrow{OM} : \qquad x = a\cos\theta ; \qquad y = a\sin\theta ; \qquad z = h\theta. \qquad (1)$$

La longueur a est le rayon du cylindre de révolution (S) d'axe Oz et d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ sur lequel est tracé l'hélice (H). La constante h est le pas réduit de cette hélice. Soit A $(a, 0, 0)$ le point origine des arcs $s = \overset{\frown}{AM}$ sur cette hélice orientée dans le sens θ croissant.

Désignons par P la projection orthogonale du point M sur le plan xOy et par Q sa projection sur Oz, ce qui entraîne : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$.

Le point P décrit le cercle (C), cercle de base du cylindre (S) et θ est l'angle polaire $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})$ du point P dans le plan xOy. L'arc $\sigma = \overset{\frown}{AP}$ du cercle (C) est égal à $a\theta$ et la cote $z = \overline{PM}$ du point M est égale à $h\theta$.

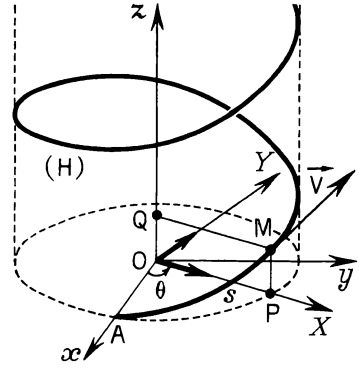


Fig. 416

En désignant comme au n° 494 par : $\vec{I}\begin{vmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{vmatrix}$ et $\vec{J}\begin{vmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{vmatrix}$ les vecteurs unitaires d'angles polaires θ et $\theta + \frac{\pi}{2}$ du plan xOy on obtient : $\overrightarrow{OP} = a\vec{I}$ et $\overrightarrow{OQ} = h\theta\vec{k}$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = a\vec{I} + h\theta\vec{k}. \qquad (2)$$

500. Mouvement hélicoïdal. — La position du point M (θ) mobile sur l'hélice (H) est définie en fonction du temps t par la loi horaire $\theta = f(t)$.

En posant $\theta' = \frac{d\theta}{dt} = f'(t)$, on obtient les composantes du vecteur-vitesse $\vec{V}$ du point M en dérivant les relations (1) :

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} : \qquad x' = -a\theta'\sin\theta ; \qquad y' = a\theta'\cos\theta ; \qquad z' = h\theta'. \qquad (3)$$

On voit donc d'après ces relations, ou en dérivant la relation (2) que :

$$\vec{V} = a\theta'\vec{J} + h\theta'\vec{k}.$$

Ce qui donne : $\vec{V}^2 = v^2 = a^2\,\theta'^2 + h^2\,\theta'^2 = (a^2 + h^2)\,\theta'^2$.

L'hélice étant orientée dans le sens θ croissant, $v = \dfrac{ds}{dt}$ et $\theta' = \dfrac{d\theta}{dt}$ sont de même signe, soit :

$$v = \sqrt{a^2 + h^2}\,\theta' \qquad \text{ou} \qquad \frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 + h^2}\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Cette relation entraîne, puisque s et θ sont nuls en A :

$$ds = \sqrt{a^2 + h^2}\,d\theta \implies \boxed{s = \theta\sqrt{a^2 + h^2}.} \qquad (4)$$

La longueur de l'arc $s = \overset{\frown}{AM}$ de l'hélice est proportionnelle à θ, donc à $\sigma = \overset{\frown}{AP}$.

501. Mouvement hélicoïdal uniforme. — Le mouvement du point M sur l'hélice (H) est uniforme si la vitesse algébrique $v = \dfrac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 + h^2}\,\theta'$ est constante. Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que θ' soit une constante ω et :

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = \omega \implies \boxed{\theta = \omega t + \alpha} \qquad (5)$$

d'où les équations cartésiennes du mouvement :

$\overrightarrow{OM}$: $\quad x = a\cos(\omega t + \alpha)$; $\quad y = a\sin(\omega t + \alpha)$; $\quad z = h(\omega t + \alpha)$.

Le point P décrit le cercle (C) d'un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire ω et le point Q décrit Oz d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $h\omega$.

Et puisque : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$:

Un mouvement hélicoïdal uniforme résulte de la composition d'un mouvement circulaire uniforme sur un cercle (C) *et d'un mouvement rectiligne uniforme suivant l'axe du cercle* (C).

502. Vecteur-vitesse. — En dérivant la relation : $\overrightarrow{OM} = a\vec{I} + h\,\theta\vec{k}$ et compte tenu des relations (n° 496) :

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = \omega\,; \;; \quad \frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d\vec{I}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \omega\vec{J} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d\vec{J}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\omega\vec{I}$$

on obtient :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \omega a\vec{J} + h\omega\vec{k}. \qquad (7)$$

Le vecteur-vitesse $\vec{V}$ lié au point M (fig. 417) se projette donc sur le plan xOy suivant le vecteur $\omega a\vec{J}$, vecteur-vitesse du point P, de module ωa. Il se projette sur Oz suivant le vecteur constant $h\omega\vec{k}$ de module $h\omega$.

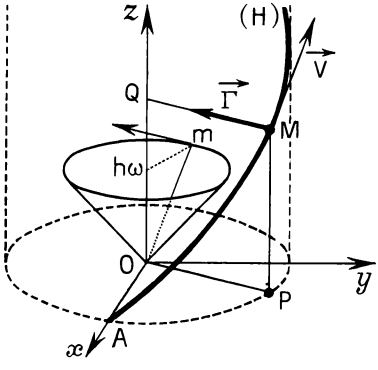


Fig. 417

Le vecteur $\vec{V}$ a donc un module constant $|v| = \omega\sqrt{a^2 + h^2}$ et fait avec Oz un angle constant φ tel : $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\omega a}{\omega h} = \dfrac{a}{h}$. Ce vecteur $\vec{V}$ étant tangent en M à l'hélice (H) est évidemment situé dans le plan tangent au cylindre (S) suivant la génératrice PM.

Le point m tel que $\overrightarrow{Om} = \vec{V}$, a pour coordonnées (3) :

$x' = -a\omega\sin\theta$; $\quad y' = a\omega\sin\theta$; $\quad z' = h\omega$.

L'hodographe, lieu du point m est donc, dans le

plan $z = h\,\omega$, un cercle (C′) d'axe Oz, de rayon $a\,\omega$, décrit d'un mouvement uniforme. Le lieu du segment O*m* est un cône de révolution d'axe Oz et de demi-angle au sommet égal à φ.

503. Vecteur-accélération. — En dérivant la relation (7), on obtient :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2} = -\omega^2\, a\, \vec{I}.$$

Or $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QM} = a\vec{I}$. Donc $\vec{\Gamma} = -\omega^2\,\overrightarrow{OP} = \omega^2\,\overrightarrow{MQ}$.

Le vecteur accélération $\vec{\Gamma}$, lié au point M, est donc un vecteur de module constant $\omega^2 a$, équipollent au vecteur-accélération du point P. Il est porté par la droite MQ et dirigé vers l'intérieur du cylindre (S). Il est donc normal en M à ce cylindre et par suite à l'hélice (H). Le vecteur- accélération $\vec{\Gamma}$ se réduit donc à sa composante $\vec{\Gamma}_N$, ce qui résulte du fait que le mouvement est uniforme (n° 477).

504. Exemples de mouvements hélicoïdaux. — Lorsqu'une hélice circulaire glisse sur elle-même, tout point M lié à cette hélice est animé d'un mouvement hélicoïdal (mouvement d'un tire-bouchon, d'une vis, d'un foret hélicoïdal, d'un écrou ou d'un boulon).

Le mouvement hélicoïdal est uniforme lorsque la vitesse angulaire autour de l'axe de l'hélice est constante. Tout point de l'hélice d'un bateau (ou d'un avion) qui se déplace en ligne droite, à vitesse constante, est animé d'un mouvement hélicoïdal uniforme. Il en est de même du mouvement d'un point du vilebrequin ou du volant d'embrayage d'une voiture automobile (à moteur longitudinal) lorsque cette dernière roule en ligne droite à vitesse constante.

EXERCICES

730. Un point M est mobile dans le plan du repère orthonormé xOy et ses coordonnées en fonction du temps t sont :

$$x = 2\cos t - \sin t; \qquad y = 2\sin t + \cos t.$$

1° Montrer que le point M est animé d'un mouvement circulaire uniforme. Construire sa trajectoire et déterminer son rayon R.

2° Calculer les composantes du vecteur-vitesse $\vec{V}$, son module v et construire l'hodographe du mouvement relatif à O.

3° Déterminer le vecteur-accélération $\vec{\Gamma}$ et démontrer que $\vec{\Gamma} = -\overrightarrow{OM}$.

731. Dans un plan rapporté au repère orthonormé xOy, on considère les deux cercles de centre O et de rayons respectifs a et $3\,a$, coupant la demi-droite Ox en A et B. Un premier mobile P parti de B au temps $t = 0$ décrit le grand cercle avec une vitesse angulaire constante de 1 radian par seconde. Un second mobile Q parti de A à l'instant $t = 0$ décrit le petit cercle avec une vitesse angulaire constante de 3 radians par seconde.

1° Quelles sont à l'instant t, évalué en secondes, les coordonnées du point P, du point Q, du milieu M de PQ et du milieu N de MQ ?

2° Déterminer les composantes du vecteur-vitesse $\vec{V}$ du point M ainsi que celles du vecteur $\overrightarrow{ON}$. Comparer les directions et les modules de ces deux vecteurs.

732. On considère le point mobile M dont les coordonnées, en fonction du temps t, dans le repère orthonormé xOy sont : $x_M = R\cos\omega t$; $y_M = R\sin\omega t$.
On désigne par P la projection orthogonale de M sur Ox et on construit le point N tel que

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM}\sin\omega t.$$

1° Étudier les mouvements des points M, P et N. Construire les trajectoires des points M et N, puis comparer les modules de leurs vecteurs-vitesse et de leurs vecteurs-accélération.

2° Calculer la longueur du segment NP à l'instant t. A quels moments cette longueur est-elle maximum ou minimum ? Quelle est alors l'ordonnée de N ? Démontrer qu'à ces instants les projections des vecteurs-vitesse de N et de P sur la droite NP sont des vecteurs équipollents.

733. Le plan étant rapporté au repère orthonormé xOy, on considère les cercles égaux (C) et (C') de centres respectifs C $(a, 0)$ et C' $(-a, 0)$ tangents en O à Oy et de diamètres OA et OA'. Un angle de droites constant $(OU, OV) = \frac{3\pi}{4}$ tourne autour de son sommet avec une vitesse angulaire constante ω.

1° Montrer que les points d'intersection M et M' de OU avec (C) et de OV avec (C') ont une vitesse constante et que l'angle $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{C'M'})$ garde une valeur constante.

2° On suppose qu'au temps $t = 0$ le point M est en A. Écrire les coordonnées de M, de M' et du milieu I du segment MM'. Montrer que la trajectoire de I est un cercle de centre O. Calculer le rayon de ce cercle.

3° Trouver les coordonnées du centre Ω de la rotation qui transforme $\overrightarrow{CM}$ en $\overrightarrow{C'M'}$. Former l'équation de la droite MM'. Déterminer l'ensemble des points du plan par où passe au moins une droite MM' et l'équation de la courbe (H) limitant cet ensemble. Préciser les éléments de (H).

734. 1° On désigne par t un paramètre réel tel que $0 < t < 2\pi$ et par u le nombre complexe $\frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{t}{2} + i\right)$. Calculer le nombre complexe $z = u^2$ sous la forme $x + iy$. Déterminer son module ρ et son argument θ. Établir la relation : $\rho = x + \frac{1}{2}$.

2° Le paramètre t représente le temps et on considère le mobile m d'affixe $z = x + iy$ dans le repère orthonormé xOy. Déterminer la trajectoire (C) du mouvement et former son équation cartésienne. Indiquer les dates de passage du point m aux points de (C) qui ont pour abscisse $\frac{1}{2}$.

3° On associe les positions m et m_1 relatives aux instants t et $t_1 = t + \pi$. Soient M et M_1 leurs homologues dans l'inversion de pôle O et de puissance 1. Évaluer les mesures algébriques : $\overline{OM}$ sur l'axe d'angle polaire t, $\overline{OM_1}$ sur l'axe d'angle polaire $t + \pi$ et calculer la distance MM_1. Trouver lorsque t varie la trajectoire du milieu I de MM_1 et la nature de son mouvement.

735. On considère le mouvement vibratoire elliptique d'un point M défini dans un repère orthonormé par : $x = a\cos\omega t$; $y = b\sin\omega t$.

1° Construire l'ellipse (E) trajectoire du point M. Déterminer la période T du mouvement. Comparer le vecteur-vitesse $\overrightarrow{V}$ du point M au vecteur $\overrightarrow{OM_1}$, le point M_1 étant la position de M au temps $t + \frac{T}{4}$. Démontrer la relation $\overrightarrow{\Gamma} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$.

2° On construit les points : I $\begin{cases} x = (a+b)\cos\omega t \\ y = (a+b)\sin\omega t \end{cases}$ et J $\begin{cases} x = (a-b)\cos\omega t \\ y = (b-a)\sin\omega t. \end{cases}$

Nature des mouvements de I et J ? Montrer que M est le milieu de IJ. Comparer en grandeur et direction les vecteurs MI et OM_1. Que représente IJ pour l'ellipse (E) ?

3° Soient P et Q les projections de I sur Ox et Oy. Montrer que PQ passe par le milieu R de OI et par le point M, que RP = RQ = RO = RI, que MP = b et MQ = a. Connaissant les points O, M et M_1, en déduire une construction géométrique de I, R, P, Q et des sommets de l'ellipse (E).

736. Le plan est rapporté au repère orthonormé xOy. Sur le cercle (C) de centre O et de rayon R on considère les deux points M_1 et M_2 d'angles polaires :

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_1}) = \theta_1 \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_2}) = \theta_2.$$

Soient $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$ les vecteurs unitaires tangents au cercle en M_1 et M_2 respectivement, définis par $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{T_1}) = (\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{T_2}) = +\frac{\pi}{2}$.

1° Écrire les coordonnées de M_1 et M_2, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$, l'équation de la droite M_1M_2 et les composantes des vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2}$. Montrer que ces deux derniers sont parallèles.

2° On suppose que M_1 et M_2 sont variables sur le cercle (C) de telle sorte que :

$\theta_1 = \omega_1 t + \varphi_1$; $\theta_2 = \omega_2 t + \varphi_2$ (où ω_1, ω_2, φ_1, φ_2 sont des constantes et t le temps).

Exprimer les vecteurs-vitesse de M_1 et M_2 en fonction de R, ω_1, ω_2, $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$. Soit G le barycentre de M_1 affecté du coefficient ω_2 et de M_2 affecté du coefficient ω_1. Déterminer les composantes de $\overrightarrow{OG}$ et du vecteur-vitesse du point G. Exprimer ce dernier en fonction de R, ω_1, ω_2, $\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2}$ et déterminer son support.

3° On suppose que $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = -3\omega$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$ et $R = \frac{a}{2}$. Exprimer $\cos^3 t$ et $\sin^3 t$ en fonction de $\sin t$, $\cos t$, $\sin 3t$ et $\cos 3t$. Écrire pour ces valeurs particulières les coordonnées de G sous forme de puissances de $\cos\omega t$ et $\sin\omega t$. Que représente la droite M_1M_2 pour le lieu de G ?

737. Dans un repère orthonormé xOy on considère sur l'axe Ox, les points fixes A, B, C, d'abscisses respectives a, $-a$ et $2a$ $(a > 0)$.

1° Un point mobile P se déplace sur un cercle de centre A et de rayon a, avec une vitesse angulaire positive constante ω. Au temps $t = 0$, il se trouve en C. Un point mobile Q se déplace sur un cercle de centre B et de rayon a avec la vitesse angulaire négative constante $-\omega$. A la date $t = 0$, l'angle $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BQ})$ a pour valeur $+\frac{\pi}{2}$. Calculer à l'instant t, les coordonnées des mobiles P et Q, puis celles du milieu M de PQ. Montrer que M est animé d'un mouvement rectiligne vibratoire simple. Préciser sa période et son amplitude.

2° Un mobile S se déplace sur le cercle de centre C et de rayon $2a$ avec une vitesse angulaire constante $-\omega$. Au temps $t = 0$, il se trouve en O. Calculer les coordonnées du point N barycentre des points Q (2) et S (1). Démontrer que N est animé d'un mouvement circulaire uniforme.

738. On considère le repère cartésien orthonormé xOy de vecteur de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et les trois points mobiles P, P′ et M tels que :

$$\overrightarrow{OP} = (1 + \cos t)\vec{i} + \sin t.\vec{j}; \quad \overrightarrow{OP'} = (-1 + \sin t)\vec{i} + \cos t.\vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}.$$

1° Démontrer que les mouvements de P et P′ sont circulaires uniformes. Déterminer leurs vitesses angulaires. Construire au même instant t le vecteur-vitesse et le vecteur-accélération de chacun de ces points.

2° Démontrer que le mouvement de M est un mouvement rectiligne vibratoire simple. Préciser le support de la trajectoire, l'amplitude et la période de ce mouvement.

739. Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $Oxyz$, on considère le point mobile M dont les coordonnées (x, y, z) sont définies en fonction de t par les formules :

$$x = 3\cos 2t; \quad y = 3\sin 2t; \quad z = 8t.$$

1° Déterminer les composantes du vecteur-vitesse $\vec{V}$, la vitesse algébrique v sur la trajectoire orientée dans le sens t croissant et la longueur s de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ décrit par le point M entre les instants 0 et t.

2° Nature de l'hodographe relatif à O du mouvement. Déterminer les composantes du vecteur-accélération $\vec{\Gamma}$ et le module de ce vecteur. Exprimer le module en fonction de v et du rayon r de l'hodographe.

3° Nature de la trajectoire du point M ? Construire sa projection sur le plan xOz.

740. On donne un repère orthonormé $Oxyz$ et dans le plan xOz, l'axe variable OX d'angle polaire $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) = \theta$.

1° Connaissant les coordonnées (X, z) d'un point M du plan XOz par rapport au repère XOz, calculer ses coordonnées (x, y, z) dans le repère $Oxyz$.

2° On désigne par a une constante positive et on suppose $X = a$, $z = a\theta$. Calculer les coordonnées x, y, z de M. Identifier le lieu de M et construire ses projections sur les trois plans de coordonnées.

3° On suppose que $\theta = t$, où t désigne le temps. Étudier l'hodographe, relatif à O, du mouvement du point M.

On mène par le point M la droite parallèle au vecteur $\vec{V}$ (0, 1, −1). Déterminer les coordonnées du point M′ où cette droite coupe le plan xOy. Étudier le mouvement du point M′. Construire sa trajectoire et l'hodographe de ce mouvement.

MOUVEMENT DE TRANSLATION D'UN SOLIDE

505. Définitions. — Rappelons qu'on appelle *système invariable* ou *corps solide* tout ensemble S de points dont les coordonnées par rapport à un repère donné ω XYZ sont constantes.

Si le repère ω XYZ, lié au solide S est mobile par rapport à un repère *Oxyz* supposé fixe, le solide S est lui-même en mouvement par rapport au repère *Oxyz* (fig. 418). Il est clair que la position S du solide au temps t et sa position S_0 au temps t_0 sont deux figures géométriques directement égales qui se correspondent dans un déplacement (transformation géométrique n° 233). Réciproquement :

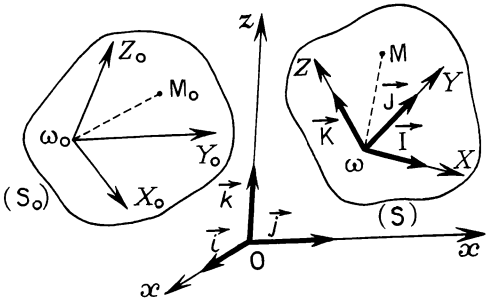


Fig. 418

Un système matériel en mouvement se déplace comme un solide lorsque sa position S ***à tout instant*** t ***se déduit dans un déplacement de sa position*** S_0 ***au temps*** t_0.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que la distance MN de deux points quelconques M et N de S soit invariable. En effet, cela entraîne l'égalité des triangles homologues de S et S_0 et par suite l'égalité des angles, des dièdres orientés homologues.

Pour déterminer la position de S il suffit alors de connaître la position des sommets d'un triangle ABC de S, car cela détermine la position de tout autre point M de S (n° 234).

506. Mouvement de translation. — ***Un solide est animé d'un mouvement de translation si à tout instant*** t ***sa position*** S ***se déduit par translation de sa position*** S_0 ***au temps*** t_0.

Soit *Oxyz* le repère supposé fixe. Désignons (fig. 419) par A et M deux points quelconques de S, par A_0 et M_0 les positions de ces points au temps t_0. D'après la définition il existe un vecteur $\vec{T}$ tel que :

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{A_0A} = \vec{T} \Longrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A_0M_0}. \qquad (1)$$

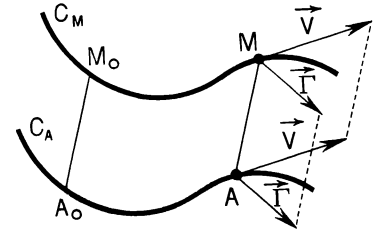


Fig. 419

Tout vecteur $\overrightarrow{AM}$ ***de*** S ***reste équipollent au vecteur*** $\overrightarrow{A_0M_0}$ ***de*** S_0. — Autrement dit tout vecteur du solide S reste équipollent à lui-même. Réciproquement, supposons que le système S vérifie pour toute valeur de t cette condition, on obtient en supposant A donné et M quelconque :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A_0M_0} \Longrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{A_0A}. \qquad (2)$$

Le système S, à chaque instant t, se déduit de S_0 par la translation de vecteur $\vec{T} = \overrightarrow{A_0A}$. Le système S, égal à S_0, est donc un solide animé d'un mouvement de translation.

507. Trajectoires. — ***Dans tout mouvement de translation d'un solide les trajectoires de tous les points sont égales et se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par translation.***

Désignons par C_A la trajectoire du point donné A et par C_M la trajectoire du point quelconque M du solide S. La relation $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A_0M_0}$ montre que C_M est l'homologue de C_A dans la translation de vecteur $\overrightarrow{A_0M_0}$.

On donne le nom de la trajectoire au mouvement de translation. On obtient ainsi un mouvement de translation rectiligne si la trajectoire de tout point est une droite, curviligne si cette trajectoire est une courbe.

508. Vecteur-vitesse et vecteur-accélération. — ***Dans tout mouvement de translation les différents points d'un solide ont à chaque instant même vecteur-vitesse et même vecteur-accélération.***

La relation $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A_0M_0}$ s'écrit $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A_0M_0}$. Le vecteur $\overrightarrow{A_0M_0}$ étant constant, on obtient en dérivant par rapport à t :

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dA}}{dt} + \vec{0} \iff \vec{V}_M = \vec{V}_A$$

$$\frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2} = \frac{\overrightarrow{d^2A}}{dt^2} \iff \vec{\Gamma}_M = \vec{\Gamma}_A.$$

Les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ respectivement équipollents au vecteur-vitesse $\vec{V}_M$ et au vecteur-accélération $\vec{\Gamma}_M$ de tout point M du solide S sont appelés vecteur-vitesse et vecteur-accélération du solide S dans le mouvement de translation.

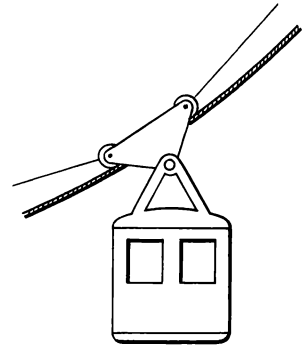


Fig. 420

509. Remarque. — Notons que réciproquement tout système S dont, à chaque instant t, tous les points ont même vecteur-vitesse, ne peut être qu'un solide animé d'un mouvement de translation. En effet, quels que soient A et M :

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dA}}{dt} \implies \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \vec{C} \iff \overrightarrow{AM} = \vec{C} \text{ (vecteur constant).}$$

Pour $t = t_0$, on obtient $\overrightarrow{A_0M_0} = \vec{C} \implies \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A_0M_0} \iff \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{A_0A}$. Le système S se déduit de S_0 par la translation de vecteur $\overrightarrow{A_0A}$ (n° 506).

510. Exemples. — La cabine d'un téléphérique est animée d'un mouvement de translation dont la trajectoire est peu différente du câble porteur (fig. 420). Certaines planchettes de dessinateur sont équipées d'une équerre mobile pouvant effectuer tout mouvement de translation à l'exclusion de tout autre.

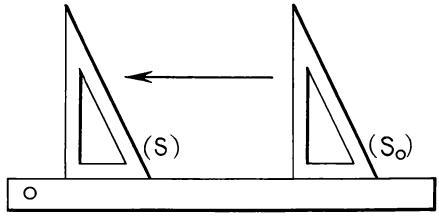


Fig. 421

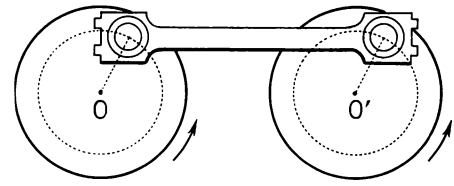


Fig. 422

Lorsqu'un solide S est animé d'un *mouvement de translation rectiligne*, la trajectoire de tout point est une droite de direction définie Δ. Il en est ainsi du mouvement d'un tiroir, d'un ascenseur ou d'une équerre le long d'une règle plate (fig. 421). Toute droite δ du solide S, parallèle à Δ glisse sur elle-même (*glissières du mouvement*) et il en est de même de tout cylindre de S dont les génératrices

sont parallèles à Δ (rainures d'un tiroir, patins et guides de l'ascenseur, arêtes de l'équerre et de la règle, etc.).

La bielle d'accouplement de deux roues ou poulies à axes fixes est animée d'un *mouvement de translation circulaire* (fig. 422). Par contre la bielle d'accouplement des roues motrices d'une locomotive à vapeur est animée d'un mouvement de translation cycloïdal résultant d'une translation circulaire et d'une translation rectiligne.

CHANGEMENT DE REPÈRE

511. Problème du changement de repère. — Supposons connu, en fonction du temps t le mouvement d'un point M par rapport à un repère ω XYZ de vecteurs de base $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ (fig. 423).

Lorsque le repère ω XYZ est lui-même animé d'un mouvement connu, par rapport à un second repère $Oxyz$ de vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, le point M est en général mobile par rapport au repère $Oxyz$ supposé fixe. On appelle :

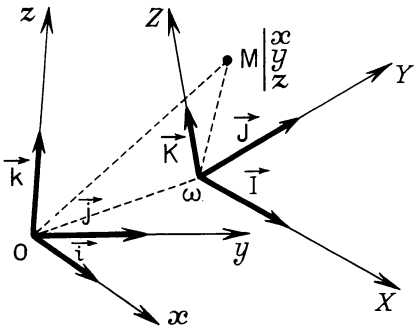


Fig. 423

Mouvement absolu M/$Oxyz$, le mouvement du point M par rapport au repère fixe $Oxyz$.

Mouvement d'entraînement ω XYZ/$Oxyz$, le mouvement du repère mobile ω XYZ par rapport au repère fixe $Oxyz$.

Mouvement relatif M/ω XYZ, le mouvement du point M par rapport au repère mobile ω XYZ.

On dit encore que le mouvement absolu M/$Oxyz$ résulte de la composition du mouvement d'entraînement ω XYZ/$Oxyz$ et du mouvement relatif M/ω XYZ.

512. Équations cartésiennes. — Le mouvement relatif du point M est déterminé par ses coordonnées X, Y, Z dans le repère ω XYZ telles que :

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K} \quad \text{avec} \quad X = f(t), \quad Y = g(t), \quad Z = h(t).$$

Ces relations définissent le lieu du point M dans le repère ω XYZ, c'est-à-dire la *trajectoire relative* du point M.

Le mouvement d'entraînement du repère ω XYZ est déterminé lorsqu'on connaît, en fonction du temps t, dans le repère fixe $Oxyz$, les coordonnées x_0, y_0, z_0, du point ω et les composantes des vecteurs $\vec{I}\,(p, q, r)$, $\vec{J}\,(p', q', r')$ et $\vec{K}\,(p'', q'', r'')$.

Les coordonnées x, y, z du point M dans le repère $Oxyz$ sont données par les formules de changement de repère qui s'obtiennent à partir de la relation :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\omega} + X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K} \qquad (1)$$

par projection sur les axes Ox, Oy, Oz :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + pX + p'Y + p''Z \\ y &= y_0 + qX + q'Y + q''Z \\ z &= z_0 + rX + r'Y + r''Z. \end{aligned} \qquad (2)$$

Les coordonnées $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ainsi obtenues, déterminent dans le repère $Oxyz$ la trajectoire absolue du point M.

513. Composition des vitesses. — *Le vecteur-vitesse du point* M *dans le repère fixe* $Oxyz$ *est son vecteur-vitesse absolue* $\vec{V}_a = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$.

Or la relation : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\omega} + X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$

entraîne :

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{\omega}}{dt} + X\frac{d\vec{I}}{dt} + Y\frac{d\vec{J}}{dt} + Z\frac{d\vec{K}}{dt} + \frac{dX}{dt}\vec{I} + \frac{dY}{dt}\vec{J} + \frac{dZ}{dt}\vec{K} \qquad (3)$$

En posant : $\vec{V}_r = \frac{dX}{dt}\vec{I} + \frac{dY}{dt}\vec{J} + \frac{dZ}{dt}\vec{K}$

et $\vec{V}_e = \frac{d\vec{\omega}}{dt} + X\frac{d\vec{I}}{dt} + Y\frac{d\vec{J}}{dt} + Z\frac{d\vec{K}}{dt}.$

On obtient : $\boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.}$ (4)

Si on suppose le repère ωXYZ fixe, les vecteurs $\overrightarrow{O\omega}$, $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$, sont alors constants et $\vec{V}_a$ se réduit à $\vec{V}_r$.

Le vecteur $\vec{V}_r$ est le vecteur-vitesse relative du point M *par rapport au repère mobile* ωXYZ.

Si on suppose le point M fixe dans le repère ωXYZ, les composantes X, Y, Z de $\overrightarrow{\omega M}$ sont constantes et $\vec{V}_a$ se réduit à $\vec{V}_e$.

Le vecteur $\vec{V}_e$ est le vecteur-vitesse d'entraînement du point M. Ce n'est autre que la vitesse du point *m*, lié au repère ωXYZ, et avec lequel le point M coïncide à l'instant *t* (*point coïncidant*).

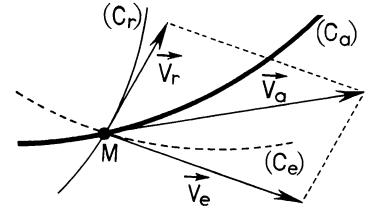


Fig. 424

A tout instant le vecteur-vitesse absolue $\vec{V}_a$ d'un point* M *est la somme de son vecteur-vitesse d'entraînement $\vec{V}_e$ et de son vecteur-vitesse relative $\vec{V}_r$.

Si on désigne par C_a la trajectoire absolue de M, par C_e la trajectoire d'entraînement, c'est-à-dire la trajectoire du point *m* du repère ωXYZ qui coïncide avec M à l'instant *t*, et par C_r la position à l'instant *t* de sa trajectoire relative, les trois vecteurs $\vec{V}_a$, $\vec{V}_e$ et $\vec{V}_r$ sont respectivement tangents en M à ces trois trajectoires (fig. 424).

514. Remarque. — En dérivant la relation (3) du paragraphe précédent, on définit l'accélération absolue $\vec{\Gamma}_a = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}$ du point M. On pourra vérifier que $\vec{\Gamma}_a$ est la somme de trois vecteurs :

$$\vec{\Gamma}_e = \frac{d^2\vec{\omega}}{dt^2} + X\frac{d^2\vec{I}}{dt^2} + Y\frac{d^2\vec{J}}{dt^2} + Z\frac{d^2\vec{K}}{dt^2} \quad (\textit{accélération d'entraînement}).$$

$$\vec{\Gamma}_r = \frac{d^2X}{dt^2}\vec{I} + \frac{d^2Y}{dt^2}\vec{J} + \frac{d^2Z}{dt^2}\vec{K} \quad (\textit{accélération relative}).$$

$$\vec{\Gamma}_c = 2\left(\frac{dX}{dt}\frac{d\vec{I}}{dt} + \frac{dY}{dt}\frac{d\vec{J}}{dt} + \frac{dZ}{dt}\frac{d\vec{K}}{dt}\right) \quad (\textit{accélération complémentaire ou de Coriolis})$$

Les accélérations ne se composent pas, en général, aussi simplement que les vitesses.

515. Mouvement d'entraînement de translation. — Le mouvement d'entraînement $\omega XYZ/Oxyz$ est un mouvement de translation lorsque les vecteurs $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ sont équipollents à des vecteurs fixes du repère *Oxyz*. On peut choisir :

$$\vec{I} = \vec{i}, \quad \vec{J} = \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{K} = \vec{k}.$$

Le mouvement relatif $M/\omega XYZ$ est alors défini par :

$$\overrightarrow{\omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \qquad \text{avec X, Y, Z fonctions de } t.$$

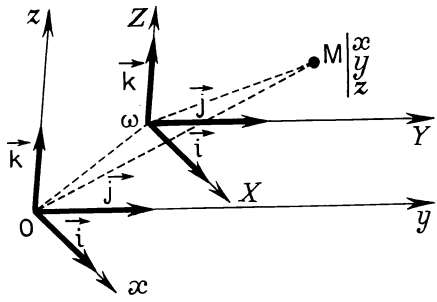


Fig. 425

Le mouvement d'entraînement ω XYZ/O*xyz* est défini par :

$$\overrightarrow{O\omega} = x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} + z_0\,\vec{k}$$

avec x_0, y_0, z_0 fonctions de t.

Le mouvement absolu M/O*xyz* est tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\omega} + \overrightarrow{\omega M}$, soit :

$$\overrightarrow{OM} = (x_0 + X)\,\vec{i} + (y_0 + Y)\,\vec{j} + (z_0 + Z)\,\vec{k}.$$

La vitesse relative $\vec{V}_r$, vitesse de M dans son mouvement par rapport au repère ω XYZ, est égale à $\dfrac{d\,(\overrightarrow{\omega M})}{dt} = X'\,\vec{i} + Y'\,\vec{j} + Z'\,\vec{k}$.

La vitesse d'entraînement $\vec{V}_e$, vitesse du point M supposé fixe dans le repère ω XYZ, est donc égale à : $\dfrac{d\,\overrightarrow{\omega}}{dt} = x_0'\,\vec{i} + y_0'\,\vec{j} + z_0'\,\vec{k}$.

On vérifie que la vitesse absolue : $\vec{V}_a = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\omega}}{dt} + \dfrac{d\,(\overrightarrow{\omega M})}{dt} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$ est la somme de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative de M.

Dans ce cas particulier où le mouvement d'entraînement est une translation, on voit de même que l'accélération absolue $\vec{\Gamma}_a = \dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2}$ est la somme de l'accélération d'entraînement : $\vec{\Gamma}_e = \dfrac{d^2\overrightarrow{\omega}}{dt^2} = x_0''\,\vec{i} + y_0''\,\vec{j} + z_0''\,\vec{k}$ et de l'accélération relative $\vec{\Gamma}_r = \dfrac{d^2\,(\overrightarrow{\omega M})}{dt^2} = X''\,\vec{i} + Y''\,\vec{j} + Z''\,\vec{k}$, ce qui n'a pas lieu en général (n° 514).

516. Remarque. — Si on pose $\overrightarrow{O\omega_1} = \overrightarrow{\omega M} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k}$, on obtient $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\omega} + \overrightarrow{O\omega_1}$ et le mouvement de M résulte de la composition à partir de O, des mouvements de ω et ω_1, tel que cela a été défini au n° 485.

Par suite, si on considère le repère mobile $\omega_1 X_1Y_1Z_1$ de vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, le mouvement de M résulte également du mouvement d'entraînement de translation $\omega_1 X_1Y_1Z_1$/O*xyz* défini par $\overrightarrow{O\omega_1} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k}$ et du mouvement relatif M/$\omega_1 X_1Y_1Z_1$ défini par $\overrightarrow{\omega_1 M} = x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} + z_0\,\vec{k}$.

517. Exemple. — Considérons (fig. 426) dans un repère fixe O*xyz* orthonormé de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le point mobile Q sur Oz tel que $\overrightarrow{OQ} = h\omega t\,\vec{k}$. Dans le repère QXYZ qui se déduit du repère fixe O*xyz* par la translation de vecteur $\overrightarrow{OQ}$, considérons le point mobile M, défini par les composantes de $\overrightarrow{QM}$:

$$X = a\cos\omega t, \quad Y = a\sin\omega t, \quad Z = 0. \quad (1)$$

Le mouvement relatif du point M est un mouvement circulaire uniforme sur le cercle (C) de centre Q et de rayon *a* du plan XQY. Le mouvement d'entraînement du repère ωXYZ est un mouvement de translation rectiligne uniforme défini par $\overrightarrow{OQ} = h\omega t\,\vec{k}$, soit par

$$x_Q = 0\ ; \quad y_Q = 0\ ; \quad z_Q = h\omega t. \quad (2)$$

Le mouvement absolu du point M est donc défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QM}$:

$$x = x_Q + X = a\cos\omega t\ ; \quad y = y_Q + Y = a\sin\omega t\ ; \quad z = z_Q + Z = h\omega t. \quad (3)$$

La trajectoire relative du point M est le cercle (C)

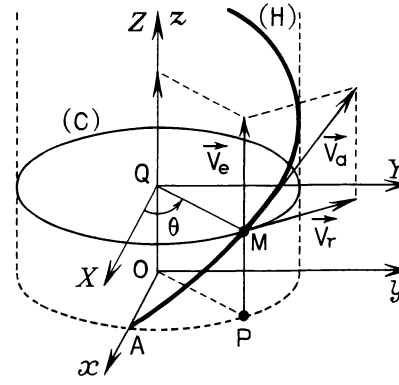


Fig. 426

lié au repère QXYZ. La trajectoire d'entraînement est la droite PM parallèle à Oz. En posant : $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP}) = \omega t$, on voit que la trajectoire absolue est l'hélice (H) :

$$x = a \cos \theta \; ; \quad y = a \sin \theta \; ; \quad z = h\theta. \qquad (4)$$

Comme $\theta' = \dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ est constant, le mouvement du point M est un mouvement hélicoïdal uniforme (n° 501).

On vérifie que la vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}$ tangente en M à (H) :

$$\overrightarrow{V_a} : \qquad x' = -a\omega \sin \omega t \; ; \qquad y' = a\omega \cos \omega t \; ; \qquad z' = h\omega$$

est la somme de la vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$ tangente en M à (C) :

$$\overrightarrow{V_r} : \qquad X' = -a\omega \sin \omega t \; ; \qquad Y' = a\omega \cos \omega t \; ; \qquad Z' = 0$$

et de la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{V_e} = \dfrac{\overrightarrow{dQ}}{dt}$ portée par PM :

$$\overrightarrow{V_e} : \qquad x'_Q = 0 \; ; \qquad y'_Q = 0 \; ; \qquad z'_Q = h\omega.$$

EXERCICES

741. Deux points mobiles P et M décrivent respectivement d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω, un cercle fixe de centre O, de rayon égal à $\sqrt{3}$ et un cercle (mobile) de centre P, de rayon égal à 1. Ces deux cercles sont dans un même plan. A l'origine des temps les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{PM}$ font avec l'axe Ox des angles respectivement égaux à $+\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$.

1° Calculer à une date t quelconque les angles $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})$, $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{PM})$ et $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{PM})$.

2° Montrer que M est animé d'un mouvement circulaire uniforme.

742. 1° Tracer les courbes représentatives des deux fonctions x et y de la variable t :

$$x = \sin t + \cos 2t \qquad \text{et} \qquad y = \cos t + \sin 2t.$$

2° Dans un repère orthonormé, on considère le point M dont les coordonnées $x = \overline{OH}$ et $y = \overline{OK}$ sont données en fonction du temps t par les relations précédentes. Calculer les vecteurs-vitesse et accélération du point M. Calculer à l'instant t la distance OM. Déterminer les positions de M les plus éloignées de O. Quelles sont les valeurs de t pour lesquelles le mobile M passe par O.

3° Montrer que le mouvement de M résulte de la composition des mouvements de P ($x = \cos 2t$; $y = \sin 2t$) et de Q ($x = \sin t$; $y = \cos t$). Nature de ces deux mouvements. Retrouver ainsi les valeurs de t pour lesquelles OM est maximum ou nul.

743. On considère par rapport à un repère orthonormé $Oxyz$, un point mobile M dont les coordonnées en fonction du temps t sont :

$$x = 3(t + \cos 2t) \; ; \quad y = 3(t + \sin 2t) \; ; \quad z = 6t.$$

1° Déterminer les composantes scalaires du vecteur-vitesse. En déduire que l'hodographe relatif à l'origine O est un cercle.

2° Déterminer les composantes du vecteur accélération et la longueur de ce vecteur.

3° Montrer que le mouvement du point M résulte de la composition d'un mouvement circulaire uniforme et d'un mouvement rectiligne uniforme.

744. Un plan mobile P rapporté au repère orthonormé $X\omega Y$ glisse sur le plan fixe du repère orthonormé xOy. Le point ω et les vecteurs de base $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ du repère $X\omega Y$ sont définis en fonction du temps t par :

$$\overrightarrow{O\omega} \begin{cases} x_0 = a \cos t \\ y_0 = a \sin t \end{cases} \qquad \overrightarrow{I} \begin{cases} \cos t \\ -\sin t \end{cases} \qquad \overrightarrow{J} \begin{cases} \sin t \\ \cos t. \end{cases}$$

1° Déterminer les coordonnées x et y du point M défini dans le plan P par ses coordonnées X et Y. En déduire les composantes du vecteur-vitesse $\overrightarrow{V}$ du point M.

2° Montrer qu'il existe à chaque instant t un point R du plan P dont la vitesse est nulle. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{RM}$ en grandeur et en direction.

3° En désignant par α un angle donné, trouver la trajectoire et la nature du mouvement des points du plan P :

$$A\ (X = a\cos 2\alpha,\quad Y = a\sin 2\alpha) \qquad \text{et} \qquad B\ (X = -a\cos 2\alpha,\quad Y = -a\sin 2\alpha).$$

En déduire la trajectoire et le mouvement du point M de la droite AB défini par $X = b\cos 2\alpha$, $Y = b\sin 2\alpha$. Si P et Q désignent les positions de M aux temps $t = \alpha$ et $t = \alpha + \frac{\pi}{2}$, établir que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP}\cos(t-\alpha) + \overrightarrow{OQ}\sin(t-\alpha)$.

745. On considère, dans le plan du repère orthonormé xOy, un axe mobile OX, d'angle polaire $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) = \omega t$ (t est le temps et ω est constant). Cet axe coupe en M le cercle fixe (C) d'équation : $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$.

1° Étudier le mouvement du point M sur le cercle (C), puis sur l'axe mobile OX. Construire géométriquement à l'aide de la composition des vitesses, la vitesse relative de M sur l'axe OX.

2° On porte sur OX, à partir de M dans le sens $\overrightarrow{OX}$ un segment MP de longueur constante a. Construire le vecteur-vitesse du point P dans le plan xOy.

3° Soit I le point diamétralement opposé au point M sur le cercle (C). Montrer que le vecteur-vitesse $\overrightarrow{PP'}$ du point P fait un angle de $+\frac{\pi}{2}$ avec le vecteur $\overrightarrow{IP}$ et que l'on a : $PP' = \omega\,IP$.

746. Dans le plan du repère orthonormé xOy une plaque P glisse d'un mouvement de translation circulaire de telle sorte que le point S décrive le cercle de centre O et de rayon R suivant la loi :

$$x = R\cos\omega t; \qquad y = R\sin\omega t.$$

On rapporte la plaque P au repère XSY se déduisant de xOy dans la translation $\overrightarrow{OS}$.

1° Écrire dans le plan xOy, l'équation de la trajectoire du point M (X, Y) supposé fixe dans le plan P. Nature de cette trajectoire.

2° On considère dans le plan P les deux cercles de centres respectifs I ($X = R\cos\alpha$, $Y = 0$) et J ($X = -R\cos\alpha$, $Y = 0$) et de rayon R et qui se coupent en A et B. Montrer que ces deux cercles passent respectivement chacun par un point fixe C ou D.

3° Établir que le quadrangle ABCD est orthocentrique, que les angles (AC, AD) et (BC, BD) sont constants et donner leurs valeurs en fonction de α.

747. On considère un repère orthonormé fixe $Oxyz$ et un repère mobile OXYZ. L'axe OZ est confondu avec Oz et dans le plan xOy on a : $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) = (\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{OY}) = \theta$. On désigne par t le temps et par R, ω, α des constantes positives données.

1° Un point M, mobile dans le plan XOZ a pour coordonnées :

$$X = R(1 + \cos\alpha\cos\omega t), \quad Y = 0, \quad Z = R\cos\alpha\sin\omega t.$$

Montrer que la trajectoire relative (γ) du point M est un cercle décrit d'un mouvement uniforme. Calculer le vecteur-vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$ de M en fonction des vecteurs de base $\overrightarrow{I}$, $\overrightarrow{J}$, $\overrightarrow{K}$ du repère mobile.

2° L'angle θ varie avec le temps suivant la loi : $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega t}{2}$. Calculer en fonction de α et de ωt, les valeurs de $\cos\theta$, $\sin\theta$ et les composantes de $\overrightarrow{I}$, $\overrightarrow{J}$, $\overrightarrow{K}$ dans le repère fixe. Établir que M a pour coordonnées absolues :

$$x = R(\cos\alpha + \cos\omega t); \quad y = R\sin\alpha\sin\omega t; \quad z = R\cos\alpha\sin\omega t.$$

Montrer que la trajectoire absolue de M est un cercle (C) décrit d'un mouvement uniforme et dont on demande le plan, le centre et le rayon.

3° Calculer les composantes de la vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}$ du point M dans le repère $Oxyz$, puis dans le repère OXYZ. Montrer que la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{V_e}$ a un module constant, que la vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{V_a}$ sur le plan XOZ et que l'angle $(\overrightarrow{V_a}, \overrightarrow{V_r})$ est constant et égal à α.

748. Sur un axe OX situé dans le plan du repère orthonormé xOy se déplace un point mobile M dont l'abscisse sur OX est $r = 2a\cos\omega t$ (t est le temps, a et ω sont des constantes données).

1° On suppose OX fixe. Décrire le mouvement du point M (vitesse, accélération, allure du mouvement).

2° On suppose maintenant que l'axe OX tourne autour de O dans le plan xOy suivant la loi : $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) = \omega t$. Le mouvement décrit dans le 1° devient alors un mouvement relatif. Construire le vecteur-vitesse du point M et montrer que son support forme avec OX et Oy un triangle isocèle de sommet O.

3° Calculer les coordonnées de M en fonction de t. En déduire le mouvement absolu de M et sa trajectoire absolue. De quelle façon cette trajectoire est-elle décrite par M ?

4° Que peut-on dire du mouvement absolu de M si la loi du mouvement de OX est remplacée par $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) = \omega t + \alpha$ (α constante donnée) ?

749. On donne un repère orthonormé fixe xOy et un segment AB de longueur constante $2a$ de milieu ω. L'extrémité A décrit Ox, l'extrémité B décrit Oy. On considère le repère orthonormé mobile $X\omega Y$, l'axe ω X admettant comme vecteur directeur $\overrightarrow{\omega A}$ et où l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{O\omega}) = t$ désigne le temps.

1° Un point M étant donné par ses coordonnées relatives X, Y dans le repère ω XY, calculer ses coordonnées absolues x et y dans le repère xOy. (On commencera par exprimer les vecteurs de base $\vec{I}$ et $\vec{J}$ du repère mobile en fonction des vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ du repère fixe.) Réciproquement trouver X et Y en fonction de x et y.

2° Le point M étant mobile dans le repère ω XY, déterminer les composantes de sa vitesse absolue dans le repère ω XY.

3° Montrer qu'il existe à chaque instant un point I lié au repère ω XY et un seul dont la vitesse absolue est nulle. Déterminer ses coordonnées X, Y et x, y. Caractériser l'ensemble (C) des positions de I dans le repère x XY, puis l'ensemble (C_1) des positions de I dans le repère fixe Oxy. Soient A et A_1 les positions de I au temps $t = 0$. Comparer les arcs $\overset{\frown}{AI}$ et $\overset{\frown}{A_1I}$ sur (C) et (C_1) et en déduire que la courbe (C) roule sans glisser sur (C_1).

750. On considère un repère orthonormé fixe Oxy et le repère mobile ω XY qui s'en déduit par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$ de composantes :

$$x_0 = a \cos t ; \quad y_0 = a \sin t \quad (t \text{ varie de } 0 \text{ à } 2\pi).$$

Un point variable M a pour coordonnées dans le repère mobile :

$$X = at \sin t ; \qquad Y = -at \cos t.$$

1° Quelle est la trajectoire (γ) du point ω ? Soit A la position de ω au temps $t = 0$. Comparer l'arc $\overset{\frown}{A\omega}$ décrit par ω au temps t à la longueur ωM. Que représente la droite ωM pour la courbe (γ) ?

2° Calculer les coordonnées du point M dans le repère Oxy et les composantes de son vecteur vitesse absolue $\overrightarrow{MR}$. Comparer en grandeur et direction les vecteurs $\overrightarrow{\omega M}$ et $\overrightarrow{MR}$. Que représente ωM pour la trajectoire absolue (C) du point M ?

3° Calculer les composantes du vecteur accélération $\overrightarrow{MJ}$ du point M, les coordonnées de J et enfin le lieu du point J lorsque t varie de 0 à 2π.

PROBLÈMES DE RÉVISION

751. Soient deux droites D et D′, concourantes en O, un point A sur (D) et un point A′ sur (D′).

1° Déterminer les rotations qui font correspondre les droites (D) et (D′), les points A et A′ étant homologues ; on appellera ω et ω' les centres de ces rotations.

2° Les droites (D), (D′) et le point A sont fixes, le point A′ se déplace sur (D′). Quel est le lieu des points ω, ω' ?

3° La droite (D) et le point A restent fixes, mais la droite (D′) pivote autour de O, la longueur OA′ restant constante. A chaque position de (D′) correspondent deux centres de rotation ω, ω' (1re question). Déterminer les deux points de la droite (D) qui ont pour homologue le point O dans les rotations de centres ω et ω'. En déduire les lieux de ces points ω et ω'.

752. On donne dans un plan P deux points fixes A et A′. On pose $AA' = d$.

1° Lieu géométrique des points M du plan tels que l'angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{MA'}$ et $\overrightarrow{MA}$ soit constant. Ce lieu est en général un arc de cercle (Σ).

2° Lieu géométrique des points M du plan tels que le rapport $\frac{MA'}{MA} = \lambda$ soit constant. Ce lieu est en général un cercle (Γ), dont on calculera le rayon en fonction de d et du rapport λ. Montrer que le cercle (Γ) et l'arc (Σ) sont orthogonaux.

3° Par un point M donné du plan passent, en général, un arc de cercle (Σ) et un cercle (Γ). On fait correspondre au point M le point M′ *situé sur* (Σ) et tel que $\frac{M'A'}{M'A} = \frac{MA'}{MA} \times k$, k désignant un nombre positif donné différent de 1. Soit (T) la transformation ponctuelle ainsi définie.

Connaissant M, déterminer M′. Examiner le cas où M est situé sur la droite AA′. Vérifier que les points doubles de la transformation (T) sont les points A et A′.

4° Pour étudier la transformation (T) on vous propose d'effectuer l'inversion de pôle A et de puissance $\overrightarrow{AA'}^2$. Montrer que les cercles (Γ) et (Γ') qui passent respectivement par M et M′ ont pour inverses deux cercles (γ) et (γ') de centre A′. Calculer les rayons des cercles (Γ) et (Γ') en fonction de d, de $\frac{MA'}{MA} = \lambda$ et de k. En déduire que le rapport des rayons des cercles (γ') et (γ) est constant et égal à k.

Placer les inverses m et m' des points M et M′ et dire qu'elle est la transformation ponctuelle simple qui les fait correspondre. Lieu géométrique du point M′ lorsque M décrit un cercle donné (C) du plan P.

753. On considère les deux droites joignant un point fixe O à deux points A et A′ variables sur une droite (D) ne passant pas par O, ces deux points restant homologues dans une inversion donnée de pôle I (sur D), de puissance k. On coupe ces deux droites par une droite quelconque (Δ) ou un cercle (C) passant par O et on se propose d'étudier la correspondance entre les deux points M et M′ ainsi obtenus.

1° Si $k > 0$, montrer que les deux droites OA, OA′ restent conjuguées harmoniques par rapport à deux droites fixes. En conclure que sur (Δ), M et M′ se correspondent aussi par inversion. Cas particulier ?

Dans la suite k est quelconque.

2° On considère un cercle (C_0) dont la tangente en O est parallèle à (D). Montrer que la droite $M_0M'_0$ passe par un point fixe. [On pourra faire l'inversion de pôle O qui échange (C_0) et (D).]

3° Un cercle (C) quelconque coupe (C_0) en O et ω. Déduire de l'étude du triangle ωM_0M la correspondance entre M_0 et M. En conclure que la droite MM′ passe aussi par un point fixe.

4° Montrer que les points M et M′ sur (Δ) se correspondent par inversion, quel que soit le signe de k. [On pourra introduire un cercle (C) dont la tangente en O est parallèle à (Δ).]

754. Soient dans un plan un repère orthonormé xOy, et A le point de Ox d'abscisse positive donnée a.

A tout point M du plan, on fait correspondre le point M′ défini par la condition que la similitude de centre O qui transforme M en A transforme A en M′ (ce qui revient, en général, à dire que les triangles OMA et OAM′ sont directement semblables).

1° *a*) Montrer que a est moyenne proportionnelle entre les longueurs OM et OM′. Montrer qu'on peut transformer M en M′ par le produit d'une inversion et d'une symétrie par rapport à une droite, l'ordre dans lequel sont effectuées ces deux transformations étant indifférent.

b) Lieu de M′ quand M décrit l'une des lignes suivantes : une droite Δ passant par O ; un cercle (Ω) passant par O et A ; un cercle (Φ) centré sur $x'Ox$ et orthogonal au cercle de centre O et de rayon a.

c) Calculer les coordonnées x', y' de M′, connaissant a et les coordonnées x, y de M.

2° *a*) Démontrer que le cercle OMA est tangent à M′A et le cercle OM′A à MA ; I et I′ étant les milieux de AM et AM′, démontrer que A, I, O, I′ sont sur un même cercle (Γ).

b) (Γ) coupe $y'Oy$ en O et B (qui peuvent être confondus). Démontrer que B est le centre du cercle MAM′. Calculer l'ordonnée b de B en fonction de a et des coordonnées x, y de M.

c) MM′ étant supposé non parallèle à $y'Oy$, soient K le milieu de MM′ et C le point où la droite MM′ coupe $y'Oy$. Démontrer que $x'Ox$ est la polaire de C par rapport au cercle AMM′. Démontrer que B, C, A, K sont sur un même cercle.

d) Construire les points M et M′, connaissant la droite (D) qui les porte.

e) Lieux de M et M′ quand K décrit le cercle de centre O et de rayon a.

755. 1° On donne un triangle OAB fixe quelconque.

a) Montrer qu'à tout point P du plan de ce triangle on peut associer un couple de nombres (x, y) et un seul satisfaisant à $\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB}$.

b) On désigne par λ un nombre quelconque. Soit P le point de la droite AB défini par $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BA}$. Mettre $\overrightarrow{OP}$ sous la forme $\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB}$, x et y étant exprimés au moyen de λ.

Comment faut-il choisir λ pour que P soit entre A et B ? Quelle relation faut-il imposer aux nombres λ et λ′ pour que les points P et P′ correspondants soient conjugués harmoniques par rapport à A et B ?

c) Quel est le lieu du point P défini par $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\,\overrightarrow{OB}$ quand λ varie de $-\infty$ à $+\infty$?

d) On suppose qu'il existe deux axes perpendiculaires $x'Ox$, $y'Oy$, tels que $\overrightarrow{OA}$ soit porté par $x'Ox$ et $\overrightarrow{OB}$ par $y'Oy$ et l'on pose $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$. Exprimer, dans ce cas, en fonction de a, b, λ, les coordonnées du point P défini par $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\,\overrightarrow{OB}$. Retrouver ainsi, dans ce cas particulier, le lieu demandé à la question précédente, grâce à son équation.

2° Revenant au cas général et λ désignant toujours un nombre quelconque, on définit un point M de la droite OA et un point N de la droite OB par les relations $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{ON} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OB}$; on désigne par D_λ la droite MN. Les éléments relatifs à un autre nombre λ′ seront désignés par M′, N′ et $D_{\lambda'}$.

a) Existe-t-il des valeurs de λ pour lesquelles D_λ soit confondue avec un des côtés du triangle ? Deux droites D_λ et $D_{\lambda'}$ peuvent-elles être parallèles ? Quelles relations (R) doivent vérifier λ et λ′ pour que la division (OAMM′) soit harmonique ? Montrer par le calcul que la division (OBNN′) est alors harmonique.

Montrer que les points P et P′ définis par $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{ON'}$ sont sur la droite AB. Lorsque λ et λ′ vérifient la relation (R), que peut-on dire de la division (ABPP′) ? Retrouver ainsi la propriété relative aux divisions (OAMM′) et (OBNN′).

b) On suppose que μ est un nombre quelconque et l'on désigne par Q le point de D_λ défini par $\overrightarrow{NQ} = \mu\overrightarrow{NM}$. Mettre $\overrightarrow{OQ}$ sous la forme $\overrightarrow{OQ} = u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB}$, u et v étant exprimés en fonction de λ et μ. A quelle condition doivent satisfaire λ et μ pour que Q soit sur la droite AB ? u étant donné, peut-on déterminer λ et μ de manière que $\overrightarrow{OQ} = u\overrightarrow{OA} + (1 - u)\,\overrightarrow{OB}$? Discuter. Montrer que le calcul précédent permet de déterminer les droites D_λ passant par un point donné S de la droite AB. Discuter le nombre de solutions selon la position de S par rapport à A et B.

c) Q désignant toujours le point de D_λ défini par $\overrightarrow{NQ} = \lambda\overrightarrow{NM}$, on demande le lieu du point Q quand, μ étant fixe, λ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Déterminer le lieu du point de rencontre des droites D_λ et D_μ quand λ et μ sont liés par la relation $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 2$ et que λ prend toutes les valeurs compatibles avec cette relation.

756. Soient deux droites perpendiculaires D et D′ sécantes en O, un point A fixe sur D, une droite Δ fixe passant par A. On désignera par α l'angle orienté des droites (D, Δ). Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, Δ coupe D′ en B′ ; la perpendiculaire en B′ à Δ coupe D en A′. Soit B le symétrique de B′ par rapport à O. Un point M décrit Δ. Soit P sa projection sur D.

1° Montrer que les triangles AA′M et ABP sont semblables. Préciser le centre, l'angle et le rapport de la similitude qui les fait correspondre.

2° Q étant l'intersection de MA′ et BP, quel est le lieu de Q ?

3° La droite B′P coupe MA′ en Q′. Montrer que la division A′MQQ′ est harmonique.

4° Soient (C) et (C′) les cercles de centres C et C′ respectivement circonscrits aux triangles AA′M et ABP. Quel est l'angle de leurs tangentes en A ? Montrer que le triangle ACC′ reste semblable à lui-même. Quel est le lieu du deuxième point commun aux deux cercles ?

5° On suppose dans cette question que $\alpha = \frac{\pi}{2}$; on appelle A'_1 le symétrique de A par rapport à O. La droite MA'_1 recoupe en Q_1 le cercle de diamètre AA'_1. Soient Q'_1 le conjugué de Q_1 par rapport à A'_1 et M, H sa projection sur D. Trouver une relation entre HQ'_1, HA, HA'_1. En déduire le lieu de Q'_1 quand M décrit D.

757. On considère un repère orthonormé xOy. Soient C le point de Ox d'abscisse $\overline{OC} = 2a$ (a positif donné), A le milieu de OC et (C) le cercle de centre C et de rayon a. Soit M un point quelconque de (C), on pose : $(\vec{Cx}, \vec{CM}) = \theta$ et $(\vec{Ox}, \vec{OM}) = \alpha$.

1° Calculer les coordonnées, x et y, de M en fonction de a et de θ. Calculer tg α en fonction de θ. Écrire l'équation qui détermine tg $\theta/2$ lorsque α a une valeur donnée. Résoudre et discuter cette équation. Contrôler sur la figure le résultat de la discussion.

2° La droite OM recoupe (C) en N. On considère le cercle (U) du plan xOy passant par M et N et orthogonal à (C). Construire son centre, U. Déterminer avec précision le lieu géométrique de U lorsque le point M décrit le cercle (C). On appelle P et Q les points où la polaire de O par rapport à (C) coupe le cercle (U). Montrer que P et Q divisent harmoniquement un segment fixe, IJ, de cette polaire.

3° Démontrer que le cercle (V) circonscrit au triangle OMC et le cercle (W) circonscrit au triangle ONC sont égaux.

4° On effectue l'inversion de pôle A et de puissance a^2. Préciser les transformés des cercles (C), (U), (V) et (W). En déduire que le cercle (U) coupe les cercles (V) et (W) sous le même angle.

758. On donne deux droites perpendiculaires, Ox et Oy, et, sur Ox. deux points fixes, P et P', de part et d'autre de O et non symétriques par rapport à O. Un point I variable du plan xOy est équidistant de P et P'. La droite IP coupe Oy en A et la droite IP' coupe Oy en A'.

1° On considère les cercles circonscrits aux triangles POA et P'OA', de centres C et C'. Nature du quadrilatère OCIC'. Montrer que l'un des centres d'homothétie des deux cercles est fixe. Trouver le lieu géométrique de l'autre.

2° Ces deux cercles se coupent en O et M. Lieu géométrique de M ?

3° Montrer que les quatre points I, A, A', M sont sur un cercle qui reste tangent à une droite fixe et à un cercle fixe déjà mis en évidence.

4° Montrer que la droite IM passe par un point fixe.

759. On considère dans un plan un point fixe O et l'on envisage tous les cercles C tels que la puissance du point O par rapport à chacun d'eux soit égale à a^2 (a étant une longueur fixe). On désignera par P le centre d'un cercle C quelconque.

1° Démontrer que, lorsque P varie dans le plan, le cercle C reste orthogonal à un cercle fixe. Dans quelle région du plan peut varier le point P ?

2° On considère un cercle fixe Γ passant par O et de centre A. Démontrer que, si les cercles C sont tangents au cercle Γ, ils sont aussi tangents à une droite fixe. En déduire le lieu des centres des cercles C dans ce cas.

3° Démontrer que, lorsque la droite Δ, axe radical de C et de Γ, passe par un point fixe Q, le point P correspondant décrit une droite fixe D.

4° Lieu du point Q pour que la droite D soit tangente au cercle Γ.

760. Une droite fixe, xy, partage le plan en deux demi-plans, (Π_1) et (Π_2). Dans tout le problème, A et B désignent deux points du plan, symétriques par rapport à xy, A appartenant à (Π_1), B appartenant à (Π_2). O est le milieu de AB.

a) Les points A et B sont supposés fixes ; la longueur AB est égale à $2a$. On désigne par k un nombre positif différent de 1.

1° Montrer que le lieu des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = k$ est un cercle, dont on déterminera le rayon et le centre. On désigne ce cercle par (C_k).

2° A toute valeur de k correspond un cercle (C_k). Montrer que les cercles (C_k) appartiennent à un faisceau. Montrer que le transformé d'un cercle (C_{k_1}) par l'inversion de pôle O et de puissance $-a^2$ est un cercle (C_{k_2}). Calculer k_2 en fonction de k_1.

3° Construire le cercle (C_k) passant par un point donné, P, du plan.

b) Dans ce qui suit, les points A et B ne sont plus donnés. On considère, dans le demi-plan (Π_1), un cercle (Ω), de centre ω et de rayon R. On désigne par d la distance du point ω à la droite xy.

Construire les points A et B et calculer k pour que, relativement à ces points, le cercle (Ω) coïncide avec le cercle (C_k). Quelle relation doit-il exister entre R et d pour que $k = \frac{1}{2}$? Calculer, dans ce cas, OA et OB en fonction de d.

c) Quel est le lieu des centres, ω, des cercles $(C_{1/2})$ passant par un point donné S du demi-plan Π_1 ? Construire les cercles $(C_{1/2})$ passant par S et dont les centres, ω, appartiennent à une droite donnée (Δ) perpendiculaire à xy. Discuter.

2° O est fixe dans cette question. Montrer que les cercles $(C_{1/2})$ sont tangents à deux droites fixes. Construire les cercles $(C_{1/2})$ tangents à une droite (D) donnée. Discuter.

3° O décrivant la droite fixe xy, trouver le lieu des centres, ω, des cercles $(C_{1/2})$ tangents à une droite (D) donnée. Quel est le lieu des points A et B correspondants ?

761. On considère dans un plan deux points fixes A et B et un point variable M. La perpendiculaire en A à MA et la perpendiculaire en B à MB se coupent en un point M′, que l'on appellera l'*associé* du point M.

1° La construction de l'associé M′ du point M est-elle possible quelle que soit la position de M ? Quel est le lieu de l'associé M′ du point M lorsque ce dernier décrit : *a*) une droite passant par A (ou par B) ; *b*) une droite perpendiculaire à AB ? Les droites MA et M′B se coupent en P. Quel est l'associé P′ du point P ?

2° Quel est le lieu de l'associé M′ du point M lorsque ce dernier décrit un cercle (C) passant par A et B ? Soient I le pôle de la droite AB par rapport à (C) et S le point d'intersection des droites MM′ et AB. Quelle est la polaire de S par rapport à (C) ?

Sur quelle courbe se déplacent les points P et P′ définis au 1° lorsque M décrit (C) ? Préciser la position de cette courbe par rapport à (C).

3° On considère deux cercles orthogonaux, (C) et (C′), se coupant en A et B. Soit P un point variable de (C′). Les droites PA et PB recoupent respectivement le cercle (C) en M et M′. Quelle est la position de la droite MM′ par rapport à (C) ? Lieu de l'orthocentre du triangle PMM′ quand P décrit (C′) ?

4° On reprend les hypothèses et les notations du 2° et l'on considère l'inversion de pôle I qui conserve le cercle (C). Quel est l'inverse (Γ) de la droite AB ? Quel est le rôle de (Γ) dans chacun des quatre triangles ayant pour sommets trois des quatre points M, M′, P, P′ ? Quels sont les lieux des centres des cercles circonscrits à ces quatre triangles lorsque M décrit (C) ?

762. On donne un cercle (C) de centre O et de rayon R, un diamètre fixe AB de ce cercle, et une droite (D) perpendiculaire à AB en un point H situé du même côté de O que B, distinct de B, et tel que $OH = d$. Un point M décrit la droite (D). Les droites MA et MB recoupent le cercle respectivement en P et Q.

1° Montrer que le cercle (Γ) circonscrit au triangle MPQ est orthogonal au cercle (C). (On pourra utiliser une inversion de pôle M). Déterminer le lieu de son centre.

2° Montrer que la droite PQ passe par un point fixe S, dont on précisera la position par rapport à (C) et (D). Trouver le lieu géométrique du deuxième point d'intersection N du cercle (Γ) et du cercle circonscrit au triangle MAB.

763. On donne dans un plan (P) deux points fixes A et A′ et le milieu O de AA′ ($OA = OA' = a$).

1° On fait passer par A deux droites rectangulaires (Δ) et (Δ′). Construire un cercle (Γ) passant par A′ et tangent à (Δ) et (Δ′). Trouver, quand (Δ) et (Δ′) varient le lieu du centre de (Γ) et les lieux des points de contact M et M′ de (Γ) avec (Δ) et (Δ′).

2° On fait passer par A et A′ deux cercles orthogonaux (C) et (C′) de centres ω et ω'. On pose : $\omega\omega' = d$. On désigne par N et N′ les points de contact de (C) et (C′) avec une tangente commune (D). Trouver les lieux des points N et N′ quand (C) et (C′) varient en restant orthogonaux ; montrer que $\overline{NN'}^2 = 2\,ad$.

764. On donne un cercle (C), de centre O, et une corde fixe, AB, de ce cercle. On désigne par I le milieu de AB (on suppose que I et O sont distincts). Soit M un point variable de (C) ; la tangente en M au cercle (C) coupe la droite AB en T.

1° Montrer que la polaire, t, de T par rapport au cercle (C) passe par un point fixe, J, et que le cercle (ω) de diamètre JT est orthogonal à (C). Le point M décrivant le cercle (C), montrer que les cercles (ω) appartiennent à un faisceau, dont on précisera les points de base.

2° Quel est le lieu du point T′, transformé de T par l'inversion de pôle J, de puissance JA^2 ? Transformer par cette inversion le cercle (ω) et la droite MT.

3° Soit K le centre du cercle inverse de la droite MT. Quel est le lieu de K ? Soient α le milieu de JO, $y'\alpha y$ un axe porté par JO et de même sens que JO, $x'\alpha x$ un axe tel que le repère $x'\alpha x$, $y'\alpha y$ soit direct et orthonormé. Écrire l'équation du lieu de K par rapport à ce repère. On désignera par R le rayon de (C) et par kR ($k > 1$) la longueur OJ. Déterminer la polaire, t', du point T′ par rapport au cercle (C) ?

4° Dans cette question, on suppose que $k = 2$. Déterminer les lieux : *a*) de l'orthocentre, H, du triangle MAB ; *b*) du pied, H′, de la polaire, h de H par rapport au cercle (C).

765. On considère un repère orthonormé xOy ; on donne en outre la droite (D) parallèle à Ox et rencontrant Oy en B, tel que $\overline{OB} = 2$ R (R est une longueur positive donnée).

On appelle (M) un cercle tangent à la fois à Ox et à (D) et dont le centre, M, n'est pas sur Oy ; on appelle (P) le cercle inverse du cercle (M) dans l'inversion de pôle O et de puissance $4\,R^2$: on dit alors que le cercle (P) est le *cercle associé* au cercle (M). On notera P le centre du cercle (P).

1° Montrer que, lorsque (M) varie, son cercle associé (P) reste tangent à la fois à Ox et à un cercle fixe, (Γ), que l'on précisera. En déduire :

a) une construction simple du cercle (P) associé à un cercle (M) donné ;
b) les cercles (M) qui coïncident avec leur cercle associé ;
c) le lieu du centre, P, du cercle (P) lorsque (M) varie.

2° Quel est le lieu des points communs, lorsqu'ils existent, à un cercle (M) et à son cercle associé ? Construire les cercles (M) qui sont tangents à leur associé ; construire leurs cercles associés.

3° Quel est le lieu du pied, H, de la polaire de O par rapport au cercle (P) lorsque le cercle (M) varie ? En déduire que cette polaire passe par un point fixe, que l'on précisera.

4° On désigne par (O) le cercle de centre O de rayon 2 R. Montrer qu'il existe un point K ayant même puissance par rapport au cercle (O), au cercle (Γ), au cercle (M) et à son cercle associé (P). Montrer que, lorsque (M) varie, la perpendiculaire en K à l'axe radical des cercles (M) et (P) passe par un point fixe F.

766. On considère un cercle (O), de rayon R, et une droite (D), extérieure à ce cercle, à la distance OB = *d* du centre. Soit A le point du cercle le plus éloigné de la droite.

1° Montrer qu'il existe un cercle (C), de centre A, ayant avec le cercle (O) la droite (D) pour axe radical. Calculer son rayon.

2° Soient P un point quelconque du cercle (C), PH la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite (D). Montrer que la puissance du point P par rapport au cercle (O) égale 2 R.PH.

3° On fait une inversion de pôle P. Montrer que les figures inverses de la droite (D) et du cercle (O) sont deux cercles égaux, (D′) et (O′).

4° Chercher, dans l'inversion précédente, l'inverse du cercle (C) et montrer que c'est la médiatrice du segment qui joint les centres des cercles (D′) et (O′).

767. On donne un cercle (O) de centre O et de rayon R, et une droite sécante (D) parallèle à l'un de ses diamètres, AB. S étant un point quelconque de (D), les droites SA et SB recoupent en A′ et B′ le cercle (O).

1° En utilisant l'inversion de pôle S et de puissance convenablement choisie, montrer que le cercle (O) est orthogonal au cercle (M) circonscrit à SA′B′ et que ce dernier reste tangent à (D) quand S varie.

2° Montrer que le cercle (F) tangent à AB en O et appartenant au faisceau défini par (O) et (D) est tangent au cercle (M). Lieu (P) du centre M du cercle (M) quand S varie sur (D).

3° OS recoupe (F) en T et coupe A′B′ en N. Montrer que A′B′ et la tangente en T à (F) se coupent en un point, I, sur (D). Rôle du point I pour les trois cercles (M), (F) et (O) ? Que peut-on en conclure pour les droites A′B′ et ST relativement au cercle (M) ? Montrer que la division (ONTS) est harmonique.

4° On suppose maintenant que (D) est tangente à (O) et on appelle C le point de contact. Que devient le cercle (F) ? La droite CN le recoupe en U ; les droites CT et OU se coupent en H. La droite NH rencontre OC en N′. Démontrer que NH est perpendiculaire à OC et que H est le milieu de NN′. Montrer que le cercle de diamètre NH est orthogonal à (F).

768. On considère dans le plan deux points, A, B, et l'on marque sur la droite qu'ils déterminent, entre A et B, un point C ; soient (*a*), (*b*), (*c*) les demi-cercles décrits respectivement sur BC, CA, AB comme diamètres et situés tous les trois d'un côté donné de la droite AB.

1° En transformant la figure par l'inversion J_a de pôle A qui conserve le demi-cercle (*a*), montrer qu'il existe un cercle (Γ), et un seul, tangent à la fois aux trois demi-cercles (*a*), (*b*), (*c*). Trouver le lieu du centre α du transformé de (Γ) dans cette inversion, quand le point C décrit le segment AB.

De même, considérant l'inversion J_b de pôle B qui conserve le cercle (*b*), trouver le lieu du centre β du transformé de (Γ) dans cette inversion, quand le point C décrit le segment AB, et donner une construction géométrique du centre, I, du cercle (Γ).

A l'aide d'une troisième inversion analogue aux deux précédentes, montrer que la droite IC passe constamment par un point fixe, γ, qu'on précisera.

2° On prend pour axe des abscisses la droite AB orientée de A vers B et pour axe des ordonnées la médiatrice du segment AB, orientée de manière que les points de (*a*), (*b*) et (*c*) aient des ordonnées positives ; soit O le milieu du segment AB ; on pose AB = 2 R, $\overline{OC} = x$. Calculer en fonction de R et x les coordonnées des points α et β, puis les coordonnées X et Y du point I.

769. On donne un carré ABDC (les vecteurs AB et CD étant équipollents) et le cercle (O) de diamètre AB et de centre O (dans le plan du carré). Un point variable, M, défini par l'angle (OB, OM) = θ, se déplace sur (O) ; MC et MD recoupent AB en P et Q ; les parallèles à AC menées par P et Q coupent MA et MB respectivement en R et S.

1° Quelle est la nature du quadrilatère PQSR ?

Étudier les variations de son périmètre en fonction de θ, quand M décrit (O). Discuter l'existence des quadrilatères PQSR de périmètre donné, *l*, connaissant le côté, *a*, de ABDC.

2° MA et MB coupent CD en A′ et B′ respectivement. Montrer que $\overline{DB'} \cdot \overline{CA'} = -a^2$, puis que $\overline{AP} \cdot \overline{QB} = PQ^2$. Cette dernière relation permet-elle de trouver le rayon du cercle de diamètre PQ, connaissant la distance, *u*, de son centre au point O ?

3° Montrer que le milieu, I, de RS est sur OM et établir une relation indépendante de θ entre ses distances au point O et à la droite AB. En déduire que le lieu de I est une conique de foyer O, dont on précisera la directrice et l'excentricité.

770. On donne une demi-droite Ax, un point B de cette demi-droite tel que $AB = a$ (a longueur donnée). Dans le plan orienté deux demi-droites perpendiculaires Au, Av, telles que $(Au, Av) = \frac{\pi}{2}$. pivotent autour de A.

1° La demi-droite Au étant placée, construire le carré AMNP ayant le sommet M sur Au, le sommet P sur Av et tel que $\overline{AN}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BP}^2$ (on montrera que BN doit être perpendiculaire à AB). Lieux du centre I du carré et des sommets M et P quand Au varie autour de A.

2° Le carré AMNP n'est plus soumis à la condition ci-dessus : $\overline{AN}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BP}^2$, mais à cette autre : $\overline{BM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{BP}^2 = 9\,a^2$; résoudre alors les deux questions proposées au n° 1. (On montrera que $\overline{BM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{BP}^2$ s'exprime en fonction de IO et de a, O étant le milieu de AB).

3° On remplace la condition précédente par : $\overline{BM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{BP}^2 = ka^2$, k étant une constante donnée ; déterminer les lieux du centre t et des sommets M, N, P du carré.

771. Étant donnés un cercle (C) de centre O, de rayon R et une droite D de son plan, à une distance $OH = 2\,R$ du centre, on appelle (γ) tout cercle tangent à D et orthogonal à (C).

1° Construire un cercle (γ) de rayon donné r. Discuter.

2° Construire un cercle (γ) passant par un point A donné de (C). Discuter.

3° Construire un cercle (γ) tangent à D en un point B. Que devient la solution si B s'éloigne indéfiniment sur D ?

4° B décrivant la droite D, trouver l'enveloppe des cercles (γ) et le lieu de leur centre.

5° Construire le cercle γ' inverse d'un cercle γ dans l'une des inversions qui font se correspondre D et (C). Retrouver, grâce à cette inversion, l'enveloppe des cercles (γ) du 4°.

772. On donne un cercle (O) de centre O et un point F intérieur. Soient (M) les cercles de centre M passant par F et tangents en I au cercle (O) ; FI recoupe (O) en I_1 et K est la projection de F sur la tangente en I_1 à O.

1° Démontrer : *a*) sans utiliser l'inversion, *b*) en utilisant une certaine inversion de pôle F, que OI_1 est parallèle à MF et que $2\,\overline{FK} \times \overline{FM} = \overline{FI} \times \overline{FI_1}$.

2° Soit T le pôle de FI par rapport au cercle (M) ; on désigne par (T) le cercle de centre T et de rayon TF. Y a-t-il un deuxième cercle (M) auquel corresponde le même cercle (T) ? Démontrer : *a*) sans utiliser l'inversion, *b*) en utilisant la même inversion que précédemment, que les cercles (T) appartiennent à un faisceau de cercles quand le cercle (M) varie.

3° Le lieu de M est une ellipse (Σ) dont on précisera les éléments : foyers et directrices.

4° Le cercle de centre I_1 passant par F recoupe (T) en E, les droites MT et OI_1 se coupent en E_1 démontrer que : *a*) E, F et E_1 sont alignés ; *b*) I, T, E, I_1, E_1 sont sur un même cercle.

773. On considère un segment BC et un point A non situé sur la droite BC. Un point M varie sur le segment $\overline{BC}$ et l'on porte sur BA, dans le sens $\overrightarrow{BA}$, une longueur $BN = BM$, sur CA, dans le sens $\overrightarrow{CA}$, une longueur $CP = CM$.

1° Montrer que lorsque M varie, l'angle NMP reste constant et que le centre F du cercle circonscrit au triangle NMP est un point fixe.

2° Démontrer que les quatre points A, N, P, F sont sur un même cercle et trouver le lieu du centre de ce cercle lorsque M décrit le segment BC.

3° En déduire les positions des points M, N, P pour lesquelles le segment NP a une longueur minimum.

774. On considère une demi-circonférence (C) de diamètre $AB = 2\,a$. Un point M décrit le segment AB. On trace, à l'intérieur de (C) les demi-circonférences de diamètres MA et MB ; on mène leur tangente commune extérieure, qui les touche en α et β respectivement.

1° Démontrer que les droites $A\alpha$ et $B\beta$ se rencontrent en un point P situé sur (C). Lieu du milieu Q du segment $\alpha\beta$.

2° On trace la circonférence de diamètre PM, qui rencontre (C) en P et R. Démontrer que les droites PR et $\alpha\beta$ se rencontrent sur la droite AB.

3° On trace le cercle de centre P et de rayon PM. Quel est l'axe radical de ce cercle et de (C) ?

4° On trace la circonférence (ω) tangente à AB en M et tangente à (C). Lieu de son centre ω ?

775. On donne un diamètre A'D d'un cercle (A) de centre A (de rayon R) et un point I du segment AD $\left(AI = \frac{R}{3}\right)$. Une droite variable passe par I et coupe (A), en M et N.

1° Les tangentes en M et N au cercle (A) se coupent en E. Lieu du point E.

2° Dans l'inversion (I) de pôle I et de puissance $\overline{IA} \cdot \overline{IA'}$, les inverses de M et N sont respectivement M′ et N′. Quel est le lieu (B) de ces points ? Précisez la position de son centre B.

3° Les tangentes en M′ et N′ au lieu (B) se coupent en F. Montrez que E, I, F sont alignés. Lieu de F. Précisez en quel point ce lieu coupe la droite AA′.

4° Montrer qu'il existe un cercle (C) de centre C tangent en M au cercle (A) et en M′ au cercle (B). Montrez que, quand M varie, ce cercle (C) reste orthogonal à un cercle fixe. Quel est le lieu du point C ?

776. Soient deux cercles (O) et (O′), de centres O et O′, de rayons R et R′ (avec $R < R'$), situés dans un même plan et tangents intérieurement en A. Soit D leur tangente commune.

1° D'un point P de D on mène les tangentes PT et PT′ aux deux cercles (O) et (O′) en T et T′ respectivement. Montrer qu'il existe un cercle (I), de centre I, tangent aux deux cercles (O) et (O′) en T et T′. Lorsque P décrit D, montrer que (I) reste orthogonal à un cercle fixe, que l'on construira. Trouver le lieu de I.

2° Supposons P fixe sur D. Soit Q un autre point de D. On mène par Q des parallèles aux droites PT, PT′ qui coupent respectivement (O) et (O′) en MN et M′N′. Où doit se trouver Q pour que ces quatre points existent ? Montrer qu'ils sont alors sur un cercle (γ), dont on déterminera le centre. Inversement, le cercle (γ) étant donné peut-on construire Q ? Discuter.

3° A chaque point P de D, on associe un autre point Q de D tel que le cercle (γ) correspondant soit tangent intérieurement au cercle (O). Montrer que l'angle POQ est droit. Montrer qu'alors le cercle (γ) reste tangent à un deuxième cercle, que l'on déterminera.

4° On suppose maintenant Q fixe et P variable sur D. Le cercle (γ) correspondant à Q existe-t-il quel que soit P ? Discuter. Montrer que les polaires de A par rapport à tous les cercles (γ) passent par un point fixe. Lieu du centre du cercle (γ).

777. On donne sur une droite orientée trois points fixes : A, F, F′, tels que :

$$\overline{AF} = m ; \quad \overline{AF'} = m' ; \quad 0 < m < m'.$$

On appellera (F) le cercle de centre F, de rayon m, (F′) le cercle de centre F′, de rayon m' et (C) tout cercle tangent à (F) et à (F′) ; C sera le centre de (C), P son point de contact avec (F), P′ son point de contact avec (F′).

1° Démontrer que le lieu de C se compose d'une ellipse et d'une droite.

2° Démontrer que, si P et P′ sont distincts, la droite PP′ passe par un point fixe I. Qu'est le point I par rapport à (F) et (F′) ? Calculer $\overline{AI}$ en fonction de m et m'.

3° Déduire du 2° une construction géométrique de l'intersection de l'ellipse (E) de foyers F et F′ et passant par A avec une droite issue de F (ou F′). Qu'est le lieu géométrique du point de rencontre des tangentes en P et P′ à (C) ?

4° Que sont, dans l'inversion de pôle A et de puissance $4mm'$, les inverses de (F), (F′), (C) ? Qu'est l'inverse de la droite PP′ ? Utiliser cette inversion : *a*) pour retrouver tous les résultats du 2° ; *b*) pour démontrer que les cercles (C) restent orthogonaux à un cercle fixe si P et P′ sont distincts ; calculer $\overline{AK}$, K étant le centre de ce cercle.

778. On considère dans un plan un point fixe O et une droite D. On désigne par d la distance de O à la droite D. A tout point M de D on associe le cercle (M) de centre ω lieu des points K tels que $\frac{KO}{KM} = 2$.

1° Prouver que le lieu de ω lorsque M décrit D est une droite.

2° Déterminer les cercles (M) qui passent par un point donné A du plan. Discuter suivant la position de A dans le plan et indiquer le lieu des points A par lesquels passe un seul cercle (M).

3° La perpendiculaire à D menée par le point M coupe le cercle (M) en P et P′. Trouver le lieu géométrique H des points P et P′. Le comparer au lieu de A défini dans la deuxième question. Démontrer que les quatre points O, P, P′, ω sont sur un même cercle.

4° Trouver, lorsque M décrit la droite D, le lieu des points de contact T et T′ des tangentes menées de O au cercle (M).

5° Soit (M′) le cercle de centre ω′ inverse du cercle (M) dans l'inversion de pôle O de puissance $2d^2$. Montrer que les cercles (M′) sont orthogonaux à un cercle fixe, que le rayon du cercle (M′) est égal à $\frac{O\omega'}{2}$, et déterminer le lieu de ω′ lorsque M décrit D.

779. Soient une droite (D) et un point F non situé sur (D). On désigne par K la projection orthogonale de F sur (D) et l'on pose $FK = d$.

1° M étant un point quelconque, distinct de F et non situé sur (D), on désigne par (γ) le cercle de diamètre FM. La tangente en F à (γ) coupe la médiatrice Δ de FK en un point I. Montrer que ce point I a même puissance par rapport à (γ) et par rapport à tous les cercles du faisceau qui a pour points limites F et K.

Démontrer qu'il existe un cercle (O) de ce faisceau qui est tangent à (γ). Déterminer son centre O et son point de contact P avec (γ).

2° La droite FP coupe (D) en E et recoupe le cercle (O) en N. Démontrer que le faisceau (O, PNFE) est harmonique. Montrer que MF et ON sont parallèles. Déduire de ce qui précède que les trois points O, M, E sont alignés.

3° H désignant la projection orthogonale de M sur (D), on pose $\frac{MF}{MH} = e$.

Évaluer le rapport $\frac{\overline{OF}}{\overline{OK}}$, d'abord en fonction du rapport $\frac{OK}{ON}$, puis en fonction de e, et calculer le rayon R de (O) en fonction de d et de e. Quelle est la valeur du rapport $\frac{PF}{PK}$?

4° On suppose que M décrive une conique (C) de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e. Montrer qu'à tous les points M de cette conique il correspond un même cercle (O), qui est le cercle principal de cette conique.

780. 1° On considère dans un plan le cercle (C) et une droite (D) ; on appelle (F) le faisceau de cercles dont (D) est l'axe radical et dont (C) fait partie. Soit (Γ) la famille de cercles (γ), tangents à (D) et coupant (C) sous un angle constant α ; on appellera ω le centre du cercle variable (γ) et M son point de contact avec (D). On désigne par I(M) l'inversion de pôle M et dont la puissance est égale à la puissance du point M par rapport à (C).

a) Construire (γ), connaissant M et α. Discuter ; nombre de solutions.

b) Montrer que l'inversion I(M) transforme chaque cercle (γ) en une de deux droites fixes.

c) Montrer que si un cercle (γ) coupe un cercle (C_1) de (F) sous un angle α_1, tous les cercles de la famille (Γ) couperont (C_1) sous un angle constant.

d) En déduire les enveloppes (autres que D) du cercle (γ). Lieux des centres ω des cercles (γ).

2° On considère maintenant une droite fixe (Δ), parallèle à (D), et qui coupe (C) en deux points, A et B. On appelle A′ et B′ les seconds points d'intersection des sécantes MA et MB avec (C). M étant toujours un point de (D), on demande :

a) de trouver l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle MA′B′, lorsque M varie sur (D) ;

b) de trouver le lieu géométrique des centres de ces cercles.

781. 1° Lieu des centres des cercles orthogonaux à un cercle fixe (C), de centre C, et passant par un point fixe B.

2° Soit un segment fixe AB, de milieu O, de longueur 2 a. On considère un cercle (C), de centre C, tangent en A à la droite AB. Construire le cercle (D), de centre D, tangent en B à la droite AB et orthogonal au cercle (C). Quelle relation existe-t-il entre les rayons R et R′ des cercles (C) et (D) ? Quelles sont, dans l'inversion (A, 4 a^2), les figures (C′) et (D′) transformées de (C) et (D) ?

3° On suppose que le cercle (C) varie en restant tangent en A à AB. Lieux des points de rencontre, P′ et Q′, de (C′) et (D′). En déduire les lieux des points de rencontre, P et Q, de (C) et (D). Équations de ces lieux, en prenant pour axes de coordonnées les axes de symétrie du segment AB.

4° Comment varie la figure inverse de la droite PQ ? Comment varie cette droite PQ ? Montrer qu'il existe un cercle (ω), de centre ω, tangent en P au lieu de P et en Q au lieu de Q. Trouver le lieu de ω.

782. On donne, sur un axe $x'Ox$, les points A d'abscisse $(-a)$, B d'abscisse $(+a)$ et C d'abscisse $(+2a)$ (avec $a < 0$). On considère les deux demi-cercles (O) et (I) de diamètres respectifs AB et AC situés du même côté de $x'Ox$ et de centres respectifs O et I.

1° Soit (M) un cercle quelconque, de centre M, tangent extérieurement à (O) en T et tangent intérieurement à (I) en T′. Montrer que TT′ passe par un point fixe, K, de $x'Ox$, point que l'on précisera en calculant $\overline{OK}$. Utiliser le point K ainsi déterminé pour construire géométriquement le cercle (M), connaissant le point de contact, T.

2° Montrer que M décrit une demi-ellipse, (E), dont on précisera les foyers, le grand axe, le petit axe et l'excentricité.

3° Soit P le pôle de TT′ par rapport au cercle (M). Montrer que P appartient à une droite fixe et que PM est la tangente en M à la demi-ellipse (E).

4° *a*) On effectue l'inversion de pôle A et de puissance 6 a^2. Quels sont les inverses des demi-cercles (O) et (I) et du cercle (M) ? *b*) Utiliser cette inversion pour démontrer que les cercles (M) sont orthogonaux à un cercle fixe, dont on précisera le centre et le rayon.

783. A. - On donne un cercle (O), de centre O et de rayon R, et, sur ce cercle, deux points fixes A et B, de milieu I. Un point M variable décrit le cercle (O).

1° Montrer que le lieu de l'orthocentre H du triangle AMB est le cercle (O_1) symétrique de (O) par rapport à AB. Soient respectivement a, m et b les pieds des hauteurs issues de A, M et B dans le triangle AMB. Montrer que le côté ab du triangle amb enveloppe un cercle de centre I, tandis que ma et mb conservent des directions fixes.

2° Montrer que le cercle (Ω) de diamètre MH conserve une grandeur fixe et reste orthogonal à un cercle fixe (I).

B. - Soit une ellipse (Γ), de centre O, de longueurs d'axes 2 a et 2 b, et, sur cette ellipse, deux points fixes A et B, de milieu I, symétriques par rapport à son axe focal. Un point M variable décrit l'ellipse (Γ).

1° Établir la relation $m\mathrm{M} \cdot m\mathrm{N} = \frac{a^2}{b^2} m\mathrm{A} \cdot m\mathrm{B}$, où m est la projection orthogonale de M sur AB et N le second point de (Γ) sur la projetante mM. Montrer que le lieu de l'orthocentre H du triangle AMB est une ellipse (Γ_1) affine de (Γ).

2° Montrer que, si (Γ) et (Γ_1) ont deux points C et D en commun, autres que A et B, ces points C et D se trouvent sur le cercle de diamètre AB.

3° Montrer que le cercle de diamètre MH reste orthogonal à un cercle fixe (I) et que le lieu de son centre est une ellipse (L), dont on pourra donner l'équation par rapport à des axes Ix et Iy portés par AB et la médiatrice de AB.

784. Étant donnés deux points fixes F et I, dont la distance est FI = d, on considère les ellipses (E), d'excentricité e, qui ont pour foyer F et pour directrice associée une droite variable D passant par I.

1° D étant donnée, construire les quatre sommets, A, A′, B, B′, de l'ellipse (E). En désignant par u l'angle de D avec IF, calculer la longueur du grand axe AA′ de l'ellipse (E). Déterminer D de manière que AA′ ait une longueur donnée. Discuter.

2° H étant la projection de F sur D, montrer que les rapports $\frac{\overline{\mathrm{FA}}}{\overline{\mathrm{FH}}}$ et $\frac{\overline{\mathrm{FA}'}}{\overline{\mathrm{FH}}}$ restent constants quand D varie en passant par I. Lieux géométriques des sommets A, A′, du centre O, du deuxième foyer, F′, de l'ellipse (E). Que peut-on dire de la façon dont se déplacent le petit axe et la deuxième directrice, D′?

3° Indiquer comment varie le triangle FOB. Lieux géométriques des sommets B, B′. Un point B étant choisi sur son lieu, déterminer le centre, les autres sommets, le deuxième foyer et les directrices de l'ellipse (E) dont le petit axe a une extrémité en B.

785. On donne deux axes perpendiculaires $x'Ox$, $y'Oy$, et un point, C, de $y'Oy$ d'ordonnée R > 0. On désigne par (C) le cercle de centre C et de rayon R, par M un point de l'axe $x'Ox$, d'abscisse $\overline{\mathrm{OM}} = x$, par AB le diamètre du cercle (C) parallèle à $x'Ox$ (l'abscisse de B étant positive).

1° La droite MA recoupe le cercle (C) en un point P. Tracer le cercle (ω) passant par P et tangent en M à l'axe $x'Ox$. Montrer que ce cercle (ω) est orthogonal au cercle (C), qu'il recoupe en un point Q. Montrer que M, B, Q sont alignés.

2° Calculer en fonction de $\overline{\mathrm{OM}} = x$, l'ordonnée du centre, ω, du cercle (ω). En déduire que le lieu de ω est une conique (Γ) dont on précisera le foyer et la directrice.

3° Montrer que, lorsque M décrit $x'Ox$, le cercle (ω) reste tangent à un cercle fixe, que l'on précisera (centre et rayon). Retrouver, en utilisant cette propriété du cercle (ω), le lieu de ω.

4° a) En désignant par I et J les points d'intersection de la droite AB avec les droites PQ et Mω montrer que A, B, I, J forment une division harmonique.

b) Montrer que la droite PQ et la tangente (Δ) à la courbe (Γ) en ω se coupent sur l'axe $x'Ox$.

786. On considère un repère orthonormé xOy et le point F de coordonnées (2 a, 2 a) (a positif). F est le centre du cercle fixe (C) de rayon 2 a. Un cercle variable (K) de centre M (x, y) passe par le point fixe O et reste tangent au cercle (C).

1° Montrer que le lieu de M est une conique (H). Fixer avec précision les éléments géométriques de ce lieu. En particulier, indiquer la construction des directrices et donner leurs équations dans le système d'axes Ox, Oy. Quelle est l'excentricité de cette conique ?

2° Évaluer en fonction de x et de y : a) le carré de la distance OM ; b) le carré de la distance de M à la droite (D) ayant pour équation : $x + y - a = 0$.
En déduire la relation qui doit lier x et y pour que M appartienne à l'hyperbole équilatère de foyer O et de directrice associée (D). Montrer qu'elle peut s'écrire : $y = \frac{a}{2} \cdot \frac{2x - a}{x - a}$. Tracer cette hyperbole et comparer les résultats à ceux du 1°.

3° Un cercle variable (K), défini dans le préambule, coupe Ox en P et Oy en Q. Exprimer les mesures arithmétiques des longueurs OP et OQ en fonction de l'abscisse x de M. Reconnaître que ces expressions diffèrent l'une de l'autre suivant que x appartient à l'un ou l'autre des quatre intervalles séparés par les nombres 0, $\frac{a}{2}$ et a. Déduire de cette étude l'expression de $z = \mathrm{OP} + \mathrm{OQ}$ et tracer la courbe représentative des variations de z quand x varie.

787. On considère deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, F le point de l'axe $x'Ox$ d'abscisse donnée a positive. On désigne par (P) la parabole de foyer F et de directrice $y'Oy$, par (D) la droite d'équation $x = 2a$, par (C) une conique de foyer F, de directrice associée (D) et d'excentricité variable et supérieure à un tiers.

1° M étant un point de (P) d'abscisse x, MH la distance de M à (D), évaluer en fonction de a et de x le rapport $z = \dfrac{\overline{MF^2}}{\overline{MH^2}}$. Variations de ce rapport quand M décrit (P). Courbe représentative.

2° A tout point M de (P) est associée une conique (C) passant par M. Discuter suivant la position de M sur (P) la nature de (C). Comment sont disposés les points qui donnent une même conique (C) ? Enveloppe des asymptotes des hyperboles de la famille (C).

3° L'excentricité e étant donnée, comment peut-on construire les points communs à la conique (C) correspondante, et à la parabole (P) ? Discuter suivant la valeur de e le nombre de points obtenus. Dans le cas particulier où $e = 2$, calculer en grades les angles des tangentes à (P) et (C) en chacun des points communs.

4° Déterminer M sur la parabole (P) de manière que la conique (C) associée admette pour centre un point donné de l'axe $x'Ox$. Discuter.

788. Dans ce problème, il s'agit de points tous situés dans un même plan (P).

1° On se donne dans (P) un triangle ABC. Soit M un point quelconque de (P). Montrer que le vecteur $\vec{V}_M = 2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\,\overrightarrow{MC}$ est équipollent à un vecteur non nul, $\vec{V}$, indépendant de M. Construire le vecteur $\overrightarrow{AP}$ équipollent à $\vec{V}$: $\overrightarrow{AP} = \vec{V}_M = \vec{V}$. La droite AP coupe la droite BC en U ; montrer que $\dfrac{\overline{UB}}{\overline{UC}} = 3$.

2° Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Établir la relation

$$2\,\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 - 3\,\overrightarrow{MC}^2 = 2\,\overrightarrow{MO} \cdot \vec{V}.$$

En déduire que le lieu géométrique des points M du plan tels que

$$2\,MA^2 + MB^2 - 3\,MC^2 = 0$$

est la droite (Δ) passant par O et perpendiculaire à AU.

3° Dans cette question le triangle ABC est rectangle en C, B et C sont deux points fixes et A est variable. Montrer que la perpendiculaire en O à (Δ) passe par un point fixe, que l'on caractérisera.

4° Considérant toujours la figure définie dans les questions 1° et 2° à partir d'un triangle ABC, on appelle F l'ensemble des triangles ABC rectangles en A et tels que B et (Δ) soient, respectivement, un point et une droite fixes donnés [(Δ) ne passant pas par B]. Montrer que, lorsque le triangle ABC appartient à l'ensemble F, les points C et U restent sur deux droites fixes, (D) et (D'). Montrer que, réciproquement, si Q est un point de (D'), pour qu'il existe un triangle ABC de l'ensemble F tel que le point U correspondant soit en Q, il faut et suffit que, H étant la projection orthogonale de Q sur (Δ) : $\dfrac{QB}{QH} \leqslant \sqrt{3}$, c'est-à-dire que Q soit intérieur à une conique, que l'on caractérisera. Quels sont les lieux géométriques des points U et C lorsque le triangle ABC appartient à l'ensemble F ?

Déterminer le lieu géométrique du point A dans les mêmes conditions ; on pourra former son équation dans un système orthonormé d'axes portés par (Δ) et la perpendiculaire menée de B à (Δ) ; on désignera par a la distance de B à (Δ).

789. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé xOy, on considère la transformation ponctuelle qui à un point M du plan de coordonnées x, y fait correspondre le point M' de coordonnées x', y, telles que $x' = -\dfrac{x}{1-x}$, $\quad y' = \dfrac{y}{1-x}$.

a) 1° Montrer que cette transformation est involutive et qu'elle admet des points doubles, que l'on déterminera. Quels sont les points qui n'ont pas de transformé ?

2° Montrer que les droites OM et OM' sont symétriques par rapport à Ox et que la droite MM' coupe l'axe des x en un point C fixe. Donner une construction géométrique de M', connaissant M, et retrouver les résultats de la question 1°.

b) 1° On considère une droite (d) d'équation $ax + by + c = 0$; montrer que la figure transformée de (d) est une droite (d'). Les droites (d) et (d') peuvent-elles être confondues ? Comment faut-il choisir (d) pour que (d) et (d') soient parallèles ? Quand (d) et (d') sont concourantes, où se trouve leur point de rencontre ? Étudier les points de rencontre de (d) et (d') avec Ox et donner une construction géométrique de (d'), connaissant (d).

2° Soit (D) un ensemble de droites et (D') l'ensemble des droites transformées. Si (D) est formé de droites concourantes que peut-on dire de (D') ? Si (D) est un ensemble de droites parallèles, que peut-on dire de (D') ? Étudier le cas particulier des droites parallèles à Ox.

3° Déduire des résultats précédents une nouvelle construction géométrique de M′, connaissant M.

c) 1° On considère le cercle (Γ) : $x^2 + y^2 - 2\gamma x + \lambda = 0$, γ et λ étant deux paramètres. Déterminer λ en fonction de γ de telle sorte que le cercle (Γ) soit invariant dans la transformation. Montrer que l'ensemble des cercles qui se conservent, dans la transformation est un faisceau dont on précisera la nature.

2° On considère le cercle : $x^2 + y^2 - 2ax + 9 = 0$. Montrer que le transformé de ce cercle est une conique dont on précisera la nature suivant la valeur de a. Établir que cette conique passe par deux points fixes. Construire le transformé de ce cercle sachant qu'il passe par le point C.

790. Soient un repère orthonormé xOy et le point A de l'axe Ox d'abscisse a ($a < 0$). Un triangle MAN, rectangle en A, varie de telle manière que son hypoténuse MN reste parallèle à Ox. Soit I le milieu de MN.

1° On suppose que I décrive un cercle de centre A. Trouver géométriquement l'ensemble des points M et N.

2° On suppose que I décrive une droite passant par A. Trouver géométriquement l'ensemble des points M et N.

3° On suppose que I décrive la parabole d'équation $y^2 = 4ax$. Déterminer le foyer et la directrice de cette parabole.

On se propose d'étudier l'ensemble des points M et celui des points N. Montrer que l'un d'eux est une droite (celui des points M par exemple). Établir une correspondance géométrique simple, entre I et N ; en déduire l'équation de l'ensemble des points N (on désignera les coordonnées de N par X et Y), puis donner une définition géométrique de cet ensemble.

4° On suppose que I décrive la droite Oy. Montrer que les cercles (C) circonscrits aux triangles MAN décrivent un faisceau à points de base, dont l'un est A et dont l'autre sera désigné par A′.

En évaluant de deux manières différentes la puissance par rapport au cercle (C) de la projection orthogonale de M sur $x'Ox$, trouver l'équation de l'ensemble des points M et des points N (on désignera les coordonnées de M par X et Y). En déduire que cet ensemble est une hyperbole, dont on déterminera les foyers, sommets et asymptotes. Montrer que les bissectrices de l'angle en M du triangle AMA′ ont des directions fixes, que l'on précisera.

791. Dans un repère orthonormé xOy, on place le point C de coordonnées (R, 0), R désignant un nombre positif donné. On trace le cercle (C) de centre C et de rayon R et l'on désigne par M un point variable de ce cercle tel que $(\overrightarrow{Cx}, \overrightarrow{CM}) = \varphi$, φ variant de 0 à 2π.

1° Soit H la projection orthogonale de M sur Ox et P le milieu de HM. Trouver le lieu géométrique du point P. Préciser les éléments de ce lieu : centre, foyers, directrices et excentricité.

2° Évaluer, en fonction de R et φ, les coordonnées (x, y) du point M. Pour quelles valeurs de φ ces coordonnées vérifient-elles la relation $y + 2x = a$, a désignant un nombre algébrique donné ? Discuter suivant les valeurs de a. Retrouver géométriquement les résultats de cette discussion.

3° La droite OM rencontre CP en D et, en E, le diamètre (Δ) du cercle (C) parallèle à Oy ; montrer que la division (O, M, D, E) est harmonique. Former l'équation de la droite OM ; trouver les coordonnées du point D en fonction de R et φ ; en déduire le lieu géométrique du point D. Préciser les points communs à ce lieu et au cercle (C) ; expliquer le résultat.

4° On effectue l'inversion de centre O et de puissance $2R^2$. Montrer que le point D a pour inverse le symétrique D′ du point M par rapport à E. En déduire les coordonnées de D′ en fonction de R et φ, puis l'équation du lieu de D′ ; construire ce lieu.

792. 1° On considère, dans un repère orthonormé xOy, les cercles (C) d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2 = 0,$$

où m est un nombre réel variable. Montrer que ces cercles forment un faisceau, dont on déterminera les éléments.

2° On considère maintenant les cercles (C′) d'équation $x^2 + y^2 - 2m'y + k = 0$ (m' variable, k constant). Déterminer la valeur de k pour laquelle ces cercles sont orthogonaux aux cercles (C) précédents. Les cercles (C′) ainsi déterminés forment un faisceau. Donner l'équation du cercle (C′) passant par le point I (+ 2, + 2).

3° Montrer que, lorsque (C) varie, la polaire de F par rapport à (C) passe par un point fixe.

4° On considère maintenant les coniques qui admettent F pour foyer et le cercle variable (C) pour cercle principal. Déterminer, suivant les valeurs de m, la nature de ces coniques. Trouver, en particulier, les valeurs de m pour lesquelles ces coniques sont des hyperboles équilatères.

5° Montrer que la directrice associée à F passe par un point fixe. Trouver le lieu du deuxième foyer de ces coniques.

793. Dans un plan on donne deux points fixes, O et A (OA = 1). A un point m quelconque du plan on fait correspondre le point M tel que Om soit la bissectrice de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ et que $(OM) = (Om)^2$.

1° La transformation admet-elle des points doubles ? Quels sont les transformés :

a) des points de la droite OA ;
b) des points d'une droite quelconque passant par O ;
c) du cercle de centre O de rayon 1 ;
d) d'un cercle quelconque de centre O ?

2° Montrer que le symétrique, m', de m pour O a même transformé que m et que le cercle (Ω) de centre ω passant par A, m, m' passe par M, recoupe OM en A′, symétrique de A par rapport au diamètre $O\omega$, et recoupe également OA en μ, symétrique de M par rapport à $O\omega$.
En déduire la construction de m, connaissant M.

3° Le plan est rapporté à un repère orthonormé où l'axe $x'Ox$ porte $\overrightarrow{OA}$. On désignera par (x, y) les coordonnées de m, par (X, Y) celles de M. Établir les deux relations liant x, y, X, Y.
En déduire :
a) l'ensemble des positions de M quand m se déplace sur une parallèle à Oy ou sur une parallèle à Ox ;
b) sur quelles courbes doit se déplacer M pour que m décrive une hyperbole équilatère admettant les axes de coordonnées, soit pour asymptotes, soit pour axes de symétrie.

794. On considère, sur un axe orienté $x'Ox$, les points A et B d'abscisses respectives $(+ a)$ et $(- a)$. On supposera que a est positif. On se propose d'étudier la transformation ponctuelle plane T_θ, où θ est un angle donné défini à $k\pi$ près, qui, à un point m du plan, fait correspondre le point M de ce plan, intersection des droites Au et Bv qui font respectivement avec les droites Am et Bm les angles orientés $(Am, Au) = \theta$ et $(Bm, Bv) = \theta$.

1° *a*) Quel est l'ensemble des points m du plan qui n'ont pas de transformé M à distance finie par T_θ ?
Quelle est la transformation réciproque de la transformation T_θ ? Pour quelles valeurs de θ cette transformation est-elle involutive ? Montrer que l'ensemble de ces transformations forme un groupe.
b) Quelle est la figure transformée par T_θ d'un cercle passant par A et B, d'une droite passant par A, d'une droite passant par B ?

c) Dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{2}$, quelle est la figure transformée par $T_{\frac{\pi}{2}}$ d'une droite perpendiculaire à $x'Ox$?

2° On supposera, dans toute la suite du problème, que $\theta = \frac{\pi}{4}$. On désignera par x et y les coordonnées de m et par X et Y celles de M dans le repère orthonormé $(x'Ox, y'Oy)$.
a) Calculer X et Y en fonction de x et y. Discuter.
b) On suppose que m décrit un cercle (Γ) passant par A et B. Écrire l'équation d'un tel cercle et montrer que, si λ est l'ordonnée de son centre, on a les relations $Y - x = X + y = \lambda$. En déduire la relation liant X et Y lorsque m décrit (Γ). Conséquence.
c) On suppose que m décrit une droite perpendiculaire à $x'Ox$, d'abscisse l. Trouver l'équation de la courbe décrite par M. Nature de cette courbe. Discuter suivant les valeurs de l.

795. On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(x'Ox, y'Oy)$ et l'application $\mathfrak{A}$ qui, à tout point M de coordonnées x et y $(y \neq 0)$, fait correspondre le point $M_1 = \mathfrak{A}(M)$ de coordonnées x_1 et y_1 définies par $x_1 = x$ et $y_1 = \frac{x^2}{y}$.

1° *a*) On considère un point M d'abscisse non nulle et M_1 son image par $\mathfrak{A}$. Déterminer $\mathfrak{A}(M_1)$.
b) Que devient le point $M_1 = \mathfrak{A}(M)$ lorsque y tend vers 0, x étant donné non nul ?
c) On posera, par définition, que l'image du point M de coordonnées $x \neq 0$ et $y = 0$ est le point « à l'infini » de la parallèle à Oy d'abscisse x et que l'image de l'origine, O, des axes de coordonnées est le point O.
Trouver l'ensemble (D) des points doubles de $\mathfrak{A}$ et une définition géométrique de $\mathfrak{A}$ à partir de (D).

2° *a*) Quelle est l'équation de (d_1), image par $\mathfrak{A}$ de la droite (d) d'équation $ux + vy + h = 0$? Examiner chacun des cas particuliers $v = 0$ $(h \neq 0)$ et $h = 0$ $(v \neq 0)$; donner, dans ce dernier cas, une construction géométrique de (d_1). Quelle est l'image par $\mathfrak{A}$ de la droite $y'Oy$?
b) Étudier la nature de (d_1) dans le cas $vh \neq 0$ et préciser ses éléments remarquables.

3° Soit (C) le graphe d'une fonction $y = f(x)$, M un point de (C), de coordonnées (α, β). Soit (T) la tangente en M à (C) et m sa pente. Soit M_1, de coordonnées (α_1, β_1), l'image de M par $\mathfrak{A}$ et (Δ) la tangente en M_1 à (C_1), transformée de (C). On note μ la pente de (Δ).
a) Calculer μ en fonction de α, β, m (on considèrera y_1 comme une fonction composée de x par l'intermédiaire de y), puis les ordonnées à l'origine, b et p, des droites (T) et (Δ).

b) Vérifier l'égalité $\frac{b}{p} = -\frac{\beta}{\beta_1}$ et en déduire une construction simple de (Δ).

796. Dans un plan rapporté au repère orthonormé xOy, on considère le point fixe A dont les coordonnées sont a et 0 (a étant un nombre strictement positif) ; on étudie la transformation ponctuelle T qui à un point M quelconque du plan associe le point M′ défini de la manière suivante : les points A, M et M′ sont alignés et les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont perpendiculaires.

1° Déterminer l'ensemble des points M qui n'ont pas de transformé. Déterminer l'ensemble des points M tels que le transformé de chacun d'eux soit le point A.

La transformation T admet-elle un point double (ou invariant) ? Quelle est la transformée d'une droite passant par O ? Existe-t-il une transformation réciproque (ou inverse) de T ?

2° On désigne par (x, y) les coordonnées de M et par (x', y') celles de M'. Établir entre ces coordonnées deux relations ayant la propriété suivante : le fait qu'elles soient simultanément vérifiées est une condition nécessaire et suffisante pour que M et M' soient homologues par T. Exprimer les coordonnées de M' en fonction de celles de M, puis les coordonnées de M en fonction de celles de M'.

3° On suppose que M décrit la droite D dont l'équation est $x = 2a$. Déterminer l'ensemble D' des points M' transformés des points M de D.

4° Les coordonnées du point M sont définies en fonction du temps par les relations $x = -at^2$, $y = at$ (t variant de $-\infty$ à $+\infty$). Déterminer la trajectoire, C, du point M, en précisant ses éléments. Exprimer en fonction de t les coordonnées du point M' et en déduire l'équation cartésienne de la transformée, C', de C. Comparer C' à D'.

Déterminer, à l'instant t, les composantes du vecteur vitesse de M et celles du vecteur vitesse de M'. Établir les équations cartésiennes de la tangente en M à C et de la tangente en M' à C'. Donner les équations de deux des tangentes communes à C et C'.

797. 1° En axes orthonormés, on considère la transformation ponctuelle (T) qui, à un point M de coordonnées x et y, fait correspondre le point M_1 de coordonnées x_1 et y_1 telles que $x_1 = x$, $yy_1 = 1$.

a) Cette transformation est-elle involutive ? Déterminer l'ensemble de ses points doubles. Existe-t-il des droites invariantes globalement ?

b) En supposant x fixe, que peut-on dire des cercles de diamètre MM_1 ?

2° *a*) Déterminer la courbe (H) transformée de la droite (D) d'équation $y = ax$ ($a \neq 0$) et préciser ses éléments. Quel est l'ensemble des points P communs à une droite (D) et à sa transformée ?

b) Écrire l'équation de la tangente au point M_1 (x_1, y_1) à la courbe (H) et préciser en particulier ses points d'intersection, R et S, avec les axes ; en déduire une propriété des points M_1, R, S et une construction géométrique simple de cette tangente. Quelle est l'aire du triangle ORS ?

3° *a*) Déterminer la courbe (K) transformée de la droite (Δ) transformée de la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Par quelle transformation simple peut-on passer de (H) à (K) ?

b) On envisage maintenant les droites (D) d'équation $y = ax$, où $a > 0$, et les droites (D') d'équation $y = a'x$, où $a' > 0$. (H) étant la transformée de (D) par (T), (H') étant la transformée de (D') par (T), par quelle transformation simple passe-t-on de (H) à (H') ?

798. Une unité de longueur étant choisie, on considère l'ensemble ($\mathfrak{T}$) des triangles ABC ayant pour périmètre cette unité. On pose $BC = x$, $CA = y$, $AB = z$.

A tout triangle t de ($\mathfrak{T}$), on fait correspondre le point M qui a pour coordonnées x, y, z dans l'espace rapporté à un repère orthonormé. Le point M est dit *image* de t. On désigne par U, V, W les points d'intersection du plan d'équation $x + y + z - 1 = 0$ avec les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, respectivement. On rappelle que, pour que les trois nombres réels x, y, z soient les mesures des côtés d'un triangle, il faut et il suffit que chacun d'eux soit positif et inférieur à la somme des deux autres.

1° Démontrer que l'ensemble formé par les images M de tous les triangles t de ($\mathfrak{T}$) est l'intérieur d'un triangle DEF dont les sommets, D, E, F, appartiennent respectivement aux plans de coordonnées Oyz, Ozx, Oxy. Vérifier que l'image, G, d'un triangle équilatéral t de ($\mathfrak{T}$) coïncide avec le centre de gravité du triangle DEF.

2° On effectue sur les sommets A, B et C d'un triangle t de ($\mathfrak{T}$) toutes les permutations possibles, ce qui donne pour les images les six points suivants :

$$M_1(x, y, z), \quad M_2(y, z, x), \quad M_3(z, x, y),$$
$$M_4(y, x, z), \quad M_5(x, z, y), \quad M_6(z, y, x).$$

Étudier la configuration de ces six points dans le plan du triangle DEF. On indiquera dans ce plan la construction des points M_4, M_5 et M_6 à partir du point M_1 et la construction du triangle $M_1M_3M_2$ à partir du triangle $M_4M_5M_6$. (La figure de géométrie plane correspondante sera effectuée en représentant DE par une longueur de 10 cm environ). En déduire que les six points M_1 sont sur un même cercle de centre G, dont on calculera le rayon en fonction de x, y, z.

3° Quelles sont les images des sous-ensembles de ($\mathfrak{T}$) suivants : triangles rectangles en C, triangles rectangles en A, triangles rectangles en B ? Les dessiner avec soin sur une nouvelle figure de géométrie plane représentant le triangle DEF.

4° Quelle est l'image du sous-ensemble de ($\mathfrak{T}$), formé par les triangles ayant leurs côtés en progression géométrique, AB étant le côté moyen ? Un tel triangle peut-il être rectangle ?

TABLE DES MATIÈRES

GÉOMÉTRIE ORIENTÉE

Première leçon. — *Division harmonique — Faisceau harmonique — Applications* 9

Deuxième leçon. — *Angles orientés dans le plan — Angle de droites — Angles inscrits* 27

Troisième leçon. — *Puissance par rapport à un cercle — Applications* .. 45

Quatrième leçon. — *Cercles orthogonaux — Faisceaux de cercles* 58

Cinquième leçon. — *Polarité par rapport à un cercle* 73

Sixième leçon. — *Projections orthogonales — Angle d'une droite et d'un plan — Lignes de pente — Perpendiculaire commune à deux droites* 86

Septième leçon. — *Éléments orientés dans l'espace — Barycentre — Dérivation vectorielle — Hélice circulaire* 96

TRANSFORMATIONS PONCTUELLES

Huitième leçon. — *Généralités — Déplacements plans — Translation plane — Rotation plane* 115

Neuvième leçon. — *Symétrie axiale dans le plan — Produit de symétries et de déplacements — Applications des déplacements et symétries dans le plan* 129

Dixième leçon. — *Déplacements dans l'espace — Translation — Rotation — Retournements — Déplacement hélicoïdal* 142

Onzième leçon. — *Symétrie par rapport à un point — Symétrie par rapport à un plan — Comparaison des deux symétries — Éléments de symétrie d'une figure* 154

Douzième leçon. — *Homothétie — Applications de l'homothétie* 166

Treizième leçon. — *Similitude plane directe — Applications — Transformation : $z' = az + b$* 179

Quatorzième leçon. — *Affinité dans le plan — Généralités sur l'inversion.* 197

Quinzième leçon. — *Inversion dans le plan — Applications de l'inversion.* 210

CONIQUES

Seizième leçon. — *Parabole — Équation de la parabole* 225

Dix-septième leçon. — *Ellipse — Hyperbole* 236

Dix-huitième leçon. — *Équation des coniques à centre — Foyers et directrices* 248

Dix-neuvième leçon. — *Courbes : $y^2 = ax^2 + bx + c$ — Ellipse affine d'un cercle — Hyperbole rapportée à ses asymptotes.* 262

Vingtième leçon. — *Sections planes d'un cône de révolution* 276

CINÉMATIQUE

Vingt et unième leçon. — *Mouvement d'un point — Vecteur-vitesse et vecteur accélération d'un point* 287

Vingt-deuxième leçon. — *Projection d'un mouvement — Mouvement à accélération constante* 298

Vingt-troisième leçon. — *Mouvement circulaire — Mouvement hélicoïdal uniforme* 306

Vingt-quatrième leçon. — *Mouvement de translation d'un solide — Changement de repère* 314

— *Problèmes de révision* 322

Dépôt légal : 2e trimestre 1967.
Imprimé en France.