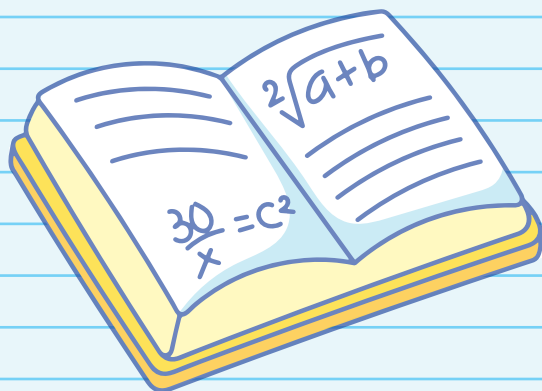


Maths
20/20

3^e

LA FACE CACHÉE DES FORMULES ET THÉORÈMES



Estelle Kollar
WonderWomath sur TikTok®

400 000 abonnés

300 vidéos



3^e

LA FACE CACHÉE DES FORMULES ET THÉORÈMES

Pour avoir 20/20 en Mathématiques

Estelle Kollar



Conception graphique couverture: Nathalie FOULLOY
Conception graphique intérieur: Anne-Laure TEDESCO
Mise en pages: Nord Compo

ISBN 9782340-097834
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2024
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

AVANT-PROPOS



Qui a horreur qu'on lui réponde à une question par « c'est comme ça et c'est tout » ? Beaucoup de monde je pense.

C'est pourquoi on enseigne les mathématiques aux élèves pour développer leur esprit critique et d'analyse ; afin d'affronter les enjeux futurs de leur quotidien et de leur vie professionnelle, en ne se contentant plus de cette réponse « c'est comme ça ».

Paradoxalement, ces mêmes élèves retiennent souvent les formules et les théorèmes par cœur et les appliquent comme des recettes de cuisine, en oubliant les origines de ces notions. On est bien loin de l'esprit critique qu'on souhaite leur inculquer.

Pourtant, leurs enseignants introduisent ces mêmes notions avec des activités de découverte, afin de comprendre « pourquoi ça marche ». Puis les élèves oublient et concentrent leurs révisions sur l'apprentissage du cours et des exercices. Sans jamais relire ces précieuses activités.

Selon moi, si l'élève comprend pourquoi telle formule ou tel théorème existe et fonctionne, et s'il sait ensuite l'expliquer à son tour, alors il a réellement développé un esprit logique et critique lié aux mathématiques.

Apprendre par cœur sans comprendre mobilise énormément la mémoire. Alors que raisonner pour retrouver ces formules ou théorème s'apparente à une gymnastique de l'esprit, qui permet de faire des connexions parmi quelques savoirs enregistrés dans sa mémoire. Après quelques années d'entraînement qui ont commencé dès l'école primaire, ces connexions se font intuitivement et naturellement, quasi automatiquement, et l'élève n'a plus besoin de passer des heures à réviser des fiches de révision.

C'est pourquoi je propose dans cet ouvrage, pour chaque chapitre¹ vu en classe de Troisième, de répondre² à la fameuse question : « Pourquoi ? » et non « Comment ? ». Je lance alors un défi audacieux à l'issue de chaque leçon : résoudre des exercices sans appliquer directement les formules et théorèmes.

Si tu vois ce symbole  dans un exercice, la calculatrice est interdite.

-
1. Les chapitres sélectionnés suivent scrupuleusement le programme scolaire de l'Éducation Nationale. La classe de troisième est la dernière année du cycle 4, et la progression attendue est expliquée dans le *Bulletin officiel n° 22 du 29 mai 2019*. À l'épreuve du Diplôme National du Brevet, les élèves de troisièmes sont évalués sur tout le cycle 4. C'est pourquoi, en début de chaque chapitre, j'indique les pré-requis vus les années précédentes.
 2. Bien que la méthode la plus rigoureuse soit la démonstration, certaines explications seront simplement des conjectures basées sur des observations. En effet, certaines démonstrations sont trop virtuoses pour des collégiens.

SOMMAIRE

PARTIE 1	Nombres et calculs	9
Chapitre 1	Puissance d'exposant négatif	11
	Entraîne-toi	14
	Corrigé	16
Chapitre 2	Fraction irréductible	21
	Entraîne-toi	26
	Corrigé	27
Chapitre 3	Double distributivité	31
	Entraîne-toi	34
	Corrigé	36
Chapitre 4	Factoriser $a^2 - b^2$	45
	Entraîne-toi	48
	Corrigé	49
Chapitre 5	Équation produit-nul	51
	Entraîne-toi	54
	Corrigé	55
Chapitre 6	Équation du type $x^2 = a$	59
	Entraîne-toi	62
	Corrigé	63
PARTIE 2	Statistiques et probabilité	67
Chapitre 7	L'étendue	69
	Entraîne-toi	72
	Corrigé	73

Chapitre 8	Regroupement par classes de même amplitude	75
	Entraîne-toi	79
	Corrigé	80
Chapitre 9	Stabilisation des fréquences	83
	Entraîne-toi	86
	Corrigé	88
Chapitre 10	Expérience aléatoire à deux épreuves	91
	Entraîne-toi	94
	Corrigé	95
PARTIE 3	Proportionnalité	97
Chapitre 11	Évolution de pourcentages	99
	Entraîne-toi	101
	Corrigé	102
PARTIE 4	Fonctions	105
Chapitre 12	Image et antécédent	107
	Entraîne-toi	111
	Corrigé	114
Chapitre 13	Représentation graphique	121
	Entraîne-toi	124
	Corrigé	126
Chapitre 14	Fonction linéaire	129
	Entraîne-toi	132
	Corrigé	134
Chapitre 15	Fonction affine	139
	Entraîne-toi	142
	Corrigé	144

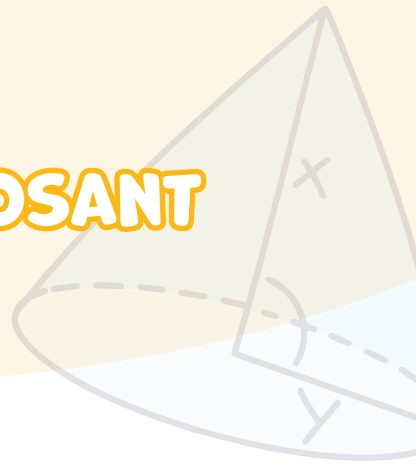
PARTIE 5	Grandeurs et mesures	149
Chapitre 16	Volume d'une boule	151
	Entraîne-toi	153
	Corrigé	154
PARTIE 6	Espace et géométrie	157
Chapitre 17	Se repérer sur une sphère	159
	Entraîne-toi	162
	Corrigé	163
Chapitre 18	Triangles semblables	165
	Entraîne-toi	168
	Corrigé	169
Chapitre 19	Égalité de Thalès	173
	Entraîne-toi	178
	Corrigé	180
Chapitre 20	Homothéties	183
	Entraîne-toi	187
	Corrigé	188
Chapitre 21	Trigonométrie	191
	Entraîne-toi	197
	Corrigé	199
Chapitre 22	Rotation	203
	Entraîne-toi	207
	Corrigé	208
Chapitre 23	Pavage	211
	Entraîne-toi	213
	Corrigé	214

Partie
1

NOMBRES ET CALCULS



PUISSANCE D'EXPOSANT NÉGATIF



PRÉ-REQUIS

- ▶ Fractions décimales [6^e] ☐
- ▶ Multiplication par 10 ; 100 ; 1 000... [6^e] ☐
- ▶ Multiplication par 0,1 ; 0,01 ; 0,001... [6^e] ☐
- ▶ Multiplier et diviser des nombres relatifs [4^e] ☐
- ▶ Puissance d'exposant positif [4^e] ☐
- ▶ Notion d'inverse d'un nombre [4^e] ☐
- ▶ Division et multiplication de fractions [4^e] ☐



ON FAIT LE POINT

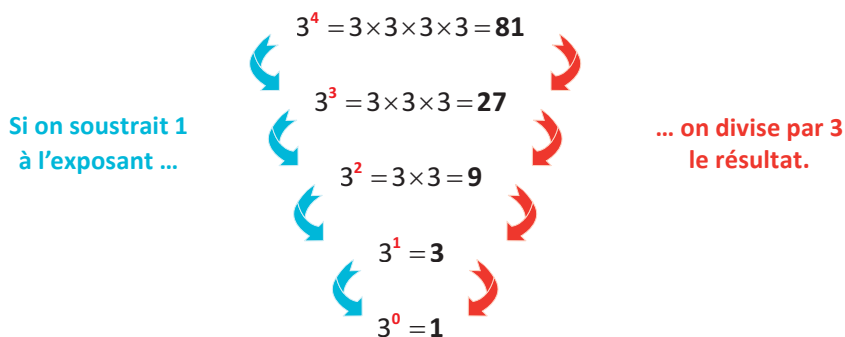
	A	B	C
1 Calculer mentalement $3 \times 3 \times 3$	9	18	27
2 L'écriture 4^5 signifie :	$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$	4×5	$5 \times 5 \times 5 \times 5$
3 Calculer mentalement 13^0	0	1	13
4 Calculer mentalement $(-2)^4$	-8	16	-16
5 Calculer mentalement $\frac{1}{9} \div 3$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{27}$



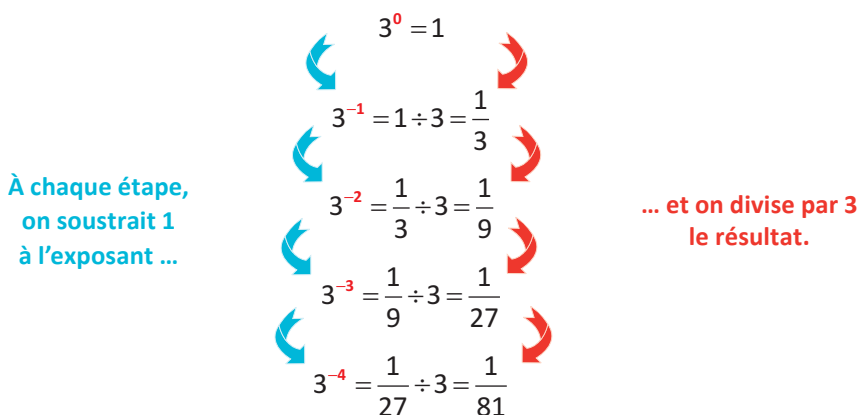
COMPRENDRE LA FORMULE

Pour comprendre les **puissances d'exposant négatif**, on va démarrer le raisonnement avec des puissances d'exposant positif.

Plutôt que d'alourdir la démonstration en utilisant une variable x , on va découvrir cette nouvelle notion en utilisant les **puissances de 3** :



On poursuit de la même façon pour obtenir les puissances de 3 d'exposant négatif.



RAPPELS

- Une fraction est définie comme le **quotient** d'un nombre entier relatif par un nombre entier relatif non nul. C'est pourquoi $1 \div 3 = \frac{1}{3}$

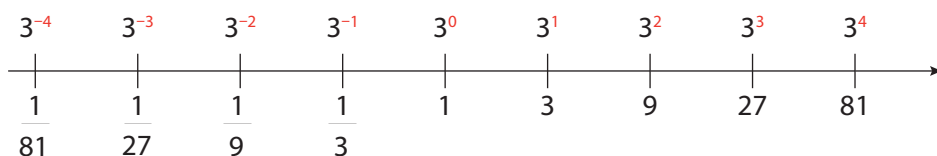
- Diviser par un nombre est équivalent à multiplier par son inverse.

Et l'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$.

C'est pourquoi $\frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

ou encore $\frac{1}{9} \div 3 = \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

On résume les résultats sur un schéma : quelle conjecture peux-tu faire ?



$\frac{1}{81}$ est l'inverse de 81 donc 3^{-4} est l'inverse de 3^4 .

$\frac{1}{27}$ est l'inverse de 27 donc 3^{-3} est l'inverse de 3^3 .

$\frac{1}{9}$ est l'inverse de 9 donc 3^{-2} est l'inverse de 3^2 .

$\frac{1}{3}$ est l'inverse de 3 donc 3^{-1} est l'inverse de 3^1 .

On peut ainsi généraliser cette conjecture :

x^{-n} est l'inverse de x^n .

n est une variable représentant un nombre entier.

x est une variable représentant un nombre quelconque non nul.



Exercice 1 : Calculer et donner le résultat en écriture fractionnaire

a. 3^{-6}

d. $(-1)^{-4}$

b. 2^{-5}

e. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

c. $(-8)^{-3}$



Exercice 2 : Calculer et donner le résultat en écriture décimale

a. 2^{-2}

d. $(-10)^{-4}$

b. 10^{-3}

e. $\left(\frac{100}{9}\right)^{-3}$

c. $(-2)^{-1}$



Exercice 3 : Exprimer chaque nombre à l'aide d'une puissance de 2

a. $\frac{1}{16}$

d. $\frac{1}{64}$

b. 0,5

e. 1

c. 0,125



Exercice 4 : Pour chaque affirmation, répondre par VRAI ou FAUX et expliquer

a. Affirmation 1 : " $2^4 + 2^{-4} = 0$ "

d. Affirmation 4 : " $\frac{2^3}{2^4} = 2^1$ "

b. Affirmation 2 : " $2^4 \times 2^{-4} = 0$ "

e. Affirmation 5 : " $\frac{2^4}{2^{-2}} = 2^6$ "

c. Affirmation 3 : " $2^5 \times 2^{-3} = 2^2$ "

DÉCOUVERTE D'UNE PROPRIÉTÉ



Les puissances de 10 sont fascinantes !

1. Donner l'écriture décimale de

10^5 , 10^4 , 10^3 , 10^2 , 10^1 , 10^0 , 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} et 10^{-5} .

2. Que remarques-tu ?



Exercice 5 : Donner l'écriture scientifique de chaque nombre

► Exemple : $0,0032 = 3,2 \times 0,001 = 3,2 \times 10^{-3}$

a. 610

d. 74 010

b. 0,78

e. 0,000 000 41

c. 0,0005



Exercice 6 : Donner l'écriture décimale de chaque nombre

► Exemple : $4,05 \times 10^{-2} = 4,05 \times 0,01 = 0,0405$

a. 4×10^2

d. $9,9 \times 10^{-1}$

b. $6,1 \times 10^3$

e. $7,003 \times 10^{-4}$

c. $5,9 \times 10^{-3}$

DÉFI

Donner l'écriture scientifique de $0,00078 \times 10^{-5}$.

Exercice 1

- a. 3^{-6} est l'inverse de 3^6 .

$$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$$

$$\text{Donc } 3^{-6} = \frac{1}{729}.$$

- b. 2^{-5} est l'inverse de 2^5 .

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

$$\text{Donc } 2^{-5} = \frac{1}{32}.$$

- c. $(-8)^{-3}$ est l'inverse de $(-8)^3$.

$$(-8)^3 = (-8) \times (-8) \times (-8) = -512$$

$$\text{Donc } (-8)^{-3} = \frac{1}{-512} \text{ ou } \frac{-1}{512}.$$

- d. $(-1)^{-4}$ est l'inverse de $(-1)^4$.

$$(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$$

$$\text{Donc } (-1)^{-4} = 1.$$

- e. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ est l'inverse de $\left(\frac{3}{5}\right)^2$.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$$\text{Donc } \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{9}.$$

Exercice 2

- a. 2^{-2} est l'inverse de 2^2 .

$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{Donc } 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

- d. $(-10)^{-4}$ est l'inverse de $(-10)^4$.

$$(-10)^4 = (-10) \times (-10) \times (-10) \times (-10)$$

$$= 10000$$

$$\text{Donc } (-10)^{-4} = \frac{1}{10000} = 0,0001.$$

- b. 10^{-3} est l'inverse de 10^3 .

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$$\text{Donc } 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001.$$

- e. $\left(\frac{100}{9}\right)^{-3}$ est l'inverse de $\left(\frac{100}{9}\right)^3$.

$$\left(\frac{100}{9}\right)^3 = \frac{100}{9} \times \frac{100}{9} \times \frac{100}{9} = \frac{1000000}{729}$$

$$\text{Donc } \left(\frac{100}{9}\right)^{-3} = \frac{729}{1000000} = 0,000729.$$

- c. $(-2)^{-1}$ est l'inverse de $(-2)^1$.

$$(-2)^1 = -2$$

$$\text{Donc } (-2)^{-1} = \frac{1}{-2} = -0,5.$$

Exercice 3

a. $\frac{1}{16}$ est l'inverse de 16.

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$$

$$\text{Donc } \frac{1}{16} = 2^{-4}.$$

b. $0,5 = \frac{1}{2}$ est l'inverse de 2.

$$2 = 2^1$$

$$\text{Donc } 0,5 = 2^{-1}.$$

c. $0,125 = \frac{1}{8}$ est l'inverse de 8.

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

$$\text{Donc } 0,125 = 2^{-3}.$$

d. $\frac{1}{64}$ est l'inverse de 64.

$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$$

$$\text{Donc } \frac{1}{64} = 2^{-6}$$

e. $1 = 2^0$ (pas besoin d'inverser !)

Exercice 4

Affirmation 1 : **FAUX**

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$2^{-4} \text{ est l'inverse de } 2^4 \text{ donc } = \frac{1}{16}$$

16 et $\frac{1}{16}$ sont positifs et non nuls donc leur

somme ne peut pas être égale à 0.

On peut sinon s'amuser à faire le calcul et

$$16 + \frac{1}{16} = \frac{257}{16} \text{ qui est différent de 0.}$$

Affirmation 2 : **FAUX**

2^{-4} est l'inverse de 2^4 donc par définition (vu en 4^e) leur produit est égal à 1.

Affirmation 3 : **VRAI**

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ et $2^{-3} = \frac{1}{8}$ (déjà calculé à l'exercice 3)

$$32 \times \frac{1}{8} = \frac{32}{8} = 4$$

$$\text{Or } 4 = 2^2$$

Affirmation 4 : **FAUX**

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$\frac{8}{16} = 0,5$$

Or $0,5 = 2^{-1}$ (déjà calculé à l'exercice 3)

Affirmation 5 : **VRAI**

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$2^{-2} = \frac{1}{4} \text{ (déjà calculé à l'exercice 2)}$$

$$\frac{16}{\frac{1}{4}} = 16 \div \frac{1}{4} \text{ (voir le premier point du rappel)}$$

$$16 \div \frac{1}{4} = 16 \times 4 = 64 \text{ (voir le deuxième point du rappel)}$$

$$\text{Or } 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$$

DÉCOUVERTE D'UNE PROPRIÉTÉ

1. $10^5 = 100\,000$

$10^4 = 10\,000$

$10^3 = 1\,000$

$10^2 = 100$

$10^1 = 10$

$10^0 = 1$

Cette règle a déjà été découverte en 4^e.

Pour écrire les puissances de 10 en écriture décimale, l'exposant positif correspond au nombre de 0 qui suit le chiffre « 1 ».

10^{-1} est l'inverse de 10^1 donc $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$

10^{-2} est l'inverse de 10^2 donc $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$

10^{-3} est l'inverse de 10^3 donc $10^{-3} = \frac{1}{1\,000} = 0,001$

10^{-4} est l'inverse de 10^4 donc $10^{-4} = \frac{1}{10\,000} = 0,0001$

10^{-5} est l'inverse de 10^5 donc $10^{-5} = \frac{1}{100\,000} = 0,00001$

2. Pour écrire les puissances de 10 en écriture décimale, l'exposant indique le rang du chiffre « 1 » dans la partie décimale.

Par exemple pour 10^{-1} , on place le chiffre « 1 » au premier rang qui correspond au chiffre des dixièmes (juste après la virgule).

Pour 10^{-2} , on place le chiffre « 1 » au deuxième rang qui correspond au chiffre des centièmes.

On complète ensuite avec des 0 jusqu'au chiffre des unités.

Exercice 5

a. $610 = 6,1 \times 100 = 6,1 \times 10^2$

b. $0,78 = 7,8 \times 0,1 = 7,8 \times 10^{-1}$

c. $0,0005 = 5 \times 0,0001 = 5 \times 10^{-4}$

d. $74010 = 7,401 \times 10000 = 7,401 \times 10^4$

e. $0,00000041 = 4,1 \times 0,0000001 = 4,1 \times 10^{-7}$

Exercice 6

a. $4 \times 10^2 = 4 \times 100 = 400$

b. $6,1 \times 10^3 = 6,1 \times 1000 = 6100$

c. $5,9 \times 10^{-3} = 5,9 \times 0,001 = 0,0059$

d. $9,9 \times 10^{-1} = 9,9 \times 0,1 = 0,99$

e. $7,003 \times 10^{-4} = 7,003 \times 0,0001 = 0,0007003$

DÉFI

L'enjeu ici est de remarquer que $0,00078 \times 10^{-5}$ n'est pas une écriture scientifique.

En effet, 0,000 78 n'est pas un nombre compris entre 1 (inclu) et 10 (exclu).

Cherchons d'abord l'écriture décimale de $0,00078 \times 10^{-5}$:

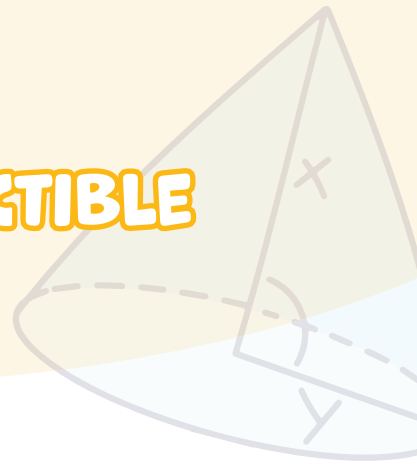
$$0,00078 \times 10^{-5} = 0,00078 \times 0,00001 = 0,0000000078$$

Puis transformons 0,0000000078 en écriture scientifique :

$$0,0000000078 = 7,8 \times 0,000000001 = 7,8 \times 10^{-9}$$

CHAPITRE 2

FRACTION IRRÉDUCTIBLE



PRÉ-REQUIS

- ▶ Multiples et diviseurs [6^e]
- ▶ Fractions égales [5^e]
- ▶ Simplifier une fraction [4^e]
- ▶ Nombres premiers inférieurs à 100 [4^e]
- ▶ Décomposition en produit de facteurs premiers [4^e]

☐
☐
☐
☐
☐


ON FAIT LE POINT

	A	B	C
1 12 est un diviseur de :	3	6	24
2 La fraction $\frac{15}{6}$ est égale à :	$\frac{30}{21}$	$\frac{45}{18}$	$\frac{30}{24}$
3 La fraction $\frac{36}{24}$ est égale à :	$\frac{6}{4}$	$\frac{26}{14}$	$\frac{9}{12}$
4 Lequel de ces nombres est premier ?	21	31	51
5 La décomposition en produit de facteur premier de 24 est :	2×12	4×6	$2 \times 2 \times 2 \times 3$



COMPRENDRE LA DÉFINITION

Voici trois fractions, toutes égales :

$$A = \frac{24}{42}$$

$$B = \frac{4}{7}$$

$$C = \frac{120}{210}$$

RAPPEL

Pour te convaincre, voici un rappel de 5^e pour reconnaître (ou produire) deux fractions égales :

$$A = \frac{24}{42} = \frac{24 \div 6}{42 \div 6} = \frac{4}{7} = B$$

$$A = \frac{24}{42} = \frac{24 \times 5}{42 \times 5} = \frac{120}{210} = C$$

Il faut multiplier (ou diviser) le numérateur ET le dénominateur par le même nombre.

Mais une seule est une **fraction irréductible**, laquelle ?

Définition :

On dit qu'une **fraction est irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur ont uniquement 1 comme diviseur commun.

La fraction A.

On décompose son numérateur et son dénominateur en produit de facteurs premiers :

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

24 et 42 ont deux diviseurs en commun : 2 et 3. **Donc la fraction A n'est pas irréductible.**

RAPPEL

Tu peux également trouver un diviseur « évident » en utilisant les critères de divisibilité.

Par exemple, 24 et 42 sont deux nombres pairs.

Donc 2 est un diviseur commun à 24 et 42.

La fraction B.

On décompose son numérateur et son dénominateur en produit de facteurs premiers :

$$4 = 2 \times 2$$

$$7 = 7$$

4 et 7 n'ont aucun diviseur en commun (autre que 1). **Donc la fraction B est irréductible.**

La fraction C.

On décompose son numérateur et son dénominateur en produit de facteurs premiers :

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

120 et 210 ont trois diviseurs en commun : 2, 3 et 5. **Donc la fraction A n'est pas irréductible.**

RAPPEL

Tu peux également trouver un diviseur « évident » en utilisant les critères de divisibilité.

Par exemple, le chiffre des unités de 120 et 210 est 0.

Donc 10 est un diviseur commun à 120 et 210.

(Pour cette même raison, 5 est également un diviseur commun !)



COMMENT RENDRE UNE FRACTION IRRÉDUCTIBLE ?

« **Rendre une fraction irréductible** » signifie trouver une fraction égale et sous forme irréductible. Cette solution est **unique**.

Tu l'as sûrement déjà compris grâce aux exemples précédents, il faut simplifier la fraction par tous les diviseurs communs à son numérateur et son dénominateur.

La **décomposition en produit de facteurs premiers** est un puissant outil pour y parvenir.

RAPPEL

Si tu ne te souviens plus de la technique opératoire pour trouver la décomposition en produit de facteurs premiers, il y a une touche de ta calculatrice qui le fait pour toi !

Essayons avec la fraction $D = \frac{3780}{3240}$.

On décompose en produit de facteurs premiers son numérateur et son dénominateur :

$$3780 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$3240 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$$

Les deux décompositions ont en commun $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$.

Il reste 7 au numérateur et 2×3 au dénominateur.

On peut donc simplifier la fraction D ainsi :

$$D = \frac{3780}{3240} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 7}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 2 \times 3} = \frac{7}{2 \times 3} = \frac{7}{6} \quad \leftarrow \text{fraction irréductible}$$

RAPPEL

Tu peux également simplifier étape par étape, en trouvant un diviseur « évident » :

10 est un diviseur commun à 3 780 et 3 240 (car leur chiffre des unités est 0).

$$\frac{3780}{3240} = \frac{10 \times 378}{10 \times 324} = \frac{378}{324}$$

2 est un diviseur commun à 378 et 324 (car ils sont tous les deux pairs).

$$\frac{378}{324} = \frac{2 \times 189}{2 \times 162} = \frac{189}{162}$$

9 est un diviseur commun à 189 et 162 (car la somme de leurs chiffres est un multiple de 9).

$$\frac{189}{162} = \frac{9 \times 21}{9 \times 18} = \frac{21}{18}$$

3 est un diviseur commun à 18 et 21.

$$\frac{21}{18} = \frac{3 \times 7}{3 \times 6} = \frac{7}{6}$$

1 est l'unique diviseur commun à 6 et 7. Donc $\frac{7}{6}$ est une fraction irréductible.



Exercice 1 : Rendre irréductible chaque fraction

a. $\frac{48}{75}$

b. $\frac{16}{28}$

c. $\frac{126}{180}$

d. $\frac{250}{100}$

e. $\frac{360}{252}$

f. $\frac{180}{190}$

g. $\frac{220}{100}$

h. $\frac{245}{65}$

i. $\frac{1848}{2040}$



Exercice 2 : Julie possède 150 billes bleues et 120 billes rouges.

a. Quelle est la proportion de billes rouges dans le sac ?

Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

b. Julie perd 10 billes rouges et 10 billes bleues pendant un jeu.

A-t-elle toujours la même proportion de billes rouges ?



Exercice 3 : Mon smartphone propose plusieurs formats d'image :

1 : 1 4 : 3 16 : 9 3 : 2

Quel format dois-je choisir pour :

a. Un tirage photo de 10 cm sur 15 cm ?

b. Une vidéo HD au format 1 920 × 1 080 pixels ?

c. Pour un tirage photo de 21 cm sur 29,7 cm ?

d. Pour un tirage carré ?



DÉFI



L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Expliquer votre réponse.

« Si le numérateur ou le dénominateur est un nombre premier, alors la fraction est irréductible. »

Exercice 1

a. On décompose le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers :

$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$75 = 3 \times 5 \times 5$$

Les deux décompositions ont uniquement 3 en commun.

Il reste $2 \times 2 \times 2 \times 2$ au numérateur et 5×5 au dénominateur.

On peut donc simplifier la fraction ainsi :

$$\frac{48}{75} = \frac{\cancel{3} \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{\cancel{3} \times 5 \times 5} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{5 \times 5} = \frac{16}{25}$$

Pour les fractions suivantes, je passe le détail du raisonnement qui n'est pas exigé en examen.

Tu peux présenter ton travail comme je vais faire ensuite.

$$b. \frac{16}{28} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 2}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 7} = \frac{4}{7}$$

$$f. \frac{180}{190} = \frac{\cancel{2} \times 2 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{5}}{\cancel{2} \times \cancel{5} \times 19} = \frac{18}{19}$$

$$c. \frac{126}{180} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 7}{2 \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 5} = \frac{7}{10}$$

$$g. \frac{220}{100} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{5} \times 11}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{5} \times 5} = \frac{11}{5}$$

$$d. \frac{250}{100} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times 5}{2 \times \cancel{2} \times \cancel{5} \times \cancel{5}} = \frac{5}{2}$$

$$h. \frac{245}{65} = \frac{\cancel{5} \times 7 \times 7}{\cancel{5} \times 13} = \frac{49}{13}$$

$$e. \frac{360}{252} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 7} = \frac{10}{7}$$

$$i. \frac{1848}{2040} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 7 \times 11}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 5 \times 17} = \frac{77}{85}$$

Exercice 2

$$a. \text{ proportion de billes rouges} = \frac{\text{nombre de billes rouges}}{\text{nombre total de billes}} = \frac{120}{270}$$

On décompose 120 et 270 en produit de facteurs premiers puis on simplifie la fraction :

$$\text{proportion de billes rouges} = \frac{120}{270} = \frac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{5}}{\cancel{2} \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{5}} = \frac{4}{9} \quad \leftarrow \text{fraction irréductible}$$

- b. Julie a perdu 10 billes rouges et 10 billes bleues, donc il lui reste 250 billes en tout, dont 110 billes rouges.

$$\text{nouvelle proportion de billes rouges} = \frac{110}{250} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{5} \times 11}{\cancel{2} \times \cancel{5} \times 5 \times 5} = \frac{11}{25} \leftarrow \text{fraction irréductible}$$

La première proportion sous forme d'une fraction irréductible est $\frac{4}{9}$.

La nouvelle proportion sous forme d'une fraction irréductible est $\frac{11}{25}$.

Or on a vu dans la leçon qu'il existe une unique fraction irréductible pour deux fractions égales.

Les deux proportions sont donc différentes.

Exercice 3

La notion de ratio est fortement liée à la notion de proportion.

Par exemple, un format d'image 4 : 3 signifie que la proportion de la longueur par rapport à la largeur est de $\frac{4}{3}$.

a. $\text{format de la photo} = \frac{\text{longueur}}{\text{largeur}} = \frac{15}{10} = \frac{3 \times \cancel{5}}{2 \times \cancel{5}} = \frac{3}{2}$

Il faut choisir le format 3 : 2.

b. $\text{format de la vidéo} = \frac{\text{longueur}}{\text{largeur}} = \frac{1920}{1080} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{5}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{5}} = \frac{16}{9}$

Il faut choisir le format 16 : 9.

c. $\text{format de la photo} = \frac{\text{longueur}}{\text{largeur}} = \frac{29,7}{21}$

Le numérateur n'est pas un nombre entier. On ne peut pas le décomposer en produit de facteur premier.

Il faut trouver une fraction égale dont le numérateur ET le dénominateur sont des nombres entiers.

L'astuce consiste à multiplier par 10 ou 100 ou 1 000...

Dans notre cas, la multiplication par 10 suffit :

$$\text{format de la photo} = \frac{29,7 \times 10}{21 \times 10} = \frac{297}{210}$$

On peut maintenant décomposer 297 et 210 en produit de facteurs premiers puis simplifier la fraction :

$$\text{format de la photo} = \frac{297}{210} = \frac{\cancel{3} \times 3 \times 3 \times 11}{2 \times \cancel{3} \times 5 \times 7} = \frac{99}{70}$$

Aucun format d'image de mon smartphone ne correspond parfaitement au tirage A4.

- d. Comme le tirage est carré, la largeur et la longueur de l'image sont identiques.

Il faut donc utiliser le format 1 : 1.

DÉFI

L'affirmation est fausse.

Il faut trouver un contre-exemple. Par exemple la fraction $\frac{3}{15}$.

Le numérateur 3 est un nombre premier.

Cependant, on peut simplifier le numérateur et le dénominateur par 3 :

$$\frac{3}{15} = \frac{\cancel{3} \times 1}{\cancel{3} \times 5} = \frac{1}{5}$$

Donc $\frac{3}{15}$ n'est pas une fraction irréductible.

CHAPITRE 3

DOUBLE DISTRIBUTIVITÉ



PRÉ-REQUIS

- ▶ Additionner des nombres relatifs [5^e] ☐
- ▶ Simplifier une expression littérale [5^e] ☐
- ▶ Multiplier des nombres relatifs [4^e] ☐
- ▶ Réduire une expression littérale [4^e] ☐
- ▶ Développer une expression littérale [4^e] ☐



ON FAIT LE POINT

	A	B	C
1 L'expression $3 \times 5x$ se simplifie en :	$15x$	$8x$	15
2 L'expression $2x \times (-3x)$ se simplifie en :	$-6x$	$6x$	$-6x^2$
3 L'expression $6x^2 + 7x + 3x + 1$ se réduit en :	$27x^2$	$26x^2 + 1$	$6x^2 + 10x + 1$
4 L'expression $x^2 - 5x + 8x - 3$ se réduit en :	$x^2 + 3x - 3$	$x^2 + 13x - 3$	$x^2 - 13x - 3$
5 Développer $-5(2x - 7)$	$-10x - 7$	$-10x + 35$	$-10x - 35$



COMPRENDRE LA MÉTHODE

« **Développer** » signifie transformer un produit en une somme.

Par exemple, on te demande de développer l'expression : $A = (5x + 3)(1 + 2x)$

Où est le produit ?

$A = (5x + 3)(1 + 2x)$ est le produit de $(5x + 3)$ par $(1 + 2x)$.

RAPPEL DE 5^e

On peut supprimer le signe « $\times$ » lorsqu'il est suivi d'une lettre ou d'une parenthèse.

Ainsi l'expression A est identique à l'expression
 $(5x + 3) \times (1 + 2x)$

Pour transformer ce produit en une somme, on utilise la simple distributivité.
Seulement ici, le facteur commun est une expression formée de deux termes :

$$\begin{array}{l} \text{facteur commun} \\ \swarrow \\ A = (5x + 3)(1 + 2x) \\ \searrow \quad \text{On développe} \\ A = \underbrace{(5x + 3) \times 1}_{\text{développement simple}} + \underbrace{(5x + 3) \times 2x}_{\text{développement simple}} \end{array}$$

RAPPEL DE 4^e

On développe en multipliant le facteur commun avec chaque terme de la deuxième parenthèse.

On obtient alors deux développements simples, d'où la notion de « double distributivité ».

Dans le premier développement, 1 est le facteur commun.

Dans le deuxième développement, $2x$ est le facteur commun.

On peut développer les deux simultanément.

$$A = \underbrace{(5x+3) \times 1}_{\text{développement simple}} + \underbrace{(5x+3) \times 2x}_{\text{développement simple}}$$



On développe les deux simultanément.

$$A = \underbrace{5x \times 1 + 3 \times 1}_{\text{développement simple}} + \underbrace{5x \times 2x + 3 \times 2x}_{\text{développement simple}}$$



On simplifie les 4 produits.

$$A = 5x + 3 + 10x^2 + 6x$$



On réduit les termes
quand c'est possible.

$$A = 10x^2 + 11x + 3$$

A est écrit sous la forme d'une somme des termes $10x^2$, $11x$ et 3.

L'expression est bien développée.

RAPPEL DE 5^e

Pour réduire une expression, on peut ajouter les termes de « même nature » ensemble :

- les « x » avec les « x » ;
- les « x^2 » avec les « x^2 » ;
- les « nombres » avec les « nombres » ;
- etc.

On peut généraliser cette méthode :

 **facteur commun**

$$A = (a+b)(c+d) \text{ est le produit de } (a+b) \text{ par } (c+d)$$

$$A = \underbrace{(a+b) \times c}_{\text{développement simple}} + \underbrace{(a+b) \times d}_{\text{développement simple}}$$

$$A = \underbrace{a \times c + b \times c}_{\text{développement simple}} + \underbrace{a \times d + b \times d}_{\text{développement simple}}$$

On n'oublie pas de simplifier les 4 produits et de réduire les termes pour obtenir une somme.

Exercice 1 : Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A = (x+3)(x+7) \quad B = (x-5)(x+1) \quad C = (2a+1)(a+3)$$

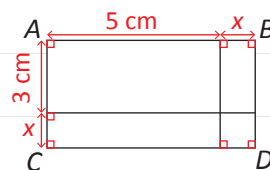
$$D = (a-4)(a-9) \quad E = (5+3m)(2m+4) \quad F = (3-5m)(m-1)$$

Exercice 2 :

1. Exprimer l'aire du rectangle $ABDC$ en fonction de x :

a. Sous la forme d'un produit. On appelle P cette expression.

b. Sous la forme d'une somme. On appelle S cette expression.



2. Vérifier qu'en développant P , on obtient S .

Exercice 3 : Découverte des identités remarquables

1. a. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A = (x+1)^2 \quad B = (5+2x)^2$$

b. Que remarques-tu ?

2. a. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$C = (x-1)^2 \quad D = (5-2x)^2$$

b. Que remarques-tu ?

3. a. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$E = (x+1)(x-1) \quad F = (5+2x)(5-2x)$$

b. Que remarques-tu ?

4. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$G = (a+b)^2 \quad H = (a-b)^2 \quad I = (a+b)(a-b)$$

Bravo, tu as démontré les 3 identités remarquables* !

**Les deux premières sont au programme de la classe de Seconde, et la troisième est étudiée au chapitre 4.*



Exercice 4 : Voici deux programmes de calcul :

Programme A :

- Choisir un nombre
- Soustraire 2
- Élever au carré
- Soustraire 4.

Programme B :

- Choisir un nombre
- Soustraire 4.
- Multiplier par le nombre de départ.

1. Tester les deux programmes en choisissant 3 puis -5 . Que remarques-tu ?
2. Démontrer votre conjecture faite à la question précédente.

DÉFI

Démontrer l'affirmation suivante :

« Si on multiplie deux nombres impairs consécutifs puis on ajoute 1, alors le résultat obtenu est toujours un multiple de 4. »

Exercice 1

facteur commun

$$A = (x+3)(x+7)$$

$$A = (x+3) \times x + (x+3) \times 7$$

développement simple développement simple

$$A = x \times x + 3 \times x + x \times 7 + 3 \times 7$$

développement simple développement simple

$$A = x^2 + 3x + 7x + 21$$

$$A = x^2 + 10x + 21$$

facteur commun

$$B = (x-5)(x+1)$$

$$B = (x-5) \times x + (x-5) \times 1$$

développement simple développement simple

$$B = x \times x - 5 \times x + x \times 1 - 5 \times 1$$

développement simple développement simple

$$B = x^2 - 5x + x - 5$$

$$B = x^2 - 4x - 5$$

facteur commun

$$C = (2a+1)(a+3)$$

$$C = (2a+1) \times a + (2a+1) \times 3$$

développement simple développement simple

$$C = 2a \times a + 1 \times a + 2a \times 3 + 1 \times 3$$

développement simple développement simple

$$C = 2a^2 + a + 6a + 3$$

$$C = 2a^2 + 7a + 3$$

facteur commun

$$D = (a-4)(a-9)$$

$$D = (a-4) \times a + (a-4) \times (-9)$$

développement simple développement simple

$$D = a \times a - 4 \times a + a \times (-9) - 4 \times (-9)$$

développement simple développement simple

$$D = a^2 - 4a - 9a + 36$$

$$D = a^2 - 13a + 36$$

facteur commun

$$E = (5+3m)(2m+4)$$

$$E = (5+3m) \times 2m + (5+3m) \times 4$$

développement simple développement simple

$$E = 5 \times 2m + 3m \times 2m + 5 \times 4 + 3m \times 4$$

développement simple développement simple

$$E = 10m + 6m^2 + 20 + 12m$$

$$E = 6m^2 + 22m + 20$$

facteur commun

$$F = (3-5m)(m-1)$$

$$F = (3-5m) \times m + (3-5m) \times (-1)$$

développement simple développement simple

$$F = 3 \times m - 5m \times m + 3 \times (-1) - 5m \times (-1)$$

développement simple développement simple

$$F = 3m - 5m^2 - 3 + 5m$$

$$F = -5m^2 + 8m - 3$$

Exercice 2

1. a. La longueur du rectangle ABDC est $5+x$.

La largeur du rectangle ABDC est $3+x$.

Pour calculer l'aire d'un rectangle, il faut multiplier la longueur par la largeur.

Donc son aire est $P = (5+x) \times (3+x)$, qui est bien sous la forme d'un produit.

- b. Pour avoir l'aire du rectangle $ABDC$, on peut additionner les aires des 4 rectangles découpés à l'intérieur :

Aire du rectangle avec un angle droit en $A = 5 \times 3 = 15$

Aire du rectangle avec un angle droit en $B = 3 \times x = 3x$

Aire du rectangle avec un angle droit en $C = x \times 5 = 5x$

Aire du rectangle avec un angle droit en $D = x \times x = x^2$

On additionne les 4 aires :

$$S = 15 + 3x + 5x + x^2$$

On réduit les termes de « même nature » :

$$S = x^2 + 8x + 15 \text{ qui est bien sous la forme d'une somme.}$$

2. On développe P :

$$P = (5 + x)(3 + x)$$

facteur commun

$$P = (5 + x) \times 3 + (5 + x) \times x$$

développement simple développement simple

$$P = 5 \times 3 + x \times 3 + 5 \times x + x \times x$$

développement simple développement simple

$$P = 15 + 3x + 5x + x^2$$

$$P = x^2 + 8x + 15$$

On obtient S .

Exercice 3 : Découverte des identités remarquables

1. a. $(x + 1)^2$ est égal à $(x + 1)(x + 1)$ et $(5 + 2x)^2$ est égal à $(5 + 2x)(5 + 2x)$.

$$A = (x + 1)(x + 1)$$

facteur commun

$$A = (x + 1) \times x + (x + 1) \times 1$$

développement simple développement simple

$$A = x \times x + 1 \times x + x \times 1 + 1 \times 1$$

développement simple développement simple

$$A = x^2 + x + x + 1$$

$$A = x^2 + 2x + 1$$

$$B = (5 + 2x)(5 + 2x)$$

facteur commun

$$B = (5 + 2x) \times 5 + (5 + 2x) \times 2x$$

développement simple développement simple

$$B = 5 \times 5 + 2x \times 5 + 5 \times 2x + 2x \times 2x$$

développement simple développement simple

$$B = 25 + 10x + 10x + 4x^2$$

$$B = 25 + 20x + 4x^2$$

b.

$$A = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Pour obtenir ce terme, on a élevé le **premier terme** de la parenthèse au carré.

Pour obtenir ce terme, on a multiplié les **deux termes** de la parenthèse puis on a **doublé** le résultat.

Pour obtenir ce terme, on a élevé le **deuxième terme** de la parenthèse au carré.

$$B = (5 + 2x)^2 = 25 + 20x + 4x^2$$

Pour obtenir ce terme, on a élevé le **premier terme** de la parenthèse au carré.

Pour obtenir ce terme, on a multiplié les **deux termes** de la parenthèse puis on a **doublé** le résultat.

Pour obtenir ce terme, on a élevé le **deuxième terme** de la parenthèse au carré.

2. a. $(x - 1)^2$ est égal à $(x - 1)(x - 1)$ et $(5 - 2x)^2$ est égal à $(5 - 2x)(5 - 2x)$.

facteur commun

$$C = (x - 1)(x - 1)$$

$$C = \underbrace{(x - 1) \times x}_{\text{développement simple}} + \underbrace{(x - 1) \times (-1)}_{\text{développement simple}}$$

$$C = \underbrace{x \times x - 1 \times x}_{\text{développement simple}} + \underbrace{x \times (-1) - 1 \times (-1)}_{\text{développement simple}}$$

$$C = x^2 - x - x + 1$$

$$C = x^2 - 2x + 1$$

facteur commun

$$D = (5 - 2x)(5 - 2x)$$

$$D = \underbrace{(5 - 2x) \times 5}_{\text{développement simple}} + \underbrace{(5 - 2x) \times (-2x)}_{\text{développement simple}}$$

$$D = \underbrace{5 \times 5 - 2x \times 5}_{\text{développement simple}} + \underbrace{5 \times (-2x) - 2x \times (-2x)}_{\text{développement simple}}$$

$$D = 25 - 10x - 10x + 4x^2$$

$$D = 25 - 20x + 4x^2$$

b.

$$A = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

Pour obtenir ce terme, on a élevé le **premier terme** de la parenthèse au carré.

Pour obtenir ce terme, on a multiplié les **deux termes** de la parenthèse puis on a **multiplié par -2** le résultat.

Pour obtenir ce terme, on a élevé le **deuxième terme** de la parenthèse au carré.

$$D = (5 - 2x)^2 = 25 - 20x + 4x^2$$

Pour obtenir ce terme, on a élevé le **premier terme** de la parenthèse au carré.

Pour obtenir ce terme, on a multiplié les **deux termes** de la parenthèse puis on a **multiplié par -2** le résultat.

Pour obtenir ce terme, on a élevé le **deuxième terme** de la parenthèse au carré.

3. a.

facteur commun

$$E = (x + 1)(x - 1)$$

$$E = (x + 1) \times x + (x + 1) \times (-1)$$

développement simple développement simple

$$E = x \times x + 1 \times x + x \times (-1) + 1 \times (-1)$$

développement simple développement simple

$$E = x^2 + x - x - 1$$

$$E = x^2 - 1$$

facteur commun

$$F = (5 + 2x)(5 - 2x)$$

$$F = (5 + 2x) \times 5 + (5 + 2x) \times (-2x)$$

développement simple développement simple

$$F = 5 \times 5 + 2x \times 5 + 5 \times (-2x) + 2x \times (-2x)$$

développement simple développement simple

$$F = 25 + 10x - 10x - 4x^2$$

$$F = 25 - 4x^2$$

b.

$$E = (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$$

Pour obtenir ce terme, on a élevé le **premier terme** de la parenthèse au carré.

On obtient une différence.

Pour obtenir ce terme, on a élevé le **deuxième terme** de la parenthèse au carré.

$$F = (5 + 2x)(5 - 2x) = 25 - 4x^2$$

Pour obtenir ce terme, on a élevé le **premier terme** de la parenthèse au carré.

On obtient une différence.

Pour obtenir ce terme, on a élevé le **deuxième terme** de la parenthèse au carré.

4. $(a+b)^2$ est égale à $(a+b)(a+b)$.

facteur commun

$$G = (a+b)(a+b)$$

$$G = \underbrace{(a+b) \times a}_{\text{développement simple}} + \underbrace{(a+b) \times b}_{\text{développement simple}}$$

$$G = \underbrace{a \times a}_{\text{développement simple}} + \underbrace{b \times a}_{\text{développement simple}} + \underbrace{a \times b}_{\text{développement simple}} + \underbrace{b \times b}_{\text{développement simple}}$$

$$G = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$G = a^2 + 2ab + b^2$$

$(a-b)^2$ est égale à $(a-b)(a-b)$.

facteur commun

$$H = (a-b)(a-b)$$

$$H = \underbrace{(a-b) \times a}_{\text{développement simple}} + \underbrace{(a-b) \times (-b)}_{\text{développement simple}}$$

$$H = \underbrace{a \times a}_{\text{développement simple}} - \underbrace{b \times a}_{\text{développement simple}} + \underbrace{a \times (-b)}_{\text{développement simple}} - \underbrace{b \times (-b)}_{\text{développement simple}}$$

$$H = a^2 - ab - ab + b^2$$

$$H = a^2 - 2ab + b^2$$

facteur commun

$$I = (a+b)(a-b)$$

$$I = \underbrace{(a+b) \times a}_{\text{développement simple}} + \underbrace{(a+b) \times (-b)}_{\text{développement simple}}$$

$$I = \underbrace{a \times a}_{\text{développement simple}} + \underbrace{b \times a}_{\text{développement simple}} + \underbrace{a \times (-b)}_{\text{développement simple}} + \underbrace{b \times (-b)}_{\text{développement simple}}$$

$$I = a^2 + ab - ab - b^2$$

$$I = a^2 - b^2$$

Exercice 4

1. On teste le nombre 3 avec le programme A :

- Je choisis 3.
- $3 - 2 = 1$
- $1^2 = 1$
- $1 - 4 = -3$.

On obtient -3 avec le programme A.

On teste le nombre 3 avec le programme B :

- Je choisis 3.
- $3 - 4 = -1$
- $-1 \times 3 = -3$.

On obtient également -3 avec le programme B.

On teste le nombre -5 avec le programme A :

- Je choisis -5 .
- $-5 - 2 = -7$
- $(-7)^2 = 49$ **Attention, le carré d'un nombre est toujours positif**
- $49 - 4 = 45$.

On obtient 45 avec le programme A.

On teste le nombre -5 avec le programme B :

- Je choisis -5 .
- $-5 - 4 = -9$
- $-9 \times (-5) = 45$.

On obtient également 45 avec le programme B.

Je remarque qu'en choisissant le même nombre, les programmes A et B donnent le même résultat.

2. Pour démontrer qu'une conjecture est vraie pour tous les nombres, on choisit une variable x et on applique les programmes A et B.

On teste le nombre x avec le programme A :

- Je choisis x .
- $x - 2$ **Attention, on ne peut pas réduire cette expression**
- $(x - 2)^2$.
- $(x - 2)^2 - 4$.

On obtient $(x - 2)^2 - 4$ avec le programme A.

On teste le nombre x avec le programme B :

- Je choisis x .
- $x - 4$ **Attention, on ne peut pas réduire cette expression**
- $(x - 4) \times x$.

On obtient $(x - 4) \times x$ avec le programme B.

À ce stade, les deux résultats semblent différents.

L'astuce consiste à **développer et réduire** les deux expressions :

$$A = (x-2)^2 - 4$$

$$A = (x-2)(x-2) - 4$$

$$A = (x-2) \times x + (x-2) \times (-2) - 4$$

$$A = x \times x - 2 \times x + x \times (-2) - 2 \times (-2) - 4$$

$$A = x^2 - 2x - 2x + 4 - 4$$

$$A = x^2 - 4x$$

Il faut appliquer la double distributivité à l'expression soulignée, tout en gardant « -4 » en fin d'expression.

$$B = (x-4) \times x$$

$$B = x \times x - 4 \times x$$

$$B = x^2 - 4x$$

Il faut appliquer la simple distributivité.

Les deux résultats sont identiques pour n'importe quel nombre x . On vient de démontrer la conjecture.

DÉFI

L'enjeu du défi est de modéliser par une expression algébrique la phrase :

« On multiplie deux **nombre**s **impairs consécutifs** puis on ajoute 1 »

Dans la suite des explications, la variable « n » désigne un nombre entier quelconque.

Modéliser un nombre impair :

Un nombre pair est un multiple de 2, donc un nombre pair s'écrit sous la forme « $2n$ ».

Un nombre impair suit toujours un nombre pair, donc un nombre impair s'écrit sous la forme « $2n + 1$ ».

Modéliser le nombre impair consécutif, c'est-à-dire le suivant :

Analysons la suite des nombres impairs : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; etc.

Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute 2.

Si « $2n + 1$ » désigne un nombre impair, alors le nombre impair suivant est « $2n + 1 + 2$ ».

On réduit « $2n + 1 + 2$ » et on obtient « $2n + 3$ ».

Modélisation de la phrase :

« On multiplie deux **nombres impairs consécutifs** puis on ajoute 1 » devient :

$$D = (2n+1) \times (2n+3) + 1$$

Pourquoi cette expression est un multiple de 4 ? Pas évident au premier coup d'œil.

L'astuce consiste à **développer et réduire** l'expression :

$$D = (2n+1) \times (2n+3) + 1$$

$$D = (2n+1) \times 2n + (2n+1) \times 3 + 1$$

$$D = 2n \times 2n + 1 \times 2n + 2n \times 3 + 1 \times 3 + 1$$

$$D = 4n^2 + 2n + 6n + 3 + 1$$

$$D = 4n^2 + 8n + 4$$

Il faut appliquer la double distributivité à l'expression soulignée, tout en gardant « +1 » en fin d'expression.

Pourquoi cette expression est-elle un multiple de 4 ?

Par définition, un multiple de 4 est un nombre qui peut s'écrire sous la forme « $4 \times \text{quelque chose}$ ».

L'astuce consiste à vérifier si 4 est un facteur commun à tous les termes de l'expression, et ainsi factoriser par 4 :

$$D = 4n^2 + 8n + 4$$

D contient 3 termes : $4n^2$, $8n$ et 4.

$$D = 4 \times n^2 + 4 \times 2n + 4 \times 1$$

Chacun de ces termes est un multiple de 4, c'est gagné !

$$D = 4 \times (n^2 + 2n + 1)$$

D est bien sous la forme « $4 \times \text{quelque chose}$ » donc D est un multiple de 4.

CQFD, défi relevé !

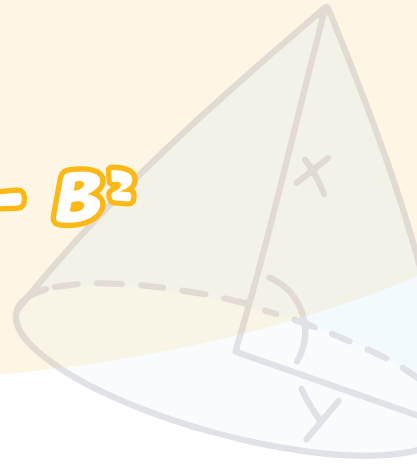
RAPPEL

Ce qu'il faut retenir de ce défi :

- Modéliser une phrase par une expression algébrique ;
- Essayer de développer et/ou factoriser pour obtenir le résultat souhaité.

CHAPITRE 4

FACTORISER $A^2 - B^2$



PRÉ-REQUIS

- ▶ Multiples et diviseurs [6^e]
- ▶ Additionner des nombres relatifs [5^e]
- ▶ Expression littérale [5^e]
- ▶ Multiplier des nombres relatifs [4^e]
- ▶ Développer une expression [4^e]
- ▶ Factoriser une expression [4^e]
- ▶ Racine carrée [4^e]

☐
☐
☐
☐
☐
☐
☐


ON FAIT LE POINT

	A	B	C
1 Un diviseur commun à 10 et 15 est :	30	10	5
2 L'expression $15x$ signifie :	$15 + x$	$15 \times x$	Rien car x n'est pas un nombre.
3 L'expression $12a + 6b$ signifie :	$12 \times a + 6 \times b$	$12 + a + 6 + b$	$18 \times a \times b$
4 Une expression factorisée de $9x + 12$ est :	$9 \times (x + 12)$	$3 \times (3x + 12)$	$3 \times (3x + 4)$
5 Une expression factorisée de $5x + x^2$ est :	aucune	$x \times (5 + x)$	$x \times 5x^2$



COMPRENDRE LA MÉTHODE

« **Factoriser** » signifie transformer une somme en un produit.

Par exemple, on te demande de factoriser l'expression : $A = 25x^2 - 16$.

Où est la somme ?

$A = 25x^2 - 16$ est la somme des termes « $25x^2$ » et « -16 ».

RAPPEL DE 5^e

a et b désignent deux nombres quelconques.

Le calcul $a - b$ est identique au calcul $a + (-b)$.

Pour transformer une somme en un produit, tu as appris en classe de 4^e à trouver **un facteur commun** aux deux termes.

Cependant, 25 et 16 n'ont aucun diviseur commun (autre que 1), et la variable « x » n'apparaît pas dans les deux termes. Ainsi on ne peut ni factoriser par un nombre fixe, ni par une variable.

L'astuce consiste à utiliser la **troisième identité remarquable**¹ :

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

On superpose le membre de gauche de cette égalité avec notre expression A :

$$A = 25x^2 - 16$$

$$a^2 - b^2$$

1. On a déjà démontré cette égalité dans l'exercice 3 du chapitre 3.

On constate que le terme « $25x^2$ » joue le rôle du terme « a^2 ».

Pour trouver la valeur de a , il faut déterminer quel nombre élevé au carré donne $25x^2$.

Autrement dit, il faut compléter cette égalité en utilisant deux fois le même nombre : $\dots \times \dots = 25x^2$

Voici la solution : $5x \times 5x = 25x^2$

Donc $a = 5x$.

De la même manière, on constate que le terme « 16 » joue le rôle du terme « b^2 ».

Pour trouver la valeur de b , il faut déterminer quel nombre élevé au carré donne 16.

Autrement dit, il faut compléter cette égalité en utilisant deux fois le même nombre : $\dots \times \dots = 16$

Voici la solution : $4 \times 4 = 16$

Donc $b = 4$.

Maintenant qu'on a déterminé la valeur de a et b , on peut utiliser le deuxième membre de l'égalité sans difficulté :

$$A = 25x^2 - 16 = (5x + 4)(5x - 4)$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

A est écrit sous la forme d'un produit des facteurs $(5x + 4)$ et $(5x - 4)$.

L'expression est bien factorisée.



Exercice 1 : Factoriser les expressions suivantes à l'aide de la troisième identité remarquable :

$$A = x^2 - 9$$

$$B = 81 - m^2$$

$$C = 36x^2 - 49$$

$$D = 25 - 4p^2$$



Exercice 2 : Factoriser les expressions suivantes à l'aide de la troisième identité remarquable :

$$E = x^2 - 15$$

$$F = x^2 - 40$$

$$G = 5x^2 - 19$$

DÉFI

Calculer astucieusement à l'aide de la troisième identité remarquable  :

$$H = 502^2 - 498^2$$

Exercice 1

$$A = x^2 - 9$$

x^2 joue le rôle de a^2 .

$$\text{Or } x \times x = x^2$$

$$\text{Donc } a = x.$$

9 joue le rôle de b^2 .

$$\text{Or } 3 \times 3 = 9$$

$$\text{Donc } b = 3.$$

Finalement,

$$A = (x+3)(x-3).$$

$$B = 81 - m^2$$

81 joue le rôle de a^2 .

$$\text{Or } 9 \times 9 = 81$$

$$\text{Donc } a = 9.$$

m^2 joue le rôle de b^2 .

$$\text{Or } m \times m = m^2$$

$$\text{Donc } b = m.$$

Finalement,

$$B = (9+m)(9-m).$$

$$C = 36x^2 - 49$$

$36x^2$ joue le rôle de a^2 .

$$\text{Or } 6x \times 6x = 36x^2$$

$$\text{Donc } a = 6x.$$

49 joue le rôle de b^2 .

$$\text{Or } 7 \times 7 = 49$$

$$\text{Donc } b = 7.$$

Finalement,

$$C = (6x+7)(6x-7).$$

$$D = 25 - 4p^2$$

25 joue le rôle de a^2 .

$$\text{Or } 5 \times 5 = 25$$

$$\text{Donc } a = 5.$$

$4p^2$ joue le rôle de b^2 .

$$\text{Or } 2p \times 2p = 4p^2$$

$$\text{Donc } b = 2p.$$

Finalement,

$$D = (5+2p)(5-2p).$$

Exercice 2

$$E = x^2 - 15$$

x^2 joue le rôle de a^2 .

$$\text{Or } x \times x = x^2$$

$$\text{Donc } a = x.$$

15 joue le rôle de b^2 .

$$\text{Or } \sqrt{15} \times \sqrt{15} = 15$$

$$\text{Donc } b = \sqrt{15}.$$

$$\text{Finalement, } E = (x + \sqrt{15})(x - \sqrt{15}).$$

15 n'est pas un carré parfait, il faut donc utiliser la notation « racine carrée ».

$$F = x^2 - 40$$

x^2 joue le rôle de a^2 .

$$\text{Or } x \times x = x^2$$

$$\text{Donc } a = x.$$

40 joue le rôle de b^2 .

$$\text{Or } \sqrt{40} \times \sqrt{40} = 40$$

$$\text{Donc } b = \sqrt{40}.$$

$$\text{Finalement, } F = (x + \sqrt{40})(x - \sqrt{40}).$$

40 n'est pas un carré parfait, il faut donc utiliser la notation « racine carrée ».

$$G = 5x^2 - 19$$

$5x^2$ joue le rôle de a^2 .

$$\text{Or } \sqrt{5x} \times \sqrt{5x} = 5x^2$$



5 n'est pas un carré parfait, il faut donc utiliser la notation « racine carrée ».

$$\text{Donc } a = \sqrt{5x}.$$

19 joue le rôle de b^2 .

$$\text{Or } \sqrt{19} \times \sqrt{19} = 19$$



40 n'est pas un carré parfait, il faut donc utiliser la notation « racine carrée ».

$$\text{Donc } b = \sqrt{19}$$

$$\text{Finalement, } G = (\sqrt{5x} + \sqrt{19})(\sqrt{5x} - \sqrt{19}).$$

DÉFI

$$H = 502^2 - 498^2$$

502^2 joue le rôle de a^2

$$\text{Or } 502 \times 502 = 502^2$$

$$\text{Donc } a = 502.$$

498^2 joue le rôle de b^2 .

$$\text{Or } 498 \times 498 = 498^2$$

$$\text{Donc } b = 498.$$

Finalement,

$$H = (502 + 498) \times (502 - 498)$$

On calcule chaque parenthèse :

$$H = (502 + 498) \times (502 - 498)$$

$$H = 1000 \times 4$$

$$H = 4\,000$$

CHAPITRE 5

ÉQUATION PRODUIT-NUL



PRÉ-REQUIS

- ▶ Additionner des nombres relatifs [5^e] ☐
- ▶ Expression littérale [5^e] ☐
- ▶ Multiplier et diviser des nombres relatifs [4^e] ☐
- ▶ Résoudre une équation du premier degré [4^e] ☐
- ▶ Factoriser une expression [4^e] ☐



ON FAIT LE POINT

	A	B	C
1 L'égalité $5x + 2 = 17$ est vraie pour :	$x = 0$	$x = 3$	$x = 17$
2 5 est solution de l'équation :	$9 - 3x = 2x - 16$	$7x - 3 = 2x + 8$	$8 - 2x = x + 5$
3 Une équation du premier degré peut être :	$x^2 + 6 = 5 - 3x$	$1 - 4x = 0$	$\frac{5}{x} = 3x + 1$
4 L'équation $2x + 7 = 5$ a pour solution :	$x = 6$	$x = -4$	$x = -1$
5 L'équation $5x = 0$ a pour solution :	$x = 5$	$x = -5$	$x = 0$

Solutions : 1.B 2.A 3.B 4.C 5.C



COMPRENDRE LA MÉTHODE

Une **équation produit-nul** est une équation dont l'un des membres est un produit et l'autre membre est égal à zéro :

$$(expression1) \times (expression2) = 0$$

Pour résoudre ce type d'équation, le principe est très simple :

Si un produit de facteurs est nul, alors l'un des facteurs est nul.

Dit comme cela, ce n'est peut-être pas évident, alors voici une autre formulation :

$$\text{Si } a \times b = 0 \text{ alors } a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Toujours pas convaincu ? Voilà une dernière formulation :

Si j'obtiens zéro en multipliant deux nombres, alors l'un des deux nombres est forcément égal à zéro.

À toi de mémoriser la formulation qui te convient le mieux !



RÉSoudre UNE ÉQUATION PRODUIT-NUL

On va utiliser ce principe pour résoudre cette équation :

$$(2x+3)(5x+7)=0$$

Le membre de gauche est le produit de $(2x+3)$ par $(5x+7)$.

Le membre de droite est nul.

On a bien une **équation produit-nul**.

D'après le principe vu précédemment, on peut dire que :

$$2x+3=0 \quad \text{ou} \quad 5x+7=0$$

On obtient alors deux équations du premier degré qu'on sait résoudre !
C'est parti :

Résolution de la première équation :

$$2x + 3 = 0$$

$$2x = -3$$

$$x = \frac{-3}{2}$$

$$x = -1,5$$

Résolution de la deuxième équation :

$$5x + 7 = 0$$

$$5x = -7$$

$$x = \frac{-7}{5}$$

$$x = -1,4$$

L'équation $(2x + 3)(5x + 7) = 0$ a **DEUX solutions** : $x = -1,5$ et $x = -1,4$.

Vérification de la solution $x = -1,5$:

$$(2 \times [-1,5] + 3)(5 \times [-1,5] + 7)$$

$$= (-3 + 3)(-7,5 + 7)$$

$$= 0 \times (-0,5)$$

$$= 0 \leftarrow \text{la solution est correcte}$$

Vérification de la solution $x = -1,4$:

$$(2 \times [-1,4] + 3)(5 \times [-1,4] + 7)$$

$$= (-2,8 + 3)(-7 + 7)$$

$$= 0,2 \times 0$$

$$= 0 \leftarrow \text{la solution est correcte}$$



Exercice : Résoudre les équations produit-nul suivantes :

a. $(x+8)(x-5)=0$

d. $3x(4x-7)=0$

b. $(3x-12)(2x+7)=0$

e. $(x+8)^2=0$

c. $(5m-2)(6m+9)=0$

DÉFI



Résoudre l'équation suivante :

$$5x^2 - 3x = 0$$

Exercice 1

a. $(x+8)(x-5)=0$

Le membre de gauche est le produit de $(x+8)$ par $(x-5)$. Le membre de droite est nul.

On a bien une **équation produit-nul**. On peut dire que :

$$x+8=0 \quad \text{ou} \quad x-5=0$$

On obtient alors deux équations du premier degré qu'on sait résoudre ! C'est parti :

Résolution de la première équation :

$$x+8=0$$

$$x=-8$$

Résolution de la deuxième équation :

$$x-5=0$$

$$x=5$$

L'équation $(x+8)(x-5)=0$ a **DEUX solutions** : $x=-8$ et $x=5$.

Pour la suite de l'exercice, je n'écris que la rédaction obligatoire.

b. $(3x-12)(2x+7)=0$

$$3x-12=0 \quad \text{ou} \quad 2x+7=0$$

Résolution de la première équation :

$$3x-12=0$$

$$3x=12$$

$$x=\frac{12}{3}$$

$$x=4$$

Résolution de la deuxième équation :

$$2x+7=0$$

$$2x=-7$$

$$x=\frac{-7}{2}$$

$$x=-3,5$$

L'équation a deux solutions : $x=4$ et $x=-3,5$.

c. $(5m-2)(6m+9)=0$

$$5m-2=0 \quad \text{ou} \quad 6m+9=0$$

Résolution de la première équation :

$$5m-2=0$$

$$5m=2$$

$$m=\frac{2}{5}$$

$$m=0,4$$

Résolution de la deuxième équation :

$$6m+9=0$$

$$6m=-9$$

$$m=-\frac{9}{6}$$

$$m=-1,5$$

L'équation a deux solutions : $m=0,4$ et $m=-1,5$.

d. $3x(4x-7)=0$

$$3x=0 \quad \text{ou} \quad 4x-7=0$$

Résolution de la première équation :

$$3x=0$$

$$x=0$$

Résolution de la deuxième équation :

$$4x-7=0$$

$$4x=7$$

$$x=\frac{7}{4}$$

$$x=1,75$$

L'équation a deux solutions : $x=0$ et $x=1,75$.

e. $(x+8)^2=0$

L'équation $(x+8)^2=0$ est identique à l'équation $(x+8)(x+8)=0$.

Donc $x+8=0$ ou $x+8=0$.

Les deux équations du premier degré sont identiques !

On va en résoudre une seule :

$$x+8=0$$

$$x=-8$$

L'équation a **une solution** : $x=-8$.

DÉFI

$$5x^2 - 3x = 0$$

Cette équation n'est pas du premier degré, à cause du terme « x^2 ».

Elle n'est pas une équation produit, mais une somme des termes « $5x^2$ » et « $-3x$ ».

Mais nous ne sommes pas coincés pour autant !

L'astuce consiste à **transformer la somme en produit en factorisant** :

$$\begin{aligned} 5x^2 - 3x \\ &= x \times 5x - x \times 3 \\ &= x \times (5x - 3) \end{aligned}$$

 La variable x est un facteur commun aux deux termes « $5x^2$ » et « $3x$ »

Ainsi l'équation $5x^2 - 3x = 0$ est équivalente à l'équation $x \times (5x - 3) = 0$ qui est une équation produit-nul. Donc :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 5x - 3 = 0$$

On a directement la solution $x = 0$, mais il faut aussi résoudre la deuxième équation :

$$5x - 3 = 0$$

$$5x = 3$$

$$x = \frac{3}{5}$$

$$x = 0,6$$

L'équation $5x^2 - 3x = 0$ a **DEUX solutions** : $x = 0$ et $x = 0,6$.

CHAPITRE 6

ÉQUATION DU TYPE $x^2 = A$



PRÉ-REQUIS

- ▶ Additionner des nombres relatifs [5^e]
- ▶ Expression littérale [5^e]
- ▶ Multiplier et diviser des nombres relatifs [4^e]
- ▶ Résoudre une équation du premier degré [4^e]
- ▶ Factoriser $a^2 - b^2$ [3^e]
- ▶ Équation produit-nul [3^e]

☐
☐
☐
☐
☐
☐


ON FAIT LE POINT

	A	B	C
1 Une forme factorisée de $x^2 - 4$ est :	$(x-2)$	$(x+2)$	$(x+2)(x-2)$
2 Une forme factorisée de $9x^2 - 16$ est :	$(9x+4)(9x-4)$	$(3x+4)(3x-4)$	$(9x+16)(9x-16)$
3 Les solutions de l'équation $(x+1)(x-1) = 0$ sont :	$x=1$ et $x=-1$	$x=1$ et $x=0$	$x=1$ et $x=2$
4 L'égalité $x^2 = 16$ est vraie pour :	$x=8$	$x=4$	$x=0$
5 L'égalité $x^2 = 25$ est vraie pour :	$x=-5$	$x=12,5$	$x=50$

Solutions : 1.C 2.Z 3.A 4.B 5.A



SAVOIR RECONNAÎTRE CE TYPE D'ÉQUATION

Jusqu'à maintenant, tu ne sais résoudre que des équations du premier degré.

Je vais t'apprendre maintenant à résoudre une équation du type $x^2 = a$.

RAPPELS DE 4^e

Une équation est dite « du premier degré » si les puissances de l'inconnue sont de degré 1 ou 0.

Cette équation peut être écrite sous la forme :

$$ax + b = 0$$

Les termes de types « x^2 », « $\sqrt{x}$ », « $\frac{1}{x}$ » sont exclus.

Est-ce une équation du premier degré ?

La réponse est non ! Il s'agit d'une équation du second degré, car il y a le terme « x^2 ».

Je t'entends déjà soupirer : « Oh non, encore un nouvel outil à apprendre... ».

Et bien, pas tout à fait ! La méthode générale pour résoudre des équations du second degré de la forme « $ax^2 + bx + c = 0$ » sera abordée au lycée.

La forme « $x^2 = a$ » est beaucoup plus simple, et les outils vus précédemment suffisent. Pas besoin d'en créer de nouveaux.



RÉSOLURE D'UNE ÉQUATION DE TYPE « $x^2 = A$ »

Essayons de résoudre l'équation : $x^2 = 20$

Première étape : Obtenir une équation écrite sous la forme « $x^2 - a = 0$ »

$$\begin{array}{c} \curvearrowleft \quad x^2 = 20 \\ x^2 - 20 = 0 \end{array}$$

On soustrait 20 aux deux
membres de l'égalité.

Deuxième étape : on factorise le membre de gauche à l'aide de la troisième identité remarquable

$$\text{membre de gauche} = x^2 - 20$$

x^2 joue le rôle de a^2 .

$$\text{Or } x \times x = x^2$$

$$\text{Donc } a = x.$$

20 joue le rôle de b^2 .

$$\text{Or } \sqrt{20} \times \sqrt{20} = 20$$

$$\text{Donc } b = \sqrt{20}.$$



20 n'est pas un carré parfait,
il faut donc utiliser la notation
« racine carrée ».

$$\text{Finalement, membre de gauche} = (x + \sqrt{20})(x - \sqrt{20})$$

Troisième étape : On obtient une équation produit-nul à résoudre

$$(x + \sqrt{20})(x - \sqrt{20}) = 0 \quad \text{donc} \quad x + \sqrt{20} = 0 \quad \text{ou} \quad x - \sqrt{20} = 0$$

Résolution de la première équation :

$$x + \sqrt{20} = 0$$

$$x = -\sqrt{20}$$

Résolution de la première équation :

$$x - \sqrt{20} = 0$$

$$x = \sqrt{20}$$

Conclusion : Les solutions de l'équation $x^2 = 20$ sont $x = -\sqrt{20}$ et $x = \sqrt{20}$.

On peut ainsi généraliser :

Les solutions de l'équation :

$$x^2 = a$$

$$\text{sont } x = \sqrt{a} \text{ et } x = -\sqrt{a}.$$



Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 = 25$

d. $x^2 = 6$

b. $x^2 = 81$

e. $x^2 = 34$

c. $x^2 = -36$

DÉFI



Résoudre l'équation suivante :

$$4x^2 = 169$$

Exercice 1

Pour résoudre les équations, tu peux soit :

- apprendre par cœur l'encadré final de la leçon et l'appliquer ;
- raisonner à l'aide des 3 étapes expliquées dans la leçon.

a. $x^2 = 25$ Étape 1
 $x^2 - 25 = 0$ Étape 2
 $(x + 5)(x - 5) = 0$ Étape 3
 $x + 5 = 0$ ou $x - 5 = 0$

Résolution de la première équation :

$$x + 5 = 0$$

$$x = -5$$

Résolution de la deuxième équation :

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

Les solutions de l'équation $x^2 = 25$ sont $x = -5$ et $x = 5$.

b. $x^2 = 81$ Étape 1
 $x^2 - 81 = 0$ Étape 2
 $(x + 9)(x - 9) = 0$ Étape 3
 $x + 9 = 0$ ou $x - 9 = 0$

Résolution de la première équation :

$$x + 9 = 0$$

$$x = -9$$

Résolution de la deuxième équation :

$$x - 9 = 0$$

$$x = 9$$

Les solutions de l'équation $x^2 = 81$ sont $x = -9$ et $x = 9$.

c. $x^2 = -36$

Cette équation n'a pas de solution !

En effet, le carré d'un nombre ne peut pas être **négatif**.

Donc il existe aucun nombre x qui, élevé au carré, donne pour résultat -36 .

d. $x^2 = 6$

$x^2 - 6 = 0$  **Étape 1**

Étape 2 : 6 n'est pas un carré parfait, donc on utilise la notation « racine carrée »

$(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6}) = 0$ 

$x + \sqrt{6} = 0$ ou $x - \sqrt{6} = 0$  **Étape 3**

Résolution de la première équation :

$$x + \sqrt{6} = 0$$

$$x = -\sqrt{6}$$

Résolution de la deuxième équation :

$$x - \sqrt{6} = 0$$

$$x = \sqrt{6}$$

Les solutions de l'équation $x^2 = 6$ sont $x = -\sqrt{6}$ et $x = \sqrt{6}$.

e. $x^2 = 34$

$x^2 - 34 = 0$  **Étape 1**

Étape 2 : 34 n'est pas un carré parfait, donc on utilise la notation « racine carrée »

$(x + \sqrt{34})(x - \sqrt{34}) = 0$ 

$x + \sqrt{34} = 0$ ou $x - \sqrt{34} = 0$  **Étape 3**

Résolution de la première équation :

$$x + \sqrt{34} = 0$$

$$x = -\sqrt{34}$$

Résolution de la deuxième équation :

$$x - \sqrt{34} = 0$$

$$x = \sqrt{34}$$

Les solutions de l'équation $x^2 = 34$ sont $x = -\sqrt{34}$ et $x = \sqrt{34}$.

DÉFI

$$4x^2 = 169$$

Première étape : Obtenir une équation écrite sous la forme « $x^2 - a = 0$ »

$$4x^2 = 169 \quad \rightarrow \quad x^2 - 169 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{On soustrait 169 aux deux membres de l'égalité.}$$

Deuxième étape : on factorise le membre de gauche à l'aide de la troisième identité remarquable

$$\text{membre de gauche} = 4x^2 - 169$$

$4x^2$ joue le rôle de a^2 .

$$\text{Or } 2x \times 2x = 4x^2$$

$$\text{Donc } a = 2x.$$

169 joue le rôle de b^2 .

$$\text{Or } 13 \times 13 = 169$$

$$\text{Donc } b = 13$$

Finalement,

$$\text{membre de gauche} = (2x + 13)(2x - 13)$$

Troisième étape : On obtient une équation produit-nul à résoudre

$$(2x + 13)(2x - 13) = 0 \quad \text{donc} \quad 2x + 13 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 13 = 0$$

Résolution de la première équation :

$$2x + 13 = 0$$

$$2x = -13$$

$$x = \frac{-13}{2}$$

$$x = -6,5$$

Résolution de la première équation :

$$2x - 13 = 0$$

$$2x = 13$$

$$x = \frac{13}{2}$$

$$x = 6,5$$

Conclusion : Les solutions de l'équation $4x^2 = 169$ sont $x = -6,5$ et $x = 6,5$

Partie
2

STATISTIQUES ET PROBABILITÉ



CHAPITRE

7

L'ÉTENDUE



PRÉ-REQUIS

► Traitement de données statistiques [5^e]



ON FAIT LE POINT

Compléter les mots manquants à partir de cette liste :

**VALEURS – EFFECTIF TOTAL – POPULATION – DONNÉES –
CARACTÈRE – EFFECTIF – SÉRIE**

Une étude statistique consiste à collecter et organiser des **1** : pour cela on s'intéresse à un **2** particulier d'une **3**.

L'ensemble des données collectées constituent une **4** statistique, qu'on peut organiser sous forme de tableaux, diagrammes en bâtons, diagramme circulaire ou graphique cartésien.

Les données peuvent prendre plusieurs **5** différentes.

On appelle **6** d'une valeur le nombre de fois qu'elle apparaît dans la série.

On appelle **7** le nombre de données collectées.

Solution : (1) données (2) caractère (3) population (4) série (5) valeurs (6) effectif (7) effectif total



COMPRENDRE LA DÉFINITION

L'**étendue** d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur.

Une différence est le résultat d'une soustraction : tu dois repérer la plus grande valeur et la plus petite valeur puis les soustraire.

Pour ne pas confondre valeur et effectif, tu dois toujours te poser la question :

« Quel est le caractère étudié ? »

Série 1

On a demandé à une classe de 16 élèves combien de temps ils consacrent au petit-déjeuner en minutes. Voici les données collectées :

15 – 13 – 1 – 8 – 16 – 20 – 13 – 11 – 3 – 8 – 8 – 8 – 13 – 13 – 14 – 10

Le caractère étudié est le temps consacré au petit déjeuner.

La plus grande valeur est 20 minutes.

La plus petite valeur est 1 minute.

Étendue = $20 - 1 = 19$ minutes ← *Toujours préciser l'unité*

Interprétation possible : Le plus lent des élèves consacre 19 minutes de plus à manger son petit-déjeuner que le plus rapide.

Série 2

On a demandé à une classe de 25 élèves le nombre de livres lus par an. Voici les données collectées :

Nombre de livres lus	0	1	2	3	4
Nombres d'élèves	1	13	7	3	1

Le caractère étudié est le nombre de livres lus.

La plus grande valeur est 4 livres.

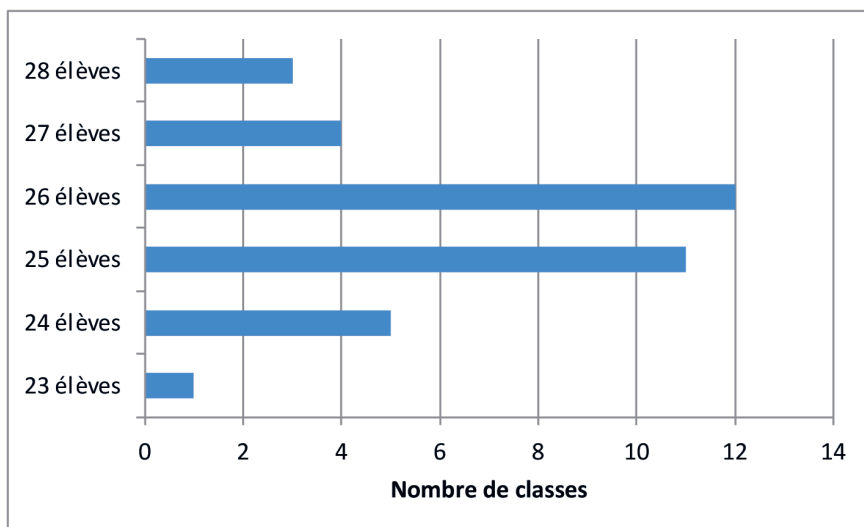
La plus petite valeur est 0 livre.

Étendue = $4 - 0 = 4$ livres ← *Toujours préciser l'unité*

Interprétation possible : Le plus gros lecteur lit 4 livres de plus que le plus petit lecteur.

Série 3

Dans un collège de 36 classes, on s'intéresse au nombre d'élèves par classe.
Voici les données collectées :



Le caractère étudié est le nombre d'élèves par classe.

La plus grande valeur est 28 élèves.

La plus petite valeur est 23 élèves.

Étendue = $28 - 23 = 5 \text{ élèves}$ ← *Toujours préciser l'unité*

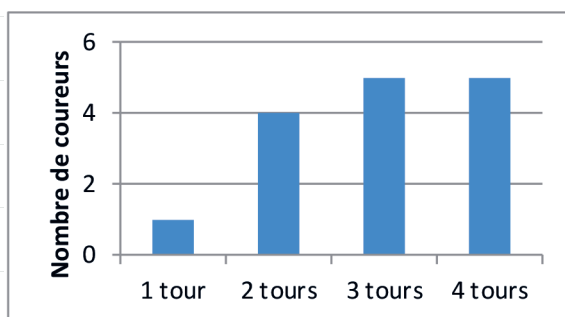
Interprétation possible : La classe la plus chargée a 5 élèves de plus que la classe la moins chargée.

Exercice : Calculer l'étendue des séries suivantes et interpréter le résultat.

Série 1 : Le tableau représente la répartition des notes obtenues à un contrôle de Physique-Chimie par les 27 élèves d'une classe de Seconde :

Notes	6	8	10	14	17	19
Nombre d'élèves	3	5	6	7	5	1

Série 2 : La course automobile des 24 h du Mans rassemble 15 coureurs automobiles. Le diagramme en bâton représente la répartition du nombre de tours effectués par les concurrents :



Série 3 : Un agriculteur surveille la bonne santé de ses veaux par des pesées régulières. Voici le dernier relevé :

Marquage	FR 54 341 012	FR 54 341 013	FR 54 341 014	FR 54 341 015	FR 54 341 016	FR 54 341 017	FR 54 341 018
Sexe	Femelle	Mâle	Mâle	Femelle	Femelle	Mâle	Femelle
Masse en kg	180	163	175	191	179	192	188

DÉFI

Voici une série statistique ordonnée, dont la médiane est 21 et l'étendue est 10.

16 ; 18 ; 21 ; 21 ; 24 ; ...

Compléter cette série en donnant toutes les solutions possibles.

Exercice 1

Série 1

Le caractère étudié est la note obtenue au contrôle de Physique-Chimie.

La plus grande valeur est 19.

La plus petite valeur est 6.

$$\text{Étendue} = 19 - 6 = 13$$

Interprétation possible : L'élève qui a le mieux réussi a 13 points de plus que celui qui a le moins réussi.

Série 2

Le caractère étudié est le nombre de tours.

La plus grande valeur est 4 tours.

La plus petite valeur est 1 tour.

$$\text{Étendue} = 4 - 1 = 3 \text{ tours}$$

Interprétation possible : Le gagnant a fait 3 tours de plus que le dernier.

Série 3

Le caractère étudié est la masse des veaux.

La plus grande valeur est 192 kg.

La plus petite valeur est 163 kg.

$$\text{Étendue} = 192 - 163 = 29 \text{ kg}$$

Interprétation possible : Le veau le plus lourd pèse 29 kg de plus que le veau le plus léger.

DÉFI

L'étendue est 10 et la plus petite valeur est 16, donc la plus grande valeur est forcément 26.

La médiane est 21, donc la valeur 21 doit séparer la série en deux séries de même effectif.

Solutions avec 6 données :

16 ; 18 ; 21 ; 21 ; 24 ; 26

Solutions avec 7 données :

16 ; 18 ; 21 ; 21 ; 24 ; 24 ; 26

16 ; 18 ; 21 ; 21 ; 24 ; 25 ; 26

16 ; 18 ; 21 ; 21 ; 24 ; 26 ; 26

REGROUPEMENT PAR CLASSES DE MÊME AMPLITUDE

PRÉ-REQUIS

- ▶ Proportionnalité et pourcentages [5^e]
- ▶ Traitement de données statistiques [5^e]
- ▶ La moyenne [5^e]
- ▶ La médiane [4^e]
- ▶ L'étendue [3^e]

☐
☐
☐
☐
☐

ON FAIT LE POINT

Le tableau représente les notes obtenues par une classe de 3^e à un contrôle de mathématiques :

Note sur 20	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Nombres d'élèves	2	3	1	3	5	4	1	3	2	1

	A	B	C
1 L'effectif total est de :	25	125	306
2 La fréquence d'élèves ayant obtenu 12 sur 20 est de :	5	5 %	20 %
3 La moyenne des notes de la classe est de :	12,24 sur 20	12,5 sur 20	30,6 sur 20
4 La note médiane est :	12 sur 20	12,5 sur 20	13 sur 20
5 L'étendue est de :	20 points	9 points	4 points



REGROUPER PAR CLASSE

Lors d'une étude statistique, on peut collecter des données avec de nombreuses valeurs différentes.

Pour faciliter la présentation des effectifs, on regroupe les données en **classes de même amplitude**.

Par exemple, une coach de hockey a relevé les temps de jeu « t » (en minutes) de ses 22 joueuses lors d'un match :

5 ; 14 ; 9 ; 19 ; 17 ; 22 ; 22 ; 9 ; 20 ; 24 ; 6 ; 19 ; 22 ; 24 ; 18 ; 6 ; 1 ; 0 ; 0 ; 3 ; 10 ; 8

Elle décide de regrouper ces durées dans des classes d'amplitude 5 minutes :

Temps de jeu « t » en minutes	$0 \leq t < 5$	$5 \leq t < 10$	$10 \leq t < 15$	$15 \leq t < 20$	$20 \leq t < 25$
Nombre de joueuses	4	6	2	4	6

La classe « $0 \leq t < 5$ » rassemble toutes les durées comprises entre 0 minutes et 5 minutes, 0 étant comptabilisé mais pas 5.

RAPPELS

« $0 \leq t$ » signifie que la variable t est supérieure ou égale à 0.

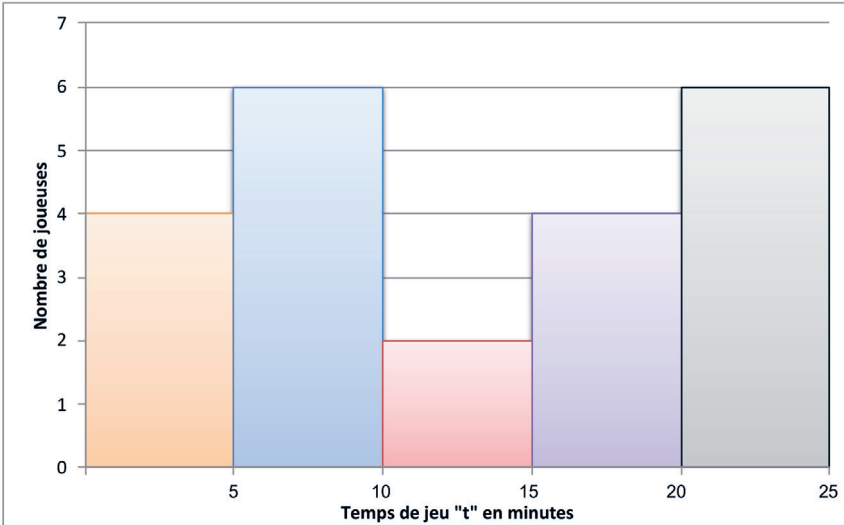
« $t < 5$ » signifie que la variable t est strictement inférieure à 5.



CONSTRUIRE UN HISTOGRAMME

On utilise un histogramme pour représenter des données regroupées en classe.

Voici l'**histogramme** de l'exemple précédent :



Chaque rectangle représente une classe.

Les rectangles ont la même largeur et se « touchent ».

La hauteur de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif de sa classe.



DÉTERMINER LA MOYENNE

On calcule la moyenne à partir du **centre de chaque classe** :

Le centre de la classe « $0 \leq t < 5$ » est 2,5.

Le centre de la classe « $5 \leq t < 10$ » est 7,5.

Le centre de la classe « $10 \leq t < 15$ » est 12,5.

Le centre de la classe « $15 \leq t < 20$ » est 17,5.

Le centre de la classe « $20 \leq t < 25$ » est 22,5.

RAPPEL

Pour calculer le centre d'un intervalle, on calcule la moyenne des deux valeurs extrêmes.

Par exemple, pour le centre de la classe « $0 \leq t < 5$ » :

$$\text{centre} = \frac{0+5}{2} = 2,5$$

On fait ici une **approximation** : on considère que 4 données dans la classe « $0 \leq t < 5$ » est similaire à 4 données d'une valeur de 2,5. De même pour les autres classes.

On peut calculer la moyenne :

$$\text{moyenne} = \frac{4 \times 2,5 + 6 \times 7,5 + 2 \times 12,5 + 4 \times 17,5 + 6 \times 22,5}{22} \approx \text{13 minutes}$$



DÉTERMINER LA MÉDIANE

Il y a 22 données en tout.

22 est un nombre pair donc la note médiane est entre les 11^e et 12^e données.

Or les 11^e et 12^e données sont dans la classe « $10 \leq t < 15$ ».

Donc « **$10 \leq t < 15$** » est la classe médiane.

Comme le centre de la classe « $10 \leq t < 15$ » est 12,5 alors on peut dire que la médiane est de **12,5 minutes**.



INTERPRÉTER LA MOYENNE

Si toutes les joueuses avaient eu le même temps de jeu, elles auraient chacune joué 13 minutes.



INTERPRÉTER LA MÉDIANE

Au moins la moitié des joueuses ont joué 12,5 minutes ou plus.



Exercice 1 : Des élèves ont relevé leur fréquence cardiaque au repos, c'est-à-dire le nombre de battement de cœur en une minute pendant un moment calme. Voici les résultats :

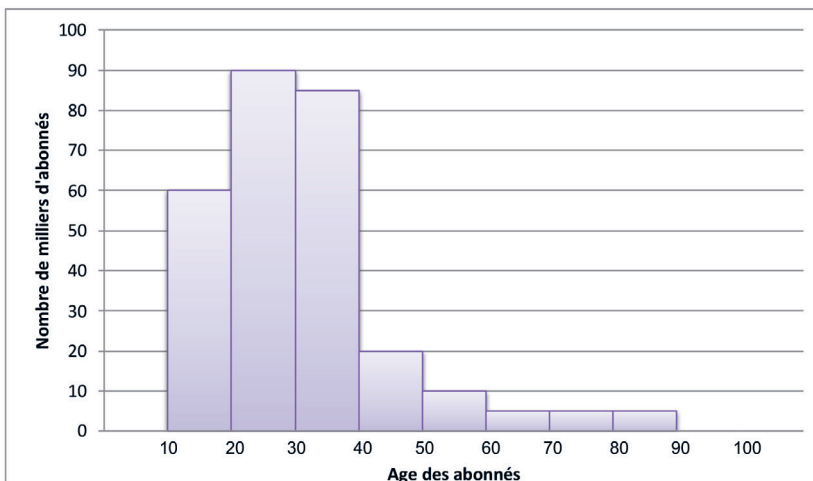
63 ; 91 ; 58 ; 78 ; 85 ; 61 ; 68 ; 82 ; 60 ; 80 ;
76 ; 89 ; 67 ; 90 ; 64 ; 89 ; 80 ; 59 ; 88 ; 75 ;
83 ; 57 ; 93 ; 84 ; 85 ; 69 ; 81 ; 65 ; 77 ; 63

- Dans un tableau, regrouper ces données en classe d'amplitude 5 battements par minute.
- Représenter ces données dans un histogramme.
- Calculer la moyenne en utilisant le centre de chaque classe. Arrondir à l'unité.
- Déterminer la médiane.
- Déterminer la moyenne et la médiane en utilisant la série statistique. Comparer les résultats avec les questions c et d.

Exercice 2 : Une entreprise sollicite plusieurs influenceurs pour une campagne de publicité.

Cette entreprise recherche des profils dont les abonnés âgés entre 20 et 40 ans représentent au moins 80 % des abonnés.

Voici la répartition des abonnés selon leur âge de l'influenceur « Anthoslime » :



Anthoslime participera-t-il à la campagne publicitaire ?

Exercice 1

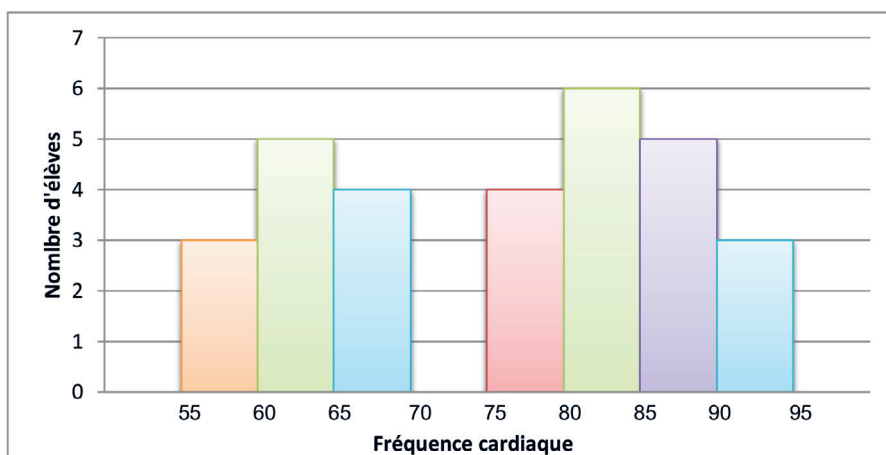
a.

63 ; 91 ; 58 ; 78 ; 85 ; 61 ; 68 ; 82 ; 60 ; 80 ;
 76 ; 89 ; 67 ; 90 ; 64 ; 89 ; 80 ; 59 ; 88 ; 75 ;
 83 ; 57 ; 93 ; 84 ; 85 ; 69 ; 81 ; 65 ; 77 ; 63

Fréquence cardiaque	$55 \leq f < 60$	$60 \leq f < 65$	$65 \leq f < 70$	$70 \leq f < 75$	$75 \leq f < 80$
Nombre d'élèves	3	5	4	0	4

Fréquence cardiaque	$80 \leq f < 85$	$85 \leq f < 90$	$90 \leq f < 95$
Nombre d'élèves	6	5	3

b.



- c. Le centre de la classe « $55 \leq t < 60$ » est 57,5.
 Le centre de la classe « $60 \leq t < 65$ » est 62,5.
 Le centre de la classe « $65 \leq t < 70$ » est 67,5.
 Le centre de la classe « $70 \leq t < 75$ » est 72,5.
 Le centre de la classe « $75 \leq t < 80$ » est 77,5.
 Le centre de la classe « $80 \leq t < 85$ » est 82,5.
 Le centre de la classe « $85 \leq t < 90$ » est 87,5.

Le centre de la classe « $90 \leq t < 95$ » est 92,5.

$$\text{moyenne} = \frac{3 \times 57,5 + 5 \times 62,5 + 4 \times 67,5 + 0 \times 72,5 + 4 \times 77,5 + 6 \times 82,5 + 5 \times 87,5 + 3 \times 92,5}{30}$$

≈ 76 battements par minutes

d. Il y a 30 données en tout.

30 est un nombre pair donc la note médiane est entre les 15^e et 16^e données.

Or les 15^e et 16^e données sont dans la classe « $75 \leq t < 80$ ».

Donc « $75 \leq t < 80$ » est la classe médiane.

Comme le centre de la classe « $75 \leq t < 80$ » est 77,5 alors on peut dire que la médiane est **77,5 battements par minutes**.

e. moyenne = $(63 + 91 + \dots + 77 + 63) \div 30 \approx$ **75 battements par minutes**.

On obtient une même moyenne légèrement inférieure qu'à la question c.

Pour obtenir la médiane, on ordonne la série statistique :

57 ; 58 ; 59 ; 60 ; 61 ; 63 ; 63 ; 64 ; 65 ; 67 ; 68 ; 69 ; 75 ; 76 ; 77 ; 78 ; 80 ; 80 ; 81 ; 82 ; 83 ; 84 ; 85 ; 85 ; 88 ; 89 ; 89 ; 90 ; 91 ; 93

Il y a 30 données en tout.

30 est un nombre pair donc la note médiane est entre les 15^e et 16^e données.

La 15^e donnée est 77 et la 16^e donnée est 78.

77,5 est entre 77 et 78 donc la médiane est **77,5 battements par minutes**.

Cette médiane est la même que celle trouvée à la question d.

Exercice 2

D'après l'histogramme, 90k abonnés ont entre 20 et 30 ans et 85k abonnés ont entre 30 et 40 ans.

$$90 + 85 = 175$$

Donc 175k abonnés ont entre 20 et 40 ans.

$$60 + 90 + 85 + 20 + 10 + 5 + 5 + 5 = 280$$

Anthoslime a 280k abonnés en tout.

Abonnés	280	175
Pourcentages	100 %	?

On applique la règle de 3 :

$$100 \times 175 \div 280 = 62,5 \%$$

62,5 % des abonnés d'Anthoslime ont entre 20 et 40 ans.

$$62,5 \% < 80 \%$$

Donc Anthoslime ne participera pas à la campagne.

STABILISATION DES FRÉQUENCES

PRÉ-REQUIS

- ▶ Proportionnalité et pourcentages [5^e]
- ▶ Notion de probabilité [5^e]
- ▶ Equiprobabilité [5^e]
- ▶ Calculer des probabilités [4^e]
- ▶ Fraction irréductible [3^e]

☐
☐
☐
☐
☐

ON FAIT LE POINT

	A	B	C
1 On tire au hasard une carte dans un jeu de 54 cartes. Le nombre d'issues de cette expérience aléatoire est :	1	4	54
2 Dans une urne, il y a 3 boules bleues, 2 boules rouges et 2 boules noires. La probabilité de piocher une boule rouge est :	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$
3 On a lancé 150 fois une pièce et on a obtenu 58 fois « Pile ». La fréquence de « Pile » est :	58	$\frac{58}{150}$	58 %
4 On lance un dé à 6 faces. La probabilité d'obtenir un nombre pair est :	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
5 On tire au hasard deux cartes dans un jeu. On définit l'événement A : « J'ai tiré au moins un As ». L'événement contraire de A est :	« Je n'ai pas tiré d'As »	« J'ai tiré deux As »	« J'ai tiré exactement un As »



COMPRENDRE LE PRINCIPE

Avant de poursuivre, il est important que tu comprennes la différence entre les Statistiques et les Probabilités.

Les statistiques étudient des événements passés, à partir de données déjà observées.

Les probabilités étudient des événements futurs, et anticipent des données pas encore observées.

Cependant, les statistiques mettent en évidence des « tendances » qui, mises en lien avec les lois de probabilité, permettent de faire des prédictions.

En voici une :

Lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence observée d'un événement E se stabilise autour de sa probabilité.

Exemple :

On lance un dé et on s'intéresse à l'événement « Obtenir 5 » que j'appellerai E par la suite.

Premier lancer : Je n'obtiens pas 5. La fréquence observée de l'événement E est $\frac{0}{1}$ soit 0 %.

Deuxième lancer : Je n'obtiens pas 5. La fréquence est $\frac{0}{2}$ soit 0 %.

Puisque c'est le deuxième lancer, l'effectif total est 2.

Troisième lancer : J'obtiens 5. La fréquence observée de l'événement E est $\frac{1}{3}$ soit environ 33 %.

Quatrième lancer : Je n'obtiens pas 5. La fréquence observée de l'événement E est $\frac{1}{4}$ soit 25 %.

Cinquième lancer : J'obtiens 5. La fréquence observée de l'événement E est $\frac{2}{5}$ soit 40 %.

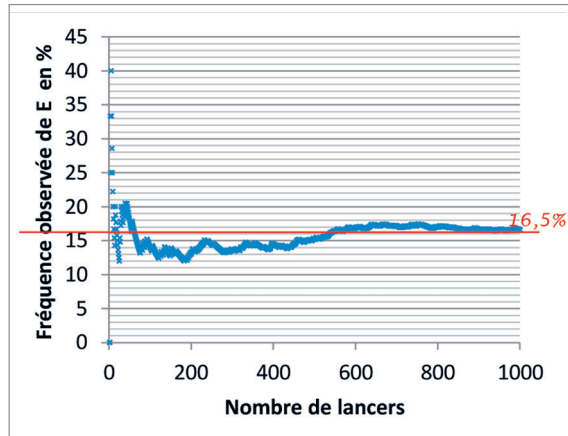
Deux 5 obtenus depuis le début, et 5 lancers en tout.

Tu remarques que la fréquence n'est jamais la même.

Imagine maintenant que je répète cette expérience de très nombreuses fois.

Par exemple, 1 000 fois !

Je te dispense des 1 000 calculs, mais voici une représentation graphique générée sur un tableur donnant la fréquence observée de l'événement E en fonction du nombre de lancers :



Les premiers points sont très irréguliers mais à partir du 800^e lancer, la fréquence se stabilise et forme presque une droite horizontale.

Je trace en rouge une droite qui représente au mieux cette stabilisation. Elle coïncide avec une **fréquence de 16,5 %**.

Au fait, quelle est la probabilité d'obtenir 5 en lançant un dé ?

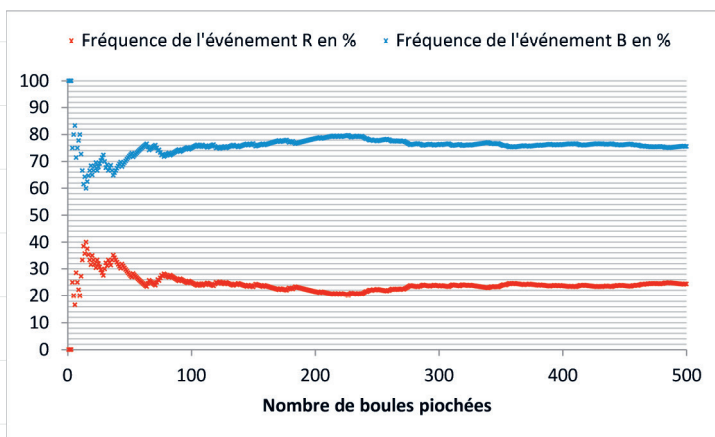
Une chance sur 6 !

En pourcentages, cela donne $\frac{1}{6} \times 100 \approx 16,7 \%$.

À deux dixièmes près, on obtient le même résultat !

Exercice 1

Dans une urne, il y a 3 boules bleues et une boule rouge de même forme. On tire au hasard une boule, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne. On appelle R l'événement : « Piocher une boule rouge ». On appelle B l'événement « Piocher une boule bleue ». On décide de simuler cette expérience dans un tableur et de la répéter 500 fois. Le graphique suivant donne les fréquences observées en fonction du nombre de boules piochées :



1. Que peux-tu dire des fréquences observées des événements R et B ?
2. Quelle est la probabilité de l'événement R ? De l'événement B ? Donner les résultats en pourcentages.
3. Les réponses à la question 1 étaient-elles prévisibles ? Justifier.

Exercice 2

On simule 5 000 fois le lancer d'une pièce de monnaie et on obtient les fréquences suivantes :

	Pile	Face
Fréquence	60 %	40 %

1. Proposer une estimation de la probabilité d'obtenir Pile avec cette pièce de monnaie. Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Ce résultat était-il prévisible ?



DÉFI

Une urne contient 60 boules. Certaines sont noires, d'autres sont blanches.

On tire au hasard une boule, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne.

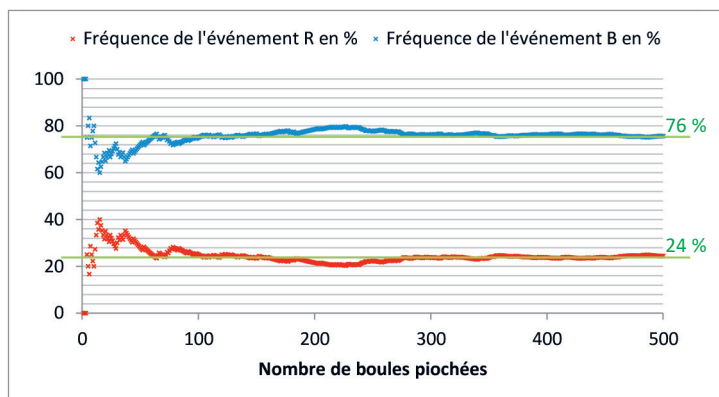
On simule cette expérience 10 000 fois et on obtient les fréquences suivantes :

	Noire	Blanche
Fréquence	0,3354	0,6646

Estimer le nombre de boules noires et le nombre de boules blanches dans cette urne.

Exercice 1

- La fréquence de l'événement R se stabilise autour de 24 %.
La fréquence de l'événement B se stabilise autour de 76 %.



- On a une chance sur 4 de piocher une boule rouge :

$$\frac{1}{4} \times 100 = 25 \%$$

La probabilité de l'événement R est 25 %.

Comme R et B sont deux événements contraires, alors la probabilité de l'événement B est 75 %.

- Comme on a répété 500 fois l'expérience, il était prévisible que chaque fréquence se stabilise autour de la probabilité de chaque événement.

Exercice 2

- Comme on a effectué 5 000 lancers, chaque fréquence observée se stabilise autour de la probabilité de chaque événement.

On peut estimer la probabilité d'obtenir Pile à 60 %.

$$60\% = \frac{60}{100} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 5 \times 5} = \frac{3}{5} \leftarrow \text{probabilité d'obtenir Pile}$$

La probabilité d'obtenir Pile est $\frac{3}{5}$.

2. Comme il y a deux issues possibles, on s'attendait à ce que la probabilité d'obtenir Pile soit de 50 %. Ce qui n'est pas le cas. La pièce est sans doute déséquilibrée.

Exercice 3

Comme on a simulé 10 000 fois l'expérience, chaque fréquence observée se stabilise autour de la probabilité de chaque événement.

On peut estimer la probabilité d'obtenir une boule noire à 0,3354.

On appelle x le nombre de boules noires.

La probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{x}{60}$ mais aussi 0,3354.

On peut résoudre cette équation :

$$\begin{aligned}\frac{x}{60} &= 0,3354 \\ x &= 0,3354 \times 60 \\ x &= 20,124\end{aligned}$$

Puisqu'il s'agit d'estimation, on arrondit à l'unité et on peut dire qu'il y a 20 boules noires dans l'urne.

Comme il y a 60 boules en tout, on en déduit qu'il y a 40 boules blanches.

CHAPITRE 10

EXPÉRIENCE ALÉATOIRE À DEUX ÉPREUVES

PRÉ-REQUIS

- Notion de probabilité [5^e]
- Equiprobabilité [5^e]
- Calculer des probabilités [4^e]
- Fractions irréductibles [3^e]

☐
☐
☐
☐

ON FAIT LE POINT

Une urne contient 8 boules et on en tire une au hasard :



	A	B	C
1 La probabilité qu'elle porte le numéro 9 est :	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{4}$	4
2 La probabilité qu'elle porte un numéro pair est :	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{8}$
3 La probabilité qu'elle porte un numéro supérieur ou égal à 6 est :	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{6}{8}$
4 On pioche le numéro 4, on remet la boule dans l'urne et on pioche à nouveau une boule. La probabilité de piocher un 4 est :	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	0 chance
5 On pioche le numéro 9, on ne remet pas la boule dans l'urne et on pioche à nouveau une boule. La probabilité de piocher un 9 est :	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{7}$



COMPRENDRE LA MÉTHODE

Une **expérience aléatoire à deux épreuves** est une expérience composée de deux expériences aléatoires successives ou simultanées.

Ce qui complique les calculs ! Sauf avec cette astuce : construire un tableau à **double entrée**.

Exemple :

Voici une expérience aléatoire à deux épreuves : on lance deux dés à 6 faces, et on fait la somme des nombres obtenus.

Cette expérience est composée de deux fois la même expérience : lancer un dé. Pour chaque dé, les issues possibles sont : « Obtenir 1 », « Obtenir 2 », « Obtenir 3 », « Obtenir 4 », « Obtenir 5 » et « Obtenir 6 ».

Voici le tableau à double entrée qui résume les résultats possibles après avoir lancé les deux dés :

		Deuxième dé					
Premier dé	Somme	Obtenir 1	Obtenir 2	Obtenir 3	Obtenir 4	Obtenir 5	Obtenir 6
	Obtenir 1	2	3	4	5	6	7
	Obtenir 2	3	4	5	6	7	8
	Obtenir 3	4	5	6	7	8	9
	Obtenir 4	5	6	7	8	9	10
	Obtenir 5	6	7	8	9	10	11
	Obtenir 6	7	8	9	10	11	12

Grâce à ce tableau, on peut calculer toutes les probabilités liées à cette expérience !

La probabilité d'obtenir une somme égale à 6 est :

nombre de cases contenant 6 comme somme

$$P(6) = \frac{\text{nombres d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{5}{36}$$

nombre de cases totales dans le tableau

La probabilité d'obtenir une somme impaire est :

nombre de cases contenant un nombre impair 

$$P(\text{somme impaire}) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{18}{36}$$

nombre de cases totales dans le tableau 

La probabilité d'obtenir une somme inférieure ou égale à 4 est :

nombre de cases contenant un nombre inférieur ou égal à 4 

$$P(\text{somme inférieure ou égale à 4}) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{6}{36}$$

nombre de cases totales dans le tableau 

Exercice 1

Un couple souhaite avoir deux enfants.

1. Pourquoi est-ce une expérience aléatoire à deux épreuves ?
2. Construire un tableau à double entrée donnant toutes les issues possibles.
3. Quelle est la probabilité d'avoir deux enfants de sexe féminin ?
4. Quelle est la probabilité d'avoir deux enfants de sexes différents ?

Exercice 2

Dans la vitrine du magasin « Ski Shop », on peut voir des skis alpins, des skis de fond et des skis de randonnées. Certains sont pour adultes, d'autres pour enfants. On choisit un modèle de ski au hasard dans cette vitrine.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Modèle	Skis alpins	Ski de fond	Ski de randonnées	TOTAL
Adulte		3		15
Enfant	2		0	
TOTAL			3	20

2. Quelle est la probabilité de choisir des skis de randonnées ?
3. Quelle est la probabilité de choisir des skis de fond pour enfants ?
4. Parmi les skis pour adultes, quelle est la probabilité de choisir des skis alpins ?

DÉFI

Une urne contient 8 boules noires, 5 boules blanches et 2 boules rouges. On tire une boule au hasard dans l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On renouvelle l'expérience.

Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule blanche ?

Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 1

1. Cette expérience est aléatoire car on ne peut pas prévoir le résultat.

Elle est composée de deux fois la même expérience : avoir un enfant.

Pour chaque enfant, les issues possibles sont : F « avoir un enfant de sexe féminin » et M « avoir un enfant de sexe masculin ».

2.

Sexe	féminin	masculin
féminin	F-F	F-M
masculin	M-F	M-M

3. Probabilité d'avoir deux enfants de sexe féminin = $\frac{1}{4}$

4. Probabilité d'avoir deux enfants de sexes différents = $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$ sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 2

1.

Modèle	Skis alpins	Ski de fond	Ski de randonnées	TOTAL
Adulte	9	3	3	15
Enfant	2	3	0	5
TOTAL	11	6	3	20

2. Probabilité de choisir des skis de randonnées = $\frac{3}{20}$

3. Probabilité de choisir des skis de fond pour enfants = $\frac{3}{20}$

4. Probabilité de choisir des skis alpins parmi les skis adultes = $\frac{9}{15}$

Attention, la question précise « parmi les skis adultes » ! 

DÉFI

Voici le tableau à double entrée qui donne les issues possibles :

Couleur	Noir	Noir	Noir	Noir	Noir	Noir	Noir	Noir	Noir	Noir	Blanc	Blanc	Blanc	Blanc	Blanc	Rouge	Rouge
Noir	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-B	N-B	N-B	N-B	N-B	N-R	N-R
Noir	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-B	N-B	N-B	N-B	N-B	N-R	N-R
Noir	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-B	N-B	N-B	N-B	N-B	N-R	N-R
Noir	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-B	N-B	N-B	N-B	N-B	N-R	N-R
Noir	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-B	N-B	N-B	N-B	N-B	N-R	N-R
Noir	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-B	N-B	N-B	N-B	N-B	N-R	N-R
Noir	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-B	N-B	N-B	N-B	N-B	N-R	N-R
Noir	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-N	N-B	N-B	N-B	N-B	N-B	N-R	N-R
Blanc	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-B	B-B	B-B	B-B	B-B	B-R	B-R
Blanc	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-B	B-B	B-B	B-B	B-B	B-R	B-R
Blanc	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-B	B-B	B-B	B-B	B-B	B-R	B-R
Blanc	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-B	B-B	B-B	B-B	B-B	B-R	B-R
Blanc	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-N	B-B	B-B	B-B	B-B	B-B	B-R	B-R
Rouge	R-N	R-N	R-N	R-N	R-N	R-N	R-N	R-N	R-N	R-N	R-B	R-B	R-B	R-B	R-B	R-R	R-R
Rouge	R-N	R-N	R-N	R-N	R-N	R-N	R-N	R-N	R-N	R-N	R-B	R-B	R-B	R-B	R-B	R-R	R-R

Probabilité d'avoir au moins une boule blanche = $\frac{125}{225} = \frac{5 \times 5 \times 5}{3 \times 3 \times 5 \times 5} = \frac{5}{9}$

PROPORTIONNALITÉ



ÉVOLUTION DE POURCENTAGES

PRÉ-REQUIS

- Fractions décimales [6^e]
- Proportionnalité et pourcentages [5^e]
- Résoudre une équation [4^e]

☐
☐
☐

ON FAIT LE POINT

1

5	25
8	x

Dans ce tableau de proportionnalité :

2

Dans un cours de judo de 25 élèves, il y a 10 ceintures blanches.

Le pourcentage de ceintures blanches est :

3

Dans une classe, il y a 13 filles et 12 garçons. Le pourcentage de filles est :

4

Une paire de chaussures à 30 € est soldée à 20 %. Son nouveau prix est :

5

$$x \times 3,2 = 22,4$$

Pour trouver x, il faut calculer :

A	B	C
$x = 1,6$	$x = 15,625$	$x = 40$
40 %	10 %	2,5 %
48 %	52 %	61 %
6 €	10 €	24 €
$x = \frac{3,2}{22,4}$	$x = 3,2 \times 22,4$	$x = \frac{22,4}{3,2}$



COMPRENDRE LA FORMULE

Dans ce chapitre, on va parler d'**augmentation** et de **diminution de pourcentages**.

Voici un exemple :

Le Smartphone que tu aimerais avoir coûte 948 € neuf.

En reconditionné, son prix diminue de 30 %.

Quel est le prix du Smartphone reconditionné ?

Pour calculer le prix du téléphone reconditionné, voici une méthode en deux étapes :

Étape 1 : Calculer 30 % de 948 €

$$948 \times \frac{30}{100} = 284,40 \text{ €}$$

Étape 2 : Enlever les 30 % au prix initial

$$948 - 284,40 = 663,60 \text{ €}$$

Conclusion : Le prix du Smartphone reconditionné est de 663,60 €.

Je souhaite désormais résoudre cet exercice en une étape !

Voici le nouveau raisonnement :

Si le prix du Smartphone diminue de 30 %, alors **je dois payer 70 % du prix initial**.

Unique étape : Calculer 70 % de 948 €

$$948 \times \frac{70}{100} = 663,60 \text{ €}$$

Conclusion : Le prix du Smartphone reconditionné est de 663,60 €.

On peut ainsi généraliser ce raisonnement :

Pour une **diminution** de x % :

$$\text{valeur initiale} \rightarrow \times \frac{100 - x}{100} \rightarrow \text{valeur réduite}$$

Pour une **augmentation** de x % :

$$\text{valeur initiale} \rightarrow \times \frac{100 + x}{100} \rightarrow \text{valeur augmentée}$$



Exercice 1 : Tu dois répondre à chaque question avec une unique étape de calcul.

1. Une paire de chaussures à 54 € est soldée à 20 %. Quel est son prix soldé ?
2. Avec l'inflation, mon salaire à 1 783 € va augmenter de 4,5 %. Quel sera mon nouveau salaire ? Arrondir au centième.
3. Je souhaite acheter un ordinateur à 250 €. Le vendeur m'accorde une remise de 5 %. Combien vais-je payer ?

Exercice 2 : Tu dois répondre à chaque question avec une unique étape de calcul.

1. Je paie 12,50 € pour un pantalon soldé à 15 %. Quel était son prix avant la remise ? Arrondir au centième.
2. Ma moyenne en maths au deuxième trimestre est de 12,4/20. Elle a augmenté de 7 % par rapport au premier trimestre. Quelle était ma moyenne en maths au premier trimestre ? Arrondir au dixième.
3. La population de pandas a augmenté de 16,5 % depuis les années 2000. On en compte 1 864 aujourd'hui. Combien de pandas y avait-il dans le monde en 2000 ?

Exercice 3 : Tu dois répondre à chaque question avec une unique étape de calcul.

1. Je veux acheter une table d'occasion vendue à 240 €. J'ai négocié un nouveau prix à 180 €. Quel est le pourcentage de réduction que j'ai négocié ?
2. En 2023, l'espérance de vie des femmes était de 85,7 ans. Elle était de 69,2 ans en 1950. Quel est le pourcentage d'augmentation de l'espérance de vie des femmes sur cette période ? Arrondir à l'unité.
3. En mai, mon foyer a consommé 163 kWh de gaz. En juin, il a consommé 108 kWh. Quel est le pourcentage de diminution de la consommation en gaz entre mai et juin ? Arrondir au dixième.

DÉFI

Julien affirme : « L'argent déposé sur mon compte épargne me rapporte 3 % par an. Au bout de 10 ans, j'aurai gagné exactement 30 % de la somme déposée au départ. ».

A-t-il raison ? Justifier.

Exercice 1

1. Si le prix de la paire de chaussures diminue de 20 %, alors **je dois payer 80 % du prix initial.**

$$54 \times \frac{80}{100} = 43,20 \text{ €}$$

Le prix soldé est de 43,20 €.

2. Si le salaire augmente de 4,5 %, alors **je toucherai 104,5 % du salaire initial.**

$$1783 \times \frac{104,5}{100} = 1\,863,235$$

Mon nouveau salaire est de 1 863,23 €.

3. Si le vendeur m'accorde une remise de 5 %, alors **je vais payer 95 % du prix initial.**

$$250 \times \frac{95}{100} = 237,50$$

Je vais payer 237,50 €.

Exercice 2

1. Si le pantalon est soldé à 15 %, alors **j'ai payé 85 % du prix initial.**

$$\text{prix initial} \times \frac{85}{100} = 12,5$$

Pour trouver le prix initial, je dois diviser 12,5 par $\frac{85}{100}$.

$$12,5 \div \frac{85}{100} \approx 14,71$$

Le prix avant remise était de 14,71 €.

ATTENTION !

« S'il y a eu une diminution de 15 %, alors il suffit d'augmenter de 15 % pour retrouver la valeur initiale ».
Ce raisonnement est faux !

2. Si ma moyenne a augmenté de 7 %, alors je suis à 107 % de ma moyenne initiale.

$$\text{moyenne initiale} \times \frac{107}{100} = 12,4$$

$$\text{moyenne initiale} = 12,4 \div \frac{107}{100} \approx \mathbf{11,6}$$

La moyenne au premier trimestre était de 11,6/20.

3. Si la population de panda a augmenté de 16,5 %, alors elle représente 116,5 % de la population initiale.

$$\text{population initiale} \times \frac{116,5}{100} = 1\,864$$

$$\text{population initiale} = 1\,864 \div \frac{116,5}{100} = \mathbf{1\,600}$$

La population de pandas en 2000 était de 1 600.

Exercice 3

1. On peut modéliser la situation par cette équation :

$$\mathbf{\text{Prix initial}} \ 240 \text{ €} \times x = 180 \text{ €} \ \mathbf{\text{Prix réduit}}$$

On résout l'équation :

$$240x = 180$$

$$x = \frac{180}{240}$$

$$x = 0,75$$

Pour raisonner en pourcentages, on écrit le résultat en fraction décimale de dénominateur 100 :

$$0,75 = \frac{75}{100} = 75 \%$$

J'ai payé 75 % du prix initial.

Donc la réduction est de 25 %.

2. On peut modéliser la situation par cette équation :

$$\mathbf{\text{espérance initiale}} \ 69,2 \times x = 85,7 \text{ ans} \ \mathbf{\text{espérance augmentée}}$$

On résout l'équation :

$$69,2x = 85,7$$

$$x = \frac{85,7}{69,2}$$

$$x \approx 1,24$$

Pour raisonner en pourcentages, on écrit le résultat en fraction décimale de dénominateur 100 :

$$1,24 = \frac{124}{100} = 124\%$$

La nouvelle espérance de vie représente 124 % de l'espérance initiale.

Donc elle a augmenté de 24 %.

3. On peut modéliser la situation par cette équation :

$$\text{consommation initiale } 163 \text{ kWh} \times x = 108 \text{ kWh } \text{consommation réduite}$$

On résout l'équation :

$$163x = 108$$

$$x = \frac{108}{163}$$

$$x \approx 0,663$$

Pour raisonner en pourcentages, on écrit le résultat en fraction décimale de dénominateur 100 :

$$0,663 = \frac{66,3}{100} = 66,3\%$$

La nouvelle consommation représente 66,3 % de la consommation initiale.

Donc elle a diminué de 33,7 %.

DÉFI

FAUX

Chaque année, l'épargne rapporte 3 %. Donc l'année suivante, l'épargne est à 103 %. Ainsi chaque année, l'épargne est multipliée par $\frac{103}{100}$. Au bout de 10 ans, on a effectué cette multiplication 10 fois :

$$\left(\frac{103}{100}\right)^{10} \approx 1,34 \text{ donc l'épargne a augmenté de } 34\% \text{ en } 10 \text{ ans.}$$

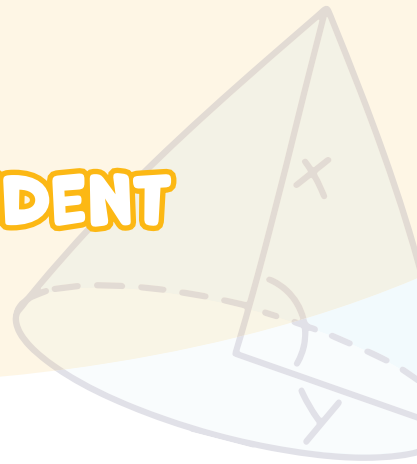
Partie
4

FONCTIONS



CHAPITRE 12

IMAGE ET ANTÉCÉDENT



PRÉ-REQUIS

► Ce chapitre permet de réinvestir TOUT ce que tu as appris au collège !



ON FAIT LE POINT

	A	B	C
1 Calculer $A = x^2 + 3$ pour $x = -5$:	$A = 28$	$A = -22$	$A = -13$
2 Calculer $B = 7x^2$ pour $x = -2$:	$A = 28$	$A = 3$	$A = 11$
Voici un programme de calcul : • Choisir un nombre • Ajouter 1 • Multiplier par 7 On appelle x le nombre choisi. Le résultat du programme de calcul en fonction de x est : On note x un nombre quelconque.	$x + 1 \times 7$	$7(x + 1)$	$7x + 1$
4 Un rectangle a pour longueur $x + 2$ et pour largeur $3x$ cm. L'expression algébrique du périmètre P du rectangle en fonction de x est :	$P = 5x$	$P = 10x$	$P = 8x + 4$
5 La solution de l'équation $x + 3 = 5$ est :	$x = 8$	$x = 2$	$x = x = -2$

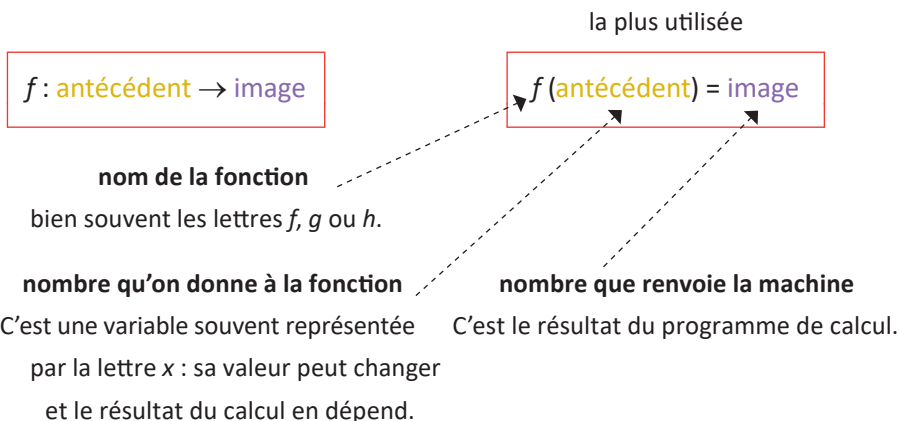
Solutions : 1.A.2.A.3.B.4.C.5.B



COMPRENDRE LA NOTION

Une **fonction** modélise un programme de calcul.

On lui donne un nombre, elle exécute chaque étape du programme de calcul puis elle nous renvoie un nombre. Deux écritures officielles existent :



Un nombre ne peut avoir qu'une seule image.

Par contre, un nombre peut avoir plusieurs antécédents !

Exemple :

On considère la fonction h qui ajoute 3 au nombre choisi.

1. Quelle est l'image de 5 ?
2. Quel est l'antécédent de 5 ?
3. Calculer $h(5)$.
4. Trouver le ou les nombres a tel que $h(a) = 5$.

RAPPEL

La seule difficulté consiste à bien interpréter la question :
Est-ce qu'on te demande l'antécédent ou l'image ?

Autrement dit, est-ce qu'on te demande le nombre donné au programme de calcul ?
Ou le résultat du programme ?

Solution :

1. Puisqu'on demande l'image de 5, alors 5 est un antécédent.

Autrement dit, tu dois exécuter le programme de calcul en choisissant 5 et donner le résultat.

La fonction h ajoute 3 au nombre choisi : $5 + 3 = 8$

Donc 8 est l'image de 5 par la fonction h . On peut aussi écrire $h(5) = 8$.

2. Puisqu'on te demande l'antécédent de 5, alors 5 est une image.

Autrement dit, tu dois retrouver le nombre qu'on a choisi, dont le résultat du programme de calcul est 5. On appelle x ce nombre.

La fonction h ajoute 3 au nombre choisi : $x + 3 = 5$

La solution de cette équation est $x = 2$.

Donc 2 est l'antécédent de 5. On peut aussi écrire $h(2) = 5$.

3. Puisque 5 est écrit entre parenthèses, alors 5 est un antécédent.

Cette question est équivalente à la question 1 !

Donc $h(5) = 8$.

4. Puisque le nombre a qu'on cherche est écrit entre parenthèses, alors 5 est l'image.

Cette question est équivalente à la question 2 !

Donc $a = 2$.



REPRÉSENTER UNE FONCTION

- Parfois, on ne connaît pas le fonctionnement du programme de calcul.

Dans ce cas, on représente la fonction à l'aide d'un **tableau**, qui donne les images de quelques nombres.

Ce tableau définit une fonction g qui à chaque nombre x de la première ligne, associe son image $g(x)$ de la deuxième ligne :

	A	B	C	D
x	-1	0	1	2
$g(x)$	-4	5	-1	5

- Colonne A : on peut dire que -4 est l'image de -1.
- la Colonne A est équivalente à l'expression $g(-1) = -4$.
- Colonne C : 1 est un antécédent de -1.
- Colonne B et D : 5 a deux antécédents, les nombres 0 et 2.

Avec ce tableau, on ne peut rien dire de l'image de 5 car 5 n'apparaît pas dans la première ligne.

Son image existe peut-être, mais n'a pas été indiquée dans ce tableau.

- Et parfois, on connaît parfaitement le fonctionnement du programme de calcul.

Dans ce cas, on représente la fonction par une **expression algébrique**.

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre.
- Multiplier par 2.
- Ajouter 3 au résultat.

On appelle f la fonction associée à ce programme de calcul.

Je peux calculer l'image de n'importe quel nombre :

- l'image de 1 : $f(1) = 1 \times 2 + 3 = 5$
- l'image de 10 : $f(10) = 10 \times 2 + 3 = 23$
- l'image de 50 : $f(50) = 50 \times 2 + 3 = 103$
- etc.

Les possibilités sont infinies ! On souhaite donc créer une formule qui généralise le fonctionnement du programme de calcul.

Pour généraliser, on choisit une variable x plutôt qu'un nombre particulier.

- L'image de x : $f(x) = x \times 2 + 3$

Puisqu'il s'agit d'une formule qui généralise le programme, on ne peut pas obtenir de résultat précis. Par contre, on peut simplifier l'expression algébrique :

$$f(x) = 2x + 3$$

expression algébrique de la fonction f
qui modélise le programme de calcul



Exercice 1 : Traduire chaque phrase par une égalité

► Exemple : la phrase « 2 est l'image de 1 par la fonction f » devient l'égalité « $f(1) = 2$ »

1. 5 est l'image de 10 par la fonction h .
2. 6 est un antécédent de 3 par la fonction g .
3. 2 a pour image -6 par la fonction f .
4. -1 a pour antécédent -7 par la fonction p .

Exercice 2 : Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre.
- Ajouter 5.
- Multiplier par 2 le résultat.

On appelle f la fonction qui modélise ce programme de calcul.

1. Quelle est l'image de 0 par la fonction f ?
2. Quel est l'antécédent de 18 par la fonction f ?
3. Quel nombre a pour image 4 par la fonction f ?
4. Quel nombre a pour antécédent -7 par la fonction f ?
5. Calculer $f(-2)$.
6. Trouver le nombre x tel que $f(x) = 80$.
7. On note x le nombre choisi. Donner l'expression algébrique de la fonction f .

Exercice 3 : Ce tableau définit une fonction d :

x	-5	-3	-1	0	2	4	9
$d(x)$	9	4	-3	-1	8	9	-3

1. Quelle est l'image de -1 par la fonction d ?
2. Qui a pour image 4 par la fonction d ?
3. Qui a pour antécédent 9 par la fonction d ?
4. Quels sont les antécédents de 9 par la fonction d ?
5. Donner $d(0)$.
6. Donner $d(8)$.
7. Donner le(s) nombre(s) x tel que $d(x) = -3$.

Exercice 4 : Associer chaque programme de calcul à la bonne fonction.

- Choisir un nombre.
- Multiplier par 5.
- Ajouter 2 au résultat.



☒ $f(x) = 5(x+2)$

- Choisir un nombre.
- Ajouter 2.
- Multiplier par 5 le résultat.



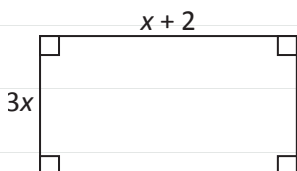
☒ $g(x) = (x+2)(x+5)$

- Choisir un nombre.
- Ajouter 2 au nombre choisi.
- Ajouter 5 au nombre choisi.
- Multiplier les deux résultats.

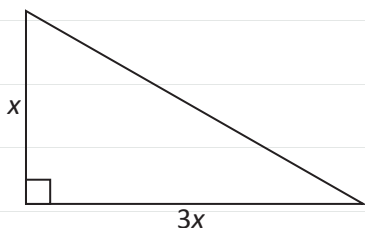


☒ $h(x) = 5x + 2$

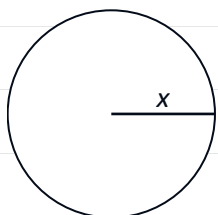
Exercice 5 : Associer l'aire de chaque figure avec la bonne fonction :



☒ $f(x) = \frac{3x^2}{2}$



☒ $g(x) = \pi x^2$



☒ $h(x) = 3x(x+2)$

Exercice 6 : Pour chaque fonction :

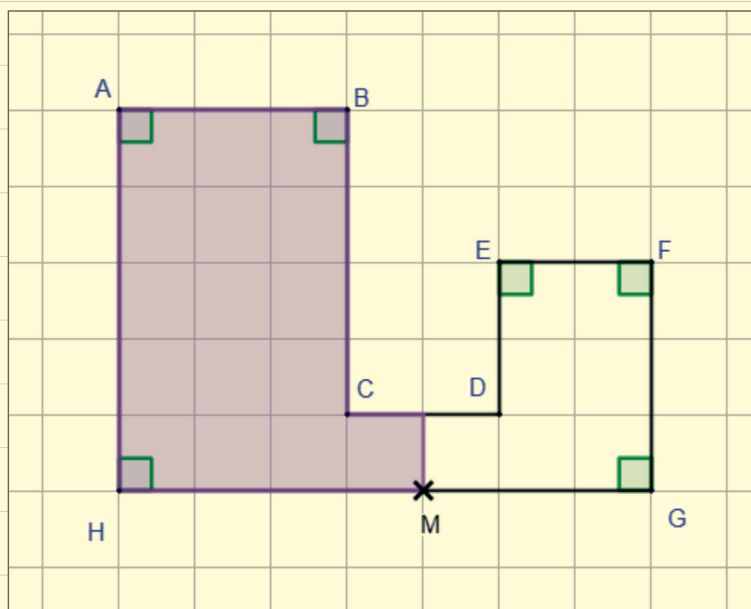
- Écrire un programme de calcul qui, pour un nombre choisi, donne comme résultat l'image de ce nombre par la fonction ;
 - Calculer l'image de 5 ;
 - Calculer l'image de -5.
- a. $f(x) = 2x - 1$
 b. $g(x) = 3x^2 + 2$
 c. $h(x) = x^2 - 3x + 5$

DÉFI

Chaque carreau a pour côté 1 cm.

On place un point M n'importe où sur le segment $[HG]$.

On appelle x la longueur HM et $f(x)$ l'aire violette délimitée par le point M .



Donner l'expression algébrique de f lorsque :

- a. $0 \text{ cm} \leq x \leq 3 \text{ cm}$
 b. $3 \text{ cm} \leq x \leq 5 \text{ cm}$
 c. $5 \text{ cm} \leq x \leq 7 \text{ cm}$

Exercice 1

1. $h(10) = 5$
2. $g(6) = 3$
3. $f(2) = -6$
4. $p(-7) = -1$

Exercice 2

1. Puisqu'on demande l'image de 0, alors **0 est un antécédent**.

Autrement dit, tu dois exécuter le programme de calcul en choisissant 0 et donner le résultat.

$$(0 + 5) \times 2 = 10$$

Donc 10 est l'image de 0 par la fonction f .

2. Puisqu'on te demande l'antécédent de 18, alors **18 est une image**.

Autrement dit, tu dois retrouver le nombre qu'on a choisi, dont le résultat du programme de calcul est 18. On appelle x ce nombre.

On modélise le programme de calcul par une équation : $(x + 5) \times 2 = 18$

La solution de cette équation est $x = 4$.

Donc 4 est l'antécédent de 18 par la fonction f .

3. Puisqu'on te demande quel nombre a pour image 4, alors **4 est une image**.

Autrement dit, tu dois retrouver le nombre qu'on a choisi, dont le résultat du programme de calcul est 4. On appelle x ce nombre.

On modélise le programme de calcul par une équation : $(x + 5) \times 2 = 4$

La solution de cette équation est $x = -3$.

Donc -3 a pour image 4 par la fonction f .

4. Puisqu'on te demande quel nombre a pour antécédent -7, alors **-7 est un antécédent**.

Autrement dit, tu dois exécuter le programme de calcul en choisissant -7 et donner le résultat.

$$(-7 + 5) \times 2 = -4$$

Donc -4 a pour antécédent -7 par la fonction f .

5. Puisque -2 est entre parenthèses, alors **-2 est un antécédent**.

Autrement dit, tu dois exécuter le programme de calcul en choisissant -2 et donner le résultat.

$$(-2 + 5) \times 2 = 6$$

Donc $f(-2) = 6$

6. Puisque le nombre a qu'on cherche est écrit entre parenthèses, alors 80 est l'image.

Autrement dit, tu dois retrouver le nombre qu'on a choisi, dont le résultat du programme de calcul est 80. On appelle x ce nombre.

On modélise le programme de calcul par une équation : $(x + 5) \times 2 = 80$

La solution de cette équation est $x = 35$.

Donc $x = 35$.

7. $f(x) = (x + 5) \times 2$

En simplifiant, on a également **$f(x) = 2(x + 5)$.**

Exercice 3

	A	B	C	D	E	F	G
x	-5	-3	-1	0	2	4	9
$d(x)$	9	4	-3	-1	8	9	-3

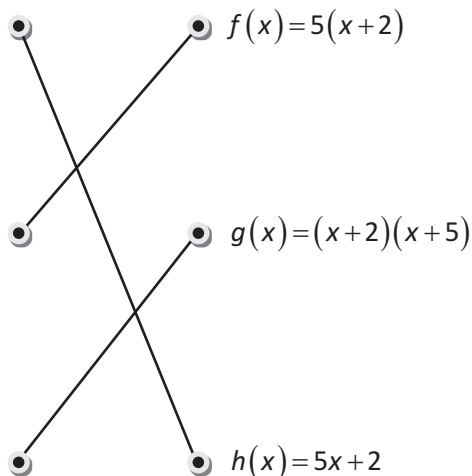
- Puisqu'on te demande l'image de -1, alors -1 **est un antécédent**.
D'après la colonne C, **-3 est l'image de -1.**
- Puisqu'on te demande quel nombre a pour image 4, alors 4 **est une image**.
D'après la colonne B, **-3 a pour image 4.**
- Puisqu'on te demande quel nombre a pour antécédent 9, alors 9 **est un antécédent**.
D'après la colonne G, **-3 a pour antécédent 9.**
- Puisqu'on te demande les antécédents de 9, alors 9 **est une image**.
D'après les colonnes A et F, **-5 et 4 sont les antécédents de 9.**
- Puisque 0 est entre parenthèses, alors 0 **est un antécédent**.
D'après la colonne D, **$d(0) = -1$.**
- Puisque 8 est entre parenthèses, alors 8 **est un antécédent**.
8 n'apparaît pas dans la ligne des antécédents, donc **on ne peut pas savoir.**
- Le nombre a qu'on cherche est écrit entre parenthèses, alors -3 **est une image**.
D'après les colonnes C et G, **$x = -1$ ou $x = 9$.**

Exercice 4

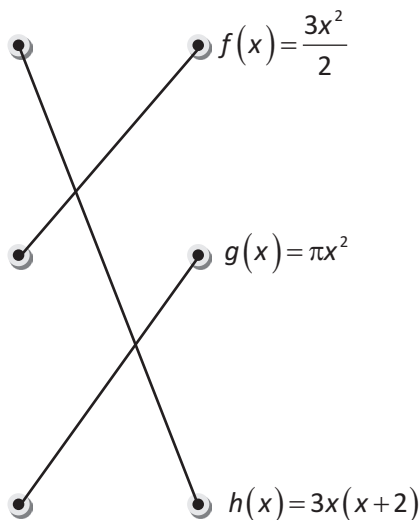
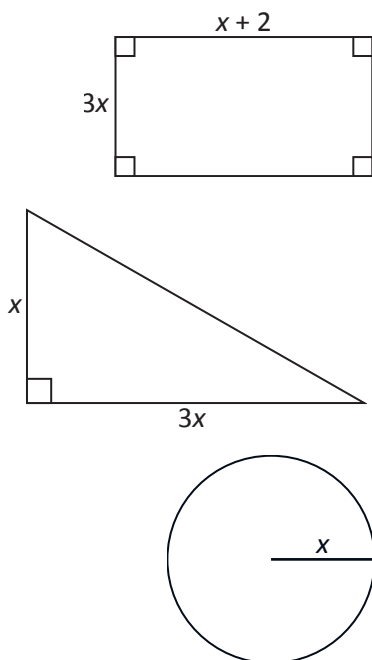
- Choisir un nombre.
- Multiplier par 5.
- Ajouter 2 au résultat.

- Choisir un nombre.
- Ajouter 2.
- Multiplier par 5 le résultat.

- Choisir un nombre.
- Ajouter 2 au nombre choisi.
- Ajouter 5 au nombre choisi.
- Multiplier les deux résultats.



Exercice 5



Exercice 6

a. Programme de calcul :

- Choisir un nombre
- Multiplier par 2
- Enlever 1 au résultat

$$\text{Image de } 5 : f(5) = 2 \times 5 - 1 = 9$$

$$\text{Image de } -5 : f(-5) = 2 \times (-5) - 1 = -11$$

RAPPEL

Si le nombre choisi est négatif, il faut l'écrire entre parenthèses pour éviter les erreurs de signe dans le calcul.

Et attention aux priorités opératoires !

b. Programme de calcul :

- Choisir un nombre
- Élever au carré
- Multiplier le résultat par 3
- Ajouter 2.

$$\text{Image de } 5 : g(5) = 3 \times 5^2 + 2 = 77$$

$$\text{Image de } -5 : g(-5) = 3 \times (-5)^2 + 2 = 77$$

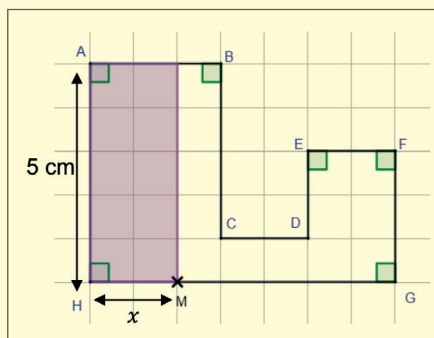
c. Programme de calcul :

- Choisir un nombre
- Élever au carré
- Enlever 3 fois le nombre choisi
- Ajouter 5.

$$\text{Image de } 5 : h(5) = 5^2 - 3 \times 5 + 5 = 15$$

$$\text{Image de } -5 : h(-5) = (-5)^2 - 3 \times (-5) + 5 = 45$$

DÉFI



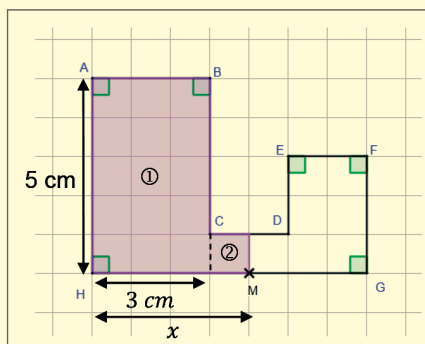
Voici un schéma qui illustre le cas : $0 \text{ cm} \leq x \leq 3 \text{ cm}$.

Le polygone violet est un rectangle de longueur 5 cm et de largeur x .

aire violette = longueur $\times$ largeur = $5 \times x$

Donc $f(x) = 5x$

 on simplifie



Voici un schéma qui illustre le cas : $3 \text{ cm} \leq x \leq 5 \text{ cm}$.

Le polygone violet est formé de deux rectangles.

Le rectangle ① a pour longueur 5 cm et pour largeur 3 cm.

aire ① = $5 \times 3 = 15$

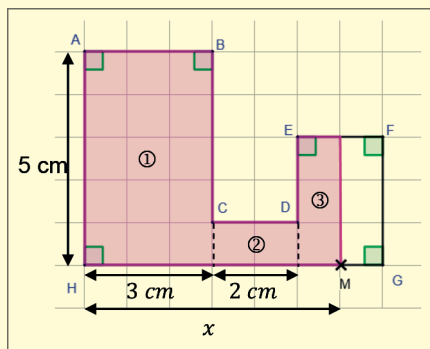
Le rectangle ② a pour longueur $x - 3 \text{ cm}$ et pour largeur 1 cm.

aire ② = $(x - 3) \times 1 = x - 3$

Finalement, aire violette = aire ① + aire ② = $15 + x - 3$

Donc $f(x) = 12 + x$

 on simplifie



Voici un schéma qui illustre le cas : $5 \text{ cm} \leq x \leq 7 \text{ cm}$.

Le polygone violet est formé de trois rectangles.

aire ① = 15 (déjà calculé au cas précédent)

Le rectangle ② a pour longueur 2 cm et pour largeur 1 cm.

aire ② = $2 \times 1 = 2$

Le rectangle ③ a pour longueur 3 cm et pour largeur $x - 5 \text{ cm}$.

aire ③ = $3 \times (x - 5)$ et si on développe aire ③ = $3x - 15$

Finalement, aire violette = aire ① + aire ② + aire ③ = $15 + 2 + 3x - 15$

Donc $f(x) = 2 + 3x$

 on simplifie

CHAPITRE
13

REPRÉSENTATION
GRAPHIQUE



PRÉ-REQUIS

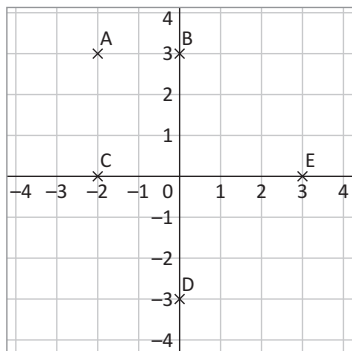
► Image et antécédent [3^e]



ON FAIT LE POINT

1 $f(6) = 5$ signifie que :

2



3

4

5

A a la même ordonnée que :

A a pour coordonnées :

(0 ; 3) sont les coordonnées du point :

A	B	C
5 est un antécédent de 6	6 a pour image 5	6 est l'image de 5
B	C	D
(3 ; -2)	(-2 ; -3)	(-2 ; 3)
B	D	E
30	75	-75

On considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2$.
L'image de -5 par la fonction f est :

Solutions : 1.B 2.A 3.C 4.A 5.B



COMPRENDRE LA MÉTHODE

Rappelle-toi qu'une fonction modélise un programme de calcul :
à un nombre donné au programme (l'antécédent)
elle associe le résultat (l'image).

Si on connaît le fonctionnement du programme de calcul, on peut représenter la fonction sous la forme d'une expression algébrique. Sinon, on représente la fonction avec un tableau.

Il existe une troisième représentation : le graphique.

Qu'on connaisse ou non le fonctionnement du programme de calcul, la représentation graphique est un outil privilégié. Elle permet de visualiser le comportement de la fonction :

- On peut trouver quel nombre permet d'obtenir un résultat maximal ;
- On peut trouver quel nombre permet d'obtenir un résultat minimal ;
- On peut estimer des résultats même si on ne connaît pas le fonctionnement du programme de calcul ;
- et plus encore !

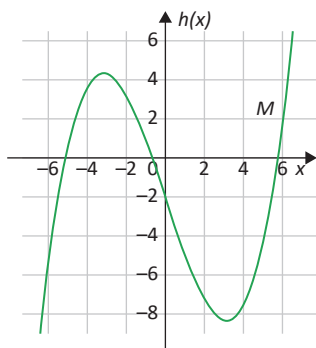
Chaque point d'un graphique est repéré par deux coordonnées : l'abscisse et l'ordonnée.

Pour représenter une fonction, un point représente un couple (antécédent ; son image).

Par convention :

abscisse = antécédent et ordonnée = image

Par exemple, voici la représentation graphique d'une fonction h .



- **Déterminer l'image de 6 par la fonction h :**

Puisqu'on demande l'image de 6, alors 6 est un antécédent.

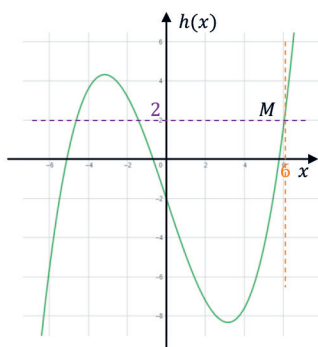
Je cherche 6 sur l'axe des abscisses et je trace une droite verticale.

Je place un point M à l'intersection de la droite avec la courbe.

Je trace une droite horizontale passant par le point M .

Cette droite coupe l'axe des ordonnées à environ 2.

Donc 2 est l'image de 6 par la fonction h .



- **Déterminer les antécédents de -4 par la fonction h .**

Puisqu'on cherche les antécédents de -4 , alors -4 est une image.

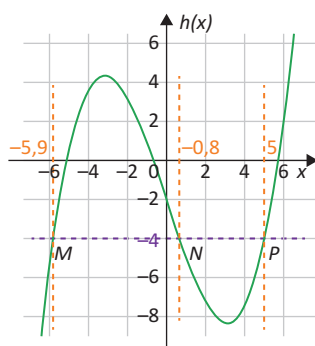
Je cherche -4 sur l'axe des ordonnées et je trace une droite horizontale.

Je place un point M , N et P à chaque intersection de la droite avec la courbe.

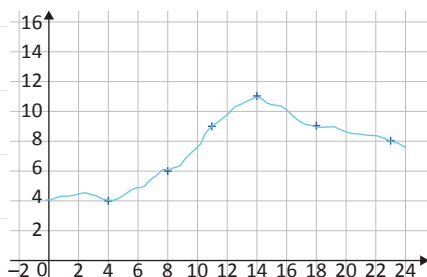
Je trace trois droites verticales passant par les points M , N et P .

Chaque droite coupe l'axe des abscisses à environ $-5,9$, $0,8$ et 5 .

Donc $-5,9$, $0,8$ et 5 sont les antécédents de -4 par la fonction h .

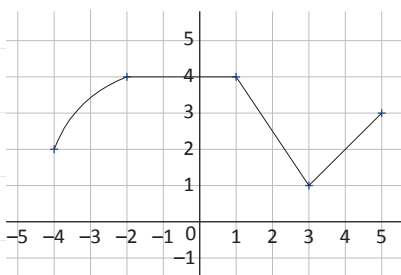


Exercice 1 : Le graphique ci-dessous donne l'évolution de la température (en °C) à Nancy le 30 janvier 2024. On note T la fonction qui, à une heure de la journée, associe la température.



1. Donner un titre à chaque axe.
2. Déterminer $T(4)$, $T(11)$ et $T(23)$.
3. Déterminer approximativement les antécédents de 10 par la fonction T .
4. Interpréter les questions 2 et 3.
5. Déterminer la température maximale.
À quelle heure c'était ?

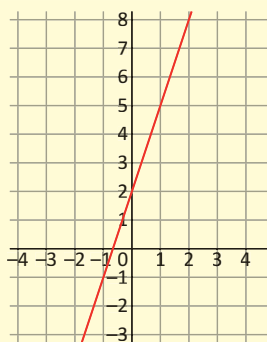
Exercice 2 : Voici la représentation graphique d'une fonction f .



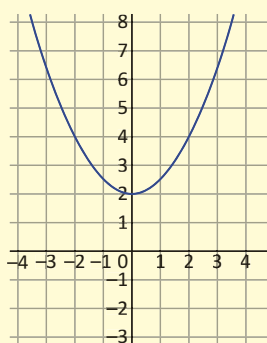
1. Déterminer l'image de 0.
2. Déterminer les antécédents de 2.
3. Déterminer un nombre entier qui n'a aucun antécédent.
4. Déterminer un nombre décimal qui a exactement 2 antécédents.
5. Déterminer un nombre entier qui a plus de 3 antécédents.

DÉFI

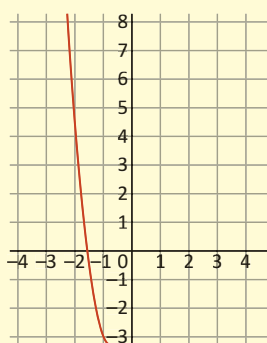
Pour chaque fonction, associer l'expression algébrique à la représentation graphique :



$$f(x) = -x^3 - 4$$



$$g(x) = 3x + 2$$



$$h(x) = 0,5x^2 + 2$$

Exercice 1

1. En abscisse, on donne comme titre « heure de la journée ».
En ordonnée, on donne comme titre « Température en °C ».
2. $T(4) = 4$; $T(11) = 9$; $T(23) = 8$.
3. Les antécédents de 10 sont approximativement 12,4 et 16.
4. $T(4) = 4$ signifie qu'à 4 h, il faisait 4 °C.
 $T(11) = 9$ signifie qu'à 11 h, il faisait 9 °C.
 $T(23) = 8$ signifie qu'à 23 h, il faisait 8 °C.
Les antécédents de 10 sont approximativement 12,4 et 16 signifie qu'il a fait 10 °C à 12,4 h et 16 h.
Pour être plus rigoureux : 12,4 h = 12 h 24 min
5. À 14 h, on a atteint la température maximale de 11 °C.

Exercice 2

1. L'image de 0 est 4.
2. Les antécédents de 2 sont approximativement -4, 2,4 et 4.
3. 5, 0 et -1 n'ont aucun antécédent.
4. 1,5 admet exactement deux antécédents.
5. 4 admet une infinité d'antécédents.

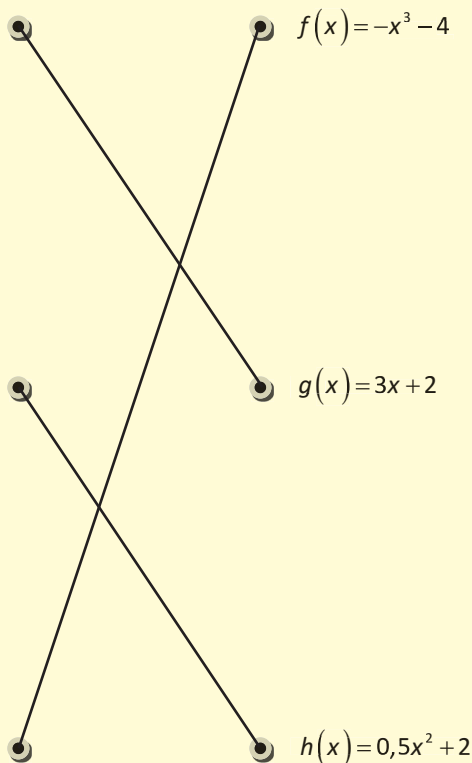
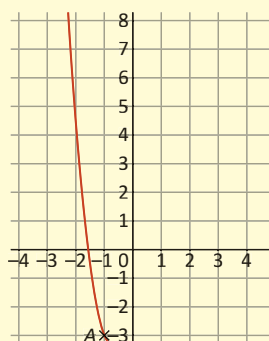
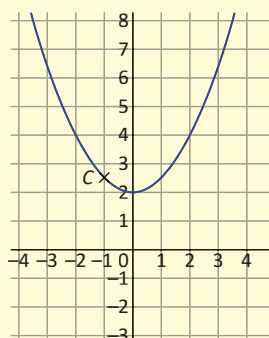
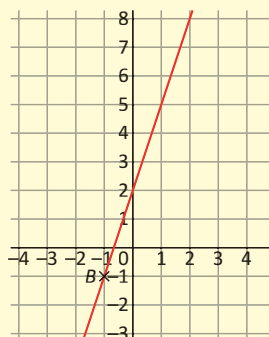
DÉFI

Astuce : Calculer l'image d'un nombre quelconque.

$f(-1) = -(-1)^3 - 4 = -3$ et la troisième courbe passe par le point $A(-1; -3)$.

$g(-1) = 3 \times (-1) + 2 = -1$ et la première courbe passe par le point $B(-1; -1)$.

$h(-1) = 0,5 \times (-1)^2 + 2 = 2,5$ et la deuxième courbe passe par le point $C(-1; 2,5)$.



CHAPITRE 14

FONCTION LINÉAIRE



PRÉ-REQUIS

- ▶ Proportionnalité [5^e] ☐
- ▶ Proportionnalité et représentation graphique [4^e] ☐
- ▶ Évolution de pourcentages [3^e] ☐
- ▶ Image et antécédent [3^e] ☐
- ▶ Représentation graphique [3^e] ☐



ON FAIT LE POINT

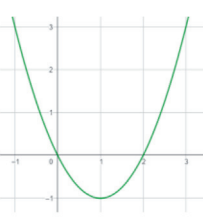
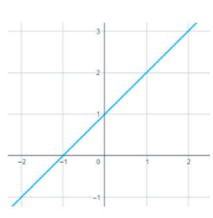
Voici un tableau de proportionnalité :

2	5	8
3	7,5	12

Le coefficient de proportionnalité est :

Une situation de proportionnalité est représentée sur le graphique :

Si $f(x) = 8x$ alors :

A	B	C
1,5	3	4,5
		
$f(3) = 83$	$f(3) = 24$	$f(3) = 11$

	A	B	C
4 Au marché, 1 kg de pommes coûte 1,70 €. La fonction P qui, au nombre x de kg, associe le prix est :	$P(x) = \frac{1,70}{x}$	$P(x) = \frac{x}{1,70}$	$P(x) = 1,70x$
5 Multiplier par 0,5 revient à :	Diviser par 5	Multiplier par 5	Diviser par 2

Solutions : 1. A 2. B 3. B 4. C 5. C



COMPRENDRE LA NOTION

Rappelle-toi qu'une fonction modélise un programme de calcul :
à un nombre donné au programme (antécédent)
elle associe le résultat (image).

Il existe une infinité de programmes de calcul, donc une infinité de fonctions !
Les mathématiciens les ont classées par catégorie, en voici une :

Une **fonction linéaire** modélise une situation de proportionnalité.

Les images sont proportionnelles aux antécédents, et on note **a** le coefficient de proportionnalité.

Les fonctions linéaires sont de la forme :

$$f(x) = ax$$

Autrement dit,

si on multiplie un nombre par **a** alors on obtient son image.

Si on divise un nombre par **a** alors on obtient son antécédent.

RAPPEL

Deux grandeurs sont proportionnelles lorsqu'on peut passer de l'une à l'autre en multipliant par un même nombre.

Ce nombre s'appelle le coefficient de proportionnalité.

Exemple : On considère la fonction linéaire g de **coefficient 3**.

- **L'image de 6 par la fonction g :**

$$6 \times 3 = 18$$

Donc 18 est l'image de 6 par la fonction g .

- **L'antécédent de 6 par la fonction g :**

$$6 \div 3 = 2$$

Donc 2 est l'antécédent de 6 par la fonction g .

✓ $f(x) = 0,5x$ est une fonction linéaire car on multiplie la variable x par 0,5.

✓ $g(x) = -4x$ est une fonction linéaire car on multiplie la variable x par -4 .

✓ $h(x) = \frac{3}{2}x$ est une fonction linéaire car on multiplie la variable x par $\frac{3}{2}$.

✓ $i(x) = \pi x$ est une fonction linéaire car on multiplie la variable x par π .

✓ $j(x) = \sqrt{7}x$ est une fonction linéaire car on multiplie la variable x par $\sqrt{7}$.

✓ $k(x) = \frac{x}{2}$ est une fonction linéaire car diviser la variable x par 2 revient à multiplier la variable x par $\frac{1}{2}$.

⊗ $l(x) = 5x + 1$ n'est pas une fonction linéaire car même si on multiplie la variable par 5, on ajoute ensuite 1.

⊗ $m(x) = x^2$ n'est pas une fonction linéaire car on multiplie la variable x par elle-même et non par un nombre fixe.

⊗ $n(x) = \frac{2}{x}$ n'est pas une fonction linéaire car on divise par la variable x .

Puisqu'une fonction linéaire représente une situation de proportionnalité, sa représentation graphique est **une droite qui passe par l'origine**.

Exercice 1 : Pour chaque situation, dire si elle peut être modélisée par une fonction linéaire. Si oui, donner son expression algébrique.

Situation 1 : Au marché, 1 kg de tomates est vendu 2,60 €.

A la masse (en kg) de tomates achetées, on associe un prix P (en €).

Situation 2 : Un site en ligne vend des pots de thé matcha à 12 € l'unité. Pour toute commande s'ajoutent des frais de port à 5 €.

A un nombre de pots achetés, on associe un montant F de la facture (en €).

Situation 3 : Une agence immobilière décide d'augmenter tous les loyers de 2 %.

A un loyer (en €) on associe son nouveau montant M après augmentation.

Situation 4 : A une longueur de côté (en cm), on associe le périmètre P d'un carré (en cm).

Situation 5 : A une longueur de côté (en cm), on associe l'aire A d'un carré (en cm^2).

Exercice 2 : Lors d'une épreuve de course d'orientation, la note obtenue (sur 20) est proportionnelle aux nombres de balises trouvées. On appelle N la fonction qui, à un nombre de balises trouvées, associe une note (sur 20).

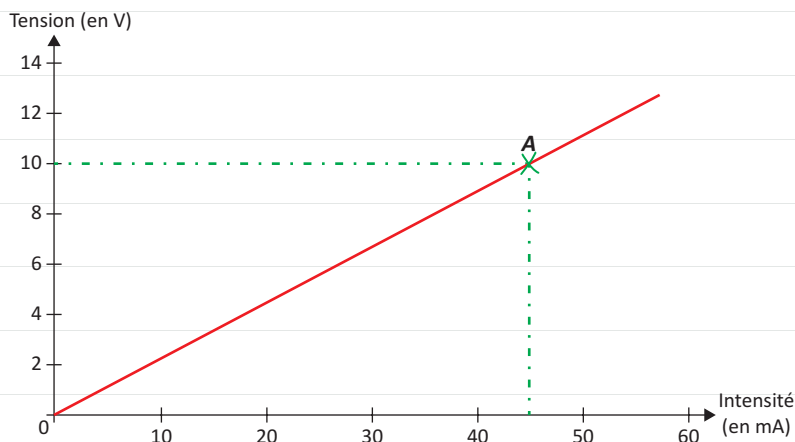
Agathe a trouvé 12 balises et a obtenu la note de 15 sur 20.

- a.** Quel est le coefficient de proportionnalité ?
- b.** En déduire l'expression algébrique de la fonction N .
- Quelle est l'image de 5 par la fonction N ? Interpréter par rapport à la situation.
- Quel est l'antécédent de 20 ? Interpréter par rapport à la situation.

Exercice 3 : Un TGV roule à une vitesse moyenne de 155 km/h. On note d la fonction qui, a une durée (en heure) associe une distance (en km).

- La fonction d est-elle linéaire ? Justifier.
- Donner l'expression algébrique de la fonction d .
- Calculer $d(1,5)$. Interpréter par rapport à la situation.
- Trouver un nombre t tel que $d(t) = 775$. Interpréter par rapport à la situation.
- Dans un repère adapté, tracer la représentation graphique de la fonction d pour des durées allant de 0 à 10 h.

Exercice 4



Ce graphique représente la fonction U qui, à une intensité (en mA) associe une tension (en V).

1. La fonction U est-elle linéaire ? Expliquer.
2. Donner l'image de 72 par la fonction U .
3. Donner l'antécédent de 15 par la fonction U .
4. Donner l'expression algébrique de U .

Exercice 1

Situation 1 : Il s'agit d'une situation de proportionnalité donc P est une fonction linéaire.

$$1 \text{ kg} \times 2,60 = 2,60$$

Le coefficient de proportionnalité est 2,60 donc $P(x) = 2,60x$.

Situation 2 : Pour obtenir le montant de la facture, on multiplie le nombre de pots par 12 puis on ajoute les frais de port à 5 €.

Ce n'est pas une situation de proportionnalité.

Donc F n'est pas une fonction linéaire.

Remarque : $F(x) = 12x + 5$

Situation 3 : Pour augmenter de 2 %, on multiplie l'ancien loyer par $\frac{102}{100}$.

C'est une situation de proportionnalité.

Le coefficient de proportionnalité est $\frac{102}{100}$ donc $M(x) = \frac{102}{100}x$.

Remarque : $\frac{102}{100} = 1,02$ donc $M(x) = 1,02x$

Situation 4 : Pour obtenir le périmètre, on multiplie la longueur d'un côté par 4.

C'est une situation de proportionnalité.

Le coefficient de proportionnalité est 4 donc $P(x) = 4x$

Situation 5 : Pour obtenir l'aire, on multiplie la longueur d'un côté par elle-même.

Ce nombre n'est jamais le même ! Ce n'est pas une situation de proportionnalité.

Donc A n'est pas une fonction linéaire.

Remarque : $A(x) = x^2$

Exercice 2

1. a. On note a le coefficient de proportionnalité.

Cette équation modélise la situation d'Agathe : $12 \times a = 15$

On résout l'équation :

$$a = \frac{15}{12}$$

$$a = 1,25$$

Le coefficient de proportionnalité est 1,25.

b. $N(x) = 1,25x$.

2. $5 \times 1,25 = 6,25$

6,25 est l'image de 5 par la fonction N .

Interprétation : Avec 5 balises trouvées, on a 6,25 sur 20.

3. $20 \div 1,25 = 16$

16 est l'antécédent de 20 par la fonction N .

Interprétation : Pour avoir la note maximale 20 sur 20, il faut trouver 16 balises.

Exercice 3

1. On nous donne une vitesse **moyenne**.

Il s'agit d'une situation de proportionnalité.

Donc d est une fonction linéaire.

2. Une vitesse de 155 km/h signifie qu'en une heure, le TGV a parcouru 155 km.

Le coefficient de proportionnalité est 155.

Donc $d(x) = 155x$.

RAPPEL

En situation de proportionnalité, le coefficient de proportionnalité est la valeur qui correspond à une unité.

Si un CD coûte 3 €, le coefficient de proportionnalité est 3.

3. Cette question est équivalente à calculer l'image de 1,5.

$1,5 \times 155 = 232,5$.

Donc $d(1,5) = 232,5$.

Interprétation : En 1 h 30 min, le TGV parcourt 232,5 km.

RAPPEL

$$\begin{aligned} 1,5 \text{ h} &= 1 \text{ h} + 0,5 \text{ h} \\ &= 1 \text{ h} + 0,5 \times 60 \text{ min} \\ &= 1 \text{ h} + 30 \text{ min} \\ &= 1 \text{ h } 30 \text{ min} \end{aligned}$$

4. Cette question est équivalente à calculer l'antécédent de 775.

$$775 \div 155 = 5$$

Donc $t = 5$.

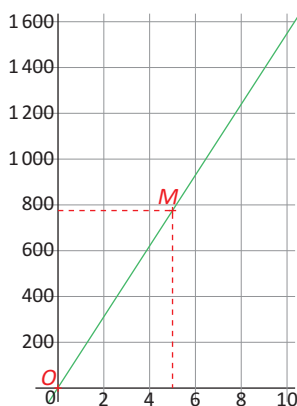
Interprétation : En 5 h, le TGV parcourt 775 km.

5. On représente en abscisse les antécédents, c'est-à-dire les durées (en h).

On représente en ordonnées les images, c'est-à-dire les distances (en km).

La fonction d est linéaire donc sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine.

On a vu à la question 4) que 5 est l'antécédent de 775 : la droite passe par le point M de coordonnées (5 ; 775).



Exercice 4

- La représentation graphique est une droite qui passe par l'origine donc U est une fonction linéaire.
- On demande l'image de 72, donc 72 est un antécédent.

72 n'est pas sur l'axe des abscisses. Pas d'inquiétude !

On peut s'en sortir grâce à la proportionnalité.

La droite passe par le point A de coordonnées (45 ; 10).

Donc 10 est l'image de 45 par la fonction U .

Je construis un tableau de proportionnalité :

x	45	72
$U(x)$	10	?

Pour trouver le nombre manquant, j'applique la règle de 3 : $? = 10 \times 72 \div 45 = 16$

Donc 16 est l'image de 72 par la fonction U .

3. On demande l'antécédent de 15, donc 15 est une image.

15 n'est pas sur l'axe des images. Encore une fois, pas d'inquiétude !

On a montré à la question 2) que 10 est l'image de 45 par la fonction U .

Je construis un tableau de proportionnalité :

x	45	?
$U(x)$	10	15

Pour trouver le nombre manquant, j'applique la règle de 3 : $? = 45 \times 15 \div 10 = 67,5$

Donc 67,5 est l'antécédent de 15 par la fonction U .

4.

On note a le coefficient de proportionnalité de la fonction U .

On a montré à la question 2) que 10 est l'image de 45 par la fonction U .

On modélise la situation par l'équation suivante : $45 \times a = 10$

On résout l'équation :

$$a = \frac{10}{45}$$

À la calculatrice, le résultat de $\frac{10}{45}$ n'est pas un nombre décimal (elle affiche à l'écran 0,222222...)

Il faut alors donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$$a = \frac{10}{45} = \frac{2 \times 5}{3 \times 3 \times 5} = \frac{2}{3 \times 3} = \frac{2}{9}$$

$$\text{Donc } U(x) = \frac{2}{9}x.$$

Remarque : Le coefficient de proportionnalité qui permet de passer d'une intensité à une tension s'appelle la **résistance**.

CHAPITRE 15

FONCTION AFFINE



PRÉ-REQUIS

- ▶ Résoudre une équation du premier degré [4^e] ☐
- ▶ Image et antécédent [3^e] ☐
- ▶ Représentation graphique [3^e] ☐
- ▶ Fonction linéaire [3^e] ☐



ON FAIT LE POINT

1

La solution de l'équation $4x - 7 = 5$ est :

A

$x = 5$

B

$x = -0,5$

C

$x = 3$

2

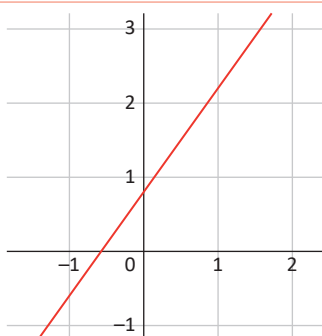
L'expression algébrique d'une fonction linéaire est par exemple :

$f(x) = x + 2$

$f(x) = 2x$

$f(x) = x^2$

3



Ce graphique représente la fonction h .

L'antécédent de 1 par la fonction h est approximativement :

2,2

0,2

-0,5

4

Un rectangle a pour longueur 5 cm et une largeur inconnue.

On note P la fonction qui, à une largeur (en cm), associe le périmètre du rectangle (en cm). Son expression algébrique est :

5

La fonction g a pour expression algébrique $g(x) = -2x - 3$. L'image de -1 par la fonction g est :

A	B	C
$P(x) = 5x$	$P(x) = x + 5$	$P(x) = 2x + 10$
-1	-5	-6

Solutions : 1.C 2.B 3.B 4.C 5.A



COMPRENDRE LA NOTION

Rappelle-toi qu'une fonction modélise un programme de calcul :
à un nombre donné au programme (antécédent)
elle associe le résultat (image).

Il existe une infinité de programmes de calcul, donc une infinité de fonctions !
Les mathématiciens les ont classées par catégorie.
Tu as déjà découvert les fonctions linéaires, qui modélisent une situation de proportionnalité.

Voici une autre catégorie :

Une **fonction affine** est de la forme :
 $f(x) = ax + b$ avec a et b des nombres fixes

Autrement dit, si on multiplie un nombre par a puis qu'on ajoute b , on obtient son image.

NOTE POUR LE LYCÉE

Tu découvriras de nouvelles catégories de fonction.
On les appelle les **fonctions de référence**.

Exemple : On considère la fonction affine $f(x) = 5x + 2$

- **L'image de 3 par la fonction g :**

$$3 \times 5 + 2 = 17$$

17 est l'image de 3 par la fonction g .

- **L'antécédent de 3 par la fonction g :**

On résout l'équation $5x + 2 = 3$

$$5x = 3 - 2$$

$$5x = 1$$

$$x = \frac{1}{5}$$

$$x = 0,2$$

0,2 est l'antécédent de 3 par la fonction g .

✓ Les fonctions linéaires sont également des fonctions affines ! C'est un cas particulier où $b = 0$.

✓ $g(x) = 4x - 2$ est une fonction affine avec $a = 4$ et $b = -2$.

✓ $h(x) = x + 9$ est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = 9$.

✓ $i(x) = -0,5x - \frac{1}{3}$ est une fonction affine avec $a = -0,5$ et $b = -\frac{1}{3}$.

✓ $j(x) = \frac{2x+7}{5}$ est une fonction affine avec $a = \frac{2}{5}$ et $b = \frac{7}{5}$ car $\frac{2x+7}{5} = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$.

✓ $k(x) = 5$ est une fonction affine avec $a = 0$ et $b = 5$.
 k est également une **fonction constante**.

⊗ $l(x) = 4x^2 + 6$ n'est pas une fonction linéaire car la variable est élevée au carré.

La représentation graphique d'une fonction affine est **une droite**.

Elle ne passe pas forcément par l'origine !
Cette caractéristique est propre aux fonctions linéaires.

Exercice 1 : Pour chaque situation, justifier pourquoi elle peut être modélisée par une fonction affine et donner son expression algébrique.

Situation 1 : Pour louer une voiture à la journée, il faut payer 25 € de frais de dossier et 0,25 € par kilomètres parcourus. Au nombre de kilomètres parcourus, on associe le montant M de la facture.

Situation 2 : Pour 5 € par mois, Alice a accès à un forfait mobile illimité. A un nombre de SMS envoyés, on associe le coût M d'une mensualité.

Situation 3 : $ABCD$ est un rectangle de longueur 6 cm et de largeur inconnue. A une largeur en cm, on associe son périmètre P .

Situation 4 : $ABCD$ est un rectangle de longueur 6 cm et de largeur inconnue. A une largeur en cm, on associe son aire A .

Exercice 2

Pour isoler une toiture, il faut compter en moyenne 187 € par m^2 de surface à isoler (matériaux et main-d'œuvre) auxquels s'ajoute le cout de l'échafaudage de 1 500 € quel que soit le chantier.

A une surface à isoler (en m^2) on associe le cout total C du chantier.

1. Donner l'expression algébrique de la fonction C . Est-ce une fonction affine ?
2. Calculer $C(120)$. Interpréter par rapport à la situation.
3. Déterminer un nombre x tel que $C(x) = 29\,924$. Interpréter par rapport à la situation.

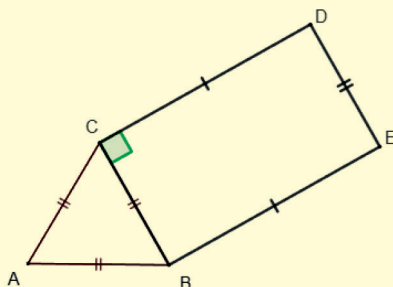
DÉFI

$[CD]$ est un segment de longueur 7 cm.

On note x la longueur AC en cm.

On note f la fonction qui à x associe le périmètre du triangle ABC .

On note g la fonction qui à x associe le périmètre du rectangle $BCDE$.



Objectif : Pour quelle valeur de x le périmètre du triangle ABC est égal au périmètre du rectangle $BCDE$?

1. Donner les expressions algébriques des fonctions f et g .
2. Quelle est la nature de la fonction f ? De la fonction g ?
3. Calculer l'image de 0 par la fonction f puis par la fonction g .
4. Calculer l'antécédent de 30 par la fonction f puis par la fonction g .
5. Dans le même repère, représenter les fonctions f et g pour des valeurs de x allant de 0 à 20.
6. Lire la valeur de x qui répond à l'objectif cité dans l'énoncé.
7. Retrouver cette valeur par le calcul.

Exercice 1

Situation 1

On note x le nombre de kilomètres parcourus.

Le coût total de la location est $C(x) = 0,25x + 25$.

La fonction C est affine avec $a = 0,25$ et $b = 25$.

Situation 2

On note x le nombre de SMS envoyés.

Comme le forfait est illimité, quel que soit le nombre de SMS envoyés, Alice paie 5 € la mensualité.

Donc $M(x) = 5$.

La fonction M est affine avec $a = 0$ et $b = 5$.

REMARQUE

On peut également dire que M est une fonction constante.

Situation 3

On note x la largeur en cm.

Pour calculer le périmètre d'un rectangle, il faut additionner les longueurs des 4 côtés :

$$P(x) = x + x + 6 + 6$$

On réduit l'expression et on obtient $P(x) = 2x + 12$.

La fonction P est affine avec $a = 2$ et $b = 12$.

Situation 4 : On note x la largeur en cm.

Pour calculer l'aire d'un rectangle, il faut multiplier la longueur par la largeur :

$$A(x) = 6 \times x$$

On simplifie l'expression et on obtient $A(x) = 6x$.

La fonction A est affine avec $a = 6$ et $b = 0$.

REMARQUE

On peut également dire que A est une fonction linéaire.

Exercice 2

1. On note x la surface à isoler en m^2 .

$$C(x) = 187x + 1\,500$$

La fonction C est affine avec $a = 187$ et $b = 1\,500$.

2. On cherche l'image de 120.

$$C(120) = 187 \times 120 + 1\,500 = 23\,940$$

Pour isoler 120 m^2 de toiture, il faut dépenser 23 940 € en moyenne.

3. On cherche l'antécédent de 29 924.

On résout l'équation : $187x + 1\,500 = 29\,924$

$$187x = 29\,924 - 1\,500$$

$$187x = 28\,424$$

$$x = \frac{28\,424}{187}$$

$$x = 152$$

Pour isoler 152 m^2 de toiture, il faut dépenser 29 924 € en moyenne.

Exercice 3

1. Pour obtenir le périmètre d'un polygone, il faut additionner les longueurs de tous les côtés.

Périmètre du triangle ABC :

$$f(x) = x + x + x$$

On réduit l'expression et on obtient $f(x) = 3x$.

Périmètre du rectangle $BCDE$:

$$g(x) = x + x + 7 + 7$$

On réduit l'expression et on obtient $g(x) = 2x + 14$.

2. La fonction f est linéaire avec $a = 3$.

La fonction g est affine avec $a = 2$ et $b = 14$.

3. $f(0) = 3 \times 0 = 0$

0 est l'image de 0 par la fonction f .

(On pouvait l'affirmer sans calcul puisque f est une fonction linéaire).

$$g(0) = 2 \times 0 + 14 = 14$$

14 est l'image de 0 par la fonction g .

4. On cherche l'antécédent de 30 par la fonction f qui est linéaire de coefficient 3 :

$$30 \div 3 = 10$$

10 est l'antécédent de 30 par la fonction f .

On cherche l'antécédent de 30 par la fonction g qui est affine.

On résout l'équation : $2x + 14 = 30$

$$2x = 30 - 14$$

$$2x = 16$$

$$x = \frac{16}{2}$$

$$x = 8$$

8 est l'antécédent de 30 par la fonction g .

5. On représente en abscisse les antécédents, c'est-à-dire la longueur x .

On représente en ordonnées les images, c'est-à-dire les périmètres (en cm).

La fonction f est linéaire donc sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine.

On a vu à la question 4 que 10 est l'antécédent de 30 : la droite passe par le point M de coordonnées (10 ; 30).

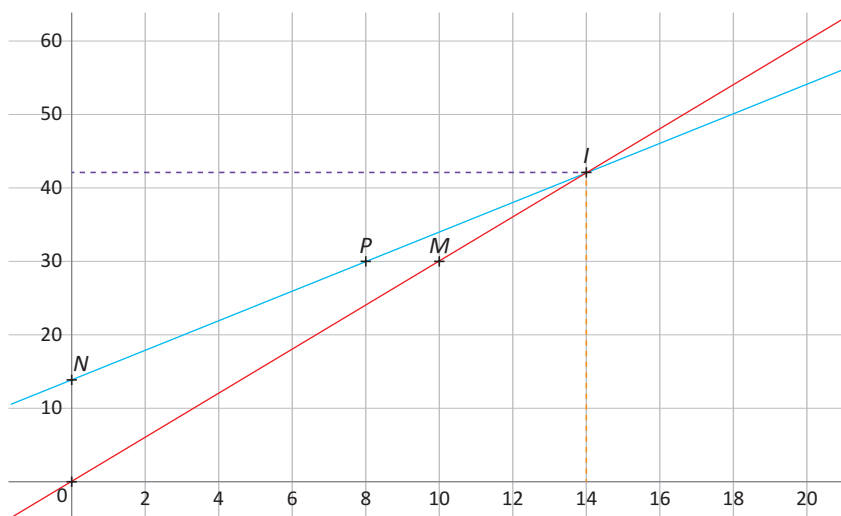
J'ai tracé en rouge cette fonction.

La fonction g est affine donc sa représentation graphique est une droite.

On a vu à la question 3 que 14 est l'image de 0 : la droite passe par le point N de coordonnées (0 ; 14).

On a vu à la question 4 que 8 est l'antécédent de 30 : la droite passe par le point P de coordonnées (8 ; 30).

J'ai tracé en bleu cette fonction.



6. Les deux droites se coupent au point I .

L'abscisse de I est 14.

Les deux périmètres sont égaux pour $x = 14$.

7. La situation où les deux périmètres sont égaux peut être modélisée par l'équation :

$$f(x) = g(x)$$

On résout l'équation : $3x = 2x + 14$

$$3x - 2x = 14$$

$$x = 14$$

Les deux périmètres sont égaux pour $x = 14$.

GRANDEURS ET MESURES



CHAPITRE 16

VOLUME D'UNE BOULE



PRÉ-REQUIS

- ▶ Nombre π [6^e]
- ▶ Les unités de volume [6^e]
- ▶ Volume d'un cône [4^e]

☐
☐
☐


ON FAIT LE POINT

	A	B	C
1 La valeur exacte du nombre π est :	3,14	3,1414592654	On ne peut pas donner la valeur exacte en écriture décimale
2 1 cm ³ correspond à :	un cube d'arête 1 cm	trois cubes d'arête 1 cm	un cube d'arête 3 cm
3 842 m ³ correspond à :	8,42 cm ³	84 200 cm ³	842 000 000 cm ³
4 1 L correspond à :	1 cm ³	1 dm ³	1 m ³
5 Le volume d'un cône de rayon R et de hauteur h est :	$\pi \times R^2$	$\pi \times R^2 \times h$	$\frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times h$

Solutions : 1.C 2.A 3.C 4.B 5.C

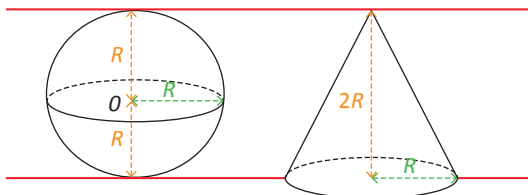


COMPRENDRE LA FORMULE

Pour déterminer le volume d'une boule, on se sert du volume d'un cône.

Imagine une boule quelconque, de centre O et de rayon R .

On prend un cône qui a la même « hauteur » que la boule, et le même rayon :



On remplit à ras bord le cône d'eau puis on déverse le contenu dans la boule.

On remarque qu'en remplissant deux fois le cône, on remplit à ras bord la boule, sans que l'eau ne déborde :

Volume boule = $2 \times$ volume cône

On connaît déjà la formule du volume du cône :

$$\text{Volume boule} = 2 \times \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times h$$

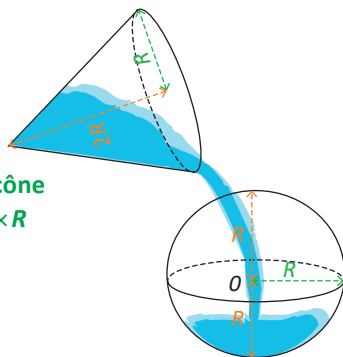
→ la hauteur du cône est égale à $2 \times R$

$$\text{Volume boule} = 2 \times \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times 2 \times R$$

Pour simplifier la formule, on multiplie les nombres entre eux, et les variables R entre elles :

$$\text{Volume boule} = 2 \times \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times 2 \times R$$

$$\text{Volume boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$$



Formule du volume d'une boule

ATTENTION

Ceci n'est pas une démonstration !

Il s'agit d'une conjecture émise grâce à une expérience visuelle.

La démonstration rigoureuse n'est pas accessible en classe de troisième.



Exercice 1

La Lune est assimilée à une boule de rayon 1 737,4 km.

Calculer une valeur approchée au millier près de son volume, en km^3 .

Exercice 2

Un ballon de basket a un diamètre de 24,8 cm.

Calculer une valeur approchée à l'unité de son volume en cm^3 .

Exercice 3

On range 8 boules de pétanque de diamètre 74 mm dans une boîte de dimension $35,6 \times 20,2 \times 9,3$ cm.

Calculer le volume inoccupé, en cm^3 , par les boules dans cette boîte.

Donner une valeur approchée à l'unité.

DÉFI

On verse 50 cl d'eau dans un pavé droit, dont la base est un rectangle de dimensions 10 cm et 8 cm.

En ajoutant un glaçon en forme de boule, la hauteur d'eau augmente de 2 cm.

Quel est le rayon de la boule en cm ? Donner une valeur approchée au dixième près.

Exercice 1

$$\text{Volume Lune} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$$

$$\text{Volume Lune} = \frac{4}{3} \times \pi \times 1\,737,4^3$$

La calculatrice nous renvoie comme résultat une écriture scientifique :

$$2,196787561 \times 10^{10}$$

RAPPEL

Il faut donc multiplier 2,196787561 par 10, et dix fois de suite !

On obtient 21 967 875 610.

$$\text{Volume Lune} \approx 21\,967\,876\,000 \text{ km}^3$$

Exercice 2

$$\text{Volume Ballon} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$$

Il y a un piège ! L'énoncé donne le diamètre. Tu as appris en 6^e que le diamètre est le double du rayon.

$$\text{Donc } R = 24,8 \div 2 = 12,4 \text{ cm.}$$

$$\text{Volume Ballon} = \frac{4}{3} \times \pi \times 12,4^3$$

$$\text{Volume Ballon} \approx 7\,986 \text{ cm}^3$$

Exercice 3

Étape 1 : on calcule le volume de la boîte

$$\text{Volume boîte} = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$$

$$\text{Volume boîte} = 35,6 \times 20,2 \times 9,3$$

$$\text{Volume boîte} \approx 6\,688 \text{ cm}^3$$

Étape 2 : on calcule le volume d'une boule de pétanque.

Encore un piège, l'énoncé donne le diamètre donc $R = 74 \div 2 = 37 \text{ mm}$.

Comme l'énoncé veut un résultat en cm^3 , il faut résonner avec des longueurs en cm.

On prendra $R = 3,7 \text{ cm}$.

$$\text{Volume d'une boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$$

$$\text{Volume d'une boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times 3,7^3$$

$$\text{Volume d'une boule} \approx 212 \text{ cm}^3$$

Étape 3 : on calcule le volume des 8 boules de pétanque

$$\text{Volume de 8 boules} \approx 8 \times 212$$

$$\text{Volume de 8 boules} \approx 1\,696 \text{ cm}^3$$

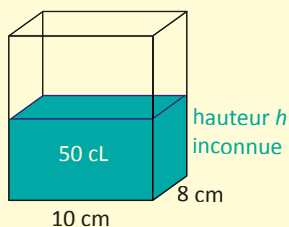
Étape 4 : On calcule le volume inoccupé par les boules dans la boîte :

$$\text{Volume inoccupé} \approx 6\,688 - 1\,696$$

$$\text{Volume inoccupé} \approx 4\,992 \text{ cm}^3$$

DÉFI

Avant d'ajouter le glaçon, voici un schéma de la situation :



Étape 1 : Déterminons la hauteur inconnue

Le volume d'eau est en cL et les dimensions sont en cm.

Je choisis de convertir le volume en cm^3 pour faciliter les calculs :

$$50 \text{ cL} = 0,5 \text{ L} = 0,5 \text{ dm}^3 = 500 \text{ cm}^3$$

Le volume d'eau se calcule ainsi :

$$\text{Volume d'eau} = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur} = 10 \times 8 \times h$$

On simplifie et on obtient :

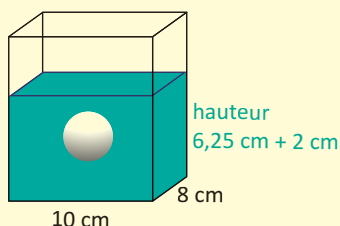
$$\text{Volume d'eau} = 80h$$

On sait que ce volume est égal à 500 cm^3 .

Pour trouver h , on résout l'équation $80h = 500$

$$\text{On obtient } h = \frac{500}{80} = 6,25 \text{ cm}$$

Quand on ajoute le glaçon, voici le schéma de la situation :



Étape 2 : Déterminons le volume de la boule

Il y a deux manières d'exprimer le volume occupé dans le récipient :

- Il correspond au volume d'eau augmenté du volume de la boule :

$$\text{Volume occupé} = \text{Volume boule} + 500 \text{ cm}^3$$

- On peut également calculer ce volume grâce aux dimensions :

$$\text{Volume occupé} = 10 \times 8 \times (6,25 + 2)$$

$$\text{Volume occupé} = 660 \text{ cm}^3$$

Pour trouver le volume de la boule, on résout l'équation :

$$\text{volume boule} + 500 = 660$$

$$\text{Volume boule} = 660 - 500$$

$$\text{Volume boule} = 160 \text{ cm}^3$$

Étape 3 : Déterminons le rayon de la boule

Pour trouver le rayon de la boule, il faut résoudre l'équation :

$$\frac{4}{3} \times \pi \times R^3 = 160$$

$$R^3 = \frac{160}{\frac{4}{3} \times \pi}$$

$$R^3 \approx 38,2$$

$$R \approx 3,4 \text{ cm}$$

RAPPEL

L'étape 3 est clairement hors programme car il faut résoudre une équation avec une variable au cube.

Alors bravo si tu as trouvé le résultat !

Pour résoudre ce type d'équation, j'ai utilisé la **racine-cubique** :

$$\sqrt[3]{38,2} \approx 3,4$$

ESPACE ET GÉOMÉTRIE



CHAPITRE 17

SE REPÉRER SUR UNE SPHÈRE

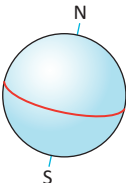
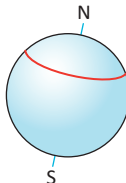
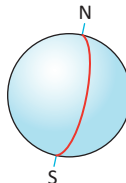


PRÉ-REQUIS

► Circonférence d'un cercle [6°]



ON FAIT LE POINT

	A	B	C
1 La circonférence d'un cercle s'appelle également :	le diamètre d'un cercle	le périmètre d'un cercle	l'aire d'un cercle
2 Pour calculer la circonférence d'un cercle, on utilise la formule :	$\pi \times \text{rayon}$	$\pi \times \text{diamètre}$	$\pi \times \text{rayon} \times \text{rayon}$
3 L'équateur est représenté sur la figure :			
4 La Terre est assimilée à une boule de rayon 6 371 km. L'équateur mesure environ :	40 030 km	20 015 km	12 742 km

Solutions : 1.B 2.B 3.A 4.A



SE REPÉRER SUR TERRE

Pour repérer un point sur Terre, on utilise les **coordonnées géographiques**. Elles se réfèrent aux méridiens et aux parallèles qui sont des **lignes imaginaires**.

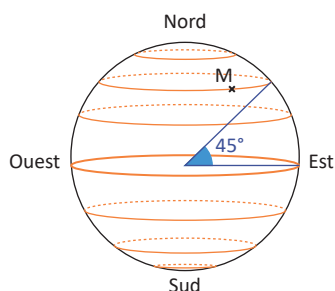
RAPPEL

Les applications de localisation utilisent les coordonnées GPS (Global Positioning System).

Voici les coordonnées de Paris :

48,866667 N

2,333333 E

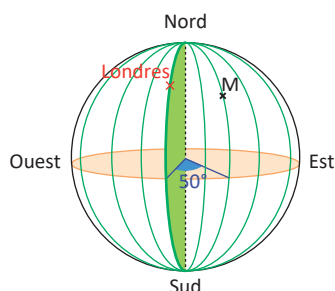


Un **parallèle** est un cercle parallèle à l'**équateur**, qui est naturellement le parallèle de référence.

La **latitude** du point *M* est la mesure de l'angle entre l'équateur et le parallèle passant par le point *M*.

Elle varie entre 90°S et 90°N.

La latitude de l'équateur est 0°.



Un **méridien** est un demi-cercle qui joint les pôles Nord et Sud.

Le méridien de référence est le **méridien de Greenwich**, passant par Londres. C'est un choix arbitraire de la communauté scientifique.

La **longitude** du point *M* est la mesure de l'angle entre le méridien de Greenwich et le méridien passant par le point *M*.

Elle varie entre 180°O et 180°E.

La longitude du méridien de Greenwich est 0°.

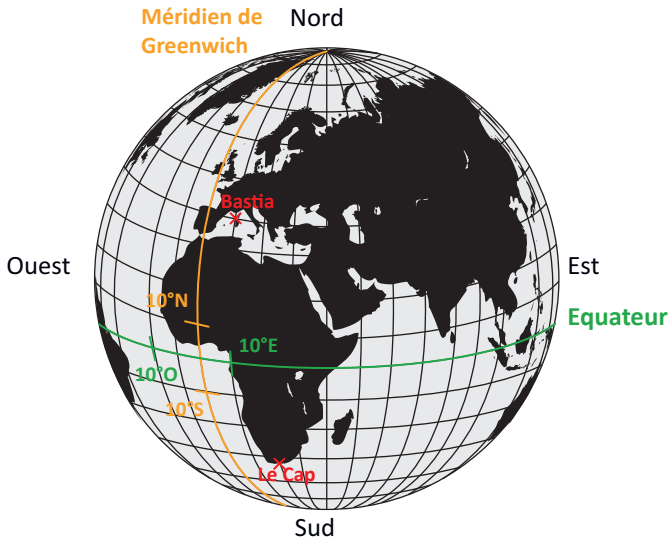
ASTUCE

Astuce pour ne pas confondre la latitude et la longitude :

le mot « latitude » ressemble à « altitude » :
c'est la coordonnée qui indique le Nord ou le Sud !

Les parallèles et les méridiens forment un « quadrillage » qui permet de repérer n'importe quel point sur Terre.

Chaque point est repéré par une latitude et une longitude.



Par exemple la ville de Bastia :

- Depuis le méridien de Greenwich, on se décale d'un méridien vers l'Est. Il y a 10° entre chaque méridien. Donc la longitude Bastia est 10°E.
- Depuis l'équateur, on se décale de 4 parallèles vers le Nord. Il y a 10° entre chaque parallèle.
- Donc la latitude de Bastia est 40°N.

Finalement, les coordonnées géographiques de Bastia sont 10°E et 40°N.

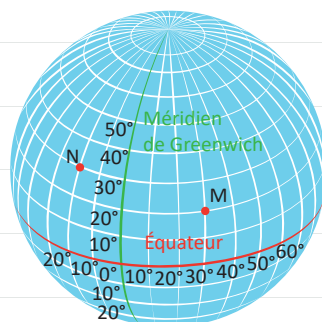
Par exemple la ville Le Cap :

- Depuis le méridien de Greenwich, on se décale de 2 méridiens vers l'Est. Il y a 10° entre chaque méridien. Donc la longitude Le Cap est 20°E.
- Depuis l'équateur, on se décale de 3,5 parallèles vers le Sud. Il y a 10° entre chaque parallèle.
- Donc la latitude de Le Cap est 35°S.

Finalement, les coordonnées géographiques de Le Cap sont 20°E et 35°S.

Exercice 1

- Donner les coordonnées géographiques des points M et N .
- Un avion décolle du point M . Il se déplace de 40° vers l'Ouest et de 10° vers le Sud.
Donner les coordonnées géographiques du lieu d'atterrissage.
- Le point N est la dernière position connue d'un bateau. Il a indiqué s'être déplacé de 80° vers l'Ouest et de 30° vers le Sud. Quelles sont les coordonnées géographiques de sa position ?



Exercice 2

Le 1^{er} janvier 2024, à 16 h 10, un séisme s'est produit dans la péninsule de Noto au Japon.

L'épicentre se trouvait à Suzu (37°N et 137°E). Les effets du séisme se sont fait sentir jusqu'à 2° de longitude et de latitude de l'épicentre.

Parmi les villes suivantes, lesquelles ont ressenti les effets du séisme ?

- | | |
|--|---|
| • Kanazawa : 37°N et 136°E | • Sapporo : 43°N et 141°E |
| • Osaka : 35°N et 135°E | • Fukuoka : 34°N et 131°E |
| • Tokyo : 36°N et 140°E | • Hamamatsu : 35°N et 138°E |

DÉFI

Nancy et Toulon sont sur le même méridien.

La latitude de Nancy est 49°N et celle de Toulon est 43°N .

- Représenter cette situation sur un cercle qui représente le méridien commun à Nancy et Toulon.
- En estimant le rayon de la Terre à 6 371 km, calculer la distance à vol d'oiseau entre Nancy et Toulon en km. Arrondir le résultat à l'unité.

Exercice 1

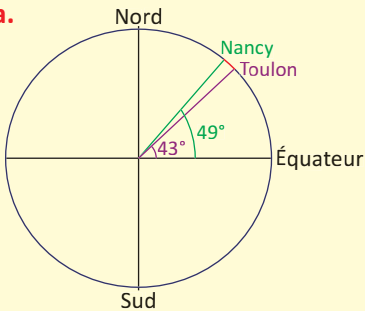
- a. M a pour coordonnées 20°N et 30°E .
 N a pour coordonnées 30°N et 20°O .
- b. 10°N et 10°O
- c. Le bateau est à 100°O (sur l'équateur).

Exercice 2

- Kanazawa : 37°N et 136°E ✓
- Osaka : 35°N et 135°E ✓
- Tokyo : 36°N et 140°E ✗
- Sapporo : 43°N et 141°E ✗
- Fukuoka : 34°N et 131°E ✗
- Hamamatsu : 35°N et 138°E ✓

DÉFI

a.



b. On cherche la longueur de l'arc de cercle entre Nancy et Toulon.

Or les arcs de cercle sont proportionnels aux secteurs angulaires.

On sait qu'un cercle complet forme un angle de 360° .

On peut calculer la circonférence du cercle grâce au rayon :

$$\text{circonférence} = \pi \times \text{diamètre}$$

$$= \pi \times 6\,371 \times 2$$

$$= 12\,742\pi \text{ km}$$

$$49^\circ - 43^\circ = 6^\circ$$

Le secteur angulaire entre Nancy et Toulon mesure 6° .

On peut construire un tableau de proportionnalité :

Arc de cercle	$12\,742\pi$	?
Angle	360°	6°

On applique la règle de 3 : $? = 12\,742\pi \times 6 \div 360 \approx 667$ km

La distance entre Nancy et Toulon est d'environ 667 km.

CHAPITRE 18

TRIANGLES SEMBLABLES



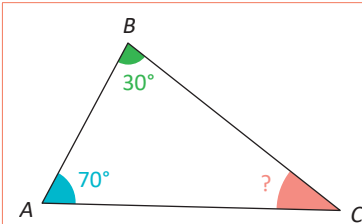
PRÉ-REQUIS

- Proportionnalité [5^e]
- Angles dans un triangle [5^e]
- Angles et parallélisme [5^e]
- Agrandissement et réduction [4^e]

☐
☐
☐
☐


ON FAIT LE POINT

1



La mesure de l'angle $\widehat{BCA}$ est :

2

Le tableau qui représente une situation de proportionnalité est :

9	12	15
13,5	18	35,5

3	5	7
6	10	15

3	4	5
4,8	6,4	8

3

Les côtés d'un triangle ont pour longueurs 3 cm, 4 cm et 5 cm. On applique une réduction de coefficient 0,8. Les côtés du triangle réduit ont pour longueur :

2,4 cm
3,2 cm
4 cm

2,2 cm
3,2 cm
4,2 cm

3,75 cm
5 cm
6,25 cm

4

Un triangle a un côté qui mesure 10 cm. Après agrandissement, ce côté mesure 16 cm. Le coefficient d'agrandissement est :

	A	B	C
0,625		6	1,6

5

Les angles d'un triangle mesurent 50°, 60° et 70°. On applique un agrandissement de coefficient 2. Les angles du triangle agrandi mesurent :

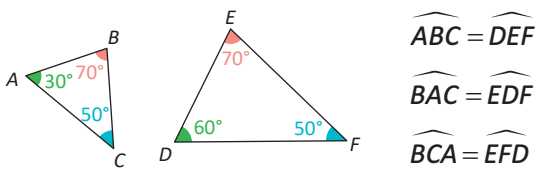
50°	52°	100°
60°	62°	120°
70°	72°	140°

Solutions : 1.B 2.C 3.A 4.C 5.A



COMPRENDRE LA NOTION

Deux **triangles semblables** sont deux triangles qui ont leurs angles deux à deux de même mesure.



Comme les triangles ABC et EDF ont leurs angles deux à deux de même mesure alors ils sont **semblables**.

VOCABULAIRE

- Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont homologues car ils ont la même mesure ;
- Les côtés AB et DE sont homologues car ils se situent entre deux angles homologues ;
- Les sommets A et D sont homologues car ils sont les sommets de deux angles homologues.

En pratique, tu ne connais pas la mesure des trois angles.

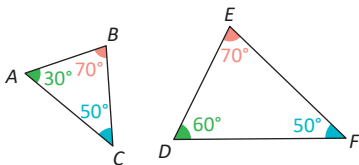
Tu devras utiliser les propriétés sur les angles que tu as vues depuis la cinquième :

- Angles dans un triangle ;
- Angles alternes-internes et correspondants.

Mais parfois, tu ne pourras pas déterminer la mesure des angles. Ne t'en fais pas ! Il existe également une propriété sur les **longueurs des côtés** de deux triangles semblables.

Souviens-toi de cette propriété vue en 4^e :

« Un agrandissement ou une réduction conserve la mesure des angles ».



Comme ABC et DEF ont leurs angles deux à deux de même mesure, alors l'un des triangles est un agrandissement de l'autre.

Qui dit agrandissement, dit proportionnalité !

On peut ainsi en déduire cette propriété :

Si deux triangles sont semblables alors les longueurs des côtés homologues sont **proportionnelles**.

En pratique, cette propriété permet de calculer des longueurs manquantes dans un triangle.

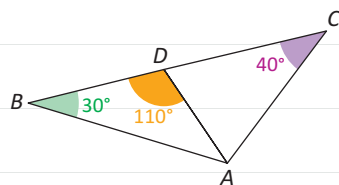
La réciproque est également vraie :

Si les longueurs des côtés de deux triangles sont deux à deux **proportionnelles** alors les deux triangles sont semblables.

En pratique, cette propriété permet de démontrer que deux triangles sont semblables, dans le cas où on n'a pas assez d'informations sur la mesure des angles.

Exercice 1

1. Les triangles ABD et ABC sont-ils semblables ? Expliquer.
2. Compléter le tableau suivant (on commence à chaque fois dans le triangle ABD) :



Sommets homologues	Angles homologues	Côtés homologues
A et ...	$\widehat{ADB}$ et ...	$[BD]$ et ...
B et ...	... et ...	... et ...
D et ...	... et ...	... et ...

Exercice 2

ANG et LES sont deux triangles tels que :

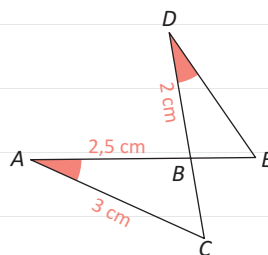
- $AN = 12$ cm, $NG = 14,4$ cm et $AG = 8,1$ cm ;
- $LE = 9,6$ cm, $ES = 5,4$ cm et $LS = 8$ cm.

1. Ces triangles sont-ils semblables ? Expliquer.
2. Compléter le tableau suivant :

Sommets homologues	Angles homologues	Côtés homologues
A et ...	$\widehat{ANG}$ et ...	$[AN]$ et ...
N et ...	... et ...	... et ...
G et ...	... et ...	... et ...

Exercice 3

1. Démontrer que les triangles ABC et BDE sont semblables.
2. Calculer DE .



DÉFI

$ABCD$ est un parallélogramme.

E est un point quelconque du côté $[DA]$.

F est le point d'intersection des droites (BE) et (DC) .

Démontrer que les triangles ABE et DEF sont semblables.



Exercice 1

1.

- Dans le triangle ABD , il me manque la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$:

$$\widehat{BAD} = 180 - 110 - 30 = 40^\circ$$

PROPRIÉTÉ

Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180° .

Le triangle ABD possède 3 angles mesurant 30° , 40° et 110° .

- Dans le triangle ABC , il me manque la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$:

$$\widehat{BAC} = 180 - 40 - 30 = 110^\circ$$

Le triangle ABC possède 3 angles mesurant 30° , 40° et 110° .

- Conclusion :** Les triangles ABC et ABD ont leurs angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

2.

Sommets homologues	Angles homologues	Côtés homologues
A et C	$\widehat{ADB}$ et $\widehat{BAC}$	$[BD]$ et $[AB]$
B et B	$\widehat{ABD}$ et $\widehat{ABC}$	$[AB]$ et $[BC]$
D et A	$\widehat{BAD}$ et $\widehat{ACB}$	$[AD]$ et $[AC]$

Exercice 2

1. Je range les longueurs dans un tableau, dans l'ordre croissant :

Triangle ANG (cm)	8,1	12	14,4
Triangle LES (cm)	5,4	8	9,6

RAPPEL

Comme je connais toutes les longueurs des côtés des triangles, je cherche à montrer que ces longueurs sont proportionnelles deux à deux.

Il faut associer les potentiels côtés homologues astucieusement :

Les deux plus courts ensembles, les deux plus longs ensembles et les deux derniers ensembles !

Pour savoir s'il s'agit d'un tableau de proportionnalité, je calcule les rapports :

$$\frac{8,1}{5,4} = 1,5 \quad \frac{12}{8} = 1,5 \quad \frac{14,4}{9,6} = 1,5$$

Les longueurs des côtés sont proportionnelles deux à deux donc les triangles *ANG* et *LES* sont semblables.

RAPPEL

On peut également dire que le triangle *ANG* est un agrandissement du triangle *LES* de rapport 1,5.

2.

Sommets homologues	Angles homologues	Côtés homologues
A et S	$\widehat{ANG}$ et $\widehat{ELS}$	[AN] et [LS]
N et L	$\widehat{GAN}$ et $\widehat{ESL}$	[AG] et [ES]
G et E	$\widehat{AGN}$ et $\widehat{LES}$	[NG] et [LE]

Exercice 3

1. Même si on ne connaît aucune mesure d'angle, on peut prouver des égalités grâce aux propriétés vues depuis la 6^e :

- $\widehat{BAC} = \widehat{BDE}$ d'après le codage de la figure ;
- $\widehat{ABC} = \widehat{DBE}$ car ils sont opposés par le sommet ;
- $\widehat{BCA} = \widehat{DEB}$ car la somme des angles dans un triangle est égale à 180° et qu'on a déjà prouvé deux égalités.

Les triangles ABC et BDE ont leurs angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

2. Les triangles ABC et BDE sont semblables donc les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles.

J'en déduis le tableau de proportionnalité :

Triangle ABC (cm)	AB	BC	AC
Triangle BDE (cm)	BD	BE	DE

Je remplace longueurs que je connais déjà :

Triangle ABC (cm)	2,5	BC	3
Triangle BDE (cm)	2	BE	DE

J'applique règle de 3 pour calculer DE :

$$DE = 2 \times 3 \div 2,5$$

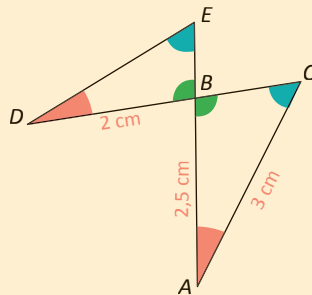
$$DE = 2,4 \text{ cm}$$

RAPPEL

Pour construire le tableau de proportionnalité, je dois associer les côtés homologues.

Un schéma est très utile pour les trouver !

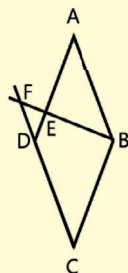
Les côtés homologues se situent entre deux angles homologues. Grâce au code couleurs du schéma, je peux les trouver en un coup d'œil.



DÉFI

Même si on ne connaît aucune mesure d'angle, on peut prouver des égalités grâce aux propriétés vues depuis la 5^e :

- Je sais que $\widehat{DEF}$ et $\widehat{AEB}$ sont opposés par le sommet donc $\widehat{DEF} = \widehat{AEB}$.
- Je sais qu' $ABCD$ est un parallélogramme donc les droites (DC) et (AB) sont parallèles.
- Je sais que les droites (DC) et (AB) sont parallèles et que les angles $\widehat{DFE}$ et $\widehat{EBA}$ sont alternes-internes donc $\widehat{DFE} = \widehat{EBA}$.
- Je sais que les droites (DC) et (AB) sont parallèles et que les angles $\widehat{FDE}$ et $\widehat{EAB}$ sont alternes-internes donc $\widehat{FDE} = \widehat{EAB}$.
- **Conclusion :** Les triangles ABE et DEF ont leurs angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.



CHAPITRE 19

ÉGALITÉ DE THALÈS

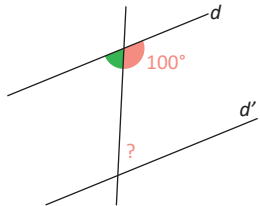


PRÉ-REQUIS

- ▶ Proportionnalité [5^e]
- ▶ Angles dans un triangle [5^e]
- ▶ Angles et parallélisme [5^e]
- ▶ Agrandissement et réduction [4^e]
- ▶ Triangles semblables [3^e]

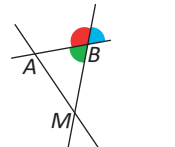
☐
☐
☐
☐
☐


ON FAIT LE POINT

	A	B	C
1 Si $\frac{5}{AB} = \frac{8}{5}$ alors :	$AB = 1,25$	$AB = 2$	$AB = 3,125$
2 <i>PUY</i> et <i>FOU</i> sont deux triangles semblables tels que : $PU = 5$ cm, $UY = 6$ cm, $PY = 7$ cm, $FO = 21,6$ cm, $OU = 25,2$ cm et $FU = 18$ cm. Le côté $[UY]$ est homologue à :	$[FO]$	$[OU]$	$[FU]$
3  Si les droites (d) et (d') sont parallèles, alors :	$? = 100^\circ$	$? = 80^\circ$	$? = 90^\circ$

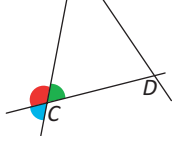
4

L'affirmation fausse est :



5

Si les angles codés en vert sont égaux alors :



A	B	C
les angles verts sont alternes-internes	les angles bleus sont alternes-internes	les angles rouges sont correspondants
Les droites (AD) et (CB) sont perpendiculaires	Les droites (AB) et (CD) sont parallèles	

Solutions : 1.C 2.A 3.B 4.B 5.B



COMPRENDRE L'ÉGALITÉ

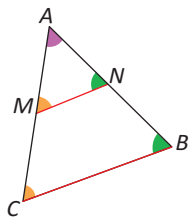
Il existe deux configurations pour exploiter l'égalité de Thalès.

■ Configuration 1 : Deux triangles imbriqués

Conditions de départ :

Les droites (CN) et (BM) sont sécantes en A.

Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



Les triangles AMN et ABC sont semblables :

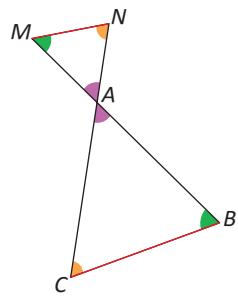
- Ils ont en commun l'angle violet ;
- On sait que les angles orange sont **correspondants** et que les droites (MN) et (BC) sont parallèles donc les angles orange sont égaux ;
- On sait que les angles verts sont **correspondants** et que les droites (MN) et (BC) sont parallèles donc les angles verts sont égaux.
- Les triangles AMN et ABC ont leurs angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

■ Configuration 2 : Le sablier

Conditions de départ :

Les droites (CN) et (BM) sont sécantes en A.

Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



Les triangles AMN et ABC sont semblables :

- On sait que les angles violets sont **opposés par le sommet** donc ils sont égaux ;
- On sait que les angles orange sont **alternes-internes** et que les droites (MN) et (BC) sont parallèles donc les angles orange sont égaux ;
- On sait que les angles verts sont **alternes-internes** et que les droites (MN) et (BC) sont parallèles donc les angles verts sont égaux ;
- Les triangles AMN et ABC ont leurs angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

■ **Conséquence sur les longueurs des côtés :**

On sait que les triangles AMN et ABC sont semblables donc les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles. Je peux écrire l'égalité des rapports de proportionnalité :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

← Longueurs des côtés du triangle AMN
← Longueurs des côtés du triangle ABC

Voici l'**égalité de Thalès**.

Elle est vraie quand les droites (MN) et (BC) sont **parallèles**.

POUR ASSOCIER LES CÔTÉS HOMOLOGUES

Puisque les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles, j'associe les deux plus courts ensembles, les deux plus longs ensembles et les deux derniers ensembles !



CALCULER DES LONGUEURS

L'égalité de Thalès permet de calculer des longueurs quand tu es confronté à l'une des configurations précédentes.

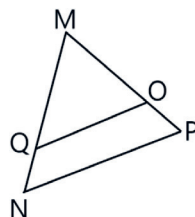
Énoncé :

Les droites (PO) et (NQ) sont sécantes en M .

Les droites (PN) et (QO) sont parallèles.

$MP = 6$ cm, $MN = 7,2$ cm et $MO = 4,5$ cm.

Calculer MQ .



Voici la rédaction attendue :

Je sais que les droites (PO) et (NQ) sont sécantes en M .

Les droites (PN) et (QO) sont parallèles.

J'utilise l'égalité de Thalès :

Je cite les conditions qui me permettent d'utiliser l'égalité de Thalès.

J'indique que j'utilise l'égalité de Thalès. Car dans certains exercices, je peux utiliser l'égalité de Pythagore.

$$\frac{MO}{MP} = \frac{MQ}{MN} = \frac{QO}{PN}$$

Pour écrire correctement l'égalité, je repère les deux triangles semblables. Dans cet exercice, les triangles MOQ et MPN sont semblables (configuration des triangles imbriqués).

Puisque les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles, j'associe les deux plus courts ensembles, les deux plus longs ensembles et les deux derniers ensembles !

$$\frac{4,5}{6} = \frac{MQ}{7,2} = \frac{QO}{PN}$$

Je remplace les longueurs connues à l'aide des données de l'énoncé.

$$MQ = 4,5 \times 7,2 \div 6$$

J'applique la règle de 3 pour calculer la longueur souhaitée.

$$MQ = 5,4 \text{ cm}$$

Je mets en valeur le résultat, et je n'oublie pas d'écrire l'unité.



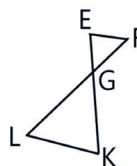
DÉMONTRER QUE DEUX DROITES SONT PARALLÈLES

L'égalité de Thalès permet de démontrer que deux droites sont parallèles quand tu es confronté à l'une des configurations.

Énoncé :

Les droites (EK) et (FL) sont sécantes en G .

$EG = 3$ cm, $GF = 4$ cm, $GK = 4,05$ cm et $GL = 5,4$ cm.



Les droites (EF) et (LK) sont-elles parallèles ?

Voici la rédaction attendue :

Je sais que les droites (EK) et (FL) sont sécantes en G .

Surtout je n'écris pas que les droites (EF) et (LK) sont parallèles puisque c'est ce que je cherche à démontrer.

D'une part, $\frac{EG}{GK} = \frac{3}{4,05} = \frac{20}{27}$

D'autre part, $\frac{GF}{GL} = \frac{4}{5,4} = \frac{20}{27}$

Pour savoir si l'égalité de Thalès est vraie dans cet exercice, je dois vérifier si les longueurs des côtés des triangles EGF et GLK sont proportionnelles.

Il faut associer les potentiels côtés homologues astucieusement puis calculer les rapports séparément.

Calculer deux rapports suffit.

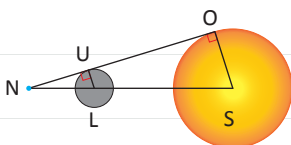
Je remarque que $\frac{EG}{GK} = \frac{GF}{GL}$
donc l'égalité de Thalès est vraie.

Ainsi, les droites (EF) et (LK) sont parallèles.

Si les résultats des rapports sont différents, j'indique que l'égalité de Thalès est fausse. Ainsi, les droites ne sont pas parallèles.

■ Exercice 1

Naomi (représentée par le point N) observe une éclipse solaire. On estime le rayon moyen du Soleil à 696 000 km, celui de la Lune à 1 737 km et la distance NS à 149 millions de km au moment de l'éclipse.



Calculer la longueur NL , c'est-à-dire la distance entre Naomi et le centre de la Lune.

Arrondir au km près.

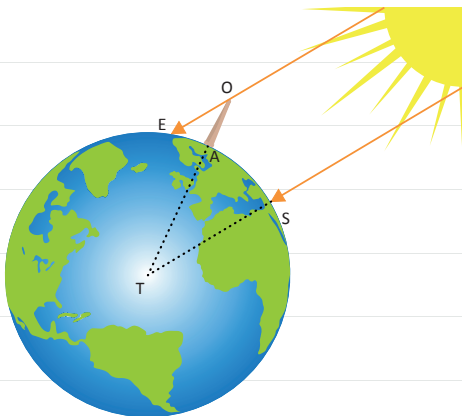
■ Exercice 2

Le mathématicien grec Ératosthène a estimé le rayon de la Terre au III^e siècle avant notre ère.

Au solstice d'été, à 12 h, ses connaissances en astronomie lui permettent d'affirmer que :

- à Syène (le point S), les rayons étaient parfaitement verticaux ;
- les rayons du Soleil arrivent parallèles sur Terre car le Soleil est très loin.

À Alexandrie (le point A), il mesure l'ombre d'un obélisque de 8 mètres de haut : l'ombre EA mesure 1 m.

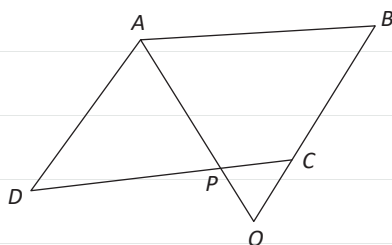




Sachant que les villes de Syène et d'Alexandrie sont distantes de 800 km, calculer le rayon de la Terre.

Exercice 3

$AB = 4,2$ cm ; $BC = 4$ cm ; $CO = 2$ cm ; $PO = 3$ cm ; $DP = 2,8$ cm et $AP = 6$ cm.



Démontrer qu' $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 1

Je sais que les droites (OU) et (SL) sont sécantes en N .

Les droites (UL) et (OS) sont parallèles car **elles sont perpendiculaires à la même droite (ON)**.

ATTENTION !

Il n'est pas écrit dans l'énoncé que les droites (UL) et (OS) sont parallèles.

Il faut le justifier !

Souviens-toi de cette propriété vue en 6^e :
« Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles. »

J'utilise l'égalité de Thalès :

$$\frac{UL}{OS} = \frac{NL}{NS} = \frac{NU}{NO}$$

$$\frac{1\,737}{696\,000} = \frac{NL}{149\,000\,000} = \frac{NU}{NO}$$

$$NL = 1\,737 \times 149\,000\,000 \div 696\,000$$

Les triangles semblables sont NUL et NOS .

J'associe astucieusement les côtés homologues.

[UL] et [OS] les deux plus petits.

[NL] et [NS] les deux plus longs.

[NU] et [NO] les deux qui restent.

$$NL \approx 371\,858 \text{ km}$$

Exercice 2

Le rayon de la Terre correspond au côté [TA] ou [TS].

Je sais que les droites (OT) et (ES) sont sécantes en A .

Les droites (EO) et (TS) sont parallèles.

J'utilise l'égalité de Thalès :

$$\frac{EA}{AS} = \frac{EO}{TS} = \frac{OA}{AT}$$

Les triangles semblables sont EOA et ATS .

J'associe astucieusement les côtés homologues.

[EA] et [AS] les deux plus petits.

[EO] et [TS] les deux plus longs.

[OA] et [AT] les deux qui restent.

$$\frac{0,001}{800} = \frac{EO}{TS} = \frac{0,008}{AT}$$

$$AT = 800 \times 0,008 \div 0,001$$

$$AT = 6400 \text{ km}$$

Le rayon de la Terre mesure 6 400 km.

Toutes les longueurs doivent être exprimées dans la même unité. Je choisis le km. Ainsi :

$$1 \text{ m} = 0,001 \text{ km}$$

$$8 \text{ m} = 0,008 \text{ km}$$

Exercice 3

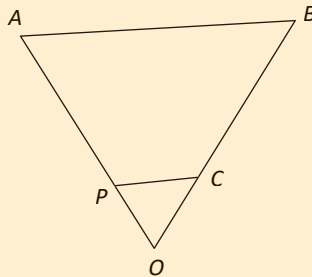
Pour montrer qu' $ABCD$ est un parallélogramme, il faut montrer que :

- les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
- les droites (BC) et (AD) sont parallèles.

Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles :

ASTUCE

On s'intéresse à cette configuration. Les deux triangles potentiellement semblables sont OPC et OAB .



Je sais que les droites (AP) et (BC) sont sécantes en O .

D'une part, $\frac{OP}{OA} = \frac{3}{3+6} = \frac{1}{3}$

D'autre part, $\frac{OC}{OB} = \frac{2}{2+4} = \frac{1}{3}$

Je remarque que $\frac{OP}{OA} = \frac{OC}{OB}$ donc l'égalité de Thalès est vraie.

Ainsi, les droites (AB) et (CP) sont parallèles.

Les points C , P et D sont alignés donc **les droites (AB) et (CD) sont parallèles.**

J'en profite pour calculer la longueur PC :

Je sais que les droites (AP) et (BC) sont sécantes en O .

Les droites (AB) et (CP) sont parallèles.

J'utilise l'égalité de Thalès :

$$\frac{OP}{OA} = \frac{OC}{OB} = \frac{PC}{AB}$$

$$\frac{3}{9} = \frac{2}{6} = \frac{PC}{4,2}$$

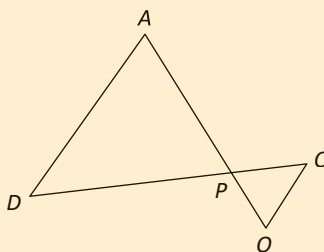
$$PC = 2 \times 4,2 \div 6$$

$$PC = 1,4 \text{ cm}$$

Montrer que les droites (BC) et (AD) sont parallèles :

ASTUCE

On s'intéresse à cette configuration. Les deux triangles potentiellement semblables sont OPC et ADP .



Je sais que les droites (AO) et (DC) sont sécantes en P .

D'une part, $\frac{OP}{PA} = \frac{3}{6} = 0,5$

D'autre part, $\frac{PC}{DP} = \frac{1,4}{2,8} = 0,5$

Je remarque que $\frac{OP}{PA} = \frac{PC}{DP}$ donc l'égalité de Thalès est vraie.

Ainsi, les droites (OC) et (AD) sont parallèles.

Les points B , C et O sont alignés donc les droites (BC) et (AD) sont parallèles.

Conclusion : $ABCD$ est un parallélogramme.

CHAPITRE 20

HOMOTHÉTIES



PRÉ-REQUIS

- Proportionnalité [5^e]
- Agrandissement et réduction [4^e]



ON FAIT LE POINT

	A	B
1 $k = 0,8$ est un rapport d'agrandissement.	VRAI	FAUX
2 $k = 3,2$ est un rapport d'agrandissement :	VRAI	FAUX
3 Pour réduire une figure, je dois diviser les longueurs par le rapport de réduction.	VRAI	FAUX
4 Si le rapport d'agrandissement est 3, alors les aires sont multipliées par 3.	VRAI	FAUX
5 On peut trouver au Pakistan une parfaite réplique de la Tour Eiffel, haute de 80 m. La Tour Eiffel à Paris mesure 300 m de haut. Le rapport de réduction est 3,75.	VRAI	FAUX

Solutions : 1.B 2.A 3.B 4.B 5.B



COMPRENDRE LA NOTION

Une **homothétie** est une transformation qui permet d'agrandir ou réduire une figure à partir d'un point fixe appelé **centre**.

Il y a toutefois plusieurs règles à respecter et deux cas à distinguer.

Considérons deux points distincts O et M .

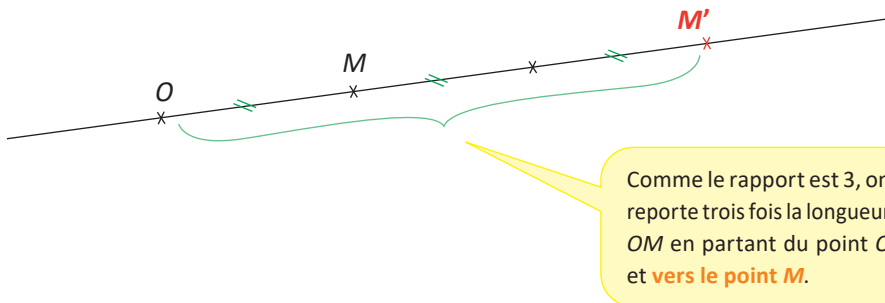


Je souhaite construire le point M' , image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k .

Cas 1 : le rapport k est un nombre positif

Par exemple, $k = 3$.

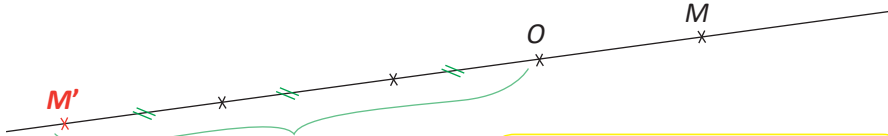
- Le point M' appartient à la droite (OM) ;
- $OM' = 3 \times OM$;
- **Les points M' et M sont du même côté par rapport au point O .**



Cas 2 : le rapport k est un nombre négatif

Par exemple, $k = -3$.

- Le point M' appartient à la droite (OM) ;
- $OM' = 3 \times OM$;
- Les points M' et M sont de part et d'autre du point O .

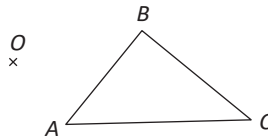


Comme le rapport est -3 , on reporte trois fois la longueur OM en partant du point O , **dans le sens opposé au point M** .

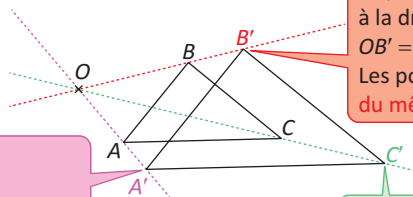


CONSTRUIRE L'IMAGE D'UNE FIGURE

Cas 1 : le rapport k est un nombre positif



Je souhaite construire l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport $1,5$.

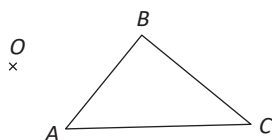


Le point A' appartient à la droite (OA)
 $OA' = 1,5 \times OA$
Les points A et A' sont du même côté par rapport à O .

Le point B' appartient à la droite (OB)
 $OB' = 1,5 \times OB$
Les points B et B' sont du même côté par rapport à O .

Le point C' appartient à la droite (OC)
 $OC' = 1,5 \times OC$
Les points C et C' sont du même côté par rapport à O .

Cas 2 : le rapport k est un nombre négatif

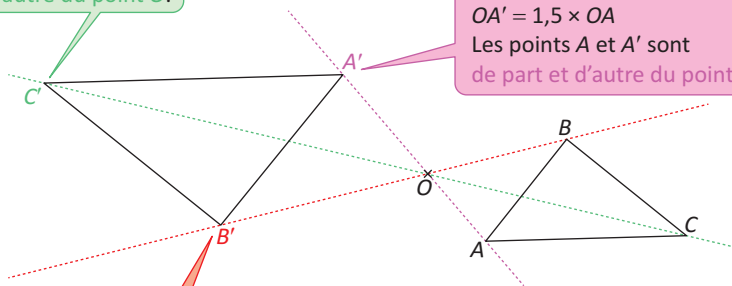


Je souhaite construire l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport $-1,5$.

Le point C' appartient
à la droite (OC)
 $OC' = 1,5 \times OC$
Les points C et C' sont
de part et d'autre du point O .

Le point A' appartient
à la droite (OA)
 $OA' = 1,5 \times OA$
Les points A et A' sont
de part et d'autre du point O .

Le point B' appartient
à la droite (OB)
 $OB' = 1,5 \times OB$
Les points B et B' sont
de part et d'autre du point O .



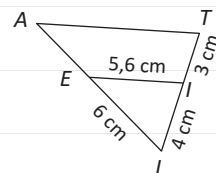


Exercice 1

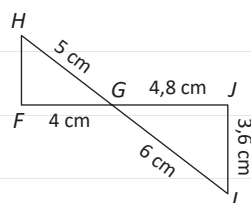
1. Construire un triangle ABC rectangle en B tel que $AB = 4$ cm et $BC = 3$ cm.
2. Construire en rouge l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre A et de rapport 4.
3. Construire en vert l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre A et de rapport $-0,5$.
4. Construire en noir l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre B et de rapport -2 .

Exercice 2

1. On passe du triangle LIE au triangle LTA par une homothétie.
Quels sont son centre et son rapport ?



2. On passe du triangle HGF au triangle GJI par une homothétie.
Quels sont son centre et son rapport ?

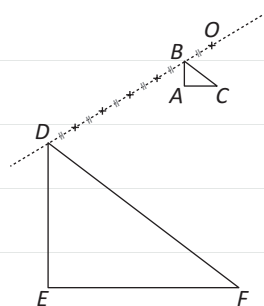


3. À quoi ces homothéties te font penser ?

Exercice 3

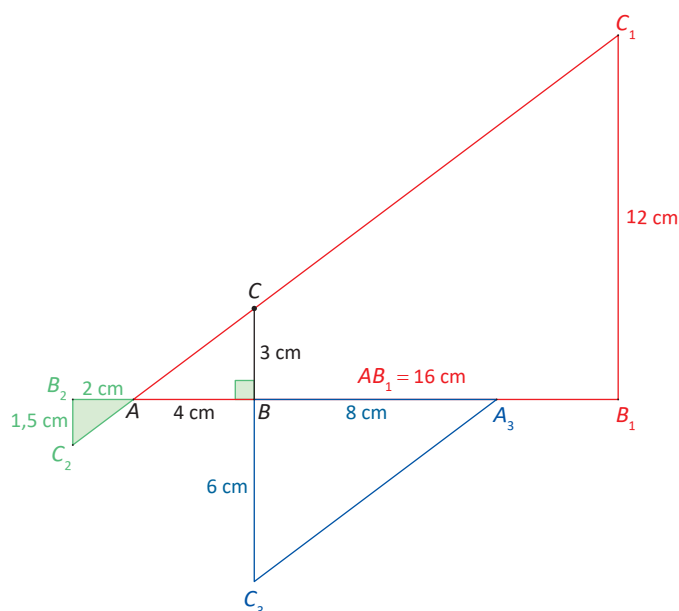
Le triangle ABC est rectangle en A : $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm.

DEF est l'image du triangle ABC par une homothétie de centre O .



1. Quel est le rapport de cette homothétie ?
2. Quelle est la nature du triangle DEF ? Expliquer.
3. Calculer le périmètre puis l'aire du triangle ABC .
4. En déduire le périmètre puis l'aire du triangle DEF .

Exercice 1



Exercice 2

1. Les triangles LIE et LTA ont en commun le sommet L.

Donc **le centre de l'homothétie est L.**

Les triangles LIE et LTA sont du même côté du point L donc **le rapport est positif.**

Un agrandissement permet de passer du triangle LIE au triangle LTA.

Le point T appartient à la droite (LI).

$$\text{rapport d'agrandissement} = \frac{\text{longueur agrandie}}{\text{longueur initiale}} = \frac{LT}{LI} = \frac{7}{4} = 1,75$$

Le rapport de l'homothétie est 1,75.

2. Les triangles HGF et GJI ont en commun le sommet G.

Donc **le centre de l'homothétie est G.**

Les triangles HGF et GJI sont de part et d'autre du point G donc **le rapport est négatif.**

Un agrandissement permet de passer du triangle HGF au triangle GJI.

Le point I appartient à la droite (GH).

$$\text{rapport d'agrandissement} = \frac{\text{longueur agrandie}}{\text{longueur initiale}} = \frac{GI}{HG} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Le rapport de l'homothétie est -1,2.

3. Ces homothéties renvoient au chapitre sur l'égalité de Thalès.

À la question 1, on a la configuration « deux triangles imbriqués ».

À la question 2, on a la configuration « sablier ».

Quand on applique une homothétie, on peut utiliser l'égalité de Thalès.

On peut également utiliser les propriétés sur les triangles semblables.

Exercice 3

1. Les deux triangles sont du même côté par rapport au point O donc le rapport est positif.

Le point D appartient à la droite (OB) .

Grâce au codage de la figure, on sait qu' OD est 6 fois plus grand qu' OB .

Donc le rapport de l'homothétie est 6.

2. Je sais que DEF est un agrandissement du triangle ABC et je sais que le triangle ABC est rectangle en A .

Or un agrandissement conserve la mesure des angles.

Donc le triangle DEF est rectangle en E .

3. Je sais que le triangle ABC est rectangle en A .

J'utilise l'égalité de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 6^2 + 8^2$$

$$BC^2 = 100$$

$$BC = \sqrt{100}$$

$$BC = 10 \text{ cm}$$

RAPPEL

Pour calculer le périmètre du triangle ABC , il me manque la longueur du côté $[BC]$.

Comme le triangle ABC est rectangle en A , je peux utiliser l'égalité de Pythagore !

$$\text{Périmètre } ABC = 10 + 8 + 6$$

$$\text{Périmètre } ABC = 24 \text{ cm}$$

$$\text{Aire } ABC = \frac{\text{longueur} \times \text{largeur}}{2}$$

$$\text{Aire } ABC = \frac{6 \times 8}{2}$$

$$\text{Aire } ABC = 24 \text{ cm}^2$$

4. Le triangle DEF est un agrandissement du triangle ABC de rapport 6.

Les longueurs sont multipliées par 6.

$$\text{Périmètre } DEF = \text{Périmètre } ABC \times 6$$

$$\text{Périmètre } DEF = 24 \times 6$$

$$\text{Périmètre } DEF = 144 \text{ cm}$$

RAPPEL DE 4^e

Si les longueurs sont multipliées par un coefficient k alors :

- les aires sont multipliées par k^2 ;
- les volumes sont multipliés par k^3 .

Les aires sont multipliées par 6^2 donc 36.

$$\text{Aire } DEF = \text{Aire } ABC \times 6^2$$

$$\text{Aire } DEF = 24 \times 36$$

$$\text{Aire } DEF = 864 \text{ cm}^2$$

TRIGONOMÉTRIE

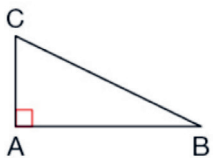


PRÉ-REQUIS

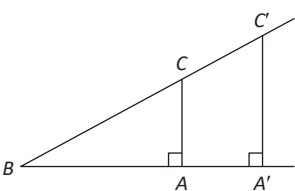
- ▶ Proportionnalité [5^e]
- ▶ Multiplication de fractions [4^e]
- ▶ Égalité de Thalès [3^e]
- ▶ Équation [4^e]
- ▶ Cosinus [4^e]

☐
☐
☐
☐
☐


ON FAIT LE POINT

	A	B	C
1 Dans un triangle rectangle, le côté le plus long s'appelle :	l'hypoténuse	l'hypothalamus	l'hippocampe
2 Si $\frac{x}{6} = 15$ alors :	$x = 0,4$	$x = 2,5$	$x = 90$
3 Si $\frac{4}{x} = 32$ alors :	$x = 0,125$	$x = 8$	$x = 128$
4  Dans ce triangle, quelle est la bonne affirmation ?	[AC] est le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$	[AC] est le côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$	[AC] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$

5

	A	B	C
 Dans cette configuration, l'égalité de Thalès peut s'écrire :	$\frac{BC}{CC'} = \frac{BA}{AA'} = \frac{AC}{A'C'}$	$\frac{BC}{BC'} = \frac{BA}{BA'} = \frac{AC}{A'C'}$	$\frac{BC}{BA} = \frac{BC'}{BA'} = \frac{AC}{A'C'}$

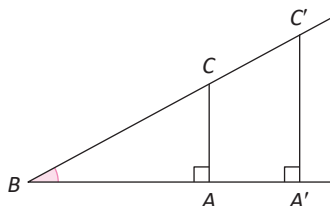
Solutions : 1A, 2C, 3A, 4B, 5B



COMPRENDRE LES ÉGALITÉS

La trigonométrie s'applique uniquement à des triangles rectangles.

Observons cette configuration :



Je sais que les droites (CC') et (AA') sont sécantes en B .

Je sais que les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles.

Je peux utiliser l'égalité de Thalès :

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'}$$

car elles sont perpendiculaires à la même droite (BA') .

Et maintenant, petit tour de magie avec les deux premiers rapports ...

$$\begin{aligned} \frac{AC}{A'C'} &= \frac{BA}{BA'} \\ A'C' \times BA &= AC \times BA' \\ \frac{AC}{BA} &= \frac{A'C'}{BA'} \end{aligned}$$



J'applique le produit en croix



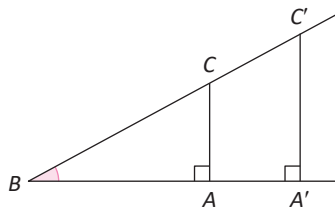
On obtient le même produit en croix avec cette égalité

L'égalité $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BA}{BA'}$ est équivalente à l'égalité $\frac{AC}{BA} = \frac{A'C'}{BA'}$.

On a échangé $A'C'$ et BA dans l'égalité !

Dans cette configuration

... on obtient l'égalité :



$$\frac{AC}{BA} = \frac{A'C'}{BA'}.$$

Dans le triangle ABC rectangle en A , $[AC]$ est le **côté opposé** à l'angle $\widehat{ABC}$.

Dans le triangle $A'BC'$ rectangle en A' , $[A'C']$ est **côté opposé** à l'angle $\widehat{ABC}$.

Dans le triangle ABC rectangle en A , $[BA]$ est le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{ABC}$.

Dans le triangle $A'BC'$ rectangle en A' , $[BA']$ est le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{ABC}$.

Par conséquent les rapports $\frac{AC}{BA}$, $\frac{A'C'}{BA'}$ et $\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$ sont égaux à un même

nombre qui ne dépend que de l'angle $\widehat{ABC}$.

On appelle ce nombre **tangente de $\widehat{ABC}$** et se note $\tan(\widehat{ABC})$.

Puisqu'il y a trois rapports dans l'égalité de Thalès, on montre de façon analogue que :

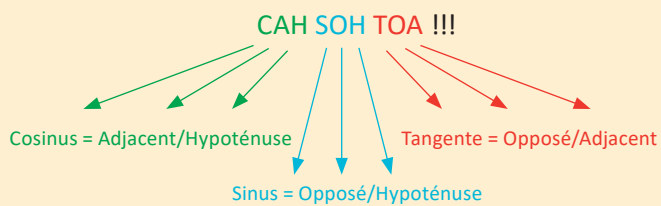
Dans un triangle rectangle :

Le **cosinus** d'un angle est défini par $\cos(\text{angle}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$

Le **sinus** d'un angle est défini par $\sin(\text{angle}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

La **tangente** d'un angle est définie par $\tan(\text{angle}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

Pour retenir les trois égalités, voici une astuce dont tes parents se souviennent encore :

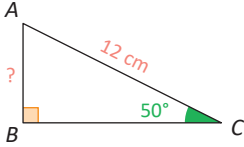




CALCULER UNE LONGUEUR

La trigonométrie est utile pour déterminer une longueur dans un triangle rectangle, **si je ne connais qu'une longueur.**

Si je connais deux longueurs, j'utilise l'égalité de Pythagore.



Énoncé :

Le triangle ABC est rectangle en B .

$AC = 12 \text{ cm}$ et $\widehat{ACB} = 50^\circ$.

Calculer AB .

Donner une valeur arrondie au dixième près.

Voici la rédaction attendue :

Je sais que le triangle ABC est rectangle en B .

$$\sin(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{AC}$$

Je connais AC , la longueur de l'**hypoténuse**.

Je cherche AB , la longueur du **côté opposé** à l'angle $\widehat{ACB}$.

J'utilise l'égalité : $\sin(\text{angle}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

$$\frac{\sin(50^\circ)}{1} = \frac{AB}{12}$$

Je remplace les données connues à l'aide de l'énoncé.

J'indique « 1 » au dénominateur manquant.

$$AB = \sin(50^\circ) \times 12 \div 1$$

J'applique la règle de 3 pour calculer la longueur souhaitée.

J'utilise la touche $\boxed{\sin}$ de ma calculatrice puis j'écris 50 à l'intérieur des parenthèses.

$$AB \approx 9,2 \text{ cm}$$

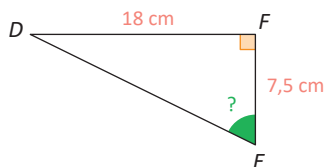
Je mets en valeur le résultat, et je n'oublie pas d'écrire l'unité et d'arrondir comme indiqué dans l'énoncé.

Multiplier ou diviser par 1 ne change rien au calcul. Mais c'est utile de l'écrire au dénominateur à l'étape précédente pour appliquer correctement la règle de 3.



CALCULER UN ANGLE

La trigonométrie est utile pour déterminer la mesure d'un angle dans un triangle rectangle.



Énoncé :

Le triangle DEF est rectangle en F .

$DF = 18$ cm et $EF = 7,5$ cm.

Calculer $\widehat{DEF}$.

Donner une valeur arrondie à l'unité près.

Voici la rédaction attendue :

Je sais que le triangle DEF est rectangle en F .

$$\tan(\widehat{DEF}) = \frac{DF}{EF}$$

Je connais DF , la longueur du **côté opposé** à l'angle $\widehat{DEF}$.
Je connais EF , la longueur du **côté adjacent** à l'angle $\widehat{DEF}$.

J'utilise l'égalité : $\tan(\text{angle}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

$$\tan(\widehat{DEF}) = \frac{18}{7,5}$$

Je remplace les longueurs connues à l'aide de l'énoncé.

$$\widehat{DEF} \approx 67^\circ$$

À la calculatrice j'appuie sur `[seconde]` puis `[tan]`.
À l'écran s'affiche `[arctan]` ou `[tan-1]` selon le modèle de calculatrice.
Je complète les parenthèses avec le rapport $18/7,5$ et je valide.

Je mets en valeur le résultat, et je n'oublie pas d'arrondir comme indiqué dans l'énoncé.

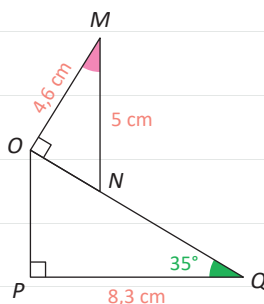
Exercice 1 :

Le triangle OPQ est rectangle en P .

Le triangle OMN est rectangle en O .

$PQ = 8,3$ cm, $MN = 5$ cm, $OM = 4,6$ cm et $\widehat{OQP} = 35^\circ$.

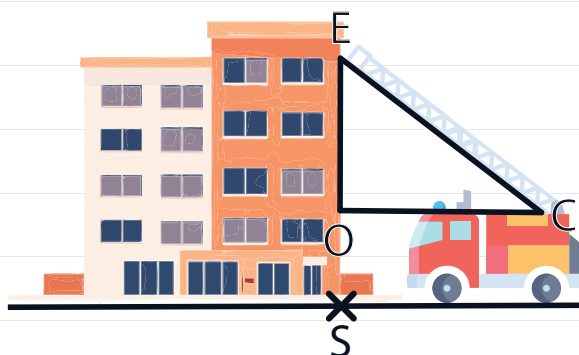
1. Calculer OP . Arrondir au dixième près.
2. Calculer $\widehat{OMN}$. Arrondir à l'unité près.



Exercice 2 :

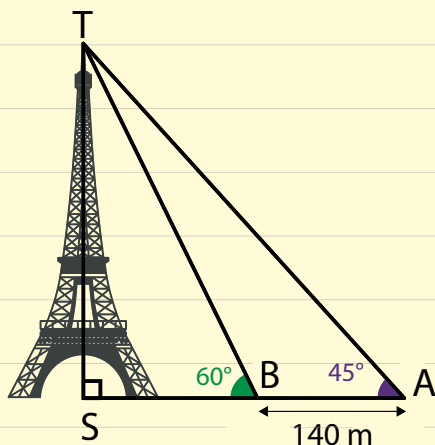
Un incendie s'est déclaré au 4^e étage d'un immeuble. Pour y accéder, les pompiers doivent atteindre une fenêtre située à 17 m du sol à l'aide d'une échelle.

Le socle de l'échelle C est à 2 m du sol et à 8 mètres de l'immeuble.



1. Déterminer l'angle $\widehat{OCE}$ que fait l'échelle avec la surface horizontale du camion. Arrondir à l'unité près.
2. Sur quelle longueur EC les pompiers doivent-ils déployer l'échelle ?

DÉFI



Pour mesurer la hauteur TS de la Tour Eiffel, on effectue une série de mesures : $\widehat{TAS} = 45^\circ$, $\widehat{TBS} = 60^\circ$ et $AB = 140\text{ m}$.

Déterminer la hauteur de la Tour Eiffel.

Arrondir au mètre près.

Exercice 1

1. Je sais que le triangle OPQ est rectangle en P .

$$\tan(\widehat{OQP}) = \frac{OP}{PQ}$$

$$\tan(35^\circ) = \frac{OP}{8,3}$$

$$OP = \tan(35^\circ) \times 8,3 \div 1$$

$$AB \approx 5,8 \text{ cm}$$

Je connais PQ , la longueur du **côté adjacent** à l'angle $\widehat{OQP}$.
Je cherche OP , la longueur du **côté opposé** à l'angle $\widehat{OQP}$.

J'utilise l'égalité : $\tan(\text{angle}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

2. Je sais que le triangle OMN est rectangle en O .

$$\cos(\widehat{OMN}) = \frac{OM}{MN}$$

$$\cos(\widehat{OMN}) = \frac{4,6}{5}$$

Je connais OM , la longueur du **côté adjacent** à l'angle $\widehat{OMN}$.
Je connais MN , la longueur de l'**hypoténuse** à l'angle $\widehat{OMN}$.

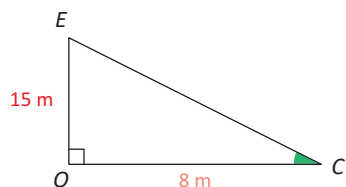
J'utilise l'égalité : $\cos(\text{angle}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$

$$\widehat{DEF} \approx 23^\circ$$

À la calculatrice, je tape `seconde` puis `cos` puis $4,6/5$ et je valide.

Exercice 2

Voici un schéma de la situation :



Attention, $OE = 15 \text{ m}$!

Le socle de l'échelle est à 2 m du sol et $17 - 2 = 15 \text{ m}$.

1. Je sais que le triangle OCE est rectangle en O .

$$\tan(\widehat{OCE}) = \frac{OE}{OC}$$

$$\tan(\widehat{OCE}) = \frac{15}{8}$$

$$\widehat{DEF} \approx 62^\circ$$

Je connais OE , la longueur du **côté opposé** à l'angle $\widehat{OCE}$.
Je connais OC , la longueur du **côté adjacent** à l'angle $\widehat{OCE}$.

J'utilise l'égalité : $\tan(\text{angle}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

À la calculatrice, je tape seconde
puis tan puis 15/8 et je valide.

2. Pour calculer EC tu peux utiliser l'égalité de Pythagore ou la trigonométrie.

Avec l'égalité de Pythagore :

Je sais que le triangle OCE est rectangle en O .

J'utilise l'égalité de Pythagore :

$$EC^2 = EO^2 + OC^2$$

$$EC^2 = 15^2 + 8^2$$

$$EC^2 = 289$$

$$EC = \sqrt{289}$$

$$EC = 17 \text{ cm}$$

Avec la trigonométrie :

Je sais que le triangle OCE est rectangle en O .

$$\sin(\widehat{OCE}) = \frac{OE}{EC}$$

$$\frac{\sin(62^\circ)}{1} = \frac{15}{EC}$$

$$EC = 1 \times 15 \div \sin(62^\circ)$$

$$EC \approx 17 \text{ m}$$

Je connais OE la longueur du **côté opposé** à l'angle $\widehat{OCE}$.
Je cherche EC , la longueur de l'**hypoténuse**.

J'utilise l'égalité : $\sin(\text{angle}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

Ce résultat est moins précis qu'avec l'égalité de Pythagore. C'est normal car j'ai utilisé $\widehat{DEF} \approx 62^\circ$ qui est une valeur approchée.

Avec la trigonométrie, on aurait pu également utiliser l'égalité du cosinus.

DÉFI

Dans cet exercice, je nomme x la longueur SB .

Je sais que le triangle TSB est rectangle en S :

$$\tan(\widehat{TBS}) = \frac{TS}{SB}$$

$$\frac{\tan(60^\circ)}{1} = \frac{TS}{x}$$

$$TS = x \times \tan(60^\circ) \div 1$$

$$TS = \sqrt{3} x$$

À la calculatrice, j'ai calculé $\tan(60^\circ)$ et j'ai obtenu $\sqrt{3}$.

Je sais que le triangle TSA est rectangle en S :

$$\tan(\widehat{TAS}) = \frac{TS}{SA}$$

$$\frac{\tan(45^\circ)}{1} = \frac{TS}{x + 140}$$

$$TS = (x + 140) \times \tan(45^\circ) \div 1$$

$$TS = x + 140$$

À la calculatrice, j'ai calculé $\tan(45^\circ)$ et j'ai obtenu 1.

Dans les deux cas, je ne connais pas la longueur TS car je ne connais pas la valeur de x . Pour déterminer x , je résous l'équation :

$$\sqrt{3}x = x + 140$$

$$\sqrt{3}x - x = 140$$

$$(\sqrt{3} - 1)x = 140$$

$$x = \frac{140}{\sqrt{3} - 1}$$

$$x \approx 191 \text{ m}$$

Pour trouver la hauteur TS de la Tour Eiffel, je remplace x dans l'expression algébrique :

$$TS = x + 140$$

$$TS \approx 191 + 140$$

$$TS \approx 331 \text{ m}$$

La Tour Eiffel mesure 331 m de haut (antenne comprise).

CHAPITRE 22

ROTATION



PRÉ-REQUIS

- Le cercle [6^e]
- Les angles [6^e]



ON FAIT LE POINT

	A	B	C
1 Un cercle est :	un segment courbé dont les extrémités sont confondues.	un ensemble de points situé à la même distance du centre O .	un rond.
2 Dans un cercle, le rayon est :	un segment qui a pour extrémité le centre du cercle et un point du cercle.	un segment qui a pour extrémité deux points du cercle.	un segment qui a pour extrémité deux points du cercle et contenant son centre.
3 Un angle de 180° s'appelle :	un angle droit	un angle plat	un angle plein
4 Un angle de 90° s'appelle :	un angle droit	un angle plat	un angle plein
5 Un angle de 360° s'appelle :	un angle droit	un angle plat	un angle plein



COMPRENDRE LA NOTION

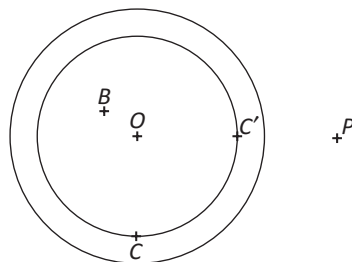
Camille (point C) est allée à la fête foraine avec ses parents et son frère Benjamin (point B).

La figure suivante représente le manège sur lequel les deux enfants sont installés.

Ses parents sont assis sur un banc pour prendre des photos. Leur position est représentée par le point P .

Le manège commence à tourner.

Les parents de Camille prennent une photo au moment où elle est en face d'eux, c'est-à-dire quand elle est en C' .



Comment décrire le mouvement de Camille ?

Camille a tourné d'un **quart de tour** dans le **sens inverse** des aiguilles d'une montre **autour du point O**.

Appliquer une **rotation** à une figure consiste à faire tourner la figure :

- autour d'un point appelé le **centre** de la rotation ;
- dans un **sens** donné : horaire $\curvearrowright$ ou antihoraire $\curvearrowleft$;
- selon un **angle** exprimé en degré.

Dans le cas de Camille, on dit que :

Le point C' est l'image du point C par la rotation de **centre O**, dans le sens **antihoraire** et d'angle **90°** .

Il existe des propriétés intéressantes concernant la rotation :

- L'image du centre O est lui-même : on dit qu'il est **invariant** ;
- Les points C et C' appartiennent au même cercle de centre O donc $OC = OC'$;
- Une rotation de 180° permet de faire un demi-tour : il s'agit d'une symétrie centrale.

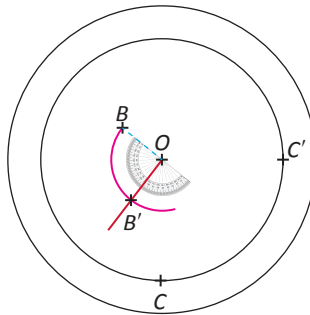


CONSTRUIRE L'IMAGE D'UN POINT PAR UNE ROTATION

Quand Camille est en C' , où est Benjamin ?

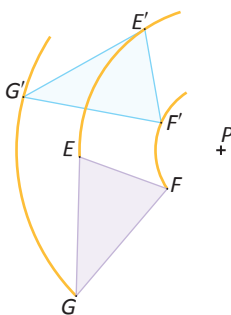
C'est le même manège donc la même rotation : tout le monde a tourné de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre autour du point O .

- Je trace un arc de cercle de centre O passant par le point B et dans le sens antihoraire : il s'agit de la trajectoire suivie par Benjamin.
- À l'aide du rapporteur je trace une demi-droite d'origine O passant par la graduation 90° .
- Je place B' à l'intersection de l'arc de cercle et de la demi-droite.



CONSTRUIRE L'IMAGE D'UNE FIGURE PAR UNE ROTATION

Pour construire l'image d'une figure par une rotation, on construit d'abord l'image de **chaque point** de cette figure, puis on relie les images correctement.



Le triangle $E'G'F'$ est l'image du triangle EGF par la rotation de centre P , dans le sens horaire d'angle 60° .

Pour obtenir le triangle $E'F'G'$, j'ai construit séparément :

- Le point E' , image du point E par la rotation de centre P , dans le sens horaire d'angle 60° ;
- Le point G' , image du point G par la rotation de centre P , dans le sens horaire d'angle 60° ;
- Le point F' , image du point F par la rotation de centre P , dans le sens horaire d'angle 60° .

Puis j'ai tracé le triangle $E'G'F'$.

Il existe des propriétés intéressantes concernant la rotation d'une figure :

La rotation conserve :

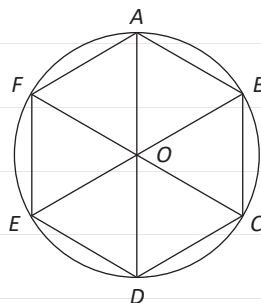
- les longueurs ;
- l'alignement ;
- le parallélisme ;
- les mesures d'angle ;
- les aires.

Une figure et son image sont **superposables**.

Exercice 1 :

L'hexagone régulier $ABCDEF$ est formé de 6 triangles équilatéraux.

1. Quelle est l'image du point A par une rotation de centre O , dans le sens antihoraire et d'angle 60° ?
2. Quelle rotation permet de passer du point D au point F ?
3. Quelle est l'image du point E par une rotation de centre O , dans le sens horaire et d'angle 600° ?
4. Quelle est l'image du triangle ODC par une rotation de centre O , dans le sens antihoraire et d'angle 300° ?
5. Quelle est l'image du point F par une rotation de centre A , dans le sens antihoraire et d'angle 60° ?

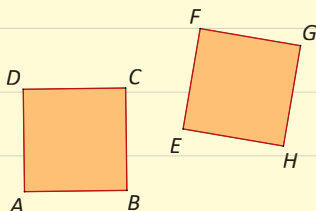


Exercice 2 :

1. Reproduire cette figure sur une feuille à carreau.
2. Construire le triangle ABC rectangle en B tel que $AB = 6$ cm et $AC = 2$ cm.
3. Construire le triangle DEF , image du triangle ABC par la rotation de centre A , d'angle 90° dans le sens antihoraire.
4. Construire le triangle GHI , image du triangle ABC par la rotation de centre B , d'angle 90° dans le sens antihoraire.
5. Quelle transformation permet de passer du triangle DEF au triangle GHI ?

DÉFI

Construire deux carrés $ABCD$ et $EFGH$ de côté 5 cm comme ci-contre :



Expliquer comment déterminer le centre, l'angle et le sens de la rotation qui permet de passer du triangle $ABCD$ au triangle $EFGH$ de sorte que : F est l'image de A ; G est l'image de D ; H est l'image de C ; E est l'image de B .

Exercice 1

Il y a 6 points sur le cercle.

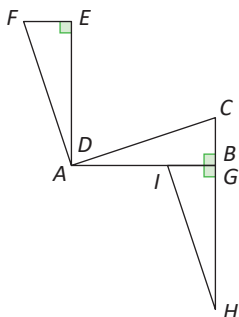
$$360 \div 60 = 60$$

À chaque fois qu'on se décale d'un point sur le cercle, on tourne de 60° autour de O.

1. Le **point F**. (On se décale une fois dans le sens antihoraire)
2. Deux possibilités :
 - dans le sens horaire : **120° autour de O** (on se décale deux fois : $2 \times 60 = 120$)
 - dans le sens antihoraire : **240° autour de O** (on se décale 4 fois : $4 \times 60 = 240$)
3. $600 \div 60 = 10$. On se décale 10 fois dans le sens horaire.
L'image du point E est le **point C**.
4. $300 \div 60 = 5$. On se décale 5 fois dans le sens antihoraire.
L'image du point D est E.
L'image du point C est D.
L'image du point O est O (il est invariant).
Donc l'image du triangle ODC est le **triangle OED**.
5. Le **point O** (On se décale une fois, dans le sens antihoraire **autour de A**).

Exercice 2

1.



2. La **translation** de E vers G.

DÉFI

Déterminer le centre O de la rotation :

Je sais que F est l'image de A par la rotation de centre O .

Donc F et A sont sur un même cercle de centre O .

Donc $OF = OA$.

Donc le point O appartient à la médiatrice du segment $[AF]$.

Je construis cette médiatrice (d).

Je sais que G est l'image de D par la rotation de centre O .

Donc G et D sont sur un même cercle de centre O .

Donc $OG = OD$.

Donc le point O appartient à la médiatrice du segment $[GD]$.

Je construis cette médiatrice (d').

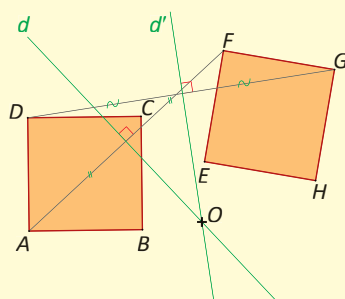
Je sais que le point O appartient à la droite (d) et à la droite (d').

Donc le point O est le point d'intersection des droites (d) et (d').

Déterminer l'angle de la rotation :

Maintenant que je sais où est le centre O , j'utilise un rapporteur pour mesurer l'angle $\widehat{AOF}$.

Je peux vérifier si j'ai la même mesure avec les angles $\widehat{GOD}$, $\widehat{HOC}$ et $\widehat{EOB}$.



CHAPITRE 23

PAVAGE



PRÉ-REQUIS

- La symétrie axiale [6^e]
- La symétrie centrale [5^e]
- La translation [4^e]
- La rotation [3^e]



ON FAIT LE POINT

	A	B	C
1 La translation qui transforme A en B correspond à l'image :			
2 Une symétrie centrale peut correspondre à l'image :			
3 La rotation de centre D, d'angle 90° dans le sens antihoraire correspond à l'image :			



COMPRENDRE LA NOTION

On termine le programme avec un chapitre récréatif !

Un **pavage** est un recouvrement du plan, sans trou et sans chevauchement, à partir d'un ou plusieurs motifs identiques (parfois appelés tuiles).

Il existe une infinité de façons d'y parvenir, mais les pavages les plus intéressants sont ceux dans lesquels on détecte une règle de construction : symétrie, translation ou rotation.

Voici par exemple le pavage du Caire, le motif utilisé est un pentagone :

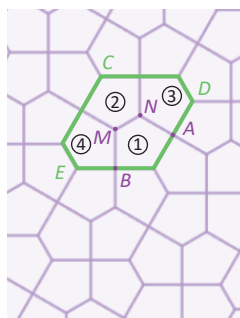


On passe du motif 1:

- au motif 2 par une symétrie d'axe (MN) ;
- au motif 3 par une rotation de centre A , d'angle 90° dans le sens horaire ;
- au motif 4 par une rotation de centre B , d'angle 90° dans le sens antihoraire.

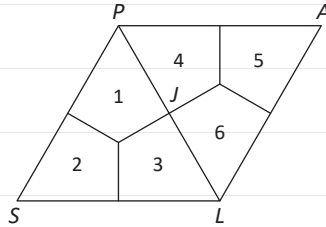
On obtient ainsi le polygone vert qui est répété :

- par translation qui transforme C en D ;
- par translation qui transforme C en E .



Exercice 1 :

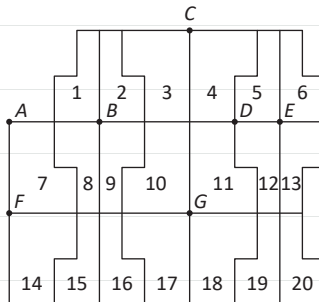
Voici un pavage :



1. Quelle transformation permet de passer du motif 1 au motif 6 ?
2. Quelle est l'image du motif 2 par la symétrie d'axe (PL) ?

Exercice 2 :

Voici un pavage :



1. Quelle est l'image du motif 15 par la translation qui transforme B en E ?
2. Quelle est l'image du motif 1 par la symétrie de centre B ?
3. Quelle est l'image du motif 19 par la symétrie de centre G ?
4. Quelle est l'image du motif 2 par la symétrie d'axe (CG) ?

Exercice 1

1. La symétrie de centre J ou la rotation de centre J et d'angle 180° (peu importe le sens).
2. Le motif 5.

Exercice 2

1. Motif 19
2. Motif 9
3. Motif 9
4. Motif 5

