4^e

Le nouveau

Pythagore

HATIER

[redacted]

MATHÉMATIQUES 4e

Le nouveau Pythagore

Gérard Bonnefond
Daniel Daviaud
Bernard Revranche

professeurs
à Civray et Jonzac

HATIER

ISBN 2-218-72151- 1

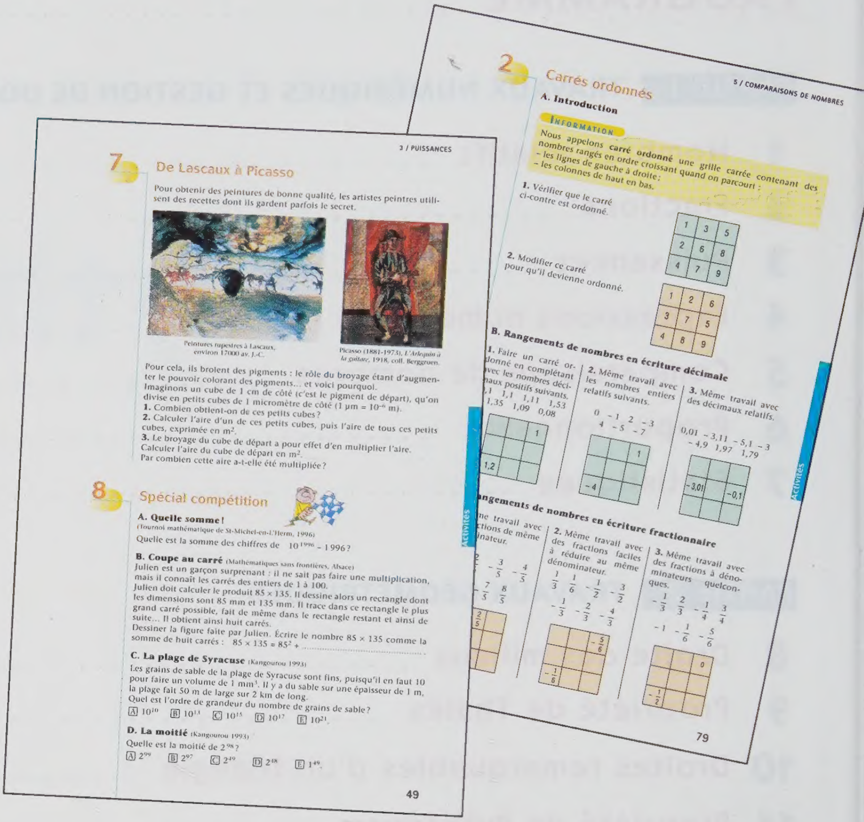
Sommaire

PRÉSENTATION

**Dans chaque chapitre, vous trouverez trois parties :
Activités, L'essentiel, Exercices.**

1. Activités

Des situations choisies pour faire découvrir les mathématiques.



On peut les traiter seul ou en petits groupes.

Objectifs visés :

- Consolider les connaissances antérieures.
- Introduire des notions nouvelles.
- Apprendre à chercher, à démontrer, à s'exprimer, à communiquer, à justifier...
- S'exercer sur des problèmes de compétitions mathématiques.

2. L'essentiel

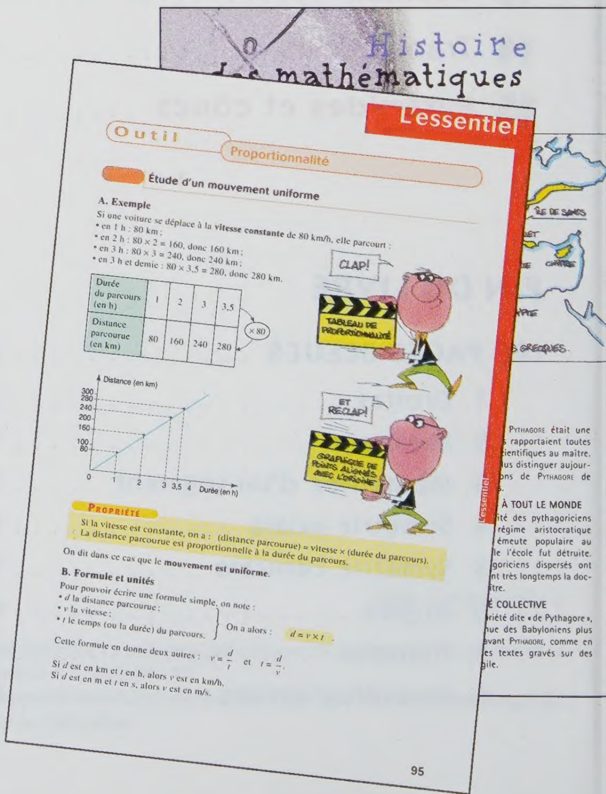
Quatre parties (au maximum) :

Outils
Les connaissances essentielles : définitions, règles, formules, propriétés.

Méthodes
Des pistes pour aborder un calcul ou une démonstration.

Exemples
Des exercices résolus et rédigés, avec des indications de stratégie et des remarques.

Histoire des mathématiques
La vie d'un mathématicien, l'évolution d'une notion mathématique...



3. Exercices

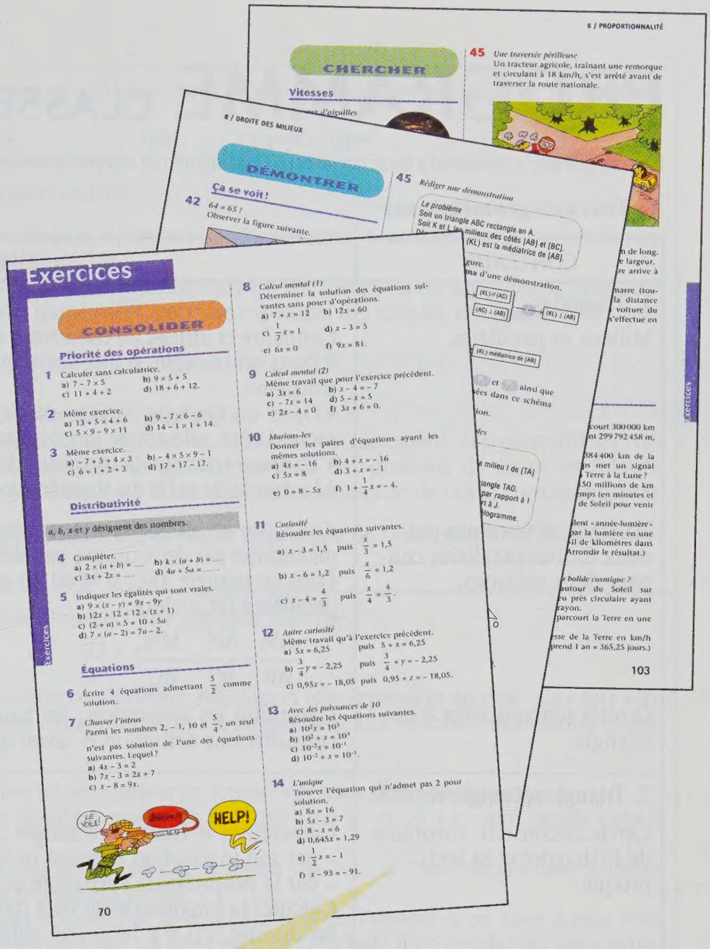
Quatre rubriques (au maximum) :

Consolider
Pour entretenir et fixer les bases.

Savoir faire
Pour s'entraîner en appliquant directement le cours.

Démontrer
Pour apprendre à chercher et à rédiger une démonstration.

Chercher
Pour s'exercer sur des problèmes demandant un peu plus de réflexion ou d'initiative.



Notez bien les **Résultats** (pour vérifier) et les **Coups de pouce** (pour dépanner) lorsque le numéro d'exercice est rouge.

À LA FIN DU LIVRE

Consulter régulièrement :

Les Pages bleues (pages 238 à 244)
Pour revoir la partie géométrie des programmes de sixième et de cinquième.

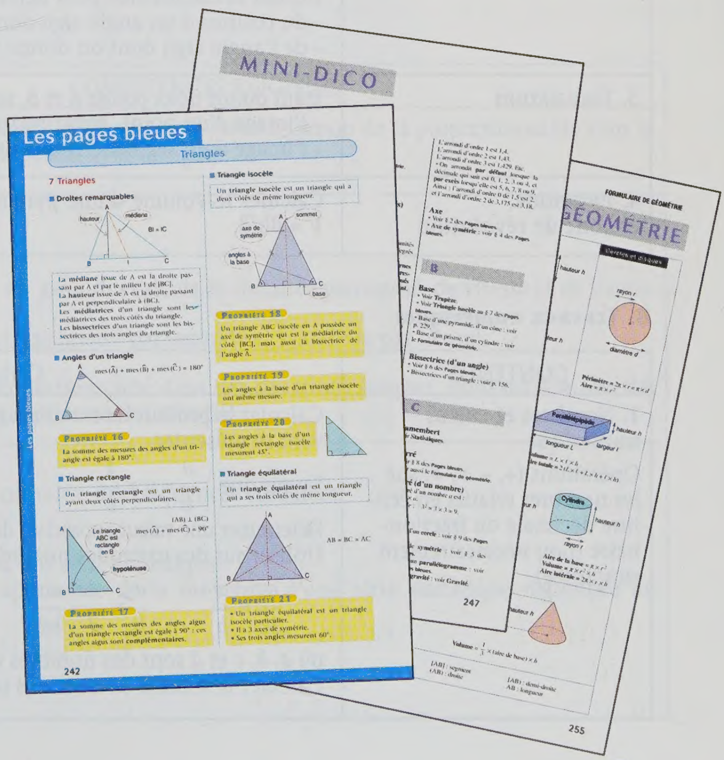
Le Recueil des méthodes (pages 245 et 246)
Pour retrouver une méthode de calcul ou de démonstration.

Le Mini-dico (pages 247 à 253)
Pour retrouver des définitions ou des propriétés.

Le Tableau des unités de mesure (page 254)

Le Formulaire de géométrie (page 255)

L'Index alphabétique (page 256)
Pour signaler les pages où figurent les mots importants.



PROGRAMME CLASSE DE QUATRIÈME (1998)

Il est rappelé que le professeur a toute liberté dans l'organisation de son enseignement, à condition que soient atteints les objectifs visés par le programme.

A. Travaux géométriques

CONTENUS	COMPÉTENCES EXIGIBLES
1. Triangles Milieux et parallèles.	Connaître et utiliser les théorèmes suivants relatifs aux milieux de deux côtés d'un triangle. • Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, elle est parallèle au troisième. • Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, elle coupe le troisième en son milieu. • Dans un triangle, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de celle du troisième côté.
Triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes.	Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes. Dans un triangle ABC, si M est un point du côté [AB], N un point du côté [AC] et si (MN) est parallèle à (BC), alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.
Droites remarquables d'un triangle.	Construire les bissectrices, les hauteurs, les médianes, les médiatrices d'un triangle; en connaître une définition et savoir qu'elles sont concourantes.
2. Triangle rectangle et cercle Cercle circonscrit, théorème de Pythagore et sa réciproque.	Caractériser le triangle rectangle : – par son inscription dans un demi-cercle, – par la propriété de Pythagore et sa réciproque. Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celles des deux autres. En donner, s'il y a lieu, une valeur approchée, en faisant éventuellement usage de la touche $\sqrt{\ }$ d'une calculatrice. Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit.
Tangente; distance d'un point à une droite.	Construire la tangente à un cercle en l'un de ses points. Savoir que le point d'une droite le plus proche d'un point donné est le pied de la perpendiculaire menée du point à la droite.
Cosinus d'un angle.	Utiliser, pour un triangle rectangle, la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des deux côtés adjacents. Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée : – du cosinus d'un angle aigu donné, – de l'angle aigu dont on donne le cosinus.
3. Translation	Étant donné deux points A et B, sachant qu'une translation transforme A en B, construire : – l'image d'un point, appartenant ou non à la droite (AB), – l'image d'un segment, d'une droite, d'une demi-droite, d'un cercle.
4. Pyramide et cône de révolution	Calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution à l'aide de la formule $V = Bh/3$.

B. Travaux numériques

CONTENUS	COMPÉTENCES EXIGIBLES
1. Nombres et calcul numérique Opérations (+, –, ×, ÷) sur les nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire (non nécessairement simplifiée).	Calculer le produit de nombres relatifs simples dans les différents cas de signe qui peuvent se présenter. Savoir que $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$. Déterminer une valeur approchée du quotient de deux nombres décimaux (positifs ou négatifs). Utiliser sur des exemples numériques les égalités : $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ $\quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $\quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ où a, b, c et d sont des nombres décimaux relatifs. Calculer la somme de nombres relatifs en écriture fractionnaire.

Puissances d'exposant entier relatif.	Utiliser sur des exemples numériques, avec ou sans calculatrice scientifique, les égalités : $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$ $\quad \frac{1}{10^n} = 10^{-n}$ $\quad (10^m)^n = 10^{mn}$ où m et n sont des entiers relatifs.
Notation scientifique des nombres décimaux. Ordre de grandeur d'un résultat.	Sur des exemples numériques, écrire un nombre décimal sous différentes formes faisant intervenir des puissances de 10. Utiliser la notation scientifique pour obtenir un encadrement ou un ordre de grandeur. Utiliser sur des exemples numériques, pour des exposants très simples, des égalités telles que : $a^2 \times a^3 = a^5$ $\quad \frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$ $\quad (ab)^2 = a^2b^2$ où a et b sont des nombres relatifs non nuls. Sur des exemples numériques, écrire, en utilisant correctement des parenthèses, des programmes de calcul portant sur des sommes ou des produits de nombres relatifs. Organiser et effectuer à la main ou à la calculatrice les séquences de calcul correspondantes.
Touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice.	Trouver à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre positif.
2. Calcul littéral	Réduire une expression littérale à une variable, du type : $3x - (4x - 2)$ $\quad 2x^2 - 3x + x^2$ ...
Développement.	Sur des exemples numériques ou littéraux, développer une expression du type $(a + b)(c + d)$. Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques.
Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre. Applications.	Comparer deux nombres relatifs simples en écriture décimale ou fractionnaire. Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme $a + b$ et $a + c$ sont rangés dans le même ordre que b et c. Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ab et ac sont rangés dans le même ordre que b et c si a est strictement positif. Écrire des encadrements résultant de la troncature ou de l'arrondi à un rang donné d'un nombre positif en écriture décimale ou provenant de l'affichage d'un résultat sur une calculatrice (quotient, racine carrée...).
Résolution de problèmes conduisant à des équations du premier degré à une inconnue.	Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.

C. Gestion de données; fonctions

CONTENUS	COMPÉTENCES EXIGIBLES
1. Représentations graphiques. Proportionnalité	Utiliser, dans le plan muni d'un repère, la caractérisation de la proportionnalité sous la forme d'alignement de points avec l'origine.
2. Applications de la proportionnalité	
Vitesse moyenne.	Utiliser l'égalité $d = vt$ pour des calculs de distance parcourue, de vitesse et de temps.
Grandeurs quotients courantes.	Changer d'unité de vitesse (mètre par seconde et kilomètre par heure).
Calculs faisant intervenir des pourcentages.	Mettre en œuvre la proportionnalité dans des situations simples, utilisant à la fois des pourcentages et des quantités ou des effectifs.
3. Statistiques Effectifs cumulés, fréquences cumulées.	Calculer des effectifs cumulés, des fréquences cumulées.
Moyennes pondérées.	Calculer la moyenne d'une série statistique. Calculer une valeur approchée de la moyenne d'une série statistique regroupée en classes d'intervalles.
Initiation à l'utilisation de tableurs-grapheurs.	

1 Nombres relatifs

Activités

1 Le rallye surprise

Révision active

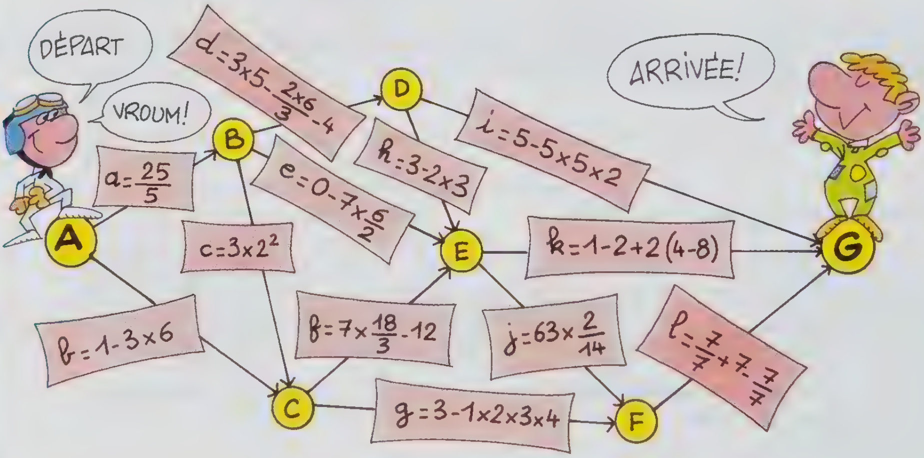
A. L'échauffement

1. Calculer :

$a = 25 + 16 =$ .... $b = 31 - 12 =$ ....
$c = 13 - 23 =$ .... $d = -14 + 18 =$ ....
$e = -36 + 4 =$ .... $f = -19 - 5 =$ ....
$g = 0 - 5 =$ .... $h = -7 + 7 =$ ....

2. Classer les huit nombres :
$a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad h$
dans l'ordre croissant.

B. Les itinéraires



Chaque concurrent du rallye doit aller de Ⓐ à Ⓖ dans le sens des flèches. Avant de partir, il ouvre une enveloppe surprise pour y découvrir son itinéraire.
Indiquer tous les itinéraires possibles (il y en a 11).

C. Les « gains »

Chaque **segment** parcouru rapporte un certain nombre de points (positif ou négatif) : a, b, c, ..., ou l.
Calculer a, b, c, ..., et l.

D. Les classements

Chaque concurrent part de Ⓐ avec un capital de 100 points.
Classer les itinéraires par ordre décroissant des points possédés à l'arrivée.

2 Produit de deux nombres relatifs de signes contraires

On sait depuis longtemps multiplier deux nombres positifs.
Exemple : $7{,}2 \times 11 = 79{,}2$.

A. Quelques records de plongée en apnée

(*Livre Guiness des records*, 1987 et 1998)

• Le 14 septembre 1985, l'Italienne Angela Bandini plongeait à – 53 m. Mais le 19 octobre 1983, le Français Jacques Mayol avait plongé deux fois plus profond.

Profondeur atteinte (en m) : $\boxed{(-\,53) \times 2 = \ldots\ldots\ldots}$

• Depuis ce temps, de nouveaux records ont été battus. En novembre 1996, le Cubain Pipin est descendu deux fois et demie plus bas qu'Angela Bandini.

Profondeur atteinte (en m) : $\boxed{(-\,53) \times \ldots\ldots = \ldots\ldots}$

B. De l'addition à la multiplication

1. Calculer la somme $a = (-\,3{,}5) + (-\,3{,}5) + (-\,3{,}5) + (-\,3{,}5)$.
En écrivant a sous la forme d'un produit, on obtient :
$a = \ldots\ldots\ldots \times (-\,3{,}5) = \ldots\ldots\ldots$.
Préciser le signe de a.

2. De la même façon, calculer les produits :
$b = 3 \times (-\,25{,}2)$ et $c = (-\,6{,}4) \times 2$.
Préciser le signe de b et celui de c.

3. Plus généralement, on a la règle suivante, à compléter avec le mot « positif » ou « négatif ».

RÈGLE

Le produit de deux nombres de signes contraires est ....

4. En utilisant cette règle, calculer :
$d = (-\,6{,}2) \times 1{,}5$ et $e = 2{,}2 \times (-\,0{,}3)$.

5. Recalculer a, b, c, d et e avec une calculatrice (pour la tester).

Activités

3 Produit de deux nombres négatifs

Quand les mathématiciens ont inventé la multiplication des nombres relatifs, ils ont voulu que les règles de calculs connues pour les nombres positifs s'appliquent aussi aux nombres négatifs.
Par exemple : $a \times 0 = 0$ et $k(a + b) = ka + kb$.
Comme nous allons le voir, ceci les a amenés à adopter une règle surprenante : « le produit de deux nombres négatifs est positif ».

A. Les tracas d'un certain Stendhal

L'écrivain STENDHAL (1783-1842) aimait beaucoup les mathématiques. Il raconte ici l'insatisfaction d'un élève auquel on n'a jamais expliqué pourquoi le produit de deux négatifs est positif.

Lire ce texte de STENDHAL.

[...] personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que : moins par moins donne plus (– × – = +). C'est une des bases fondamentales de la science qu'on appelle algèbre.
On faisait bien pis que ne pas m'expliquer cette difficulté (qui sans doute est explicable car elle conduit à la vérité), on me l'expliquait par des raisons évidemment peu claires pour ceux qui me les présentaient.
M. Chabert (1) pressé par moi s'embarrassait, répétait sa leçon, celle précisément contre laquelle je faisais des objections, et finissait par avoir l'air de me dire : « *Mais c'est l'usage, tout le monde admet cette explication. Euler et Lagrange* (2), *qui apparemment valaient autant que vous, l'ont bien admise...* » [...]

J'en fus réduit à ce que je me dis encore aujourd'hui : il faut bien que « – par – donne + » soit vrai, puisque évidemment, en employant à chaque instant cette règle dans le calcul, on arrive à des résultats vrais et indubitables (3).

(1) M. CHABERT était le professeur de mathématiques.
(2) EULER et LAGRANGE sont deux grands mathématiciens du 18e siècle.
(3) Indubitable : dont on ne peut douter.

B. Cherchons à comprendre

1. Lire le texte suivant.

On se demande combien vaut $(-3) \times (-2)$.
Appelons p ce mystérieux produit.
D'une part, on a :

$$(-3) \times (-2 + 2) = (-3) \times 0 = 0 \longleftarrow \text{car } a \times 0 = 0$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}(-3) \times (-2 + 2) &= (-3) \times (-2) + (-3) \times 2 \longleftarrow \text{car } k \times (a + b) = ka + kb \text{ (distributivité)}\\ &= p + (-6)\\ &= p - 6\end{aligned}$$

Donc $p - 6 = 0$. Donc $p = 6$. Conclusion : $(-3) \times (-2) = 6$.

2. Sur ce modèle, démontrer que $(-7) \times (-6) = 42$.

3. Trouver les nombres x et y tels que $(-4) \times x = 20$ et $y \times (-9) = 90$.
(On pourra vérifier avec une calculatrice.)

C. Une règle et des calculs

1. Après les exemples précédents, on énonce la règle générale suivante, à compléter avec le mot « positif » ou « négatif ».

RÈGLE

Le produit de deux nombres négatifs est ....

2. Effectuer sans calculatrice :
$a = (-3) \times (-9)$ $\quad b = (-2{,}5) \times (-10)$ $\quad c = (-0{,}11) \times (-1\,000)$.

3. Recalculer a, b et c avec une calculatrice (pour la tester).

D. Produit de plusieurs nombres relatifs

1. Effectuer sans calculatrice :
$a = (-5) \times (-3) \times 2$ $\quad b = 4 \times (-3) \times 2$ $\quad c = (-4) \times (-5) \times (-7)$
$d = (-1) \times 2 \times (-3) \times 4$ $\quad e = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$.

2. En observant les exemples précédents, dire comment on peut prévoir le signe du produit de plusieurs nombres relatifs (faire une phrase).

4 Quotients de nombres relatifs

A. Calculs

Calculer les produits et en déduire les quotients qui en découlent.

- $2 \times 9 =$ .... Donc $\dfrac{\text{..........}}{2} =$ .... et $\dfrac{\text{..........}}{9} =$ ....
- $4 \times (-7) =$ .... Donc $\dfrac{\text{..........}}{4} =$ .... et $\dfrac{\text{..........}}{-7} =$ ....
- $(-3) \times 8 =$ .... Donc $\dfrac{\text{..........}}{-3} =$ .... et $\dfrac{\text{..........}}{8} =$ ....
- $(-5) \times (-6) =$ .... Donc $\dfrac{\text{..........}}{-5} =$ .... et $\dfrac{\text{..........}}{-6} =$ ....

B. Observations

Compléter, en observant les exemples précédents.
Le quotient de deux nombres positifs est ....
Le quotient de deux nombres négatifs est ....
Le quotient d'un nombre positif par un nombre négatif est ....
Le quotient d'un nombre négatif par un nombre positif est ....

Plus brièvement, on a la règle suivante.

RÈGLE

Le quotient de deux nombres de même signe est ....
Le quotient de deux nombres de signes contraires est ....

C. Exercices

1. Effectuer : $a = \dfrac{56}{-8}$ $\quad b = \dfrac{-121}{11}$ $\quad c = \dfrac{-9}{-18}$ $\quad d = \dfrac{-0{,}5}{2}$

$e = (-91) \div 7$ $\quad f = (-111) \div (-3)$ $\quad g = 42 \div (-14)$ $\quad h = (-6) \div (-12)$.

2. Calculer à 0,01 près : $i = \dfrac{4}{-3}$ $\quad j = \dfrac{-2}{7}$ $\quad k = \dfrac{-100}{-3}$ $\quad l = \dfrac{-16}{12}$.

3. À l'aide d'un exemple, comparer : $\dfrac{-x}{y}$ $\quad \dfrac{x}{-y}$ et $-\dfrac{x}{y}$.

5 Résolution d'équations simples

INFORMATION

Résoudre une équation, comme :

$2x + 3 = 18 - 3x$ (par exemple)

c'est trouver la (ou les) valeur(s) que l'on peut donner à x pour que l'égalité soit vraie.
Le nombre x est appelé « **inconnue** ».

A. Première règle de résolution

RÈGLE

En ajoutant un même nombre aux deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.
Autrement dit : **si** $a = b$ **alors** $a + c = b + c$.

1. Lire cet exemple.

Résoudre $x + 7 = 5$.
• On va isoler x dans le premier membre en ajoutant -7 aux deux membres :
$x + 7 - 7 = 5 - 7$
d'où $x = -2$.
• Vérification : en remplaçant x par -2, le premier membre devient $-2 + 7$ qui vaut 5.
• Conclusion : -2 est la solution de l'équation.

2. En suivant cet exemple, résoudre :
a) $x + 11 = 14$ **b)** $x - 8 = 12$ **c)** $14 + x = 3$ **d)** $-12 + x = 1$.

3. Lire cet exemple.

Résoudre $2x + 12 = x - 5$.
• On va supprimer le x du second membre en ajoutant $-x$ aux deux membres.
Puis on supprimera le 12 du premier membre en ajoutant -12 aux deux membres :
$2x + 12 - x = x - 5 - x$
d'où $x + 12 = -5$
puis $x + 12 - 12 = -5 - 12$
d'où $x = -17$.
• Vérification : en remplaçant x par -17,
le premier membre devient $2 \times (-17) + 12 = -34 + 12 = -22$
et le second membre devient $-17 - 5 = -22$.
• Conclusion : -17 est la solution de l'équation.

4. En suivant cet exemple, résoudre :
a) $5x + 4 = 4x + 9$ **b)** $4x - 5 = 2 + 3x$
c) $2 - x = -2x + 8$ **d)** $11 - 7x = 13 - 8x$.

B. Deuxième règle de résolution

RÈGLE

En divisant une égalité par un même nombre, on obtient une nouvelle égalité.
Autrement dit : **si** $a = b$ **et si** $c \neq 0$ **alors** $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

1. Lire cet exemple.

Résoudre $5x = 9$.
- On va trouver x en divisant les deux membres par 5 :

$\frac{5x}{5} = \frac{9}{5}$ d'où $x = 1{,}8$.
- Vérification : $5 \times 1{,}8 = 9$.
- Conclusion : 1,8 est la solution de l'équation.

2. Résoudre :
a) $3x = 2{,}1$ **b)** $0{,}7x = -280$ **c)** $6{,}2x + 4 = 16{,}4$ **d)** $3x - 5 = x + 8$.

6 Petits problèmes et équations

Il s'agit d'apprendre à résoudre un problème en utilisant une équation.

A. Julie cache son âge

Julie est trois fois plus jeune que sa mère et six fois plus jeune que sa grand-mère. La somme des âges de Julie, de sa mère et de sa grand-mère est 110 ans. Quel est l'âge de Julie ?

1. Choix de l'inconnue et contraintes
Appelons x l'âge de Julie.
Ce nombre peut-il être négatif ? supérieur à 200 ?

2. Mise en équation du problème
Sachant que x est l'âge de Julie, calculer l'âge de sa mère, puis l'âge de sa grand-mère en fonction de x.
Traduire la phrase « la somme des âges de Julie, de sa mère... » par une égalité. On obtient ainsi l'équation du problème.

3. Résolution de l'équation
Trouver la valeur de x, solution de l'équation obtenue.

4. Conclusion
Vérifier que la valeur trouvée convient comme solution du problème posé et conclure.

B. Le vélo

Un cycliste et son vélo pèsent ensemble 83 kg. Le cycliste pèse 60 kg de plus que son vélo. Trouver la masse du vélo.

Résoudre ce problème en suivant les étapes 1, 2, 3 et 4 vues en A.

Activités

Outils

Opérations sur les nombres relatifs

1 Addition et soustraction de deux nombres relatifs (rappel)

A. Addition : exemples

- $2,5 + 7,1 = 9,6$
- $2,5 + (-7,1) = -4,6$.
- $(-2,5) + 7,1 = 4,6$
- $(-2,5) + (-7,1) = -9,6$.

La somme de deux nombres opposés est égale à 0.

B. Soustraction : règle et exemples

Règle

Pour soustraire, on ajoute l'opposé.
Autrement dit : $x - y = x + (-y)$.

- $2,5 - 7,1 = 2,5 + (-7,1) = -4,6$.
- $2,5 - (-7,1) = 2,5 + 7,1 = 9,6$.

2 Multiplication et division de deux nombres relatifs

A. Multiplication : règles des signes et exemples

Règles

Le produit de deux nombres de même signe est positif.
Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

- $2,1 \times 3 = 6,3$
- $2,1 \times (-3) = -6,3$
- $(-2,1) \times 3 = -6,3$
- $(-2,1) \times (-3) = 6,3$

Cas particulier
Pour tout nombre a : $a \times 0 = 0$

B. Division : règles des signes et exemples

Règles

Les règles des signes pour la division sont les mêmes que pour la multiplication.

$5,4 \div 4 = 1,35$ $\quad 5,4 \div (-4) = -1,35$
$(-5,4) \div 4 = -1,35$ $\quad (-5,4) \div (-4) = 1,35$

Remarque. On ne peut pas diviser par 0

En effet, essayons de diviser 3 par 0. Le quotient serait le nombre q tel que $0 \times q = 3$. Or $0 \times q = 0$ et pas 3 !... On ne peut donc pas effectuer cette division.

3 Opérations et égalités

Les propriétés suivantes sont constamment utilisées pour résoudre des équations.

Propriété

En ajoutant ou en retranchant un même nombre aux deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.
Autrement dit : **si** $a = b$ **alors** $a + c = b + c$ **et** $a - c = b - c$.

Exemple 1
Si $x - 7 = 4$ alors $x - 7 + 7 = 4 + 7$; d'où $x = 11$.

Exemple 2
Si $x + 8 = 5$ alors $x + 8 - 8 = 5 - 8$; d'où $x = -3$.

Propriété

En multipliant ou en divisant les deux membres d'une égalité par un même nombre (non nul quand on divise), on obtient une nouvelle égalité.
Autrement dit :
Si $a = b$ **alors** $a \times c = b \times c$.

Si $a = b$ **et si** $c \neq 0$ **alors** $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c}$.

Exemple 1

Si $\dfrac{x}{2} = 3$ alors $\dfrac{x}{2} \times 2 = 3 \times 2$; d'où $x = 6$.

Exemple 2

Si $3{,}5\,x = 7$ alors $\dfrac{3{,}5\,x}{3{,}5} = \dfrac{7}{3{,}5}$; d'où $x = 2$.

Exemples — Résolution d'équations et de problèmes

1 Résolution d'équations

ÉNONCÉ

Résoudre les équations : **a/** $5x - 3 = 9$ **b/** $3x - 5 = 7x + 3$.

Stratégie

a/ Résoudre une équation, c'est chercher toutes les valeurs de l'**inconnue** qui vérifient l'égalité.
Ces valeurs sont les **solutions** de l'équation.

Après le **calcul** de x, il convient de **vérifier** puis de **conclure**.
Pour vérifier, on remplace x par la valeur trouvée.

Solution

a/ • Calcul de x : $5x - 3 = 9$
d'où $5x - 3 + 3 = 9 + 3$
soit $5x = 12$

d'où $\dfrac{5x}{5} = \dfrac{12}{5}$
soit $x = 2{,}4$.

• Vérification :
$5 \times 2{,}4 - 3 = 12 - 3 = 9$.

• Conclusion :
2,4 est la solution de l'équation.

Remarques

On neutralise le terme – 3 en ajoutant 3 aux deux membres de l'équation.

On neutralise le facteur 5 en divisant par 5 les deux membres de l'équation.

Pour les équations de ce chapitre, on trouve une solution unique.

On doit retrouver le second membre.

b/ Pour résoudre, on cherche à rassembler tous les x dans le membre de gauche, puis tous les termes sans x dans le membre de droite.

b/ Calcul de x : $3x - 5 = 7x + 3$

d'où $3x - 5 - 7x = 7x + 3 - 7x$

soit $-4x - 5 = 3$

d'où $-4x - 5 + 5 = 3 + 5$

soit $-4x = 8$

d'où $\dfrac{-4x}{-4} = \dfrac{8}{-4}$

soit $x = -2$.

On ajoute $-7x$ aux deux membres de l'équation.

On ajoute 5 aux deux membres de l'équation.

On neutralise le facteur -4 en divisant les deux membres par -4.

Pour vérifier, on remplace x par la valeur trouvée dans le premier membre puis dans le second. On doit trouver le même résultat pour affirmer que cette valeur de x est une solution de l'équation.

• Vérification :

$3 \times (-2) - 5 = -6 - 5 = -11$

$7 \times (-2) + 3 = -14 + 3 = -11$

On trouve la même valeur pour les deux membres.

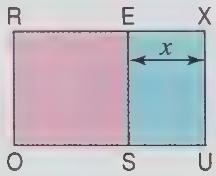
• Conclusion :

– 2 est la solution de l'équation.

2 Résolution d'un problème à l'aide d'une équation

ÉNONCÉ

Le carré ROSE a 5 cm de côté. L'aire du rectangle ROUX fait 31 cm^2.
Calculer la longueur EX.



Stratégie

Respecter les quatre étapes suivantes.

• **Choix de l'inconnue et contraintes.**

• **Mise en équation** du problème : on traduit le texte par une équation.

• **Résolution** de l'équation.

• **Conclusion**.

Solution

• Soit x la longueur EX en cm.
Le nombre x est positif.

• D'après l'énoncé :
aire(ROSE) + aire(ESUX)
= aire(ROUX)
c'est-à-dire $5 \times 5 + 5 \times x = 31$
soit $25 + 5x = 31$.

• Par suite : $25 + 5x - 25 = 31 - 25$

soit $5x = 6$

d'où $\dfrac{5x}{5} = \dfrac{6}{5}$

soit $x = 1{,}2$.

Vérification :

$25 + 5 \times 1{,}2 = 25 + 6 = 31$.

Donc **1,2** est la solution de l'équation.

• EX = 1,2 cm.

Remarques

Une longueur est un nombre positif.

Les aires sont en cm^2.

On ajoute -25 aux deux membres.

On divise les deux membres par 5.

On vérifie que 1,2 est solution de l'équation.

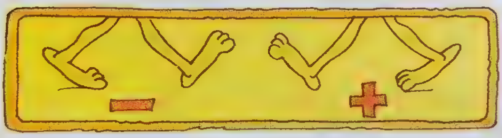
Histoire des mathématiques

Les symboles d'opérations : une histoire tumultueuse

Quoi de plus familier que nos symboles +, –, ×, ÷ ?
Il a pourtant fallu des siècles pour imposer l'emploi du + et du –.
Quant aux symboles × et ÷, ils sont toujours en concurrence avec d'autres symboles. Et nul ne peut dire ceux qui sortiront vainqueurs de cette confrontation.

LES SYMBOLES + ET –

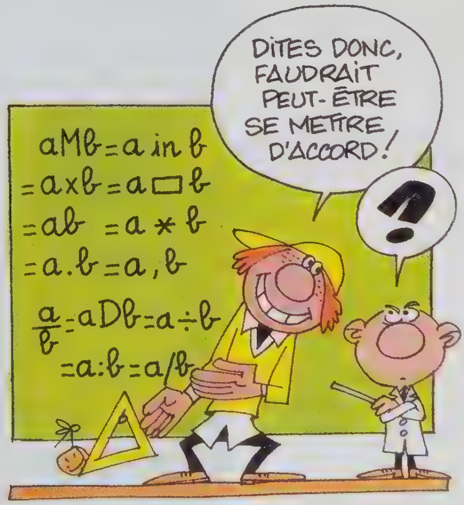
Dans un papyrus égyptien, on découvre une **paire de jambes** marchant dans un sens pour indiquer une addition et dans l'autre sens pour une soustraction.



Jusqu'au 15e siècle, l'usage le plus courant consistait à écrire **en toutes lettres** « j'ajoute » ou « je soustrais ».
À la fin du 15e siècle, les mathématiciens italiens utilisent les lettres **p** pour « plus » et **m** pour « minus » (moins). C'est à cette époque, en 1489, qu'apparaissent les premiers **+** et **–** dans un ouvrage du mathématicien allemand Widman. Par suite, l'usage de ces symboles s'est répandu universellement.
En France, le mathématicien Viète, créateur du calcul sur des lettres, a beaucoup contribué à imposer le + et le –.

LE SYMBOLE ×

Pendant longtemps on a exprimé par des mots, **en toutes lettres**, l'intention de multiplier deux nombres. Puis sont apparues des abréviations comme la lettre **M** utilisée en 1634 par le Flamand Stevin, inventeur des nombres décimaux. Viète, en 1591, écrit *A* **in** *B* pour désigner *A* × *B*.
Le symbole × se rencontre pour la première fois, en 1631, dans l'œuvre du mathématicien anglais Oughtred. Mais il a bien du mal à s'imposer.



D'autres auteurs utilisent la simple **juxtaposition**, ou bien un **petit rectangle**, une **étoile**, un **point**, une **virgule**, etc.
C'est le Suisse RAHN qui proposa le symbole * en 1659.
Aujourd'hui très employée aux États-Unis, cette petite étoile s'est installée sur les claviers d'ordinateurs.
Le mathématicien allemand LEIBNIZ (1646-1716) préconisait l'emploi du point, par crainte de la confusion entre × et la lettre *x*. Cet emploi perdure encore de nos jours.

LES SYMBOLES DE DIVISION

Le **trait de fraction** apparaît dès le 12e siècle chez des mathématiciens arabes et dans l'œuvre de l'Italien FIBONACCI. Il désigne aussi bien une fraction qu'une division.

Plus tard, certains auteurs voulant distinguer fractions et divisions ont proposé des symboles spéciaux pour la division : la lettre **D** par exemple.
RAHN préconisa ÷ pour la division. Ce symbole eut un grand succès aux États-Unis ; il se retrouve désormais sur les calculatrices.
Histoire de compliquer la situation, d'autres auteurs ont longtemps utilisé ce même symbole ÷ pour la soustraction... !
LEIBNIZ, qui utilisait le point (·) pour la multiplication, proposa le **deux-points** (:) pour la division.
Enfin, en 1923, l'Association mathématique américaine recommanda la **barre oblique** (/), nommée « slash », qui figure aujourd'hui sur les claviers d'ordinateurs.

Source : « Histoire des symboles », Jean-Paul Guichard, épisodes 4, 5 et 6 parus dans *Corol'aire*, APMEP Poitiers, 1996.

François Viète (1540-1603)

Simon Stevin (1548-1620)

Leibniz (1646-1716)

Exercices

CONSOLIDER

Opérations croisées et étoiles magiques

Pour les exercices 1 à 4, compléter les grilles.

1

– 1	+	2	=	
+		–		+
3	–	– 4	=	
=		=		=
	+		=	

2

6	+	– 5	=	
–		+		–
	–	1	=	
=		=		=
6	+		=	

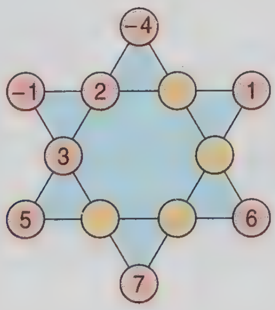
3

4	–	– 8	=	
+		+		+
– 3	–		=	
=		=		=
	–		=	4

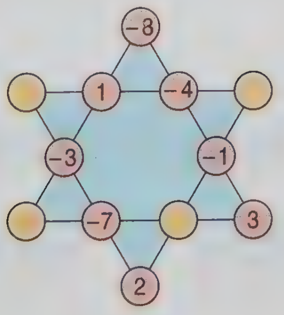
4

	–	7	=	– 5
+		–		+
– 1	+		=	
=		=		=
	–	9	=	

5 *Étoile magique*
Compléter l'étoile magique suivante : sur chaque ligne, la somme des quatre nombres est la même.



6 *Étoile magique (bis)*
Même exercice avec :



Premières équations

7 a) Voici une égalité dans laquelle le nombre x est inconnu (provisoirement) : $x + 5 = 2$.
Ajouter – 5 aux deux membres et donner la valeur de x.
b) Trouver le nombre x tel que $x - 9 = -2$.

8 a) Trouver le nombre y tel que $12 + y = 4$.
b) Trouver le nombre z tel que $-8{,}2 = z + 3$.

9 a) Trouver le nombre u tel que $3{,}1 = 5 + u$.
b) Trouver le nombre v tel que $v - 37{,}5 = -45$.

10 a) Voici une égalité dans laquelle le nombre x est inconnu : $3 \times x = 10{,}5$.
Diviser les deux membres par 3 et donner la valeur de x.
b) Trouver le nombre x tel que $5x = 3$.

11 a) Trouver le nombre y tel que $7{,}2 = 4y$.
b) Trouver le nombre z tel que $12 = 0{,}5z$.

12 a) Trouver le nombre u tel que $0{,}13u = 143$.
b) Trouver le nombre v tel que $1{,}05 = 1{,}5v$.

RÉSULTATS

5 Somme sur chaque ligne : 6. D'où...

7 **a)** $x + 5 - 5 = 2 - 5$ d'où $x = -3$.
b) $x - 9 + 9 = -2 + 9$ d'où $x = 7$.

10 **a)** $\dfrac{3x}{3} = \dfrac{10{,}5}{3}$ d'où $x = 3{,}5$.

b) $\dfrac{5x}{5} = \dfrac{3}{5}$ d'où $x = 0{,}6$.

SAVOIR FAIRE

Multiplications et divisions

13 Calculer.
$a = 3{,}5 \times 3$ $b = 3{,}5 \times (-3)$
$c = (-3{,}5) \times 3$ $d = (-3{,}5) \times (-3)$
$e = 1 \times (-1{,}75)$ $f = 4{,}2 \times (-1)$
$g = (-3{,}5) \times 0$ $h = (-4) \times (-2 + 2)$.

14 Calculer (mentalement de préférence).
$a = (-8) \times 12$ $b = -7 \times 11$
$c = 100 \times (-0{,}3)$ $d = (-10) \times (-0{,}1)$
$e = (-0{,}8) \times (-1{,}25)$ $f = 0{,}5 \times (-2)$
$g = -0{,}75 \times (-4)$ $h = 700 \times 0{,}07$.

15 Mettre les quotients suivants sous forme d'un nombre décimal.

$a = 7 \div 4$ $\qquad$ $b = (-7) \div 8$

$c = 14 \div (-3{,}5)$ $\qquad$ $d = (-14) \div (-5)$.

16 Mettre les quotients suivants sous forme d'un nombre décimal.

$a = \dfrac{3{,}6}{-10}$; $b = \dfrac{-1{,}5}{150}$; $c = -\dfrac{10}{2{,}5}$; $d = \dfrac{-98}{-490}$.

17 Calculer les nombres décimaux suivants.

$$a = \frac{9}{10} + \frac{93}{40} - \frac{7}{8}$$

$$b = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} - \left(\frac{7}{25} - \frac{25}{20}\right)$$

$$c = \frac{3}{125} - \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{5}\right) + \frac{2}{25}$$

$$d = \left(\frac{37}{20} - \frac{1}{0{,}2}\right) \times (-41).$$

18 *Température moyenne*

En Alaska, près du détroit de Béring, les températures moyennes mensuelles sont les suivantes, en degrés Celsius.

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
−14	−13	−12	−5	1	6	9	8	5	0	−6	−12

Calculer la température moyenne annuelle dans cette région.

Valeurs approchées

19 Donner une valeur approchée à 0,001 près des produits suivants. Préciser s'il s'agit d'une valeur approchée par défaut ou par excès.

$a = 1\,234{,}567 \times 24{,}385$

$b = (-26{,}541) \times (-7{,}004)$

$c = 3{,}049\,7 \times (-0{,}012\,3)$

$d = (-64{,}801) \times 1{,}245$.

20 Même exercice avec les quotients suivants.

$a = \dfrac{-5}{3}$ $\qquad$ $b = \dfrac{355}{113}$

$c = \dfrac{1}{-7}$ $\qquad$ $d = \dfrac{-0{,}7}{-15}$.

21 Donner une valeur approchée à 0,01 près des expressions suivantes.

$$a = 25 - \frac{11}{8} + \frac{7}{3}$$

$$b = \frac{7}{3} \times \frac{11}{9} - 24 \times 0{,}111$$

$$c = \left(8 + \frac{1}{3}\right) \times \left(5 - \frac{182}{19}\right)$$

$$d = \frac{36}{11} \times \left(-5{,}5 \times \frac{12}{7}\right).$$

Signe d'un produit de plusieurs facteurs

22 Trouver, sans effectuer les opérations, le signe des expressions suivantes.

$x = (-4{,}5) \times (7{,}3) \times (-9{,}36) \times (-4{,}7)$

$y = 7{,}5 \times (-4) \times 0 \times (-9)$

$z = (-4{,}8) \times (-4{,}8) \times (-2{,}74) \times 7 \times (-1{,}01)$.

23 Trouver sans effectuer aucune opération, le signe du facteur manquant dans les égalités suivantes.

a) $7{,}8 \times (-9) \times \boxed{?} \times (-49) = -1\,031{,}94$

b) $\dfrac{741 \times (-5)}{(-10) \times \boxed{?}} = 370{,}5$

c) $225 \times (-7) \times \boxed{?} \times 3 = 2\,362{,}5$.

24 *Vrai ou faux ?*

Pour chacune des phrases suivantes :
– dire si elle est vraie ou fausse ;
– si elle est vraie, donner un exemple ;
– si elle est fausse, donner un contre-exemple*.

a) Le produit d'un nombre par − 1 est l'opposé de ce nombre.

b) Le produit d'un nombre non nul par son opposé est négatif.

c) Le carré* d'un nombre négatif est négatif.

d) Le cube* d'un nombre négatif est négatif.

(*) Contre-exemple, carré, cube : voir Mini-dico.

25 *Opérations croisées*

Recopier cette grille et compléter les cases blanches.

− 1	÷	1	=	
×		×		×
− 1	÷		=	
=		=		=
	÷	− 1	=	

Équations

26 Résoudre les équations suivantes.
a) $2x = 14$ b) $x + 4 = 5$
c) $x - 8 = 0$ d) $x - 2 = 3$
e) $0{,}5x = 1{,}5$ f) $2x - 2 = 0$.

27 Résoudre les équations suivantes.
a) $5 \times x + 11 = 7$ b) $x \times 3 + 3 = 15$
c) $x \times (-2) + (-8) = 12$ d) $0{,}5 \times x - 45 = 42$.

28 Résoudre les équations suivantes.
a) $-3x + 8 = 23$ b) $8 - 5x = 9$
c) $5 = 2x - 4$ d) $49 = 1 - x$.

29 *Vrai ou faux ?*
Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses. Corriger les fausses.
a) Si $4x = 5$ alors $x = 1$
b) Si $9 - x = 0$ alors $x = -9$
c) Si $-3x = 0$ alors $x = 0$
d) Si $5 = -x$ alors $x = -5$
e) Si $8x = 2$ alors $x = -6$
f) Si $3 - 4x = -1$ alors $x = 1$.

30 *Chasser l'intrus*
Trouver l'équation qui n'admet pas 4 comme solution.
a) $x - 4 = 0$ b) $-x + 4 = 0$
c) $3x - 5 = 7$ d) $x + 4 = -4$
e) $2x = 8$ f) $0{,}5x + 3 = 5$.

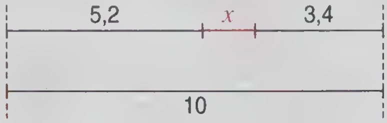
31 *Chasser l'intrus (bis)*
Trouver l'équation qui n'admet pas -2 comme solution.
a) $2x + 4 = 0$ b) $-2x = 4$
c) $0{,}5x = -1$ d) $6x + 2 = -10$
e) $x + 101 = 99$ f) $0{,}75x = 1{,}5$.

32 *Marions-les*
Regrouper les paires d'équations ayant la même solution.
a) $7x = 14$ b) $7 + x = 3$
c) $7x - 2 = 12$ d) $3 + x = 4{,}5$
e) $-8x + 6 = 0$ f) $24 + 4x = 8$
g) $3x = 4{,}5$ h) $6 = 8x$.

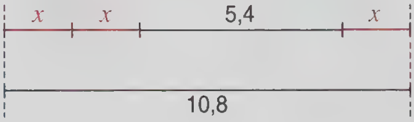
Mise en équation

Dans les exercices 33 à 37, on demande de trouver x en posant une équation et en la résolvant.

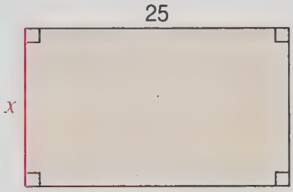
33



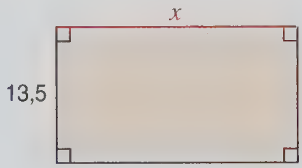
34



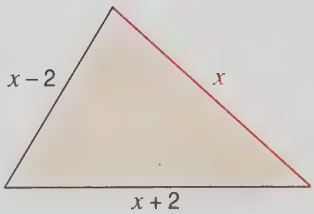
35 Périmètre : 82.



36 Aire : 270.



37 Périmètre : 90.



38 *Collection de timbres*
Camille a 53 timbres de moins que Jonathan. En tout, ils en ont 527.
Combien en ont-ils chacun ?

39 *Collection de BD*
Céline possède 13 BD de plus que Gaëtan. En tout, ils en ont 63.
Combien en ont-ils chacun ?

40 *Menuiserie*
Peut-on couper une baguette de 2 m en deux morceaux dont l'un mesure 23 cm de plus que l'autre ? (Donner alors la longueur des deux morceaux.)

41 *Grand-père et son petit-fils*

Quel est l'âge du petit-fils ?

42 *Dans une centurie*
Les légionnaires du centurion Pythagorus sont bruns ou blonds. Les bruns sont 12 de plus que les blonds. Combien y a-t-il de bruns dans cette centurie ? Et de blonds ?

43 *Quel est ce nombre ?*
On multiplie un nombre par 2,5 ; on enlève 11,3 au résultat obtenu et on trouve 6,2. Quel est ce nombre ?

44 *Quel est ce nombre ? (bis)*
En additionnant le double et le triple d'un nombre, on trouve 95. Quel est ce nombre ?

45 *Collection de voitures miniatures*
Marc a trois fois plus de voitures que Simon. Ensemble, ils en ont 52.
Combien chacun en a-t-il ?

46 *Collection de glups*
David possède 4 fois plus de glups que Charlotte. Mais on peut dire aussi qu'il en possède 27 de plus qu'elle. Combien Charlotte a-t-elle de glups ? Et David ?

RÉSULTATS

13 $a = d = 10{,}5$ $b = c = -10{,}5$ $e = -1{,}75$
$f = -4{,}2$ $g = h = 0$.

15 $a = 1{,}75$; $b = -0{,}875$; $c = -4$; $d = 2{,}8$.

27 **a**) – 0,8 **b**) 4 **c**) – 10 **d**) 174.

30 On remplace x par 4 dans chaque équation. L'équation **d**) est la seule qui n'admet pas 4 comme solution.

33 $5{,}2 + x + 3{,}4 = 10$. Solution : $x = 1{,}4$.

42 56 bruns, 44 blonds.

43 Soit x le nombre.
Équation : $2{,}5\,x - 11{,}3 = 6{,}2$ d'où $x = 7$.

Exercices

CHERCHER

Figures magiques

INFORMATION
Un **carré multiplicativement magique** est une grille carrée remplie de nombres, de façon que le **produit** de ces nombres soit toujours le même sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale.

47 Ce carré est-il multiplicativement magique ?

2	10	– 3,2
6,4	– 4	2,5
– 5	1,6	8

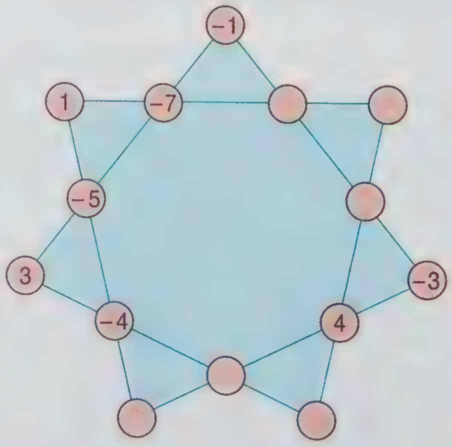
48 Compléter le carré ci-contre pour qu'il devienne multiplicativement magique.
Le produit commun est 1 000.

– 5	– 8	
	10	

49 Même exercice avec le carré ci-contre.
Le produit commun est – 216.

	1	
		4
		– 3

50 *Étoile magique à 7 branches*
Sur chaque ligne, la somme des 4 nombres est la même.
Les nombres utilisés sur cette étoile sont tous les entiers relatifs allant de – 9 à + 4.

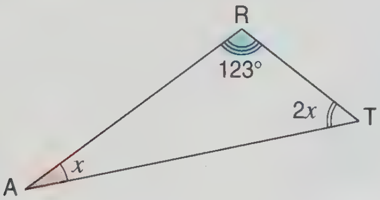


Compléter l'étoile magique.

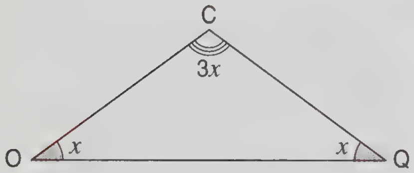
Mise en équation

Dans les exercices 51 à 54, il s'agit de trouver x (qui est une mesure d'angle en degrés) en posant une équation et en la résolvant.

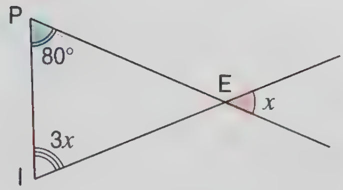
51



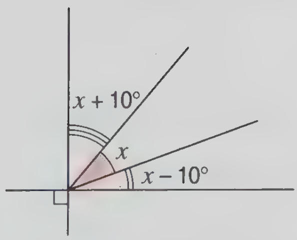
52



53



54



55 *Dans un triangle rectangle*
Dans un triangle rectangle, un angle aigu est le triple de l'autre angle aigu. Déterminer la mesure du plus petit angle.

56 *Trouver le nombre (1)*
Trouver le nombre tel que son double augmenté de 5 soit égal à son triple diminué de 7.

57 *Trouver le nombre (2)*
Trouver le nombre tel que son quintuple diminué de 8 soit égal à son triple augmenté de 10.

58 *Trouver l'entier*
La somme d'un entier et de son suivant est 155. Trouver cet entier.

59 *Au jardin*
La saison des melons est arrivée. Hier, j'en ai cueilli trois fois plus qu'avant-hier. Aujourd'hui, j'en cueille deux fois plus qu'hier. En tout, cela fait 20 melons.
Combien en ai-je cueilli avant-hier, hier et aujourd'hui ?

60 *À la papeterie*
Je viens d'acheter 5 petits classeurs et 3 grands classeurs. J'ai payé 159,50 F.
Sachant qu'un petit classeur coûte moitié moins cher qu'un grand classeur, calculer le prix de chaque classeur.

61 *À la friperie*
Guillaume a acheté deux chemises et trois shorts pour 240,10 F.
Sachant qu'une chemise coûte deux fois plus cher qu'un short, calculer le prix d'un short et celui d'une chemise.

62 *Le jeu de clés*
Le prix de 8 clés est de 468 F.

À partir de la deuxième clé, chaque clé coûte 5 F de plus que la précédente.
Calculer le prix de la plus petite clé, puis celui de la plus grande.

COUPS DE POUCE

50 Calculer d'abord la somme d'une « ligne ». Écrire ensuite la liste des 14 nombres à utiliser.
Puis, dans cette liste, rayer au fur et à mesure les nombres placés et chercher ceux qui peuvent convenir parmi les non rayés.

51 à **53** Que vaut la somme des angles d'un triangle ?

55 Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.

58 Soit x l'entier. Son suivant est $x + 1$.

59 Soit x le nombre de melons cueillis avant-hier.

2 Fractions

Activités

1 Égalités de fractions

A. Simplification de fractions

Exemple : $\dfrac{210}{165} = \dfrac{42 \times \cancel{5}}{33 \times \cancel{5}} = \dfrac{42}{33} = \dfrac{14 \times \cancel{3}}{11 \times \cancel{3}} = \dfrac{14}{11}$.

Simplifier les fractions suivantes (autant qu'il est possible de le faire).

$\dfrac{32}{36} \qquad \dfrac{35}{60} \qquad \dfrac{42}{108} \qquad \dfrac{30}{20} \qquad \dfrac{90}{75}$.

B. Changement de dénominateur ou de numérateur

Compléter.

$\dfrac{3}{5} = \dfrac{3 \times \ldots}{5 \times \ldots} = \dfrac{\ldots}{75} \qquad \dfrac{11}{4} = \dfrac{11 \times \ldots}{4 \times \ldots} = \dfrac{\ldots}{68} \qquad \dfrac{7}{3} = \dfrac{7 \times \ldots}{3 \times \ldots} = \dfrac{91}{\ldots}$.

C. Réduction au même dénominateur

Cette technique est indispensable pour additionner ou soustraire des fractions.

1. Réduire au même dénominateur les paires de fractions suivantes.

a) $\dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{7}{8}$ **b)** $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{5}{2}$ **c)** $\dfrac{7}{5}$ et $\dfrac{3}{2}$ **d)** $\dfrac{13}{7}$ et $\dfrac{8}{3}$.

2. Chercher un multiple commun à 12 et 15 (aussi petit que possible) ; puis réduire $\dfrac{5}{12}$ et $\dfrac{7}{15}$ au même dénominateur.

3. Même travail avec : **a)** $\dfrac{4}{21}$ et $\dfrac{2}{9}$ **b)** $\dfrac{11}{18}$ et $\dfrac{1}{12}$ **c)** $\dfrac{2}{15}$ $\dfrac{3}{10}$ et $\dfrac{7}{6}$.

2 Additions et soustractions de fractions

A. Même dénominateur

Effectuer.

$a = \dfrac{15}{7} + \dfrac{18}{7} \qquad b = \dfrac{36}{11} - \dfrac{17}{11} \qquad c = \dfrac{17}{60} + \dfrac{13}{60}$

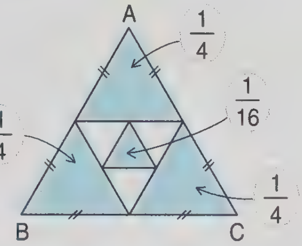
$d = \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3} \qquad e = \dfrac{25}{z} - \dfrac{12}{z} \qquad f = \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z}$.

B. L'un des dénominateurs est multiple de l'autre

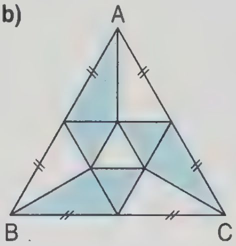
1. Dans les figures suivantes, chaque morceau colorié mesure $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{16}$ de l'aire du triangle ABC.

Calculer la fraction correspondant à la réunion de ces morceaux.

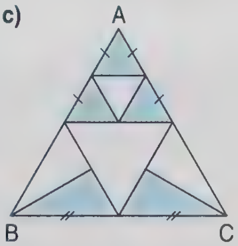
a)



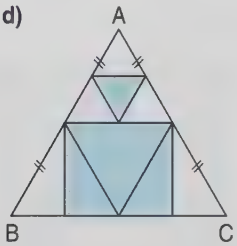
b)



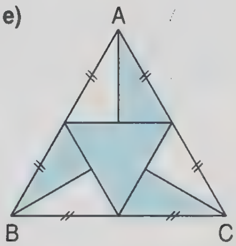
c)



d)



e)



2. Calculer les différences suivantes.

$a = \frac{2}{5} - \frac{3}{10}$ $\quad b = \frac{1}{10} - \frac{1}{100}$ $\quad c = \frac{10}{51} - \frac{1}{17}$ $\quad d = \frac{62}{124} - \frac{1}{4}$.

C. Dénominateurs quelconques

1. Dans chaque cas, réduire les fractions au même dénominateur puis les additionner et simplifier le résultat.

$a = \frac{7}{5} + \frac{3}{2}$ $\quad b = \frac{5}{12} + \frac{7}{15}$ $\quad c = \frac{11}{18} + \frac{1}{12}$ $\quad d = \frac{2}{15} + \frac{3}{10} + \frac{7}{6}$.

2. Écrire les quotients $\frac{2}{5}$ $\frac{-2}{5}$ et $\frac{2}{-5}$ sous forme décimale.

Que peut-on dire des trois nombres : $-\frac{a}{b}$ $\frac{-a}{b}$ et $\frac{a}{-b}$?

3.

INFORMATION

- L'opposé de $\frac{a}{b}$ est $-\frac{a}{b}$ et on a $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$.
- Soustraire revient à ajouter l'opposé.

Exemples :

$\frac{3}{7} - \frac{5}{7} = \frac{3}{7} + \frac{-5}{7} = \frac{3+(-5)}{7} = \frac{-2}{7}$; $\frac{3}{2} - \frac{-1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.

Calculer.

$a = \frac{2}{3} - \frac{5}{2}$ $\quad b = \frac{1}{3} - \frac{3}{4}$ $\quad c = \frac{4}{5} - \frac{-1}{10}$ $\quad d = -\frac{3}{2} + \frac{5}{7}$ $\quad e = \frac{2}{3} - \frac{1}{-6}$.

3 Fractions égyptiennes

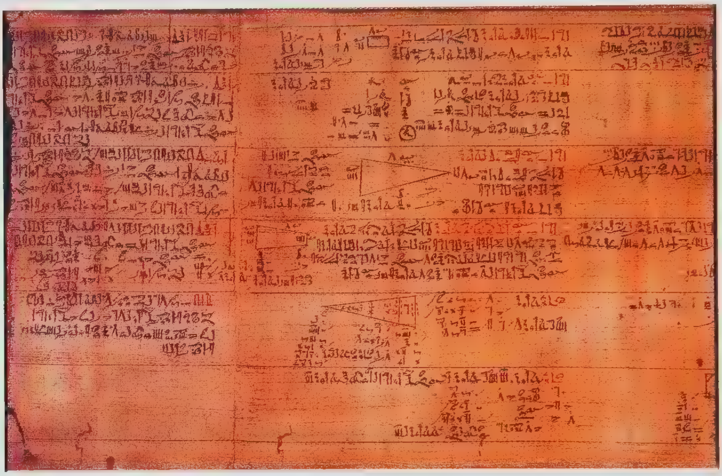
A. Sur le papyrus de Rhind

Les documents mathématiques de l'Égypte antique sont rares. Un papyrus, écrit vers 1650 avant J.-C., nous est cependant parvenu. Il est appelé « papyrus de Rhind » du nom de l'archéologue britannique qui l'a fait connaître.

Compléter les égalités suivantes extraites du papyrus de Rhind.

- $\ldots\ldots = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}$
- $\dfrac{2}{7} = \dfrac{1}{4} + \ldots\ldots$
- $\dfrac{2}{9} = \ldots\ldots + \dfrac{1}{18}$
- $\dfrac{2}{11} = \dfrac{1}{6} + \ldots\ldots$
- $\dfrac{2}{19} = \dfrac{1}{12} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{114}$
- $\dfrac{2}{101} = \dfrac{1}{101} + \dfrac{1}{202} + \dfrac{1}{303} + \ldots\ldots$

Chaque fraction est décomposée en une somme de **fractions égyptiennes** distinctes (une fraction égyptienne est une fraction dont le numérateur vaut 1).



Un fragment du papyrus de Rhind.

B. Autres décompositions de fractions

On se propose de décomposer d'autres fractions en somme de fractions égyptiennes distinctes.

1. Vérifier et compléter les égalités suivantes.

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{5+1}{10} = \frac{5}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{\ldots\ldots} + \frac{1}{\ldots\ldots}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{7+2+1}{14} = \frac{7}{14} + \frac{2}{14} + \frac{1}{14} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Compléter les égalités suivantes.

$$\frac{4}{5} = \frac{\ldots\ldots}{10} = \frac{\ldots\ldots + \ldots\ldots + 1}{10} = \frac{\ldots\ldots}{10} + \frac{\ldots\ldots}{10} + \frac{\ldots\ldots}{10} = \frac{1}{\ldots\ldots} + \frac{1}{\ldots\ldots} + \frac{1}{\ldots\ldots}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{\ldots\ldots} = \frac{12}{\ldots\ldots} = \frac{7 + \ldots\ldots + \ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} + \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} + \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{1}{\ldots\ldots} + \frac{1}{\ldots\ldots} + \frac{1}{\ldots\ldots}$$

$$\frac{6}{11} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots + 1}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} + \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{1}{\ldots\ldots} + \frac{1}{\ldots\ldots}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{1}{\ldots\ldots} + \frac{1}{\ldots\ldots}$$

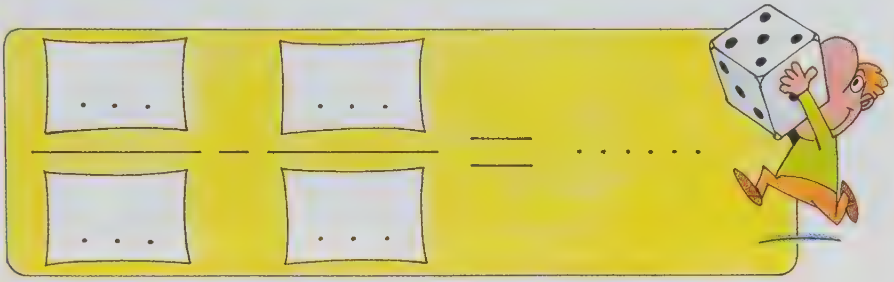
Activités

4 Duel

ENTRE NOUS
Objectifs
• Soustraire des fractions.
• Comparer des nombres en écriture fractionnaire ou non.
• Comprendre que $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ est « grand » lorsque a et d sont « grands » et que b et c sont « petits ».
• Élaborer une stratégie.

Remarque
Une variante de ce jeu : remplacer la soustraction par une division.

Règle du jeu. Ce jeu se joue à deux (ou trois) avec un dé et des grilles de jeu comme celle-ci.



• Chaque joueur dessine une grille de jeu.
• À tour de rôle, les joueurs jettent le dé et inscrivent le chiffre obtenu dans l'une des 4 cases de leur grille de jeu (une case libre de leur choix).
• Lorsque les grilles sont pleines, on soustrait les deux fractions inscrites sur la grille (attention le résultat peut être négatif). Celui qui a le plus grand résultat a gagné la partie.

A. Jeu

Faire plusieurs parties en essayant d'élaborer une stratégie gagnante.

B. Questions

1. Quel est le plus grand résultat possible ? et le plus petit ?
2. Dans quelles cases vaut-il mieux mettre un 6 ? et un 1 ?

5 Multiplications de fractions

ENTRE NOUS
Objectifs
• Réviser la multiplication des fractions vue en 5^e.
• L'étendre à des fractions de signes quelconques.
• Simplifier.

A. Cas où le numérateur et le dénominateur sont positifs

Effectuer sans la calculatrice.

$a = \frac{4}{5} \times \frac{6}{5}$ $\quad b = 2 \times \frac{8}{9}$ $\quad c = \frac{17}{19} \times \frac{19}{17}$ $\quad d = 0 \times \frac{15}{23}$.

B. Cas où le numérateur et le dénominateur sont de signes quelconques

On applique la règle des signes (bien connue !).
Effectuer sans la calculatrice.

$a = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{4}{5}\right)$ $\quad b = \left(-\frac{4}{7}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)$ $\quad c = \frac{5}{8} \times \left(\frac{-4}{15}\right)$ $\quad d = \left(\frac{-7}{2}\right) \times \frac{4}{25}$.

C. Penser aussi à simplifier !

Exemple : $\frac{-35}{18} \times \frac{27}{14} = \frac{-35 \times 27}{18 \times 14} = \frac{\cancel{7} \times (-5) \times 3 \times \cancel{9}}{2 \times \cancel{9} \times 2 \times \cancel{7}} = \frac{-15}{4}$.

Effectuer et donner un résultat simplifié.

$a = \frac{63}{40} \times \frac{25}{54}$ $\quad b = \frac{-2}{45} \times \frac{15}{28}$ $\quad c = \frac{35}{-12} \times \frac{72}{5}$ $\quad d = \frac{-3}{28} \times \frac{-4}{21}$.

Activités

6 Inverse d'un nombre

A. Inverse d'un nombre entier ou décimal

1. Lire la définition, dans la partie « Outils », page 32.

2. Est-ce que 4 et 0,25 sont inverses l'un de l'autre ? (Justifier.)
Même question pour 3 et 0,3.

3. Quel est l'inverse de 5 ? de 10 ? de 0,1 ? de 50 ?

4. Quel est l'inverse de – 2 ? de – 20 ? de – 0,4 ? de – 1 000 ?

5. Prouver que l'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$.
Est-ce que l'inverse de 3 est un nombre **décimal** ? (Voir **Mini-dico**.)

6. Même question avec l'inverse de 7.

B. Inverse d'une fraction

1. Prouver que l'inverse de $\frac{2}{3}$ est $\frac{3}{2}$.

2. Quel est l'inverse de $\frac{17}{32}$? (Justifier.)

3. Quel est l'inverse de $\frac{-7}{11}$? (Justifier.)

C. Valeur approchée d'un inverse

Sur une calculatrice, la touche qui calcule l'inverse est $\boxed{\frac{1}{x}}$ ou $\boxed{x^{-1}}$.
Mais attention, les résultats obtenus sont plus souvent approchés qu'exacts.

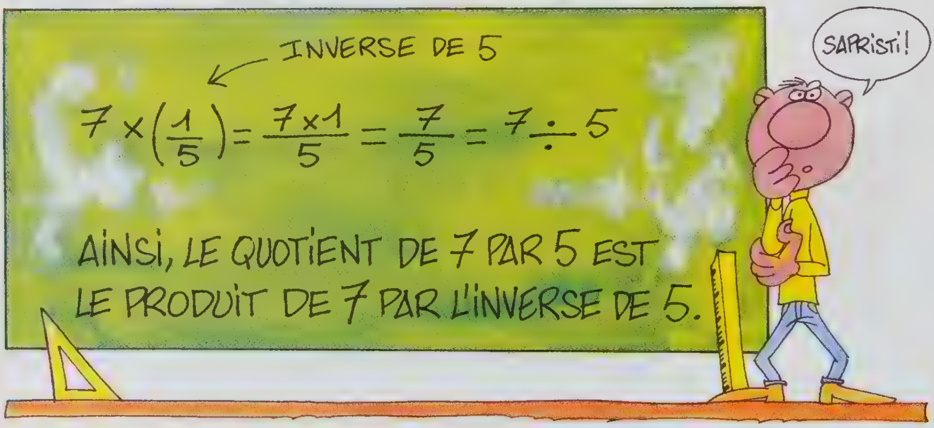
1. Calculer, avec une calculatrice, les inverses de :

5   3   – 10   7   0,16 π $\frac{4}{5}$.

2. Certains résultats ne sont qu'approchés : lesquels ?

7 Inverse et division

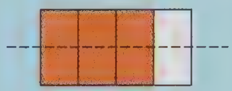
A. Division de deux nombres entiers ou décimaux



Prouver, en suivant le modèle ci-dessus, que $4 \div 3$ est le produit de 4 par l'inverse de 3.

B. Division d'une fraction par un nombre entier

Déterminons, à l'aide d'un dessin, le quotient $\frac{3}{4} \div 2$.
On commence par dessiner un rectangle.
On le partage en 4.
On prend les $\frac{3}{4}$ (partie coloriée).
Puis on coupe en 2 par le trait horizontal.
Et l'on **voit** que $\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{8}$.



1. Déterminer à l'aide de dessins : $\frac{2}{3} \div 4$ puis $\frac{4}{5} \div 3$.

2. Vérifier que $\frac{3}{4} \div 2$ est le produit de $\frac{3}{4}$ par l'inverse de 2.

Vérifier que $\frac{4}{5} \div 3$ est le produit de ..... par l'inverse de ......

C. Règle générale pour diviser

INFORMATION

Les mathématiciens ont trouvé une règle simple qui s'applique dans tous les cas : nombres entiers, décimaux ou fractionnaires.
Pour diviser, on multiplie par l'inverse.

Exemple : $3 \div \frac{4}{5} = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$.

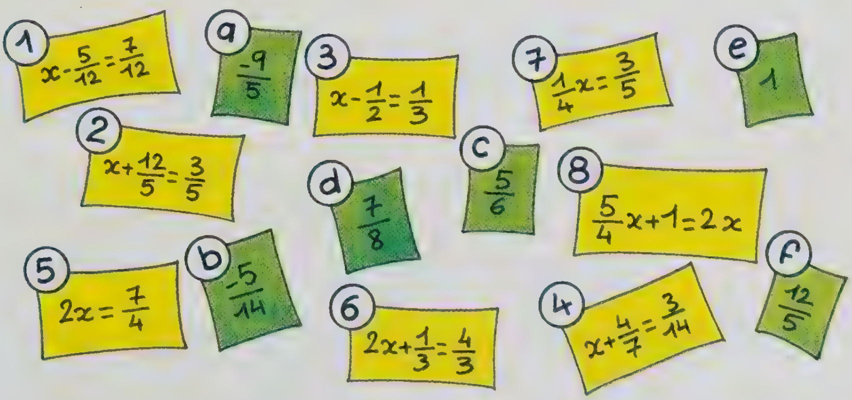
1. Calculer : $a = \frac{3}{5} \div \frac{4}{3}$ $\quad b = \frac{-7}{8} \div \frac{1}{2}$ $\quad c = \frac{8}{-5} \div \left(-\frac{1}{4}\right)$ $\quad d = \frac{6}{5} \div \frac{3}{2}$.

2. Comment divise-t-on mentalement par 0,5 ? (Expliquer et donner un exemple.)
Et par 0,25 ? Et par 0,1 ? Et par 0,2 ?

Activités

8 Solution abandonnée recherche équation

Voici 8 équations et 6 solutions. Mais on ne sait plus à quelle équation associer chaque solution.



1. Associer les équations à leur solution (quand celle-ci est donnée).
2. Résoudre les deux équations dont la solution n'est pas donnée.

9 Quotients égaux et produits en croix

A. En passant par la proportionnalité

1. Écrire $\frac{18}{50}$ et $\frac{27}{75}$ en écriture décimale. En déduire que $\frac{18}{50} = \frac{27}{75}$.

2. Compléter le tableau ci-contre avec 50, 27 et 75 de façon à obtenir un tableau de proportionnalité.

18	....
....	....

÷..... ×.....

3. Dans un tableau de proportionnalité, les produits en croix sont égaux.
Écrire l'égalité des produits en croix.

4. Compléter les pointillés.

PROPRIÉTÉ

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **alors** .... × .... = ... × ....

Faire une phrase pour énoncer cette propriété.

B. En manipulant des égalités

1. Multiplier par bd les deux membres de l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

2. Par combien peut-on simplifier le premier membre ? et le second ?

3. Quelle égalité obtient-on après simplification ?

10 Spécial compétition

A. Fractionnons (Mathématiques sans frontières, Aquitaine)

Yoyo pense que l'on peut écrire toute fraction comme la somme d'inverses de nombres entiers tous distincts.

Par exemple, elle a trouvé :

$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$.

Écrire $\frac{3}{7}$ comme la somme d'inverses de nombres entiers tous différents.

B. Histoires d'inverses (Rallye mathématique du Centre, 1989)

Le mathématicien W. Sierpinski a pensé que, pour tout entier naturel n supérieur à 1, on peut trouver trois entiers naturels x, y et z tels que :

$\frac{5}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Ainsi pour $n = 2$, on a $x = 1$, $y = 1$ et $z = 2$.
Ainsi pour $n = 4$, on a $x = 2$, $y = 2$ et $z = 4$, mais aussi une deuxième solution : $x = 1$, $y = 8$ et $z = 8$.

Vérifier la conjecture* de Sierpinski pour n variant de l'entier 5 à l'entier 20 compris. Fournir, pour chaque valeur de n, le plus possible de solutions.

(*) Voir le **Mini-dico**.

Outils

Opérations sur les fractions

1 Égalité de deux fractions

A. Rappel

Quelques cas particuliers : • $\frac{a}{a} = 1$; $\frac{3}{3} = 1$. • $\frac{0}{a} = 0$; $\frac{0}{4} = 0$. • $\frac{a}{1} = a$; $\frac{5}{1} = 5$.

PROPRIÉTÉ

$\frac{a}{b}$ étant une fraction et k un nombre non nul, on a : $\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$.

B. Applications

• **Simplifier** une fraction : $\frac{30}{42} = \frac{6 \times 5}{6 \times 7} = \frac{5}{7}$.

• **Réduire** des fractions au même dénominateur.

Soit deux fractions $\frac{7}{18}$ et $\frac{5}{12}$. Les dénominateurs 18 et 12 ont pour multiple commun 36 (par exemple) ; ce sera le **dénominateur commun** : $\frac{7}{18} = \frac{7 \times 2}{18 \times 2} = \frac{14}{36}$ et $\frac{5}{12} = \frac{5 \times 3}{12 \times 3} = \frac{15}{36}$.

2 Addition et soustraction de fractions

A. Cas où les fractions ont le même dénominateur

PROPRIÉTÉ

$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$ étant deux fractions de même dénominateur, on a :

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$.

EXEMPLES

• $\frac{4}{13} + \frac{7}{13} = \frac{4+7}{13} = \frac{11}{13}$

• $\frac{4}{13} - \frac{7}{13} = \frac{4-7}{13} = \frac{-3}{13}$.

B. Cas où les dénominateurs sont différents

RÈGLE

Pour additionner ou soustraire des fractions de dénominateurs différents, on commence par les réduire au même dénominateur.

EXEMPLES :

• $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} + \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{10}{12} + \frac{9}{12} = \frac{19}{12}$ ← Avec 6 et 4, 12 est un dénominateur commun possible

• $\frac{14}{9} - \frac{7}{6} = \frac{14 \times 2}{9 \times 2} - \frac{7 \times 3}{6 \times 3} = \frac{28}{18} - \frac{21}{18} = \frac{7}{18}$ ← Avec 9 et 6, 18 est un dénominateur commun possible

C. Opposé d'une fraction

Par définition, l'opposé de la fraction $\frac{a}{b}$ est $-\frac{a}{b}$.

D'après la règle des signes pour la division, on a, par exemple : $\frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$ et $\frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$.

PROPRIÉTÉ

$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$.

EXEMPLE : $\frac{7}{9} + \frac{5}{-9} = \frac{7}{9} + \frac{-5}{9} = \frac{7+(-5)}{9} = \frac{2}{9}$.

3 Multiplication de fractions

PROPRIÉTÉ

$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ étant des fractions, on a : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

EXEMPLE

$\frac{4}{5} \times \frac{-7}{3} = \frac{-28}{15}$.

Autrement dit, **pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.**
Cette propriété peut être utilisée pour multiplier un nombre par une fraction.

EXEMPLE : $7 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{1} \times \frac{-3}{4} = \frac{-21}{4}$.

4 Inverse d'un nombre non nul et division de fractions

A. Inverse d'un nombre non nul

DÉFINITION

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre lorsque leur produit est 1.

EXEMPLES

- L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$ (ou 0,5), car $2 \times \frac{1}{2} = 1$.
- L'inverse de $\frac{4}{3}$ est $\frac{3}{4}$, car $\frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{12} = 1$.
- L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$ $\left(\frac{1}{3} \approx 0{,}333\,333\right)$, car $3 \times \frac{1}{3} = 1$.
- Le nombre 0 n'a pas d'inverse.

PROPRIÉTÉ

L'inverse d'un nombre a non nul est $\frac{1}{a}$.

L'inverse d'une fraction $\frac{a}{b}$ (avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$) est $\frac{b}{a}$.

Sur une calculatrice, la touche $\boxed{\frac{1}{x}}$ ou $\boxed{x^{-1}}$ permet de calculer une valeur approchée de l'inverse d'un nombre.

B. Diviser, c'est multiplier par l'inverse

PROPRIÉTÉ

Le quotient de a par b est le produit de a par l'inverse de b : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.

EXEMPLES

- $\frac{5}{2} = 5 \times \frac{1}{2} = 5 \times 0{,}5 = 2{,}5$.
- $\frac{73}{10} = 73 \times \frac{1}{10} = 73 \times 0{,}1 = 7{,}3$.

C. Division de fractions

PROPRIÉTÉ

$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ étant deux fractions, avec b, c et d non nuls, on a : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Autrement dit, **pour diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, on multiplie $\frac{a}{b}$ par l'inverse de $\frac{c}{d}$, c'est-à-dire par $\frac{d}{c}$.**

EXEMPLE : $\frac{5}{3} \div \frac{2}{7} = \frac{5}{3} \times \frac{7}{2} = \frac{35}{6}$.

5 Quotients égaux et produits en croix

A. Propriété

PROPRIÉTÉ

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **alors** $a \times d = b \times c$.

Autrement dit, **si deux quotients sont égaux, alors les produits en croix sont égaux.**

B. Application

Trouver le nombre x tel que $\frac{4}{7} = \frac{3}{x}$.

On a deux quotients égaux, donc les produits en croix sont égaux.

D'où $4x = 7 \times 3$. Donc $4x = 21$. Donc $x = \frac{21}{4} = 5{,}25$.

Méthodes — Simplifier, réduire...

M 1 Comment simplifier une fraction ?

On recherche des diviseurs communs au numérateur et au dénominateur. Voir l'exemple du paragraphe **1.B**, page 31.

M 2 Comment réduire des fractions au même dénominateur ?

On recherche un multiple commun aux dénominateurs, le plus petit possible de préférence. Voir l'exemple du paragraphe **1.B**, page 31.

M 3 Comment savoir si deux nombres sont inverses l'un de l'autre ?

Si leur produit est 1, alors ils sont inverses ; sinon ils ne sont pas inverses.
Voir les exemples du paragraphe **4.A**, page 32.

M 4 Comment trouver un nombre inconnu dans une égalité de quotients ?

On écrit que les produits en croix sont égaux et on résout l'équation ainsi obtenue.
Voir l'exemple du paragraphe **5.B**, page 33.

Exemple — Calculs avec des fractions

ÉNONCÉ

Calculer : $A = \left(\frac{3}{8} + \frac{7}{12}\right) \times \left(\frac{13}{15} - 3\right)$ $\quad B = \frac{4}{-15} \div \frac{8}{-3}$ $\quad C = \frac{2}{9} \div 11.$

Stratégie	Solution	Remarques
On calcule d'abord à l'intérieur des parenthèses.	• Calcul de A. D'une part, $\frac{3}{8} + \frac{7}{12} = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} + \frac{7 \times 2}{12 \times 2} = \frac{9 + 14}{24} = \frac{23}{24}$	24 est un multiple commun à 8 et à 12 ; on réduit au même dénominateur.
	D'autre part, $\frac{13}{15} - 3 = \frac{13}{15} - \frac{3 \times 15}{15} = \frac{13 - 45}{15} = \frac{-32}{15}$	On réduit au même dénominateur.
On n'oublie pas de simplifier chaque fois que c'est possible.	Il en résulte : $A = \frac{23}{24} \times \frac{-32}{15} = -\frac{23 \times 32}{24 \times 15}$ donc $A = -\frac{23 \times 4 \times 8}{8 \times 3 \times 15} = -\frac{92}{45}$	On simplifie par 8.
Pour diviser, on multiplie par l'inverse.	• $B = \frac{4}{-15} \div \frac{8}{-3} = \frac{4}{-15} \times \frac{-3}{8}$	L'inverse de $\frac{8}{-3}$ est $\frac{-3}{8}$.
	$= \frac{4 \times (-3)}{(-3) \times 5 \times 4 \times 2} = \frac{1}{10}$	On pense à simplifier (par 4 et par − 3).
	• $C = \frac{2}{9} \div 11 = \frac{2}{9} \times \frac{1}{11} = \frac{2}{99}$	L'inverse de 11 est $\frac{1}{11}$.

Histoire des mathématiques

Fractions contre nombres décimaux : des siècles de conflit

Préférez-vous $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$ *ou bien* $0,5 + 0,375 = 0,875$ *?*

Dans les deux cas, il s'agit exactement des mêmes nombres, d'abord en écriture fractionnaire puis en écriture décimale.

Pendant très longtemps, les partisans des nombres décimaux (et du système métrique) se sont heurtés aux partisans des fractions (et des anciennes unités de mesures).

Nous savons aujourd'hui qu'il est utile de bien connaître les deux écritures pour pouvoir choisir, selon les problèmes, celle qui procure les calculs les plus aisés.

On ne peut pas tout mesurer avec des nombres entiers ; c'est pourquoi on a utilisé des fractions depuis l'Antiquité.

FRACTIONS D'ÉGYPTE, DE BABYLONE, OU D'AILLEURS

Les scribes égyptiens manipulaient les fractions avec aisance (voir activité 3). Ils privilégiaient les fractions

de la forme $\frac{1}{n}$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$

et savaient décomposer les autres fractions en sommes de ces fractions-là.

À la même époque, les Babyloniens utilisaient systématiquement des fractions de dénominateur 60 ou 3 600 qui nous servent encore à mesurer le temps.

En effet 1 min = $\frac{1}{60}$ h, 1 s = $\frac{1}{3\,600}$ h et

$$13 \text{ h } 8 \text{ min } 48 \text{ s} = \left(13 + \frac{8}{60} + \frac{48}{3\,600}\right) \text{h}.$$

Pour calculer avec les anciennes unités de mesures, il fallait jongler avec les fractions, car leurs divisions irrégulières empêchaient l'usage des décimaux.

D'ORIGINE ARABE OU OCCIDENTALE, VOICI LES DÉCIMAUX

Peu à peu, des savants ont pensé que l'usage systématique des dixièmes, centièmes, millièmes... simplifierait beaucoup les calculs. Le premier fut sans doute le mathématicien arabe AL-UQLIDISI. Dans un ouvrage écrit à Damas en 952 (et découvert en 1966), il explique qu'on peut remplacer $\frac{1}{2}$ par 0,5, $\frac{1}{4} + \frac{1}{10}$ par 0,35, etc. Il montre que ceci permet de multiplier ou diviser rapidement et simplement un nombre par 10.

Pourtant l'œuvre d'al-Uqlidisi restera inconnue. C'est al-Kashi, astronome à Samarkand (en Asie centrale), qui, en 1427, définit clairement ce que sont les décimaux et décrit toutes les opérations qui vont avec.

En Occident il faut attendre que les chiffres indo-arabes (0, 1, 2, ..., 9) aient remplacé les chiffres romains pour qu'apparaisse l'idée de nombre décimal. Le mathématicien français Viète déclare en 1579 : « En mathématiques, les soixantièmes et les soixantaines devraient être d'un usage rare ou nul. Au contraire les millièmes et les mille, les centièmes et les centaines, les dixièmes et les dizaines... doivent être d'un usage fréquent ou constant. »

Peu après, en 1582, le Flamand Stevin publie un livret intitulé *La Disme*. Sans connaître le travail d'al-Kashi, il introduit à son tour les nombres décimaux pour, dit-il, « expédier facilement tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes ». Il vante les avantages de son nouveau calcul pour l'astronomie, l'arpentage, le commerce, etc. En conclusion, il demande que toutes les monnaies et autres unités de mesures soient bientôt partagées en 10, 100, 1 000...

DÉCIMAUX RÉPUBLICAINS CONTRE FRACTIONS ROYALISTES !

En 1789, survient la Révolution française qui osera abolir les anciennes unités de mesures et les remplacera par le système métrique. On définit le mètre, le gramme, le litre, leurs multiples « déca », « hecto », « kilo » et leurs sous-multiples « déci », « centi », « milli »...

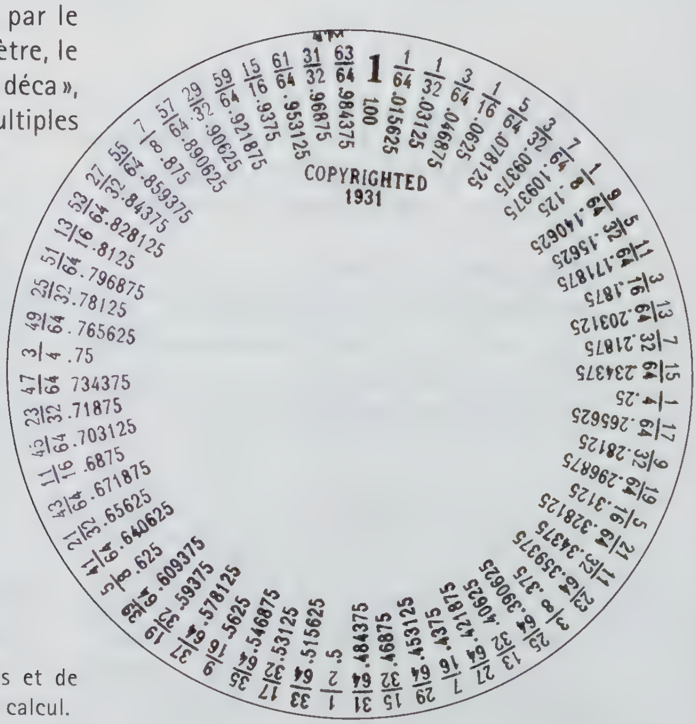
Mais pour que la supériorité du nouveau système soit évidente, il faut enseigner les décimaux et leurs opérations. Alors on dénonce « les fractions qui contrariaient absolument l'art de la numération ». On se félicite « que le génie de la révolution ait renversé toutes ces coutumes nées dans les ténèbres et leur ait substitué le calcul simple et méthodique des décimales ». Et on encourage les « cours d'arithmétique républicaine ». Ainsi la rivalité entre fractions et décimaux devient une rivalité politique !

En 1812, Napoléon, qui a besoin d'hommes pour sa campagne de Russie, cède aux partisans de la tradition : on autorise (par exemple) une toise de 2 mètres divisée en 6 pieds...

En 1816, le roi Louis XVIII, désireux de restaurer l'ancien régime, abandonne l'idée d'échelle décimale pour les poids et les mesures. Ceci conduit à négliger l'enseignement des décimaux au profit des fractions.

La situation se renverse en 1837 : une loi signée par Louis-Philippe, notre dernier roi, abroge la réforme de 1812 et rend le système métrique obligatoire en France. Par la suite, il sera adopté dans beaucoup d'autres pays.

Voilà pourquoi les décimaux, et leurs opérations, sont désormais enseignés dans les écoles élémentaires.



Cohabitation de fractions et de décimaux sur un disque à calcul.

Exercices

CONSOLIDER

Égalités de fractions

1 Simplifier les fractions suivantes.

$a = \frac{8}{12}$ $\quad b = \frac{32}{96}$ $\quad c = \frac{104}{256}$

$d = \frac{18}{33}$ $\quad e = \frac{360}{640}$ $\quad f = \frac{16}{48}$.

2 Simplifier les fractions suivantes.

$a = \frac{28}{60}$ $\quad b = \frac{63}{21}$ $\quad c = \frac{50 \times 3 \times 4}{25 \times 3 \times 5}$

$d = \frac{35}{49}$ $\quad e = \frac{60}{108}$ $\quad f = \frac{1}{1}$.

3 a) Écrire trois fractions égales à $\frac{12}{18}$.

b) Écrire toutes les fractions égales à $\frac{12}{18}$ et dont le dénominateur est compris entre 1 et 16.

4 Dans chaque cas, déterminer si les deux fractions sont égales.

a) $\frac{28}{35}$ et $\frac{32}{40}$ $\quad$ b) $\frac{12}{16}$ et $\frac{24}{18}$ $\quad$ c) $\frac{55}{33}$ et $\frac{10}{6}$

d) $\frac{8}{12}$ et $\frac{10}{15}$ $\quad$ e) $\frac{33}{21}$ et $\frac{11}{3}$ $\quad$ f) $\frac{99}{99}$ et $\frac{3 \times 4}{2 \times 6}$.

5 Réduire au même dénominateur.

a) $\frac{7}{8}$ et $\frac{11}{16}$ $\quad$ b) $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{16}$ $\quad$ c) $\frac{14}{18}$ et $\frac{16}{36}$.

6 Réduire au même dénominateur.

a) $\frac{5}{9}$ et $\frac{2}{27}$ $\quad$ b) $\frac{3}{7}$ et $\frac{40}{49}$ $\quad$ c) $\frac{7}{3}$ et $\frac{8}{9}$.

7 *Vrai ou faux ?*

a) $\frac{1}{4} = 0,25$ $\quad$ b) $\frac{1}{8} = 0,125$ $\quad$ c) $\frac{7}{5} = 1,4$

d) $\frac{1}{20} = 0,5$ $\quad$ e) $\frac{100}{3} = 0,03$ $\quad$ f) $-\frac{1}{5} = 0,2$.

8 Écrire sous forme d'une fraction.

$a = 0,75$ $\quad b = 0,6$ $\quad c = 0,007$

$d = 1,25$ $\quad e = 31,25$ $\quad f = 0,125$.

9 Donner l'écriture décimale de ces fractions.

$a = \frac{12}{100}$ $\quad b = \frac{5}{40}$ $\quad c = \frac{34}{2\,000}$.

Additions et soustractions de fractions

10 Calculer et donner un résultat simplifié.

$a = \frac{1}{9} + \frac{5}{9}$ $\quad b = \frac{4}{5} + \frac{2}{15}$ $\quad c = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

$d = \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$ $\quad e = \frac{7}{12} + \frac{5}{6}$ $\quad f = \frac{0}{9} + \frac{13}{18}$.

11 Calculer et donner un résultat simplifié.

$a = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1\,000}$ $\quad b = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

$c = \frac{3}{125} + \frac{4}{5} + \frac{1}{25}$ $\quad d = \frac{1}{3} + \frac{2}{27} + \frac{4}{9}$.

12 Calculer et donner un résultat simplifié.

$a = \frac{17}{25} - \frac{2}{25}$ $\quad b = \frac{27}{76} - \frac{15}{76}$ $\quad c = \frac{3}{4} - \frac{5}{8}$

$d = \frac{4}{9} - \frac{2}{18}$ $\quad e = \frac{23}{20} - \frac{7}{10}$ $\quad f = \frac{15}{16} - \frac{3}{4}$.

13 Calculer et donner un résultat simplifié.

$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}$ $\quad b = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} - \frac{3}{4}$

$c = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$ $\quad d = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$.

Multiplications de fractions

14 Calculer et donner un résultat simplifié.

$a = \frac{5}{6} \times \frac{4}{7}$ $\quad b = \frac{15}{49} \times \frac{28}{35}$ $\quad c = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

$d = \frac{34}{40} \times \frac{27}{51}$ $\quad e = \frac{8}{45} \times \frac{27}{32}$ $\quad f = \frac{5}{2} \times \frac{7}{35}$.

15 Calculer et donner un résultat simplifié.

$a = \frac{5}{12} \times 3$ $\quad b = \frac{7}{3} \times \frac{1}{3}$ $\quad c = 4 \times \frac{5}{6}$

$d = \frac{6}{7} \times 7$ $\quad e = \frac{0}{8} \times \frac{7}{3}$ $\quad f = \frac{3}{11} \times \frac{11}{3}$.

16 Effectuer. $a = \frac{2}{3} \times \frac{9}{4} \times \frac{8}{10}$

$b = \frac{4}{7} \times \frac{5}{3} \times \frac{14}{25}$ $\quad c = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$.

17 Compléter le tableau.

× 3

$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{9}$		
				10	7

18 Compléter le tableau.

$\times \frac{1}{7}$

$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{28}{3}$		
			$\frac{2}{7}$	0

19 Compléter le tableau.

$\times \frac{4}{3}$

7,5	3	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$

Valeurs approchées de fractions

20 Trouver une valeur approchée à 0,001 près de :

$a = \frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ $\quad b = \frac{3}{11} - \frac{4}{19}$ $\quad c = \frac{2}{17} \times \frac{3}{13}$.

21 a) Trouver une valeur approchée à 0,000 001 près de $\frac{355}{113}$.

b) À quel nombre célèbre cela fait-il penser ?

RÉSULTATS

1 $a = \frac{2}{3}$ $\quad b = \frac{1}{3}$ $\quad c = \frac{13}{32}$

$d = \frac{6}{11}$ $\quad e = \frac{9}{16}$ $\quad f = \frac{1}{3}$.

5 **a)** $\frac{14}{16}$ et $\frac{11}{16}$ **b)** $\frac{12}{16}$ et $\frac{5}{16}$ **c)** $\frac{7}{9}$ et $\frac{4}{9}$.

13 $a = \frac{1}{3}$ $\quad b = 0$ $\quad c = \frac{1}{8}$ $\quad d = \frac{1}{2}$.

14 $a = \frac{10}{21}$ $\quad b = \frac{12}{49}$ $\quad c = \frac{8}{15}$

$d = \frac{9}{20}$ $\quad e = \frac{3}{20}$ $\quad f = \frac{1}{2}$.

18

$\times \frac{1}{7}$

$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{28}{3}$	2	0
$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{7}$	0

SAVOIR FAIRE

Fractions égales ou inégales

22 Simplifier les fractions.

$a = \frac{-2}{4}$ $\quad b = \frac{4}{-6}$ $\quad c = \frac{24}{32}$

$d = \frac{-10}{-12}$ $\quad e = -\frac{25}{125}$ $\quad f = -\frac{-81}{90}$.

23 Simplifier les fractions.

$a = \frac{6-2}{12}$ $\quad b = \frac{25+30}{50}$ $\quad c = \frac{49-7}{14}$

$d = \frac{9-6}{18-12}$ $\quad e = \frac{4+1}{20-10}$ $\quad f = \frac{50 \times 25}{100}$.

24 Simplifier les fractions.

$a = \frac{8 \times 4}{44}$ $\quad b = \frac{3 \times 7}{5-2}$ $\quad c = \frac{5-2}{3 \times 5}$

$d = \frac{33 \div 3}{22}$ $\quad e = \frac{18-27}{6+3}$ $\quad f = \frac{1-11}{11-111}$.

25 Les fractions suivantes sont-elles égales ?

a) $\frac{3}{2}$ et $\frac{6}{4}$ $\quad$ b) $\frac{5}{49}$ et $\frac{85}{833}$ $\quad$ c) $\frac{13}{21}$ et $\frac{11}{14}$

d) $\frac{-7}{12}$ et $\frac{91}{-156}$ $\quad$ e) $\frac{7}{8}$ et $\frac{-14}{16}$ $\quad$ f) $\frac{5}{3}$ et $\frac{6}{10}$.

26 Les fractions suivantes sont-elles égales ?

a) $-\frac{1}{17}$ et $-\frac{17}{289}$ $\quad$ b) $\frac{7-9}{40}$ et $\frac{9-7}{-40}$

c) $\frac{7}{8}$ et $\frac{7+1}{8+1}$ $\quad$ d) $\frac{3}{10}$ et $\frac{3-4}{10-4}$

e) $\frac{5}{13}$ et $\frac{5 \times (-8)}{-13 \times 8}$ $\quad$ f) $\frac{4}{7}$ et $\frac{4-7}{7-4}$.

27 Réduire les fractions suivantes au même dénominateur.

a) $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ $\quad$ b) $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ $\quad$ c) $\frac{-1}{5}$ et $\frac{-1}{7}$

d) $\frac{-3}{10}$ et $\frac{4}{15}$ $\quad$ e) $\frac{8}{21}$ et $\frac{1}{14}$ $\quad$ f) $\frac{7}{30}$ et $\frac{-8}{45}$.

28 Réduire les fractions suivantes au même dénominateur.

a) $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{-4}$ $\quad$ b) $\frac{4}{25}$ et $\frac{4}{15}$ $\quad$ c) $\frac{8}{9}$ et $\frac{7}{12}$

d) $\frac{3}{20}$ et $\frac{4}{21}$ $\quad$ e) $\frac{7}{44}$ et $\frac{8}{33}$ $\quad$ f) $\frac{-13}{27}$ et $\frac{-6}{18}$.

Additions et soustractions

29 Calculer et donner un résultat simplifié.

$a = \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ $\quad b = \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ $\quad c = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$

$d = \frac{2}{9} + \frac{5}{8}$ $\quad e = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ $\quad f = \frac{5}{7} + \frac{6}{8}$.

30 Calculer et donner un résultat simplifié.

$a = \frac{4}{15} + \frac{12}{25}$ $\quad b = \frac{21}{21} + \frac{31}{31}$ $\quad c = \frac{1}{3} + \frac{10}{6}$

$d = \frac{-5}{6} + \frac{4}{7}$ $\quad e = \frac{8}{3} + \frac{1}{-6}$ $\quad f = \frac{-7}{8} + \frac{-1}{4}$.

31 Calculer et donner un résultat simplifié.

$a = \frac{-3}{4} + \frac{1}{4}$ $\quad b = \frac{4}{5} + \frac{-3}{2}$

$c = \frac{2}{5} + \frac{-1}{6}$ $\quad d = \frac{-2}{9} + \frac{5}{8}$

$e = \frac{-4}{15} + \frac{-12}{25}$ $\quad f = \frac{-21}{21} + \frac{-31}{31}$.

32 Écrire les fractions suivantes comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

$\frac{22}{4}$ $\quad \frac{15}{7}$ $\quad \frac{41}{9}$ $\quad \frac{75}{6}$ $\quad \frac{13}{8}$ $\quad \frac{100}{23}$.

Exemple : $\frac{14}{4} = \frac{12+2}{4} = \frac{12}{4} + \frac{2}{4} = 3 + \frac{1}{2}$.

33 Écrire sous forme d'une fraction.

$a = 3 + \frac{4}{5}$ $\quad b = 8 + \frac{2}{3}$ $\quad c = 20 + \frac{2}{7}$

$d = 1 + \frac{4}{9}$ $\quad e = 7 + \frac{3}{4}$ $\quad f = 3 + \frac{1}{7}$.

34 *Vrai ou faux ?*

a) $\frac{1}{1{,}2} + \frac{1}{6} = 1$ $\qquad$ b) $\frac{7}{10} + \frac{7}{15} = \frac{7}{6}$

c) $\frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{3} = 1$ $\qquad$ d) $\frac{7}{13} + \frac{7}{15} = \frac{7}{28}$.

35 Calculer sans oublier de simplifier.

$a = \frac{3}{4} - \frac{2}{3}$ $\quad b = \frac{5}{6} - \frac{5}{7}$ $\quad c = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$

$d = \frac{1}{6} - \frac{1}{9}$ $\quad e = \frac{1}{8} - \frac{5}{12}$ $\quad f = \frac{3}{14} - \frac{1}{10}$.

36 Calculer sans oublier de simplifier.

$a = \frac{8}{3} - \frac{7}{11}$ $\quad b = \frac{6}{7} - \frac{1}{3}$ $\quad c = \frac{10}{21} - \frac{5}{6}$

$d = \frac{-8}{9} - \frac{5}{-9}$ $\quad e = \frac{2}{3} - \frac{-1}{6}$ $\quad f = -\frac{3}{4} - \frac{-7}{-8}$.

37 Calculer sans oublier de simplifier.

$a = \frac{2}{3} - \frac{-3}{4}$ $\quad b = \frac{-3}{4} - \frac{2}{5}$ $\quad c = \frac{-9}{4} - \frac{-3}{2}$

$d = \frac{1}{5} - \frac{-1}{2}$ $\quad e = \frac{-9}{4} - \frac{3}{2}$ $\quad f = \frac{-2}{3} - \frac{-3}{4}$.

38 Écrire sous forme d'une fraction.

$a = 1 - \frac{3}{20}$ $\quad b = 6 - \frac{23}{4}$ $\quad c = 1 - \frac{5}{4}$

$d = 2 - \frac{7}{9}$ $\quad e = 30 - \frac{7}{4}$ $\quad f = 10 - \frac{95}{10}$.

39 Écrire chacune des fractions suivantes comme la différence d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

$a = \frac{3}{7}$ $\quad b = \frac{2}{3}$ $\quad c = \frac{1}{9}$

$d = \frac{5}{6}$ $\quad e = \frac{2}{5}$ $\quad f = \frac{17}{5}$.

Exemple : $\frac{3}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$.

40 *Le bon ordre*
Changer l'ordre des termes, puis calculer.

$a = \frac{4}{7} + \frac{3}{4} + \frac{2}{7} + \frac{5}{4} + \frac{1}{7}$

$b = \frac{5}{12} + \frac{5}{3} + \frac{2}{12} + \frac{2}{3}$

$c = \frac{4}{3} + \frac{3}{5} + \frac{7}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3}$

$d = \frac{5}{2} + \frac{6}{11} + \frac{3}{8} + \frac{7}{2} + \frac{5}{8} + \frac{5}{11}$.

41 *Le bon ordre (bis)*
Modifier l'ordre des termes, puis calculer.

$a = \frac{1}{45} + \frac{2}{45} + \frac{1}{15} + \frac{4}{45} + \frac{1}{9} + \frac{2}{15} + \frac{7}{45} + \frac{8}{45} + \frac{1}{5}$

$b = \frac{1}{28} - \frac{1}{14} + \frac{3}{28} + \frac{1}{7} - \frac{5}{28} + \frac{3}{14} - \frac{1}{4}$.

Multiplications de fractions

42 Calculer sans oublier de simplifier.

$a = \frac{10}{-7} \times \frac{7}{2}$ $\quad b = \frac{5}{3} \times \frac{-9}{2}$

$c = \frac{1}{8} \times \frac{-4}{-2}$ $\quad d = \frac{51}{-15} \times \left(-\frac{60}{17}\right)$

$e = \frac{28}{35} \times \frac{55}{44}$ $\quad f = 0 \times \frac{3}{4}$.

Exercices

43 Calculer en simplifiant le plus possible.

$a = \frac{-2}{3} \times \frac{-9}{4} \times \frac{8}{-10}$ $b = \frac{7}{-4} \times \frac{3}{5} \times \frac{-25}{14}$

$c = \frac{-1}{2} \times \frac{-4}{3} \times \frac{-6}{5}$ $d = \frac{-4}{3} \times \frac{5}{-8} \times \frac{9}{10}$.

44 Calculer.

$a = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)$

$b = \left(\frac{-3}{5}\right) \times \left(\frac{-5}{3}\right) \times \left(\frac{3}{-5}\right) \times \left(\frac{5}{-3}\right)$

$c = \frac{-3}{4} \times \frac{3}{-4} \times \left(-\frac{3}{4}\right)$

$d = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{16}{3}$.

Inverse d'un nombre

45 Calculer l'inverse de :
$a = 40$ $b = -0{,}8$ $c = -3{,}2$
$d = 0{,}016$ $e = \frac{3}{4}$ $f = -\frac{1}{7}$.

46 Calculer à 0,001 près une valeur approchée de l'inverse de :
$a = \frac{12}{5}$ $b = -18$ $c = -0{,}03$.

47 *Somme d'inverses et inverse d'une somme*
Dans chacun des cas suivants, calculer la somme des inverses de x et de y puis l'inverse de la somme de x et de y.
a) $x = 2$ et $y = 5$ **b)** $x = -4$ et $y = -10$
c) $x = \frac{1}{3}$ et $y = 1$ **d)** $x = -\frac{1}{5}$ et $y = \frac{2}{5}$.

48 *Somme d'inverses et inverse d'une somme (bis)*
Même exercice que le précédent avec :
a) $x = 7$ et $y = 3$ **b)** $x = \frac{2}{3}$ et $y = \frac{-4}{3}$
c) $x = -9$ et $y = -4$ **d)** $x = -100$ et $y = 0{,}1$.

Divisions de fractions

49 Mettre les quotients suivants sous forme d'une fraction ou d'un entier.

$a = \frac{4}{7} \div \frac{3}{5}$ $b = \frac{2}{3} \div 2$ $c = \frac{3}{4} \div \frac{3}{4}$

$d = 1 \div \frac{4}{3}$ $e = (-7) \div \frac{42}{5}$ $f = \frac{8}{21} \div \frac{4}{7}$.

50 Même exercice (penser à simplifier).

$a = \frac{2}{3} \div \left(\frac{-7}{5}\right)$ $b = -36 \div \frac{30}{7}$

$c = \left(-\frac{12}{9}\right) \div \left(-\frac{28}{27}\right)$ $d = \frac{34}{51} \div \frac{38}{57}$.

51 Même exercice.

$a = \left(\frac{-8}{5}\right) \div \frac{3}{4}$ $b = 7 \div \left(\frac{-2}{3}\right)$

$c = (-9) \div \left(\frac{-21}{2}\right)$ $d = \left(\frac{-5}{2}\right) \div (-25)$.

52 Trouver une valeur décimale approchée à 0,001 près des quotients suivants.

$a = \frac{3}{2} \div \frac{7}{4}$ $b = \frac{2}{3} \div 6$ $c = 4 \div \frac{3}{5}$.

Inverse et calcul mental

53 *Multiplier par 0,5*

INFORMATION

Multiplier par 0,5, c'est multiplier par $\frac{1}{2}$ qui est l'inverse de 2 ; c'est donc diviser par 2.
Ainsi, pour multiplier mentalement par 0,5, il suffit de diviser par 2.

Calculer mentalement. $a = 24 \times 0{,}5$
$b = 15 \times 0{,}5$ $c = (-6{,}4) \times 0{,}5$ $d = 0{,}36 \times 0{,}5$.

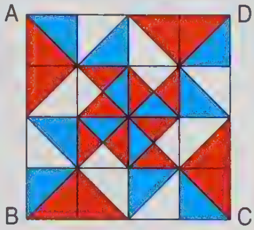
54 *Multiplier par 0,25*
a) Par quelle division peut-on remplacer une multiplication par 0,25 ?
b) Calculer mentalement.
$a = 32 \times 0{,}25$ $b = 22 \times 0{,}25$
$c = (-1{,}6) \times 0{,}25$ $d = 0{,}4 \times 0{,}25$.

55 *Diviser mentalement*
a) Quels sont les inverses de :
0,5 ? 0,25 ? 0,1 ? 0,01 ?
b) En déduire des méthodes pour diviser mentalement par 0,5 ; par 0,25 ; par 0,1 ; par 0,01.
c) Calculer mentalement.
$a = 7 \div 0{,}5$ $b = 12 \div 0{,}25$
$c = \frac{3}{2} \div 0{,}5$ $d = \frac{7}{2} \div 0{,}25$
$e = 100 \div 0{,}1$ $f = 0{,}2 \div 0{,}1$
$g = 0{,}25 \div 0{,}01$ $h = 0{,}6 \div 0{,}01$.

Mini-problèmes

56 *Magnum*
Il faut la moitié d'un magnum pour remplir une bouteille de $\frac{3}{4}$ de litre.
Quelle est la capacité d'un magnum ?

57 *Bleu, blanc, rouge*
a) Quelle fraction du carré ABCD est coloriée en bleu ? en blanc ? en rouge ?
b) Quel résultat doit-on trouver en additionnant ces trois fractions ?



58 *La cafetière qui fuit*
Ma cafetière contenait un litre de café. Quelqu'un en a bu les $\frac{2}{5}$ quand je dormais et les $\frac{3}{7}$ pendant que je téléphonais.
Quelle fraction de litre m'en reste-t-il ?

59 *Sur une cassette*
Sur une cassette de 60 min, les $\frac{7}{12}$ de la face A et les $\frac{2}{5}$ de la face B ont été enregistrés.
Sur chaque face, combien reste-t-il de temps pour d'autres enregistrements ?

60 *Dans une cuve*
D'une cuve pleine de fioul, on a soutiré d'abord $\frac{1}{6}$ puis $\frac{1}{5}$ de la contenance totale.
Il reste alors 570 litres.
Quelle est la capacité de la cuve ?

61 *Le fût*

On a transvasé un fût de jus de raisin dans 208 bouteilles de $\frac{3}{4}$ de litre.
Calculer la contenance du fût.

62 *Le sac*
Dans un sac qui pèse $\frac{1}{8}$ de kilogramme, on a mis une quantité de café du Brésil pesant 24 fois le poids du sac.
Quel est le poids de l'ensemble ?

63 *Les deux livres*
J'ai deux livres. Le premier pèse $\frac{3}{4}$ de kg.
Le second pèse les $\frac{7}{5}$ du poids du premier.
Combien pèsent-ils ensemble ?

64 *Assoiffés !*
Au retour de leur promenade à vélo, les cinq amis ont bu à eux tous :
- 4 bouteilles de $\frac{1}{3}$ de litre de jus de fruit ;
- $\frac{2}{3}$ d'un litre d'eau.

Quelle est la quantité de boisson bue par chacun d'eux (en supposant qu'ils en aient absorbé la même quantité) ?

Mise en équation

Pour résoudre les exercices de cette série (65 à 72), on pourra appeler x le nombre cherché et mettre les problèmes en équations.

65 Trouver le nombre tel que son tiers augmenté de son quart donne 84.

66 Trouver le nombre qui, diminué de son tiers est égal à son triple diminué de 7.

67 Trouver le nombre dont la moitié plus le tiers plus le sixième donne 2 001.

68 *Le mille-pattes et l'araignée*
Une araignée (qui a 8 pattes) possède les $\frac{4}{21}$ du nombre de pattes d'un mille-pattes.
Combien le mille-pattes a-t-il de pattes ?

69 *De part en part*
Les $\frac{2}{3}$ des $\frac{9}{14}$ d'une somme d'argent font 300 euros. Quelle est cette somme ?

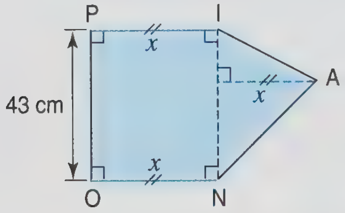
70 *Un réservoir*
Un réservoir d'essence est vide aux $\frac{5}{6}$. Il faut ajouter 28 litres pour qu'il soit plein aux $\frac{3}{4}$.
Quelle est sa contenance ?

71 *En avion*

Un avion décolle ; les $\frac{2}{3}$ des sièges sont occupés. Après une escale, on compte 21 passagers supplémentaires et l'avion est alors plein aux trois quarts. Calculer le nombre de places assises de l'avion.

72 *Aire de PIANO*

L'aire du polygone PIANO est 1 161 cm^2.
Observer la figure et trouver la largeur x du rectangle PINO.



Quotients égaux et équations

73 Résoudre les équations.

a) $5 = \frac{4}{x}$ b) $3{,}1 = \frac{x}{5}$ c) $\frac{4}{3} = \frac{x}{2}$.

74 Résoudre les équations.

a) $\frac{6{,}2}{9{,}3} = \frac{x}{3}$ b) $\frac{2{,}5}{x} = \frac{5}{4}$ c) $\frac{1}{x} = \frac{8}{3}$.

RÉSULTATS

23 $a = \frac{1}{3}$ $b = \frac{11}{10}$ $c = 3$

$d = \frac{1}{2}$ $e = \frac{1}{2}$ $f = \frac{25}{2}$.

25 Égales : **a)** **b)** et **d)**.

30 $a = \frac{56}{75}$ $b = 2$ $c = 2$

$d = -\frac{11}{42}$ $e = \frac{5}{2}$ $f = \frac{-9}{8}$.

54 **a)** On multiplie par 0,25 en divisant par 4.
b) $a = 8$ $b = 5{,}5$ $c = -0{,}4$ $d = 0{,}1$.

65 $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 84$. On trouve $x = 144$.

68 Soit x le nombre de pattes du mille-pattes. $\frac{4}{21} \times x = 8$. On trouve $x = 42$.

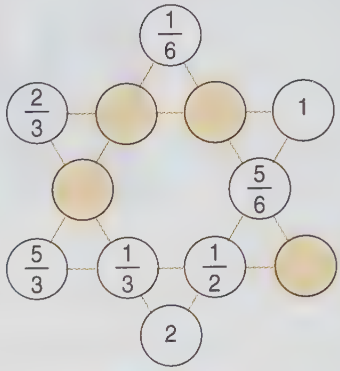
CHERCHER

Figures magiques

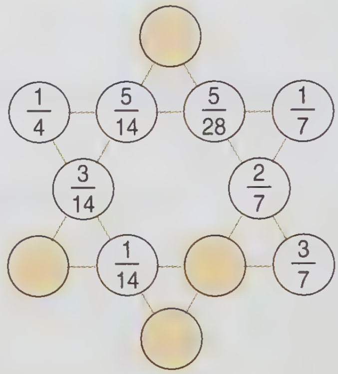
75 *Étoiles magiques*

Compléter les étoiles magiques (la somme des fractions sur chaque ligne est constante).

a)



b)



76 *Carrés magiques*

Compléter ces carrés magiques (voir définition dans le **Mini-dico**).

a)

$\frac{2}{15}$		
	$\frac{1}{6}$	
$\frac{4}{15}$		$\frac{1}{5}$

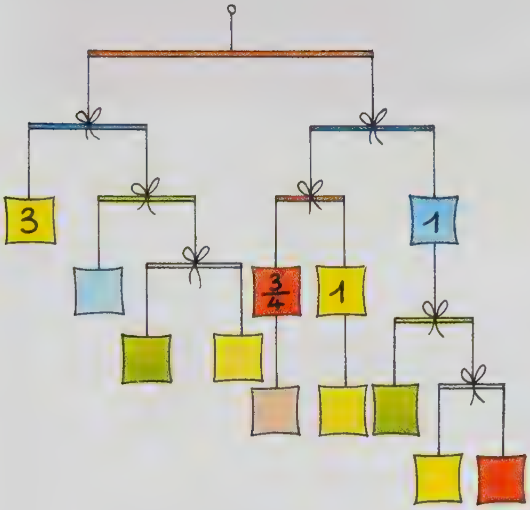
b)

		$\frac{1}{3}$
		$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$

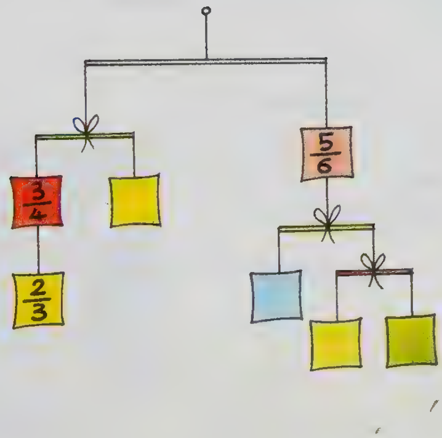
Mobiles en équilibre

Les barres horizontales sont suspendues par le milieu. Elles sont donc en équilibre lorsque les masses totales suspendues aux deux extrémités sont égales.
On suppose que les masses des barres et des ficelles sont négligeables. Les masses suspendues sont des fractions de kg.
Trouver les masses manquantes (exercices 77 et 78).

77 *Premier mobile*



78 *Second mobile*



Problèmes divers

79 *Cargo et porte-conteneurs*
a) Un cargo est un bateau qui transporte les marchandises en vrac. Il met 7 jours pour traverser l'Atlantique Nord et, à chaque arrêt, il faut 5 jours pour le décharger et le recharger.
Combien le cargo peut-il effectuer d'allers et retours sur l'Atlantique Nord en 360 jours ?
b) Un porte-conteneurs est un bateau qui transporte les marchandises dans des grandes caisses appelées conteneurs.
Il met 6 jours pour traverser l'Atlantique Nord et, à chaque arrêt, 16 heures suffisent pour le décharger et le recharger.
Combien le porte-conteneurs peut-il effectuer d'allers et retours sur l'Atlantique Nord en 360 jours ?

80 *Part de tarte*
Un quart d'une tarte a déjà été mangé.
Antonin prend les $\frac{2}{3}$ du reste de la tarte.
a) Quelle fraction de tarte a-t-il pris ?
b) Combien pèse la part d'Antonin sachant que la tarte entière pesait 720 g ?

81 *Les chansons à la radio*
Les $\frac{3}{4}$ des titres diffusés par ma radio préférée sont des chansons. Parmi ces chansons les $\frac{2}{5}$ sont anglaises. On suppose que tous les titres ont la même durée.
a) Quelle fraction du temps d'émission occupent les chansons anglaises ?
b) Sur une heure d'émission, combien de temps (en moyenne) occupent les chansons anglaises ?

82 Réduire les fractions suivantes au même numérateur : $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{7}$.

Problèmes du grenier

83 *Petit commerce* (problème de 1883)
J'avais acheté $\frac{5}{6}$ de mètre de drap que j'ai payé à raison de 27 francs le mètre et j'ai cédé les $\frac{2}{3}$ de mon achat à un de mes amis.
Combien m'en reste-t-il et quel a dû être le prix de la quantité cédée ?

84 *La couverture* (problème de 1939)
Votre mère a une couverture de 9,60 m de tour. La largeur est les $\frac{5}{7}$ de la longueur.
Trouvez-en les dimensions.

COUPS DE POUCE

79 b) 16 heures = $\frac{16}{24}$ jour.

80 a) Antonin prend les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$;
c'est-à-dire $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$.

82 Trouver un multiple commun aux numérateurs.

84 Soit x la longueur (en mètres).

3 Puissances

Activités

1 Puissances de 10 : présentation

A. Exposants positifs

1. Compléter en suivant le modèle.

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\underbrace{000}_{3\text{ zéros}}$

On dit que 10^3 est **une puissance de 10** et que 3 est l'**exposant**

• $10^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$ • $10^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

2. Écrire en français les puissances de dix suivantes.

10^2 10^5 10^7 10^{10}.

3. Écrire sous forme de puissance de 10 :

un million cent dix mille un milliard.

4. On retiendra la règle suivante.

RÈGLE

• **Si** n est un entier positif **alors** $10^n = 1\underbrace{0 \ldots 0}_{n\text{ zéros}}$.

• **En particulier si** $n \geqslant 2$ **alors** $10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n\text{ facteurs}}$.

Que vaut : 10^1 ? et 10^0 ?

B. Exposants négatifs

1. On a vu que $10^3 = 1\underbrace{000}_{3\text{ zéros après le 1}}$ d'où l'idée de poser $10^{-3} = \underbrace{0.00}_{3\text{ zéros avant le 1}}1$.

De la même manière, compléter :

$10^{-2} = \ldots\ldots$ $10^{-4} = \ldots\ldots$ $10^{-6} = \ldots\ldots$ $10^{-1} = \ldots\ldots$ $10^{-5} = \ldots\ldots$.

2. Écrire sous forme de puissance de 10 :

un dixième un cent-millième un centième un milliardième.

3. Écrire en français : 10^{-3} 10^{-4} 10^{-6}.

4. Compléter en suivant le modèle. $\dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0.01 = 10^{-2}$

• $\dfrac{1}{10^3} = \ldots\ldots$ • $\dfrac{1}{10^5} = \ldots\ldots$ • $\dfrac{1}{10^4} = \ldots\ldots$.

Compléter : 10^{-2} est l'.............. de 10^2 ; 10^{-4} est l'.............. de 10^4 ; 10^{-n} est .... de 10^n.

5. On retiendra la règle suivante (à compléter).

RÈGLE

- **Si** n est un entier positif **alors** $10^{-n} = \underbrace{0, \ldots 0}_{n \text{ zéros}} 1 = \dfrac{1}{\ldots\ldots}$
- 10^{-n} et 10^n sont .... l'un de l'autre.

2 Puissances de 10 : opérations (1)

Dans cette activité m et n désignent deux entiers positifs.

A. Produit

1. Compléter en suivant le modèle.

$10^3 \times 10^2 = 1\,000 \times 100 = 100\,000 = 10^5$

- $10^4 \times 10^2 = \ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots\ldots$
- $10^2 \times 10^1 = \ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots\ldots$
- $10^3 \times 10^3 = \ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots\ldots$
- $10^5 \times 10^2 = \ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots\ldots$.

2. Deviner la formule : $10^m \times 10^n = \ldots\ldots$

3. Exemple : ordinateurs
Calculer le nombre d'additions effectuées par 10 ordinateurs pendant 1 000 s, chaque ordinateur effectuant 100 millions d'additions par seconde.

Supercalculatrice CRAY XMP18.

B. Quotient

1. Compléter en suivant le modèle. $\dfrac{10^5}{10^2} = \dfrac{100\,0\cancel{0}\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}} = 1\,000 = 10^3$

- $\dfrac{10^6}{10^4} = \ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots$
- $\dfrac{10^4}{10^2} = \ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots$
- $\dfrac{10^5}{10^1} = \ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots$
- $\dfrac{10^6}{10^3} = \ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots$.

2. Deviner la formule : $\dfrac{10^m}{10^n} = \ldots\ldots$

3. Exemple : utopie
Un prince partage dix milliards d'euros entre un million de ces sujets.
Combien chacun d'eux reçoit-il ?

C. Puissance d'une puissance

1. Compléter en suivant le modèle. $(10^3)^2 = 10^3 \times 10^3 = 10^6$

- $(10^4)^2 = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$
- $(10^3)^4 = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$
- $(10^5)^2 = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$
- $(10^2)^4 = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$.

2. Deviner la formule : $(10^m)^n = \ldots\ldots$

3. Exemple : astronomie
D'après certains astronomes, dans un cube centré au Soleil et de 10^{15} km de côté on compterait une centaine d'étoiles.
Calculer en km^3 le volume de ce gros cube.

Activités

3 Puissances de 10 : opérations (2)

INFORMATION

Les mathématiciens ont démontré que les formules

$10^n \times 10^m = 10^{n+m}$ $\quad \dfrac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$ et $(10^n)^m = 10^{n \times m}$

sont vraies pour des exposants positifs ou négatifs.

1. Compléter.

$a = 10^{-3} \times 10^{-2} = \ldots$ $\quad b = 10^5 \times 10^{-3} = \ldots$ $\quad c = 10^4 \times 10^{-6} = \ldots$ $\quad d = 10^3 \times 10^{-3} = \ldots.$

$e = \dfrac{10^3}{10^4} = \ldots\ldots$ $\quad f = \dfrac{10^{-7}}{10^{-3}} = \ldots\ldots$ $\quad g = \dfrac{1}{10^{+3}} = \ldots\ldots$ $\quad h = \dfrac{10^{-2}}{10^3} = \ldots\ldots$

$i = (10^2)^3 = \ldots\ldots$ $\quad j = (10^{-4})^{-3} = \ldots\ldots$ $\quad k = (10^{-2})^2 = \ldots\ldots$ $\quad l = (10^2)^{-3} = \ldots\ldots$

2. Exemples de calcul

Quelle est la hauteur en cm d'un paquet de 10000 feuilles, chacune ayant une épaisseur de 10^{-2} cm ?

Un virus de 10^{-7} m de diamètre est combien de fois plus petit qu'une cellule de 10×10^{-6} m de diamètre ?

Combien y a-t-il de grains de sable dans un quintal de sable, chaque grain pesant, en moyenne, 10^{-1} mg ?

4 Sur l'écran noir de ma calculatrice

A. De la calculatrice à la page blanche

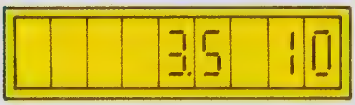
1. Lire le paragraphe 3 de la partie « Outils » page 51.

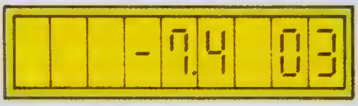
2. Les calculatrices affichent les résultats sous une forme voisine de la **notation scientifique**.

Donner la notation scientifique du nombre représenté à l'écran.

a) 

b) 

c) 

d) 

3. Écrire les nombres sous forme décimale dans les cas **b)** et **d)**.

B. De la page à la calculatrice

Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice les nombres suivants :

a) $4{,}18 \times 10^{41}$ $\quad$ **b)** $-3{,}14 \times 10^{12}$ $\quad$ **c)** $1{,}9 \times 10^{-19}$ $\quad$ **d)** 10^{16}.

C. Utilisation d'une touche spéciale

1. Trouver la touche qui permet de calculer 7×10^4 en tapant :

[7] [?] [4] [=]

2. Calculer, en utilisant la touche précédente,

$a = 2 \times 10^{-3}$ $\quad b = -5 \times 10^3$ $\quad c = -6 \times 10^{-1}$ $\quad d = 981 \times 10^{-2}$.

5 Puissances d'un nombre relatif

Dans cette activité, a et b sont des nombres relatifs non nuls.

A. Expériences

1. Compléter en suivant le modèle. $3^4 \times 3^2 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3) = 3^6$

- $2^3 \times 2^2 = (\ldots\ldots\ldots\ldots) \times (\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots$
- $(-4)^2 \times (-4)^4 = (\ldots\ldots\ldots\ldots) \times (\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots$
- $a^3 \times a^2 = (\ldots\ldots\ldots\ldots) \times (\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots$.

2. Compléter en suivant le modèle.

$$\frac{2^5}{2^2} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2} = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

- $\dfrac{3^4}{3^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ • $\dfrac{(1{,}5)^5}{(1{,}5)^3} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ • $\dfrac{a^6}{a^4} = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

3. Compléter en suivant le modèle.

$$(2 \times 4)^3 = (2 \times 4) \times (2 \times 4) \times (2 \times 4) = (2 \times 2 \times 2) \times (4 \times 4 \times 4) = 2^3 \times 4^3$$

- $(1{,}5 \times 1{,}7)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ • $(7 \times 10)^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ • $(a \times b)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

B. Conclusion

Compléter directement, sans détailler les étapes intermédiaires.

- $a^3 \times a^5 = \ldots\ldots$ $a^2 \times a^1 = \ldots\ldots$ $a^7 \times a^4 = \ldots\ldots$ $a^3 \times a^3 = \ldots\ldots$
- $\dfrac{a^6}{a^4} = \ldots\ldots$ $\dfrac{a^8}{a^5} = \ldots\ldots$ $\dfrac{a^2}{a^2} = \ldots\ldots$ $\dfrac{a^4}{a^3} = \ldots\ldots$
- $(a \times b)^2 = \ldots\ldots$ $(a \times b)^3 = \ldots\ldots$ $(a \times b)^4 = \ldots\ldots$ $(a \times b)^5 = \ldots\ldots$.

C. Cas général

1. Exposant négatif

Soit n un entier positif. On a vu que 10^{-n} est l'inverse de 10^n.
On a de même :

DÉFINITION

a^{-n} est l'inverse de a^n, c'est-à-dire : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Combien valent : 2^{-4} 5^{-2} $(-4)^{-1}$ $0{,}2^{-1}$ 1^{-3} $(-1)^{-5}$?

2. Exposant nul. De même que l'on a $10^0 = 1$ on pose : $a^0 = 1$.

Compléter. $3^0 = \ldots\ldots$ $5^0 = \ldots\ldots$ $(-7)^0 = \ldots\ldots$ $4{,}3^0 = \ldots\ldots$

3. Les mathématiciens ont démontré que les formules sur les puissances de 10 restent vraies pour les puissances de nombres relatifs non nuls.
Compléter directement (donner le résultat sous forme d'une puissance).

- $2^6 \times 2^{-4} = \ldots$ $a^{-5} \times a^3 = \ldots$ $2{,}5^2 \times 2{,}5^{-7} = \ldots$ $(-3)^4 \times (-3)^2 = \ldots$
  $a^5 \times a^{-5} = \ldots$ $6^{-3} \times 6^2 = \ldots$ $(-5)^8 \times (-5)^{-6} = \ldots$ $9^{-2} \times 9^{-4} = \ldots$.
- $\dfrac{4^3}{4^5} = \ldots\ldots$ $\dfrac{a^9}{a^{-2}} = \ldots\ldots$ $\dfrac{7^{-2}}{7^{-5}} = \ldots\ldots$ $\dfrac{a^{-2}}{a^3} = \ldots\ldots$.
- $(3 \times a)^{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$.
- $(a \times b)^{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$.
- $(a \times b)^{-3} = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

Activités

6 Découvrez votre calculatrice

A. La touche « puissance »

1. À l'aide de la calculatrice, calculer :

2^3 $(-5)^4$ $(-4)^5$ $0{,}3^6$ $(0{,}5)^{+3}$ 15^0.

2. Deviner le résultat affiché par la calculatrice dans les 2 cas suivants.

$\boxed{5}\ \boxed{\text{EE}}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$ $\boxed{5}\ \boxed{x^y}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$

$\boxed{x^y}$ ou $\boxed{\wedge}$ sur certaines calculatrices

B. Quelques calculs

Voici un texte.

> À l'aide de la calculatrice, effectuer les calculs suivants :
> $a = 36^{15}$ $b = (0{,}14)^{18}$ $c = (6{,}02 \times 10^{23}) \times 2{,}1$.

Pour chaque cas :

1. écrire une suite de touches permettant d'obtenir le résultat ;
2. effectuer le calcul à la calculatrice ;
3. donner un résultat approché en notation scientifique.

C. La touche « inverse »

1. Compléter le tableau suivant en utilisant :

– les touches $\boxed{\frac{1}{x}}$ ou $\boxed{1}\ \boxed{\div}\ x$ pour la 1^{re} ligne ;

– les touches $\boxed{x^{-1}}$ ou $\boxed{x^y}$ pour la 2^e ligne.

x	2	– 4	5	0,125	– 10	6,25	0,3125	–78,125	7
$\frac{1}{x}$									
x^{-1}									

2. Compléter.

> Pour tout nombre x non nul, x^{-1} est l'............... .
>
> D'où $x^{-1} = \frac{1}{\dots\dots}$ et $x^{-1} \times x = \dots\dots$.

3. Donner trois façons différentes de calculer $12{,}5^{-1}$ avec la calculatrice (écrire les suites de touches utilisées).

D. La touche « carré »

Pour calculer 7^2, on peut taper $\boxed{7}\ \boxed{x^y}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$. Mais il y a mieux !

Écrire une suite de touches (ne comportant pas $\boxed{x^y}$) permettant de calculer : $1{,}7^2$ $(-3{,}1)^2$ 3^4 6^8 5^{16} 4^6.

E. Les limites de la machine

1. Quel est le plus grand nombre affichable à l'écran de la calculatrice ?
2. Taper 47^{60} sur la calculatrice. Que remarque-t-on ? Expliquer.
3. Calculer 10^{-100}. Essayer d'expliquer le résultat affiché.
4. Trouver le plus grand nombre entier n tel que la calculatrice puisse calculer une valeur approchée de n^n.

7 De Lascaux à Picasso

Pour obtenir des peintures de bonne qualité, les artistes peintres utilisent des recettes dont ils gardent parfois le secret.

Peintures rupestres à Lascaux, environ 17000 av. J.-C.

Picasso (1881-1973), *L'Arlequin à la guitare*, 1918, coll. Berggruen.

Pour cela, ils broient des pigments : le rôle du broyage étant d'augmenter le pouvoir colorant des pigments... et voici pourquoi.
Imaginons un cube de 1 cm de côté (c'est le pigment de départ), qu'on divise en petits cubes de 1 micromètre de côté (1 μm = 10^{-6} m).
1. Combien obtient-on de ces petits cubes ?
2. Calculer l'aire d'un de ces petits cubes, puis l'aire de tous ces petits cubes, exprimée en m^2.
3. Le broyage du cube de départ a pour effet d'en multiplier l'aire.
Calculer l'aire du cube de départ en m^2.
Par combien cette aire a-t-elle été multipliée ?

8 Spécial compétition

A. Quelle somme !
(Tournoi mathématique de St-Michel-en-L'Herm, 1996)
Quelle est la somme des chiffres de $10^{1996} - 1996$?

B. Coupe au carré (Mathématiques sans frontières, Alsace)
Julien est un garçon surprenant : il ne sait pas faire une multiplication, mais il connaît les carrés des entiers de 1 à 100.
Julien doit calculer le produit 85 × 135. Il dessine alors un rectangle dont les dimensions sont 85 mm et 135 mm. Il trace dans ce rectangle le plus grand carré possible, fait de même dans le rectangle restant et ainsi de suite... Il obtient ainsi huit carrés.
Dessiner la figure faite par Julien. Écrire le nombre 85 × 135 comme la somme de huit carrés : $85 \times 135 = 85^2 + \dots$.

C. La plage de Syracuse (Kangourou 1993)
Les grains de sable de la plage de Syracuse sont fins, puisqu'il en faut 10 pour faire un volume de 1 mm^3. Il y a du sable sur une épaisseur de 1 m, la plage fait 50 m de large sur 2 km de long.
Quel est l'ordre de grandeur du nombre de grains de sable ?
[A] 10^{10} [B] 10^{13} [C] 10^{15} [D] 10^{17} [E] 10^{21}.

D. La moitié (Kangourou 1993)
Quelle est la moitié de 2^{98} ?
[A] 2^{99} [B] 2^{97} [C] 2^{49} [D] 2^{48} [E] 1^{49}.

Activités

Outils

Puissances ; notation scientifique

1 Puissances de 10

DÉFINITION

Soit n un entier positif, on a :

- $10^n = 1\underbrace{0 \dots 0}_{n \text{ zéros}}$ (n est l'exposant)
- $10^{-n} = \underbrace{0{,}0 \dots 0}_{n \text{ zéros}}1.$ ($-n$ est l'exposant)

EXEMPLES

$10^3 = 1\,000 \quad 10^6 = 1\,000\,000 \quad 10^1 = 10$

$10^0 = 1 \quad 10^9 =$ un milliard

$10^{-3} = 0{,}001 =$ un millième

$10^{-6} = 0{,}000\,001 =$ un millionième.

PROPRIÉTÉ

Soit n un entier tel que $n \geqslant 1$, on a :

- $10^n = \underbrace{10 \times \dots \times 10}_{n \text{ facteurs}}$
- 10^{-n} est l'inverse de 10^n : $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}$.
- $10^0 = 1$.

PROPRIÉTÉ

Soit n et m des entiers relatifs, on a :

- $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$
- $\dfrac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$
- $(10^n)^m = 10^{n \times m}$.

EXEMPLES

- $10^2 \times 10^5 = 10^7 \qquad 10^{-3} \times 10^{-1} = 10^{-4}$

  $10^{-2} \times 10^6 = 10^{-2+6} = 10^4$

- $\dfrac{1}{10^3} = 10^{-3} \qquad \dfrac{1}{10^{-5}} = 10^5$

  $\dfrac{10^5}{10^3} = 10^5 \times \dfrac{1}{10^3} = 10^5 \times 10^{-3} = 10^2$

  ou bien

  $\dfrac{10^5}{10^3} = 10^{5-3} = 10^2$

- $(10^2)^3 = 10^6 \qquad (10^{-5})^2 = 10^{-10}$.

2 Puissances d'un nombre non nul

A. Exposant positif

Soit a un nombre relatif. On pose :

- $a^4 = a \times a \times a \times a$
- $a^9 = \underbrace{a \times \dots \times a}_{9 \text{ facteurs}}$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$.

a^2 se lit « a au carré »

a^3 se lit « a au cube »

a^4 se lit « a puissance quatre ».

EXEMPLES

$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

$(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6) = -216$

$3^7 = \underbrace{3 \times \dots \times 3}_{7 \text{ facteurs}} = 2\,187$

$(-3)^0 = 1 \qquad (2{,}3)^1 = 2{,}3.$

B. Exposant négatif

Soit a un nombre relatif non nul, alors :

- a^{-1} est l'inverse de a : $a^{-1} = \frac{1}{a}$
- a^{-3} est l'inverse de a^3 : $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$
- a^{-8} est l'inverse de a^8 : $a^{-8} = \frac{1}{a^8}$.

Exemples

$4^{-1} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$

$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -0{,}125.$

C. Propriétés (sur des exemples)

Soit a et b deux nombres relatifs non nuls, on a :

- $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$
  $a^{-4} \times a^7 = a^{-4+7} = a^3$
  $a^{-2} \times a^{-1} = a^{-2+(-1)} = a^{-3}$
- $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$
  $\frac{a^7}{a^4} = a^{7-4} = a^3$
  $\frac{a^{-2}}{a^3} = a^{-2-3} = a^{-5}$
- $(ab)^2 = a^2 \times b^2$
  $(ab)^3 = a^3 \times b^3$.

Exemples

- $3^4 \times 3^2 = 3^{4+2} = 3^6 = 729$
  $9^5 \times 9^{-3} = 9^{5-3} = 9^2 = 81$
  $(2)^{-6} \times (2)^5 = (2)^{-1} = \frac{1}{2}$
  $(-4)^{-2} \times (-4)^5 = (-4)^{-2+5} = (-4)^3 = -64$
- $\frac{7^5}{7^3} = 7^{5-3} = 7^2 = 49$
  $\frac{2^{12}}{2^{15}} = 2^{12-15} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
- $(5 \times 10^{-3})^2 = 5^2 \times (10^{-3})^2 = 25 \times 10^{-6}$.

3 Notation scientifique : exemples

Un nombre décimal peut s'écrire de plusieurs façons.

Exemples

$a = 0{,}004\,18 = 0{,}041\,8 \times 10^{-1} = 0{,}418 \times 10^{-2} = 4{,}18 \times 10^{-3} = 418 \times 10^{-5}$

$b = -784\,300 = -78\,430 \times 10^1 = -7\,843 \times 10^2 = -7{,}843 \times 10^5$.

Parmi toutes ces écritures, on distingue la **notation scientifique** obtenue en plaçant la virgule juste après le premier chiffre autre que 0.

Ainsi la **notation scientifique** de a est : $4{,}18 \times 10^{-3}$. Et celle de b est : $-7{,}843 \times 10^5$.

Exemples — Calculs avec des puissances

1 Une bactérie à l'aise

ÉNONCÉ

Une bactérie serait à l'aise dans un cube de $4{,}5 \times 10^{-3}$ cm de côté.

a/ Calculer l'aire totale A de ce cube, en cm^2. Donner le résultat en notation scientifique.

b/ Calculer le volume V du cube, en cm^3. Donner le résultat en notation scientifique.

Stratégie

a/ L'aire totale d'un cube de côté a est égale à 6 fois l'aire d'une face, soit $6a^2$.

b/ Le volume d'un cube de côté a est le cube de a, soit a^3.

Solution

a/ L'aire du cube est :

$$A = 6 \times (4{,}5 \times 10^{-3})^2$$
$$= 6 \times 4{,}5^2 \times (10^{-3})^2$$
$$= 6 \times 20{,}25 \times 10^{-6}$$
$$= 121{,}5 \times 10^{-6} \text{ cm}^2.$$

En notation scientifique :

$$A = 1{,}215 \times 10^{-4} \text{ cm}^2.$$

b/ Le volume du cube est :

$$V = (4{,}5 \times 10^{-3})^3$$
$$= (4{,}5)^3 \times (10^{-3})^3$$
$$= 91{,}125 \times 10^{-9} \text{ cm}^3.$$

En notation scientifique :

$$V = 9{,}1125 \times 10^{-8} \text{ cm}^3.$$

[illegible]

On applique les formules du cours :

$$(ab)^2 = a^2 \times b^2$$

et

$$(10^m)^n = 10^{mn}.$$

Un seul chiffre avant la virgule pour la notation scientifique.

On applique les formules du cours :

$$(ab)^3 = a^3 \times b^3$$

et

$$(10^m)^n = 10^{mn}.$$

C'est vraiment un petit cube !

2 Des calculs à l'aise

ÉNONCÉ

Mettre sous la forme de puissance d'un nombre les expressions suivantes :

- $a = 5^4 \times 5^{-9} \times 5^{-3}$
- $b = \dfrac{6^2 \times 6^{-3} \times 6}{6^3 \times 6^{-2}}$
- $c = (7^3 \times 7^5)^2$.

Stratégie

Appliquer les formules du cours.

Solution

- $a = 5^4 \times 5^{-9} \times 5^{-3}$
  $= 5^{4-9-3} = 5^{4-12} = 5^{-8}$
- $b = \dfrac{6^2 \times 6^{-3} \times 6}{6^3 \times 6^{-2}}$
  $= \dfrac{6^{2-3+1}}{6^{3-2}} = \dfrac{6^0}{6^1} = \dfrac{1}{6} = 6^{-1}$
- $c = (7^3 \times 7^5)^2 = (7^8)^2 = 7^{16}$.

[illegible]

Car $6^0 = 1$ et $6^1 = 6$.

Exercices

CONSOLIDER

1 *Multiplication par 10 ; 100 ; 1 000 ...*
Calculer mentalement.
a) $2{,}5 \times 100$ b) $-0{,}31 \times 1\,000$
c) $0{,}1 \times 10$ d) $-600 \times 10\,000$
e) $1\,000 \times 0{,}001$ f) $31\,415{,}9 \times 0{,}000\,1$.

2 *Division par 10 ; 100 ; 1 000 ...*
Calculer mentalement.
a) $1\,732 \div 1\,000$ b) $7{,}07 \div 100$
c) $-0{,}4 \div 10$ d) $-13\,000 \div 100$
e) $0{,}01 \div 100$ f) $1 \div 10\,000$.

3 *Multiplication par 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ...*
Calculer mentalement.
a) $19\,980 \times 0{,}1$ b) $271 \times 0{,}01$
c) $0{,}01 \times 0{,}1$ d) $1\,000 \times 0{,}001$
e) $-0{,}31 \times 0{,}01$ f) $0{,}1 \times 0{,}1$.

4 *Division par 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ...*
Calculer mentalement. (Diviser par 0,1 ; 0,01... revient à multiplier par 10 ; 100...)
a) $39{,}45 \div 0{,}01$ b) $-141{,}8 \div 0{,}1$
c) $1 \div 0{,}000\,1$ d) $0{,}418 \div 0{,}1$
e) $100 \div 0{,}01$ f) $0{,}001 \div 0{,}001$.

5 *Inverse*
Donner l'inverse des nombres suivants.
2 10 5 100 -64
3 7 0,1 $-0{,}001$ -1.

6 *Marions-les*
Dans la liste suivante, regrouper deux par deux les nombres qui sont inverses l'un de l'autre.
4 0,1 20 10 0,25 0,01
100 0,05 -2 -8 $-0{,}5$ $-0{,}125$.

7 *Sans calculatrice*
On sait que 3,125 est l'inverse de 0,32.
a) Calculer sans calculatrice le produit $3{,}125 \times 0{,}32$.
b) En déduire, sans utiliser la calculatrice : l'inverse de 0,32 ; de 3,2 ; de 32 ; de 0,032 puis celui de 31,25.

8 *Sans calculatrice (bis)*
On sait que 6,25 est l'inverse de 0,16 ;
on sait que 0,8 est l'inverse de 1,25.
En déduire, sans l'aide de la calculatrice, le résultat de :
$6{,}25 \times 0{,}8 \times 0{,}16 \times 1{,}25$.

SAVOIR FAIRE

Puissances de 10

9 Écrire sous forme de puissances de 10.
a) 10 000 1 000 1 0,1
b) 10 0,001 0,000 000 1 100.

10 Écrire en toutes lettres les nombres suivants (exemple : $10^6 =$ un million).
a) 10^9 10^{-1} 10^7 10^{-3} 10^5
b) 10^3 10^2 10^4 10^{-2} 10^{-4}.

11 Écrire sous forme d'une puissance de 10.
a) $10^{-3} \times 10^{-5}$ $10^7 \times 10^9$ $10^{-1} \times 10^{-3}$
b) $10^5 \times 10^{-7}$ $10^{-3} \times 10$ $10^0 \times 10^3$.

12 Même exercice.
a) $\dfrac{10^5}{10^{-3}}$ $\dfrac{10^3}{10^0}$ $\dfrac{10^9}{10^7}$ $\dfrac{10^2}{0{,}1}$
b) $\dfrac{10^{-3}}{10^{-1}}$ $\dfrac{10^{-7}}{10^5}$ $\dfrac{10}{10^{-3}}$ $\dfrac{10^{-6}}{10^{-6}}$
c) $(10^2)^3$ $(10^{-1})^2$ $(10^{-5})^3$ $(10^{-3})^{-1}$.

13 Même exercice :
a) cent millions, un milliard de milliards, cent, cent mille ;
b) un dix-millième, mille, dix,
un milliardième.

14 *Vrai ou faux ?*
Corriger si c'est faux.
a) $10^4 \times 10^2 = 10^8$ b) $10^3 \times 10 = 10^4$
c) $(10^3)^2 = 10^9$ d) $(10 \times 10)^3 = 10^6$
e) $10^2 = \dfrac{1}{10^{-2}}$ f) $10^{-3} \times 10^2 = 10^{-6}$.

15 Écrire sous forme d'une puissance de 10 et sous forme décimale.
a) $0{,}1^2$ $0{,}01^2$ $10^3 \times 0{,}01$ $(10^{-3})^2$
b) $\dfrac{0{,}01}{10^{-3}}$ $\dfrac{10^{-3}}{100}$ $\dfrac{10}{10^4}$ $\dfrac{10^{-4}}{10^{-6}}$.

16 Donner sous forme d'une puissance de 10 l'inverse des nombres suivants.
10 0,01 10^3 10^{-6} 0,000 1.

17 Calculer.
a) $10^4 + 10^2$ $10^2 + 10^{-1}$ $10^3 + 10^{-2}$
b) $10^{-1} + 10^{-2}$ $10^{-3} + 10^{-1}$ $10^3 + 10^{-3}$.

18 *Marions-les*
Regrouper 2 par 2 les nombres égaux.
$a = 10^3 \times 10^2$ $b = 10^6 \times 10^0$ $c = 10^{-3} \times 10^{-2}$
$d = (10^3)^2$ $e = 10^{-7} \times 10^2$ $f = 10^6 \times 10^{-1}$.

19 Remplir le tableau suivant.

x	10^3	$(-10)^3$	10^2	$(-10)^2$	10^{-3}
$-x$					
$\frac{1}{x}$					

($-x$ est l'**opposé** de x ; $\frac{1}{x}$ est l'**inverse** de x.)

En utilisant les puissances de 10

20 Convertir en mètres.
a) 1 mm b) 1 000 km
c) 10 µm (1 micromètre = 10^{-6} m).

21 Convertir en kg.
a) 0,1 g 1 000 tonnes
b) 0,01 mg 100 mégatonnes
(1 mégatonne = 10^6 tonnes).

22 Convertir en m².
a) 1 dam² 1 cm² 1 mm²
b) 1 are 1 ha 1 km².

23 Convertir en m³.
a) 100 km³ 1 mm³ 1 µm³
b) 10 cm³ 0,1 dm³ 1 litre.

24 *Microscope*
Un puissant microscope a réussi à mesurer une distance de 0,2 nanomètre (voir les **Unités de mesures**, page 254). Écrire cette distance, en mètre (en notation scientifique).

25 *Calculatrice et ordinateur*
a) « Ma calculatrice, dit Éloïse, effectue 1 000 additions par seconde. »
Calculer le laps de temps mis par la calculatrice pour calculer une addition.
b) « L'ordinateur de mes parents, poursuit-elle, effectue 100 millions d'additions par seconde. » Combien de fois est-il plus rapide que ma calculatrice ? se demande Éloïse.
Répondre à sa question.

Puissances d'un nombre

26 Calculer.
a) 3^2 2^3 9^3 $(-5)^2$ 0^{15}
b) 4^2 2^4 $(-1)^{18}$ $(-1)^{13}$ 1^{500}.

27 Calculer.
a) 2^2 2^{-2} 5^3 5^{-3}
b) 1^{10} 1^{-10} $(-1)^3$ $(-1)^{-3}$.

28 Calculer.
a) 3^0 $(-3)^0$ 3^1 $(-3)^1$ 0^1
b) 8^1 8^{-1} 70^1 10^{-1} 30^0.

29 Calculer.
a) 5^4 $(-5)^4$ 5^{-4} $(-5)^{-4}$
b) $0{,}2^3$ $(-0{,}2)^3$ $(0{,}2)^{-3}$ $(-0{,}2)^{-3}$.

30 *Curieux*
En regardant sur le cahier du professeur de maths, Adrien a vu l'égalité suivante :
$(2+2+2+2+2)^3 = 2^3 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9$.
L'égalité est-elle vraie ?

31 *Chasser l'intrus*
Quel est le nombre qui n'est pas entier ?
$(0{,}25)^{-2}$ $(0{,}2)^{-4}$ $(0{,}125)^{-3}$
$(0{,}5)^{-5}$ 4^{-3} $(0{,}1)^{-1}$.

32 Donner l'écriture décimale de l'inverse de 5^4 puis celle de l'inverse de 2^4.
Calculer le produit de ces deux inverses.
Comparer à l'inverse de 10^4.

33 Calculer.
a) $7^5 \times 7^{-3}$ $9^2 \times 9$ $10^6 \times 10^{-4}$
b) $2^{-4} \times 2^{-1}$ $5^8 \times 5^{-10}$ $4^2 \times 4^3 \times 4^{-1}$.

34 Calculer.
a) $\frac{3^5}{3^2}$ $\frac{2^4}{2^5}$ $\frac{7^4}{7^4}$ $\frac{6^2}{6^0}$
b) $\frac{5}{5^3}$ $\frac{10^4}{10^7}$ $\frac{100^2}{100}$ $\frac{1\,000^3}{1\,000^4}$.

35 *Vrai ou faux ?*
Corriger si c'est faux.
a) $4^3 \times 4^2 = 4^6$ b) $5^4 \times 3^2 = 15^6$
c) $5^4 \times 3^4 = 15^4$ d) $7^2 \times 11^2 = 77^4$.

36 Écrire sous forme d'une fraction.
$a = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ $b = \left(\frac{-5}{2}\right)^2$
$c = \left(\frac{6}{8}\right)^5$ $d = \left(\frac{1}{7}\right)^3$.

37 Écrire sous forme de fraction.
$a = 2^{-3}$ $b = 7^{-1}$ $c = \left(\frac{4}{3}\right)^2$
$d = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$ $e = 10^{-2}$ $f = 0{,}1^3$.

38 Mettre sous la forme de puissance d'un nombre.
a) $3^5 \times 3^3$ $3^7 \times 3^{-4}$ $8^6 \times 8^{-7}$
b) $2^{-5} \times 2^{-4}$ 4×2^7 27×3^2.

39 Mettre sous la forme de puissance d'un nombre.
a) $\frac{4^5}{4^3}$; $\frac{5^2}{5^{-5}}$; $\frac{6^3}{6^4}$. b) $\frac{2^{-3}}{2^{-4}}$; $\frac{3^{-1}}{3^2}$; $\frac{25^3}{25^3}$.

40 Mettre sous la forme de puissance d'un nombre.

a) $2^5 \times 2^{-2} \times 2^{-4}$ $\quad 3^7 \times 3^{-8} \times 3^{-2}$

b) $100 \times 10^3 \times 10^{-1}$ $\quad 2^2 \times 4^3 \times 4^{-2}$.

41 Mettre sous la forme de puissance d'un nombre.

a) $\dfrac{1}{2^5}$ $\quad \dfrac{1}{3^{-5}}$ $\quad \dfrac{1}{4^8}$

b) $\dfrac{1}{2^3 \times 2}$ $\quad \dfrac{1}{3^{-3} \times 3^2}$ $\quad \dfrac{1}{10 \times 10^3}$.

42 Compléter.

a) $6^3 \times 6^{\boxed{\dots}} = 6^7$ $\quad 5^4 \times 5^{\boxed{\dots}} = 5^{-2}$

b) $56^2 = 7^2 \times (\dots)^2$ $\quad 6^3 = 2^3 \times (\dots)^3$.

43 Compléter.

a) $\dfrac{5^9}{5^{\boxed{\dots}}} = 5^7$ $\quad \dfrac{3^{\boxed{\dots}}}{3^{-7}} = 3^5$

b) $4{,}5^2 = 0{,}9^2 \times (\dots)^2$ $\quad 1{,}5^3 = 3^3 \times (\dots)^3$.

Avec la calculatrice

44 Calculer avec la calculatrice.

$a = 5^3$ $\quad b = 8^5$ $\quad c = 64^3$

$d = (0{,}2)^{-3}$ $\quad e = (0{,}015\,625)^{-3}$ $\quad f = (-1{,}25)^{-3}$.

45 Compléter le tableau suivant.

a	7	20	10	– 5	0,5	0
n	5	– 1	– 4	3	4	19
a^n						

46 Compléter.

x	2			7		– 4
y		– 1	5		4	
x^y	32	0,5	– 32	1	1 296	-1024

Notation scientifique

47 Donner une écriture décimale (sans puissance) des nombres suivants.

$a = 3{,}04 \times 10^5$ $\quad b = 6{,}7 \times 10^{-2}$

$c = 7{,}123 \times 10^4$ $\quad d = 981 \times 10^{-2}$.

48 Donner la notation scientifique des nombres suivants.

a) 2 001 ; $\quad 314\,159 \times 10^{-5}$; $\quad$ 12 milliards.

b) $0{,}73 \times 10^4$; $\quad$ 52 ; $\quad$ 320 millions.

c) 91 000 ; $\quad 0{,}15 \times 10^{-7}$; $\quad 0{,}013 \times 10^{-4}$.

49 Effectuer les produits suivants et donner les résultats en notation scientifique.

$a = (42 \times 10^{-5}) \times (8 \times 10^{-3})$

$b = (-107 \times 10^5) \times (-19 \times 10^3)$

$c = (67 \times 10^{-2}) \times (-23 \times 10^4)$

$d = (22 \times 10^{-4}) \times (3 \times 10^4)$.

50 a) Compléter avec des nombres entiers, pour que les égalités soient correctes.

$4\,679{,}32 = 46{,}793\,2 \times 10^{\boxed{\dots}} = 467{,}932 \times 10^{\boxed{\dots}}$

$= 467\,932 \times 10^{\boxed{\dots}}$

$= 0{,}467\,932 \times 10^{\boxed{\dots}}$.

b) Quelle est la notation scientifique de 4 679,32 ?

51 Calculer et donner le résultat sous forme de notation scientifique.

a) $0{,}534 + 322 \times 10^{-3}$

b) $5 \times 10^{-4} + 3 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-2}$

c) $0{,}425 + 7 \times 10^{-4} + 23 \times 10^{-2}$

d) $10^{-2} + 10^{-1} + 10^0 + 10^1$.

52 a) Donner un exposant p pour que le nombre $2{,}172\,004 \times 10^p$ soit un entier.

b) Même question pour le nombre $0{,}002\,87 \times 10^p$.

c) Donner la notation scientifique du nombre obtenu au **b**).

53 a) Compléter avec des nombres décimaux pour que les égalités soient correctes.

$27{,}189 = \dots\dots\dots \times 10^1 = \dots\dots\dots \times 10^{-3}$

$= \dots\dots\dots \times 10^2$

$= \dots\dots\dots \times 10^{-1}$.

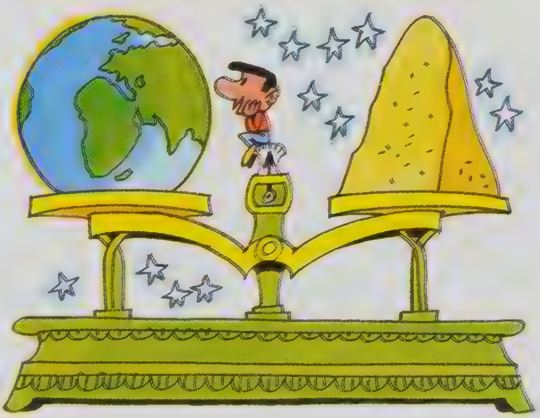
b) Donner la notation scientifique de 27,189.

54 *Grains de sable*

La masse de notre planète est de 5 980 milliards de milliards de tonnes.

a) Combien faudrait-il de grains de sable de 0,1 gramme pour atteindre la masse de la Terre ? (Utiliser la notation scientifique.)

b) Une plage contient-elle une infinité de grains de sable ?



Carrés multiplicativement magiques

Pour les exercices suivants, compléter les carrés multiplicativement magiques (voir définition page 22).

55 a)

10^{-2}		
	10	
10^2		10^4

b)

		0,01
		1 000
10 000		100

56 a)

9^4		
9^9		
9^2		9^6

b)

		7^2
	7	
7^0		7^{-2}

RÉSULTATS

9 **a)** 10^4 10^3 10^0 10^{-1}.
b) 10^1 10^{-3} 10^{-7} 10^2.

15 **a)** $10^{-2} = 0{,}01$ $10^{-4} = 0{,}000\,1$
$10^1 = 10$ $10^{-6} = 0{,}000\,001$.
b) $10^1 = 10$ $10^{-5} = 0{,}000\,01$
$10^{-3} = 0{,}001$ $10^2 = 100$.

20 **a)** 10^{-3} m **b)** 10^6 m **c)** 10^{-5} m.

26 **a)** 9 8 729 25 0.
b) 16 16 1 – 1 1.

33 **a)** $7^2 = 49$ $9^3 = 729$ $10^2 = 100$.
b) $2^{-5} = \dfrac{1}{32}$ $5^{-2} = \dfrac{1}{25}$ $4^4 = 256$.

34 **a)** $3^3 = 27$ $2^{-1} = 0{,}5$ $7^0 = 1$ $6^2 = 36$.
b) $5^{-2} = \dfrac{1}{25}$ $10^{-3} = 0{,}001$ 100
$1\,000^{-1} = 0{,}001$.

38 **a)** 3^8 3^3 8^{-1}. **b)** 2^{-9} 2^9 3^5.

44 Profitez-en pour tester votre machine :
$a = 125$ $b = 32\,768$ $c = 262\,144$
$d = 125$ $e = 262\,144$ $f = -\,0{,}512$.

48 **a)** $2{,}001 \times 10^3$ $3{,}141\,59 \times 10^0$
$1{,}2 \times 10^{10}$.
b) $7{,}3 \times 10^3$ $5{,}2 \times 10^1$ $3{,}2 \times 10^8$.
c) $9{,}1 \times 10^4$ $1{,}5 \times 10^{-8}$ $1{,}3 \times 10^{-6}$.

CHERCHER

À propos du nombre π

De tout temps, le nombre π a fasciné les mathématiciens, et l'histoire des mathématiques est jalonnée de découvertes sur ce nombre.

57 En 1609, Ludolph Van Ceulen obtint 34 décimales exactes de π en utilisant un polygone à 60×2^{29} côtés.
Ce polygone a-t-il plus d'un milliard de côtés ?

58 En 1974, une équipe française a obtenu 1 million de décimales de π à l'aide d'un ordinateur. Le calcul a demandé 22 h 11 min. Calculer le temps moyen mis pour obtenir une décimale.

59 Durant l'été 1997, le Japonais Yasumasa Kanada obtenait 51 milliards de décimales du nombre π.
En supposant que l'on inscrive toutes ces décimales à raison de 100 lignes par page et de 100 chiffres par ligne, combien faudrait-il prévoir de pages ?

Curiosités numériques

60 *La puissance des chiffres*
a) À l'aide de la calculatrice, calculer :
$1^1 + 3^2 + 5^3$ puis $5^1 + 9^2 + 8^3$ puis
$2^1 + 4^2 + 2^3 + 7^4$ et enfin $1^1 + 6^2 + 7^3 + 6^4$.
Que remarque-t-on ?
b) Il existe un seul nombre à 2 chiffres vérifiant cette propriété. Essayer de le trouver.

61 *Chercher l'intrus*
L'un de ces cinq nombres n'est pas égal à la somme des cubes de ses chiffres. Lequel ?
153 370 371 407 516.

Pour les trois exercices suivants, à l'aide de la calculatrice, vérifier la première égalité puis trouver l'entier qui manque dans la 2e égalité.

62 *Avec des carrés*
a) $8^2 + 9^2 + 12^2 = 17^2$
b) $\square^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$.

63 *Avec des cubes*
a) $738^3 + 1^3 = 244^3 + 729^3$
b) $9^3 + 10^3 = 12^3 + \square^3$.

64 *Avec des puissances quatre*

a) $8^4 + 9^4 + (8+9)^4 = 3^4 + 13^4 + (3+13)^4$

b) $5^4 + 6^4 + (5+6)^4 = \square^4 + 9^4 + (\square + 9)^4$.

65 *Puissance 2*

À l'aide de la calculatrice, trouver le nombre qui manque.

a) $3^2 + 4^2 = \square^2$

b) $5^2 + \square^2 = 13^2$

c) $\square^2 + 15^2 = 17^2$

d) $\square^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.

66 *Puissance 3*

a) À l'aide de la calculatrice, trouver les nombres qui manquent dans :

$\square^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$ (1)

$\square^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ (2)

b) En déduire sans autre calcul le nombre qui manque dans :

$1^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 = \square^3$.

67 *Un défi*

a) Vérifier à l'aide de la calculatrice que

4 [EE] 3 [=] et 4 [x^y] 3 [=]

donnent des résultats différents.

b) Donner un exemple où en remplaçant

[EE] par [x^y]

on obtient le même résultat.

68 *Puissances 4 et 5*

(D'après *les Nombres remarquables*, François Le Lionnais.)

À l'aide de la calculatrice, déterminer les entiers n et m tels que :

a) $4^4 + 6^4 + 8^4 + 9^4 + 14^4 = 15^n$

b) $4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 = 12^m$.

69 *Renversant !*

a) Calculer 13^2 puis 31^2. Que remarque-t-on ?

b) Recommencer avec 112^2 puis 211^2, et enfin avec $3\,101^2$ et $1\,013^2$.

c) Rechercher des nombres ayant cette propriété remarquable.

70 *C'est bon signe*

a) Mettre dans les cases un signe + ou un signe – afin que l'égalité soit vraie.

- $1^3 + 2^3 = (1^2 \square 2^2)^2$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1^2 \square 2^2 \square 3^2)^2$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1^2 \square 2^2 \square 3^2 \square 4^2)^2$.

b) Compléter la formule suivante, puis la vérifier.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3 = (1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots 10^2)^2$.

71 *Drôles d'équations*

Trouver des entiers a, b, c, d, e et f pour que les égalités suivantes soient vraies.

- $1 + 2^3 = a^2$
- $2^5 + 7^2 = 3^b$
- $c^2 + 7^3 = 2^9$
- $17^3 + 2^d = 71^2$
- $e^5 + 11^4 = 122^2$
- $41^2 + 38^2 = 5^f$.

72 *Qui suis-je ?*

- Je suis un carré de cinq chiffres.
- Le nombre formé par mes deux premiers chiffres (chiffres de gauche) est un cube.
- Le nombre formé par mes quatre derniers chiffres (chiffres de droite) est un carré.

Qui suis-je ?

Puissances croisées

73 Compléter le tableau (un chiffre par case) en respectant les définitions des lignes et des colonnes.

	A	B	C
I			
II			
III			

I : puissance 5^e
II : puissance de 22
III : cube
A : puissance 5^e
B : carré
C : cube.

74 Même exercice.

	A	B	C
I			
II			
III			

I : puissance 9^e
II : cube
III : cube
A : puissance de 2
B : carré
C : puissance de 2.

75 Même exercice.

	A	B	C	D
I				
II				
III				
IV				

I : carré
II : puissance de 7
III : puissance de 2
IV : carré

A : puissance de 35 B : carré
C : puissance onzième
D : produit d'une puissance 4^e par une puissance 6^e.

76 Même exercice.

	A	B	C	D	
I					I : puissance de 54
II					II : puissance de 95
III					III : puissance 4^{e}
IV					IV : puissance de 3

A : produit d'une puissance 6^{e} par un carré
B : carré
C : puissance de 6
D : puissance huitième.

Nombres astronomiques

77 *La galaxie M.87*
(D'après *Pour la Science*, n° 223, mai 1996)
L'étude de cette galaxie située à 50 millions d'années-lumière (voir Mini-dico) de notre Terre, révèle la présence d'un trou noir dont le diamètre serait d'environ 60 années-lumière et dont la masse serait deux milliards de fois celle du Soleil.
a) Sachant qu'une année-lumière vaut environ 10^{13} km, calculer, en km, la distance de la Terre à cette galaxie, ainsi que le diamètre du trou noir. (Donner les résultats en notation scientifique.)
b) Sachant que le Soleil a une masse de 2×10^{30} kg, calculer, en kg, la masse du trou noir (en notation scientifique).

78 *L'amas de la Vierge*
L'amas de galaxies de la Vierge est situé à 14 mégaparsecs de la Terre.
Écrire cette distance en km (en notation scientifique), sachant qu'un parsec vaut environ 3×10^{13} km, et qu'un mégaparsec vaut 10^{6} parsecs.

Dans la vie courante

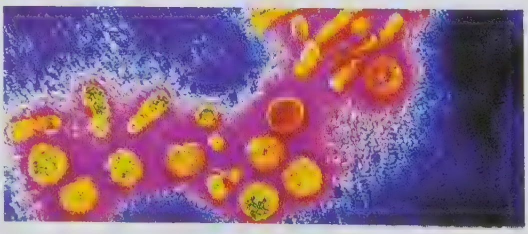
79 *Population mondiale*
La population mondiale est d'environ 5,8 milliards d'êtres humains.
a) La surface des terres émergées mesure environ 103×10^{6} km^{2}.
Calculer le nombre moyen d'individus par km^{2}.
b) En supposant qu'un être humain boit environ 2 litres d'eau par jour, calculer en m^{3} la consommation d'eau journalière des 5,8 milliards d'individus.

80 *Eau potable* (D'après *Pour la Science*, n° 241, 1997)
Un milliard de personnes dans le monde n'a pas accès à de l'eau potable.
Une dépense de 50 milliards de francs par an et sur 10 ans serait nécessaire pour fournir de l'eau potable à l'ensemble des individus vivant sur Terre.
Donner la dépense totale sur 10 ans, en notation scientifique.

81 *Armement* (D'après *Pour la Science*, n° 241, 1997)
Les dépenses mondiales pour l'armement sont estimées à 5 000 milliards de francs par an.
a) Écrire cette somme en notation scientifique.
b) Un billet de 200 F pèse 1 g. Combien de tonnes atteindrait le paquet de billets de 200 F représentant cette énorme somme ?
c) Quelle quantité d'argent est ainsi dépensée par minute ? (Prendre 365 jours pour une année.)

82 *Mauvaises mines*
Tous les jours et à travers le monde, des mines antipersonnel mutilent ou tuent des personnes de tous âges. On estime à 1 000 dollars le prix moyen de la localisation et de la destruction d'une seule de ces mines.
Calculer le prix (en F) d'une campagne de déminage d'un pays comme le Tchad où l'on compte un million de mines antipersonnel (utiliser des puissances de 10 ; 1 \$ $\simeq$ 6 F).

83 *Virus*
Un virus de « type classique » peut être assimilé à un cube minuscule de 2×10^{-7} m de côté.
Combien pourrait-on loger de ces virus dans un petit cube de 1 mm de côté ?



84 *La règle des signes*
Il y a douze signes du zodiaque et 5,8 milliards d'êtres humains sur la Terre.
Selon les astrologues, chaque personne a un signe zodiacal déterminé par son jour de naissance.
Calculer le nombre moyen d'individus qui seraient du signe du Lion.

85 *C'est lumineux*
La télévision par câble peut utiliser des fibres optiques qui ont 8 micromètres de diamètre.
a) Convertir ce diamètre en mètre. (Donner le résultat en notation scientifique.)
b) Calculer, en m^2, puis en cm^2, l'aire de la section de la fibre optique.

86 *Foudroyant*
Au cours d'un orage, un éclair zèbre le ciel lourd de nuages noirs.
Sa puissance est de 3 000 milliards de watts.
a) Écrire cette puissance en notation scientifique.
b) Combien devrait-on disposer d'ampoules de 100 watts pour atteindre une telle puissance ?

87 *La légende de l'échiquier*
Pour le remercier de l'invention du jeu d'échecs, un roi des Perses (ou un empereur des Indes) proposa au génial inventeur de choisir une récompense. Celui-ci répondit qu'il ne voulait qu'un grain de blé pour la première case de l'échiquier, deux grains pour la seconde et ainsi de suite en doublant jusqu'à la 64ᵉ case.
a) Calculer le nombre de grains de blé reçus pour la 64ᵉ case.
b) Sachant que 1 m^3 de blé contient environ 15 millions de grains, calculer le volume de ce tas de blé.
c) Calculer la hauteur d'un grenier de 10 m de large sur 20 m de long, assez grand pour contenir tout ce blé !

88 *Échecs et maths*
L'ordinateur Deeper Blue a battu, en 1997, le champion du monde d'échecs : Garry Kasparov. L'ordinateur calculait environ 200 millions de coups par seconde.
a) Déterminer le nombre de coups calculés par l'ordinateur en 1 min.
(Donner le résultat en notation scientifique.)
b) Donner, en notation scientifique, le temps moyen mis par l'ordinateur pour calculer 1 coup.

89 *Dur de la feuille*
a) Prendre une feuille de papier (son épaisseur est de l'ordre de 0,1 mm).
La plier en 2, puis de nouveau en 2. Essayer d'effectuer 7 pliages.
b) Deviner l'épaisseur de papier obtenue après 20 pliages. Vérifier par le calcul.
c) Au bout de combien de pliages, l'épaisseur de papier dépasserait-elle la tour Eiffel (hauteur : 320 m) ?

COUPS DE POUCE

61 $1^3 + 5^3 + 3^3 = ...$

69 **c)** Examiner les nombres ayant pour chiffres 1, 2, 3 ou 0.

72 Les cubes à 2 chiffres ne sont pas légion.

75 Il n'y a qu'une seule puissance de 7 ayant 4 chiffres et une seule puissance onzième ayant 4 chiffres...

87 **a)** Pour la 1ʳᵉ case : il y a 1 grain ; pour la 2ᵉ : 2 ; pour la 3ᵉ : $4 = 2^2$; pour la 4ᵉ : 2^3 ; ..... ; pour la 64ᵉ ?

Exercices

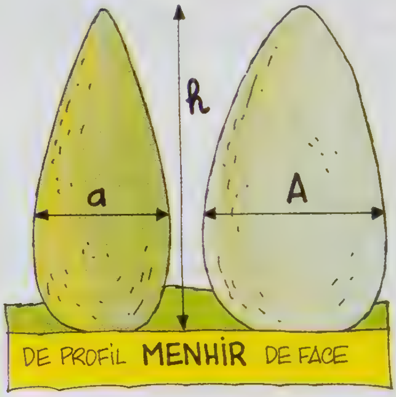
4 Expressions numériques

Activités

1 Les formules magiques du livreur de menhirs

Afin de connaître le poids du menhir qu'il doit fournir au client, le livreur de menhirs applique l'une des formules suivantes.
(A, a et h sont en dm et P en kg.)

- La formule de Lutèce :
$P = 0{,}302\,\pi h A a$
- La formule pictave :
$P = 0{,}306\,h(2A^2 + a^2)$
- La formule arverne :
$P = \dfrac{\pi h}{10}\,(A^2 + a^2 + Aa)$
- La formule de Guy l'an neuf :
$P = \dfrac{\pi h}{30}\,(5A^2 + 4a^2)$
- La formule armoricaine :
$P = 1{,}22\,h(0{,}4\,A^2 + 0{,}2\,Aa + 0{,}15a^2)$



Deux modèles sont à livrer.
- Un grand menhir : $h = 21$ dm, $A = 10{,}5$ dm, $a = 9{,}5$ dm.
- Un petit menhir : $h = 16$ dm, $A = 6{,}5$ dm, $a = 5$ dm.

Essayer les cinq formules avec les dimensions mesurées.

2 Parenthèses précédées du signe moins

A. Découvertes

1. Compléter les deux tableaux suivants.

a	b	c	$b + c$	$a - (b + c)$	$a - b - c$
2	3	4			
4	2	−3			
−3	−4	2			

a	b	c	$b - c$	$a - (b - c)$	$a - b + c$
2	3	4			
4	2	−3			
−3	−4	2			

2. En observant les résultats obtenus dans les tableaux précédents, compléter les deux égalités suivantes.

Pour tout nombre relatif a, b et c,
$a - (b + c) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$a - (b - c) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

B. Supprimer des parenthèses

1. Simplifier les expressions numériques suivantes.
$E = (2 - 595{,}75) - (5 - 595{,}75)$
$F = (5{,}43 - (-3{,}1)) - (2 \times 5{,}43 - 3 \times (-3{,}1)) + (2 \times 5{,}43 - 2 \times (-3{,}1))$.
2. Simplifier les expressions suivantes où a, b et c sont des nombres.
$G = (a - b) - (c - b) - (a - c)$
$H = (a - 2b) - (c - 3b) + 2c$
$I = a - (b + c) + (b - a) - (a - c)$.

C. Règle

Comment supprime-t-on des parenthèses précédées du signe moins ?

3 Expressions numériques et programmes de calculs

INFORMATION

Une calculatrice scientifique reconnaît la priorité des opérations, elle possède les parenthèses et une mémoire.

[M] ou [M+] ou [Min] ou [STO] ... s'utilise pour mettre un nombre en mémoire.

[RM] ou [MR] ou [Mout] ou [RCL] ... permet d'utiliser le nombre placé en mémoire.

A. Du programme de calcul à l'expression numérique

Relire les règles de priorité au paragraphe 1 des « Outils » de ce chapitre, page 66.
Quelles expressions sont calculées par les programmes suivants ?

« Taper un nombre x » puis [M] [x^2] [×] 3 [–] 4 [×] [RM] [+] 5 [=] (1)

« Taper x » puis [M] [×] 7 [+] 5 [=] [×] [RM] [=] (2)

« Taper x » puis [M] [x^2] [+] [(] [RM] [+] 1 [)] [x^2] [=] (3)

« Taper x » puis [M] [×] 2 [+] 3 [=] [×] [(] [RM] [–] 2 [)] [=] (4)

B. De l'expression numérique au programme de calcul

1. Écrire un programme de calcul pour chacune des expressions suivantes.

$a = 5x^2 + 3x - 4$ $\quad$ $b = (x + 3) \times (4 - 2x)$ $\quad$ $c = \dfrac{3}{7} \times (2x - 1)$.

2. Tester ensuite ces programmes avec $x = 0$, puis $x = 3$ et enfin $x = -5$.

Rappel. Pour taper – 5, on fait [5] [+/–].

4 Uno, dos, tres

Les lettres A, C, D, E, N, O, R, S, T, U représentent des nombres quelconques.

1. Supprimer les parenthèses dans les expressions suivantes puis vérifier l'égalité :

$(T + R + E + C + E) - (T + R + E + S) + (D + O + S) = D + O + C + E$.

- Calculer $13 - 3 + 2$.
- Comment dit-on treize, trois, deux et douze en espagnol ?
- Que remarque-t-on ?

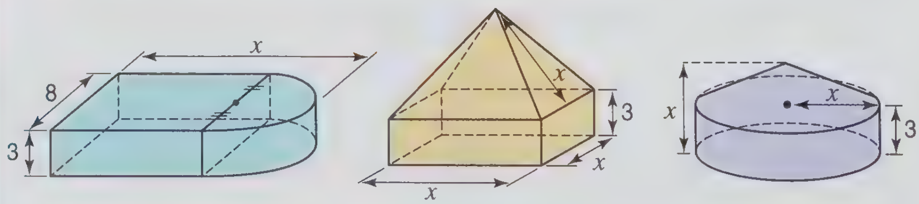
2. Écrire un, quatre, onze et quatorze en espagnol.
Retrouver une égalité semblable à celle du **1** en combinant les nombres : 1 ; 4 ; 11 et 14.

L'Alhambra de Grenade (14e siècle) : la cour des Lions.

Activités

5 C'est du solide

Voici trois solides.



A B C

A. Formules

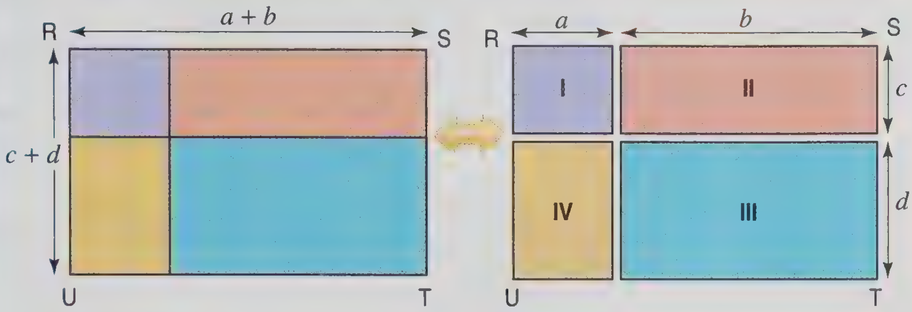
Calculer l'aire totale de chacun des solides A et B ainsi que le volume du solide C en fonction de x.
(On écrira les formules trouvées aussi simplement que possible.)

B. Applications numériques

Effectuer les calculs pour $x = 6$ puis pour $x = 9{,}3$.

6 Quatre morceaux pour une aire

Voici un rectangle RSTU coupé en quatre.



A. Exemple numérique

On suppose que $a = 3$; $b = 5$; $c = 2$ et $d = 4$.

1. Combien mesurent la longueur et la largeur du rectangle RSTU ? Calculer l'aire du rectangle RSTU.

2. Calculer l'aire de chacun des morceaux I, II, III et IV.

3. Vérifier que la somme des aires de ces morceaux est égale à l'aire du rectangle RSTU.

B. Cas général

1. Donner la longueur, la largeur et l'aire du rectangle RSTU en fonction de a, b, c et d.

2. Calculer l'aire de chacun des morceaux I, II, III et IV en fonction de a, b, c et d.

3. Compléter l'égalité $(a + b) \times (c + d) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

C. Démonstration

En utilisant la formule $k(a + b) = k \times a + k \times b$ compléter :

$(a + b) \times (c + d) = (a + b) \times \ldots + (\ldots + \ldots) \times d = ac + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

D'où :

$(a + b)(c + d) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

7 Un assez bon millésime

Ce livre a été édité en 1998. C'était un assez bon millésime : avec les chiffres 1, 9, 9 et 8 pris dans cet ordre, on peut obtenir tous les nombres de 0 à 12 à l'aide des opérations +, –, ×, ÷, puissances et racines. Les parenthèses sont également autorisées.

Exemples pour 19 et 20

$19 = 19 \times (9 - 8) = -1 + 9 + \sqrt{9} + 8$

$20 = 19 + 9 - 8 = 1 \times 9 + \sqrt{9} + 8$

Il y a parfois plusieurs solutions pour un même résultat.

1. Écrire les nombres de 0 à 12 avec les chiffres de 1998.

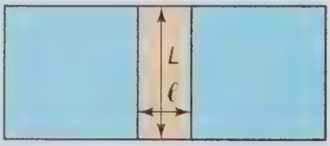
2. Essayer avec l'année actuelle (bon courage pour l'an 2000 !).

8 Habitat des villes et habitat des champs

A. L'immeuble

1. Un immeuble comporte 13 étages. Chaque étage est constitué de 7 studios et de 4 appartements à 3 pièces.
On désigne par a l'aire de chaque studio et par b l'aire de chaque appartement.
a) Calculer en fonction de a et b la surface habitable sur un étage.
b) Calculer de deux façons la surface habitable de l'immeuble en fonction de a et b.
2. On envisage de surélever l'immeuble de n étages.
Calculer de deux façons la surface habitable de l'immeuble surélevé en fonction de n, a et b.
3. Calculer la surface habitable pour :
$n = 4 \quad a = 28\text{ m}^2 \quad$ et $\quad b = 57\text{ m}^2$.

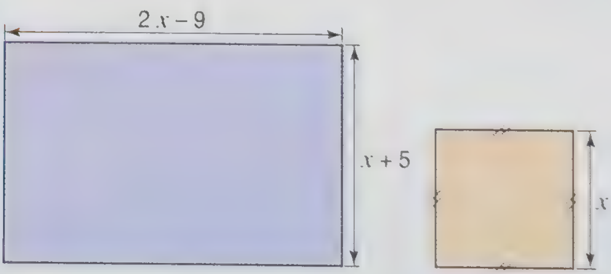
B. La maison poitevine



Une maison poitevine traditionnelle est constituée de deux pièces identiques carrées, séparées par un couloir. À l'étage on retrouve la même disposition.
On note ℓ la largeur du couloir et L la longueur.
1. Exprimer de trois façons la surface habitable S en fonction de L et ℓ.
2. Vérifier que les trois expressions trouvées sont égales.
3. Calculer la surface habitable pour :
$\ell = 3\text{ m} \quad$ et $\quad L = 6\text{ m}$.

9 Petits problèmes de géométrie et équations

Voici un rectangle et un carré.



A. Aires et périmètres

Calculer en fonction de x :
1. l'aire du rectangle, puis l'aire du carré ;
2. le périmètre du rectangle, puis le périmètre du carré.

B. Avec des périmètres

1. Trouver la valeur de x pour laquelle :
4 fois le périmètre du rectangle vaut 5 fois le périmètre du carré.
2. Calculer alors le périmètre du carré et celui du rectangle.

C. Avec des aires

1. Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle est le double de l'aire du carré.
2. Calculer alors l'aire du rectangle.

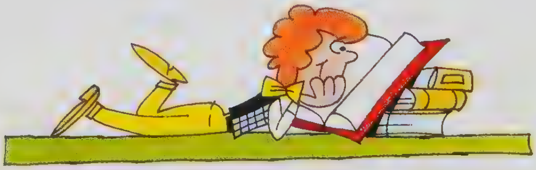
D. Une autre, une autre... !

Pour quelle valeur de x le rectangle est-il un carré ?

10 Spécial compétition

A. Je lis... (Rallye mathématique de Maine-et-Loire, 1993)

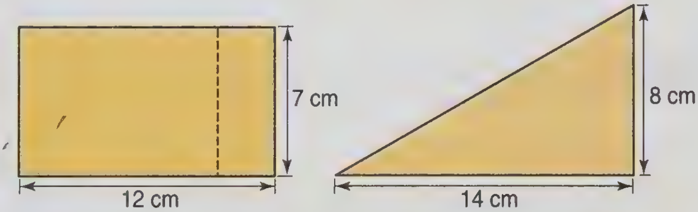
J'ouvre mon livre au hasard.
Je regarde les numéros des pages et je les additionne.
Je trouve 25.
À quelles pages le livre est-il ouvert ?



B. Tarte aux pommes (Olympiades mathématiques belges, 1996)

Guillaume et Julie contemplent leurs parts de tarte aux pommes.
Julie est triste car elle s'aperçoit que son morceau est plus petit que celui de Guillaume. Celui-ci coupe alors un morceau comme indiqué par les pointillés sur la figure et le lui tend. Les deux enfants ont alors des parts équivalentes.
Quelle est, en cm, la largeur du morceau que Guillaume a coupé pour Julie ?

- [A] 2
- [B] 3,5
- [C] 4
- [D] 4,33
- [E] 12.



Part de Guillaume — Part de Julie

C. C'est Noël (Rallye mathématique de Maine-et-Loire, 1990)

Il y a 36 cadeaux placés dans 3 boîtes A, B et C.
Dans la boîte A, il y a 6 cadeaux de plus que dans la boîte B.
Dans la boîte C, il y en a 2 fois moins que dans la boîte B.
Combien y a-t-il de cadeaux dans chaque boîte ?

D. Oh ! Les chiffres ! (Rallye mathématique de Maine-et-Loire, 1993)

Outils

Priorité ; parenthèses ; développement

1 Priorité des opérations

RÈGLE 1

En présence de parenthèses, on peut toujours commencer par calculer ce qui est entre parenthèses.

EXEMPLES
- $2 \times (5 - 8) = 2 \times (-3) = -6$
- $24 \div (11 - 3) = 24 \div 8 = 3$
- $(7 - 4)^2 = 3^2 = 9$.

Remarque. C'est ainsi que procèdent les calculatrices avec parenthèses et les ordinateurs, mais il est souvent plus habile de transformer l'expression avant de se lancer dans le calcul.

RÈGLE 2

En l'absence de parenthèses, on effectue :
– d'abord les puissances ;
– puis les multiplications et divisions ;
– puis les additions et soustractions.

EXEMPLES
- $5 + 3 \times 7 = 5 + 21 = 26$
- $10 + 20 \div 2^3 = 10 + 20 \div 8 = 10 + 2{,}5$
  $= 12{,}5$
- $4 - 2^2 \times 3 = 4 - 4 \times 3 = 4 - 12 = -8$.

RÈGLE 3

Deux opérations ayant le même niveau de priorité s'effectuent dans l'ordre où elles sont écrites.

EXEMPLES
- $2 - 3 + 4 = -1 + 4 = 3$
- $12 \div 3 \times 2 = 4 \times 2 = 8$
- $30 \times 4 \div 5 \times 3 = 120 \div 5 \times 3 = 24 \times 3 = 72$.

2 Suppression de parenthèses dans une somme

RÈGLE

Dans une **somme** :
– on peut supprimer les parenthèses précédées d'un signe + ;
– on peut supprimer les parenthèses précédées d'un signe – à condition de changer les signes des termes placés dans les parenthèses à supprimer.

EXEMPLES
- $2 + (a - 3) = 2 + a - 3 = a - 1$
- $2 - (a + 3) = 2 - a - 3 = -a - 1$
- $2 - (-a - 3) = 2 + a + 3 = a + 5$
- $2 + (-a + 3) = 2 - a + 3 = 5 - a$
- $3 - (a - (5 + a)) = 3 - a + (5 + a)$
  $= 3 - a + 5 + a = 8$.

3 Développement d'un produit

Développer un produit c'est le mettre sous forme d'une somme.

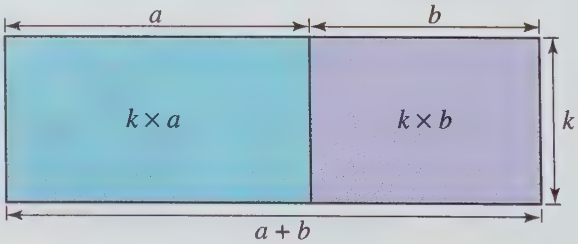
A. Le produit $k \times (a + b)$

Soit a, b et k des nombres relatifs. On a :

PROPRIÉTÉ

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$



Remarque. On dit que la multiplication est **distributive** par rapport à l'addition (et à la soustraction aussi).

EXEMPLE 1

$12 \times \left(\frac{10}{3} - \frac{11}{4}\right) = 12 \times \frac{10}{3} - 12 \times \frac{11}{4} = 4 \times 10 - 3 \times 11 = 40 - 33 = 7.$

EXEMPLE 2

Les formules précédentes permettent de réduire des expressions :
- $3x + 8x = (3 + 8)x = 11x$
- $5a^2 - 2a^2 = (5 - 2)\,a^2 = 3a^2$
- $3x - 4x + 2x^2 + x^2 = (3 - 4)x + (2 + 1)x^2 = -x + 3x^2$.

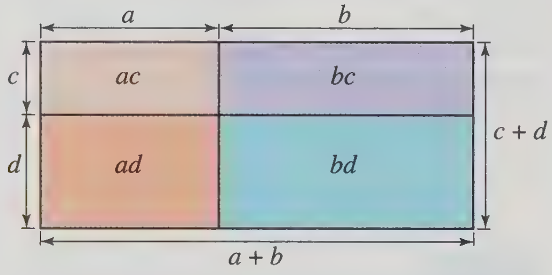
B. Le produit $(a + b) \times (c + d)$

Soit a, b, c et d des nombres relatifs. On a :

PROPRIÉTÉ

$(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$

On multiplie chaque terme de $(a + b)$ par chaque terme de $(c + d)$



On a des formules analogues avec $(a - b)$ ou $(c - d)$:
- $(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$
- $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$.

EXEMPLES

Ces formules permettent de développer des expressions :
- $(x + 2)(x + 3) = x \times x + x \times 3 + 2 \times x + 2 \times 3 = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$
- $(2x - 5)(4x - 3) = 2x \times 4x - 2x \times 3 - 5 \times 4x + 5 \times 3 = 8x^2 - 6x - 20x + 15 = 8x^2 - 26x + 15$.

Méthode — Développer

M5 Comment développer un produit ?

Utiliser les formules :

$k \times (a + b) = ka + kb$ ou $(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$.

EXEMPLES

$5 \times (a + 7) = 5a + 35$

$(x + 5)(x - 2) = x^2 - 2x + 5x - 10 = x^2 + 3x - 10$.

Exemples

Calculs ; résolution d'équations

1 Calcul d'une expression numérique

ÉNONCÉ

Calculer $E = 36 \div (3+9) - 7 + 3 \times (8 \div 2)^3$.

Stratégie

D'abord calculer ce qui est entre parenthèses,
puis la puissance,
puis les multiplications et les divisions,
enfin les additions et soustractions dans l'ordre où elles sont écrites.

Solution

$$\begin{aligned} E &= 36 \div (3+9) - 7 + 3 \times (8 \div 2)^3 \\ &= 36 \div 12 - 7 + 3 \times 4^3 \\ &= 36 \div 12 - 7 + 3 \times 64 \\ &= 3 - 7 + 192 \\ &= -4 + 192. \\ E &= 188. \end{aligned}$$

Remarques

On applique scrupuleusement les règles de priorité.

2 Réduction d'expressions

ÉNONCÉ

a/ Réduire la somme $S = 10x - (7x - 1) + (5x - 3)$.

b/ Développer et réduire l'expression $T = x(2x - 3) + x^2 + 2x$.

c/ Développer puis réduire l'expression $R = (4x + 5)(3x - 4)$.

Stratégie

a/ Supprimer les parenthèses puis rassembler les x.

b/ Développer, puis rassembler les x^2 et rassembler les x.

c/ Développer en utilisant la règle de calcul :
$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Réduire en rassemblant les x^2 entre eux et les x entre eux.

Solution

a/
$$\begin{aligned} S &= 10x - (7x - 1) + (5x - 3) \\ &= 10x - 7x + 1 + 5x - 3 \\ &= 10x - 7x + 5x + 1 - 3 \\ &= (10 - 7 + 5)x + 1 - 3 \\ &= 8x - 2. \end{aligned}$$

b/
$$\begin{aligned} T &= x(2x - 3) + x^2 + 2x \\ &= 2x^2 - 3x + x^2 + 2x \\ &= 2x^2 + x^2 - 3x + 2x \\ &= 3x^2 - x. \end{aligned}$$

c/
$$\begin{aligned} R &= (4x + 5)(3x - 4) \\ &= 4x \times 3x + 4x \times (-4) + 5 \times 3x \\ &\quad + 5 \times (-4) \\ &= 4 \times 3x^2 + 4 \times (-4)x \\ &\quad + 5 \times 3x - 20 \\ &= 12x^2 - 16x + 15x - 20 \\ &= 12x^2 - x - 20. \end{aligned}$$

Remarques

Attention aux signes lors de la suppression des parenthèses dans la somme.

On utilise la formule $k(a+b) = ka + kb$.

On a : $-16x + 15x = (-16 + 15)x = -x$

3 Résolution d'une équation

ÉNONCÉ

Résoudre l'équation $3(x-5)+4=7(x+3)$.

Stratégie

Distinguer 3 étapes.

• **Résolution.**
Développer.
Réduire chaque membre.
Regrouper les termes en x dans un membre et les termes sans x dans l'autre.

Calculer x.

• **Vérification.**
Remplacer x par la valeur trouvée dans le premier membre puis dans le second. On doit trouver le même résultat pour affirmer que -8 est solution.

• **Conclusion.**

Solution

• $3(x-5)+4=7(x+3)$
$3x-15+4=7x+21$
$3x-11=7x+21$
$-7x+3x-11=-7x+7x+21$
d'où $-4x-11=21$

$-4x-11+11=21+11$

d'où $-4x=32$ soit $x=\dfrac{32}{-4}=-8$.

• Vérifions que -8 convient.
Calcul du 1er membre :
$3\times(-8-5)+4=3\times(-13)+4=-35$
Calcul du 2e membre :
$7\times(-8+3)=7\times(-5)=-35$
donc -8 convient.

• D'où **-8** est la solution.

On ajoute $-7x$ aux deux membres de l'équation pour supprimer les $7x$ du 2e membre.

De même avec -11.

On obtient x en divisant les deux membres par -4.

4 Pourquoi tant de n ?

ÉNONCÉ

Trouver un entier n ayant la propriété suivante :
le produit de n par le suivant de n est égal au carré de n augmenté du double du suivant de n.

Stratégie

• Traduire le texte sous forme d'une équation.

• Résoudre l'équation.

• Vérification.

• Conclusion.

Solution

• On a :
$n(n+1)=n^2+2(n+1)$.

• Développons :
$n^2+n=n^2+2n+2$
Réduisons :
$-2=2n-n$ soit $n=-2$

• Vérifions :
$n(n+1)=-2(-2+1)=2$
$n^2+2(n+1)=(-2)^2+2(-2+1)$
$=4+(-2)=2$

• Donc $n=-2$ est le nombre recherché.

En effet :
• n^2 est le carré de n ;
• $n+1$ est le suivant de n ;
• $2(n+1)$ est le double du suivant de n.

CONSOLIDER

Priorité des opérations

1 Calculer sans calculatrice.
a) $7 - 7 \times 5$ b) $9 \times 5 + 5$
c) $11 + 4 \div 2$ d) $18 \div 6 + 12$.

2 Même exercice.
a) $13 + 5 \times 4 + 6$ b) $9 - 7 \times 6 - 6$
c) $5 \times 9 - 9 \times 11$ d) $14 - 1 \times 1 + 14$.

3 Même exercice.
a) $-7 + 5 + 4 \times 3$ b) $-4 \times 5 \times 9 - 1$
c) $6 \div 1 + 2 + 3$ d) $17 \div 17 - 17$.

Distributivité

a, b, x et k désignent des nombres.

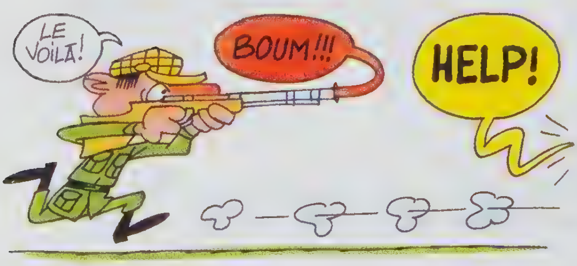
4 Compléter.
a) $2 \times (a + b) = \ldots..$ b) $k \times (a + b) = \ldots..$
c) $3x + 2x = \ldots..$ d) $4a + 5a = \ldots..$.

5 Indiquer les égalités qui sont vraies.
a) $9 \times (x - y) = 9x - 9y$
b) $12x + 12 = 12 \times (x + 1)$
c) $(2 + a) \times 5 = 10 + 5a$
d) $7 \times (a - 2) = 7a - 2$.

Équations

6 Écrire 4 équations admettant $\frac{5}{2}$ comme solution.

7 *Chasser l'intrus*
Parmi les nombres 2, -1, 10 et $\frac{5}{4}$, un seul n'est pas solution de l'une des équations suivantes. Lequel ?
a) $4x - 3 = 2$
b) $7x - 3 = 2x + 7$
c) $x - 8 = 9x$.



8 *Calcul mental (1)*
Déterminer la solution des équations suivantes sans poser d'opérations.
a) $7 + x = 12$ b) $12x = 60$
c) $\frac{1}{7}x = 1$ d) $x - 3 = 5$
e) $6x = 0$ f) $9x = 81$.

9 *Calcul mental (2)*
Même travail que pour l'exercice précédent.
a) $3x = 6$ b) $x - 4 = -7$
c) $-7x = 14$ d) $5 - x = 5$
e) $2x - 4 = 0$ f) $3x + 6 = 0$.

10 *Marions-les*
Donner les paires d'équations ayant les mêmes solutions.
a) $4x = -16$ b) $4 + x = -16$
c) $5x = 8$ d) $3 + x = -1$
e) $0 = 8 - 5x$ f) $1 + \frac{1}{4}x = -4$.

11 *Curiosité*
Résoudre les équations suivantes.
a) $x - 3 = 1{,}5$ puis $\frac{x}{3} = 1{,}5$
b) $x - 6 = 1{,}2$ puis $\frac{x}{6} = 1{,}2$
c) $x - 4 = \frac{4}{3}$ puis $\frac{x}{4} = \frac{4}{3}$.

12 *Autre curiosité*
Même travail qu'à l'exercice précédent.
a) $5x = 6{,}25$ puis $5 + x = 6{,}25$
b) $\frac{3}{4}y = -2{,}25$ puis $\frac{3}{4} + y = -2{,}25$
c) $0{,}95z = -18{,}05$ puis $0{,}95 + z = -18{,}05$.

13 *Avec des puissances de 10*
Résoudre les équations suivantes.
a) $10^2x = 10^3$
b) $10^2 + x = 10^3$
c) $10^{-2}x = 10^{-1}$
d) $10^{-2} + x = 10^{-1}$.

14 *L'unique*
Trouver l'équation qui n'admet pas 2 pour solution.
a) $8x = 16$
b) $5x - 3 = 7$
c) $8 - x = 6$
d) $0{,}645x = 1{,}29$
e) $\frac{1}{2}x = -1$
f) $x - 93 = -91$.

SAVOIR FAIRE

Priorités des opérations

15 Calculer les expressions suivantes.

$$A = \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right) \div \frac{7}{4} + \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{4}\right) \div \frac{7}{4}$$

$$B = \frac{5}{11} \div \left(\frac{3}{33} + \frac{6}{33}\right) + \frac{5}{11} \div \left(\frac{3}{22} + \frac{1}{22}\right).$$

16 Calculer les expressions suivantes.

$$A = \frac{2}{5} \times 4^2 - \frac{3}{5} \times 7 \div \frac{2}{3}$$

$$B = \frac{5^2}{3} \times \frac{3}{2} \div \frac{5}{4} - 1$$

$$C = \left(3,1 - \frac{5}{2}\right) \times 3 - 2$$

$$D = \frac{3}{4} + \frac{9}{5} \times \frac{3^2}{2} - 1.$$

17 Supprimer les parenthèses inutiles dans les expressions suivantes.

$$A = \left(\left(\frac{3}{5} \times \frac{9}{4}\right) + \left(\frac{3}{7} \times 5\right)\right)$$

$$B = \left((-3) + \frac{5}{3}\right) \times (5 \times (-4))$$

$$C = (-4 + (-3,1)) + \left(5 \times \frac{3}{7}\right)$$

$$D = \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{5}{3} + 1\right)\right).$$

18 Même exercice avec les expressions :
$A = (2 \times a) + ((a \times 15) + (15 \times a^2))$
$B = ((9 \div a) \times 5 + (a \times 7))$

$$C = \frac{2}{3} \times (3 + (a \times 4))$$

$D = (a \times (3 \times (a \times (6 + a))))$.

Calculer une expression

19 Calculer $a + bc$ avec :
a) $a = 2,7$ $b = 3,1$ et $c = 10$;
b) $a = 100$ $b = 2$ et $c = -35$.

20 Calculer $(a + b)c$ avec :
a) $a = 5,3$ $b = 0,7$ et $c = -4$;
b) $a = 100$ $b = -10$ et $c = 5$.

21 Calculer les expressions suivantes avec :
$x = -2$ et $y = 3$.
a) $x + 2 \times x \times y - y$
b) $x \div 2 - 2 \div y$
c) $(x + y) \div (x - y)$
d) $(-2) \div x^2 - y \times \frac{2}{3}$.

22 Même exercice avec :

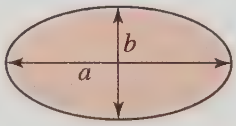
$$x = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad y = -\frac{3}{4}.$$

23 *Aire du losange*
a) Avec quelle formule calcule-t-on l'aire d'un losange ? (Voir le **Formulaire**.)
b) Calculer l'aire d'un losange ayant pour mesures : $D = 8,5$ cm et $d = 4$ cm.

24 *Aire d'un parallélépipède*
a) Avec quelle formule calcule-t-on l'aire totale d'un parallélépipède ? (Voir le **Formulaire**.)
b) Calculer l'aire totale d'une boîte de sucres ayant pour mesures :
$L = 20$ cm $\ell = 10$ cm et $h = 5$ cm.

25 *Volume d'un cylindre*
a) Avec quelle formule calcule-t-on le volume d'un cylindre ? (Voir le **Formulaire**.)
b) Calculer le volume d'un cylindre de 7 cm de rayon et de 10 cm de hauteur. (On pourra remplacer π par $\frac{22}{7}$.)

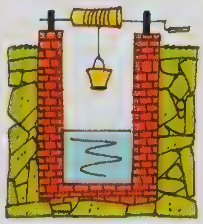
26 *L'ellipse*
L'aire d'une ellipse est donnée par la formule :



$$\mathcal{A} = \frac{1}{4}\pi \times a \times b.$$

Un jardinier a tracé un parterre en forme d'ellipse.
Calculer l'aire du parterre sachant que $a = 5$ m et $b = 4$ m.

27 *Le puits*
Jean-Philippe a laissé tomber une pierre dans un puits. Elle touche l'eau au bout de 3 s. Il peut calculer la profondeur du niveau de l'eau en utilisant la formule :



$$H = \frac{1}{2} \times 9,81 \times t^2.$$

Dans cette formule, t désigne la durée en secondes de la chute de la pierre, et H la profondeur en mètres.
Combien trouve-t-il ?

Exercices

Expressions et calculatrices

28 *Avec les touches* (*et*)

Avec une calculatrice, calculer à 0,01 près les expressions suivantes.

a) $\dfrac{15{,}5 + 2{,}9}{7{,}1}$ b) $\dfrac{25}{1{,}6 \times 9{,}1}$ c) $\dfrac{1{,}8 + 4{,}17}{13 - 2{,}3}$.

29 *Avec les touches* (*et*) *(bis)*

Avec une calculatrice, calculer les expressions suivantes.

a) $(13{,}9 + 9{,}8) \times (7{,}6 + 5{,}73)$

b) $(15{,}2 - 8{,}9) \times (3 - 1{,}21)$

c) $(11 - 2{,}83) \times (3{,}79 + 6{,}86)$.

30 *Du programme à l'expression*

a) Quelle expression calcule ce programme :

« Taper x »,

M + 5 = × (RM + 1) = ?

b) Et celui-ci :

« Taper x »,

M + 5 × (RM + 1) = ?

c) Et celui-là :

« Taper x »,

M + 5 × RM + 1 = ?

31 *Du programme à l'expression (bis)*

a) Quelle expression calcule ce programme :

« Taper x »,

M − 3 × (RM − 4) = ?

b) Et celui-ci :

« Taper x »,

M + 7 = × (RM − 4) = ?

c) Et celui-là :

« Taper x »,

M − 6 = x^2 + 5 × RM = ?

32 *De l'expression au programme*

a) Calculer l'expression $(x + 3)^2 - 1$ pour $x = 2$ puis pour $x = -4$.

b) Écrire un programme qui calcule l'expression $(x + 3)^2 - 1$.

c) En utilisant une calculatrice, vérifier ce programme avec $x = 2$ puis avec $x = -4$.

33 *De l'expression au programme (bis)*

Même exercice avec l'expression $\dfrac{x + 2}{x + 3}$.

34 *De l'expression au programme (ter)*

Même exercice avec l'expression :

$(x + 2) \times (3 + x^2)$.

Suppression de parenthèses dans une somme

35 Calculer les expressions suivantes après avoir supprimé les parenthèses.

$A = 2{,}1 - (3{,}5 + 2{,}1) + (5 + 3{,}5)$

$B = (5{,}3 - 2{,}8) - (4 + 5{,}3)$

$C = -(251 \times 3 + 281) + 3 \times 251 - (1 - 281)$

$D = -\left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{4}\right) - \left(-\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{5}\right)$.

36 Même exercice avec les expressions :

$A = (3{,}1 - 2{,}5) - (-2{,}5 + 3{,}1)$

$B = -(2{,}5 - (3{,}1 - 4))$

$C = -\left(2 \times \dfrac{3}{5} - \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{5}\right)\right)$

$D = -\dfrac{5}{4} - \left(-3 - \left(-3 + \dfrac{1}{3}\right)\right)$.

37 Même exercice avec les expressions :

a) $(a - b) + (b - a)$

b) $(2{,}3 - a) - (5 - b) + (b - a)$

c) $9 - (a + 5) + (4 - b)$

d) $\left(\dfrac{2}{3} - a\right) - \left(\dfrac{1}{3} - b\right) + (a - b)$.

38 Même exercice avec les expressions :

a) $(3x + 2) - (3x - 2)$

b) $x - (-6 + x) + 4$

c) $(x + y) - (y - x) + (-x + y)$

d) $4 + (x - 3) - (-5 + x) - (6 - x)$.

39 Même exercice avec les expressions :

a) $12 - (a - b) + (8 - b)$

b) $(6 - a) + (9 + b) - (12 - a)$

c) $2a - (a - (b + a))$

d) $-(b - 2a) + 2(b - a) - (5 - b)$.

Distributivité

40 *Chez l'électricien*

Trois rouleaux de fil électrique de 22 cm de diamètre sont constitués de : 53 tours pour le premier ; 49 pour le deuxième et 65 pour le troisième.

Calculer de deux façons différentes la longueur de fil disponible avec ces trois rouleaux.

41 *Photocopillage*

On a tiré une triple photocopie du premier chapitre de 4 livres différents.

Pour le premier livre le chapitre 1 est numéroté de 1 à 39, pour le deuxième, de 1 à 15, pour le troisième de 1 à 23 et pour le quatrième de 1 à 27.

Calculer de deux façons le nombre de photocopies réalisées.

Exercices

Avec le temps

42 Une durée de 7 h 42 min 21 s est-elle 7 fois plus grande qu'une durée de 1 h 6 min 3 s ?

43 Une période de temps de 13 h 39 min 53 s est-elle plus grande que 13 fois un laps de temps de 1 h 3 min 4 s ?

44 Une durée de 17 h 11 min 57 s est-elle plus grande que 8 fois 2 h 9 min 4 s ?

Développer et réduire

45 Développer et réduire les expressions suivantes.
$A = 3(x + 5) - 4(x - 2)$
$B = 4(2x - 7) + 2(5 - 4x)$
$C = -(2x + 1) + 10(5 + 3x)$
$D = 2\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + 6\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{12}\right)$.

46 Même exercice avec :
$A = 2(a + 3) - 5(b - 4)$
$B = -3(3 - a) - 4(3 - b)$
$C = 9(4 - a + b) - 3(5 - 3a + 3b)$
$D = (2a - 3) - 2(-5 + b)$.

47 Même exercice avec :
$A = a \times (a - 2) - a \times (3 + a)$
$B = 2 \times (a - 1{,}1) + 3 \times (5 - a)$
$C = 2{,}3 \times (a - b) - 5 \times (a + b)$
$D = a \times (b - a) + b \times (a + b)$.

48 Même exercice avec :
$A = (x + 3) \times (x - 2)$
$B = (2 - x) \times (2 + x)$
$C = (x + 1) \times (x + 2) + (x - 1) \times (x - 2)$
$D = (x + 1) \times (x - 1) - (x - 2) \times (x + 2)$.

49 Même exercice avec :
$A = (a + b) \times (2a + 4b)$
$B = (a - b) \times (2b - a)$
$C = (a - 2b) \times (2a - b)$
$D = (a - 3) \times (b - 4) - (a + 3) \times (b + 4)$.

50 Même exercice avec :
$A = (x + y)(2x + 3y)$
$B = (2x - 1)(1 - 3x)$
$C = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 4)$
$D = (10x + 1)(10x + 1)$.

Équations

51 Résoudre les équations suivantes.
a) $2(x - 5) = 3(x + 1)$
b) $6x - 8 = 4(2x - 7)$
c) $8(5x - 1) + 12 = 7(x + 7)$.

52 Résoudre les équations suivantes.
a) $\frac{5}{3}(6x + 9) = 2(2x + 1{,}5)$
b) $5(3 + x) = 4(-x - 3) + x$
c) $x(x + 13) = (x + 1)(x - 2)$.

53 Même exercice.
a) $3 \times (10 \times x) = 111$
b) $3 \times (10 + x) = 111$
c) $3 + (10 \times x) = 111$
d) $3 + (10 + x) = 111$.

54 Trouver le nombre entier n qui augmenté de 2 001 est égal au double du suivant de n.

55 Trouver le nombre entier dont le quotient par son suivant est égal à 0,98.

56 Trouver le nombre entier dont le produit par son suivant est égal au carré de ce nombre augmenté de 191.

RÉSULTATS

15 $A = \frac{20}{7}$ $B = \frac{25}{6}$.

17 $A = \frac{3}{5} \times \frac{9}{4} + \frac{3}{7} \times 5$

$B = \left(-3 + \frac{5}{3}\right) \times 5 \times (-4)$

$C = -4 + (-3{,}1) + 5 \times \frac{3}{7}$ $D = \frac{3}{4} - \left(\frac{5}{3} + 1\right)$.

19 **a)** 33,7 **b)** 30.

21 **a)** -17 **b)** $-\frac{5}{3}$ **c)** $-\frac{1}{5}$ **d)** $-\frac{5}{2}$.

28 **a)** 2,59 **b)** 1,72 **c)** 0,56.

30 **a)** $(x + 5) \times (x + 1)$
b) $x + 5(x + 1)$ **c)** $x + 5x + 1$.

32 **a)** 24 0.
b) « Taper x », $\boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{x^2}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{=}$.

35 $A = 5$ $B = -6{,}8$ $C = -1$ $D = -1$.

42 $7 \times (1\text{ h} + 6\text{ min} + 3\text{ s})$
$= 7\text{ h} + 42\text{ min} + 21\text{ s}$.
La réponse est donc oui.

45 $A = -x + 23$ $B = -18$
$C = 28x + 49$ $D = 3x$.

51 **a)** $x = -13$ **b)** $x = 10$ **c)** $x = \frac{15}{11}$.

54 $n + 2001 = 2 \times (n + 1)$
d'où $1999 = 2n - n$, soit $n = 1999$.

CHERCHER

Jeux de matheux

57 *Manque de parenthèses*
Placer une paire de parenthèses dans l'expression proposée afin que le résultat soit exact.

a) $2{,}2 - 3{,}3 + 4{,}4 - 5{,}5 + 6{,}6 = -8{,}8$

b) $2{,}2 - 3{,}3 + 4{,}4 - 5{,}5 + 6{,}6 = -4{,}4$

c) $2{,}2 - 3{,}3 + 4{,}4 - 5{,}5 + 6{,}6 = \quad 6{,}6$

d) $2{,}2 - 3{,}3 + 4{,}4 - 5{,}5 + 6{,}6 = -6{,}6.$

58 *Manque de signes*
Ajouter des signes d'opérations et éventuellement des parenthèses pour que les égalités suivantes soient vraies.

a) $x \quad x \quad x \quad 1 \quad x \quad x = 2x(x + 1) + x^2$

b) $y \quad y \quad y \quad x \quad y \quad x = 3yx(x + y)$

c) $y \quad x \quad x \quad y = 2xy^2.$

59 *Devinette*
Vincent pose à son ami la devinette suivante :

a) Faire quelques essais.

b) Vincent a-t-il raison ? Si oui, pourquoi ?

60 *Augustin et Aline*

> Augustin dit à sa camarade Aline : « Je vais deviner ton mois de naissance et ton âge. »
> « Prend le numéro de ton mois de naissance, multiplie-le par 2, ajoute 5, multiplie par 50, ajoute ton âge, retranche 365, ajoute 115 et donne-moi le résultat obtenu. »
> Aline dit le nombre obtenu et Augustin donne le mois de naissance et l'âge d'Aline.

Indiquer comment opère Augustin et justifier sa méthode.

Être ou ne pas être ?

61 *Égales ou pas égales ?*
On donne les deux expressions A et B suivantes :
$A = a \div (b \times c)$ et $B = a \div b \div c.$

a) Calculer A et B pour :
$a = -2, \quad b = -5$ et $c = 4$;
puis pour $a = 9, \quad b = -2$ et $c = 3$.

b) Que constate-t-on ?
Est-ce vrai pour tous nombres a, b et c ? Justifier.

62 *Égales ou pas égales ? (bis)*
On donne les deux expressions A et B suivantes :
$A = (a + b) \div k$ et $B = a \div k + b \div k.$

a) Calculer A et B pour :
$a = 11, \quad b = -5$ et $k = 3$;
puis pour $a = -7, \quad b = -4$ et $k = 5$.

b) Que constate-t-on ?
Est-ce vrai pour tous nombres a, b et k ($k \neq 0$) ? Justifier.

63 *Égales ou pas égales ? (ter)*
Soit a et b deux nombres non nuls et dont la somme n'est pas nulle et soit k un nombre quelconque.

a) Donner un exemple de tels nombres.

b) Est-il vrai que $k \div (a + b) = k \div a + k \div b$ pour tous les nombres a, b et k vérifiant les conditions énoncées au début de l'exercice ?

64 *Nulle ou pas nulle ?*
On donne l'expression E suivante :
$E = (a - b)(c - d) + (a - c)(d - b) + (a - d)(b - c).$

a) Calculer E pour :
$a = -2, \quad b = -1, \quad c = 2$ et $d = -3$;
puis pour :
$a = 2{,}1, \quad b = -1{,}2, \quad c = -2$ et $d = 3{,}4$.

b) Que constate-t-on ?
Est-ce vrai pour tous nombres a, b, c et d ? Justifier.

Expressions numériques et géométrie

65 *Construire des figures*
Tracer un segment. Soit a la longueur de ce segment (unité : le cm).

a) Construire une figure d'aire a^2.

b) Construire une figure d'aire $2a^2$.

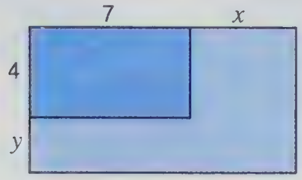
c) Construire une figure d'aire $2a$.

d) Construire une figure d'aire $\dfrac{a^2}{2}$.

66 On a multiplié par 1,5 la longueur d'un rectangle et par 1,2 la largeur. Par combien l'aire de ce rectangle a-t-elle été multipliée ?

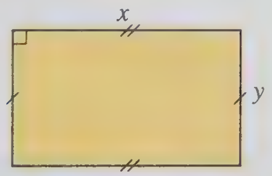
67 Même question en multipliant la longueur par $\frac{5}{4}$ et la largeur par $\frac{8}{5}$.

68 *Rectangle variable*
On modifie un rectangle de 7 cm sur 4 cm en augmentant sa longueur de x cm et sa largeur de y cm.



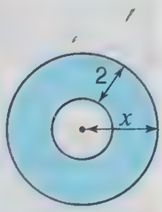
Exprimer en fonction de x et y :
a) le périmètre du nouveau rectangle,
b) l'aire du nouveau rectangle.

69 Le périmètre d'un rectangle est égal à 11.
Soit x sa longueur et y sa largeur.

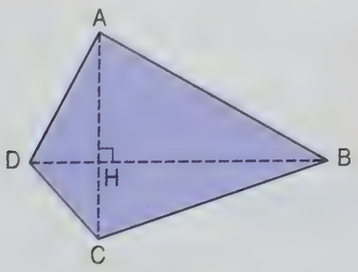


a) Calculer $2x + 2y$.
b) On augmente la longueur de 2 et la largeur de 2.
De combien augmente l'aire du rectangle ?

70 *La couronne*
a) Calculer l'aire de la couronne en fonction de x.
b) Développer et réduire l'expression obtenue.
c) Indiquer une suite de touches de calculatrice permettant le calcul de cette aire.



71 *Une démonstration*
Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires.

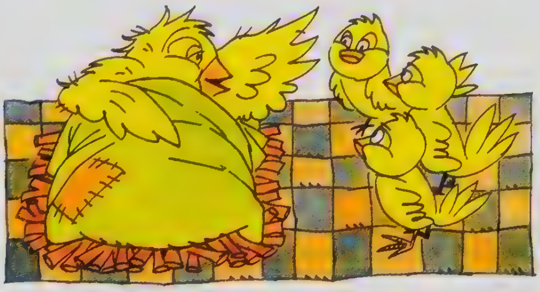


Démontrer que l'aire du quadrilatère ABCD est égal au demi-produit des diagonales.

Mise en équations

72 *Démocratie*
Les 50 guerriers de la tribu ont voté pour l'élection du grand sage : Élan futé a obtenu 13 voix de moins que Lance habile et Ours rusé a obtenu 15 voix de moins que Lance habile.
Combien de voix chacun d'eux a-t-il obtenues ?

73 *Les linottes*
Une vieille linotte, sentant sa fin prochaine, partage 25 110 graines entre ses trois enfants linottes de façon que la deuxième ait les $\frac{3}{4}$ de la part de la première et la troisième les $\frac{9}{5}$ de la part de la deuxième.
Calculer la part de chacune des trois linottes.



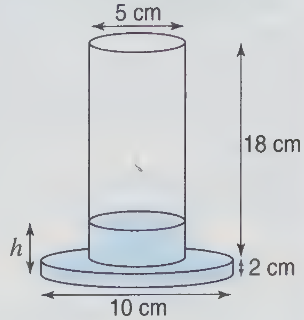
74 *Bon appétit !* (Tournoi de St-Michel-de-l'Herm, 1990)
31 repas coûtent 756 F de plus que 13 repas.
Les repas sont tous au même prix.
Quel est le prix d'un repas ?

75 *Le zéro de Zoé* (Tournoi de St-Michel-de-l'Herm, 1995)
Zoé avait 19,95 de moyenne sur les devoirs de maths de l'année jusqu'à ce tragique problème de géométrie qu'elle n'a pas su commencer ! Zéro sur 20, et une moyenne qui dégringole à 19 !
Combien de notes a-t-elle eues sur l'année, y compris la dernière, dont elle se serait bien passée ?

76 *Que penser ?*
(Rallye mathématique de Maine-et-Loire, 1993)
Je pense à un nombre. Il y a le même écart entre 63 et mon nombre qu'entre mon nombre et 181.
Quel est le nombre auquel je pense ?

77 *L'âge du capitaine*
(Tournoi de St-Michel-de-l'Herm, 1990)
Quel est l'âge du capitaine, sachant que si on multiplie cet âge par 2 et que l'on retire 11, on obtient 85 ?

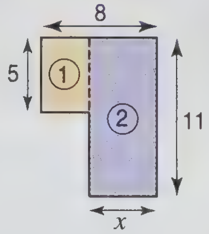
78 *Dites-le avec des fleurs*
(Rallye mathématique Champagne-Ardenne, 1992)
Ce vase est rempli d'eau à la moitié de sa capacité totale.
Quelle hauteur en cm atteint le liquide ?



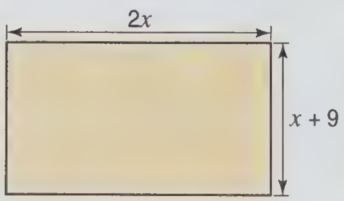
79 *Guerre des étoiles*
(Jeux intergalactiques, Nébuleuse d'Orion, avril 2998)
Un vaisseau spatial a 60 jours d'oxygène. Il vient au secours d'une navette en perdition dont il recueille les 30 rescapés ; il ne lui reste alors que 50 jours d'oxygène.
Combien y avait-il de cosmonautes dans le vaisseau spatial avant le sauvetage ?

Équations en géométrie

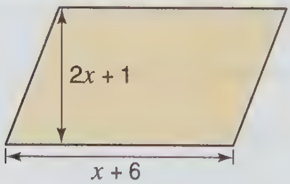
80 On considère le dessin suivant.
a) Calculer x pour que les aires des rectangles coloriés soient égales.
b) Pour quelle valeur de x, le périmètre du rectangle ① est-il égal à celui du rectangle ② ?



81 *Avec un rectangle et un parallélogramme*
a) Pour quelle valeur de x le rectangle suivant est-il un carré ?

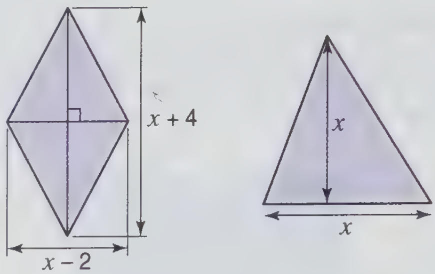


b) Exprimer en fonction de x l'aire du parallélogramme suivant.



c) Pour quelle valeur de x, le rectangle et le parallélogramme ont-ils la même aire ?

82 *Avec un losange et un triangle*
Trouver la valeur de x pour que le losange et le triangle aient la même aire.



83 *Aire d'un trapèze*
a) Comment calcule-t-on l'aire d'un trapèze ? (Voir le **Formulaire de géométrie**.)
b) Un trapèze de 15 cm² d'aire a une base de 8 cm et une hauteur de 3 cm.
Combien mesure l'autre base ?

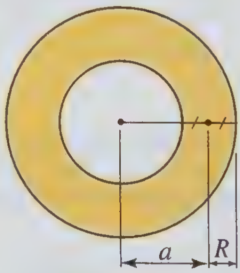
84 *Avec un carré*
Trouver le côté d'un carré tel que si on augmente ce côté de 7 cm alors son aire augmente de 112 cm².

85 *Avec un carré (bis)*
On augmente de 5 cm le côté d'un carré et l'on diminue de 3 cm le côté consécutif. On obtient ainsi un rectangle dont l'aire surpasse de 16 cm² l'aire du carré initial.
Trouver le côté du carré.

Remplacer des lettres par des valeurs

86 *Aire d'une chambre à air*
L'aire d'une chambre à air se calcule à l'aide de la formule :

$$A = 4\pi^2 \times a \times R$$



a) Calculer l'aire de la chambre à air de la roue avant de mon VTT ($R = 2$ cm et $a = 32$ cm).
b) Que devient l'aire si on double le rayon R ?

87 *Volume d'une chambre à air*
Le volume d'une chambre à air se calcule à l'aide de la formule :

$$V = 2\pi^2 \times R^2 \times a$$

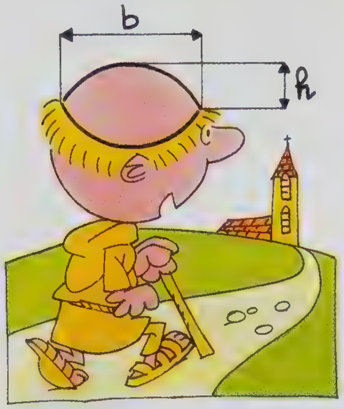
(Voir dessin de l'exercice précédent.)
a) Calculer ce volume avec $R = 2$ cm et $a = 32$ cm.
b) Que devient ce volume si on double R ?

88 *Calotte sphérique*

L'aire d'une calotte sphérique est donnée par :

$$S = \frac{\pi}{4}(b^2 + 4h^2)$$

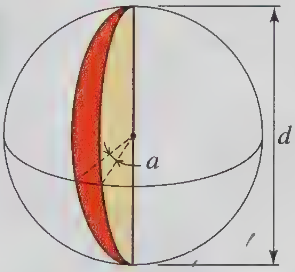
Calculer l'aire d'une calotte sphérique telle que $b = 18$ cm et $h = 7$ cm.



89 *De Hollande*

Le volume d'un quartier de sphère, avec a en degrés, est donné par :

$$V = \frac{\pi}{6} \times d^3 \times \frac{a}{360}$$



Un fromage se présente sous la forme d'une boule rouge de 16 cm de diamètre.
Un gourmet entame ce fromage en coupant un quartier de sphère dont l'angle a mesure 15°.
Calculer le volume du morceau coupé.

90 *Volume d'un tonneau*

Pour mesurer le volume (intérieur) d'un tonneau, on peut utiliser l'une des formules suivantes (L, D et d sont en dm et V est en litres).

1. Formule de Kepler :

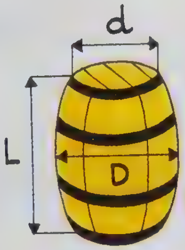
$$V = \frac{\pi L}{12}(2D^2 + d^2).$$

2. Formule de l'an II :

$$V = \frac{\pi L}{36}(2D + d)^2.$$

3. Formule de Dez :

$$V = \pi L \left(\frac{5D + 3d}{16}\right)^2.$$

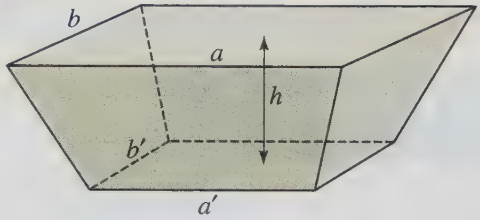


Comparer les 3 résultats obtenus pour le tonneau dont voici les dimensions :
$L = 6{,}6$ dm $D = 5{,}3$ dm et $d = 4{,}1$ dm.

91 *L'auge à maçon* (au début du siècle)

Le volume d'une auge à maçon se calcule avec la formule :

$$V = \frac{1}{6}h\,[b(2a + a') + b'(a + 2a')]$$



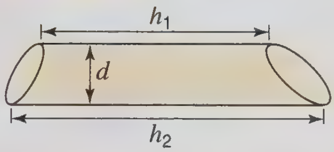
Calculer le volume en litres de l'auge dont voici les dimensions :
$h = 55$ cm $a = 85$ cm $b = 64$ cm
$a' = 42$ cm $b' = 36$ cm.

92 *Boudin sans bouts*

Un gourmand a coupé les deux bouts d'un boudin (voir dessin).
Calculer le volume restant en appliquant la formule :

$$V = \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)$$

avec $d = 4$ cm
$h_1 = 9$ cm
et $h_2 = 12$ cm.



COUPS DE POUCE

59 Soit x le nombre de départ.
Exprimer le résultat du calcul en fonction de x et simplifier l'expression obtenue.

60 On peut essayer avec soi-même ou des personnes connues. Soit n le mois de naissance et a l'âge.
Écrire l'expression calculée.

66 et **67** Soit L la longueur et ℓ la largeur du rectangle initial. Exprimer l'aire du nouveau rectangle en fonction de L et ℓ.

71 Poser $a = \text{DB}$ $h = \text{AH}$ et $h' = \text{CH}$.
Calculer l'aire de deux triangles...

73 Soit x la part de la première linotte.
Quelle est la part de la deuxième en fonction de x ? et la part de la troisième ?

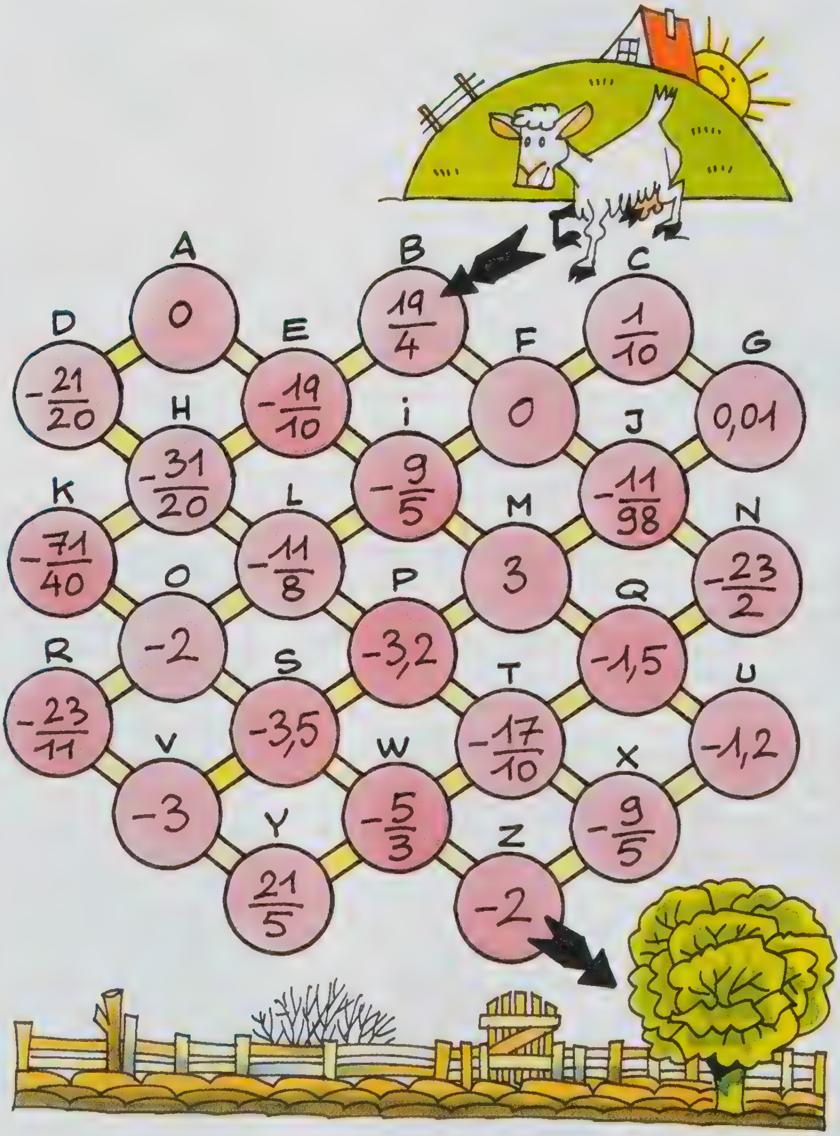
79 Soit a la quantité d'oxygène pour un homme et par jour, et soit n le nombre de cosmonautes avant le sauvetage...

84 et **85** Soit x le côté du carré. Pour résoudre l'équation développer les deux membres et retrancher x^2.

5 Comparaisons de nombres

Activités

1 Le cabyrinthe



Cabrette, la jeune chèvre, a bien envie de croquer ce superbe chou-pomme. Elle peut descendre vers un nombre plus petit ou remonter vers un nombre plus grand. Les autres déplacements sont interdits.
Aidez-la à trouver un chemin.

2 Carrés ordonnés

A. Introduction

INFORMATION

Nous appelons **carré ordonné** une grille carrée contenant des nombres rangés en ordre croissant quand on parcourt :
– les lignes de gauche à droite ;
– les colonnes de haut en bas.

1. Vérifier que le carré ci-contre est ordonné.

1	3	5
2	6	8
4	7	9

2. Modifier ce carré pour qu'il devienne ordonné.

1	2	6
3	7	5
4	8	9

B. Rangements de nombres en écriture décimale

1. Faire un carré ordonné en complétant avec les nombres décimaux positifs suivants.

0,1 1,1 1,11 1,53
1,35 1,09 0,08

		1
1,2		

2. Même travail avec les nombres entiers relatifs suivants.

0 – 1 2 – 3
4 – 5 – 7

		1
– 4		

3. Même travail avec des décimaux relatifs.

0,01 – 3,11 – 5,1 – 3
– 4,9 1,97 1,79

– 3,01		– 0,1

C. Rangements de nombres en écriture fractionnaire

1. Même travail avec des fractions de même dénominateur.

$-\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $-\frac{3}{5}$ $-\frac{4}{5}$
$\frac{6}{5}$ $-\frac{7}{5}$ $\frac{8}{5}$

	$-\frac{2}{5}$	
	$\frac{1}{5}$	

2. Même travail avec des fractions faciles à réduire au même dénominateur.

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$
$-\frac{1}{3}$ $-\frac{2}{3}$ $-\frac{4}{3}$

		$-\frac{5}{6}$
$-\frac{1}{6}$		

3. Même travail avec des fractions à dénominateurs quelconques.

$-\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$
-1 $-\frac{1}{6}$ $-\frac{5}{6}$

		0
$-\frac{1}{2}$		

3 Notation scientifique et ordre de grandeur

A. Avec de grands nombres

1. Écrire, en notation scientifique, les masses suivantes exprimées en kg.

A : un Airbus A310	200 t	M : la tour Montparnasse	120 000 t
C : un Chat	3 kg	P : un Pétrolier	300 000 t
E : la tour Eiffel	11 000 t	T : un TGV	3 000 t
H : un Homme	80 kg	V : une Voiture	800 kg
L : un poids Lourd	32 t		

2. Placer ces masses dans l'intervalle qui convient, sur une droite graduée comme la suivante.

10^0 10^1 10^2 10^3 10^4 10^5 10^6 10^7 10^8 10^9 (en kg)

B. Avec de petits nombres

1. Écrire, en notation scientifique, les masses suivantes exprimées en kg.

C : un disque Compact	15 g	G : un Grain de café	0,2 g
D : un Dictionnaire	1,9 kg	P : un Pythagore de 4e	800 g
E : une Epingle de couturière	0,07 g	S : la masse de Sodium dans un litre d'eau minérale	9,4 mg
F : une pièce de 10 F	6 g		

2. Placer ces masses dans l'intervalle qui convient, sur une droite graduée comme la suivante.

10^{-6} 10^{-5} 10^{-4} 10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} 10^0 10^1 (en kg)

4 Propriétés des inégalités

1.
Le cartable d'Aurélie pèse habituellement 4 kg : $a = 4$.
Celui de Bastien (qui traîne toujours son dictionnaire) pèse 6 kg : $b = 6$.
Aujourd'hui chacun d'eux a emprunté au CDI un livre de 0,8 kg : $c = 0{,}8$.
Maintenant le cartable d'Aurélie pèse $(a + c)$ kg et celui de Bastien $(b + c)$ kg.

- Comparer a et b.
- Comparer $a + c$ et $b + c$.
- $a + c$ et $b + c$ sont-ils dans le même ordre que a et b ?

2.
Amélie est partie à la fête avec 30 F en poche : $a = 30$.
Batiste, lui, avait 35 F : $b = 35$.
Ils ont dépensé chacun 23 F : $c = 23$.
Alors, il reste $(a - c)$ F à Amélie et $(b - c)$ F à Batiste.

- Comparer a et b.
- Comparer $a - c$ et $b - c$.
- $a - c$ et $b - c$ sont-ils dans le même ordre que a et b ?

3. Le chat d'Amandine pèse 3 kg : $a = 3$.
Celui de Bertrand pèse 2,4 kg : $b = 2{,}4$.
Ils sont si gourmands que, dans un an, leur poids sera multiplié par 1,5 : $c = 1{,}5$.
Alors, le chat d'Amandine pèsera $(a \times c)$ kg et celui de Bertrand $(b \times c)$ kg.

- Comparer a et b.
- Comparer ac et bc.
- ac et bc sont-ils dans le même ordre que a et b ?

4. Voici une histoire beaucoup plus dépouillée.
Il était une fois : $a = 5$ $b = 2$ et $c = -3$.
On n'a jamais su s'ils vécurent heureux, ni s'ils eurent beaucoup d'enfants.

- Comparer a et b.
- Comparer ac et bc.
- ac et bc sont-ils dans le même ordre que a et b ?

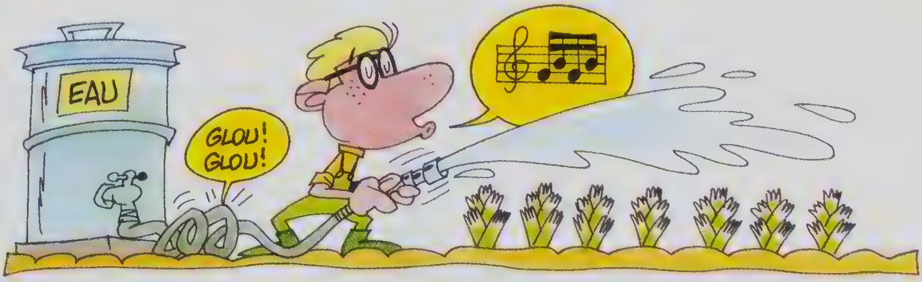
5 Encadrements

A. Tonton au marché

1. Tonton ne se rappelle plus très bien le prix des oranges. Il sait seulement que le prix p d'un kilo était compris entre 7 et 8 F. Il en a acheté 3 kg.
Encadrer le prix de ces 3 kg. Citer la propriété utilisée*.
2. Il a ensuite acheté pour 25 F de fromage à la crémerie.
Encadrer la dépense totale. Citer la propriété utilisée*.

B. Tonton au jardin

1. Pour arroser son jardin, Tonton stocke de l'eau dans un fût contenant une quantité q comprise entre 620 et 630 litres. Hier son fût était à moitié plein.
Encadrer la quantité d'eau en réserve. Citer la propriété utilisée*.
2. Aujourd'hui, il tire 30 litres pour arroser les poireaux.
Encadrer la quantité d'eau qui reste. Citer la propriété utilisée*.



C. Tonton au volant

Près de chez Tonton, il y a un rond-point dont le parterre central est un disque de 20 m de diamètre. Tout en conduisant, Tonton calcule mentalement le périmètre et l'aire de ce parterre. Il sait que $3{,}1 \leqslant \pi \leqslant 3{,}2$.
À partir de cet encadrement de π, encadrer, sans calculatrice, le périmètre et l'aire du parterre.

(*) Consulter les propriétés énoncées page 83.

6 Inégalités sur une droite graduée

1. On gradue une droite $(u'u)$.

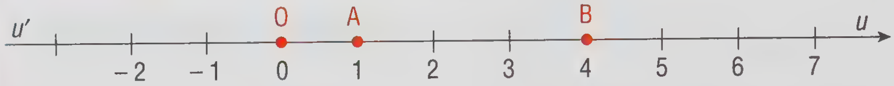
Compléter.

a) L'abscisse x d'un point de la demi-droite $[Du)$ vérifie l'inégalité : $x \geqslant$ ....

b) L'abscisse x d'un point de la demi-droite $[Au')$ vérifie l'inégalité : x ....

c) L'abscisse x d'un point du segment $[BC]$ vérifie la double inégalité : ...... $\leqslant x \leqslant$ ....

2. On considère la droite graduée suivante.



Quelle(s) inégalité(s) vérifie l'abscisse x d'un point :

a) de $[AB]$? **b)** de la demi-droite $[Ou)$? **c)** de la demi-droite $[Ou')$?

3. Sur une droite graduée, colorier les points dont l'abscisse x vérifie :

a) $-4 \leqslant x \leqslant -1$ (en rouge par exemple) ;

b) $x \leqslant -5$ (en bleu) ;

c) $x \geqslant 2$ (en vert).

7 Comparaison et signe de la différence

1. Compléter le tableau suivant.

a	b	$a - b$	Signe de $a - b$	Comparaison de a et b
2,33	– 4,5			
– 3,5	3,55	– 7,05	–	$-3{,}5 \leqslant 3{,}55$
– 5,3	– 6,8			
– 9,83	– 5,8			
2,5	9,8			
3,4	2,33			
5,60	0	5,60	+	$5{,}60 \geqslant 0$
0	9,60			
– 4,7	0			
0	– 8,7			

2. En observant le tableau, compléter avec $\leqslant$ ou $\geqslant$ les phrases suivantes.

PROPRIÉTÉ

Si $a - b$ est positif **alors** a ... b.
Si $a - b$ est négatif **alors** a ... b.

Outils — Comparaisons de nombres

Rappel. Comparer deux nombres, c'est trouver le plus petit, et donc aussi le plus grand.

1 Inégalités, addition et soustraction

Propriété

Soit trois nombres a, b et c :
- $a + c$ et $b + c$ sont dans le même ordre que a et b ;
- $a - c$ et $b - c$ sont dans le même ordre que a et b.

Autrement dit : **Si** $a \leqslant b$ **alors** $a + c \leqslant b + c$ **et** $a - c \leqslant b - c$.
Ou bien : **Si** $a < b$ **alors** $a + c < b + c$ **et** $a - c < b - c$.

Ou encore : On peut ajouter ou retrancher un même nombre aux deux membres d'une inégalité, sans en changer le sens.

Exemple : Si $x \leqslant 20$, on a $x + 3 \leqslant 20 + 3$, c'est-à-dire $x + 3 \leqslant 23$.

2 Inégalités, multiplication et division

Propriété

Soit deux nombres quelconques a et b, et un nombre c strictement positif. Alors :
- ac et bc sont dans le même ordre que a et b ;
- $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ sont dans le même ordre que a et b.

Autrement dit : **Si** $a \leqslant b$ **et si** $c > 0$, **alors** $ac \leqslant bc$ et $\frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{c}$.

Ou bien : **Si** $a < b$ **et si** $c > 0$, **alors** $ac < bc$ et $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Ou encore : On peut multiplier ou diviser, par un même nombre strictement positif, les deux membres d'une inégalité, sans en changer le sens.

Exemple : Si $x < 8$, on a $4x < 4 \times 8$, c'est-à-dire $4x < 32$.

Remarque. Il est indispensable que le nombre c soit **positif**.
En effet, si par exemple $a = 6$, $b = 8$ et $c = -2$, alors on constate que ac et bc (qui valent -12 et -16) ne sont pas dans le même ordre que a et b.

Propriété

Deux fractions ayant un même dénominateur positif sont rangées dans l'ordre de leurs numérateurs.

En effet, pour $c > 0$, $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ sont dans le même ordre que a et b.

Exemples

Encadrement ; ordre de grandeur

1 Encadrement d'un nombre

ÉNONCÉ

Soit $x = \dfrac{1 + 4\sqrt{2}}{5}$. Encadrer x sachant que $1{,}41 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}42$.

Stratégie

À partir de l'encadrement de $\sqrt{2}$, on trouve successivement des encadrements de $4\sqrt{2}$, puis de $1 + 4\sqrt{2}$, et enfin de $\dfrac{1 + 4\sqrt{2}}{5}$.

Solution

On a $1{,}41 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}42$.

Multiplions par 4 :

$5{,}64 \leqslant 4\sqrt{2} \leqslant 5{,}68$.

Ajoutons 1 :

$6{,}64 \leqslant 1 + 4\sqrt{2} \leqslant 6{,}68$.

Divisons par 5 :

$1{,}328 \leqslant \dfrac{1 + 4\sqrt{2}}{5} \leqslant 1{,}336$.

D'où $1{,}328 \leqslant x \leqslant 1{,}336$.

Remarques

Avec $c > 0$, si $a \leqslant b$ alors $ac \leqslant bc$.

Si $a \leqslant b$ alors $a + c \leqslant b + c$.

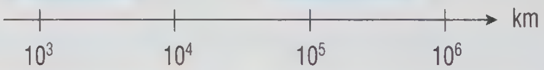
Avec $c > 0$, si $a \leqslant b$ alors $\dfrac{a}{c} \leqslant \dfrac{b}{c}$.

2 Nombres ayant le même ordre de grandeur

ÉNONCÉ

Voici les diamètres, en km, des 6 planètes les plus proches du Soleil.
Écrire ces diamètres en notation scientifique.
Les marquer sur un axe gradué comme ci-contre et former 3 groupes de planètes dont les diamètres sont du même ordre de grandeur.

Mercure	4 900	Mars	6 800
Vénus	12 100	Jupiter	140 000
Terre	12 700	Saturne	120 000

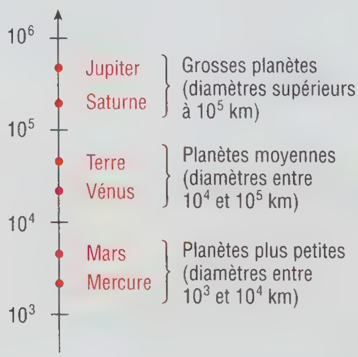


Stratégie

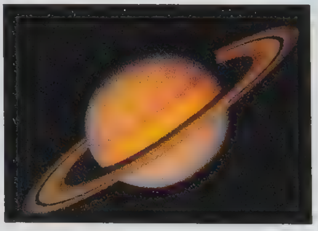
La notation scientifique permet d'encadrer tout nombre entre deux puissances de 10 consécutives.

Solution

Mercure	$4{,}9 \times 10^3$	Mars	$6{,}8 \times 10^3$
Vénus	$1{,}21 \times 10^4$	Jupiter	$1{,}4 \times 10^5$
Terre	$1{,}27 \times 10^4$	Saturne	$1{,}2 \times 10^5$



Remarque



Les trois groupes apparaissent nettement

Exercices

CONSOLIDER

En écriture décimale

1 Comparer :
a) – 21 et + 23 b) 21 et – 23
c) – 31 et – 32 d) 0 et – 50.

2 Comparer :
a) 0,01 et – 0,1 b) – 9,876 et 0,002
c) – 41,72 et – 72,41 d) – 0,003 et 0.

3 Ranger dans l'ordre croissant.
1,5 – 1,5 1,55 1,505
– 1,05 – 2 – 2,05 – 2,55.

4 Ranger dans l'ordre décroissant.
0 – 0,1 – 10 10,1
0,01 10,11 – 0,001 – 10,01.

En écriture fractionnaire

5 Comparer à l'aide d'une calculatrice :
$\frac{355}{113}$ et $\frac{22}{7}$.

6 Même exercice avec $\frac{987}{610}$ et $\frac{610}{377}$.

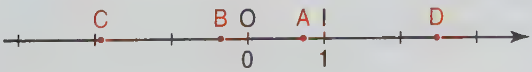
7 Ranger dans l'ordre croissant.
$-\frac{5}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{95}{8}$ $\frac{8}{8}$ $-\frac{7}{8}$ $-\frac{3}{8}$.

8 Ranger dans l'ordre croissant.
$\frac{4}{3}$ $\frac{5}{6}$ $-\frac{2}{4}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3}$.

9 Ranger dans l'ordre croissant.
$\frac{7}{10}$ $-\frac{18}{25}$ $-\frac{21}{25}$ $-\frac{19}{25}$ $-\frac{17}{25}$ $\frac{3}{5}$.

10 Ranger dans l'ordre décroissant.
$\frac{-36}{73}$ $\frac{0}{73}$ $\frac{-173}{73}$ $\frac{4}{5}$ $-\frac{18}{73}$ 1.

11 Les abscisses des points A, B, C et D sont parmi la liste suivante :
$-\frac{1}{3}$ $\frac{3}{4}$ -20 $\frac{5}{2}$ $\frac{3}{2}$ $-\frac{19}{10}$.
Indiquer les abscisses de A, B, C et D.



RÉSULTATS

1 a) $-21 \leqslant +23$ b) $21 \geqslant -23$
c) $-31 \geqslant -32$ d) $0 \geqslant -50$.

3 $-2,55 \leqslant -2,05 \leqslant -2 \leqslant -1,5 \leqslant -1,05 \leqslant 1,5 \leqslant 1,505 \leqslant 1,55$.

5 $\frac{355}{113} = 3,1415...$ et $\frac{22}{7} = 3,1428...$.
Donc $\frac{355}{113} < \frac{22}{7}$.

8 Réduisons les fractions au même dénominateur : 12.
D'où $-\frac{2}{4} \leqslant -\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{7}{12} \leqslant \frac{5}{6} \leqslant \frac{4}{3}$.

SAVOIR FAIRE

Comparaisons

12 a) Comparer les fractions $\frac{133}{11}$ et $\frac{73}{6}$ en les réduisant au même dénominateur.
b) Vérifier le résultat en calculant des valeurs décimales approchées.

13 a) Comparer les fractions $\frac{2\,731}{5\,461}$ et $\frac{1\,365}{2\,731}$ à l'aide de valeurs approchées décimales.
b) Trouver une fraction simple comprise entre ces deux fractions.

14 a) Comparer $\frac{95}{127}$ et $\frac{270}{361}$ à l'aide de valeurs décimales approchées.
b) Ranger les fractions $\frac{95}{127}$; $\frac{270}{361}$ et $\frac{3}{4}$ dans l'ordre croissant.

15 *Chez le maraîcher*
30 % des fruits d'un arrivage sont abîmés. Cela représente-t-il plus du quart de l'arrivage ? Plus du tiers de l'arrivage ?

16 *Élection*
Lors d'une élection, 63 % des électeurs sont allés voter. Y a-t-il eu plus ou moins d'un tiers des électeurs qui se sont abstenus ?

Rangements

17 Ranger dans l'ordre croissant.

$\frac{3}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{1}.$

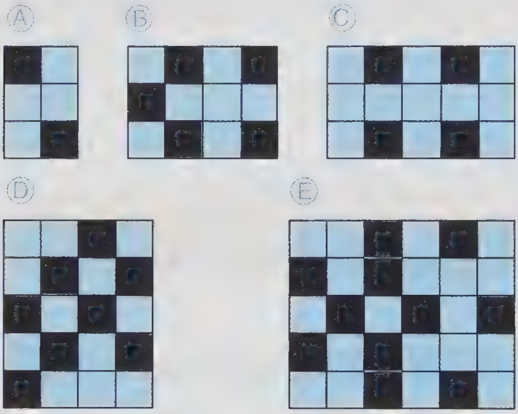
18 Ranger dans l'ordre croissant.

$-\frac{14}{15} \quad \frac{9}{10} \quad \frac{5}{6} \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{17}{30}.$

19 Ranger dans l'ordre décroissant.

$\frac{29}{60} \quad \frac{-17}{30} \quad \frac{8}{15} \quad \frac{-9}{20} \quad \frac{7}{10} \quad \frac{-2}{5}.$

20 *La grille la plus sombre*

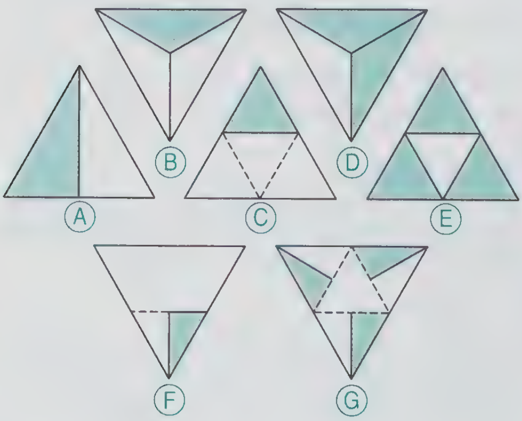


a) Pour chaque grille, exprimer la fraction :

$\frac{\text{nombre de cases noires}}{\text{nombre total de cases}}.$

b) Ranger ces fractions dans l'ordre croissant et indiquer la grille la plus sombre (c'est-à-dire celle correspondant à la plus grande fraction).

21 *Morceaux de triangles équilatéraux*
On a dessiné sept triangles équilatéraux de mêmes dimensions.
Dans chacun d'eux, on a colorié une partie.



a) Compléter le tableau avec les aires des parties coloriées (ce sont des fractions de l'aire du triangle).

Triangle	A	B	C	D	E	F	G
Aire coloriée	$\frac{1}{2}$	...	...	...	...	...	...

b) Classer les triangles, en suivant l'ordre décroissant des aires coloriées.

22 Donner 4 nombres compris entre 7,5 et 7,6. Les ranger dans l'ordre croissant.

23 Donner 4 nombres entre – 1,99 et – 2. Les ranger dans l'ordre croissant.

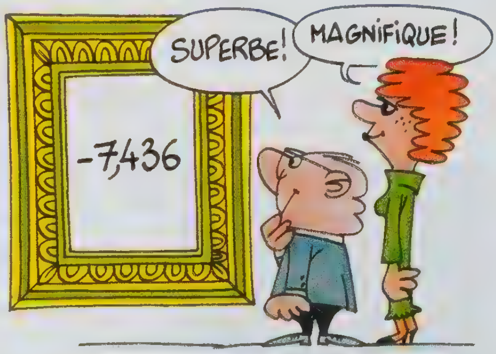
24 Donner 4 fractions comprises entre $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{5}$.
Les ranger dans l'ordre décroissant.

25 Donner 4 fractions comprises entre $-\frac{7}{13}$ et $-\frac{8}{13}$.
Les ranger dans l'ordre décroissant.

26 Utiliser des valeurs approchées pour ranger les nombres suivants en ordre croissant.

$\pi \quad \frac{22}{7} \quad \frac{355}{113} \quad \sqrt{2} + \sqrt{3}.$

Encadrements



27 Encadrer – 7,436 par deux entiers consécutifs.

28 a) Encadrer $\frac{25}{3}$ par deux entiers consécutifs (sans calculatrice !).

b) Même travail avec $-\frac{25}{3}$.

29 a) À l'aide d'une calculatrice, encadrer $\sqrt{1\,000}$ par deux entiers consécutifs.
b) Encadrer $\sqrt{1\,000}$ par deux nombres distants de 0,001.

30 Même exercice avec $-\sqrt{2\,000}$.

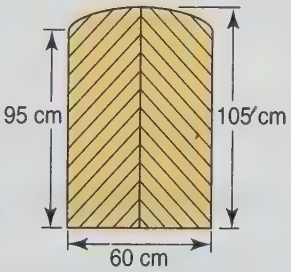
31 a) Encadrer $\frac{100}{7}$ par deux entiers consécutifs.
b) Encadrer $\frac{100}{7}$ par deux nombres distants de 0,000 001.

32 *Périmètre d'un carré*
Soit un carré de côté c et de périmètre p.
On sait que $17{,}3 < c < 17{,}4$. Encadrer p.

33 *Périmètre d'un triangle équilatéral*
Soit un triangle équilatéral de côté c et de périmètre p.
On sait que $19{,}8 \leqslant p \leqslant 20{,}4$. Encadrer c.

34 *Périmètre et aire d'un rectangle*
Soit un rectangle de largeur ℓ, de longueur L, de périmètre p et d'aire a.
On sait que $\ell = 25$ et que $34 < L < 35$.
a) Encadrer p.
b) Encadrer a.

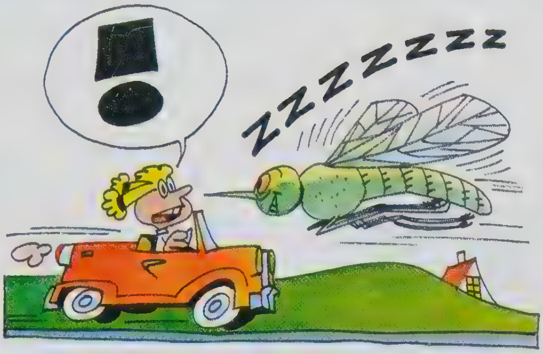
35 *Aire d'un volet*
Encadrer l'aire a de ce volet.



36 *Piles de livres*
a) On considère une pile de 35 livres identiques.
Soit h la hauteur de la pile et soit e l'épaisseur d'un livre, en cm.
On sait que $76 \leqslant h \leqslant 77$. Encadrer e entre deux nombres distants de 0,1.
b) On empile 40 de ces livres sur une table de 90 cm de haut. On appelle H la hauteur qui sépare le sol du dessus de cette nouvelle pile. Encadrer H.

37 *Prix d'un appartement*
On achète un appartement de 65 m² dans une ville où le prix b du mètre carré bâti se négocie entre 8 000 F et 10 000 F. Encadrer le prix p de cet appartement.

38 *Insecticide*



Une automobiliste a compté entre 4 et 7 impacts de moustiques par cm² sur le pare-brise de sa voiture.
Elle note $4 \leqslant n \leqslant 7$.
Encadrer le nombre N de moustiques ainsi éliminés sachant que le pare-brise a pratiquement la forme d'un rectangle de 60 cm × 140 cm.

Dessins

39 *Abscisses de points sur un axe*
a) Refaire la figure suivante en respectant les proportions.

b) Placer sous les lettres A, B, C, D, E et F les fractions suivantes.
$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{5}{3}$.

40 *Coloriage sur un axe (1)*
a) Sur une droite graduée, colorier en rouge les points dont l'abscisse x vérifie $x \leqslant -2$.
b) Sur la même droite, colorier en vert les points dont l'abscisse x vérifie $x \geqslant 3$.
c) Encadrer l'abscisse x des points non coloriés.

41 *Coloriage sur un axe (2)*
a) Sur une droite graduée, colorier en rouge les points dont l'abscisse x vérifie $0 \leqslant x \leqslant 4$.
b) Sur la même droite, colorier en vert les points dont l'abscisse x vérifie $x \geqslant 3$.
c) Encadrer l'abscisse x des points qui ont été coloriés deux fois.
d) Que dire de l'abscisse x des points non coloriés ?

42 *Coloriage dans le plan*
a) Placer dans le plan les points :
A(– 2, – 2) B(6, – 2) C(6, 4) et D(– 2, 4).
b) Encadrer les coordonnées x et y des points situés à l'intérieur du quadrilatère ABCD.

Avec des puissances

43 Comparer :
a) 2^1 et 1^2 b) 3^2 et 2^3 c) 4^3 et 3^4.

44 Comparer :
a) 2^4 et 4^2 b) 2^8 et 16^2 c) 10^3 et 2^{10}.

45 Comparer :
a) 100^2 et 100×10^2 b) 5^2 et 5×10^2
c) 4^3 et 4×10^3 d) 200^3 et 200×10^3.

46 *Entre six décimaux, choisir le moindre*
Donner le plus petit des six décimaux suivants : 10^0 10^{-2} -10^2 10^{-4} -10^3 10^3.

47 *Rangement*
Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants.
$a = 24 \times 10^{-3}$ $b = 8 \times 10^{-1}$ $c = 31 \times 10^3$
$d = 24 \times 10^{-4}$ $e = 314 \times 10^{-3}$ $f = 45 \times 10^1$.
(On pourra commencer par écrire ces nombres en notation scientifique.)

48 *Encadrement*
Soit $a = 1\,414 \times 10^{-2}$.
Encadrer a par 2 entiers consécutifs.

49 *Soleil de plomb*
La masse du Soleil est de $1{,}989 \times 10^{27}$ tonnes.
En déduire un encadrement de la masse du Soleil, exprimée en tonnes, par 2 puissances de 10 consécutives.

RÉSULTATS

15 Plus du quart. Moins du tiers.

18 $-\dfrac{14}{15} < -\dfrac{2}{3} < -\dfrac{1}{2} < \dfrac{17}{30} < \dfrac{5}{6} < \dfrac{9}{10}$.

22 **7,5** $< 7{,}51 < 7{,}52 < 7{,}54 < 7{,}55 <$ **7,6** (par exemple).

24 On peut choisir par exemple :
$\dfrac{2{,}1}{5}$ $\dfrac{2{,}2}{5}$ $\dfrac{2{,}3}{5}$ et $\dfrac{2{,}4}{5}$
c'est-à-dire : $\dfrac{21}{50}$ $\dfrac{22}{50}$ $\dfrac{23}{50}$ et $\dfrac{24}{50}$.
$\dfrac{3}{5} > \dfrac{24}{50} > \dfrac{23}{50} > \dfrac{22}{50} > \dfrac{21}{50} > \dfrac{2}{5}$.

29 **a)** $31 < \sqrt{1\,000} < 32$.
b) $31{,}622 < \sqrt{1\,000} < 31{,}623$.

32 $p = 4c$ et $17{,}3 < c < 17{,}4$.
D'où $4 \times 17{,}3 < 4c < 4 \times 17{,}4$;
donc $69{,}2 < p < 69{,}6$.

CHERCHER

Soyons logiques

50 Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses.
Dans le cas où elles sont fausses, donner un contre-exemple.
a) Si $x < 3$ alors $x < 5$.
b) Si $x < 5$ alors $x < 3$.
c) Si $x > 3$ alors $x > 5$.
d) Si $x > 5$ alors $x > 3$.

51 Même exercice avec :
a) Si $x < 3$ alors $x \leqslant 3$.
b) Si $x \leqslant 3$ alors $x < 3$.
c) Si $x > 3$ alors $x \geqslant 3$.
d) Si $x \geqslant 3$ alors $x > 3$.

52 Même exercice avec :
a) Si $x \leqslant y$ et si $y \leqslant 2$ alors $x \leqslant 2$.
b) Si $x \geqslant 5$ et si $5 \geqslant y$ alors $x \geqslant y$.
c) Si $x \geqslant 3$ et si $x \leqslant 3$ alors $x = 3$.
d) Si $x \leqslant y$ et si $x \leqslant z$ alors $y \leqslant z$.

53 Même exercice avec :
a) Si $1{,}9 \leqslant x \leqslant 3{,}4$ alors $2 \leqslant x \leqslant 3$.
b) Si $1{,}9 \leqslant x \leqslant 3{,}4$ alors $2 \leqslant x \leqslant 4$.
c) Si $1{,}9 \leqslant x \leqslant 3{,}4$ alors $1 \leqslant x \leqslant 4$.
d) Si $1{,}9 \leqslant x \leqslant 3{,}4$ alors $0 \leqslant x \leqslant 10$.

Mini-problèmes

54 *Promotions*
Un lot A de 5 tablettes de chocolat coûte 43 F.
Un lot B de 8 tablettes (de même poids et de même qualité) coûte 60 F.
a) Exprimer par une fraction le prix d'une tablette du lot A.
b) Même question avec le lot B.
c) Dans quel lot le prix de la tablette est-il le plus bas ?

55 *Pour courir un 5 000 mètres*
Le concurrent A a mis les $\dfrac{3}{4}$ d'une demi-heure.
Le concurrent B a mis la moitié de trois quarts d'heure.
Le concurrent C a mis le quart d'une heure et demie.
Classer ces trois concurrents.

Avec des puissances de 10

56 *La masse de notre galaxie*

a) Notre galaxie comporte environ 200 milliards d'étoiles.
La masse du Soleil est de 2×10^{30} kg.
En supposant que chaque étoile a une masse égale à celle du Soleil, donner une estimation de la masse de notre galaxie.
b) La masse de la galaxie NGC 6744 est comprise entre 10^{41} et 10^{42} kg. Peut-on dire qu'elle est du même ordre de grandeur que la masse de notre galaxie ?

57 *Comme le temps passe !*

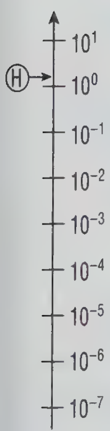
Classer les événements suivants du plus ancien au plus récent.

R	Les tout premiers requins : il y a 450 millions d'années
E	Le premier Européen, dit l'homme de Tautavel : il y a 450 000 ans
V	L'apparition de la vie sur Terre : il y a $3{,}5 \times 10^9$ années
T	Les premiers tyrannosaures : il y a 200×10^6 années
B	Le plus vieux tumulus de Bougon : il y a cinq mille ans
L	Les dessins de la grotte de Lascaux : il y a 17×10^3 années

58 *Petites dimensions*

a) Donner la notation scientifique des dimensions suivantes exprimées en m :

- (H) la hauteur d'un homme : environ 1,70 m ;
- (P) l'épaisseur d'une feuille de papier : environ $\frac{1}{10}$ de mm ;
- (F) le diamètre d'une pièce de 10 F : 23 mm ;
- (M) le jeu dans un cylindre de moteur : $\frac{2}{100}$ de mm,
- (V) la dimension d'un virus : environ 0,5 micromètre (un micromètre = 10^{-6} m) ;
- (E) l'épaisseur d'une vitre : environ 5 mm ;
- (T) la hauteur d'une table : environ 70 cm.



b) En déduire la place approximative de ces dimensions sur la droite graduée.

Divers

59 *Dans la classe de 4ᵉ Z*

- $\frac{3}{4}$ des élèves font de l'espagnol.
- $\frac{2}{3}$ des élèves font de l'informatique.
- $\frac{4}{5}$ des élèves font de l'éducation physique.

Dans quelle activité le nombre d'élèves est-il le plus grand ?

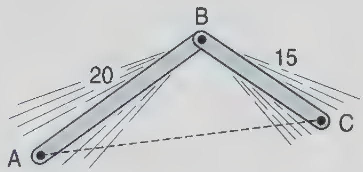
60 *a)* Trouver 4 fractions comprises entre : $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$.

b) Ranger toutes ces fractions dans l'ordre décroissant.

61 Même exercice à partir de $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{5}{3}$.

62 *Inégalités triangulaires (1)*

Deux tiges [AB] et [BC] sont articulées en B. Leurs longueurs sont AB = 20 cm et BC = 15 cm.



Encadrer la longueur AC entre sa valeur minimale et sa valeur maximale.

63 *Inégalités triangulaires (2)*

Même exercice avec AB = $3a$ et BC = $2a$ (où a est une longueur quelconque).

64 *Inégalités triangulaires (3)*

Même exercice avec AB = x, BC = y et $x > y$.

COUPS DE POUCE

56 b) Voir l'Exemple 2 page 84.

57 On peut commencer par écrire les données en notation scientifique.

60 et **61** Réduire au même dénominateur les deux fractions données.

6 Proportionnalité

Activités

1 Calculs en situation de proportionnalité

Révision active

A. Avec un « opérateur »

Nicolas parcourt la campagne avec son vélo. Il fait 10 km en 40 min.

1. Trouver l'opérateur.

Distance (en km)	10			
Temps (en min)	40			

× … ?

2. À l'aide du tableau de proportionnalité, calculer :
– le temps mis pour faire 13 km ;
– la distance parcourue en 28 min.

3. Calculer la distance parcourue en 60 min.
Dire quelle est la vitesse en km/h.

B. Avec des sommes et des multiples

La bouchère vend :
– un premier rôti pesant 1,5 kg pour 123 F ;
– un second rôti pesant 2,5 kg pour 205 F.

1. Calculer astucieusement le prix d'un rôti de 4 kg.

2. Combien paie un client qui achète un rôti pesant 3 fois plus lourd que le premier ?

3. Compléter le tableau suivant (en utilisant les colonnes déjà remplies).

Poids du rôti (en kg)	1,5	2,5	4	4,5	0,5		2	3
Prix du rôti (en F)	123	205				410		

4. Au fait, quel était le prix au kilogramme ?

C. Avec des produits en croix

À la sortie du restaurant scolaire, on demande aux 144 demi-pensionnaires s'ils ont aimé les harengs saurs au chocolat.
Seuls 54 d'entre eux ont aimé.

1. Quel est le pourcentage des élèves qui ont aimé les harengs saurs au chocolat ? (On utilisera un tableau de proportionnalité.)

Nombre d'élèves qui ont aimé	54	
Nombre total d'élèves	144	

2. Si le restaurant avait accueilli 200 demi-pensionnaires, combien de rations aurait-il fallu jeter ? (On suppose que ceux qui n'aiment pas n'en mangent pas.)

2 À toutes vitesses

Les riverains d'une route de campagne ont l'impression que certaines voitures ne respectent pas la limitation à 90 km/h.
Ils ont chronométré les véhicules passant sur des tronçons de 150 m, 200 m ou 250 m.

Véhicule	Mesure effectuée
V_1	150 m en 5 s
V_2	150 m en 6 s
V_3	150 m en 5,4 s
V_4	200 m en 10 s
V_5	200 m en 7,5 s
V_6	200 m en 7,8 s
V_7	250 m en 9 s
V_8	250 m en 12 s

A. Haro sur les chauffards !

1. Pour quels véhicules peut-on affirmer que la limitation de vitesse n'a pas été respectée ?

2. Quel est le pourcentage de véhicules en infraction ?

B. Kilomètres par heure et mètres par seconde

1. Exprimer les vitesses des 8 véhicules en km/h et en m/s. (Ne pas refaire les calculs déjà effectués en A.)

Véhicule	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
Vitesse en km/h								
Vitesse en m/s								

2. Ce tableau est-il « de proportionnalité » ?

Activités

3 Graphiques et proportionnalité

A. Premier graphique

On considère des points A, B, … , G, H dont l'ordonnée s'obtient en multipliant l'abscisse par 1,5.

1. Compléter le tableau.

Point	A	B	C	D	E	F	G	H
Abscisse x	− 5		− 1		2	3	4	
Ordonnée y		− 3		1,5				9

× 1,5

2. Tracer deux axes gradués.
Marquer les points A, B, … , G, H.
Que peut-on dire de ces 8 points ?

B. Deuxième graphique

1. Compléter le tableau.

Point	I	J	K	L	M	N	O	P
Abscisse x	− 5	− 4		1	3		0	8
Ordonnée y			1,6			− 4		

× (−0,8)

2. Marquer les points I, J, … , O, P sur le graphique précédent.
Que constate-t-on ?

C. Troisième graphique

1. Marquer les points Q, R, S, T sur un (nouveau) graphique.
Les 4 points sont-ils alignés ?

2. Les ordonnées sont-elles proportionnelles aux abscisses ? (Justifier à partir du tableau.)

Point	Q	R	S	T
Abscisse x	− 4	− 1	2	4
Ordonnée y	− 2	− 1	2	3

D. Quatrième graphique

1. Marquer les points U, V, W, X sur un graphique.
Les 4 points sont-ils alignés ?

2. Les ordonnées sont-elles proportionnelles aux abscisses ? (Justifier à partir du tableau.)

Point	U	V	W	X
Abscisse x	− 1	0	2	5
Ordonnée y	2	1	− 1	− 4

E. Résultat à retenir

Compléter.

INFORMATION

- Si des points ont leurs ordonnées proportionnelles à leurs abscisses, alors ces points sont ……………………………………………………
- Si des points sont alignés avec l'origine, alors ……………………………

Activités

4 Chez le marchand de pneus

Un marchand de pneus a diffusé un prospectus publicitaire. On y trouve, sur une page entière, la liste des pneus avec leurs prix. En voici un extrait.

PNEUS NEUFS

DIMENSIONS	PRIX HT	PRIX TTC
145 × 10	215,00	259,29
145 × 12	228,63	275,73
155 × 12	253,00	305,12
135 × 13/S	149,30	180,06
145 × 13/S	175,42	211,56
155 × 13/S	191,10	230,47
165 × 13/S	222,45	268,27
145 × 14/M	225,44	
155 × 14/MB	241,48	
175 × 14/M	271,72	

A. La TVA (taxe sur la valeur ajoutée)

1. Que veut dire « prix HT » ? et « prix TTC » ?
Compléter.

prix TTC = prix HT + ...

2. Quel est le montant de la TVA sur un pneu valant 215 F HT ?
3. Quel est le taux, c'est-à-dire le pourcentage, de cette TVA ?

Utiliser un tableau comme celui-ci :

TVA		
Prix HT		

4. Calculer le prix TTC du pneu valant 225,44 F HT.

B. Comment passer du prix HT au prix TTC ?

Lorsque la TVA est de 20,6 % du prix HT, on peut démontrer que :

prix TTC = prix HT × 1,206.

1. Vérifier, en effectuant des multiplications, les prix TTC indiqués dans la liste du début.
2. Calculer les prix TTC des deux derniers pneus de cette liste.
3. Quel serait le prix HT d'un pneu valant 506,52 F TTC ?
4. Les prix TTC sont-ils proportionnels aux prix HT ? Justifier.

Activités

5 Indice du coût de la construction

L'indice du coût de la construction (abréviation : ICC) est utilisé pour comparer les prix d'une même construction (d'immeuble ou de maison) selon l'époque.
Cet indice existe depuis 1953 ; on l'avait alors fixé à 100. Voici quelques valeurs de l'ICC.

Année	1953	1975	1980	1985	1990	1994	1995	1996
ICC	100	364	610	847	952	1019	1013	1046

Il s'agit de l'ICC publié par l'INSEE. Les valeurs sont celles du 4^{e} trimestre de chaque année.

Cela signifie que ce qui coûtait 100 F, en 1953, coûtait 364 F en 1975, 610 F en 1980, etc.

1. Une maison construite en 1975 a coûté 200 000 F.
Combien aurait-elle coûté 20 ans plus tard ?

2. Un studio neuf a coûté 260 000 F en 1996.
Combien aurait-il coûté en 1990 ?

3. Les loyers sont généralement **indexés** sur l'ICC de l'année précédente (car celui de l'année en cours n'est pas encore connu).
Un studio a été loué 1 800 F par mois en 1996. Combien a-t-il été loué en 1997 ?

4. Entre 1980 et 1981, l'ICC a augmenté de 10,3 %.
Calculer l'ICC de 1981.

5. Exceptionnellement, l'ICC a baissé entre 1994 et 1995.
Calculer le pourcentage de cette baisse.

6 Spécial compétition

A. Les œufs d'autruche (Rallye mathématique de Loire-Atlantique)
Un œuf d'autruche permet de faire une omelette correspondant à 24 œufs de poule. Avec 6 œufs de poule, on fait une omelette pour 5 personnes.
Combien faut-il d'œufs d'autruche pour que 60 personnes mangent de l'omelette ?

B. Sans rapporteur ! (Tournoi mathématique de St-Michel-en-l'Herm, 1990)
Quel est l'angle formé par les aiguilles d'une montre à 12 h 12 ?

C. Paul ou Virginie (Rallye mathématique du Centre, 1988)
Une distance de 2 km sépare Paul et Virginie qui marchent l'un vers l'autre à la vitesse de 3 km/h. Leur chien Médor qui aime autant son maître que sa maîtresse court de l'un à l'autre à la vitesse de 8 km/h.
Quelle distance Médor aura-t-il parcourue lorsque Paul et Virginie se rencontreront ?

D. Les chats (Fédération française de jeux mathématiques, 1990)
Sept chats mangent sept souris en sept minutes.
Combien faut-il de chats au minimum pour manger cent souris en cent minutes ?

Outil — Proportionnalité

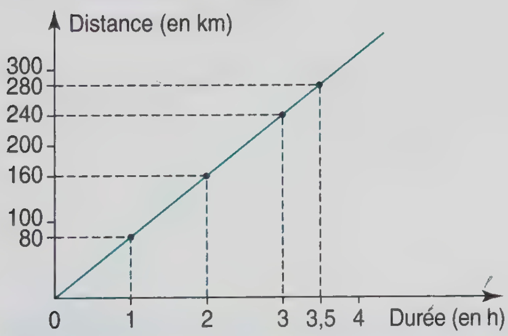
Étude d'un mouvement uniforme

A. Exemple

Si une voiture se déplace à la **vitesse constante** de 80 km/h, elle parcourt :
- en 1 h : 80 km ;
- en 2 h : $80 \times 2 = 160$, donc 160 km ;
- en 3 h : $80 \times 3 = 240$, donc 240 km ;
- en 3 h et demie : $80 \times 3{,}5 = 280$, donc 280 km.

Durée du parcours (en h)	1	2	3	3,5
Distance parcourue (en km)	80	160	240	280

$\times 80$



PROPRIÉTÉ

Si la vitesse est constante, on a : (distance parcourue) = vitesse × (durée du parcours).
La distance parcourue est proportionnelle à la durée du parcours.

On dit dans ce cas que le **mouvement est uniforme**.

B. Formule et unités

Pour pouvoir écrire une formule simple, on note :
- d la distance parcourue ;
- v la vitesse ;
- t le temps (ou la durée) du parcours.

On a alors : $d = v \times t$.

Cette formule en donne deux autres : $v = \dfrac{d}{t}$ et $t = \dfrac{d}{v}$.

Si d est en km et t en h, alors v est en km/h.
Si d est en m et t en s, alors v est en m/s.

L'essentiel

Exemples — Calculs en situation de proportionnalité

1 En vitesse

ÉNONCÉ

Un escargot de compétition surfe à vitesse constante sur une feuille humide de bananier.
Il parcourt 2,8 cm en 7 secondes.
a/ Quelle distance parcourt-il en 19 secondes ?
En combien de temps parcourt-il un mètre ?
b/ Quelle est la vitesse de l'escargot en cm/s ?

Stratégie

a/ En garnissant le tableau des données, on voit que : $2{,}8 = 7 \times 0{,}4$.
La deuxième ligne du tableau s'obtient donc en multipliant la première par 0,4.

b/ On peut appliquer la formule : $v = \dfrac{d}{t}$.

Solution

a/ Portons les données dans un tableau, en notant x et y les nombres cherchés.

Durée (en s)	7	19	y
Distance (en cm)	2,8	x	100

$\times 0{,}4$

On observe que :
$2{,}8 = 7 \times 0{,}4$
On a donc :
$x = 19 \times 0{,}4 = 7{,}6$
et $100 = y \times 0{,}4$
d'où $y = \dfrac{100}{0{,}4} = 250.$

Finalement, l'escargot parcourt **7,6 cm** en 19 s et met 250 s (ou **4 min 10 s**) pour faire 1 m.

b/ En 7 s, l'escargot parcourt 2,8 cm. En 1 s, il parcourt donc 0,4 cm (car $2{,}8 \div 7 = 0{,}4$).
La vitesse de l'escargot est **0,4 cm/s**.

Remarque

Comme la vitesse est constante, le tableau est de proportionnalité.

1 m = 100 cm.

$$\begin{array}{r|l} 250 & 60 \\ \hline 10 & 4 \end{array}$$

donc 250 s = 4 min 10 s.

2 Consommation

ÉNONCÉ

Dans la forêt amazonienne, un tamanoir mange 1 000 fourmis toutes les 40 min.
Combien en mange-t-il en 20 min, en 1 h, en 2 h, en 3 h et en 5 h ?

Stratégie

En inscrivant les données dans le tableau, on voit que :

- $20 \text{ min} = \frac{1}{2} \times 40 \text{ min}$
- $1 \text{ h} = 40 \text{ min} + 20 \text{ min}$
- $2 \text{ h} = 2 \times 1 \text{ h}$
- etc.

D'où une méthode simple pour calculer x, y, z, u et v.

Solution

Soit x, y, z, u et v les nombres cherchés.

Durée	Nombre de fourmis mangées
40 min	1 000
20 min	x
1 h	y
2 h	z
3 h	u
5 h	v

- 20 min est la moitié de 40 min ;

donc $x = \frac{1}{2} \times 1\,000 = 500.$

- 1 h est la somme de 40 min et de 20 min ; donc :

$y = 1\,000 + x = 1\,000 + 500 = 1\,500.$
- 2 h est le double de 1 h ; donc :

$z = 2 \times y = 2 \times 1\,500 = 3\,000.$
- 3 h est le triple de 1 h ; donc :

$u = 3 \times y = 3 \times 1\,500 = 4\,500.$
- 5 h est la somme de 2 h et de 3 h ; donc :

$v = z + u = 3\,000 + 4\,500 = 7\,500.$

On définit les inconnues.

3 Change - Wechsel - Cambio

ÉNONCÉ

Si 20 dollars valent 17 euros, combien d'euros valent 23 dollars ?

Stratégie

Les données n'incitent pas à utiliser les méthodes de calcul adoptées dans les exemples précédents. Alors on pourra utiliser l'égalité des produits en croix.

Solution

Soit x le nombre cherché.

\$	20	23
€	17	x

Dans un tableau de proportionnalité, les produits en croix sont égaux.

D'où $20 \times x = 17 \times 23.$

Donc $x = \frac{17 \times 23}{20} = 19{,}55.$

Conclusion : 23 \$ valent **19,55 €**.

On définit l'inconnue.

Exercices

CONSOLIDER

Proportionnalité

1 *Les escabeaux*

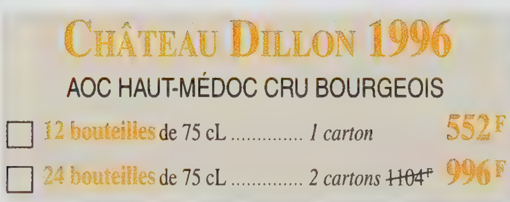
2 MARCHES : 85 F
3 MARCHES : 100 F
4 MARCHES : 145 F
5 MARCHES : 165 F

a) Compléter le tableau.

Nombre de marches				
Prix				

b) Le prix est-il proportionnel au nombre de marches ? Justifier.

2 *Achat de vin*



a) Que signifie le prix barré : 1 104 F ?
Le prix du vin est-il proportionnel à la quantité achetée ?
b) Si on achète 24 bouteilles, quel sera le prix de revient d'une bouteille ? Quel sera le prix de revient d'un litre ?

3 *Le prix de 10 litres*
Lorsqu'une marchandise coûte un certain prix par litre, le prix est proportionnel à la quantité.
Si 6 L coûtent 23,04 F, combien coûtent 10 L ?

4 *Le volume du pichet*
Un robinet qui donne 2,7 litres d'eau en 1 minute remplit un pichet en 35 secondes. Quel est le volume du pichet ?

5 *Déplacement à vitesse constante*
a) Compléter le tableau suivant.

Temps de parcours t (en h)	Distance parcourue d (en km)
1	
2	160
3	
5	
6	
8	
	800

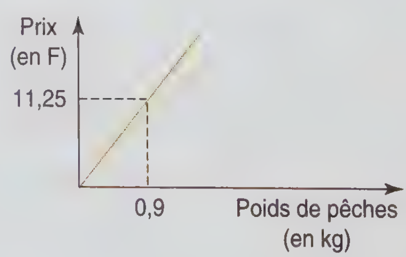
b) Quelle est la vitesse de ce véhicule (en km/h) ?
c) Compléter les formules :
$d = \ldots\ldots \times t$ et $t = \ldots\ldots$.

6 *Écoulement à débit constant*
a) Compléter le tableau suivant.

Temps t (en min)	Quantité d'eau q (en L)
1	
2	
5	75
8	
10	
	300
30	

b) Quel est le débit de ce robinet (en L/min) ?
c) Compléter les formules :
$q = \ldots\ldots \times t$ et $t = \ldots\ldots$.

7 *Prix des pêches*
Le graphique suivant est une demi-droite.



a) Quel est le prix de 1 kg de pêches ?
b) Quel poids de pêches peut-on acheter pour 81,25 F ?

Pourcentages

8 Calculer sans poser aucune opération les pourcentages des sommes indiquées en haut du tableau.

	100	50	150	450	225
8 %					
16 %					
24 %					
12 %					

9 *TVA*
Le prix des marchandises est soumis à une taxe appelée TVA qui peut valoir 20,6 %.
a) Compléter le tableau suivant.

Prix HT (en F)	100	120	250	500
Taxe (en F)				

× 0,...

b) Calculer le prix TTC (c'est-à-dire toutes taxes comprises) d'un article valant 350 F hors taxe.
c) Calculer le prix HT (hors taxe) puis le prix TTC d'un produit soumis à une taxe de 175,10 F.

10 *TVA (bis)*
La TVA est une taxe égale à 20,6 % du prix HT.
a) Un produit vaut 1 235 F HT. Calculer le montant de la TVA, puis le prix TTC.
b) Calculer le prix HT et le prix TTC d'un produit soumis à une taxe de 75,19 F.

11 *Calculer un pourcentage*
Dans une entreprise, sur 3 000 employés, il y a 1 200 femmes. Calculer le pourcentage de femmes travaillant dans cette entreprise.

Effectif total	3 000	100
Femmes	1 200	?

RÉSULTATS

2 b) Prix d'une bouteille : 41,5 F.
Prix d'un litre : 55,33 F environ.

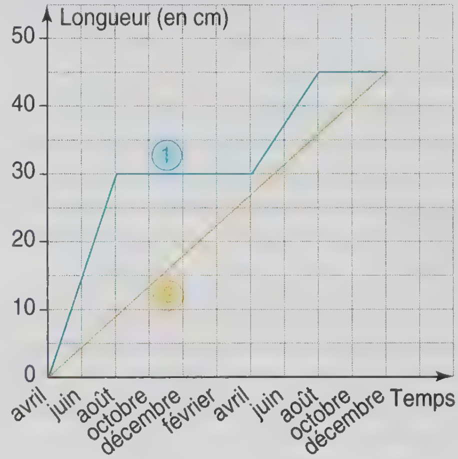
5 b) 80 km/h.
c) $d = 80 \times t$ et $t = d \div 80$.

9 a) À droite du tableau : × 0,206.
b) 422,10 F.
c) Prix HT : 850 F.
Prix TTC : 1 025,10 F.

SAVOIR FAIRE

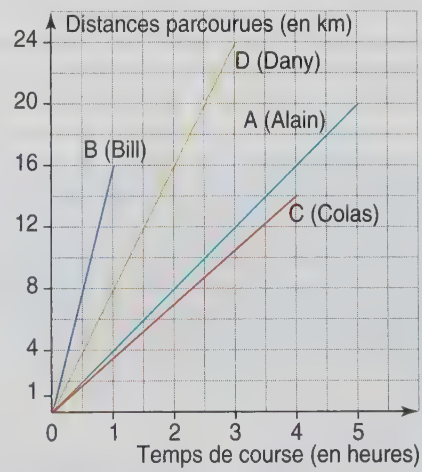
Graphiques

12 *Allongement d'un rameau de marronnier*
Ces deux graphiques sont supposés représenter la longueur d'un rameau de marronnier d'avril 1997 à décembre 1998.



a) L'un de ces graphiques ne traduit pas correctement l'allongement du rameau : lequel et pourquoi ?
b) La longueur d'un rameau de marronnier est-elle proportionnelle à sa durée de vie ?

13 *Jogging*
Pour mesurer leur forme, Alain, Bill, Colas et Dany décident de courir jusqu'à épuisement. Leurs performances sont représentées sur le graphique suivant.



a) Qui a couru :
– le plus loin, le moins loin ?
– le plus longtemps, le moins longtemps ?
– le plus vite, le plus lentement ?
b) Calculer la vitesse moyenne de chacun.

14 *Avant de faire sauter le bouchon*
On a mis une bouteille de champagne au réfrigérateur.
Compte rendu de l'expérience :

> À partir d'une température initiale du champagne égale à 25 °C, les mesures effectuées toutes les dix minutes ont montré un lent refroidissement : après 30 minutes, la température est encore supérieure à 20 °C, et c'est seulement après trois heures que l'on obtient une température de 15 °C ; la température de 12 °C n'a été atteinte qu'après six heures ! Cette mesure confirme, expérimentalement, que le verre conduit mal la chaleur.
> (Extrait de *Pour la Science*, n° 240, octobre 1997.)

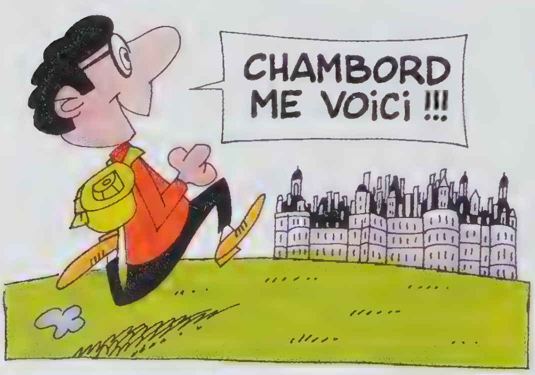
a) Compléter le tableau suivant.

heures	0	3	6
°C			

b) Tracer une courbe de la température du champagne en tenant compte du texte.
c) La température du champagne est-elle proportionnelle au temps passé dans le réfrigérateur ? (Justifier.)
d) D'après le graphique, quelle est la température approximative du champagne après 2 h ? et après 4 h ?

PPP : petits problèmes de proportionnalité

15 *Visite du château de Chambord*
Au château de Chambord, le public peut visiter 73 salles.
a) Un touriste envisage de visiter toutes les salles en passant 5 min dans chacune d'elles. Il commence à 9 h. À quelle heure finira-t-il ?
b) Le guide vert Michelin « Châteaux de la Loire » propose de visiter le château de Chambord en 1 h 1/2. Dans ces conditions, calculer à une seconde près le temps moyen consacré à chaque salle.



16 *Dans la région de Cognac*
Un vignoble de 225 hectares a produit, en 1996, 32 400 hL de vin blanc.
Ce vin contient 10 % de son volume en alcool pur. (On dit qu'il fait 10°.)
Calculer le rendement moyen en hL d'alcool pur par hectare.

17 *Dans une papeterie industrielle*
Après une série de traitements appropriés, la pâte à papier est transformée en une immense feuille continue de 3,40 m de largeur.
La production, ininterrompue, est de 500 m par minute. La feuille s'enroule autour d'un énorme rouleau.
Combien pèse le rouleau de papier au bout d'une heure de production si le papier ainsi fabriqué pèse 80 g au m^2 ? (On donnera le résultat en tonnes.)

18 *Le geyser*
Dans le parc de Yellowstone, aux États-Unis, le geyser « Le Géant » rejette en moyenne 13 850 hL d'eau chaude au cours de chacune de ses éruptions. Chaque éruption dure environ 4 minutes. Calculer le débit du geyser en m^3 par seconde.

19 *Débit de la Seine*
Au mois de janvier, le débit moyen de la Seine est d'environ 500 m^3 par seconde.
a) Combien s'écoule-t-il de m^3 d'eau dans la Seine en 1 minute, en 1 heure, en 1 jour, en 1 mois de 31 jours ?
b) Serait-il raisonnable de calculer le volume d'eau qui s'écoule dans la Seine pendant une année en considérant que celui-ci est proportionnel à la durée ? Pourquoi ?

Vitesses

20 *C'est du tonnerre !*
Un éclair illumine le ciel. J'entends le tonnerre 12 secondes plus tard. Sachant que le son parcourt 340 m par seconde, quelle distance me sépare de ce phénomène ?

21 *L'écho*
Cinq secondes après avoir crié, j'entends l'écho de ma voix. Quelle distance me sépare de la paroi rocheuse qui a renvoyé le son ? (Vitesse du son : 340 m/s.)

22 *Ça roule*
Une voiture roule à 90 km/h.
a) En combien de temps parcourt-elle 100 m ?
b) Quelle est sa vitesse en m/s ?

23 *Sécurité sur autoroute*
Voici un document pour automobilistes.

> **Attention à la fatigue**
>
> La conduite sur autoroute tend à vous endormir. Deux secondes d'inattention à 130 km/h et vous parcourez 72 mètres incontrôlés. Évitez ce risque en cassant la monotonie de votre rythme de conduite en modifiant :
> • votre vitesse ;
> • la température intérieure de votre voiture.
> N'hésitez pas à vous arrêter sur les parkings et les aires de repos.

Est-il vrai que l'on parcourt 72 m en 2 s à 130 km/h ?

24 *À tire d'aile*
La foulque peut parcourir 730 km en 2 jours. La pie grièche écorcheuse avale 700 km en 20 heures. Le tourne-pierre est un petit échassier qui franchit 825 km en 25 heures.
Calculer en km/h la vitesse moyenne de chacun de ces oiseaux.
Les classer du plus lent au plus rapide.

25 *Migrations d'oiseaux*
Calculer, en jours et en heures, le temps mis par les oiseaux migrateurs suivants pour faire 2 800 km sans escale :
a) un bécasseau volant à 80 km/h ;
b) un courlis volant à 70 km/h.

26 *Le TGV Atlantique*

Un TGV part de la gare de Bordeaux à 7 h 10 pour arriver à la gare de Paris-Montparnasse à 10 h 40, après avoir parcouru 580 km.
a) Calculer sa vitesse moyenne en km/h puis en m/s.
b) Entre Saint-Pierre-des-Corps et Paris, le TGV franchit 230 km en 1 heure exactement. Donner sa vitesse moyenne, sur ce tronçon, en m/s.

27 *Une péniche et des fractions*
Une péniche se déplace à la vitesse de 4 km et demi par heure.
Combien parcourt-elle en 2 h 3/4 ?

28 *Vitesses d'une cassette*
On s'intéresse à une cassette audio de 2 fois 30 min.
a) En position « lecture », la bande défile à la vitesse de 4,8 cm/s. Calculer la longueur de la bande.
b) Le rembobinage de la bande se fait en 1 min et 40 s.
Calculer la vitesse de rembobinage (en cm/s).

Records de vitesses

(Source : *Livre Guiness des Records*, 1998.)

29 *La plus forte accélération*
Tony Gillet a fait passer sa voiture de 0 km/h à 100 km/h en 3,2 s sur une distance de 48,18 m.
Quelle a été sa vitesse moyenne en m/s, puis en km/h ?

30 *Marathon*
Le record appartient à l'Éthiopien Balayneh Dinsamo qui a parcouru en 2 h 6 min 50 s les 42,195 km du marathon de Rotterdam, le 17.04.88.
Calculer sa vitesse en m/s et en km/h.

31 *Tennis*
Le record de vitesse d'une balle de tennis est 228 km/h.
En combien de secondes parcourt-elle la longueur du terrain (qui est de 23,77 m) ?

32 *Patins à roulettes*
Le 31.08.85, à Saint-Brieuc, Philippe Le Corvec a remporté l'épreuve des 100 km sur piste en 3 h 41 min 48,74 s.
Sa vitesse moyenne dépassa-t-elle 27 km/h ?

33 *Grande vitesse au sol*
Le 15.10.97, le Britannique Andy Green a atteint la vitesse de 1 240,77 km/h (record homologué) dans le désert du Nevada (USA) à bord d'un engin à turboréacteurs surnommé Thrust SSC.

a) Calculer sa vitesse en m/s.
b) Est-il allé plus vite que le son (340 m/s) ?
c) À cette vitesse, combien de temps lui a-t-il fallu pour parcourir 1 km ?

34 *Aux 24 heures du Mans*
Le Français Alain Ferté a battu le record du tour le plus rapide en 1989. Il a parcouru un tour en 3 min 21,27 s à 242,093 km/h. Calculer la longueur d'un tour.

35 *Kayak*
Aux JO de 1992 à Barcelone, le kayak à quatre de l'équipe allemande a remporté l'épreuve des 1 000 m en 2 min 52,17 s. Calculer sa vitesse moyenne en km/h.

36 *Natation*
Le 18.06.94, le Russe Alexandre Popov a battu le record du 100 m nage libre à Monte-Carlo en 48,21 s. A-t-il été plus rapide qu'un piéton marchant à 7,5 km/h ?

37 *Records aux 100 m, 200 m et 400 m*
En août 1997 les records du monde aux 100 m, 200 m, 400 m et relais 4 fois 100 m étaient les suivants.

Distance	Temps pour les hommes	Temps pour les femmes
100 m	9,84 s	10,49 s
200 m	19,32 s	21,34 s
400 m	43,29 s	47,60 s
4 fois 100 m	37,40 s	41,37 s

a) Faire un tableau dans lequel figureront les vitesses moyennes (en m/s).
b) Comparer les vitesses moyennes au 200 m et au 100 m (pour les hommes). Comment cela s'explique-t-il ?
c) Comparer les vitesses moyennes au relais 4 × 100 m et au 400 m (pour les hommes et les femmes). Comment cela s'explique-t-il ?

Pourcentages

38 *Bien lire le texte*
a) Un objet coûte 150 F. On réduit son prix à 30 %. Quel est son nouveau prix ?
b) Un objet coûte 150 F. On réduit son prix de 30 %. Quel est son nouveau prix ?

39 *On regarde à la dépense* (Exercice du Bac L, 1994)
Un dimanche, une personne dispose de 1 000 F. Elle dépense 20 % de cette somme le lundi, puis 20 % du reste le mardi et ainsi de suite jusqu'au vendredi. De quelle somme dispose-t-elle le mardi matin, le mercredi matin et le samedi matin suivants ?

40 *Un terrain élastique*
Un terrain rectangulaire mesure initialement 150 m × 200 m.
a) La largeur diminue de 10 % et la longueur augmente de 10 %.
Calculer l'aire du terrain ainsi modifié.
L'aire a-t-elle augmenté ou diminué ? de quel pourcentage ?
b) Mêmes questions dans le cas où la longueur diminue de 10 % et la largeur augmente de 10 %.

41 *Baisse des prix de l'électricité*
En 1997, EDF a annoncé une baisse du prix de l'électricité pour les années suivantes (car les dépenses de construction des centrales nucléaires sont en grande partie remboursées).

1997	– 4,60 %
1998	– 3,50 %
1999	– 2,25 %
2000	– 2,25 %

Pour avoir une idée plus précise de cette série de baisses, imaginons un client, qui consomme chaque année la même quantité d'électricité, et qui a payé 100 F en 1996.
a) Combien paie-t-il en 1997 (4,60 % de moins qu'en 1996) ?
b) Combien paie-t-il en 1998 (3,50 % de moins qu'en 1997) ?
c) Combien paie-t-il en 1999 (2,25 % de moins qu'en 1998) ?
d) Combien paie-t-il en 2000 (2,25 % de moins qu'en 1999) ?
e) Donner les valeurs de « l'indice du prix de l'électricité, base 100 en 1996 ».

1996	1997	1998	1999	2000
100				

RÉSULTATS

15 **a)** 15 h 05 min **b)** 74 s environ.
17 8,16 t.
18 5,771 m^3/s environ.
20 4,080 km.
27 12,375 km.
29 Environ 15,056 m/s ou 54,203 km/h.
34 13,535 km environ.
38 **a)** 45 F **b)** 105 F.

CHERCHER

Vitesses

42 *Travaux d'aiguilles*
On s'intéresse aux aiguilles d'une horloge.

a) Combien de tours par heure fait :
- l'aiguille des heures ?
- l'aiguille des minutes ?
- l'aiguille des secondes ?

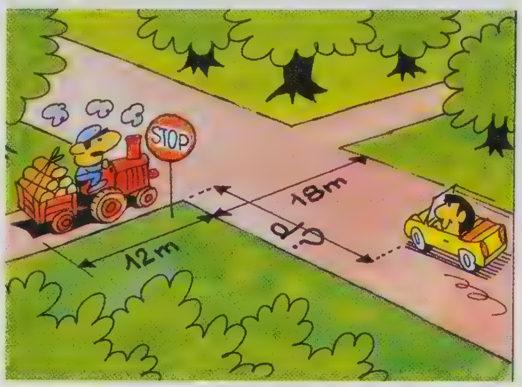
b) On suppose que la distance entre l'axe et l'extrémité de l'aiguille est :
- 8 cm pour celle des heures,
- 11 cm pour celle des minutes,
- 12 cm pour celle des secondes.

Calculer les longueurs parcourues en 24 h par l'extrémité de chacune des trois aiguilles.

43 *Transport routier*
Une laiterie française exporte du lait vers l'Italie. Un camion-citerne part de la laiterie, parcourt 560 km de plaine à la vitesse moyenne de 70 km/h puis 100 km de montagne à la vitesse de 50 km/h avant d'atteindre la frontière italienne.
a) Pendant combien de temps le chauffeur devra-t-il conduire sur les routes françaises ?
b) Le camion est attendu à 18 h à la frontière et 2 h d'arrêt sont prévues pendant le trajet. À quelle heure le camion doit-il partir de la laiterie ?
c) Le chauffeur s'est arrêté une fois de 9 h à 10 h et une autre fois de 13 à 14 h. Représenter graphiquement le voyage du camion.
d) En utilisant le graphique, trouver :
– la distance qui reste à parcourir à 14 h ;
– l'heure à laquelle il y a exactement 350 km parcourus.

44 *Un aller et retour en montagne*
Deux villages de montagne, Bled-le-Bas et Bled-le-Haut, sont reliés par une route de 6 km.
Un cycliste bien entraîné va de Bled-le-Bas à Bled-le-Haut en 20 min. Il rebrousse aussitôt chemin et retourne à Bled-le-Bas. Il a ainsi effectué son aller et retour à la vitesse moyenne de 27 km/h.
À quelle vitesse a-t-il roulé au retour ?

45 *Une traversée périlleuse*
Un tracteur agricole, traînant une remorque et circulant à 18 km/h, s'est arrêté avant de traverser la route nationale.



Le tracteur et la remorque font 12 m de long.
La route nationale mesure 18 m de largeur.
Sur la route nationale, une voiture arrive à 108 km/h (voir dessin).
À l'instant où le tracteur redémarre (toujours à 18 km/h), quelle est la distance minimale d qui doit séparer la voiture du carrefour pour que la traversée s'effectue en toute sécurité ?

Astronomie

46 *La vitesse de la lumière*
Dans le vide, la lumière parcourt 300 000 km par seconde (plus exactement 299 792 458 m, mais qu'importe !).
a) La Lune est située à 384 400 km de la Terre. Combien de temps met un signal lumineux pour aller de la Terre à la Lune ?
b) La Terre est située à 150 millions de km du Soleil. Combien de temps (en minutes et secondes) met un rayon de Soleil pour venir jusqu'à la Terre ?
c) Les astronomes appellent « année-lumière » la distance parcourue par la lumière en une année. Combien y a-t-il de kilomètres dans une année-lumière ? (Arrondir le résultat.)

47 *Plancher des vaches ou bolide cosmique ?*
La Terre tourne autour du Soleil sur une trajectoire à peu près circulaire ayant 150 000 000 km de rayon.
a) Quelle distance parcourt la Terre en une année ?
b) Calculer la vitesse de la Terre en km/h puis en km/s. (On prend 1 an = 365,25 jours.)

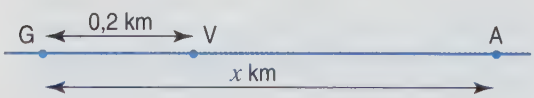
Exercices

48 *Le passage de la comète Hale Bopp*

Les astronomes appellent « unité astronomique » (u.a. en abrégé) la distance moyenne entre la Terre et le Soleil.
Une u.a. vaut 150 millions de km.
Le 22 mars 1997, la comète Hale Bopp passait au plus près de la Terre, à 1,32 u.a. de celle-ci. Sa vitesse était alors de 24 km/s.
a) Quelle distance, en km, séparait la comète Hale Bopp de la Terre le 22 mars 1997 ?
b) Si, à partir de cette date, la comète avait foncé vers la Terre en s'en rapprochant de 24 km par seconde, combien aurait-elle mis de temps (en jour, h et min) avant de percuter notre planète ? (Ce n'est heureusement qu'une supposition.)

Avec une équation

49 *Le gendarme et le voleur*
Un gendarme poursuit un voleur. Le gendarme court à 15 km/h et le voleur à 12 km/h. Le gendarme est parti du point G et le voleur du point V. La distance GV est égale à 0,2 km.



Le gendarme va rattraper le voleur en un point A situé à x km de G.
a) Déterminer x.
b) Combien de temps dure la poursuite ?

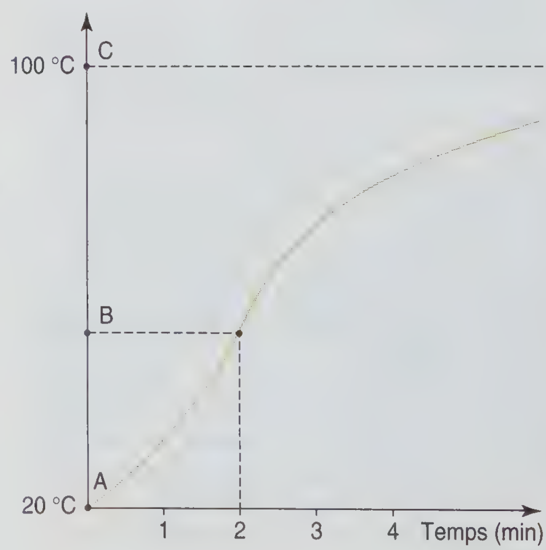
50 *Le guépard et l'antilope*
Un guépard s'est approché à 50 m d'une jeune antilope. Il s'élance sur sa proie en courant à 100 km/h. Au même instant l'antilope s'enfuit à 75 km/h.
a) Au bout de quelle distance le guépard rattrape-t-il l'antilope ?
b) Combien de temps dure la poursuite ?

51 *Le chien et son maître*
À 9 h précises, le maître quitte la maison et Bilou s'éloigne de son réverbère. Une distance de 300 m sépare la maison M et le réverbère R.
Ils se dirigent l'un vers l'autre, le maître en marchant à 6 km/h et Bilou en courant à 24 km/h. La rencontre a lieu en un point P.
a) Où se trouve le point P ?
b) À quelle heure a lieu la rencontre ?

52 *Le footballeur et le ballon*
Le ballon roule à 15 m/s en direction de Gipépé. Gipépé se précipite à sa rencontre en courant à 18 km/h. Lorsque Gipépé a démarré, le ballon était à 40 m de lui.
a) Quelle distance parcourt Gipépé avant de récupérer le ballon ?
b) Combien de temps Gipépé a-t-il couru ?

Divers

53 *Pour avoir la frite* (*Pour la Science*, n° 234, avril 1997)
Voici la courbe de température d'une frite pendant la cuisson dans l'huile bouillante.



a) La température est-elle proportionnelle au temps de cuisson ? (Justifier.)
b) Peut-on dire que la courbe de température passe par l'origine ?
c) Mesurer AB et AC sur le graphique ci-dessus.
Calculer ensuite la température de la frite après 2 min de cuisson.
d) Par un travail analogue, déterminer la température de la frite après 3 min de cuisson.

54 *Exportation de véhicules*
Un constructeur français exporte vers l'Argentine des voitures qui consomment 8 litres aux 100 km.
Mais, en Argentine, on exprime la consommation d'un véhicule en nombre de kilomètres parcourus avec 1 litre de carburant.
Le constructeur doit donc modifier sa documentation. Que va-t-il indiquer au paragraphe « consommation » ?

55 *Location de véhicules*
Un touriste français, qui voyage en Amérique du Sud, loue une voiture. Comme il est d'usage dans cette contrée, on lui précise qu'il peut parcourir 11 km avec 1 litre de carburant.
Exprimer cette consommation en nombre de litres consommés pour 100 km parcourus.

Pourcentages et indices

56 *Comment savoir qui a raison ?*
En 3^{e} A, il y avait 5 garçons et 20 filles.
En 3^{e} B, il y avait 20 garçons et 10 filles.
Les résultats du brevet sont les suivants.
En 3^{e} A : 80 % de reçus chez les garçons et 70 % chez les filles.
En 3^{e} B : 55 % de reçus chez les garçons et 50 % chez les filles.
M. le principal prétend que les garçons sont meilleurs que les filles. Mais Mme le professeur de maths n'est pas d'accord.
a) Calculer le pourcentage de reçus parmi les garçons des deux classes réunies.
b) Calculer le pourcentage de reçues parmi les filles des deux classes réunies.
c) Finalement, qui a raison ?

57 *La mode du tamagotchi*
En octobre 1997, 10 % des élèves d'une classe possédaient un tamagotchi (animal virtuel). Un mois plus tard 30 % des élèves en avaient un, ce qui en faisait 6 de plus.
Calculer le nombre d'élèves de la classe.
Épilogue : quelques semaines plus tard, tous les tamagotchis étaient morts…

58 *Quel gâchis !*
On a laissé flétrir 10 kg de beaux raisins gorgés de jus. Au départ, ils contenaient 90 % d'eau, ils n'en contiennent plus que 80 %. Combien pèsent-ils maintenant ?

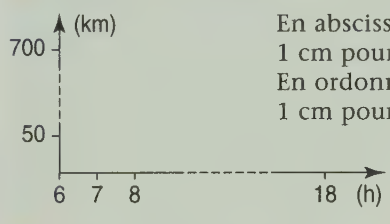
59 *Prix à la consommation*
Nous nous intéressons à l'indice des prix à la consommation pour l'ensemble des ménages français, tabac non compris.
Voici les valeurs de cet indice en juillet de chaque année.

1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
99,7	103,5	105,6	107,5	109,1	110,6	112,9	113,9

a) De quel pourcentage les prix ont-il augmenté entre 1996 et 1997 ?
(Donner ce pourcentage à 0,01 % près.)
b) Imaginons un ménage qui, en 1990, remplissait son caddie hebdomadaire pour une moyenne de 300 F. Combien un caddie analogue lui coûtait-il en 1993 ? en 1997 ?

COUPS DE POUCE

43 c) On pourra graduer les axes de la façon suivante.



En abscisses :
1 cm pour 1 h.
En ordonnées :
1 cm pour 50 km.

44 20 min = $\frac{1}{3}$ d'heure.

Exprimer les durées en fractions d'heures : cela simplifie les calculs.

45 Convertir toutes les vitesses en m/s.
Calculer d'abord la distance parcourue par le tracteur pour traverser (lui et sa remorque).

49 Écrire une équation : le temps mis par le gendarme pour parcourir GA est égal au temps mis par le voleur pour parcourir VA.

50 50 m = 0,05 km. Voir le problème précédent. Faire un dessin et écrire une équation.

51 300 m = 0,3 km. Écrire une équation : le temps mis par le maître pour aller de M à P est égal au temps mis par Bilou pour aller de R à P.

52 a) Convertir 18 km/h en m/s. Écrire une équation comme dans le problème précédent.

53 c) AC représente 80 °C.
Combien de °C représente AB ?

58 Seule une partie de l'eau s'est évaporée. Combien pèse la matière sèche ?

7 Statistiques

Activités

1 Au collège

Révision active

On a demandé à 50 élèves d'un collège rural de donner la distance d (en km, arrondie au km supérieur) séparant leur domicile du collège.
On a récolté les résultats suivants.

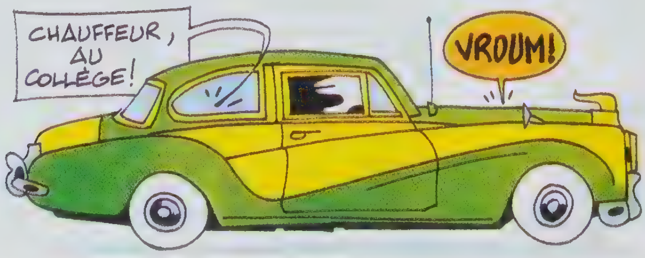
Nom	d	Nom	d	Nom	d	Nom	d	Nom	d
Dupont	16	Forgeron	9	Jasmin	13	Deprès	15	Riton	4
Dupond	6	Minet	18	Rose	3	Deloin	1	Roublard	6
Durand	1	Chevreau	17	Noël	1	Asiz	17	Ravi	17
Durant	6	Cauchon	2	Potron	4	Debout	14	Moussaf	2
Martin	2	Duporc	1	Marivaud	7	Lavie	11	Mousset	1
Labiche	8	Latruie	12	Hugo	13	Dunord	7	M'tong	10
Duchien	11	Ronchon	19	Lamartine	8	Ausud	3	Lapompe	3
Duchat	16	Tortillard	11	Lefrançois	11	Moine	12	Villon	12
Boulanger	10	Toubon	20	Delair	4	Labbé	1	Rivière	9
Charpente	12	Toumal	10	Deleau	10	Souris	9	Manury	1

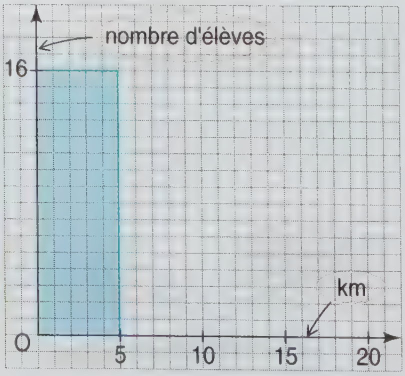
1. Remplir le tableau suivant qui va donner une répartition en classes.

Distance (en km)	$0 < d \leqslant 5$	$5 < d \leqslant 10$	$10 < d \leqslant 15$	$15 < d \leqslant 20$
Effectif				
Fréquence (en %)				

2. Quel est le pourcentage d'élèves ayant plus de 5 km à parcourir pour se rendre au collège ?

3. Dessiner un histogramme du genre ci-contre.





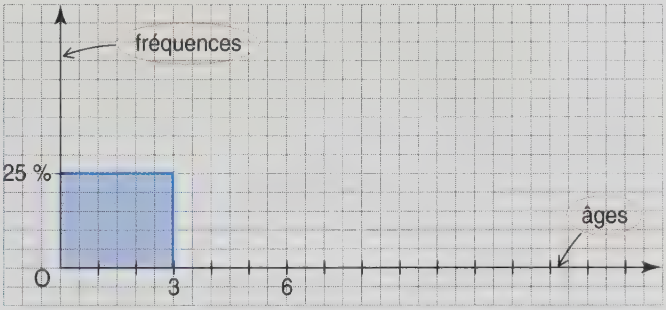
2 Immatriculations

A. En Nordie

Il y a environ 26 500 000 voitures immatriculées en Nordie.
En voici la répartition (à 1 % près) en fonction de l'âge des véhicules.

Âge	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[
Fréquence	25 %	14 %	12 %	23 %	26 %
Effectif (en milliers)					
Effectif cumulé		10 335			
Fréquence cumulée					100 %

1. Histogramme des fréquences
Compléter l'histogramme suivant.



2. Effectifs
Compléter la ligne des effectifs du tableau.

3. Effectif cumulé
Combien y a-t-il de voitures de moins de 6 ans ? De moins de 9 ans ?
Compléter la ligne des effectifs cumulés.

4. Fréquence cumulée
Procéder comme pour les effectifs cumulés pour remplir la dernière ligne du tableau.
Est-il vrai que plus de 50 % des voitures ont moins de 9 ans ?

B. En Sudie

Il y a, dans ce pays, environ 15 000 000 voitures, et nous avons les statistiques suivantes.

Âge	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[
Fréquence cumulée	20 %	45 %	75 %	90 %	100 %

1. Quelle est la fréquence des voitures ayant entre 3 et 6 ans ? Et entre 12 et 15 ans ?

2. Construire un histogramme des fréquences cumulées.

3. Est-il vrai qu'un quart des voitures a au moins 9 ans ?

4. Compléter ce tableau en faisant apparaître une ligne des effectifs (en milliers de voitures).

Activités

3 Un concours de circonstance

Un concours se déroule en quatre épreuves écrites, comme l'indique le tableau suivant.

Matière	Français	Maths	Histoire	Informatique
Coefficient	4	3	2	1

A. La performance d'Antoine...

Antoine a obtenu 6 en français, 12 en maths, 10 en histoire et 17 en informatique.

1. Calculer sa moyenne **sans tenir compte** des coefficients.

2. Calculer sa moyenne **en tenant compte** des coefficients. Pour cela, on effectue le calcul proposé dans l'information suivante.

INFORMATION

La **moyenne** des nombres 6, 12, 10 et 17 **pondérée** par les **coefficients** 4, 3, 2 et 1 est le nombre : $\dfrac{6 \times 4 + 12 \times 3 + 10 \times 2 + 17 \times 1}{4 + 3 + 2 + 1}$.

B. ...Et celle de Julie

Julie a obtenu 14 en français, 8 en maths, 9 en histoire et 5 en informatique.

1. Calculer sa moyenne **sans tenir compte** des coefficients.

2. Calculer la moyenne des notes 14, 8, 9 et 5 **pondérée** par les coefficients 4, 3, 2 et 1.

C. ...Et Nicolas ?

Nicolas a reçu son relevé de notes. Il a obtenu 8 en français, 10 en maths, 10 en histoire et sa note d'informatique est illisible. Nicolas est admis avec 10 de moyenne.
Quelle est sa note d'informatique ?

4 Prix d'une calculatrice

Trois magasins vendent des calculatrices d'un certain modèle.
Voici les prix affichés et les quantités vendues à la rentrée scolaire.

Magasin	A	B	C
Prix affiché	120	128	150
Nombre de machines	50	30	20

1. Le prix affiché moyen

Calculer le prix affiché moyen de la calculatrice (c'est-à-dire la somme de tous les prix relevés divisée par le nombre de magasins).

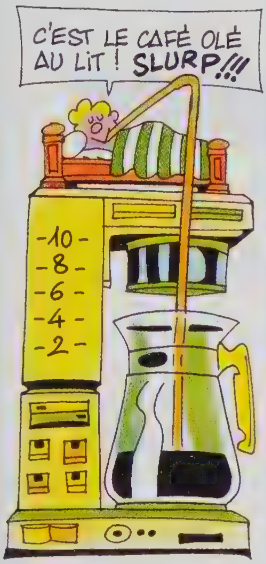
2. Le prix de vente moyen

Calculer le prix de vente moyen de cette calculatrice en tenant compte des quantités vendues (voir l'information ci-dessus).

5 Le prix du café OLÉ

Une entreprise de torréfaction souhaite connaître les prix de détail couramment pratiqués pour le produit qu'elle fabrique : le café OLÉ. Pour cela, elle envoie un enquêteur relever les prix dans une vingtaine de magasins.
Voici les résultats de son enquête. (Les magasins sont numérotés de 1 à 20.)

Magasin	Prix	Magasin	Prix	Magasin	Prix	Magasin	Prix
1	11,20 F	6	13,70 F	11	17,30 F	16	10,30 F
2	15,60 F	7	15,70 F	12	12,70 F	17	15,00 F
3	18,80 F	8	14,50 F	13	12,40 F	18	16,50 F
4	13,60 F	9	19,10 F	14	17,80 F	19	12,60 F
5	10,90 F	10	16,40 F	15	11,90 F	20	14,90 F



1. On décide de regrouper ces données en quatre classes.
Compléter le tableau suivant.

Prix	[10 ; 12,5[	[12,5 ; 15[	[15 ; 17,5[	[17,5 ; 20[
Effectif				
Fréquence				

2. Dessiner un histogramme des fréquences.

3. Calculer la moyenne des prix avec le tableau ci-dessus. Pour cela, on calcule la moyenne des milieux des classes, pondérée par les effectifs.

4. Calculer le prix moyen d'un paquet de café OLÉ avec le premier tableau.
Comparer avec le résultat obtenu à la question précédente.

6 Moyenne de moyennes

Dans une classe de 4e du collège Endaire, on a relevé l'âge des élèves.

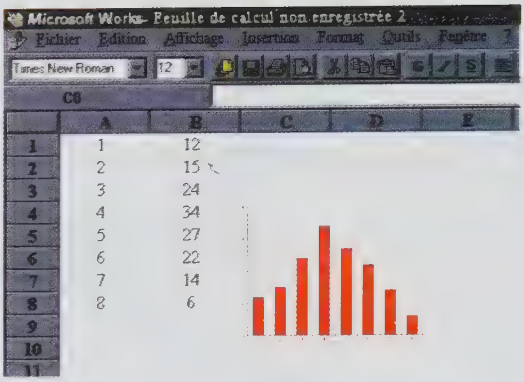
Âge	13 ans	14 ans	15 ans	16 ans
Effectif	6	12	8	4

1. Calculer l'âge moyen des élèves de cette classe.

2. Pour répondre à la question, Julien a eu une idée.
(1) Il a calculé la moyenne des 13-14 ans.
(2) Il a calculé la moyenne des 15-16 ans.
(3) Il a calculé la moyenne simple des deux moyennes obtenues.

- Effectuer les calculs préconisés par Julien.
- Que penser de sa technique ?
- Et si on calculait la moyenne des deux moyennes obtenues par Julien (calculs (1) et (2)) pondérée par les coefficients ..... et ..... ?

7 Longueurs de poutres



A. Saisie des données

Une scierie vend des poutres. Antony, qui gère les stocks de poutres, a introduit les longueurs des poutres dans un tableur.
Obtenir un tableau comme celui-ci.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Poutre n°	1	2	3	4	5	6
2	Longueur	5,25	4,35	3,60	3,80	4,50	4,75
3							

B. Le prix et la longueur moyenne

1. Sachant que le mètre de poutre se vend 35,40 F, calculer le prix des poutres en utilisant le tableur. Pour cela :

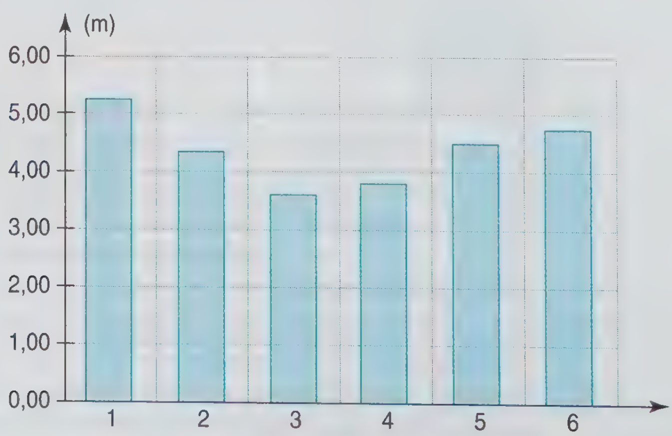
- Se placer (par exemple) sur la cellule **C4**.
- Taper la formule **= somme (B2:G2)*35,40**.

Remarque. **B2: G2** désigne la zone allant de **B2** à **G2**.

2. Calculer, dans la cellule **F4**, la longueur moyenne des poutres.
Pour cela, procéder comme dans la question précédente avec une formule du genre : **= moyenne(...**.

C. Avec le grapheur

Obtenir à l'aide du grapheur un histogramme du genre suivant.
Pour cela, utiliser l'assistant graphique...



8 Allons enfants de la fratrie

Dans une petite ville, on a relevé le nombre d'enfants dans chaque famille.
Voici les résultats de l'enquête.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	
2	Nombre de familles	25	30	27	13	3	2	
3								

1. Exprimer, sans le calculer, le nombre moyen d'enfants par famille (c'est une moyenne pondérée).

2. Calculer au tableur le nombre moyen d'enfants par famille. Pour cela :

- En B3, taper la formule =B1*B2.
- Recopier cette formule en C3, D3, ..., G3. Pour cela, sélectionner la zone de C3 à D3 et utiliser la commande « recopier vers la droite » du menu Édition.
- En H2, faire calculer le nombre total de familles.
- En H3, faire calculer le nombre moyen d'enfants.

3. Refaire ce travail avec le tableau suivant.

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de familles	35	45	33	25	15	9	6	2

9 Il suffit de passer le pont

On a compté, pendant 120 jours, le nombre de camions passant quotidiennement sur un pont. Voici les résultats.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Nombre de camions	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	Nombre de jours	2	10	18	22	23	19	12	7	4	2	1
3	Effectif cumulé											
4	Fréquence											
5	Fréquence cumulée											

1. Compréhension du tableau

En C2, on peut lire le nombre 10 : il y a eu 10 jours sur les 120 où un seul camion a traversé le pont.
Combien y a-t-il de jours durant lesquels 8 camions ont passé le pont ?

2. Effectif cumulé

Compléter la ligne 3 du tableau. Pour cela :

- En B3, recopier B2.
- En C3, taper la formule =C2 + B3.
- Recopier cette formule en D3, ..., L3.

Combien y a-t-il de jours durant lesquels passent au plus 5 camions ?
Combien y a-t-il de jours durant lesquels passent au moins 6 camions ?

3. Fréquence et fréquence cumulée

Compléter les lignes 4 et 5 du tableau (à l'aide du tableur). Quel est le pourcentage de jours durant lesquels passent moins de 5 camions ?

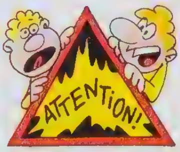
Outils

Statistiques

Une série de notes. Un professeur rend un devoir aux 30 élèves de sa classe.

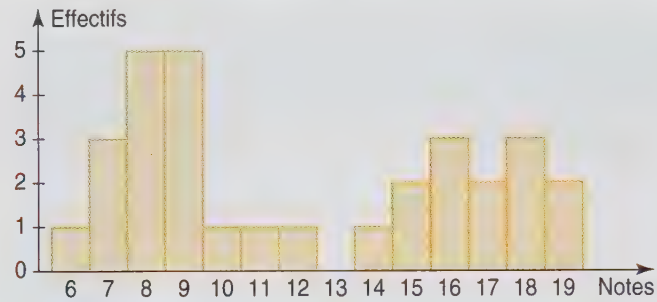
Voici la liste des notes dans l'ordre croissant.

6	7	7	7	8	8	8	8	8	9
9	9	9	9	10	11	12	14	15	15
16	16	16	17	17	18	18	18	19	19



On utilise cette série de notes pour les trois paragraphes suivants.

1 Histogramme



Cette représentation graphique fait apparaître un groupe de bonnes notes (de 14 à 19) et un groupe de notes médiocres (de 6 à 9).

2 Tableau des effectifs et des fréquences

Note	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18	19
Effectif	1	3	5	**5**	1	1	1	1	2	3	2	3	2
Effectif cumulé	1	4	**9**	**14**	15	16	17	18	20	23	25	28	30
Fréquence (%)	3,3	**10,0**	16,7	16,7	3,3	3,3	3,3	3,3	6,7	10,0	**6,7**	10,0	6,7
Fréquence76,6 cumulée (%)	3,3	13,3	30,0	46,7	50,0	53,3	56,6	59,9	66,6	**76,6**	**83,3**	93,3	100,0

EXPLICATIONS

Effectif cumulé. La case jaune (14) est le nombre de notes inférieures ou égales à 9.

On peut obtenir ce nombre en additionnant le nombre de notes inférieures ou égales à 8 et le nombre de notes égales à 9 (somme des deux cases bleues).

Dans la dernière colonne figure l'effectif total.

Fréquence. Il y a 3 notes sur 30 égales à 7, ce qui représente un pourcentage de 10 % ; c'est le nombre figurant dans la case violette.

Fréquence cumulée. La case verte (83,3 %) est le pourcentage de notes inférieures ou égales à 17. On peut obtenir ce nombre en additionnant le pourcentage de notes inférieures ou égales à 16 et le pourcentage de notes égales à 17 (somme des deux cases rouges).

3 Calcul de la moyenne

A. Première méthode : additionner les 30 notes et diviser par 30

On trouve : $\dfrac{\overbrace{(6+7+7+\ldots+18+19+19)}^{\text{Addition fastidieuse : risques d'erreurs !}}}{30} = \dfrac{363}{30} = \mathbf{12{,}1}$ ← La moyenne

B. Seconde méthode : moyenne pondérée

Note N	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18	19	Total
Effectif e	1	3	5	5	1	1	1	1	2	3	2	3	2	**30**
$N \times e$	6	21	40	45	10	11	12	14	30	48	34	54	38	**363**

Effectif total

D'où moyenne : $\dfrac{363}{30} = \mathbf{12{,}1}$.

En effet : $\dfrac{6 \times 1 + 7 \times 3 + \ldots + 18 \times 3 + 19 \times 2}{1 + 3 + \ldots + 3 + 2} = \dfrac{363}{30} = \mathbf{12{,}1}$.

C'est la **moyenne pondérée** des notes 6, 7, … , 18, 19 avec les coefficients 1, 3, … , 3, 2.
La moyenne est **pondérée** par des coefficients qui donnent plus ou moins de **poids** aux différentes notes. Ces coefficients sont ici les effectifs.

4 Moyenne et répartition en classes

On a réparti 30 élèves selon leur taille.

Taille t (cm)	$130 \leq t < 135$	$135 \leq t < 140$	$140 \leq t < 145$	$145 \leq t < 150$	$150 \leq t < 155$	$155 \leq t < 160$	$160 \leq t < 165$
Effectif	2	3	4	8	5	5	3

Pour calculer la **taille moyenne** des élèves, on calcule la **moyenne pondérée** des **milieux** de chaque classe avec les **effectifs** pour coefficients.

Calcul de la taille moyenne

$$\frac{132{,}5 \times 2 + 137{,}5 \times 3 + 142{,}5 \times 4 + 147{,}5 \times 8 + 152{,}5 \times 5 + 157{,}5 \times 5 + 162{,}5 \times 3}{2+3+4+8+5+5+3} = \frac{4465}{30} \approx \mathbf{148{,}8} .$$

La taille moyenne d'un élève est donc estimée à **148,8 cm** .

Exercices

CONSOLIDER

Effectif et fréquence

Pour les exercices 1 à 8, les fréquences sont exprimées en pourcentages.

1 Compléter le tableau suivant.

	A	B	C	Total
Effectif	150	70	5	
Fréquence				100

2 Compléter le tableau suivant.

	A	B	C	Total
Effectif	320	380	300	
Fréquence				100

3 Compléter le tableau suivant.

	A	B	C	Total
Effectif	225		275	1 000
Fréquence				100

4 Compléter le tableau suivant.

	A	B	C	D	Total
Effectif	145		116	44	500
Fréquence					100

5 Compléter le tableau suivant.

	A	B	C	Total
Effectif	150	70		
Fréquence		25		100

6 Compléter le tableau suivant.

	A	B	C	Total
Effectif	210	330		
Fréquence	30			100

7 Compléter le tableau suivant.

	A	B	C	Total
Effectif				500
Fréquence	35	40	25	100

8 Compléter le tableau suivant.

	A	B	C	D	Total
Effectif					700
Fréquence		10	20	30	100

Regroupement en classes

Pour les exercices 9 à 12, on utilise le tableau suivant : un concessionnaire d'autos dresse une liste des véhicules qu'il a vendus et dont il assure le suivi.

Dép.	Âge	Coul.	Mod.	Dép.	Âge	Coul.	Mod.
75	15	blanc	4	92	1	rouge	3
78	10	bleu	3	75	5	blanc	2
17	4	noir	3	91	4	noir	1
75	12	rouge	2	75	14	blanc	3
93	12	rouge	3	75	4	noir	3
35	3	blanc	2	93	13	noir	5
45	9	noir	2	93	0	rouge	1
44	1	bleu	3	75	7	bleu	5
75	3	blanc	4	75	13	noir	4
24	14	blanc	2	91	7	blanc	3
75	11	noir	3	75	10	bleu	1
17	7	noir	3	75	12	bleu	2
79	13	rouge	4	78	7	noir	4
75	15	noir	1	75	12	noir	2
86	13	bleu	2	75	15	noir	4
75	13	rouge	3	75	5	noir	2

9 Compléter le tableau suivant.

Modèle	1	2	3	4	5
Effectif					
Fréquence					

10 Compléter le tableau suivant.

Couleur	bleu	rouge	blanc	noir
Effectif				
Fréquence				

11 Compléter le tableau suivant.

Région	Paris	Î.-de-F*	Province
Effectif			
Fréquence			

(*) Île-de-France sans Paris (77 et 78 ; 91 à 95).

12 Compléter le tableau suivant.

Âge	[0 ; 2[	[2 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15]
Effectif				
Fréquence				

RÉSULTATS

1

	A	B	C	Total
Effectif	150	70	5	225
Fréquence	66,7	31,1	2,2	100

3

	A	B	C	Total
Effectif	225	500	275	1 000
Fréquence	22,5	50	27,5	100

5

	A	B	C	Total
Effectif	150	70	60	280
Fréquence	53,6	25	21,4	100

SAVOIR FAIRE

Effectif et fréquence cumulés

13 *Vente de voitures*
Un commerçant fait le bilan de ses ventes de voitures sur l'année.

Trimestre	1	2	3	4
Effectif	300	500	400	200
Eff. cum.				
Fréquence				
Fréq. cum.				

Compléter ce tableau.

14 *Dans une classe (1)*

Taille	[130; 140[	[140; 150[	[150; 160[	[160; 170[	[170; 180[
Effectif	5	7	9	7	4
Eff. cum.					
Fréquence					
Fréq. cum.					

a) Compléter ce tableau.
b) Combien y a-t-il d'élèves mesurant moins de 160 cm ?
c) Combien y a-t-il d'élèves mesurant au moins 150 cm ?

15 *Dans une classe (2)*

Note	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[
Effectif	3	12	11	6
Eff. cum.				
Fréquence				
Fréq. cum.				

a) Compléter ce tableau.
b) Combien y a-t-il d'élèves ayant moins de 15 ?
c) Quel est le pourcentage d'élèves ayant la moyenne ?

16 *Dans une classe (3)*
La lettre d désigne la distance du domicile au collège.

d (en km)	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[
Effectif				
Eff. cum.				32
Fréq. (%)				
Fréq. cum.	25 %	75 %	87,5 %	100 %

Compléter ce tableau.

17 *Dans une classe (4)*
La lettre n désigne le nombre de frères et sœurs.

n	0	1	2	3
Effectif				
Effectif cumulé	14	20	29	32

Compléter ce tableau.

18 *Dans une crèche*

Âge	< 2	< 3	< 4	< 5	< 6
Effectif	3	6	12	16	24

Compléter le tableau suivant.

Âge	1	2	3	4	5
Effectif					
Eff. cum.					
Fréquence					
Fréq. cum.					

19 *Les enfants chez leurs parents*
En 1998, il y avait en Cocoonie :
- 5 420 000 couples ne vivant avec aucun enfant ;
- 3 048 000 couples vivant avec 1 enfant ;
- 2 880 000 couples vivant avec 2 enfants ;
- 1 233 000 couples vivant avec 3 enfants ;
- 651 000 couples vivant avec 4 enfants ou plus.

a) Combien y avait-il de couples ?
b) Compléter le tableau suivant.

Couples vivant avec	Pourcentage
au moins 0 enfant	100
au moins 1 enfant	
au moins 2 enfants	
au moins 3 enfants	
au moins 4 enfants	

20 *Les pluies à Trifouilly en 1997*
Voici un tableau donnant la hauteur (en mm) de pluie tombée chaque mois à Trifouilly.

Mois	janv.	fév.	mars	avril	mai	juin
Hauteur	56	46	36	43	56	53

Mois	juil.	août	sept.	oct.	nov.	déc.
Hauteur	58	64	56	51	51	51

a) Illustrer ce tableau par un histogramme.
b) Compléter le tableau en y inscrivant les hauteurs cumulées puis les fréquences et enfin les fréquences cumulées.

Exercices

Moyennes pondérées

21 Calculer la moyenne (à 0,1 près) des nombres 2,1 ; 3,4 et 5,5 pondérée par les coefficients 2 ; 3 et 4.

22 Voici une série statistique.

Valeur	5,3	7,9	8,2	5,1
Effectif	2	5	7	6

Calculer la moyenne de cette série pondérée par les effectifs.

23 Même exercice avec la série suivante.

Valeur	3,55	0	1,24	100
Effectif	2	1 000	2	5

24 Même exercice avec la série suivante.

Valeur	– 4,5	5,5	– 7,3	8,1
Effectif	2	1	8	5

25 *Familles*
Voici la répartition des familles d'une petite ville selon le nombre des enfants mineurs.

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de familles	580	340	310	190	85	55	40	20

Calculer à 0,01 près le nombre moyen d'enfants mineurs par famille.

26 *Nombre de pièces*
Voici la répartition des habitations d'une petite ville selon le nombre de pièces.

Nombre de pièces	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre d'habitations	190	200	225	210	320	215	190	60	30	10

Calculer à 0,01 près le nombre moyen de pièces par habitation.

27 *Temps de transport*
Une enquête sur les temps mis par les élèves pour se rendre à leur collège donne les résultats suivants.

Temps t en minutes	Nombre d'élèves
$0 \leq t < 10$	12
$10 \leq t < 20$	26
$20 \leq t < 30$	385
$30 \leq t < 40$	402
$40 \leq t < 50$	48
$50 \leq t < 60$	5

a) Quel est l'effectif total de ce collège ?
b) Quelle est la moyenne des temps de parcours (à 1 min près) ?

28 *Petits chèques*
Au cours d'une journée, une caissière a reçu des chèques d'un montant inférieur à 190 F. En voici la répartition.

Valeur v des chèques	Nombre de chèques
$50 \leq v < 70$	8
$70 \leq v < 90$	4
$90 \leq v < 110$	8
$110 \leq v < 130$	21
$130 \leq v < 150$	39
$150 \leq v < 170$	26
$170 \leq v < 190$	14

Compte tenu de ces informations, calculer la valeur moyenne de ces chèques.

29 *Salaires*
La distribution des salaires mensuels des ouvriers d'une entreprise est la suivante.

Salaire s en francs	Effectif
$4\,500 \leq s < 4\,700$	25
$4\,700 \leq s < 4\,900$	110
$4\,900 \leq s < 5\,100$	180
$5\,100 \leq s < 5\,300$	125
$5\,300 \leq s < 5\,500$	50
$5\,500 \leq s < 5\,700$	40

Calculer la moyenne des salaires des ouvriers de cette entreprise (à 100 F près).

RÉSULTATS

13

Trimestre	1	2	3	4
Effectif	300	500	400	200
Eff. cum.	300	800	1 200	1 400
Fréq. (%)	21,4	35,7	28,6	14,3
Fréq. cum. (%)	21,4	57,1	85,7	100,0

17

n	0	1	2	3
Effectif	14	6	9	3
Effectif cumulé	14	20	29	32

21 La moyenne est 4 à 0,1 près.

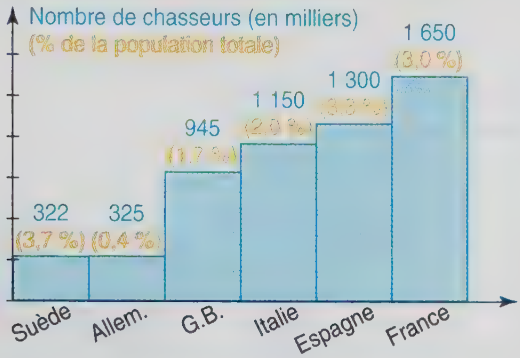
22 La moyenne est 6,9 à 0,1 près.

27 **a**) 878 élèves.
b) 30 minutes, à 1 minute près.

CHERCHER

Analyser un graphique

30 *Partie de chasse* (*Courrier international*, 24.12.97)

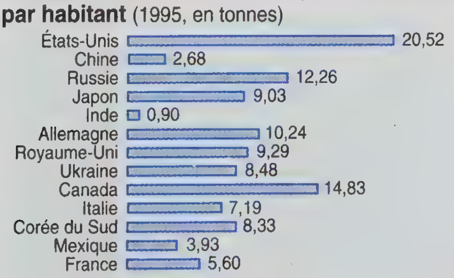


Présenter un tableau où figurent les nombres inscrits sur l'histogramme, ainsi que la population totale de chaque pays.

31 *Pollution* (*Courrier international*, 16.10.97)
Voici deux histogrammes.

Émissions annuelles de dioxyde de carbone
(1995, en millions de tonnes)

Émissions annuelles de dioxyde de carbone par habitant (1995, en tonnes)



Faire un tableau où figure la population de chacun des pays concernés.

Moyennes pondérées

32 *Plusieurs moyennes !*
a) Calculer la moyenne pondérée de la série statistique du tableau de l'exercice 12.
b) Calculer la moyenne des âges avec le tableau de départ (page 114 en haut, à droite). Que constate-t-on ?

33 *Moyennes de notes*
Le 1er devoir surveillé a duré 1 heure ; le 2^{e} a duré 2 heures. Il est décidé de calculer la moyenne en attribuant le coefficient 1 au devoir de 1 h et le coefficient 2 au devoir de 2 h.
a) Alain a eu 15 au 1er devoir et 9 au 2^{e}. Calculer sa moyenne.
b) Boris a eu 8 au 1er devoir. Sa moyenne est 12.
Combien a-t-il eu au 2^{e} devoir ?

34 *Moyennes annuelles et trimestrielles*
Voici les notes obtenues par Anne, Julien et Marie en mathématiques au cours de l'année.

	Trimestre 1			Trimestre 2			Trimestre 3		
Anne	11	13	15	9	9	12	14	14	11
Julien	13		9		5		8	13	12
Marie	7	9	8	6	10				14

(Les cases vides correspondent à des absences.)

a) Compléter le tableau suivant en calculant les 3 moyennes trimestrielles, puis la moyenne des 3 trimestres.

	Trim. 1	Trim. 2	Trim. 3	Moyenne
Anne				
Julien				
Marie				

b) Calculer la moyenne annuelle de toutes les notes de Anne. Que constate-t-on ?
c) Recommencer avec les notes de Julien puis avec celles de Marie. Que constate-t-on ?

35 *Wanted (1)*
La moyenne pondérée des nombres du tableau est 65,75.

Nombre	15	45	66	
Coefficient	2	3	4	3

Trouver le nombre manquant dans le tableau.

36 *Wanted (2)*
La moyenne pondérée des nombres du tableau est 39,25.

Nombre	44	40	53	12
Coefficient	5	4	4	

Trouver le coefficient manquant.

COUPS DE POUCE

33 b) Soit x la note recherchée…
35 Soit x le nombre recherché…
36 Soit x le coefficient recherché…

8 Droite des milieux

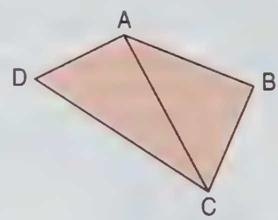
Activités

1 Une première démonstration

Révision active

Le problème
Soit un quadrilatère ABCD. (AH) est la hauteur du triangle ADC issue de A. La droite passant par B et parallèle à (AH) coupe (CD) en K.
Démontrer que (BK) est la hauteur du triangle BCD issue de B.

A. Les hypothèses et la figure



1. Revoir la définition d'une hauteur d'un triangle (**Pages bleues**, p. 242).
2. Faire une figure.
3. Compléter les **hypothèses** :
   (AH) ⊥ .... et (BK) ...... (AH).

B. Résolution du problème

1. Compléter la phrase suivante.
   Pour résoudre ce problème, il suffit de démontrer que (BK) est perpendiculaire à ....
2. Réécrire la propriété 3 des **Pages bleues**.
3. Réécrire, en la complétant, la démonstration suivante.

Comme (AH) est la hauteur du triangle .... issue de ..., les droites (AH) et .... sont perpendiculaires.
Par hypothèse, les droites .... et .... sont parallèles, et donc toute perpendiculaire à l'une de ces deux droites est aussi .... à l'autre droite.
Les droites .... et .... sont donc perpendiculaires et, par suite, (BK) est la .... de .... issue de .... .

2 Une deuxième démonstration

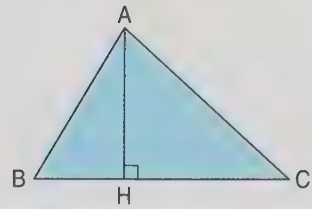
Révision active

Le problème
Soit un triangle ABC non rectangle en B. (AH) est une hauteur du triangle ABC et I est le milieu de [BC].
La parallèle à (AH) passant par I coupe (AB) en J.
Démontrer que le triangle BJC est isocèle en J.

A. Les hypothèses et la figure

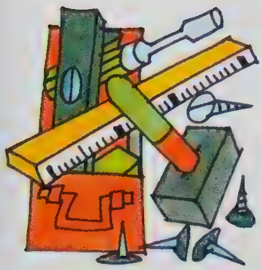
1. Faire une figure assez grande.

2. Compléter la liste des **hypothèses** :
- (AH) ⊥ ....
- I est le milieu de [.....]
- (AH) ... (IJ).



B. La mini-boîte à outils

Utiliser les **Pages bleues** pour écrire les trois définitions et les deux propriétés de la boîte à outils suivante.

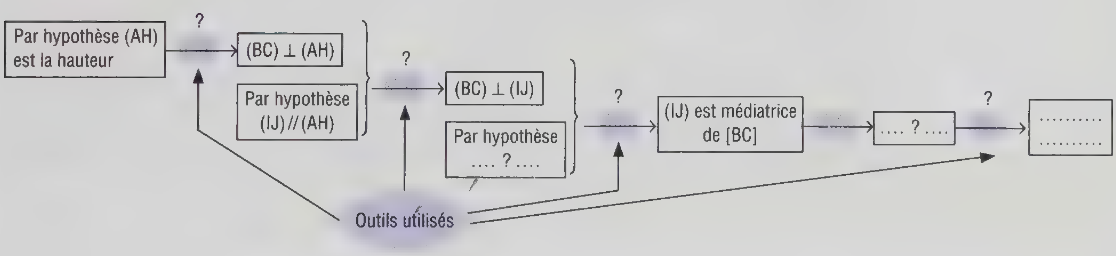


....
....
....
....
....

hauteur d'un triangle
définition d'une médiatrice
définition d'un triangle isocèle
propriété 3 des Pages bleues
propriété 4 des Pages bleues (première partie)

C. Le schéma de la démonstration

Reproduire et compléter le schéma suivant.



D. La rédaction

Rédiger cette démonstration.

3 Une troisième démonstration

Révision active

Le problème

Soit un triangle ABC et I le milieu de [BC]. S est le symétrique de I par rapport à (AB) et T est le symétrique de I par rapport à (AC).
Démontrer que les segments [SB] et [TC] ont même longueur.

1. Faire une figure.

2. Réécrire la première partie de la propriété 5 des **Pages bleues**.

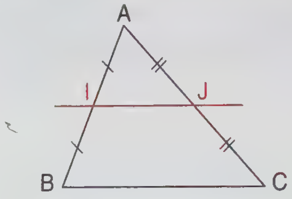
3. Quel est le symétrique de [BI] par rapport à (AB) ?
Quel est le symétrique de [CI] par rapport à (AC) ?

4. Rédiger une démonstration pour ce problème.

4 La droite des milieux

Les hypothèses et la figure

Soit un triangle ABC.
I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC].



A. Découverte

1. Construire cette figure.
2. La droite (IJ) semble parallèle à une autre droite. Laquelle ?

B. Une preuve

1. Compléter la figure et la démonstration suivante.

Soit K le symétrique de J par rapport à I.
Le milieu de [KJ] est donc .... .
Par hypothèse, le milieu de [AB] est .... .
Par suite, les segments [KJ] et [AB] ont ....
D'après la réciproque de la propriété .... des **Pages bleues**, le quadrilatère AJBK est un ....

Donc BK = AJ et (BK) // (AJ) ; ou encore $\boxed{\text{(BK) // (JC)}}$.

Comme J est, par hypothèse, le milieu de [......], AJ = JC.

Donc $\boxed{\text{BK = ...}}$.

D'après la propriété .... des **Pages bleues**, ... est un parallélogramme.
Et donc (KJ), c'est-à-dire (IJ), est parallèle à ....

2. En utilisant la même figure et le fait que KJCB est un parallélogramme, démontrer que $IJ = \dfrac{BC}{2}$.

C. Énoncés

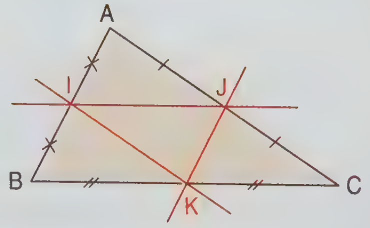
Compléter les deux énoncés suivants.

Dans un triangle, la droite passant par les milieux de deux côtés du triangle est ....

Soit I et J les milieux des côtés [AB] et [AC] d'un triangle ABC.
Alors : (IJ) // .... et IJ = ...

D. Exercice d'application

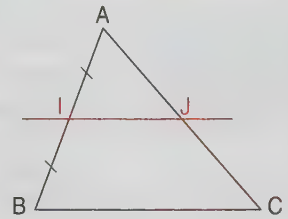
Écrire les couples de droites parallèles de la figure ci-contre.
(Justifier les réponses.)



5 Et réciproquement

Les hypothèses et la figure

Soit un triangle ABC.
I est le milieu de [AB].
La parallèle à [BC] passant par I coupe [AC] en J.



A. Découverte

1. Reproduire cette figure.
2. Le point J semble avoir une position particulière. Laquelle ?

B. Une preuve

Soit K le milieu de [BC].

1. Pourquoi (IK) // (JC) et pourquoi (IJ) // (KC) ?
2. Que peut-on en déduire pour IJCK ?
3. Pourquoi $IK = \frac{AC}{2}$ et pourquoi IK = JC ?
4. Exprimer JC en fonction de AC.
5. Conclure.

C. Énoncés

Compléter les deux énoncés suivants.

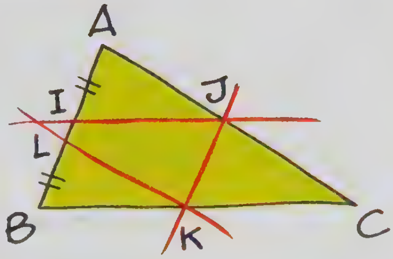
Dans un triangle, la droite passant par le .... d'un côté et .... à un deuxième côté coupe le troisième côté en son ....

Autrement dit :

Soit un triangle ABC.
Soit I le milieu de [AB] et soit J un point de [AC].
Si (IJ) // .... , **alors** J est ....

D. Exercice d'application

Soit un triangle ABC.
Soit I le milieu de [AB].
La parallèle à (BC) passant par I coupe [AC] en J.
La parallèle à (AB) passant par J coupe [BC] en K.
La parallèle à (AC) passant par K coupe [AB] en L.



1. Faire une figure.
2. Que peut-on dire du point L ? Justifier.

Activités

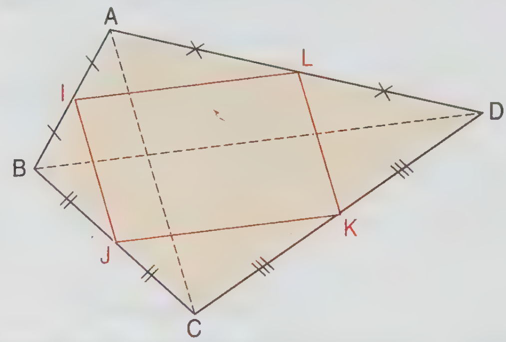
Pierre VARIGNON est un mathématicien français (1654-1722).

6 Le parallélogramme de Varignon

(D'après un article de Marc Blanchard.)

Les hypothèses et la figure

ABCD est un quadrilatère quelconque.
I, J, K et L
sont les milieux des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].



A. Vers le parallélogramme

1. Démontrer que (IL) et (JK) sont parallèles à (BD).

2. Démontrer que (IJ) et (LK) sont parallèles à (AC).

3. En déduire que IJKL est un parallélogramme.

INFORMATION

IJKL est le **parallélogramme de Varignon** du quadrilatère ABCD.

B. Les médianes d'un quadrilatère

En considérant le parallélogramme de Varignon, démontrer que les médianes [IK] et [JL] du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu.

C. À propos de périmètre

1. Comparer IL à BD, puis IJ à AC.

2. En déduire que le périmètre du parallélogramme de Varignon est égal à la somme des longueurs des diagonales du quadrilatère.

D. Un premier cas particulier

On suppose que les diagonales du quadrilatère ABCD sont perpendiculaires.

1. Faire une figure.

2. Que peut-on alors dire du parallélogramme de Varignon ?
Justifier la réponse.

3. En déduire, en la justifiant, une propriété sur les médianes du quadrilatère ABCD. (Voir la propriété 28 des **Pages bleues**.)

E. Un deuxième cas particulier

On suppose que les diagonales du quadrilatère ABCD sont de même longueur.

1. Faire une figure.

2. Que peut-on alors dire du parallélogramme de Varignon ?
Justifier la réponse.

3. En déduire, en la justifiant, une propriété sur les médianes du quadrilatère ABCD. (Voir la propriété 27 des **Pages bleues**.)

F. Vers un carré

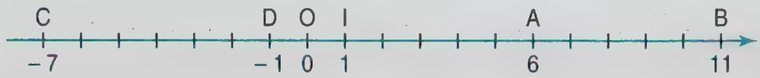
En utilisant les résultats vus en **D** et en **E**, donner une condition pour que le parallélogramme de Varignon d'un quadrilatère soit un carré.

Activités

7 Coordonnées du milieu

A. Sur une droite graduée

Les abscisses des points A, B, C et D sont indiquées sur la figure.



1. Marquer les points M, N et L milieux des segments [AB], [CD] et [DA].

2. Compléter le tableau suivant.

$x_M = ...$	$x_N = ...$	$x_L = ...$	← En lisant sur le dessin
$\frac{x_A + x_B}{2} = ...$	$\frac{x_C + x_D}{2} = ...$	$\frac{x_D + x_A}{2} = ...$	← En calculant

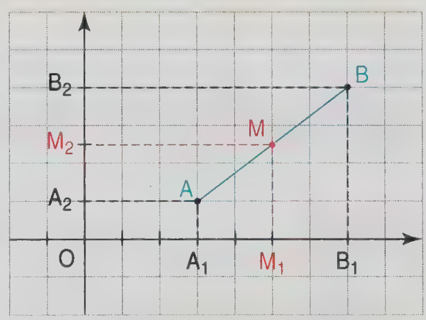
3. Les exemples précédents font apparaître une propriété que nous admettons.
Compléter la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ

Sur une droite graduée, soit deux points E et F d'abscisse x_E et x_F.
Le milieu I du segment [EF] a pour abscisse : $x_I =$ ....

B. Dans un plan muni d'un repère

M est le milieu de [AB].
On note x_A et y_A les coordonnées du point A, etc.



1. Que peut-on dire des points M_1 et M_2 ?
(On ne demande pas de justification.)

2. On a :

$x_A = x_{A_1}$ $x_M = x_{M_1}$ et $x_B = x_{B_1}$.

En utilisant le résultat du A, exprimer x_M en fonction de x_A et x_B.

3. De même, exprimer y_M en fonction de y_A et y_B.

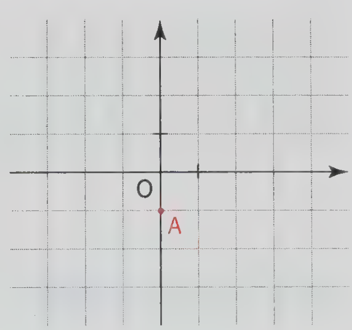
4. Lire sur le dessin x_A, y_A, x_B et y_B. Puis calculer x_M et y_M.

C. Mise en pratique

1. Placer les points A(0 ; – 1), B(2 ; 5), C(9 ; 3) et D(7 ; – 3).

2. Calculer les coordonnées du milieu I de [AC] puis celles du milieu J de [BD].

3. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère ABCD ?
(Justifier la réponse.)



Activités

L'essentiel

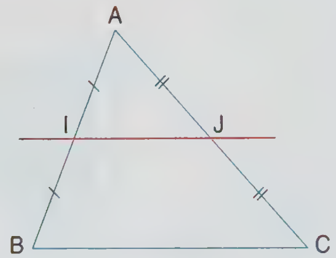
Outils — Droite des milieux

1 Propriété de la droite des milieux

Propriété

Dans un triangle ABC, la droite passant par les milieux I et J des côtés [AB] et [AC] est parallèle au troisième côté (BC).

De plus : $IJ = \frac{1}{2} BC$.

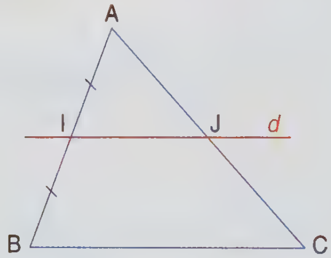


On peut dire aussi : « La droite passant par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté. »

2 La propriété réciproque

Propriété

La droite parallèle à un côté d'un triangle et passant par le milieu d'un autre côté coupe le troisième côté en son milieu.



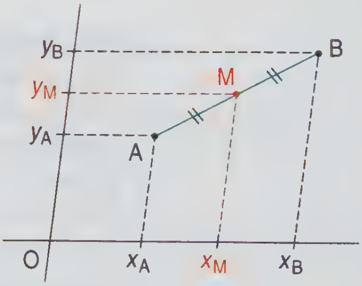
Sachant que I est le milieu de [AB] et que la droite *d* passant par I est parallèle à (BC), on peut dire que J est le milieu de [AC].

3 Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

Soit deux points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$.
Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$



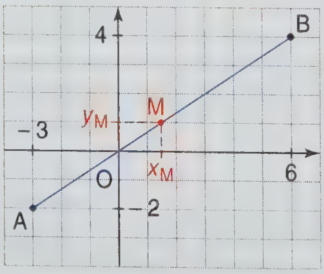
Exemple

Sur la figure ci-contre, M est le milieu de [AB] :
– les coordonnées de A sont $x_A = -3$ et $y_A = -2$;
– les coordonnées de B sont $x_B = 6$ et $y_B = 4$.
On en déduit les coordonnées du milieu M :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3+6}{2} = \frac{3}{2}$$

et

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1.$$



Méthodes — Démontrer...

M 21 **Comment démontrer qu'un point est milieu d'un segment ?**

Utiliser la propriété **réciproque** de la droite des milieux dans un triangle.

M 22 **Comment démontrer que deux droites sont parallèles ?**

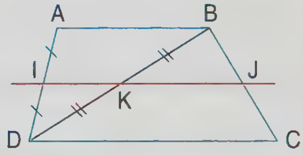
Utiliser la propriété de la droite des milieux dans un triangle.

Exemple — Démonstration, calcul de longueur

Base moyenne d'un trapèze

ÉNONCÉ

ABCD est un trapèze de bases (AB) et (CD).
Soit I le milieu de [AD] et K le milieu de [BD].
a/ Démontrer que (IK) coupe [BC] en son milieu J.
b/ Calculer IJ en fonction des bases AB et CD.



Stratégie

a/ On démontre d'abord que : (IK) // (AB).
On en déduit que : (IK) // (DC).
On démontre ensuite la conclusion.

b/ On calcule séparément IK et KJ puis on les additionne.

Solution

a/ Dans le triangle ABD, (IK) passe par les milieux I et K des côtés [AD] et [BD], donc (IK) // (AB).
ABCD étant un trapèze, (AB) et (CD) sont parallèles, d'où (IK) // (DC).
Dans le triangle BCD, (IK) est parallèle à (DC) et passe par le milieu K de [BD]. Donc (IK) passe par le milieu J de [BC].

b/ Dans le triangle ABD, I et K sont les milieux de [DA] et [DB].

Donc $IK = \frac{1}{2} AB$.

De même, dans le triangle BDC, on a $KJ = \frac{1}{2} DC$.

Ainsi $IJ = IK + KJ = \frac{AB}{2} + \frac{DC}{2}$.

D'où $IJ = \frac{AB + DC}{2}$.

On applique la propriété de la droite des milieux.

Deux droites parallèles à une même troisième...

On applique la propriété réciproque de la droite des milieux.

On applique la deuxième conclusion de la propriété de la droite des milieux.

Le segment [IJ] est appelé « base moyenne » du trapèze.

CONSOLIDER

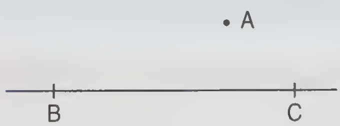
Parallèles et perpendiculaires

1 On considère trois droites d_1, d_2 et d_3.
Peut-on avoir à la fois :

a) $d_1 // d_2$ $d_2 // d_3$ et $d_1 // d_3$?
b) $d_1 \perp d_2$ $d_2 \perp d_3$ et $d_1 \perp d_3$?
c) $d_1 \perp d_2$ $d_2 \perp d_3$ et $d_1 // d_3$?
d) $d_1 // d_2$ $d_2 \perp d_3$ et $d_1 // d_3$?
e) $d_1 \perp d_2$ $d_2 // d_3$ et $d_1 \perp d_3$?

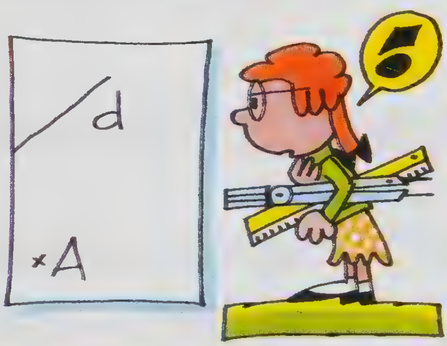
2 TIC et TAC sont deux triangles. Démontrer que les hauteurs issues de I et de A sont parallèles.

3 Voici une figure.



Placer deux points M et N sur (BC) tels que (AM) ⊥ (BC) et (AB) ⊥ (NA).

4 *Construction dans une page trop petite*



Construire la droite perpendiculaire à d et passant par A.

Médiatrices

5 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et A un point extérieur à $\mathscr{C}$. Le cercle de centre A passant par O coupe $\mathscr{C}$ en E et F. Démontrer que (OA) est la médiatrice de [EF].

6 Deux cercles de même rayon et de centres O et O′ sont sécants en A et B. Démontrer que (AB) est la médiatrice de [OO′].

7 Soit le quadrilatère BASE. Les médiatrices des côtés [AB] et [EB] se coupent en O. Démontrer que O appartient à la médiatrice de la diagonale [EA].

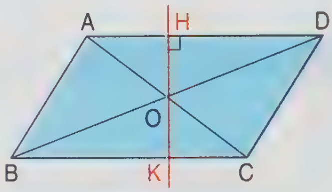
8 Soit A un point d'une droite d et B un point n'appartenant pas à d.
Construire le cercle passant par A et B et dont le centre est sur d.
Décrire et justifier la construction.

9 Soit un segment [AB]. Construire une droite d ne contenant aucun point équidistant de A et de B.
Décrire et justifier la construction.

Parallélogrammes

10 Soit un parallélogramme ABCD.
Démontrer que les médiatrices des côtés [AB] et [CD] sont parallèles.

11 Soit un parallélogramme ABCD de centre O. La droite passant par O et perpendiculaire à (AD) coupe (AD) en H et (BC) en K.



a) Quelle est l'image du triangle AOD par la symétrie de centre O ?
b) Comparer les aires de AOD et de BOC.
c) Démontrer que (OK) ⊥ (BC).
d) Exprimer l'aire de AOD en fonction de AD et OH puis l'aire de BOC en fonction de BC et OK.
e) En déduire que OH = OK.

RÉSULTATS

1 **a)** oui **b)** non **c)** oui **d)** non **e)** oui.

2 Les deux hauteurs sont perpendiculaires au côté (TC) commun aux deux triangles. Elles sont donc parallèles.

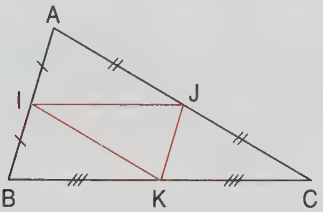
4 Construire d'abord une perpendiculaire à d puis la parallèle à cette perpendiculaire passant par A.

10 Les deux médiatrices sont perpendiculaires aux côtés parallèles (AB) et (CD) du parallélogramme ; elles sont donc parallèles.

SAVOIR FAIRE

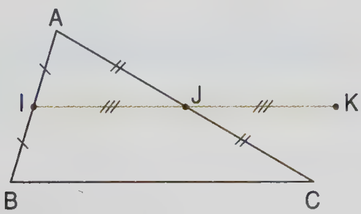
Avec des triangles

12 Voici une figure.

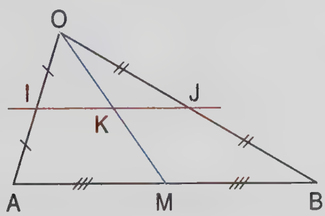


Citer tous les parallélogrammes ayant pour sommets des points marqués sur la figure. Justifier l'une des réponses.

13 Même travail qu'à l'exercice précédent avec la figure suivante.



14 *Double médiane*
On considère la figure suivante.

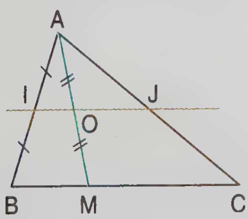


a) Démontrer que (IM) // (OB).

b) Démontrer que (JM) // (OA).

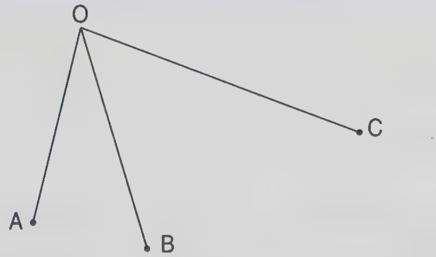
c) Démontrer que (OK) est la médiane du triangle OIJ, issue de O.

15 On considère la figure suivante.



Démontrer que J est le milieu de [AC].

16 Reproduire la figure suivante.

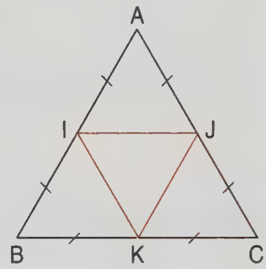


a) Construire le milieu I de [OA] et le milieu J de [OC].

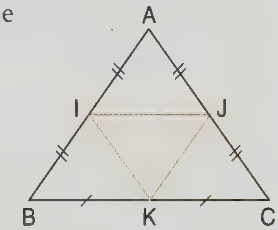
b) Construire la droite d passant par I et parallèle à (AB) puis la droite d' passant par J et parallèle à (BC).

c) Montrer que les droites d, d' et (OB) sont concourantes.

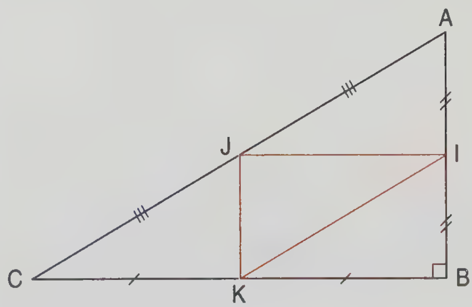
17 ABC est un triangle équilatéral.
Démontrer que IJK est équilatéral.



18 ABC est un triangle isocèle en A.
Démontrer que IJK est un triangle isocèle en K.

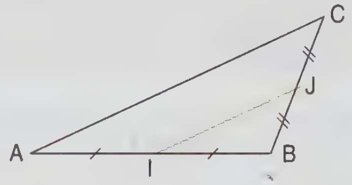


19 ABC est un triangle rectangle en B.
Démontrer que IJK est un triangle rectangle.



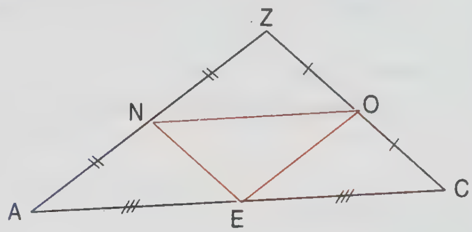
20 Avec les données de l'exercice précédent, démontrer que si ABC est un triangle rectangle isocèle, alors IJK aussi.

21 Soit un triangle ABC. Les points I et J sont les milieux des côtés [AB] et [BC].



Comparer les périmètres des triangles ABC et IBJ.

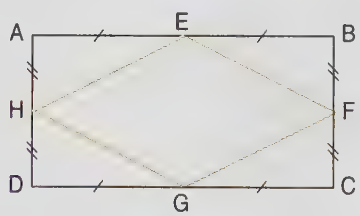
22 ZAC est un triangle. N, O et E sont les milieux des côtés [ZA], [ZC] et [AC].



Démontrer que le périmètre du triangle NOE est la moitié de celui du triangle ZAC.

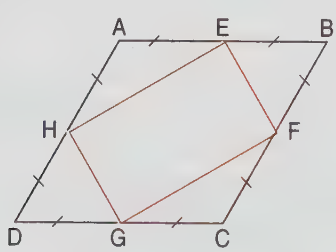
Avec des quadrilatères

23 On considère la figure suivante où ABCD est un rectangle.



Démontrer que EFGH est un losange.

24 On considère la figure suivante où ABCD est un losange.



Démontrer que EFGH est un rectangle.

25 ABCD est un parallélogramme de centre O. Les points I, J, K et L sont les symétriques de O par rapport aux points A, B, C et D.
a) Faire une figure.
b) Démontrer que IJKL est un parallélogramme.

26 ABCD est un parallélogramme et O est un point intérieur à ABCD.
Les points I, J, K et L sont les symétriques de O par rapport aux points A, B, C et D.

a) Faire une figure.

b) Démontrer que IJKL est un parallélogramme.

27 ABCD est un parallélogramme et O est un point intérieur à ABCD.
Les points I, J, K et L sont les milieux des segments [OA], [OB], [OC] et [OD].

a) Faire une figure.

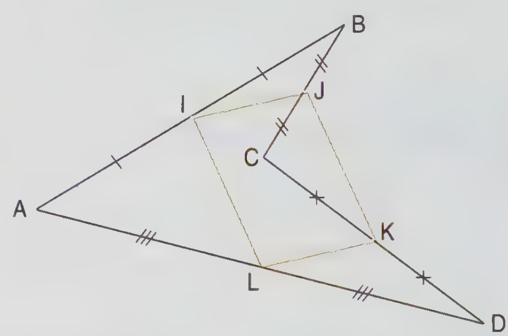
b) Démontrer que IJKL est un parallélogramme.

28 ABCD est un parallélogramme et O est un point intérieur à ABCD. I est le milieu de [OA]. La parallèle à (AB) passant par I coupe (OB) en J ; la parallèle à (BC) passant par J coupe (OC) en K ; la parallèle à (CD) passant par K coupe (OD) en L.

a) Faire une figure.

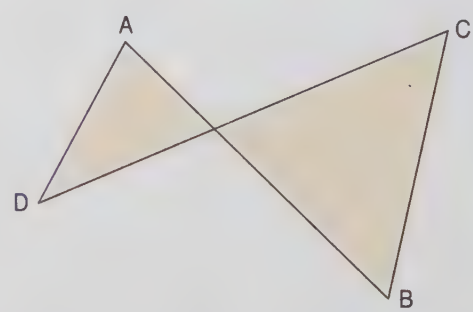
b) Démontrer que IJKL est un parallélogramme.

29 On considère la figure suivante.



Démontrer que IJKL est un parallélogramme.

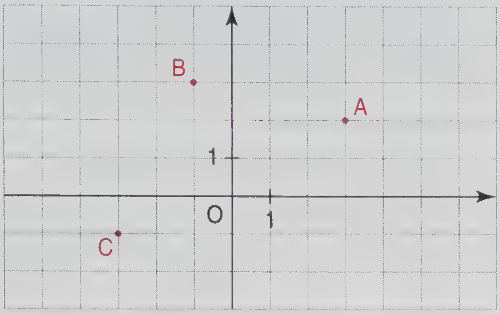
30 Reproduire la figure suivante.



Les points I, J, K et L sont les milieux des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].
Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ? Justifier la réponse.

Coordonnées du milieu

31 Voici un graphique.



a) Reproduire ce dessin et indiquer les coordonnées des points A, B et C.
b) Construire les milieux I, J et K des segments [AB], [AC] et [BC].
Lire leurs coordonnées sur le dessin.
c) Vérifier par le calcul les coordonnées de I, J et K.

32 Soit A(5 ; 4) et B(2 ; – 2).
Placer A et B sur un plan muni de deux axes gradués.
Calculer les coordonnées du milieu M de [AB].

33 Même exercice avec A(– 8 ; – 8) et B (0 ; 4).

34 Placer A(4; 5), B(5; – 4) et C(– 4; 3) et construire les milieux I, J et K des segments [AB], [AC] et [BC].
Calculer les coordonnées des points I, J et K.

35 Soit les points A(4 ; – 3) et B(– 4 ; 3).
Calculer les coordonnées du milieu I de [AB].

36 Soit A(– 1 200 ; 1 500) et B(2 000 ; – 3 000).
Calculer les coordonnées du milieu M du segment [AB].

37 Soit A(– 2 ; 6) et B(1 ; 2).
Calculer les coordonnées du point C symétrique de A par rapport à B.

38 Soit E(2 ; – 4) et F(5 ; 2,5).
Calculer les coordonnées du point H symétrique de F par rapport à E.

39 Soit A(– 1 ; 3) et I(2 ; 2).
Calculer les coordonnées du point X symétrique de A par rapport à I et celles du point Y symétrique de X par rapport à I.

40 a) Dessiner le quadrilatère TUBA sachant que : T(– 2 ; 3), U(4 ; 7), B(8 ; 5) et A(6 ; 1).
b) Construire les points L, Y, R et E, milieux des côtés [UT], [UB], [BA] et [AT].
c) Calculer les coordonnées des points L, Y, R et E.
d) Calculer les coordonnées des points M et N, milieux des segments [LR] et [YE].
e) Démontrer que LYRE est un parallélogramme.

41 a) Dessiner le triangle AMI tel que :
A(– 2 ; 0) ; M(0 ; 6) et I(8 ; 2).
b) Calculer les coordonnées du milieu B de [AM] puis celles du milieu R de [MI].
c) Quelle est la nature du quadrilatère ABRI ? Justifier la réponse.

RÉSULTATS

12 AJKI, IJKB et IJCK.

14 **a)** Dans le triangle OBA, I est le milieu de [OA] et M est le milieu de [AB].
D'où (IM) // (OB).
b) Dans le triangle OBA, J est le milieu de [OB] et M est le milieu de [AB].
D'où (JM) // (OA).
c) Le quadrilatère OJMI a ses côtés opposés parallèles, c'est donc un parallélogramme. Ses diagonales [OM] et [IJ] se coupent en leur milieu K. (OK) est donc la médiane de OIJ issue de O.

17 Comme I est le milieu de [AB] et J le milieu de [AC], $IJ = \frac{BC}{2}$.

De même, $JK = \frac{AB}{2}$ et $IK = \frac{AC}{2}$.

ABC étant équilatéral, AB = AC = BC.
On a donc IJ = JK = IK, d'où IJK est équilatéral.

21 Dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [BC] donc $IJ = \frac{AC}{2}$.

On a aussi $BJ = \frac{BC}{2}$ et $BI = \frac{BA}{2}$.

D'où $BI + BJ + IJ = \frac{AB + BC + AC}{2}$.

23 En appliquant la propriété de la droite des milieux dans les triangles ABD, ABC, BCD et ADC et sachant que AC = BD car ABCD est un rectangle, on obtient :

$EH = FG = EF = HG = \frac{AC}{2}$.

EFGH est donc un losange.

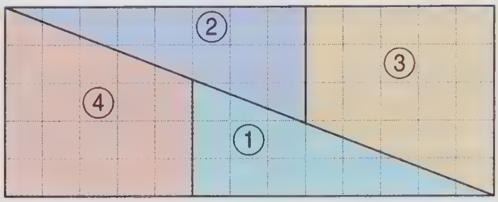
32 M(3,5 ; 1). **37** C(4 ; – 2).

DÉMONTRER

Ça se voit !

42 *64 = 65 !*

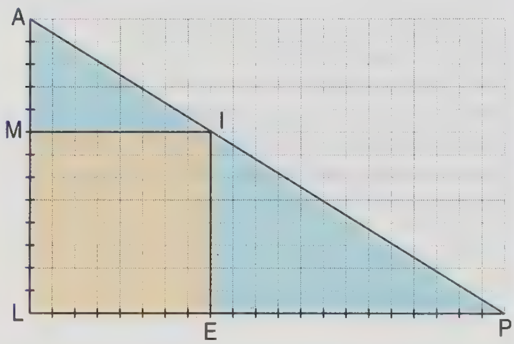
Observer la figure suivante.



Calculer l'aire du grand rectangle.
Calculer l'aire des parties 1, 2, 3 et 4 puis faire la somme de ces aires.
Les résultats trouvés sont-ils sans surprise ?

43 *Points alignés ?*

Construire la figure suivante.

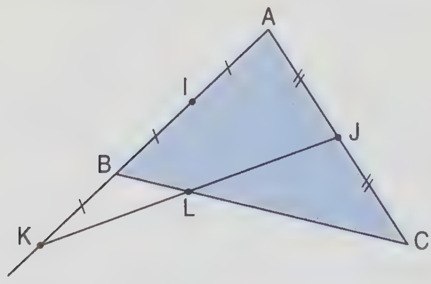


a) Que peut-on penser des points A, I et P ? (On ne demande pas de démonstration.)
b) Calculer l'aire du triangle PAL.
c) Calculer la somme des aires de AMI, de MIEL et de EPI. Et alors ?

Démonstrations et milieux

44 *Énoncer des hypothèses*

a) Énoncer toutes les hypothèses indiquées par cette figure.



b) Démontrer que L est le milieu de [KJ]. On pourra démontrer d'abord que : (IJ) // (BL).

45 *Rédiger une démonstration*

Le problème
Soit un triangle ABC rectangle en A.
Soit K et L les milieux des côtés [AB] et [BC].
Démontrer que (KL) est la médiatrice de [AB].

a) Tracer une figure.
b) Voici le **schéma** d'une démonstration.

K milieu de [AB]
L milieu de [BC] ⟶ (KL) // (AC)
(AC) ⊥ (AB)
⟶ (KL) ⊥ (AB)

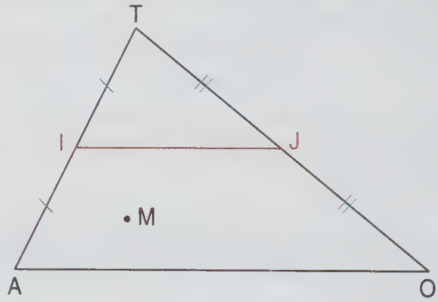
Par suite :

(KL) ⊥ (AB)
K milieu de [AB]
⟶ (KL) médiatrice de [AB]

Énoncer les propriétés et ainsi que la définition utilisées dans ce schéma de démonstration.
c) Rédiger la démonstration.

46 *Deux démonstrations possibles*

Le problème
On considère un triangle TAO, le milieu I de [TA] et le milieu J de [TO].
Soit un point M à l'intérieur du triangle TAO.
On appelle L le symétrique de M par rapport à I et S le symétrique de M par rapport à J.
Démontrer que LAOS est un parallélogramme.



a) Construire deux figures identiques.
b) **Première démonstration.**

Démontrer que (IJ) // (AO) et $IJ = \frac{1}{2}$ AO.

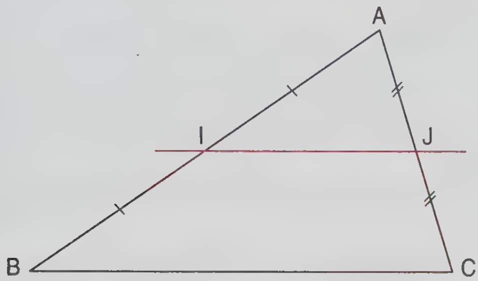
Démontrer que (IJ) // (LS) et $IJ = \frac{1}{2}$ LS.

Que peut-on en déduire pour (AO) et (LS) ?
Conclure que LAOS est un parallélogramme.
c) **Seconde démonstration.**
Tracer [TM] sur la seconde figure.
Démontrer que MALT est un parallélogramme.
Démontrer que MOST est un parallélogramme.
En déduire que (LA) // (OS) et LA = OS.
Conclure que LAOS est un parallélogramme.

CHERCHER

Avec des triangles

47 On considère la figure suivante.



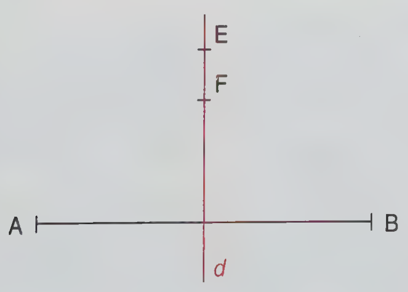
Démontrer que le milieu K de [IJ] est sur la médiane issue de A du triangle ABC.

48 Soit un triangle ABC.
Construire un point I de [AB] et un point J de [AC] tels que $IJ = \frac{BC}{2}$.
Est-on sûr que (IJ) et (BC) soient parallèles ?

49 Soit trois points alignés A, B et C et soit un point O non situé sur (AB).
Le point E est le symétrique du point O par rapport au point A ; le point F est le symétrique du point O par rapport au point C.
La droite (OB) coupe (EF) en X.
Démontrer que B est le milieu de [OX].

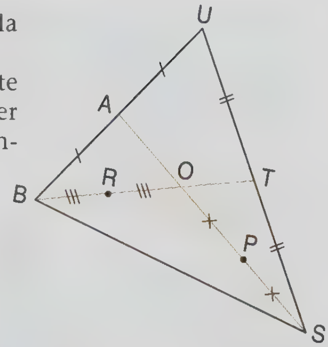
50 Soit un triangle ABC. E est le milieu de [AB], F est le milieu de [AC], I est le milieu de [AE] et J est le milieu de [AF].
a) Faire une figure.
b) Calculer IJ en fonction de BC.

51 On considère un segment [AB] et *d* sa médiatrice. Soit deux points E et F de *d*.
Les points I, J, K et L sont les milieux des segments [AE], [BE], [BF] et [AF].



Démontrer que IJKL est un rectangle.

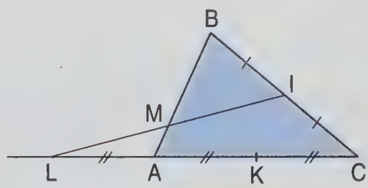
52 On considère la figure ci-contre.
a) Reproduire cette figure et énoncer les hypothèses indiquées.



b) Démontrer que RATP est un parallélogramme.

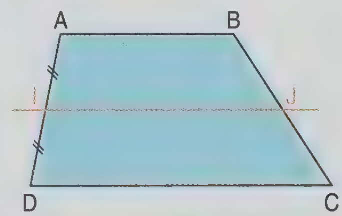
53 Soit un triangle ABC.
a) Construire le point D symétrique de B par rapport à A puis le point E symétrique de C par rapport à B.
b) La droite (AC) coupe [ED] en G. La parallèle à (AC) passant par B coupe [ED] en H.
Démontrer que EH = HG = GD.

54 On considère la figure suivante.
Les droites (AB) et (LI) se coupent en M.



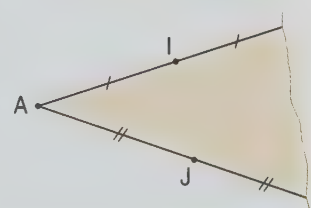
Démontrer que $AM = \frac{AB}{4}$.

55 On considère un trapèze ABCD. La parallèle aux bases (AB) et (CD) passant par le milieu I de [AD] coupe (BC) en J.



Démontrer que J est le milieu de [BC].

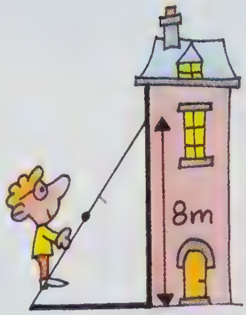
56 *Prenons de la hauteur*
Le triangle ABC a été en partie effacé.
I est le milieu de [AB], J celui de [AC].



Construire la hauteur issue de A sans tracer les points B et C. Justifier la construction.

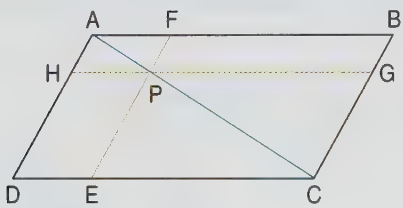
Exercices

57 *Le milieu de l'échelle double*
Le haut d'une échelle double appuyée sur le mur d'une maison se situe à 8 m du sol. À quelle hauteur du sol se situe le milieu de l'échelle ? Justifier la réponse.



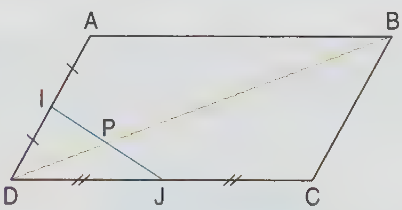
Avec des parallélogrammes

58 Par un point P appartenant à la diagonale [AC] d'un parallélogramme ABCD, on trace les parallèles aux côtés.



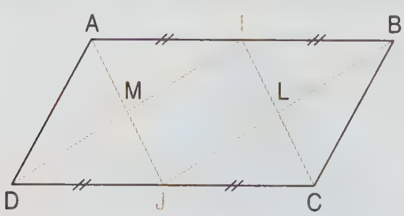
Soit I le milieu de [FG] et J le milieu de [HE]. Démontrer que les droites (IJ) et (BD) sont parallèles.

59 On considère la figure suivante où ABCD est un parallélogramme.



Les droites (BD) et (IJ) se coupent en P. Démontrer que P est le milieu de [IJ].

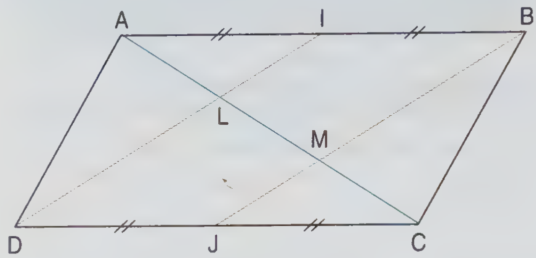
60 Les points I et J sont les milieux des côtés [AB] et [CD] d'un parallélogramme ABCD.



Les droites (DI) et (AJ) se coupent en M. Les droites (CI) et (BJ) se coupent en L.

Démontrer que $ML = \dfrac{AB}{2}$.

61 On considère un parallélogramme ABCD.



a) Énoncer les hypothèses indiquées sur la figure.

b) Démontrer que IBJD est un parallélogramme.

c) Démontrer que $AL = LM = MC$.

Coordonnées du milieu

62 *Sur un axe gradué*
a) Placer :
– le point A d'abscisse – 2,3 ;
– le point B d'abscisse 5 ;
– le point C d'abscisse 6,5.

b) Construire le point D tel que [AB] et [CD] aient même milieu.

c) Calculer l'abscisse du point D.

63 *Quatrième sommet d'un parallélogramme*

a) Placer A (– 2 ; 3), B (– 1 ; – 2) et C (6 ; – 1).

b) Calculer les coordonnées du milieu M de [AC].

c) Calculer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

64 *Parallélogramme ?*
Soit A (– 1 000 ; – 1 002), B (– 1 002 ; 1 000), C (1 000 ; 1 000) et D (1 002 ; – 1 002).
Est-ce que ABCD est un parallélogramme ?

65 *Symétrie ?*
Les points A (15 ; 20) et B (– 3 ; – 5) sont-ils symétriques par rapport au point C (6 ; 7) ?

66 *Milieu de milieux !*
Soit A (2 ; 5), B (3 ; – 4) et U (0 ; 1).

a) Calculer les coordonnées du point A′ symétrique de A par rapport à U puis calculer les coordonnées du point B′ symétrique de B par rapport à U.

b) Calculer les coordonnées des points I et J milieux de [AB] et [A′B′].

c) Calculer les coordonnées du milieu de [IJ].
Que constate-t-on ? Cela était-il prévisible ?

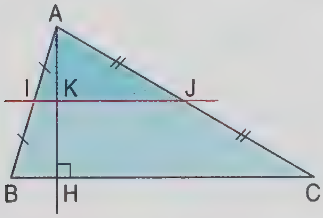
Problèmes

67 *Parallélogrammes cachés*

Dans un triangle ABC, on appelle L le milieu de [BC], M le milieu de [AB] et N le milieu de [AC].
Les droites (AL) et (MN) se coupent en K.
a) Démontrer que AMLN est un parallélogramme.
b) En déduire que K est le milieu de [MN].
c) Soit I le milieu de [BM] et J celui de [CN]. Démontrer que les droites (IK) et (BN) sont parallèles puis que les droites (JL) et (BN) sont parallèles.
d) Démontrer que IKJL est un parallélogramme.

68 *Aire du triangle « moitié »*

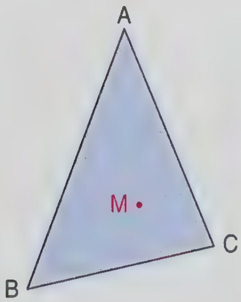
Soit un triangle ABC. Les points I et J sont les milieux des côtés [AB] et [AC].
(AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC. Elle coupe (IJ) en K.



a) Démontrer que (AK) et (IJ) sont perpendiculaires.
b) Démontrer que K est le milieu de [AH].
c) Comparer les aires de AIJ et de ABC.

69 *Découpages*

Soit un triangle ABC et soit un point M intérieur au triangle ABC.



a) Construire le milieu E de [AM], le milieu F de [BM] et le milieu G de [CM].
b) Comparer les aires des triangles MEF et MAB.
c) Comparer les aires des triangles EFG et ABC.

70 *Droites concourantes*

On considère un quadrilatère ABCD qui n'est pas un parallélogramme. E est le milieu de [AC] et F est le milieu de [BD].
a) Construire une figure.
b) Peut-on avoir E = F ?
c) Démontrer que la parallèle d_1 à (BC) passant par E, la parallèle d_2 à (AD) passant par F et la droite (AB) sont concourantes.

71 *Rectangle dans un triangle*

Soit un triangle ZUT. I et J sont les milieux des côtés [ZU] et [ZT].
La perpendiculaire à (UT) passant par I coupe (UT) en I′ et la perpendiculaire à (UT) passant par J coupe (UT) en J′.
a) Faire une figure.
b) Démontrer que IJJ′I′ est un rectangle.
c) La perpendiculaire à (UT) passant par Z coupe (UT) en K.
Démontrer que le périmètre du rectangle IJJ′I′ est égal à UT + ZK.
d) Démontrer que l'aire du rectangle IJJ′I′ est égale à la moitié de l'aire du triangle ZUT.

COUPS DE POUCE

47 Soit L le milieu de [BC].
Que dire de AJLI ?

48 Essayer de construire I et J de sorte que (IJ) et (BC) ne soient pas parallèles.

52 b) Considérer le triangle BUS puis le triangle OBS.

53 b) Considérer le triangle ECG puis le triangle DHB.

54 Considérer [IK] dans le triangle CBA puis dans le triangle LKI.

55 Tracer [BD].

59 Soit O le centre de ABCD.
Démontrer d'abord que le quadrilatère IOJD a ses côtés opposés parallèles.

60 Montrer d'abord que AIJD et IBCJ sont des parallélogrammes.

62 c) Calculer d'abord l'abscisse du milieu M de [AB].

63 c) M est le milieu de [BD].

64 Les diagonales ont-elles le même milieu ?

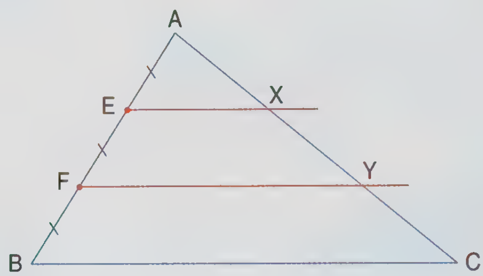
67 c) et **d)** Utiliser les propriétés de la droite des milieux dans les triangles BMN et BCN.

69 b) L'aire de MEF est égale au quart de l'aire de MAB. La démonstration détaillée fait l'objet de l'exercice 68.

9 Propriété de Thalès

Activités

1 Avec des tiers



A. Les hypothèses et la figure

On considère un triangle ABC.
Les points E et F sont sur le segment [AB] et vérifient AE = EF = FB.
La parallèle à (BC) passant par E coupe [AC] en X et la parallèle à (BC) passant par F coupe [AC] en Y.
Construire une figure.

B. Comparaisons de longueurs

1. Démontrer que AX = XY, puis exprimer FY en fonction de EX.
2. La droite (XB) coupe le segment [FY] en M.
Démontrer que XY = YC.
3. Exprimer FM en fonction de EX puis MY en fonction de BC.
En déduire FY en fonction de EX et de BC.
4. À l'aide des résultats obtenus en **1** et **3**, exprimer BC en fonction de EX.

C. Comparaisons de rapports

Utiliser les résultats du **B** pour répondre aux questions suivantes.

1. Évaluer $\frac{AE}{AB}$ $\frac{AX}{AC}$ $\frac{EX}{BC}$.

Que constate-t-on ?

2. Évaluer $\frac{AF}{AB}$ $\frac{AY}{AC}$ $\frac{FY}{BC}$.

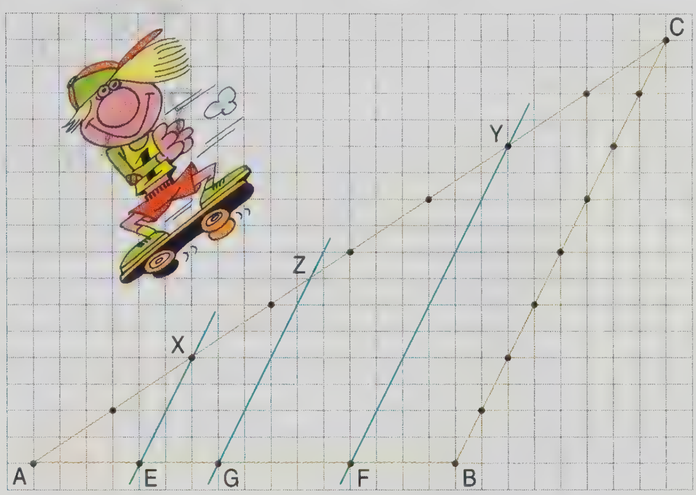
Que constate-t-on ?

Activités

2 Avec des quadrillages

A. Un premier quadrillage

ABC est un triangle et les droites (EX), (GZ), (FY) et (BC) sont parallèles.



1. Évaluer, avec le quadrillage, les rapports $\frac{AE}{AB}$ $\frac{AX}{AC}$ $\frac{EX}{BC}$.

2. Même travail avec $\frac{AF}{AB}$ $\frac{AY}{AC}$ $\frac{FY}{BC}$.

3. Même travail avec $\frac{AG}{AB}$ $\frac{AZ}{AC}$ $\frac{GZ}{BC}$.

4. Compléter la propriété suivante que nous admettons.

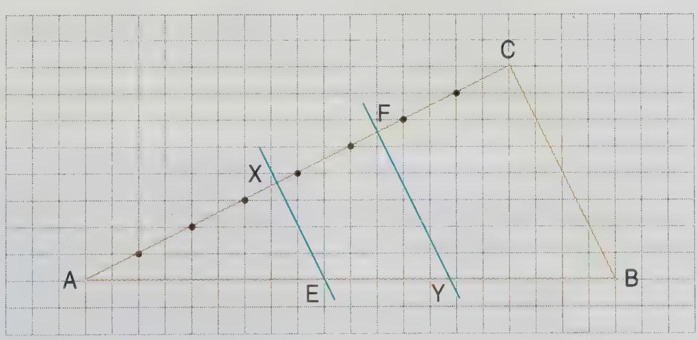
PROPRIÉTÉ

Soit un triangle ABC et soit M un point de [AB] et N un point de [AC].

Si (MN) // (BC), **alors** $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

B. Un deuxième quadrillage

ABC est un triangle, les droites (EX), (FY) et (BC) sont parallèles.



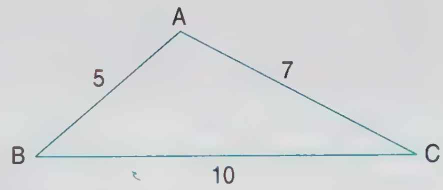
1. Avec le quadrillage, évaluer $\frac{AE}{AB}$.

En utilisant la propriété énoncée au A, exprimer AX en fonction de AC.

2. Avec le quadrillage, évaluer $\frac{AF}{AC}$ puis calculer AY (en carreaux).

3 Avec une règle graduée

1. Construire soigneusement un triangle ABC ayant (en cm) les dimensions indiquées sur la figure ci-contre.



2. Placer les points E et F sur [AB] tels que AE = 1 cm et AF = 3 cm.
Placer le point G sur [AC] tel que AG = 3 cm.
Construire :
– la parallèle à (BC) passant par E, elle coupe [AC] en X ;
– la parallèle à (BC) passant par F, elle coupe [AC] en Y ;
– la parallèle à (BC) passant par G, elle coupe [AB] en T.

3. Mesurer AX, AY, AT, EX, FY et TG.

4. Donner des valeurs approchées des quotients suivants.

$\frac{AE}{AB}$ $\frac{AF}{AB}$ $\frac{AT}{AB}$ $\frac{AX}{AC}$ $\frac{AY}{AC}$ $\frac{AG}{AC}$ $\frac{EX}{BC}$ $\frac{FY}{BC}$ $\frac{TG}{BC}$

Que constate-t-on ?

5. Compléter la propriété suivante que nous admettons.

PROPRIÉTÉ

Soit un triangle ABC et soit M un point de [AB] et N un point de [AC].

Si (MN) // (BC), **alors** $\frac{A...}{AB} = \frac{A...}{AC} = \frac{.....}{BC}$.

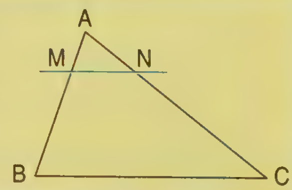
4 La propriété de Thalès

A. L'énoncé

Compléter l'énoncé de la propriété de Thalès.

PROPRIÉTÉ

Dans le triangle ABC, M est un point de [AB] et N est un point de [AC].
Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles,
alors $\frac{AM}{AB} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$.

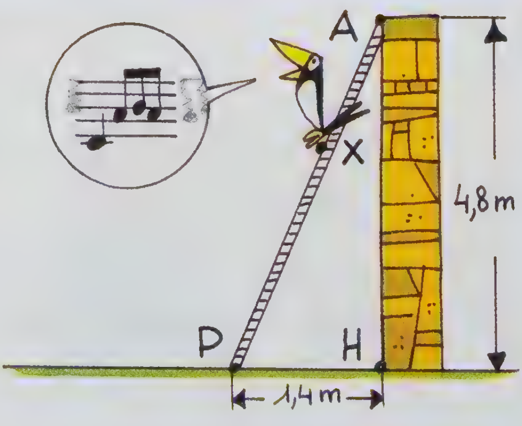


B. Une application

Il était une fois... une échelle AP de 5 m accotée à un mur AH de 4,8 m. Une pie est perchée sur l'échelle au point X tel que XP = 3 m.

1. À quelle hauteur du sol est perchée la pie ?

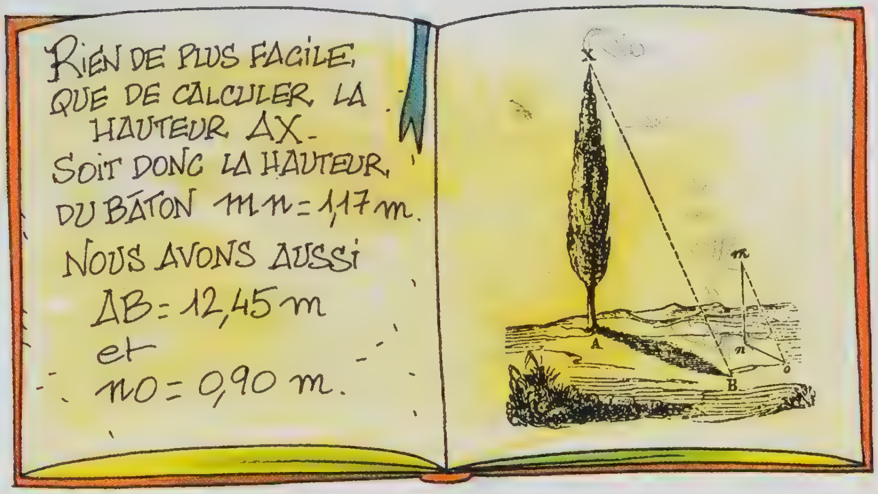
2. À quelle distance du mur se trouve la pie ?



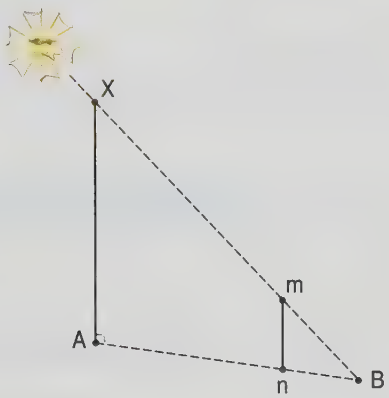
5 Thalès dans la vie pratique

A. Calcul de la hauteur d'un arbre

Thalès avait séjourné en Égypte. On raconte (voir « Histoire des mathématiques » p. 142) qu'il avait calculé la hauteur d'une pyramide en utilisant l'ombre d'un bâton. Cette technique fut longtemps enseignée, comme en témoigne cet extrait d'un vieux livre d'arpentage.



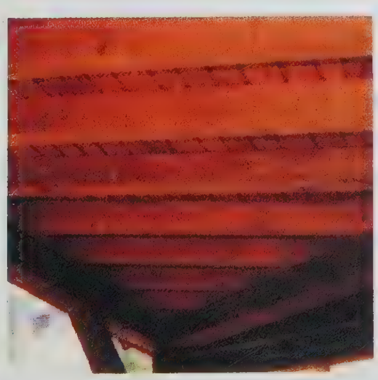
(D'après *Notions de géométrie pratique et d'arpentage*, Eysserie, Delagrave.)

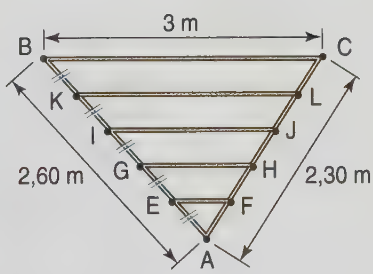


Calculer la hauteur de l'arbre.

B. Calcul de longueurs

Un élément de charpente a la forme d'un triangle.
Quatre chevrons parallèles renforcent ce triangle (voir figure).





Calculer la longueur de chaque chevron (on néglige l'épaisseur du bois).

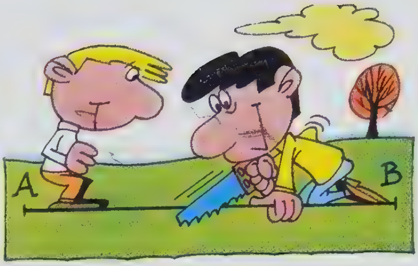
Activités

6 Partage d'un segment

Le problème

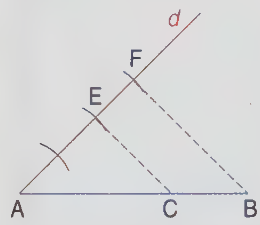
Soit un segment [AB].
Construire à la règle et au compas le point C de [AB] tel que :

$AC = \frac{2}{3} AB.$



Voici un programme de construction

1. Tracer une droite d passant par A.
2. Choisir une longueur unité.
(On choisit un écartement de compas.)
3. Porter trois fois cette longueur sur d.
(On détermine ainsi E et F tels que :
AE = 2 et AF = 3.)
4. Tracer (BF).
5. Tracer la parallèle à (BF) passant par E.
Elle coupe [AB] en C.



1. Évaluer $\frac{AE}{AF}$.

Démontrer que $AC = \frac{2}{3} AB.$

2. Tracer un autre segment [AB] et adapter le programme de construction pour construire un point D de [AB] tel que :

$AD = \frac{3}{5} AB.$

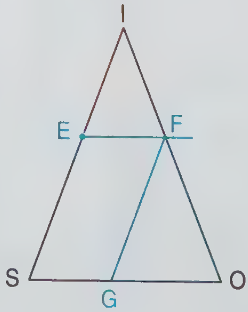
3. Tracer un autre segment [AB] et adapter le programme de construction pour construire un point K de (AB) tel que :

$AK = \frac{5}{3} AB.$

7 Thalès et les triangles particuliers

A. Avec un triangle isocèle

On considère un triangle ISO isocèle en I avec IS = 7 et SO = 5.
E est le point de [IS] tel que IE = 3.
La parallèle à (SO) passant par E coupe (IO) en F et la parallèle à (IS) passant par F coupe (SO) en G.



1. Faire une figure.

2. Démontrer que IEF est isocèle en I.

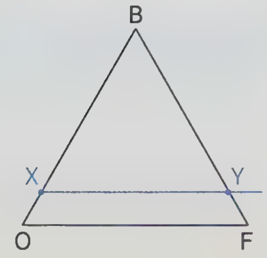
3. Calculer OG.

B. Avec un triangle équilatéral

On considère un triangle équilatéral BOF de côté 6.
X est le point de [BO] tel que OX = 1.
La parallèle à (OF) passant par X coupe (BF) en Y.

1. Calculer BY et XY.

2. Que peut-on dire du triangle BXY ?



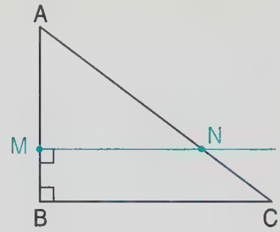
C. Avec un triangle rectangle

On considère un triangle ABC rectangle en B.
AB = 3 et BC = 4.
M est un point de [AB] tel que AM = 2,1.
La perpendiculaire à (AB) passant par M coupe (AC) en N.

1. Calculer MN.

2. Calculer l'aire du triangle AMN.

3. L'aire du triangle AMN est-elle supérieure à la moitié de l'aire du triangle ABC ?



8 Construction d'une 4ᵉ proportionnelle

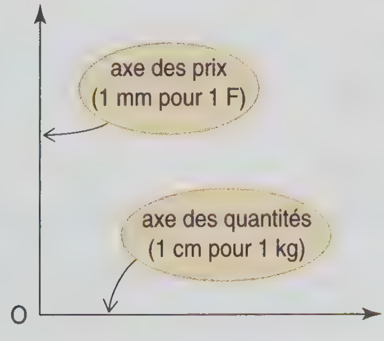
Rappel. Dans un tableau de proportionnalité où trois nombres sont connus, le quatrième nombre est appelé « **quatrième proportionnelle** ».

Le problème

Quantité (en kg)	Prix (en F)
7	59,5
12	x ?

1. Calculer x.

2. Graphiquement :
- Tracer deux axes sécants en O.
- Marquer, sur l'axe des quantités, les points A et B d'abscisse 7 et 12.
- Marquer, sur l'axe des prix, le point C d'ordonnée 59,5.
- Joindre A et C et tracer la parallèle à (AC) passant par B. Elle coupe l'axe des prix en D.
- Mesurer OD. Que constate-t-on ?
- Expliquer pourquoi on retrouve x.

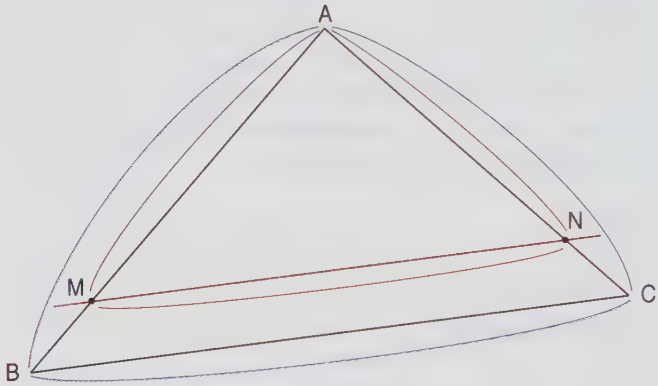


Outil — Propriété de Thalès

PROPRIÉTÉ

Dans un triangle ABC, soit M un point de [AB] et N un point de [AC].

Si (MN) et (BC) sont parallèles, **alors** $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.



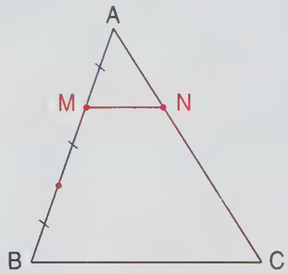
EXEMPLE

Sur la figure ci-contre, on a $AM = \dfrac{1}{3}AB$ et $(MN) // (BC)$.

On a donc $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{3}$.

D'après la propriété de Thalès : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

Donc $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{1}{3}$ et donc $AN = \dfrac{1}{3}AC$ et $MN = \dfrac{1}{3}BC$.



Méthode — Calculer...

M 15 Comment calculer la longueur d'un segment ?

Lorsque deux triangles se présentent comme dans les figures ci-dessus et que certains côtés sont connus, la propriété de Thalès permet de calculer d'autres côtés.

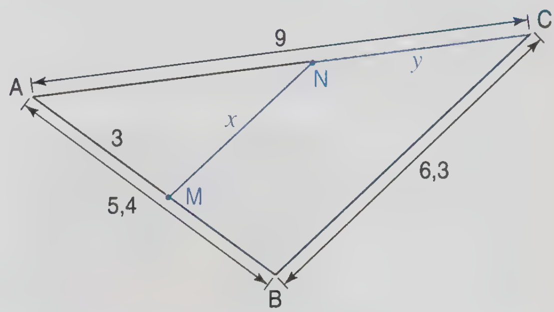
Exemple — Avec la propriété de Thalès

Calculs de longueurs dans un triangle

ÉNONCÉ

ABC est un triangle tel que :
AB = 5,4 AC = 9 BC = 6,3.
M est le point de [AB] tel que :
AM = 3.
N est le point de [AC] tel que :
(MN) // (BC).

Calculer MN et NC.



Stratégie

On désigne par x et y les longueurs des segments inconnus, puis on utilise la propriété de Thalès.
Cela donne une égalité où figure x et une autre égalité où figure y.
On pourra alors calculer x et y.

Solution

Soit $x = MN$ et $y = NC$.
Dans le triangle ABC, les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Donc, d'après la propriété de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

On a :
AM = 3 AB = 5,4
AN = 9 – y AC = 9
MN = x BC = 6,3.

D'où $\dfrac{3}{5{,}4} = \dfrac{9 - y}{9} = \dfrac{x}{6{,}3}$.

L'égalité $\dfrac{x}{6{,}3} = \dfrac{3}{5{,}4}$ donne :

$5{,}4 \times x = 3 \times 6{,}3$
d'où $5{,}4x = 18{,}9$
d'où $x = 18{,}9 \div 5{,}4 = 3{,}5$.
Donc MN = **3,5**.

L'égalité $\dfrac{9 - y}{9} = \dfrac{3}{5{,}4}$ donne :

$5{,}4 \times (9 - y) = 3 \times 9$
d'où $-5{,}4y + 48{,}6 = 27$
d'où $-5{,}4y = 27 - 48{,}6 = -21{,}6$
d'où $y = (-21{,}6) \div (-5{,}4) = 4$.
Donc NC = **4**.

Remarques

On remplace les longueurs par leurs valeurs : AN = AC – NC.

Cette égalité permet de trouver x.

On applique l'égalité des produits en croix.

Cette égalité permet de trouver y.

On applique l'égalité des produits en croix.

Histoire des mathématiques

THALÈS : sa vie et son œuvre

Nous ne savons rien de certain sur THALÈS. Seuls quelques textes grecs, écrits plusieurs siècles après sa mort, ont évoqué sa personnalité et ses travaux. Ils n'apportent aucune certitude historique, mais ils ont forgé l'image d'un mathématicien légendaire.

THALÈS est un mathématicien grec né au début du 6^{e} siècle avant J.-C. à Millet, en Asie mineure. Il aurait été géomètre mais aussi habile marchand et grand voyageur.
On raconte à son sujet de nombreuses anecdotes (non vérifiées) qui illustrent sa grande ingéniosité.

UNE HISTOIRE QUI NE MANQUE PAS DE SEL

Un jour, THALÈS conduisait une caravane de marchandises. L'un de ses mulets, portant un lourd sac de sel, tomba à l'eau en traversant une rivière. Une fois relevé, le mulet se sentit moins chargé car une partie du sel s'était dissoute dans l'eau. Il prit donc l'habitude de tomber volontairement à l'eau à chaque nouvelle traversée de rivière. Ayant compris la ruse, THALÈS remplaça le sac de sel par un sac d'éponges et, lors de la traversée suivante, le mulet se releva, croulant sous un énorme poids d'eau.
THALÈS l'avait ainsi corrigé de sa malice.

PLUS FORT QUE TINTIN

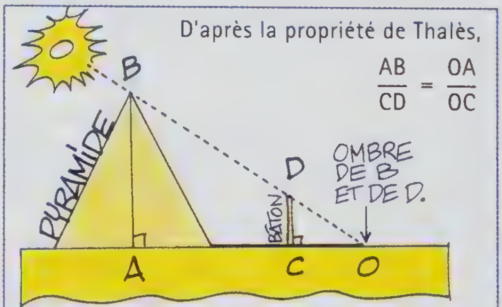
On affirme aussi que THALÈS aurait prédit une éclipse de Soleil, mais cela semble aujourd'hui très improbable.

UN GÉOMÈTRE PLEIN DE BON SENS

En géometrie, on lui attribue des propriétés comme :
« Un cercle est symétrique par rapport à ses diamètres. »
« Les angles à la base d'un triangle isocèle ont même mesure. »
« Des angles opposés par le sommet ont même mesure. »

PYRAMIDE, SOLEIL ET BÂTON

On a écrit, sans jamais fournir la moindre preuve, que THALÈS aurait profité d'un voyage commercial en Égypte pour calculer la hauteur d'une pyramide en utilisant l'ombre, un bâton et la propriété de... Thalès.



Ayant mesuré OA, OC et CD, on peut calculer AB.

Mais, bien avant THALÈS, cette propriété était connue des Babyloniens et des Égyptiens. Comme tout observateur attentif, ceux-ci avaient pu remarquer que, si deux triangles ont leurs côtés communs ou parallèles, alors les longueurs de ces côtés semblent proportionnelles. Ils avaient ensuite utilisé la propriété en la considérant comme une évidence n'ayant pas besoin d'être démontrée.

Exercices

SAVOIR FAIRE

Révisions

Trouver le nombre x tel que :

1 $\frac{x}{5} = \frac{4}{5}$

2 $\frac{5}{x} = \frac{4}{5}$

3 $\frac{5}{4} = \frac{x}{5}$

4 $\frac{5}{4} = \frac{5}{x}$

5 $\frac{x+2}{3} = \frac{3}{5}$

6 $\frac{7}{x-2} = \frac{8}{3}$

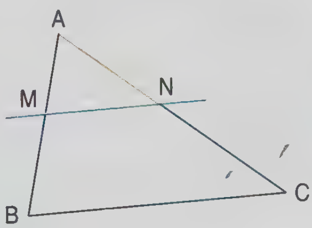
7 $\frac{x+2}{3} = \frac{x-3}{2}$

8 $\frac{2}{x-1} = \frac{5}{x}$

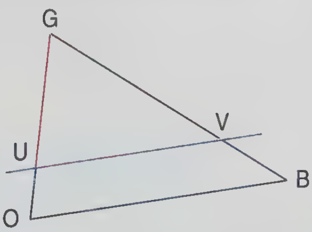
Thalès sous tous les angles

Les figures des exercices suivants sont volontairement fausses.

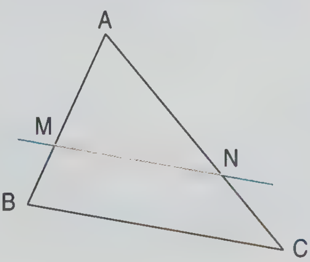
9 Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
On a :
AB = 5
AC = 7
AM = 2.
Calculer AN.



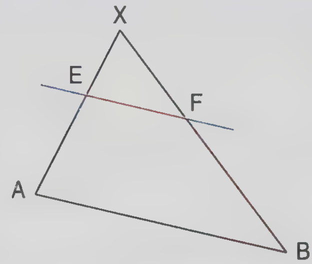
10 Les droites (UV) et (OB) sont parallèles.
On a :
GO = 8
GB = 6
GV = 4.
Calculer GU.



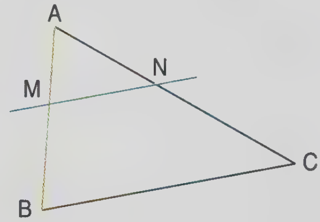
11 Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
On a :
AB = 9
BC = 7
AM = 5.
Calculer MN.



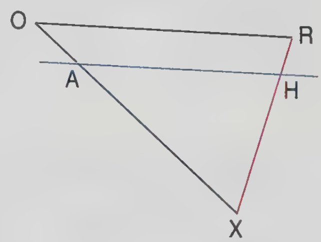
12 Les droites (EF) et (AB) sont parallèles.
On a :
XF = 3
XB = 7
AB = 9.
Calculer EF.



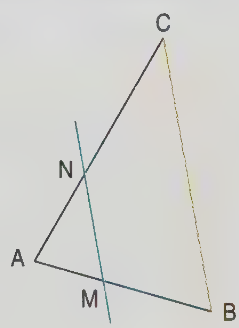
13 Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
On a :
AM = 3
AN = 4
AC = 9.
Calculer AB.



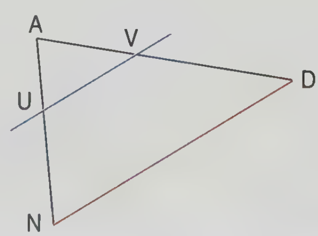
14 Les droites (AH) et (OR) sont parallèles.
On a :
XA = 5
XO = 7
XH = 3.
Calculer XR.



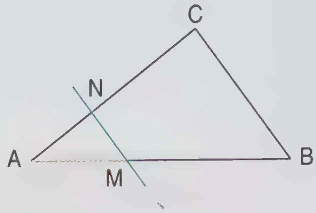
15 Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
On a :
AN = 3
AC = 8
MN = 5.
Calculer BC.



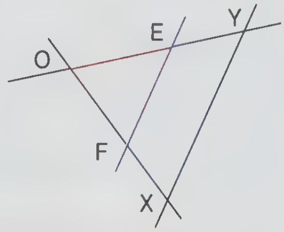
16 Les droites (UV) et (ND) sont parallèles.
On a : AU = 8 AN = 13 UV = 5.
Calculer ND.



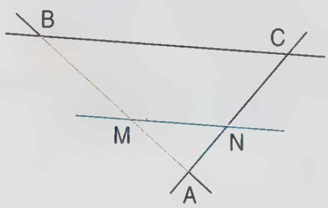
17 Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
On a :
MN = 2
BC = 5
AB = 8.
Calculer AM.



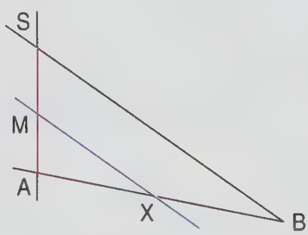
18 Les droites (EF) et (XY) sont parallèles.
On a :
EF = 5
XY = 8
OY = 6.
Calculer OE.



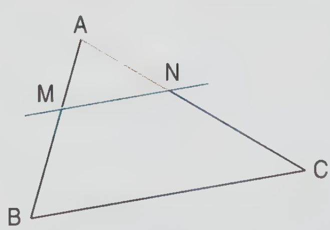
19 Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
On a :
MN = 4
BC = 7
AM = 2.
Calculer AB.



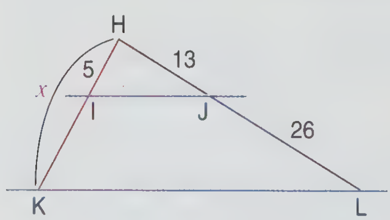
20 Les droites (MX) et (SB) sont parallèles.
On a :
MX = 11
BS = 13
AM = 7.
Calculer AS.



21 Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
On a :
AB = 8
AC = 10
MB = 5.
Calculer AN.

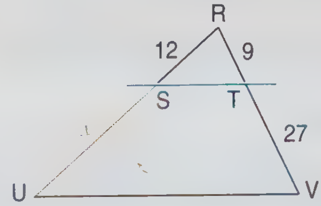


22 Les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.

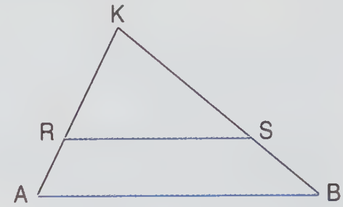


Calculer HK.

23 Trouver x sachant que (ST) // (UV).



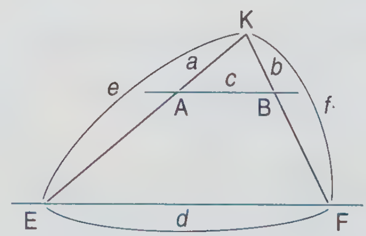
24 Dans la figure suivante, on a :
(RS) // (AB)
KA = 6
KR = 3,6
AB = 8.



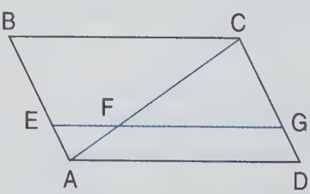
Quelle longueur peut-on calculer ?
Calculer cette longueur.

25 Compléter le tableau sachant que les droites (AB) et (EF) sont parallèles (voir figure).

	1er cas	2^{e} cas
a	7	
b	4	2
c	5	
d	12	12
e		20
f		15



26 ABCD est un parallélogramme et (EG) est parallèle à (BC).
On a :
AB = 4
BC = 6
AC = 5
AE = 1.



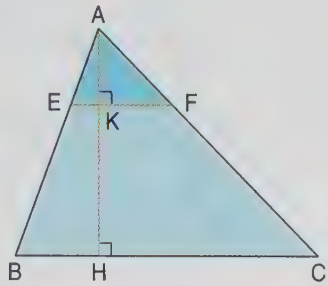
a) Calculer AF et EF.
b) En déduire FC et FG.

Thalès et aires

27 *Le grand triangle et le petit (1)*

On considère la figure suivante.

On a :
(EF) // (BC)
EF = 2
BC = 6
AH = 5.



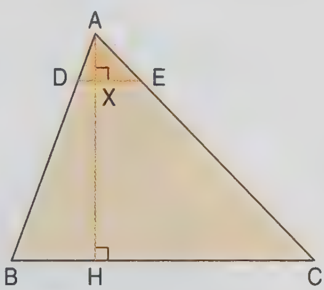
a) Calculer $\frac{AE}{AB}$ et AK.

b) Calculer les aires des triangles AEF et ABC.

28 *Le grand triangle et le petit (2)*

On considère la figure suivante.

On a :
AH = 12
AB = 13
AC = 15
BC = 14
$\frac{AD}{AB} = \frac{1}{5}$.



a) Calculer AD, AE, AX et DE.

b) Calculer les périmètres des triangles ADE et ABC puis compléter :

périmètre(ADE) = $\boxed{....}$ × périmètre(ABC).

c) Calculer les aires des triangles ADE et ABC puis compléter :

aire(ADE) = $\boxed{....}$ × aire(ABC).

Partage d'un segment

29 *Partage en sept*

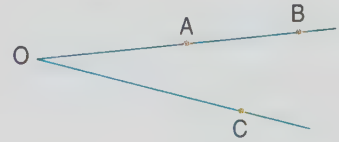
Tracer un segment [AB].
Partager, à la règle et au compas, ce segment [AB] en sept segments de même longueur.

30 *Partage en tiers et en sixièmes*

Tracer un segment [AB]. Construire, à la règle et au compas, un segment de longueur $\frac{2}{3}$ AB puis un autre de longueur $\frac{5}{6}$ AB.

Construction d'une quatrième proportionnelle

31 Les points O, A, B et C sont disposés comme le montre la figure.



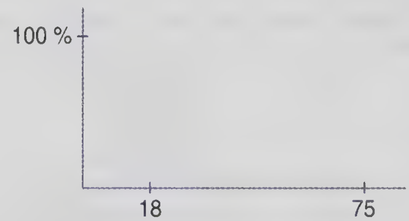
On donne : OA = 40 mm, OB = 70 mm et OC = 56 mm.

a) Construire un point D de la droite (OC) tel que $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$.

b) Calculer OD.

32 Dans un avion, 18 des 75 passagers sont des Belges.

a) Représenter graphiquement le pourcentage de passagers belges (prendre 1 cm pour 10 passagers et 10 cm pour 100 %).



b) Vérifier ce pourcentage par le calcul.

RÉSULTATS

1 $x = 4$.
2 $x = 6{,}25$.
5 $x = -0{,}2$.
6 $x = 4{,}625$.
9 AN = 2,8.
11 MN = $\frac{35}{9}$.
13 AB = 6,75.
15 BC = $\frac{40}{3}$.
17 AM = 3,2.
19 AB = 3,5.
21 AN = 3,75.
24 RS = 4,8.

27 a) $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{AK}{AH}$

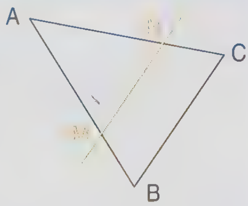
d'où $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$ et $AK = \frac{5}{3}$.

b) aire(AEF) = $\frac{5}{3}$

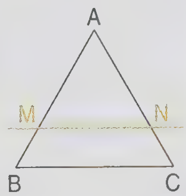
aire(ABC) = 15.

DÉMONTRER

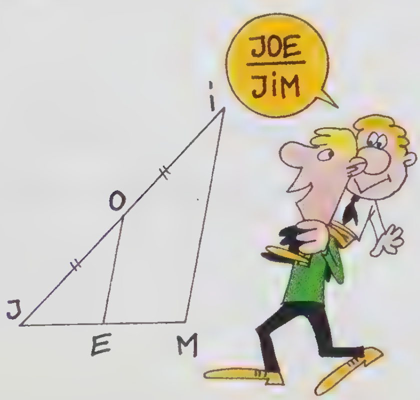
33 ABC est isocèle en A et (MN) est parallèle à (BC).
Démontrer que le triangle AMN est isocèle.



34 ABC est équilatéral et (MN) est parallèle à (BC).
Démontrer que le triangle AMN est équilatéral.

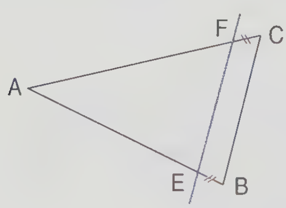


35 On peut démontrer la propriété réciproque de la droite des milieux en utilisant la propriété de Thalès.
Pour cela, soit un triangle JIM. La parallèle à (MI) passant par le milieu O de [JI] coupe [JM] en E.



Démontrer que E est le milieu de [JM].

36 Soit un triangle ABC tel que :
AB = 6 cm AC = 6,5 cm BC = 4 cm
et EB = FC = 1 cm.

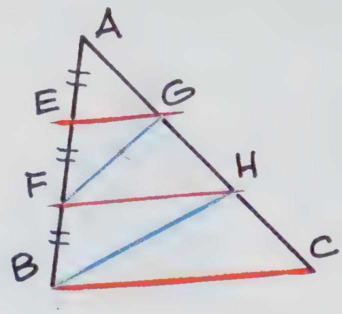


a) Réaliser cette figure.
b) Il semble que les droites (EF) et (BC) soient parallèles.

Calculer les rapports $\frac{AE}{AB}$ et $\frac{AF}{AC}$.

Que devrait-on obtenir si (EF) et (BC) étaient parallèles ?
Conclure.

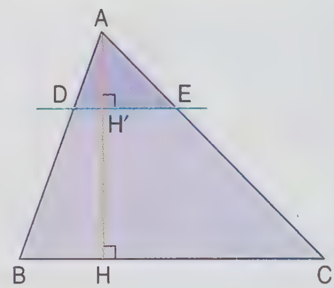
37 Voici une figure où les droites rouges sont parallèles.



a) Que dire des longueurs AG, GH et HC ?
b) Les droites bleues sont-elles parallèles ?
Justifier la réponse.
(*Indication*. Si ces droites étaient parallèles, en considérant le triangle ABH, on aurait…)

38 Considérons cette figure où :

$AD = \frac{1}{3}AB$ et (DE) // (BC).

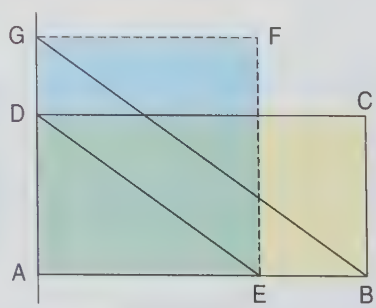


a) Calculer le périmètre du triangle ADE en fonction du périmètre de ABC.

b) Démontrer que $AH' = \frac{1}{3}AH$.

En déduire l'aire du triangle ADE en fonction de l'aire de ABC.

39 *Rectangles de même aire*
Soit un rectangle ABCD et un point E du segment [AB]. La parallèle à (DE) passant par B coupe la droite (AD) en G.



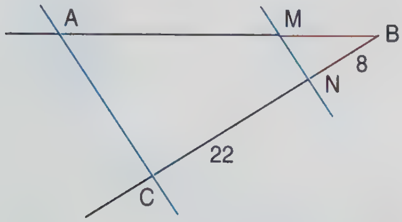
a) Démontrer que $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AG}$.

b) En déduire que les rectangles ABCD et AEFG ont la même aire.

CHERCHER

Vu au brevet

40 *À Orléans-Tours*
Dans cet exercice, l'unité de longueur est le centimètre.



On considère la figure ci-dessus telle que les droites (MN) et (AC) sont parallèles, et telle que :

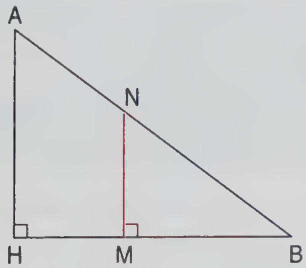
AB = 45 BN = 8 NC = 22.

En précisant la propriété utilisée, et en écrivant les calculs nécessaires, donner la valeur exacte de la longueur MB.

41 *À Dijon*
On considère le schéma ci-dessous avec :

AH = 1,5 BH = 2 BM = 1,2.

La droite (AH) et la droite (NM) sont perpendiculaires à la droite (BM).



a) Démontrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (AH).

b) Calculer $\frac{BM}{BH}$.

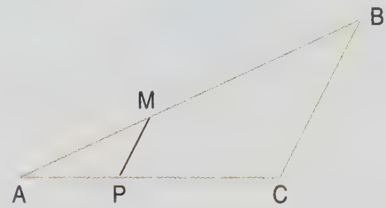
En déduire (en précisant la propriété utilisée) la valeur de $\frac{MN}{AH}$.

Calculer MN.

42 *À Clermont-Ferrand*
Le point M appartient au segment [AB] et le point P appartient au segment [AC].
Les droites (MP) et (BC) sont parallèles et l'on a, en cm :

AM = 4 AP = 2 MP = 3 AC = 8.

Calculer, en cm, le périmètre du triangle ABC. (Justifier tous les calculs. Ne pas refaire la figure.)



43 *À Lyon*
ABC est un triangle rectangle en A, tel que AB = 2 cm et AC = 4 cm.
Placer le point F sur la droite (AB) tel que AF = 6 cm avec le point B entre A et F.
Tracer la droite parallèle à la droite (FC) passant par B ; elle coupe (AC) en G.
Calculer AG : donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième de cm.

44 *À Strasbourg*
L'unité de longueur est le centimètre.
a) Construire le triangle ABC tel que :

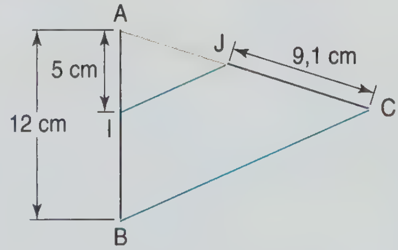
AB = 8 AC = 3,5 BC = 7.

b) On appelle E le point du segment [AC] tel que AE = 2.
Par E, on trace la parallèle à la droite (BC).
Elle coupe le segment [AB] en F.
Calculer les valeurs exactes des longueurs AF et EF.

45 *À Poitiers*
Avec le centimètre pour unité, les données de la figure ci-dessous sont :

AI = 5 AB = 12 JC = 9,1.

Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
Calculer AJ.



Exercices

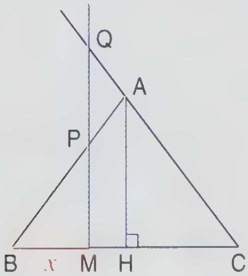
46 *À Athènes*

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A. La hauteur issue de A coupe [BC] en H.

On donne BC = 6 cm et AH = 4 cm.

Soit M un point du segment [BH].

On pose BM = x. La parallèle à (AH) menée par M coupe la droite (AB) en P et la droite (AC) en Q.



1. a) Calculer BH et donner un encadrement de x.

b) Montrer que $\dfrac{MP}{AH} = \dfrac{x}{3}$.

c) En déduire MP en fonction de x.

2. a) Exprimer MC en fonction de x.

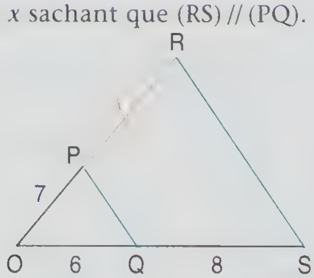
b) Montrer que $MQ = \dfrac{4}{3}(6 - x)$.

c) Pour quelle valeur de x, a-t-on : MQ = 3 MP ?

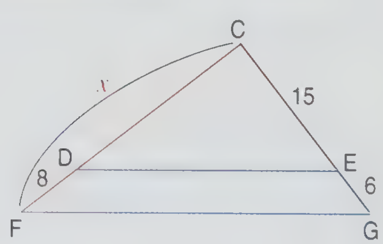
d) Quelle est alors la position de P sur le segment [AB] ?

Calculs de longueurs

47 Trouver x sachant que (RS) // (PQ).



48 Trouver x sachant que (FG) // (DE).



49 Les droites (UT) et (AB) sont parallèles.

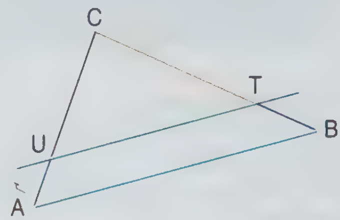
On a :

UT = 5

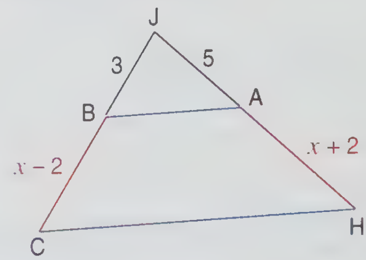
AB = 7

TB = 4.

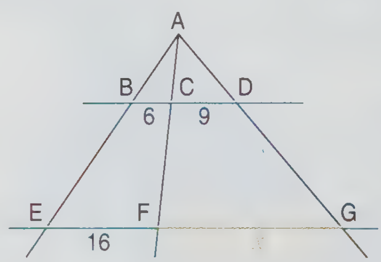
Calculer CT.



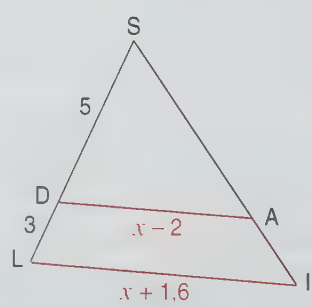
50 Trouver x sachant que (BA) // (CH).



51 Calculer FG dans le dessin suivant, où (BD) est parallèle à (EG).



52 Les droites (DA) et (LI) sont parallèles. Trouver x.



53 Soit ZOE un triangle.

On a :

(LA) // (OZ)

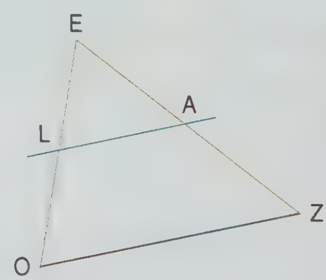
EO = x

EZ = $x + 2$

EL = 4

EA = 5.

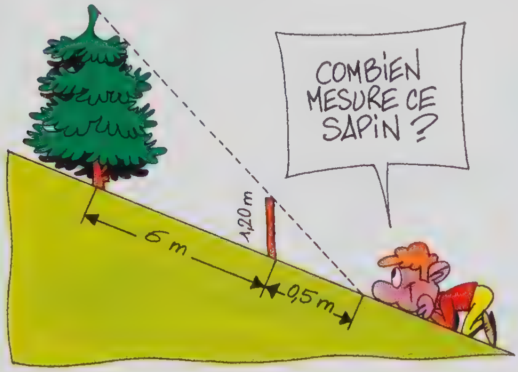
Calculer x.



Les aventures de Pythagore

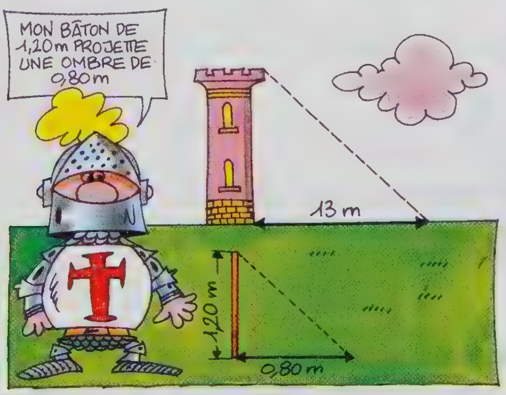
Notre ami Pythagore a une passion : mesurer des distances inaccessibles !

54 *Un jour, à la montagne…*



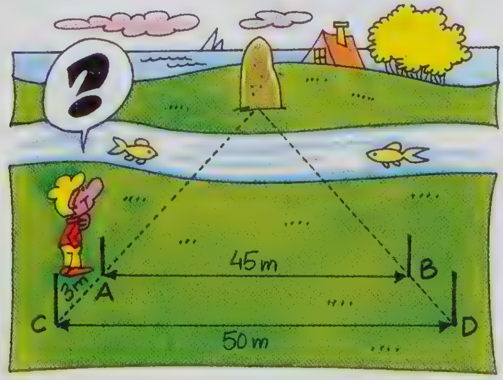
Après avoir planté son bâton à 6 m du pied de l'arbre, il se couche à plat ventre et…
Calculer la hauteur du sapin.

55 *Un autre jour, près d'un donjon…*



Calculer la hauteur de la tour.

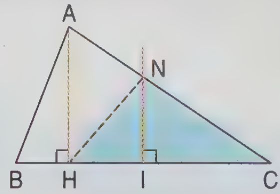
56 *Un autre jour, devant un menhir…*



Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Calculer la distance qui sépare notre héros du menhir.

Problèmes divers

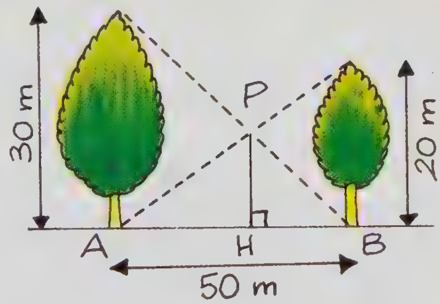
57 Soit un triangle ABC. Le point I est le milieu de [BC], H est le pied de la hauteur issue de A. La médiatrice de [BC] coupe (AC) en N.



Montrer que l'aire de NCH est la moitié de celle de ABC.

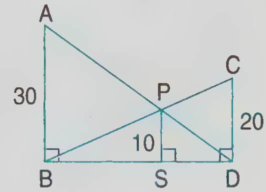
58 Soit un triangle ABC rectangle en B et soit M un point de [BC].
Construire un point N sur (AB) tel que l'aire du triangle BMN soit la moitié de l'aire de ABC.

59 *Histoire d'arbres*



Calculer PH.

60 *Wanted*
Essayer de construire une figure ayant de telles dimensions.



COUPS DE POUCE

45 AC = AJ + … .

46 **1. a)** Dans un triangle isocèle en A, la hauteur issue de A est aussi médiane.

51 Écrire $\frac{AC}{AF}$ de deux façons.

57 $\frac{NI}{AH} = \ldots$.

58 Soit I le milieu de [AB]. Considérer la parallèle à (MI) passant par C.

59 Calculer AH et BH en fonction de PH.

Exercices

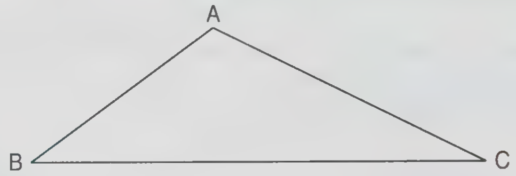
10 Droites remarquables d'un triangle

Activités

1 Révision active

Souvenirs, souvenirs...

A. Médiane, hauteur et compagnie



1. Construire (en noir) le triangle ABC tel que :
AB = 3 cm AC = 4 cm BC = 6 cm.

2. Construire (en rouge) la médiane issue de B.

3. Construire (en bleu) la médiatrice de [AB].

4. Construire (en vert) les hauteurs issues de A et de C.

5. Construire (en jaune) la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.

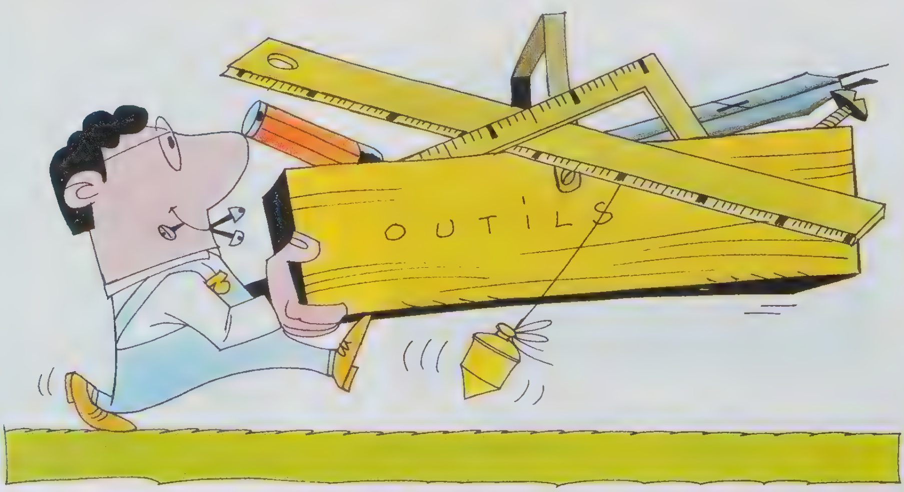
B. Un peu de dessin

1. Tracer une droite *d* et construire un triangle ABC (ni rectangle, ni isocèle) tel que la droite *d* soit une médiane du triangle ABC.

2. Même travail avec la droite *d*, hauteur du triangle ABC.

3. Même travail avec la droite *d*, médiatrice du triangle ABC.

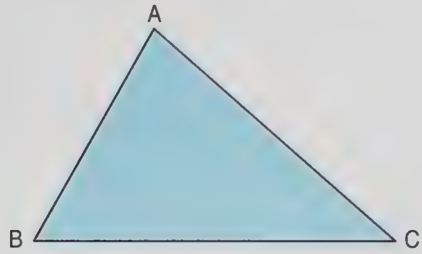
4. Même travail avec la droite *d*, bissectrice du triangle ABC.



2 Révision active

Médiatrices d'un triangle

A. Propriété des médiatrices d'un triangle



1. Construire un triangle ABC et les médiatrices de [AB] et de [AC].
Ces deux médiatrices se coupent en O.

2. Pourquoi OA = OB et OA = OC ?

3. Démontrer que O appartient à la médiatrice de [BC].
Tracer cette médiatrice.

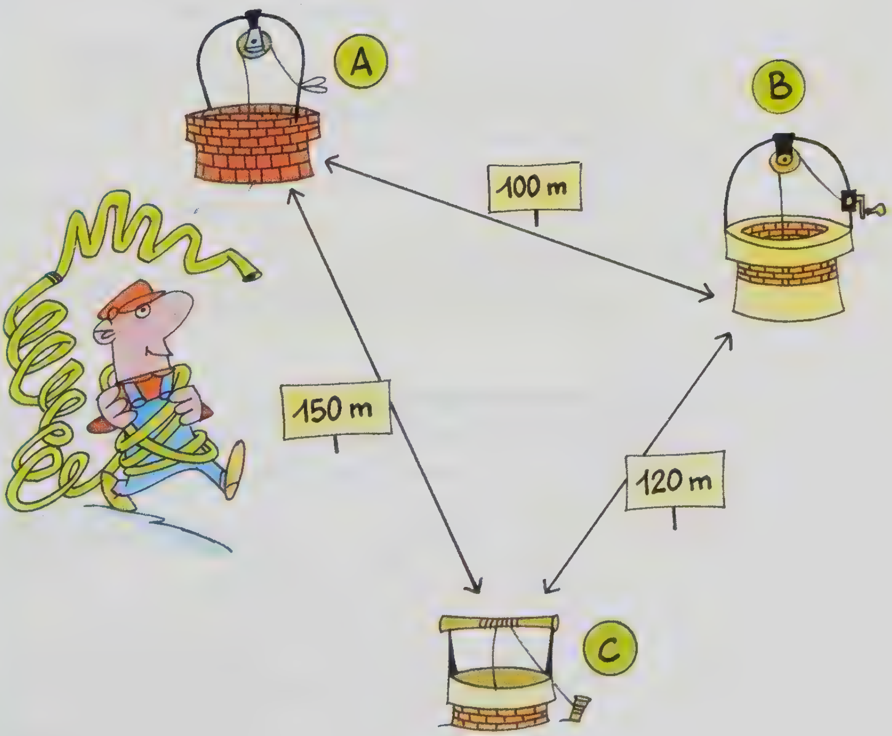
4. On vient de démontrer la propriété suivante (à compléter).

PROPRIÉTÉ

Les médiatrices d'un triangle sont ....

5. Tracer le cercle de centre O et de rayon OA.
Que peut-on dire de ce cercle et comment s'appelle-t-il ?

B. Des puits et une pompe



Un parc, trois puits...
On veut fixer une pompe (pour l'arrosage) de sorte que le même tuyau puisse servir à puiser l'eau dans chacun de ces trois puits.

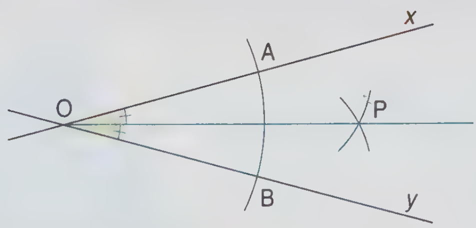
1. Faire un dessin à l'échelle.

2. Déterminer l'emplacement idéal de la pompe.

Activités

3 Bissectrices d'un triangle

A. Justification de la construction



La figure ci-dessus montre la construction de la bissectrice (OP) de l'angle $\widehat{xOy}$. Nous allons justifier cette construction.

1. Réaliser cette construction.

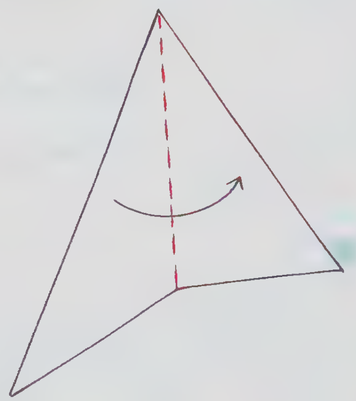
2. Démontrer que (OP) est la médiatrice de [AB].

3. Quels sont les symétriques des points A, O et P par rapport à (OP) ? Quel est le symétrique de l'angle $\widehat{AOP}$ par rapport à (OP) ?
En déduire que (OP) est la bissectrice de $\widehat{xOy}$.

B. Propriété des bissectrices

1. Pliages

a) Découper un triangle quelconque dans une feuille volante. (Prendre un triangle assez grand.)
b) Par des pliages uniquement, faire apparaître les trois bissectrices du triangle.
c) Observer la figure obtenue. Que constate-t-on ?



2. Constructions
Dessiner trois triangles différents et tracer leurs bissectrices. Que constate-t-on ?

3. On admet la propriété suivante (à compléter).

PROPRIÉTÉ

Les bissectrices d'un triangle sont ....

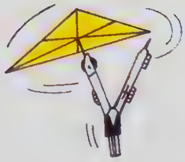
C. Une application

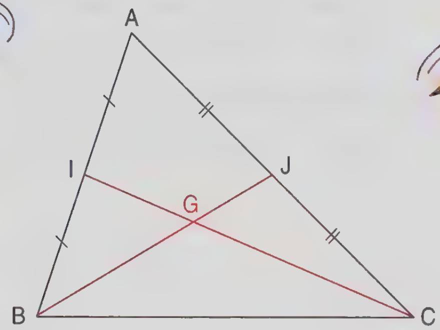
1. Construire un triangle ABC tel que :
mes($\widehat{A}$) = 80°   mes($\widehat{B}$) = 40°   et   AB = 12 cm.

2. Les bissectrices de $\widehat{A}$ et de $\widehat{B}$ se coupent en I.
Calculer les mesures des angles $\widehat{ICA}$ et $\widehat{ICB}$ puis les mesures des angles $\widehat{AIC}$ et $\widehat{BIC}$.
(On peut contrôler les résultats obtenus en mesurant sur la figure.)

4 Médianes d'un triangle

A. Propriété des trois médianes



1. Construire un triangle ABC et les milieux I et J des côtés [AB] et [AC]. Les médianes (BJ) et (CI) se coupent en G.

2. Construire le symétrique A′ du point A par rapport au point G. Les droites (AA′) et (BC) se coupent en K.

3. Démontrons que (AG) est la médiane issue de A. Pour cela :
- Avec le triangle ABA′, démontrer que (GC) et (BA′) sont parallèles.
- Démontrer que (GB) et (CA′) sont parallèles.
- Quelle est la nature du quadrilatère BGCA′ ? Pourquoi ?
- Que peut-on en déduire pour le point K ?
- Conclure.

4. On a donc la propriété suivante (à compléter).

PROPRIÉTÉ

Les médianes d'un triangle sont ....

INFORMATION

Par définition, le point G, intersection des médianes du triangle ABC, est le **centre de gravité** du triangle ABC.

B. Position du centre de gravité sur une médiane

Avec les hypothèses et la figure de la partie A, on a AK = AG + GK.

1. Calculer AK en fonction de AG.

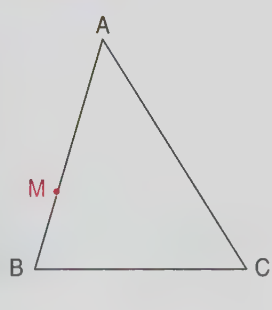
2. En déduire la formule (à compléter) : $AG = \frac{....}{....} \times AK$.

C. Une application

1. Construire un triangle ABC et le point M de [AB] tel que $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$.

2. Construire le symétrique D de C par rapport à B.

3. On peut tracer directement les médianes du triangle ADC. Pourquoi ?



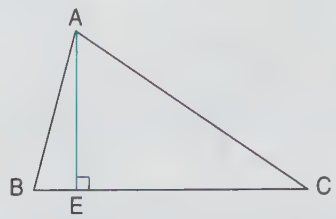
5 Hauteurs d'un triangle

A. Propriété des trois hauteurs d'un triangle

1. Dessiner un triangle.
2. Construire soigneusement ses trois hauteurs.
3. Que constate-t-on ?

B. Démonstration

Rappel. Les médiatrices d'un triangle sont concourantes.



1. Construire un triangle ABC et sa hauteur (AE).
2. Construire :
– la parallèle d_1 à (BC) passant par A ;
– la parallèle d_2 à (AC) passant par B ;
– la parallèle d_3 à (AB) passant par C.
d_1 coupe d_2 en Z, d_2 coupe d_3 en X et d_3 coupe d_1 en Y.
3. Démontrer que ABCY et ACBZ sont des parallélogrammes.
En déduire que AZ = AY.
4. Démontrer que (AE) est une médiatrice du triangle XYZ.
5. Tracer les deux autres hauteurs (BF) et (CG) du triangle ABC.
Que peut-on dire de ces deux hauteurs ?
6. Démontrer la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ

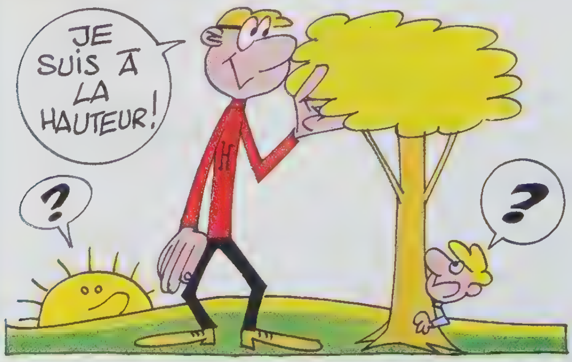
Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

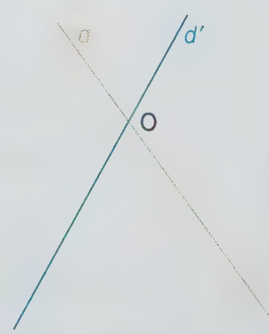
INFORMATION

Par définition, le point de concours des hauteurs d'un triangle s'appelle l'**orthocentre** du triangle.

C. Être à la hauteur

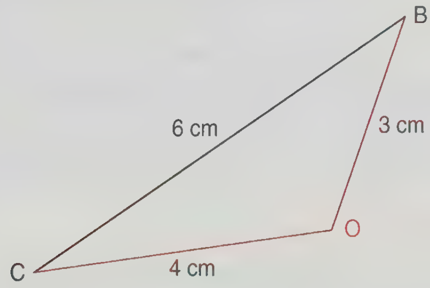
1. Tracer deux droites sécantes en O.
2. Construire un triangle ABC ayant ces deux droites comme hauteurs.
(*Indication.* Commencer par tracer une perpendiculaire à chacune des droites du dessin.)





6 Défis

Pour chacun des quatre cas qui suivent, reproduire la figure suivante.



A. Avec les hauteurs

Construire un point A tel que O soit l'orthocentre du triangle ABC.
Expliquer la construction.

B. Avec les médianes

Construire un point A tel que O soit le centre de gravité du triangle ABC.
Expliquer la construction.

C. Avec les bissectrices

Construire un point A tel que O soit le point de concours des bissectrices du triangle ABC.
Expliquer la construction.

D. Avec les médiatrices

Est-il possible de construire un point A tel que O soit le point de concours des médiatrices du triangle ABC ? Pourquoi ?

7 Variations sur un triangle isocèle

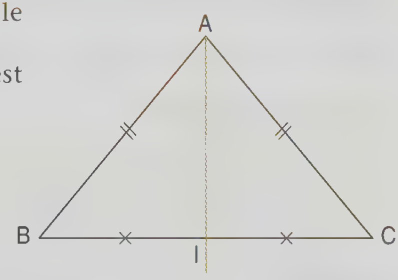
A. Le triangle est isocèle

Le triangle ABC est isocèle en A et I est le milieu de [BC].
Démontrer que la médiane issue de A est aussi :

1. la médiatrice de [BC] ;

2. la hauteur issue de A ;

3. la bissectrice issue de A.



B. Le triangle est-il isocèle ?

1. Construire un triangle ABC tel que la médiane issue de A soit aussi la médiatrice de [BC]. Démontrer qu'alors le triangle ABC est isocèle en A.

2. Construire un triangle ABC tel que la médiane issue de A soit aussi la hauteur issue de A. Démontrer qu'alors le triangle ABC est isocèle en A.

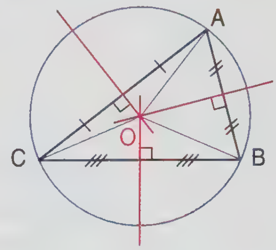
3. Construire un triangle ABC tel que la hauteur issue de A soit aussi la médiatrice de [BC]. Démontrer qu'alors le triangle ABC est isocèle en A.

Outils

Droites remarquables d'un triangle

1 Médiatrices d'un triangle (rappel)

Les médiatrices d'un triangle sont les médiatrices des côtés du triangle.



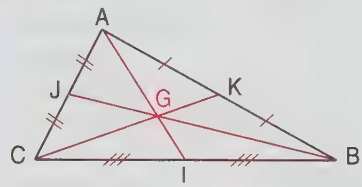
Propriété

Les **médiatrices** d'un triangle sont concourantes en un point équidistant des trois sommets. C'est le centre du **cercle circonscrit** au triangle.

On a $OA = OB = OC$.

2 Médianes d'un triangle

Une médiane d'un triangle est une droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé.

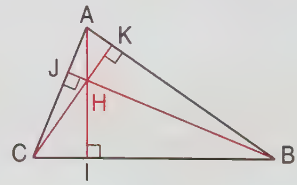


Propriété

Les trois **médianes** d'un triangle sont concourantes en un point appelé **centre de gravité** du triangle.

3 Hauteurs d'un triangle

Une hauteur d'un triangle est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.

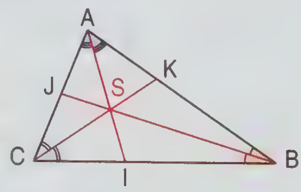


Propriété

Les trois **hauteurs** d'un triangle sont concourantes en un point appelé **orthocentre** du triangle.

4 Bissectrices d'un triangle

Une bissectrice d'un triangle est une bissectrice de l'un des angles du triangle.



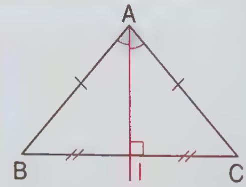
Propriété

Les trois **bissectrices** d'un triangle sont concourantes. en un point appelé centre du cercle inscrit

5 Droites remarquables d'un triangle isocèle

Propriété

Dans un triangle ABC isocèle en A, la médiane, la hauteur, la bissectrice issues de A et la médiatrice de [BC] sont confondues.



L'essentiel

PROPRIÉTÉ RÉCIPROQUE

Si, dans un triangle ABC,
- la médiane issue de A et la hauteur issue de A
- la médiane issue de A et la bissectrice issue de A
- la médiane issue de A et la médiatrice de [BC]
- la hauteur issue de A et la médiatrice de [BC]
- la bissectrice issue de A et la médiatrice de [BC]
- la bissectrice issue de A et la hauteur issue de A

sont confondues,

alors le triangle ABC est isocèle en A.

Méthodes

Démontrer...

M 5 **Comment démontrer qu'une droite est bissectrice d'un angle ?**

Dans un triangle ABC, **si** une droite passe par A et par le point de concours des bissectrices du triangle, **alors** cette droite est bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

M 9 **Comment démontrer que trois droites sont concourantes ?**

Si trois droites sont médianes ou hauteurs ou médiatrices ou bissectrices d'un triangle, **alors** elles sont concourantes.

M 13 **Comment démontrer qu'une droite est hauteur d'un triangle ?**

Dans un triangle ABC, **si** une droite passe par A et par l'orthocentre du triangle, **alors** cette droite est la hauteur issue de A du triangle ABC.

M 14 **Comment démontrer qu'un triangle est isocèle ?**

Utiliser la propriété réciproque énoncée ci-dessus.

M 18 **Comment démontrer qu'une droite est médiane d'un triangle ?**

Dans un triangle ABC, **si** une droite passe par A et par le centre de gravité du triangle, **alors** cette droite est la médiane issue de A du triangle ABC.

M 21 **Comment démontrer qu'un point est milieu d'un segment ?**

Dans un triangle ABC, **si** une droite est la médiane de ABC issue de A, **alors** elle coupe [BC] en son milieu.

M 24 **Comment démontrer que deux droites sont perpendiculaires ?**

Dans un triangle ABC, **si** une droite est la hauteur de ABC issue de A, **alors** elle est perpendiculaire à (BC).

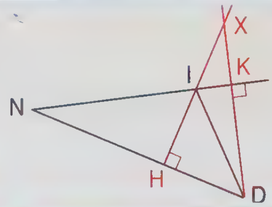
Exemples

Construction ; démonstration

1 Construction d'une perpendiculaire

ÉNONCÉ

En observant la figure ci-contre, expliquer comment on peut tracer la perpendiculaire à (ID) passant par N.



Stratégie

On commence par écrire les hypothèses indiquées sur la figure.

Solution

On a $(IH) \perp (ND)$ et $(DK) \perp (NI)$.
Les droites (IH) et (DK) sont donc deux hauteurs du triangle NID et leur point d'intersection X est l'orthocentre de NID.
Ainsi, (NX) est la troisième hauteur de NID, c'est-à-dire la droite passant par N et perpendiculaire à (DI).
On trace donc (NX).

Remarques

Les trois hauteurs d'un triangle se coupent à l'orthocentre du triangle.

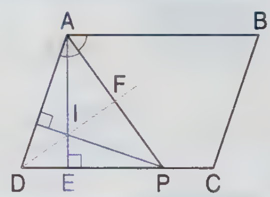
2 Avec un parallélogramme

ÉNONCÉ

On considère un parallélogramme ABCD et sa hauteur (AE) issue de A.
La bissectrice de $\widehat{A}$ coupe (DC) en P. La perpendiculaire à (AD) passant par P coupe (AE) en I. (DI) et (AP) se coupent en F.

a/ Démontrer que les angles $\widehat{DPA}$ et $\widehat{DAP}$ ont même mesure.

b/ Démontrer que (DI) est la bissectrice de $\widehat{D}$.



Stratégie

Pour **a/**, on va utiliser les angles alternes internes et la définition de la bissectrice.

Pour **b/**, on va démontrer que les deux triangles rectangles AFD et PFD ont des angles aigus de même mesure.

Solution

a/ ABCD étant un parallélogramme, les droites (AB) et (DC) sont parallèles. Les angles alternes internes $\widehat{BAP}$ et $\widehat{DPA}$ ont donc même mesure.
(AP) étant la bissectrice de $\widehat{A}$, les angles $\widehat{BAP}$ et $\widehat{DAP}$ ont même mesure.
On a donc $\text{mes}(\widehat{DPA}) = \text{mes}(\widehat{DAP})$.

b/ Le point I est l'intersection des hauteurs issues de A et P du triangle DAP ; I est donc l'orthocentre de DAP.
Par suite, (DF) est la troisième hauteur de DAP. Donc les triangles AFD et PFD sont rectangles en F.
Mais $\text{mes}(\widehat{DAF}) = \text{mes}(\widehat{DPF})$ et comme les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires, on a : $\text{mes}(\widehat{ADF}) = \text{mes}(\widehat{PDF})$.
(DI) est la bissectrice de $\widehat{D}$.

Remarques

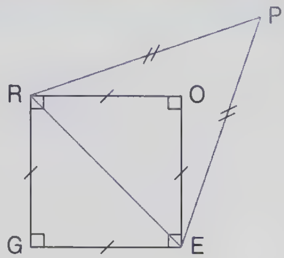
Comme (DF) est la hauteur issue de D, on a : $(DF) \perp (AP)$.

On a :
$\text{mes}(\widehat{ADF}) + \text{mes}(\widehat{DAF})$
$= \text{mes}(\widehat{PDF}) + \text{mes}(\widehat{DPF})$
$= 90°$.

Exercices

CONSOLIDER

1 ORGE est un carré.
Soit PRE un triangle isocèle en P.
Démontrer que G, O et P sont alignés.



2 **a)** Construire un triangle FIJ sachant que FI = 42 mm, FJ = 60 mm et IJ = 53 mm.
b) Construire le cercle circonscrit au triangle FIJ.

3 **a)** Construire un triangle ABC sachant que $\widehat{CAB}$ mesure 42°, que $\widehat{CBA}$ mesure 113° et que AB = 5 cm.
b) Construire le cercle circonscrit au triangle ABC.

4 **a)** Construire un triangle KIJ tel que $\widehat{KIJ}$ mesure 75°, KI = 6 cm et IJ = 8 cm.
b) Construire le point de concours des bissectrices.

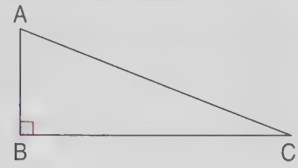
5 Construire les hauteurs d'un triangle APN tel que $\widehat{APN}$ mesure 132°, AP = 2,9 cm et PN = 5,2 cm.

SAVOIR FAIRE

6 *Vrai ou faux ?*

Sur cette figure est tracée :
- la bissectrice issue de A ?
- la hauteur issue de A ?
- la médiatrice de [BC] ?
- la médiane issue de A ?

7 On considère cette figure.

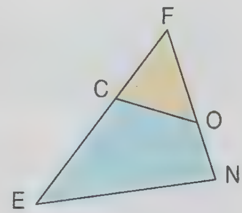


Construire l'orthocentre du triangle ABC.

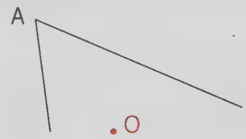
8 Soit un triangle ABC et soit V le milieu de [BC]. La parallèle à (AC) passant par V coupe (AB) en K et la parallèle à (AB) passant par V coupe (AC) en T.
Démontrer que les droites (AV), (CK) et (BT) sont concourantes.

9 Construire un triangle ABC tel que $\widehat{A}$ mesure 80° et $\widehat{B}$ mesure 60°.
Les bissectrices de ABC se coupent en I.
Calculer les mesures des angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AIC}$.

10 Dessiner les triangles NEF et FOC comme sur la figure ci-contre.
Démontrer que les points de concours des bissectrices des triangles NEF et FOC sont alignés avec le point F.

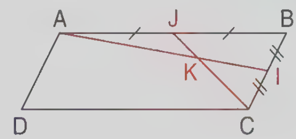


11 D'un triangle GAZ, il reste le point A, le centre O du cercle circonscrit et deux morceaux des côtés [AG] et [AZ].



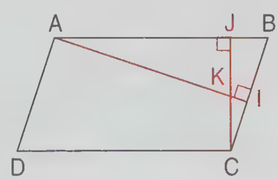
Reproduire la figure et construire à la règle et au compas les points Z et G.
Justifier la construction.

12 On considère la figure suivante où ABCD est un parallélogramme.



Démontrer que B, K et D sont alignés.

13 On considère la figure suivante où ABCD est un parallélogramme.



Que peut-on dire de (BK) et (AC) ?
Justifier la réponse.

Avec des triangles isocèles

14 Soit un triangle LAC isocèle en L. Les médianes issues de A et de C se coupent en U. Démontrer que la droite (LU) est perpendiculaire à (AC).

15 Soit un triangle MOI isocèle en M. Les hauteurs issues de O et de I se coupent en X. Démontrer que la droite (MX) coupe [OI] en son milieu.

16 Soit un triangle JFC isocèle en C. La médiane issue de C coupe la bissectrice de $\widehat{F}$ en O. Démontrer que (OJ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{J}$.

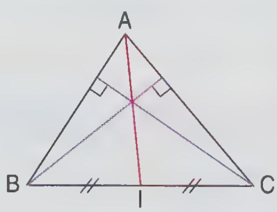
17 Soit un triangle TOI isocèle en T. La hauteur issue de T coupe la médiane issue de O en Y. Démontrer que (IY) coupe [OT] en son milieu.

18 Soit un triangle MOB tel que :
mes($\widehat{OMB}$) = 120°.
La bissectrice de l'angle $\widehat{OMB}$ coupe [BO] en X.
La médiatrice de [MX] coupe (BM) en T.
Que peut-on dire du triangle MTX ? Justifier la réponse.

Dans les trois exercices suivants, la figure est volontairement fausse.

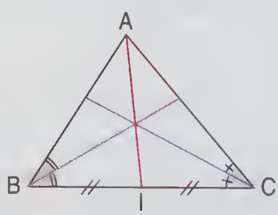
19 On considère la figure ci-contre.

Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.



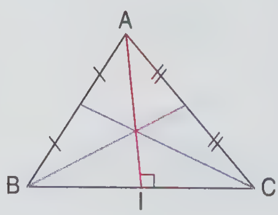
20 On considère la figure ci-contre.

Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.



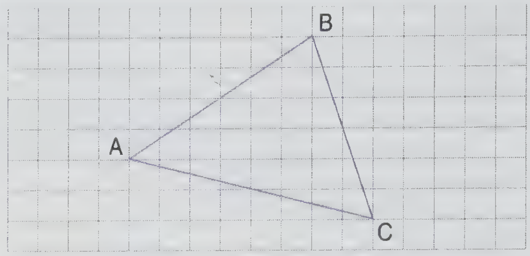
21 On considère la figure ci-contre.

Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.



Avec des quadrillages

Pour les exercices 22 à 24, reproduire le dessin suivant.

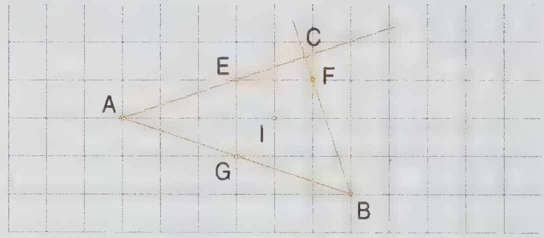


22 À l'aide d'une règle seulement, construire le centre de gravité du triangle ABC.

23 À l'aide d'une règle seulement, construire le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

24 À l'aide d'une règle seulement, construire l'orthocentre du triangle ABC.

25 On considère la figure suivante.



a) D'après le quadrillage, quelles sont les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$?
b) Quelle est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$?

RÉSULTATS

13 (BK) et (AC) sont perpendiculaires.

14 Le point U, étant à l'intersection de deux médianes du triangle LAC, est le centre de gravité de LAC. (LU) est donc la troisième médiane qui est aussi hauteur, car LAC est isocèle en L. D'où (LU) ⊥ (AC).

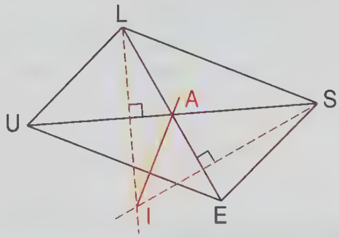
16 La médiane issue de C est aussi bissectrice car JFC est isocèle en C. Les bissectrices issues de C et de F se coupent en O. La droite (OJ) est donc la bissectrice issue de J du triangle JFC.

19 (AI) passe par l'orthocentre du triangle ABC, donc (AI) est la hauteur issue de A. Or, par hypothèse, (AI) est aussi médiane.
Dans le triangle ABC, la hauteur et la médiane issues de A sont confondues. Le triangle ABC est donc isocèle en A.

DÉMONTRER

26 *La démonstration puzzle*
Voici un texte et une figure.

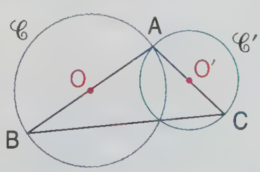
Soit SEUL un parallélogramme de centre A. La perpendiculaire à (US) passant par L et la perpendiculaire à (EL) passant par S se coupent au point I.
Démontrer que (IA) est perpendiculaire à (EU).



a) Donner les hypothèses et la conclusion.
b) Ordonner les dix phrases suivantes pour obtenir une démonstration correcte.

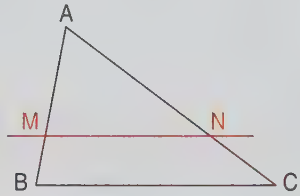
(1) De même (LE) est la hauteur issue de L du triangle LIS.
(2) Mais les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles.
(3) Donc la droite (IA), passant par l'orthocentre A et par le sommet I, est une hauteur du triangle LIS.
(4) Considérons le triangle LIS.
(5) Or les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre.
(6) Par définition d'une hauteur d'un triangle : (IA) ⊥ (LS).
(7) Donc (IA) ⊥ (EU).
(8) Par hypothèse (US) est perpendiculaire à (LI) et passe par S ; donc (US) est une hauteur du triangle LIS.
(9) Donc (EU) // (LS).
(10) Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

27 *Médianes*
On considère deux cercles sécants $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre O et O'. Le point A est l'un des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ (voir la figure ci-contre).



a) Construire, avec seulement une règle (non graduée), le milieu de [BC].
b) Justifier la construction.

28 *Orthocentres*
Soit un triangle ABC. On choisit M sur [AB] et N sur [AC] tels que (MN) et (BC) soient parallèles.

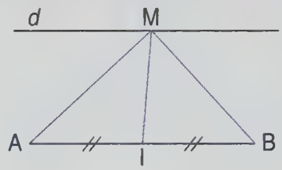


a) Soit H l'orthocentre du triangle ABC et K celui du triangle AMN.
Démontrer que A, H et K sont alignés.
b) Que peut-on dire si on remplace « l'orthocentre » par « le point de concours des bissectrices » ?

CHERCHER

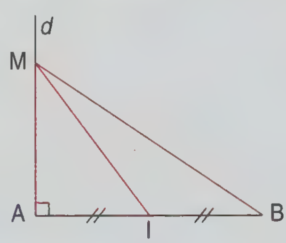
Conjectures

29 Un segment [AB] est donné, ainsi qu'une droite d parallèle à (AB).
Un point M se promène sur d.



a) Tracer la ligne sur laquelle se promène le point G centre de gravité du triangle MAB. (Essayer plusieurs points M.)
b) L'orthocentre de MAB se promène-t-il sur une droite ?

30 Soit un segment [AB]. Soit la droite d passant par A et perpendiculaire à (AB).
Un point M se promène sur d.

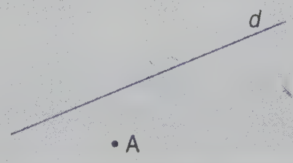


a) Tracer la ligne sur laquelle se promène le point G centre de gravité du triangle MAB. (Essayer plusieurs points M.)
b) L'orthocentre de MAB se promène-t-il ?

Exercices

Constructions

Pour les exercices 31 à 34, tracer une droite *d* et un point A extérieur à *d*.



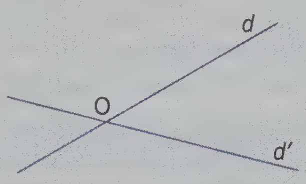
31 Construire un triangle ABC tel que *d* soit une médiane de ce triangle.

32 Construire un triangle ABC tel que *d* soit une médiatrice de ce triangle.

33 Construire un triangle ABC tel que *d* soit une hauteur de ce triangle.

34 Construire un triangle ABC tel que *d* soit une bissectrice de ce triangle.

Pour les exercices 35 à 41, on commence par tracer deux droites *d* et *d′* sécantes en O.



35 *Médiatrices*
Construire un triangle ABC ayant *d* et *d′* pour médiatrices.

36 *Bissectrices*
Construire un triangle ABC ayant *d* et *d′* pour bissectrices.

37 *La construction de Laurent*

Le texte
Construire un triangle ABC ayant *d* et *d′* pour médianes.

Pour résoudre cet exercice, Laurent a procédé ainsi :

- Il place A sur *d* et B sur *d′*.
- Il construit le symétrique A′ de A par rapport à B et le symétrique B′ de B par rapport à A.
- Il construit la parallèle *m* à *d* passant par B′ et la parallèle *m′* à *d′* passant par A′.
- Les droites *m* et *m′* se coupent en C.

a) Réaliser la construction de Laurent.
b) Justifier sa construction.

38 *Une médiatrice et un côté*
Construire un triangle ABC ayant *d* pour médiatrice et ayant un côté sur *d′*.

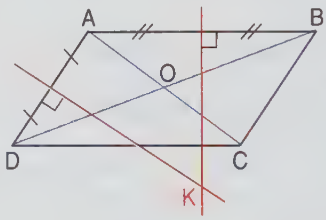
39 *Une médiane et un côté*
Construire un triangle ABC ayant *d* pour médiane et ayant un côté sur *d′*.

40 *Une hauteur et un côté*
Construire un triangle ABC ayant *d* pour hauteur et ayant un côté sur *d′*.

41 *Une bissectrice et un côté*
Construire un triangle ABC ayant *d* pour bissectrice et ayant un côté sur *d′*.

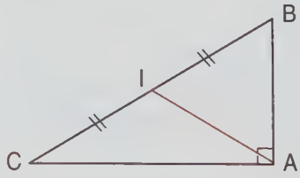
Démonstrations

42 Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Les médiatrices de [AB] et de [AD] se coupent en K.



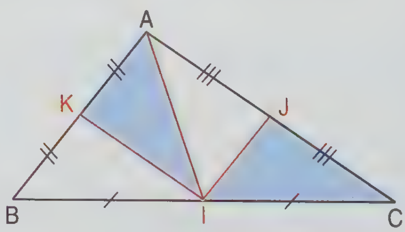
Démontrer que (OK) et (BD) sont perpendiculaires.

43 On considère un triangle ABC rectangle en A et tel que BC = 8 cm.
Soit I le milieu de [BC].



Combien mesure la médiane [AI] ? Pourquoi ?

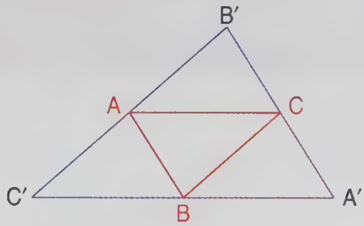
44 On considère la figure suivante.



Démontrer que IJC a la même aire que AKI.

45 *Même centre de gravité*

On considère la figure suivante.
On a :
(AB) // (A′B′)
(AC) // (A′C′)
(BC) // (B′C′).

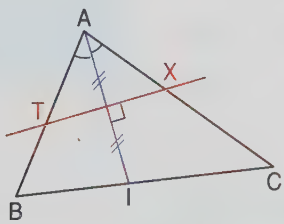


a) Démontrer que A est le milieu de [B′C′]. Que peut-on dire de B et de C ?
b) Démontrer que (AA′) coupe [BC] en son milieu. Que peut-on dire de (BB′) et de (CC′) ?
c) Démontrer que ABC et A′B′C′ ont le même centre de gravité.

46 Construire un triangle ABC et les milieux I, J et K des côtés [BC], [AC] et [AB].
Démontrer que le point de concours des médiatrices du triangle ABC est aussi l'orthocentre du triangle IJK.

47 *Losange dans un triangle*

Soit un triangle ABC.
La bissectrice de $\widehat{A}$ coupe [BC] en I.
La médiatrice de [AI] coupe [AC] en X et [AB] en T.

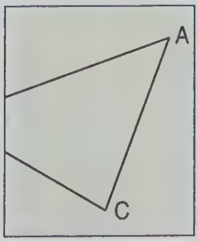


1. a) Démontrer que mes($\widehat{TAI}$) = mes($\widehat{AIX}$).
b) En déduire que (TA) // (IX).
c) Démontrer que le quadrilatère TAXI est un parallélogramme.
2. Prouver que TAXI est un losange.
3. Que dire de TAXI quand le triangle ABC est rectangle en A ?

Quand la feuille est trop petite

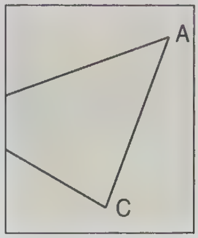
48 *Médianes*

Le sommet B du triangle ABC est en dehors de la feuille.
Construire la médiane issue de B du triangle ABC.



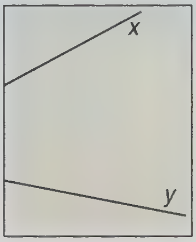
49 *Hauteurs*

Le sommet B du triangle ABC est en dehors de la feuille.
Construire la hauteur issue de B du triangle ABC.



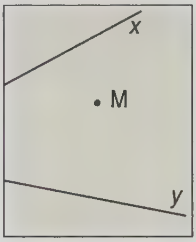
50 *Bissectrices*

Le point O de l'angle $\widehat{xOy}$ est en dehors de la feuille.
Construire la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.



51 *Droites sécantes*

Deux droites (Ax) et (Ay) sont sécantes en un point A situé en dehors de la feuille.
Soit un point M du plan.
Construire la droite (AM).



COUPS DE POUCE

31 Choisir I sur d et construire le symétrique B de A par rapport à I, puis...

32 Soit B le symétrique de A par rapport à d...

37 Penser à la propriété réciproque de la droite des milieux.

43 Considérer, par exemple, la médiatrice de [AB].

44 Démontrer d'abord que AIB et AIC ont même aire.

45 a) Démontrer d'abord que ABCB′ et ACBC′ sont des parallélogrammes.

48 Construire le milieu I de [AC] puis les parallèles à (BC) et à (BA) passant par I.

50 Choisir A sur (Ox) et B sur (Oy). Construire les bissectrices de $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OBA}$. Refaire cette construction avec deux autres points A′ et B′.

51 Construire les perpendiculaires à (Ax) et (Ay) passant par M. Ce sont les hauteurs d'un certain triangle.

11 Propriété de Pythagore

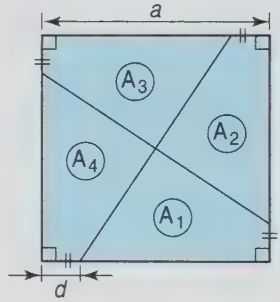
Activités

1 Le puzzle de Pythagore

A. Constructions et découpages

1. Choisir deux nombres a et b, compris entre 3 et 20, et tels que $a > b$.

2. Construire et découper :
– un triangle rectangle Ⓣ dont les côtés perpendiculaires mesurent a cm et b cm (on appellera c la mesure en cm de l'hypoténuse) ;
– un carré Ⓐ de côté a cm ;
– un carré Ⓑ de côté b cm.



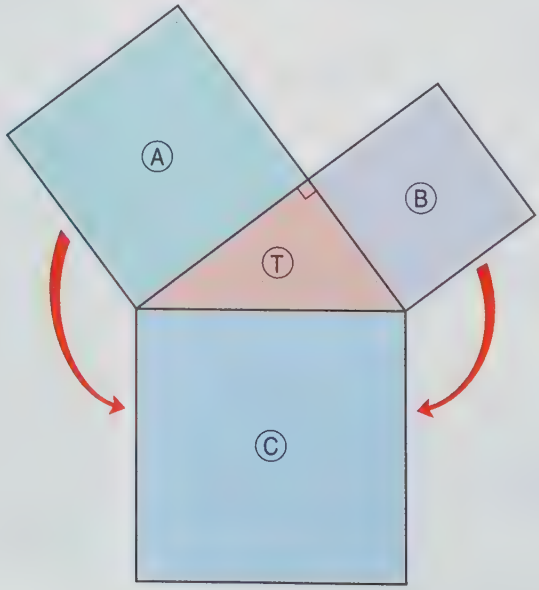
3. Calculer $d = \dfrac{a - b}{2}$.

Tracer, dans le carré Ⓐ, deux segments qui le partagent en quatre morceaux comme l'indique la figure.
Puis découper les quatre morceaux : A_1 A_2 A_3 A_4.

B. Assemblage et conclusion

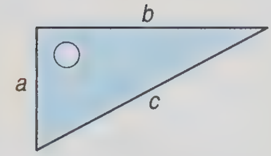
1. Assembler les quatre morceaux du carré Ⓐ avec le carré Ⓑ pour obtenir un carré Ⓒ de côté c cm.

2. En comparant des aires, trouver une relation entre a^2, b^2 et c^2 (cette relation est appelée « **propriété de Pythagore** »).



2 La propriété de Pythagore

A. Découpage et constructions



1. Construire et découper, dans du carton, un triangle rectangle dont les côtés perpendiculaires mesurent par exemple :
$a = 4$ cm et $b = 7{,}5$ cm.
Ce triangle est une équerre.

2. À l'aide de cette équerre, réaliser les deux figures suivantes.

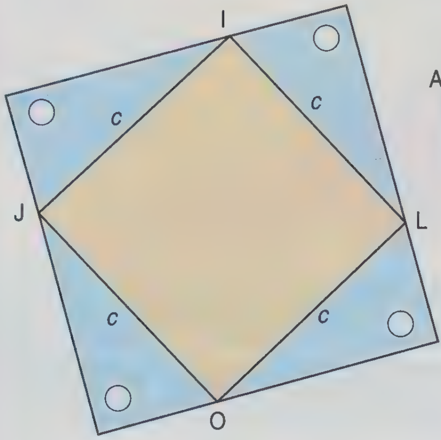


fig. 1

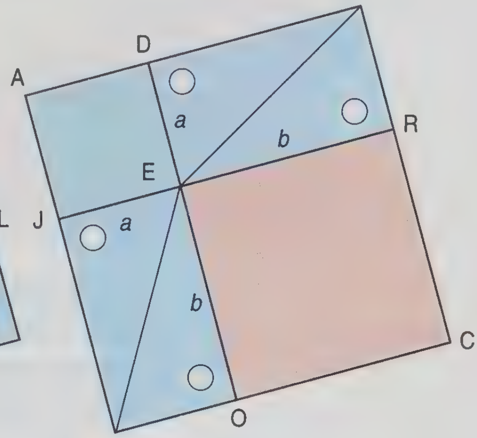


fig. 2

B. Observations, calculs et conclusion

1. En observant les figures 1 et 2, expliquer pourquoi :
aire(JOLI) = aire(JADE) + aire(OCRE).

2. Exprimer, en fonction de a, b ou c, les aires des carrés JOLI, JADE et OCRE.

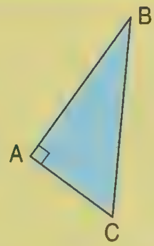
3. Compléter par les lettres a, b ou c l'égalité suivante (qui résulte de ce qui précède) :

$\boxed{\ldots\ldots}^2 = \boxed{\ldots\ldots}^2 + \boxed{\ldots\ldots}^2$

4. Nous venons de découvrir la propriété de Pythagore. Compléter le cadre et les bulles avec le contenu du sac.

PROPRIÉTÉ

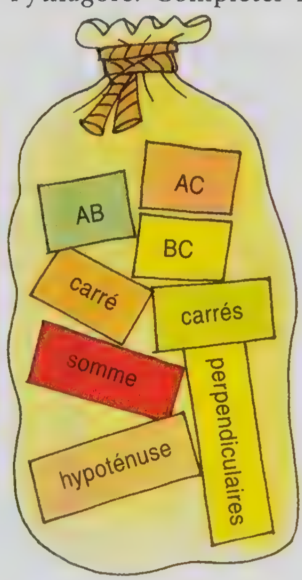
Si ABC est un triangle rectangle en A, **alors :**



$\ldots\ldots^2 = \underbrace{\ldots\ldots^2 + \ldots\ldots^2}$

.... de l'.................

.... des .... des côtés ....



3 Racine carrée d'un nombre positif

AVERTISSEMENT

Seuls les nombres positifs ont une racine carrée (la raison sera étudiée en troisième), et, par définition, une racine carrée est toujours positive.

A. Exemples et calculs

INFORMATION

On a $3 \times 3 = 9$.
Alors on peut dire que :
9 est le carré de 3 $(9 = 3^2)$
ou encore :
3 est la racine carrée de 9 $(3 = \sqrt{9})$.

On prononce « racine carrée de 9 ».

1. Compléter le tableau en calculant mentalement.

carré → / ← racine carrée

3	4			0,6		1,1			0
9		25	100		0,49		8100	1	

À l'aide du tableau, compléter.

$\sqrt{25} = ...$ $\quad 4 = \sqrt{.....}$ $\quad ..... = \sqrt{100}$ $\quad \sqrt{0{,}49} = ...$.

2. Les calculatrices ont presque toutes une touche $\boxed{x^2}$ pour calculer les carrés et une touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ pour calculer les racines carrées.

Compléter en calculant à la machine.

carré → / ← racine carrée

37						0,01			
	225	1024	1444	1,96	0,25		0,0016	1234321	40,96

3. Mais le plus souvent, le calcul d'une racine carrée ne « tombe pas juste ».

Calculer, à la machine, des valeurs approchées à 0,001 près de :

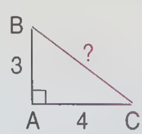
$\sqrt{2} \approx ....$ $\quad \sqrt{3} \approx ....$ $\quad \sqrt{5} \approx ....$ $\quad \sqrt{7} \approx ....$.
$\sqrt{10} \approx ....$ $\quad \sqrt{12} \approx ....$ $\quad \sqrt{0{,}1} \approx ....$ $\quad \sqrt{2{,}5} \approx ....$.

B. Racines carrées en géométrie

1. L'aire d'un jardinet carré est 144 m^2. Calculer son côté.

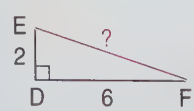
2. Calculer à 0,01 m près le côté d'un terrain carré de 1 000 m^2.

3. Un triangle ABC est rectangle en A.



Combien mesure l'hypoténuse BC ?

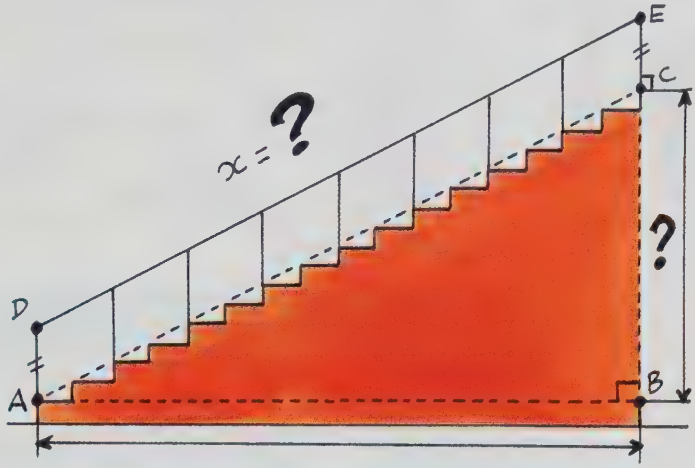
4. Un triangle EDF est rectangle en D.



Combien mesure EF, à 0,01 près ?

4 Dimensions d'un escalier

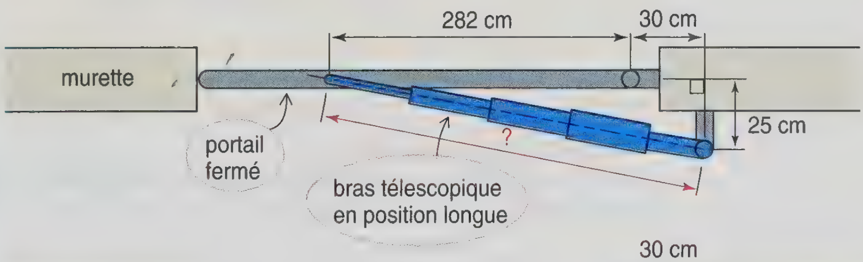
L'escalier suivant comporte 17 marches ayant chacune 17 cm de hauteur et 26,4 cm de longueur.

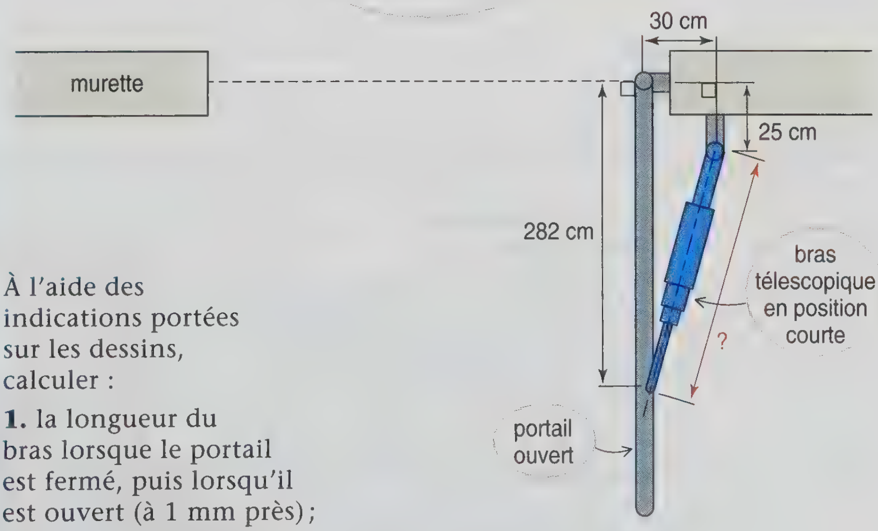


Pour éviter les chutes, on demande à un menuisier de construire une rampe à cet escalier. Calculer la longueur de la main courante [DE].

5 Le portail automatique

Un portail automatique est actionné par un bras télescopique qui s'allonge ou se rétracte (à l'aide d'un moteur électrique) à la vitesse de 1,81 cm par seconde. Les deux schémas suivants montrent, en vue de dessus, le portail fermé et le portail ouvert.





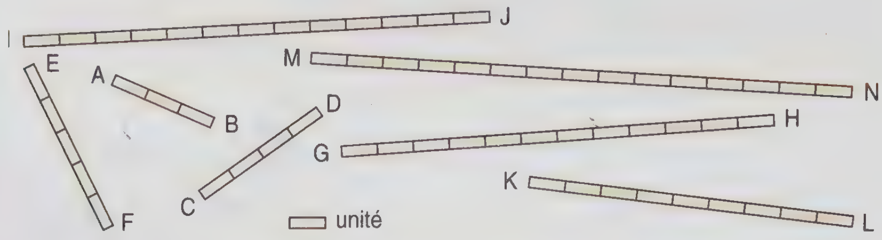
À l'aide des indications portées sur les dessins, calculer :

1. la longueur du bras lorsque le portail est fermé, puis lorsqu'il est ouvert (à 1 mm près) ;

2. le temps nécessaire pour ouvrir (ou fermer) le portail.

6 Réciproque de la propriété de Pythagore

Voici des tiges graduées, de longueurs connues.



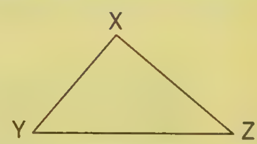
1. Compléter le tableau.

Tige	AB	CD	EF	GH	IJ	KL	MN
Longueur de la tige	3						
Carré de la longueur							

2. On peut trouver trois nombres de la dernière ligne du tableau tels que l'un soit la somme des deux autres (*exemple* : 25 = 9 + 16).
Trouver deux autres égalités de ce type.
3. Pour chacune des trois égalités trouvées, construire un triangle dont les côtés sont les tiges correspondantes.
4. À l'aide d'une équerre, vérifier si ces triangles sont rectangles ou non.
5. Avec les tiges données, on observe la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ

Si dans un triangle XYZ on a la relation $YZ^2 = XY^2 + XZ^2$, **alors** le triangle XYZ est .... en .... .



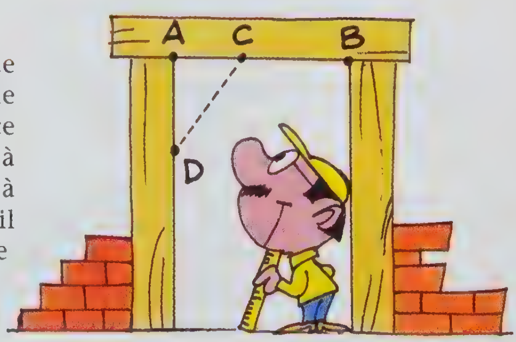
Compléter la phrase encadrée.
Cette propriété est générale : c'est la **réciproque de la propriété de Pythagore**.

7 Le menuisier et le viticulteur

A. Vérification d'un angle droit

Le menuisier veut vérifier que deux montants d'une huisserie sont perpendiculaires. Il trace deux marques : l'une en C à 60 cm du coin A, l'autre en D à 80 cm de A (voir figure). Puis il mesure la distance CD : « 1 mètre c'est d'équerre ! » déclare-t-il.

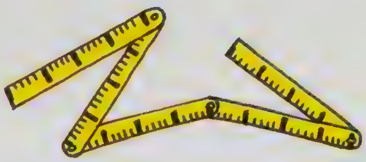
Justifier cette affirmation.

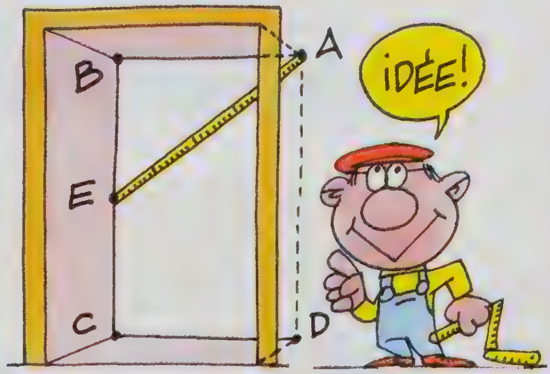


Remarques
• Les parties **A**, **B** et **C** sont totalement indépendantes.
• La partie **A** peut être vécue autour d'une porte ou d'une fenêtre de la salle de classe.

B. Calcul d'une longueur difficile à mesurer

Pas facile de mesurer la largeur AB de ce fond de placard avec un mètre pliant !

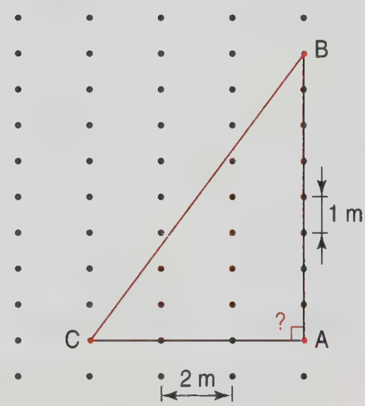




Mais notre menuisier est un expert. Il tend son mètre entre le coin A et un point E de l'arête [BC]. Il mesure BE, car il n'est pas gêné dans cette direction. Il trouve BE = 63 cm.
Calculer AB à 1 mm près.

C. Avant de planter la vigne

Avant de planter la vigne, il faut d'abord mettre les piquets en place.
Supposons qu'il y ait 2 mètres entre deux rangs voisins et 1 mètre entre deux pieds voisins dans un même rang.
Pour ne pas dévier, le viticulteur considère trois piquets A, B et C disposés comme l'indique la figure. Puis il mesure BC.
Combien doit-il trouver pour être sûr que (AB) et (AC) sont perpendiculaires ?



8 Spécial compétition

ENTRE NOUS
Objectifs
• Utiliser la propriété de Pythagore.
• Décomposer un nombre en somme de deux carrés (**B**).
• Retrouver la géométrie du cylindre (**C**).
• S'entraîner aux compétitions mathématiques.

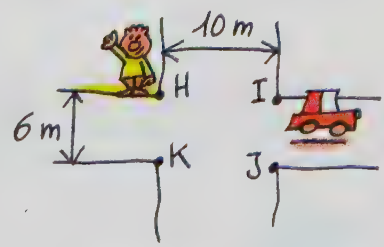
Remarque pour **B**
On a aussi :
$1997 = 34^2 + 29^2$
$2000 = 40^2 + 20^2$
$2005 = 41^2 + 18^2$
etc.

BIBLIOGRAPHIE
• Panoramath 1996 (CIJM-APMEP-ACL).
• Fichier Évariste (APMEP, n° 98, 1995).

A. Traversée dangereuse
(d'après Kangourou des mathématiques, 1991)

Pour traverser le carrefour, Henri Sketou a constaté qu'il était plus court de traverser en diagonale.
Combien gagne-t-il en faisant ainsi ?

$\boxed{A}$ entre 1 et 2 m $\boxed{B}$ entre 2 et 3 m
$\boxed{C}$ entre 3 et 4 m $\boxed{D}$ entre 4 et 5 m.



B. Année pythagoricienne (d'après Tournoi de l'APMEP de Rennes, 1993)

L'hypoténuse d'un triangle rectangle vaut $\sqrt{1\,993}$.
Quelles sont les mesures des deux autres côtés, sachant qu'elles s'expriment par des entiers ?

C. Le chèvrefeuille (d'après Mathématiques sans frontières, Alsace)

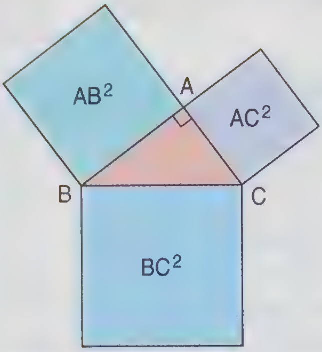
Un chèvrefeuille est enroulé autour d'un tronc cylindrique de 40 cm de diamètre. Il en fait huit fois le tour en une hélice régulière pour atteindre une hauteur de 12 m. Calculez la longueur totale de la liane.

L'essentiel

Outil — Propriété de Pythagore

PROPRIÉTÉ

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés perpendiculaires.



$BC^2 = AB^2 + AC^2$

En conséquence, si l'on sait que ABC est rectangle en A, alors on peut écrire que : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Ceci permet de calculer un côté lorsque les deux autres sont connus.

Remarque. L'hypoténuse est le plus long côté d'un triangle rectangle.

RÉCIPROQUE DE LA PROPRIÉTÉ DE PYTHAGORE

Si, dans un triangle ABC, on a la relation $AB^2 + AC^2 = BC^2$, **alors** le triangle est rectangle en A.

En conséquence, si l'on connaît les longueurs des trois côtés d'un triangle, alors on peut savoir si ce triangle est rectangle.

Méthodes — Calculer ; démontrer

M 15 Comment calculer la longueur d'un segment ?

Lorsque deux côtés d'un triangle rectangle sont connus, la propriété de Pythagore permet de calculer le troisième côté.

M 26 Comment démontrer qu'un triangle est rectangle ?

Utiliser la réciproque de la propriété de Pythagore (lorsque les trois côtés sont connus).

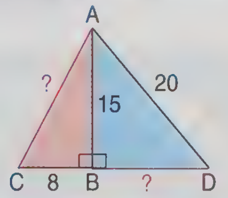
Exemples

Calculs de longueurs ; démonstration

1 Calculs de longueurs

ÉNONCÉ

Soit ABC et ABD deux triangles rectangles en B.
On sait que : AB = 15 BC = 8 et AD = 20.
a/ Calculer AC. **b/** Calculer BD.



Stratégie

Il s'agit de calculer le troisième côté d'un triangle rectangle ayant deux côtés connus : on utilise pour cela la propriété de Pythagore.
Pour les racines carrées, on utilise la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculatrice.
En général on obtient un résultat approché (non exact).

Solution

a/ Le triangle ABC est rectangle en B. Donc, d'après la propriété de Pythagore,
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 15^2 + 8^2 = 289$.
Donc $AC = \sqrt{289} = 17$.

b/ Le triangle ABD est rectangle en B. Donc, d'après la propriété de Pythagore,
$AD^2 = AB^2 + BD^2$.
D'où $BD^2 = AD^2 - AB^2$
$= 20^2 - 15^2 = 175$
Donc $BD = \sqrt{175} \approx 13{,}23$.

Remarques

On précise d'abord l'hypothèse et la propriété utilisée.

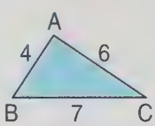
Exceptionnellement, le calcul « tombe juste ».

Attention, le côté cherché n'est pas l'hypoténuse : il faut soustraire.

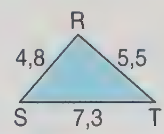
2 Un triangle est-il rectangle ?

ÉNONÇÉ

Les triangles ci-contre sont-ils rectangles ?



a/



b/

Stratégie

Il s'agit de savoir si le carré du plus long côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
Si oui, le triangle est rectangle.
Sinon, il ne l'est pas.

Solution

a/ D'une part : $BC^2 = 7^2 = 49$.
D'autre part :
$AB^2 + AC^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52$.
Ainsi $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$.
Donc ABC n'est pas rectangle.

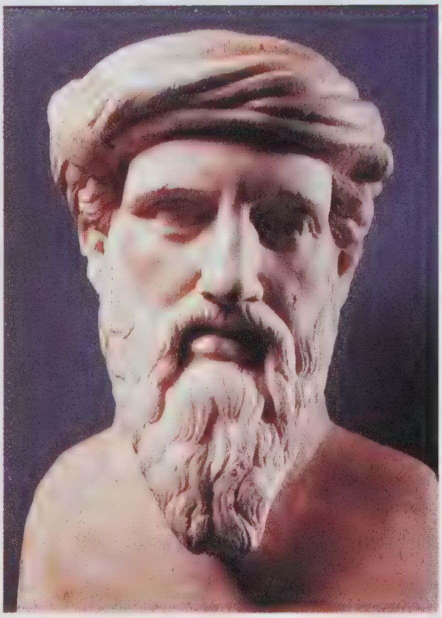
b/ D'une part : $ST^2 = 7{,}3^2 = 53{,}29$.
D'autre part :
$RS^2 + RT^2 = 4{,}8^2 + 5{,}5^2 = 53{,}29$.
Ainsi $ST^2 = RS^2 + RT^2$.
Donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle RST est rectangle en R.

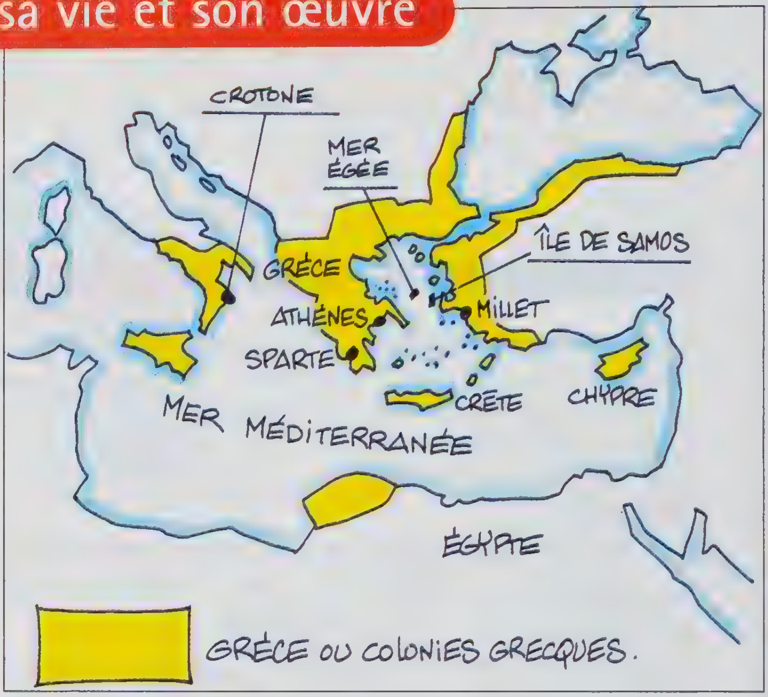
Remarques

On calcule séparément BC^2 et $AB^2 + AC^2$.
On ne commence pas par écrire « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » qui serait faux ici.

Histoire des mathématiques

PYTHAGORE : sa vie et son œuvre





Sa vie est presque inconnue et on se demande ce qu'il a vraiment inventé ; mais cela n'a pas empêché PYTHAGORE de devenir très, très célèbre.

PYTHAGORE est un mathématicien grec de la fin du 6e siècle avant J.-C. Né dans l'île de Samos, il partit fonder une école à Crotone (dans le sud de l'actuelle Italie alors colonisé par les Grecs).

UNE CURIEUSE ÉCOLE

Pythagore étudiait les mathématiques ou la musique avec ses disciples en leur expliquant que **« tout est nombre »**.
Mais il professait aussi toutes sortes d'idées comme la **métempsychose** (possibilité de renaître, après la mort, sous la forme d'un autre être vivant, et d'avoir ainsi plusieurs vies).

En fait, l'école de PYTHAGORE était une secte : les disciples rapportaient toutes leurs découvertes scientifiques au maître. On ne peut donc plus distinguer aujourd'hui les inventions de PYTHAGORE de celles des disciples.

ÇA NE PLAÎT PAS À TOUT LE MONDE

Pour finir, l'activité des pythagoriciens en faveur du régime aristocratique déclencha une émeute populaire au cours de laquelle l'école fut détruite. Mais les pythagoriciens dispersés ont entretenu pendant très longtemps la doctrine de leur maître.

UNE PROPRIÉTÉ COLLECTIVE

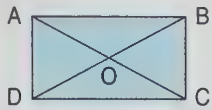
Quant à la propriété dite « de Pythagore », elle était connue des Babyloniens plus de 1000 ans avant PYTHAGORE, comme en témoignent des textes gravés sur des tablettes d'argile.

CONSOLIDER

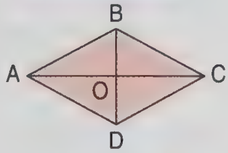
Triangles rectangles

1 Citer tous les triangles rectangles de ces figures :

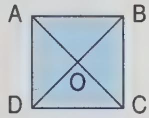
a) un rectangle et ses diagonales ;



b) un losange et ses diagonales ;



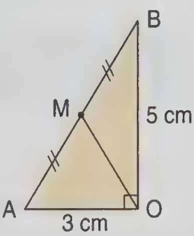
c) un carré et ses diagonales.



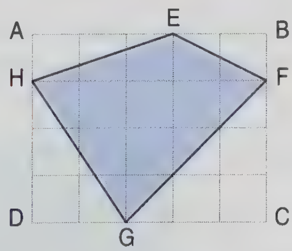
2 Construire un triangle rectangle puis ses trois hauteurs. Où se trouve l'orthocentre ?

3 **a)** Calculer l'aire du triangle rectangle BOA.

b) Pourquoi peut-on dire que MOA et MOB ont même base et même hauteur ? En déduire l'aire de MOA et celle de MOB.



4 ABCD est un rectangle de 5 cm sur 4 cm.



Calculer l'aire du quadrilatère EFGH.

Carrés de nombres

5 Calculer.

$a = 3^2$	$b = 25^2$	$c = 100^2$
$d = 1\,000^2$	$e = 1^2$	$f = 0^2$
$g = 0{,}2^2$	$h = 1{,}3^2$	$i = 36{,}15^2$.

6 Calculer.

$a = 3^2 + 2^2$	$b = 15^2 + 11^2$
$c = 6^2 + 8^2$	$d = 30^2 - 10^2$
$e = 8^2 - 1^2$	$f = 7{,}5^2 - 1{,}5^2$.

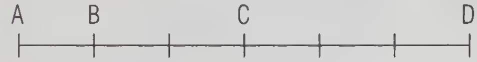
7 Est-il vrai que :

a) $3^2 + 4^2 = 5^2$?

b) $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$?

c) $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$?

8 On donne quatre points alignés dans cet ordre et tels que AB = 1 cm, BC = 2 cm et CD = 3 cm.



Calculer.

$a = AC^2 + CD^2$

$b = AB^2 + BD^2$

$c = AC^2 + BD^2$

$d = AB^2 + BC^2 + CD^2$.

9 On donne un triangle ABC isocèle en A avec AB = 5 et BC = 3.

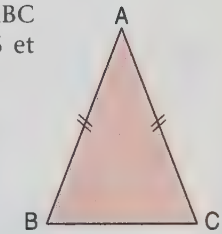
Calculer.

$a = AB^2 + BC^2$

$b = AB^2 - BC^2$

$c = 2\,AC^2 + 3\,BC^2$

$d = 3\,AB^2 - 5\,BC^2$.



RÉSULTATS

4 10 cm².

5 $a = 9$ $b = 625$ $c = 10\,000$ $d = 1\,000\,000$ $e = 1$ $f = 0$ $g = 0{,}04$ $h = 1{,}69$ $i = 1\,306{,}822\,5$.

8 $a = 18$ $b = 26$ $c = 34$ $d = 14$.

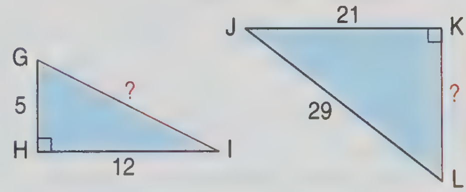
SAVOIR FAIRE

Calculs de longueurs

10 Construire un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 5,6 cm et AC = 3,3 cm. Calculer BC et mesurer pour vérifier.

11 Construire un triangle DEF rectangle en D tel que DE = 24 mm et EF = 74 mm. Calculer DF et mesurer pour vérifier.

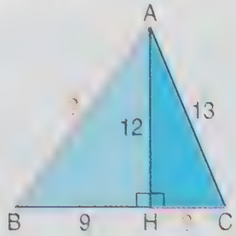
12 Calculer GI et KL.



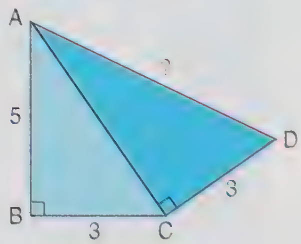
13 Soit GHI un triangle rectangle en G tel que GH = 7 cm et GI = 3 cm. Calculer une valeur approchée de HI à 0,1 cm près.

14 Soit JKL un triangle rectangle en J tel que KL = 11,2 cm et JK = 5,3 cm. Calculer une valeur approchée de JL à 0,1 cm près.

15 Calculer AB et HC.



16 Calculer AD à 0,001 près.



17 *Triangle rectangle isocèle*
a) Construire un triangle ISO rectangle isocèle en I tel que SI = 13 cm.
b) Calculer une valeur approchée de OS à 0,1 cm près.

18 *Diagonale d'un carré*
Calculer une valeur approchée de la diagonale d'un carré de côté 10 m.

19 *Hauteur d'un triangle équilatéral*
Calculer une valeur approchée de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 10 m.

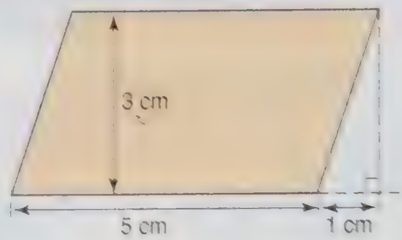
20 *Hauteur d'un triangle équilatéral (bis)*
Construire un triangle équilatéral FEU de 8 cm de côté. Construire sa hauteur [FI] et calculer FI à 0,01 cm près.

21 *Diagonale d'un rectangle*
Calculer la diagonale d'un rectangle dont les côtés mesurent 6,24 m et 4,07 m.

22 *Longueur d'un rectangle*
Calculer la longueur d'un rectangle dont la largeur mesure 6,89 m et la diagonale 14,89 m.

23 *Périmètre d'un losange*
Calculer le périmètre d'un losange dont les diagonales mesurent 16 cm et 30 cm.

24 *Périmètre d'un parallélogramme*
Calculer, à 0,01 cm près, le périmètre du parallélogramme suivant.



25 *Cercle circonscrit à un carré*
Calculer une valeur approchée du rayon du cercle circonscrit à un carré de côté 9 cm.

26 *Cercle circonscrit à un rectangle*
Calculer le rayon du cercle circonscrit à un rectangle de longueur 75,6 cm et de largeur 53,3 cm.

Triangles rectangles ou non

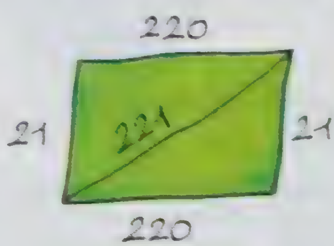
Dans les trois exercices suivants, dire si le triangle ABC est rectangle en justifiant la réponse.

27 AB = 7 BC = 10 AC = 12.

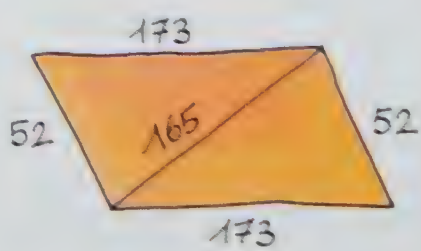
28 AB = 52,8 BC = 45,5 AC = 69,7.

29 AB = 83 BC = 49 AC = 67.

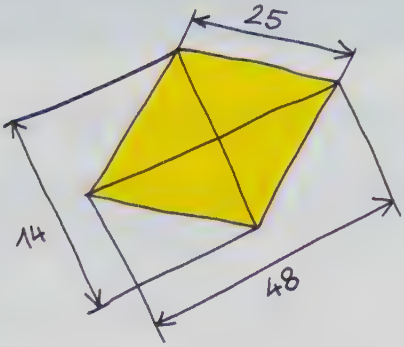
30 Ce parallélogramme est-il un rectangle ?



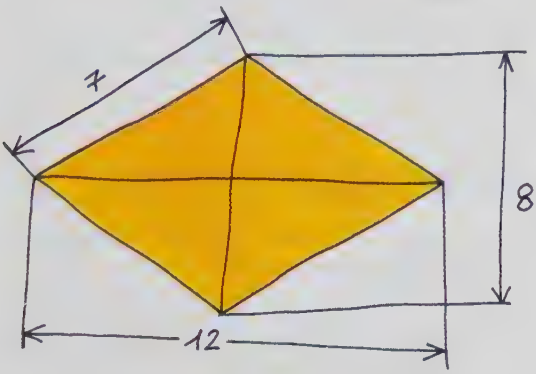
31 Ce parallélogramme est-il un rectangle ?



32 Ce parallélogramme est-il un losange ?



33 Ce parallélogramme est-il un losange ?

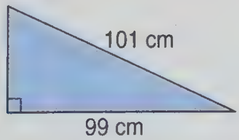


Calculs d'aires

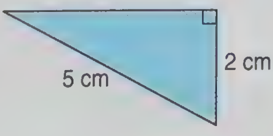
34 Calculer l'aire d'un triangle dont les côtés mesurent 10 cm, 8 cm et 6 cm.

35 Calculer l'aire d'un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 12 cm et 13 cm.

36 Calculer en cm² l'aire du triangle rectangle suivant.

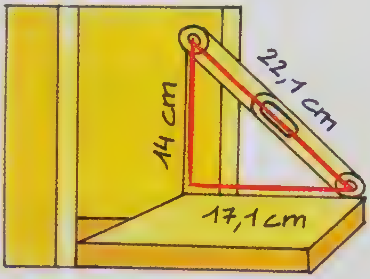


37 Calculer, à 0,01 cm² près, l'aire du triangle rectangle suivant.

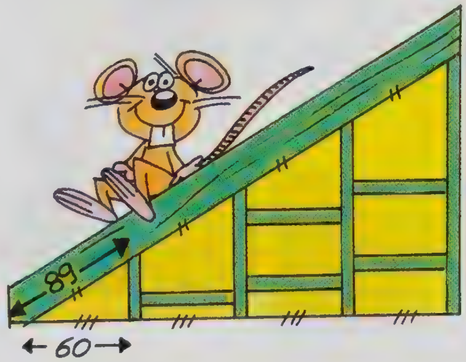


Dans la vie courante

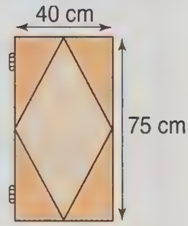
38 *Le secrétaire*
Le plateau est retenu par une règle pliante de 22,1 cm de long.
Est-il perpendiculaire au meuble ?



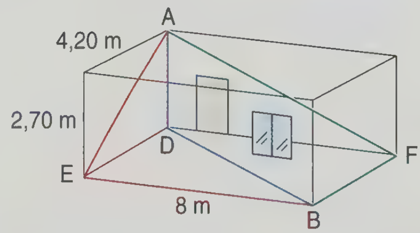
39 *Les étagères*
On veut poser des étagères sous un escalier en respectant les dimensions portées sur la figure (en cm). Calculer à 1 mm près les longueurs des montants verticaux.



40 *Dans le panneau*
Un panneau de porte de 75 cm sur 40 cm est décoré d'un losange en relief, obtenu en joignant les milieux des côtés. Combien mesure le côté du losange ?



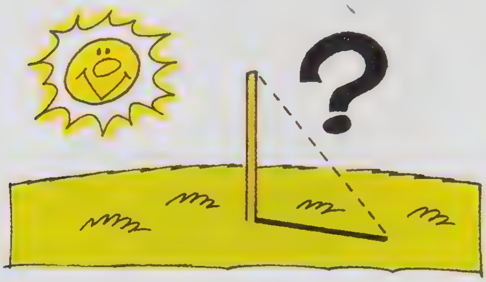
41 *Le plus court chemin*



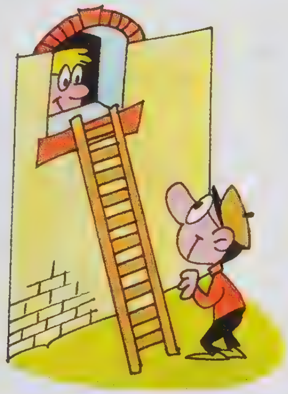
Un électricien a trois possibilités pour joindre A à B avec des fils électriques :
– chemin rouge : AE + EB ;
– chemin bleu : AD + DB ;
– chemin vert : AF + FB.
Quel chemin choisir pour économiser le fil ?

Les problèmes du grenier

42 *Le bâton* (sur un cahier de 1876)
Un bâton de 1,40 m de longueur, enfoncé verticalement dans le sol à une profondeur de 0,15 m, fait une ombre de 0,90 m.
Quelle est la distance de l'extrémité supérieure du bâton à l'extrémité de l'ombre ?



43 *L'échelle* (sur un cahier de 1876)
Quelle longueur doit avoir une échelle pour atteindre une hauteur de 7 m, si on lui donne 2 mètres de pied ?



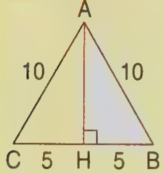
RÉSULTATS

10 BC = 6,5 cm. **11** DF = 70 mm.

13 HI ≈ 7,6 cm. **14** JL ≈ 9,9 cm.

17 **b)** OS ≈ 18,4 cm.

19



$AH^2 = 10^2 - 5^2 = 75$.
Donc $AH = \sqrt{75}$
$\approx 8,66$ m.

27 Relire l'Exemple 2 page 171.
$AC^2 = 144$ et $AB^2 + BC^2 = 149$.
Donc ABC n'est pas rectangle.

34 Demandons-nous si ce triangle est rectangle :
$10^2 = 100$ et $8^2 + 6^2 = 100$.
Donc il est rectangle et les côtés de l'angle droit mesurent 8 cm et 6 cm.
Son aire vaut : $8 \times 6 \div 2 = 24$ cm².

DÉMONTRER

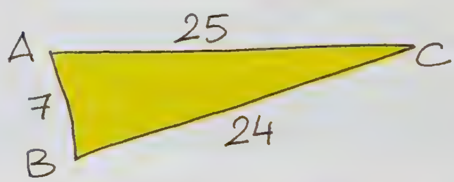
Ça se voit sur le dessin !

44 *Triangle rectangle ?*
a) Construire un triangle isocèle dont les côtés mesurent 7 cm, 7 cm et 10 cm.
Ce triangle a-t-il l'air rectangle ? Vérifier avec une équerre.
b) Ce triangle est-il vraiment rectangle ? Faire une démonstration.

45 *Triangle rectangle ? (bis)*
Construire le triangle VIL tel que :
VL = 8,1 cm ; IL = 4,4 cm et VI = 6,8 cm.
Le triangle VIL paraît-il rectangle ? Est-il rectangle ?

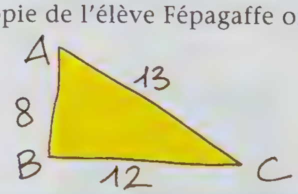
Étranges démonstrations

46 Sur le cahier de l'élève Téténlair, on peut lire ceci. Qu'en pensez-vous ?



$AC^2 + AB^2 = 25^2 + 7^2 = 625 + 49 = 674$
$BC^2 = 24^2 = 576$
Donc $AC^2 + AB^2 \neq BC^2$
Donc le triangle ABC n'est pas rectangle.

47 Sur la copie de l'élève Fépagaffe on lit :



Pour savoir si ABC est rectangle, on calcule :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$13^2 = 8^2 + 12^2$
$169 = 64 + 144$
$169 \neq 208$.
Donc ABC n'est pas rectangle.

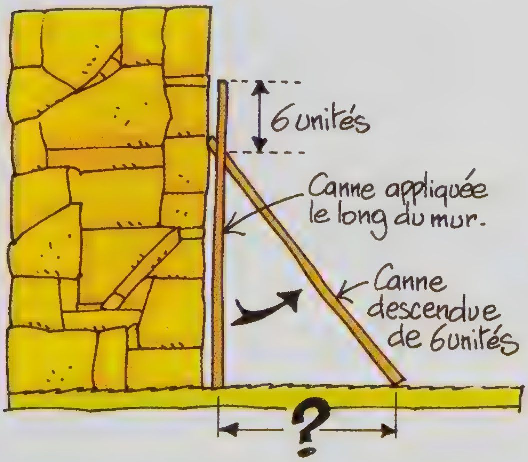
Il est choquant de voir un « = » se transformer en « ≠ ». Donner une rédaction correcte de cette démonstration.

CHERCHER

Histoire des mathématiques

Voici des traductions de problèmes trouvés sur d'authentiques documents historiques.

48 *À Babylone, vers 1800 avant J.-C.*
(Problème gravé sur une tablette d'argile de l'époque du roi Hammourabi)
Une canne, appliquée le long d'un mur, a une longueur de 30 unités. De combien doit-on l'éloigner du pied du mur pour que le sommet de la canne descende de 6 unités le long du mur ?



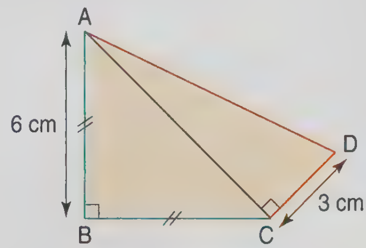
49 *À Pise, vers 1200 après J.-C.*
(Problème attribué à Léonard de Pise, dit Fibonacci, mathématicien italien du Moyen Âge)
Une lance, debout le long d'une tour, est longue de 20 pieds. Si l'extrémité de la lance qui repose sur le sol s'éloigne de 12 pieds de la tour, de combien descend l'autre extrémité de la lance le long du mur ?

Longueurs et aires

50 L'aire d'un triangle rectangle est 1 420 m². L'un des côtés de l'angle droit mesure 71 m. Combien mesure l'hypoténuse (à 0,1 m près) ?

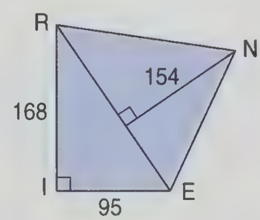
51 *Les deux médianes*
ARC est un triangle rectangle en A tel que CR = 53 et AC = 45. Calculer une valeur approchée des longueurs des médianes issues de R et de C.

52 *Le plus court chemin*
a) Construire la figure suivante.

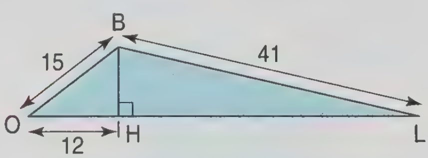


b) Pour aller de A à C, le chemin AB + BC est-il plus court que le chemin AD + DC ?

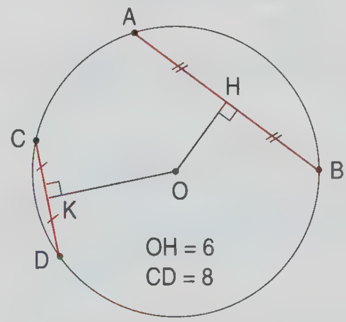
53 *L'aire de RIEN*
Calculer l'aire du quadrilatère ci-contre.



54 *L'aire de BOL*
En utilisant les données indiquées sur la figure, calculer l'aire du triangle BOL.

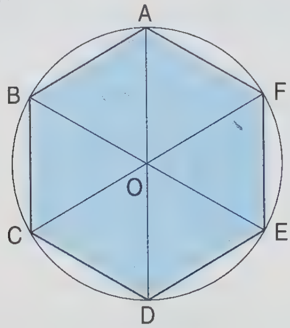


55 *Cordes*
On a tracé deux cordes [AB] et [CD] dans un cercle de centre O et de rayon 10 cm.

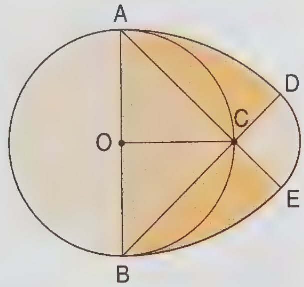


a) Calculer AB.
b) Calculer la distance OK.

56 *Aire d'un hexagone régulier*
L'hexagone régulier ABCDEF est inscrit dans un cercle de rayon 4 cm. Calculer l'aire de cet hexagone.



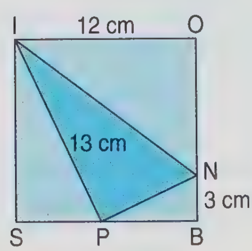
57 *L'ove*
Le cercle de centre O a 3 cm de rayon. L'arc $\widehat{AD}$ est centré en B, l'arc $\widehat{BE}$ en A et l'arc $\widehat{DE}$ en C.



a) Construire l'ove.
b) Calculer BC puis CD à 0,01 cm près.
c) Calculer le périmètre de l'ove.
d) Calculer l'aire de l'ove.

Recherche triangles rectangles

58 *Se cache-t-il dans le BOIS ?*
a) Construire la figure suivante où BOIS est un carré de côté 12 cm.



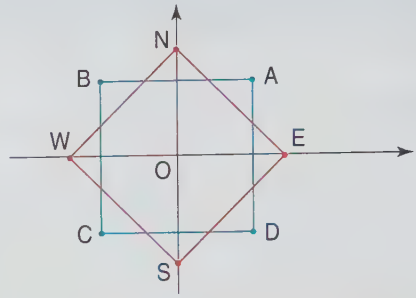
b) Le triangle PIN est-il rectangle ? Justifier la réponse.

59 *Cachés dans une liste de nombres*
Trouver trois triangles rectangles dont les côtés sont parmi la liste des nombres suivants : 7 8 15 17 20 24 25.

60 *Avis de recherche*
On recherche un triangle rectangle dont les côtés mesurent : 1984, 1985 et un entier.

Points sur cercles

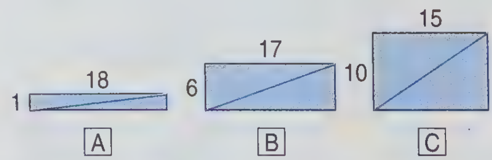
61 *Le plus grand cercle*
Le plan est muni de deux axes perpendiculaires se coupant en O et gradués avec la même unité.
On considère les carrés, de centre O, NWSE et ABCD où AB = 10 et WE = 14.



a) Construire cette figure, puis le cercle $\mathscr{C}_1$, circonscrit au carré NWSE, et enfin le cercle $\mathscr{C}_2$ circonscrit au carré ABCD.
b) Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont-ils confondus ? Sinon, quel est le plus grand ?

62 *Sur un cercle*
Le plan est muni de deux axes perpendiculaires se coupant en O et gradués avec la même unité.
a) Tracer le cercle de centre O et de rayon 13. Placer les points A de coordonnées (7 ; 11) et B de coordonnées (5 ; 12).
b) Le point A est-il situé sur le cercle ? (Justifier la réponse.) Sinon, est-il à l'extérieur ou à l'intérieur ?
c) Le point B est-il situé sur le cercle ? (Justifier.) Si oui, marquer 11 autres points de ce cercle ayant des coordonnées entières, et tracer le dodécagone ainsi obtenu.

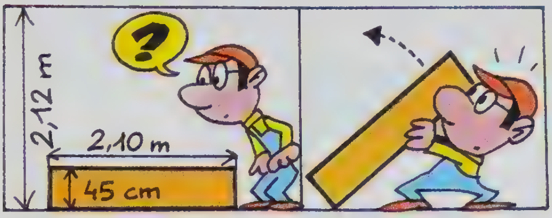
63 *Un nombre remarquable : 325*
a) On a remarqué que 325 est le plus petit nombre entier qui soit la somme de deux carrés, de trois façons différentes. Compléter.
$325 = \boxed{\dots\dots}^2 + 18^2 = \boxed{\dots\dots}^2 + 17^2 = \boxed{\dots\dots}^2 + 15^2.$
b) Quel est le rectangle ayant la plus grande diagonale : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ ou $\boxed{C}$?



c) Sur une page à petits carreaux, marquer un point Z sur un nœud du quadrillage, à peu près au centre de la page. Tracer deux axes perpendiculaires se coupant en Z et gradués en carreaux.
Le cercle de centre Z et de rayon $\sqrt{325}$ contient 24 points à coordonnées entières. Marquer ces points et tracer ce cercle.

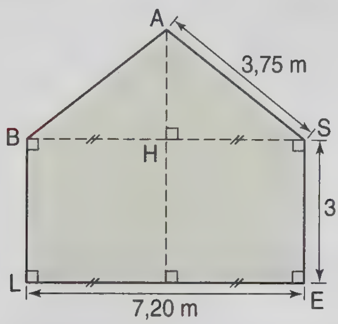
Dans la vie courante

64 *La surprise finale*



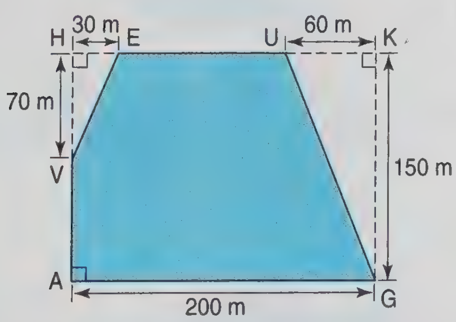
Le plafond est-il assez haut pour que Monsieur Bricoltou mette en place son meuble ?

65 *L'aire du mur*



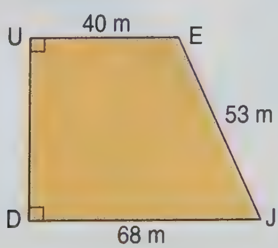
On veut crépir ce mur. Mais il faut d'abord calculer son aire.

66 *Le terrain VAGUE*
Monsieur Crésus possède un terrain VAGUE qu'il veut clôturer.



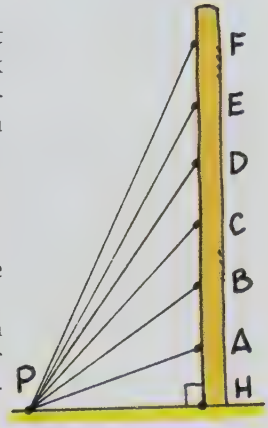
Calculer le périmètre du terrain VAGUE.

67 *Le terrain DJEU*
La municipalité laisse un terrain DJEU à notre disposition.

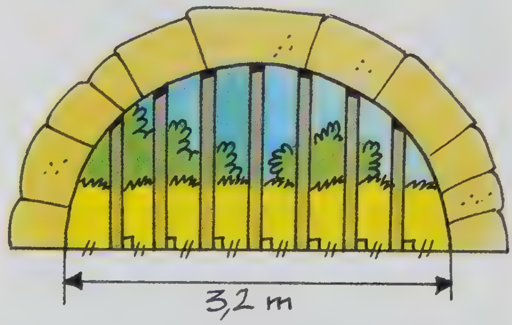


Hier, nous avons mesuré trois côtés :
DJ = 68 m, JE = 53 m et EU = 40 m.
Mais l'orage montait et nous dûmes rentrer avant d'avoir mesuré [UD].
Qu'importe ! On peut très bien **calculer** UD.
Et en plus, ça tombe juste !
Trouverez-vous comme nous ?

68 *Les haubans*
Un pilier vertical est maintenu par six câbles (appelés haubans) ancrés en un point P (voir dessin).
On a :
HA = AB = BC = CD
= DE = EF = 1 m.
On sait aussi que PC = 5 m.
Calculer, à 0,01 m près, la longueur totale des six haubans.

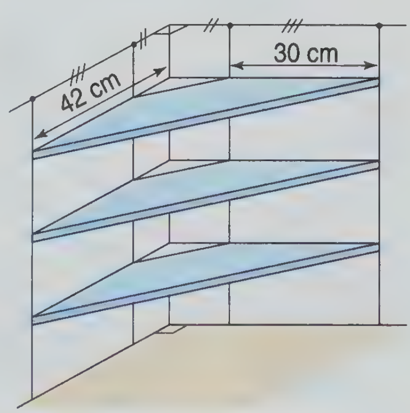


69 *Les barreaux de la grille*
Sept barreaux équidistants ferment ce porche en demi-cercle.



Calculer à 1 cm près la longueur totale des barreaux en utilisant les indications de la figure (on néglige l'épaisseur des barreaux).

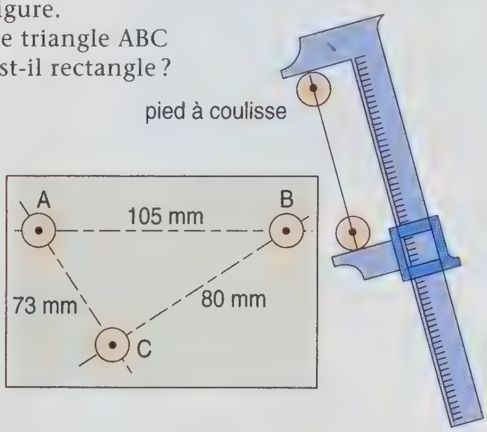
70 *Les étagères de verre*
a) Dessiner une étagère, vue de dessus en suivant les indications de la figure.
b) Calculer la longueur des côtés d'une étagère à 0,01 cm près.



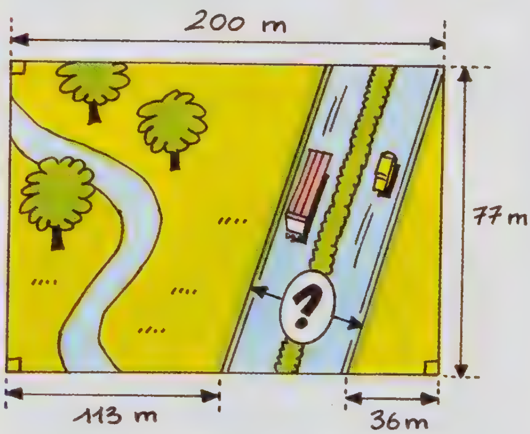
71 *La plaque*

Trois trous de centres A, B, C et de 8 mm de diamètre sont percés dans une plaque. Un cylindre est glissé, sans jeu, dans chaque trou et, on mesure, à l'aide d'un pied à coulisse, les côtés comme il est indiqué sur la figure.

Le triangle ABC est-il rectangle ?



72 *La largeur de l'autoroute*



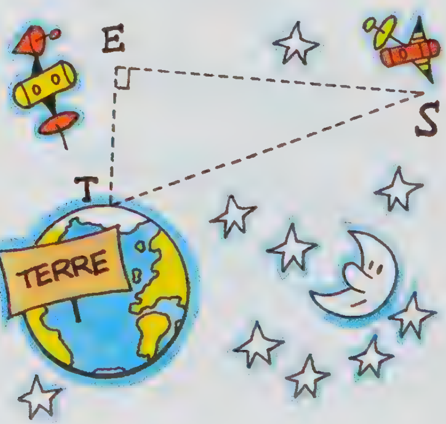
Quelle est la largeur de l'autoroute ? (Non, ce n'est pas 51 m !)

73 *Satellites artificiels*

Quelle distance sépare les deux satellites E et S, sachant que l'angle $\widehat{TES}$ est droit et qu'un signal radio met :

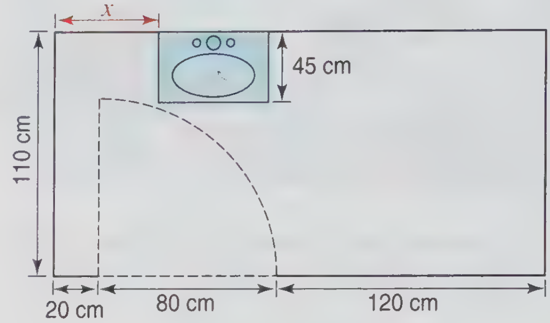
$\frac{1}{60}$ s de S à T et $\frac{1}{100}$ s de E à T ?

(Vitesse du signal radio : 300 000 km/s.)



74 *Où installer le lavabo ?*

On veut installer un beau lavabo dans un cabinet de toilette dont les dimensions sont indiquées sur le plan.



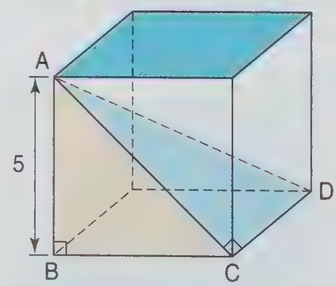
On sait que le lavabo fait 45 cm de largeur. Calculer la valeur minimale de x pour que la porte puisse s'ouvrir sans cogner sur le beau lavabo (arrondir le résultat à 1 cm près par excès).

Géométrie dans l'espace

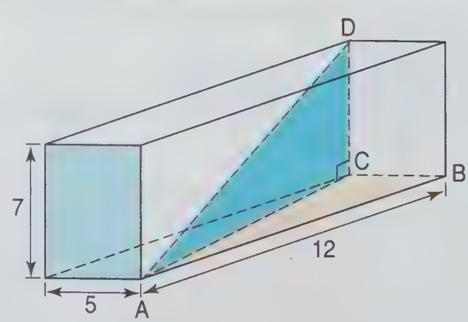
75 *Le cube*

a) Calculer une valeur approchée à 0,01 près de la diagonale d'une face.

b) Calculer une valeur approchée à 0,01 près de la diagonale du cube.



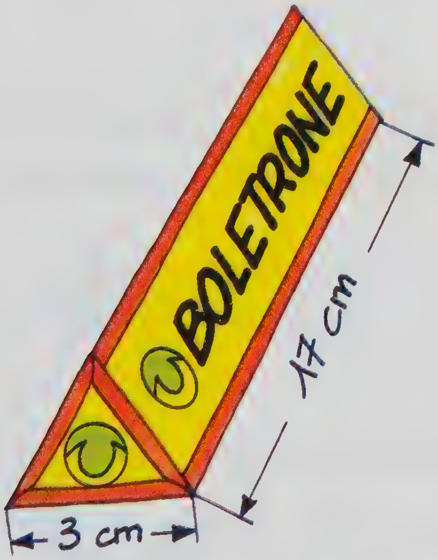
76 *Le parallélépipède rectangle*



Combien mesure, à 0,01 près, la diagonale du parallélépipède rectangle ?

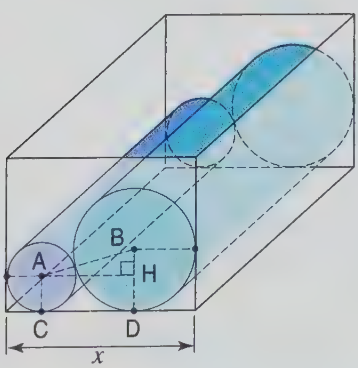
77 *Le parallélépipède rectangle (bis)*
Pour certains parallélépipèdes rectangles bien choisis, les côtés et la diagonale sont des nombres entiers.
Calculer la diagonale lorsque les côtés mesurent 8, 9 et 12.

78 *À l'heure du goûter*
Une barre de chocolat au lait est emballée dans un petit prisme en carton dont la base est un triangle équilatéral. Les dimensions sont indiquées sur la figure.



Calculer le volume de ce prisme, à 0,01 cm^3 près.

79 *Deux cylindres dans une boîte*
Deux objets cylindriques de rayons 9 cm et 16 cm sont rangés dans une boîte.



Les cercles sont tangents entre eux et tangents aux bords de la boîte.
a) Calculer AB et BH.
b) Calculer AH.
c) En déduire la largeur x de la boîte.

COUPS DE POUCE

48 et **49** Considérer le triangle rectangle formé par les deux positions de la canne (ou de la lance).

50 Chercher d'abord l'autre côté de l'angle droit.

51 Calculer d'abord AR.

53 Calculer l'aire de RIE, puis RE, puis l'aire de REN.

54 Calculer d'abord BH puis HL.

56 Calculer d'abord la hauteur de l'un des six triangles équilatéraux.

57 c) $\overset{\frown}{AD}$ et $\overset{\frown}{BE}$ sont des huitièmes de cercle ; $\overset{\frown}{DE}$ est un quart de cercle.

62 b) Calculer OA et comparer au rayon.

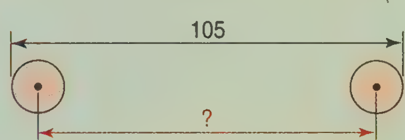
64 Calculer la diagonale du meuble et…

65 Il sera utile de calculer AH.

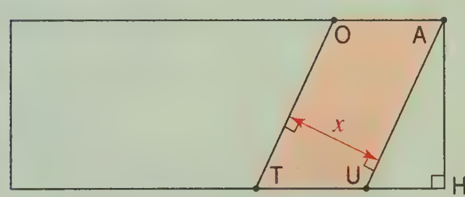
67 Faire apparaître un triangle rectangle d'hypoténuse [JE].

68 Calculer PH, d'abord.

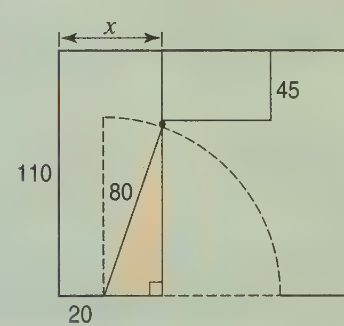
71



72 L'autoroute AUTO est un parallélogramme dont l'aire est égale au produit d'une base par la hauteur correspondante. D'où, avec la figure suivante :
$AU \times x = TU \times AH$.



74



78 Calculer la hauteur du triangle équilatéral, puis l'aire de la base, puis le volume du prisme.

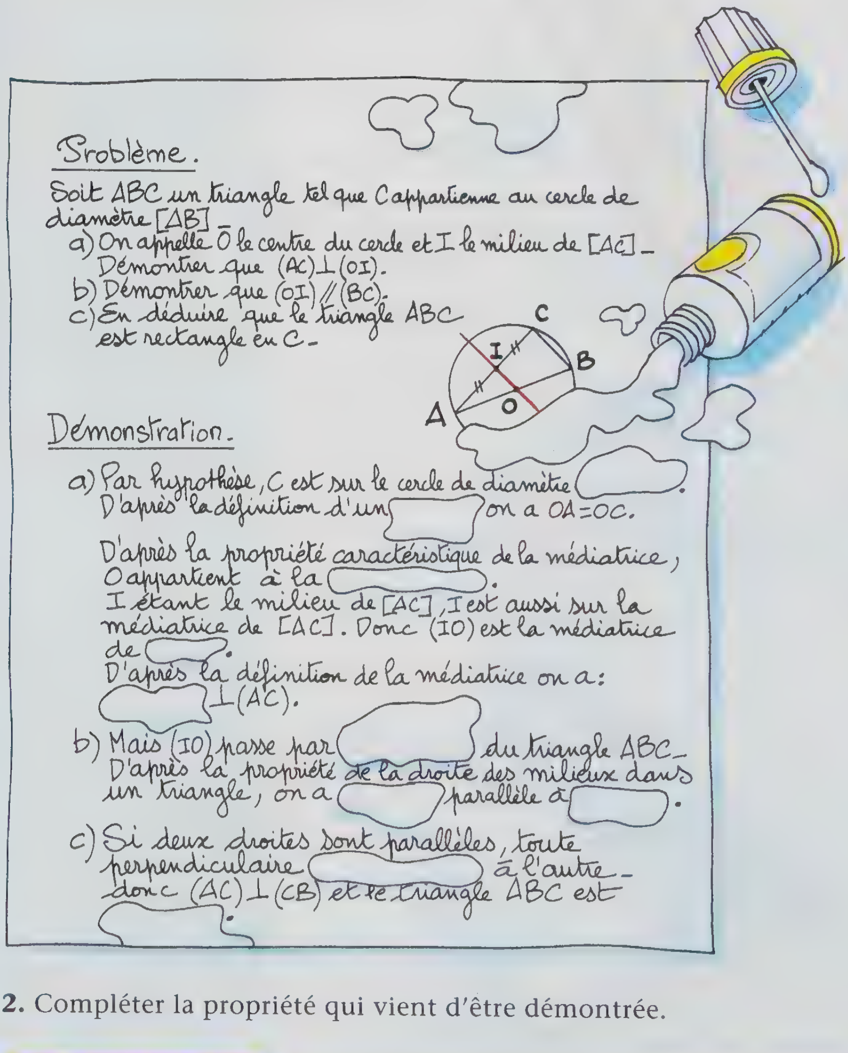
12 Cercles et triangles rectangles

Activités

1 Gaston Latache

Gaston Latache a eu quelques ennuis avec son correcteur blanc qui a fui sur sa copie.

1. Refaire un dessin assez grand et réécrire les démonstrations endommagées en les complétant.



2. Compléter la propriété qui vient d'être démontrée.

PROPRIÉTÉ

Soit ABC un triangle. **Si** le point C appartient au cercle de diamètre [AB], **alors** le .... est .... en .... .

2 Cercle circonscrit à un triangle rectangle

A. Expériences

1. Tracer un segment [AB] de 10 cm de long. Construire, à l'aide de l'équerre, une bonne dizaine de triangles rectangles ayant pour hypoténuse [AB].
Quelle figure semblent dessiner les sommets de l'angle droit ?
2. Tracer un triangle rectangle assez grand. Construire à l'aide de la règle et du compas le centre du cercle circonscrit.
Que remarque-t-on ?

B. Une preuve

PROPRIÉTÉ

Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse.

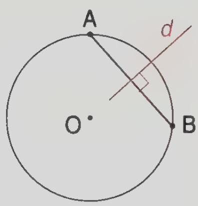
1. Démontrer ce résultat en traçant un triangle rectangle et son symétrique par rapport au milieu de l'hypoténuse.

2. Que dire de la médiane relative à l'hypoténuse ?

3 Médiatrice d'une corde

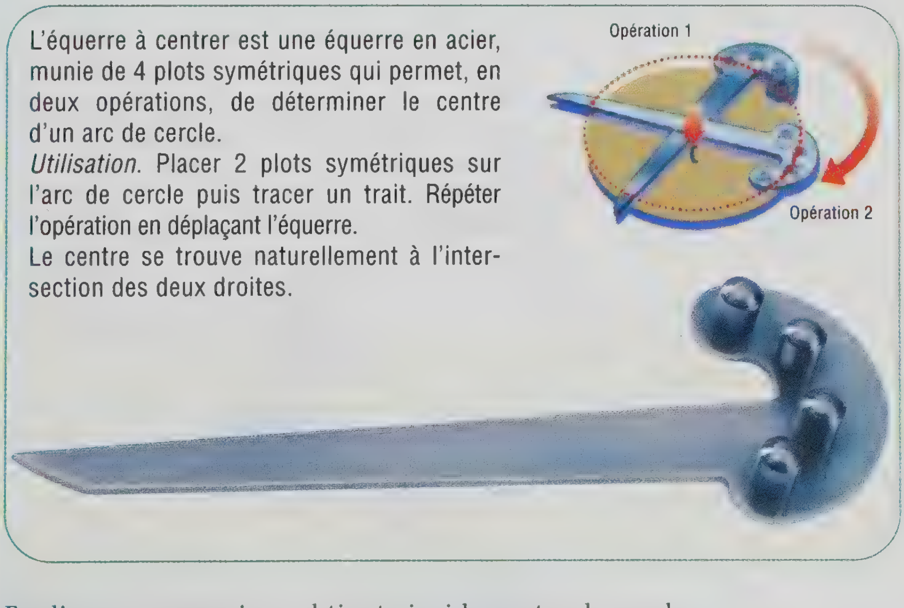
A. Propriété d'une corde

1. Soit A et B deux points du cercle de centre O et soit d la médiatrice de [AB].
Montrer que la droite d passe par O.
2. Énoncer la propriété démontrée.



B. L'équerre à centrer (utilisée dans des ateliers de mécanique)

L'équerre à centrer est une équerre en acier, munie de 4 plots symétriques qui permet, en deux opérations, de déterminer le centre d'un arc de cercle.
Utilisation. Placer 2 plots symétriques sur l'arc de cercle puis tracer un trait. Répéter l'opération en déplaçant l'équerre.
Le centre se trouve naturellement à l'intersection des deux droites.



Source : catalogue FACOM 1996, p. 251.

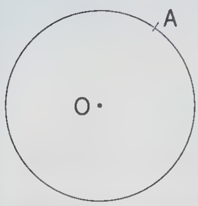
Expliquer pourquoi on obtient ainsi le centre du cercle.

Activités

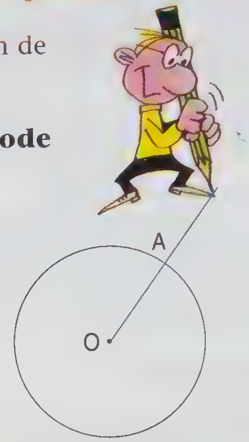
4 Construction de la tangente à un cercle en un point

(Voir page 188 la définition de la tangente.)

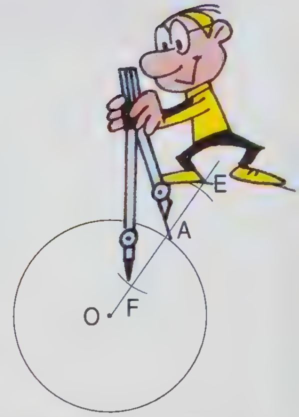
A. Une première méthode



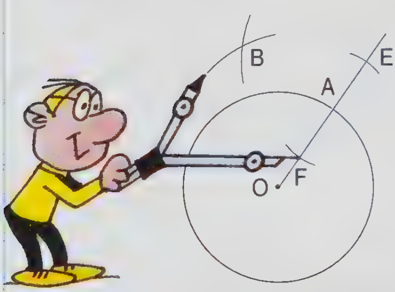
0. Soit à construire la tangente au cercle en A.



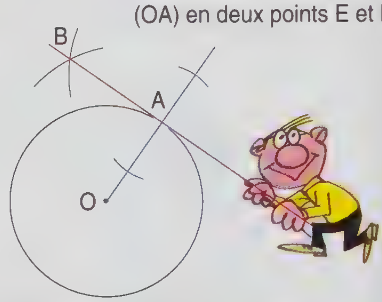
1. Tracer (OA).



2. Tracer 2 arcs de cercle centrés en A qui coupent (OA) en deux points E et F.



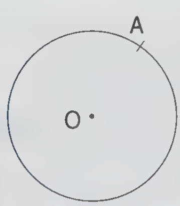
3. Tracer 2 arcs de cercle de même rayon centrés en E, puis en F et qui se coupent en B.



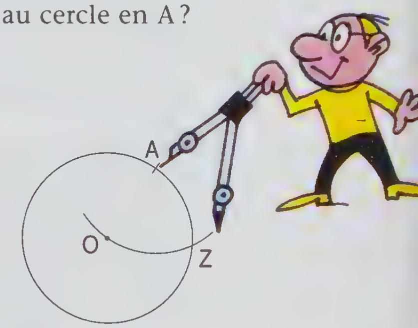
4. Tracer (AB) : c'est la tangente en A au cercle !

1. Réaliser cette construction en commençant par placer un point A sur un cercle de 4 cm de rayon.
2. Pourquoi la droite (AB) est-elle tangente au cercle en A ?

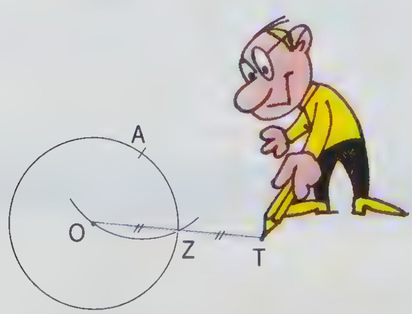
B. Une deuxième méthode



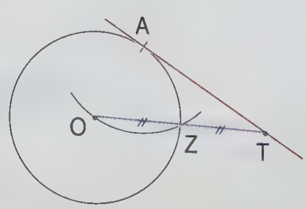
0. Soit à construire la tangente en A au cercle.



1. Tracer un arc de cercle de même rayon et centré en A ; on obtient Z.

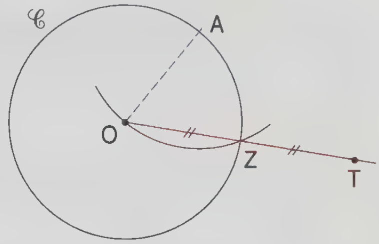


2. Construire le symétrique T de O par rapport à Z.



3. Tracer la droite (AT) : c'est la tangente en A au cercle !

1. Réaliser cette construction en commençant par placer un point A sur le cercle $\mathscr{C}$ de 5 cm de rayon et de centre O.

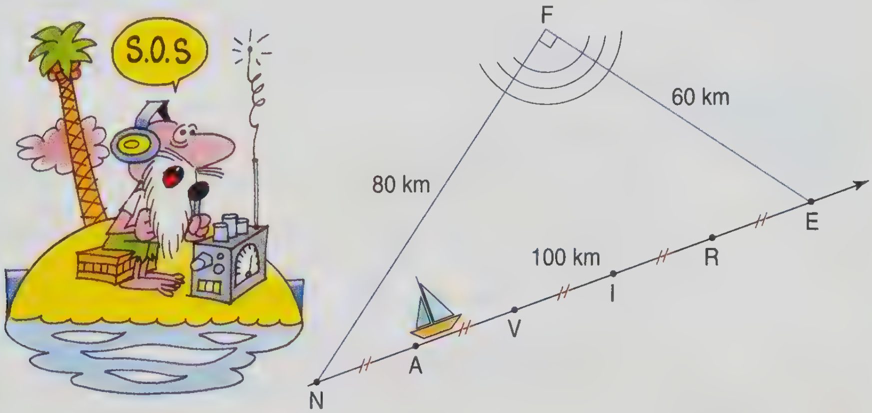


2. Explication

Lire la propriété de la médiane dans un triangle rectangle, page 187 dans « L'essentiel » et montrer que (AT) est tangente en A au cercle $\mathscr{C}$.

5 Le naufragé

Un naufragé F, sur une île déserte, émet des signaux de détresse avec une radio dont la portée maximale est de 48 km.



Un bateau passe en N et file vers le point E.

A. Construction

1. Faire un dessin à l'échelle 1/1 000 000.
2. Mesurer sur le dessin pour savoir si le bateau peut recevoir le message lorsqu'il est en A ? en V ? en I ? en R ? ou en E ?
3. Placer le point H de (NE) le plus proche de F. Quelle est la position des droites (HF) et (NE) ?

B. Calculs

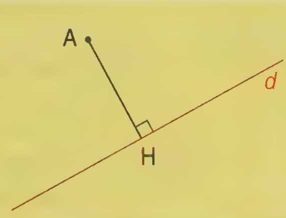
1. Calculer la distance HF.
Indication. Calculer de 2 façons l'aire du triangle NEF.
2. Le navire peut-il recevoir le message, s'il est en H ?

C. Conclusion

Compléter.

PROPRIÉTÉ

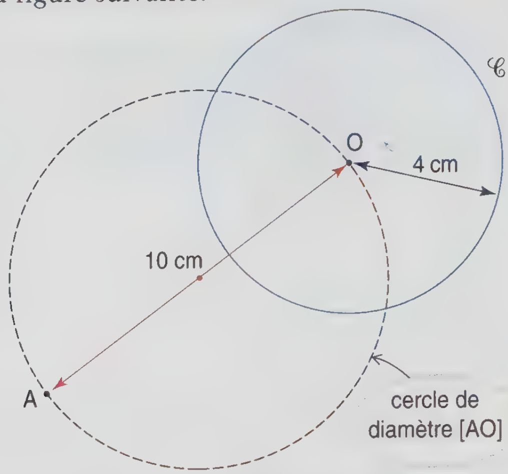
Soit un point A et une droite *d*.
Le point de *d* le plus proche du point A est le pied H de la .... à *d* passant par A.



Vocabulaire. AH s'appelle la **distance** du point A à la droite *d*.

6 Des droites et un cercle

On considère la figure suivante.



1. Faire la figure puis tracer une droite d_1 passant par A et ne coupant pas $\mathscr{C}$.
Mesurer la distance de O à d_1.

2. Construire les droites d_2, d_3 et d_4 passant par A et distantes du point O de 3 cm, 4 cm et 10 cm.

3. Compléter la propriété suivante que nous admettons.
Position relative d'une droite d et d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R :
– si la distance de O à d est supérieure à R alors ....
– si la distance de O à d est égale à R alors ....
– si la distance de O à d est inférieure à R alors ....

7 Spécial compétition

A. La piscine (Mathématiques sans frontières, Alsace, 1996)

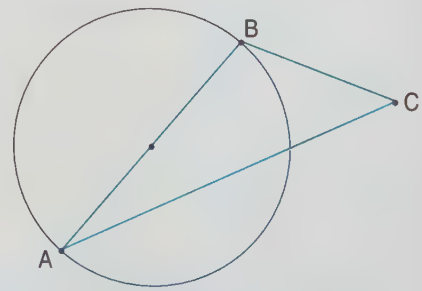
Daniel et Antoine sont assis en deux points diamétralement opposés d'une piscine circulaire dont l'eau est profonde de 1,80 m. Lorsque Myriam prend place au bord du même bassin, tous deux nagent tout droit vers elle. Après un parcours de 10 m, Antoine a déjà atteint Myriam, alors que Daniel devra nager 14 m de plus pour la rejoindre.

Combien de litres d'eau y-a-t-il dans ce bassin ? Expliquer.

B. Le logo de Caro

(Tournoi du Limousin, 1996 ou exercice 24 p. 226, Pythagore 4[e], 1988)

Caroline dessine un logo à partir du dessin ci-contre. Hélas ! **Elle ne dispose plus que d'une règle** et, pour compléter ce logo, elle doit encore construire :
– un rectangle de diagonale [AB] et dont l'un des côtés a pour support la droite (BC) ;
– les hauteurs du triangle ABC.



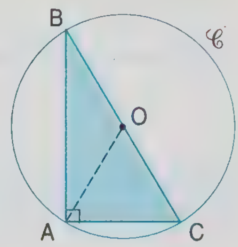
Aidez Caroline en justifiant votre démarche.

Outils

Cercles et triangles rectangles

1 Cercle circonscrit et médiane d'un triangle rectangle

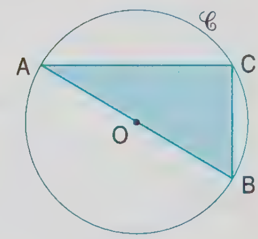
A. Propriété du cercle circonscrit à un triangle rectangle



PROPRIÉTÉ

Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse.

Sachant que ABC est rectangle en A, on peut dire que le cercle circonscrit à ABC est centré au milieu O de l'hypoténuse et a pour rayon OB.



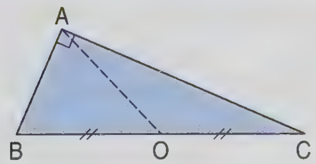
PROPRIÉTÉ

Si le point C appartient au cercle de diamètre [AB], **alors** le triangle ABC est rectangle en C.

B. Propriété caractéristique de la médiane d'un triangle rectangle

PROPRIÉTÉ

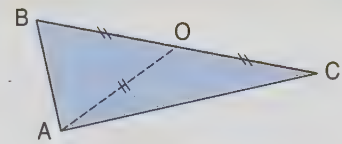
Dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse mesure la moitié de l'hypoténuse.



Sachant que ABC est rectangle en A et que O est le milieu de [BC], on peut dire que $AO = \dfrac{BC}{2}$.

PROPRIÉTÉ

Si dans un triangle la médiane relative à un côté mesure la moitié de ce côté, **alors** le triangle est rectangle.



Sachant que O est le milieu de [BC] et que $AO = \dfrac{BC}{2}$ on peut dire que ABC est rectangle en A.

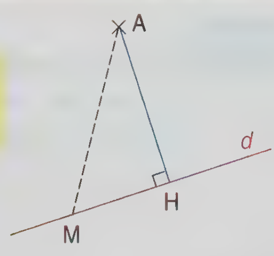
2 Distance d'un point à une droite

PROPRIÉTÉ

Le point d'une droite *d*, le plus proche d'un point A donné, est le pied de la perpendiculaire à *d* passant par A.

DÉFINITION

AH est la distance du point A à la droite *d*.

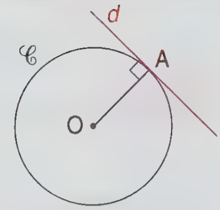


Si $M \in d$ alors $AM \geqslant AH$.

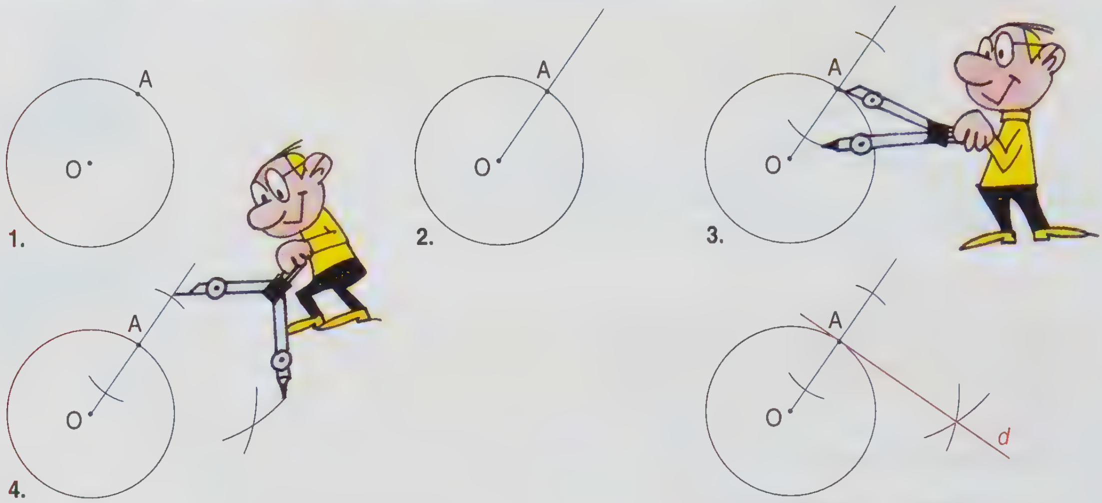
3 Tangente à un cercle

DÉFINITION

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et A un point de $\mathscr{C}$.
La tangente en A au cercle $\mathscr{C}$ est la droite passant par A et perpendiculaire à (OA).



Construction de la tangente en un point à un cercle



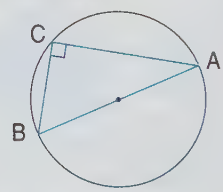
5. *d* est tangente au cercle en A.

Méthodes

Démontrer

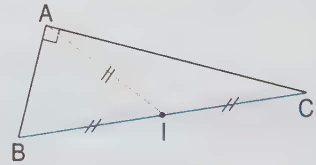
M 8 Comment démontrer qu'un point appartient à un cercle ?

Si le triangle ABC est rectangle en C alors C appartient au cercle de diamètre [AB].



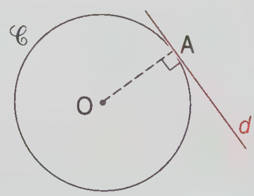
M 16 Comment démontrer que deux segments ont même longueur ?

Si [AI] est la médiane relative à l'hypoténuse [BC] du triangle rectangle ABC, alors AI = BI = IC.



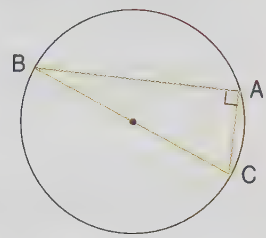
M 24 Comment démontrer que deux droites sont perpendiculaires ?

Si *d* est tangente en A au cercle $\mathscr{C}$ de centre O alors $(OA) \perp d$.



M 26 Comment démontrer qu'un triangle est rectangle ?

- Si A est sur le cercle de diamètre [BC] alors le triangle ABC est rectangle en A.
- Si, dans un triangle, la médiane relative à un côté mesure la moitié de ce côté alors le triangle est rectangle.



Exemple

Démonstration

Avec une tangente

ÉNONCÉ

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et A un point du cercle $\mathscr{C}$. Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de diamètre [OA]. Une droite passant par O coupe $\mathscr{C}'$ en E et $\mathscr{C}$ en deux points. Soit I l'un de ces points. On note d la tangente en I à $\mathscr{C}$.

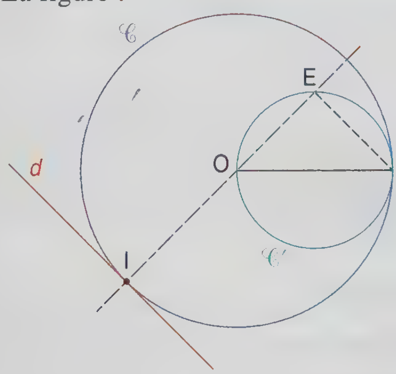
Montrer que $d \,//\, (EA)$.

Stratégie

Pour démontrer que les droites d et (EA) sont parallèles, nous allons montrer que ces deux droites sont perpendiculaires à une même droite : la droite (OI).
Pour cela, nous utiliserons la propriété d'un triangle « inscrit dans un demi-cercle », puis la définition de la tangente.

Solution

La figure :



- Par hypothèse, E est sur le cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre [OA]. Donc le triangle OEA est rectangle en E.
- Par hypothèse, d est tangente au cercle $\mathscr{C}$, au point I, donc par définition d'une tangente : $d \perp (OI)$.
- On a donc $(EA) \perp (OE)$ et $d \perp (OI)$. De plus les droites (OE) et (OI) sont confondues.

Or on sait que : deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles.
Donc $d \,//\, (EA)$.

Remarques

Pour le point I, on choisit le point qui donne la figure la plus claire.

Voir la 2[e] propriété du **1. A** page 187.

On fait ici un petit bilan des résultats montrés précédemment.

CONSOLIDER

1 Un triangle ABC est tel que mes $(\widehat{A}) = 21°$ et mes $(\widehat{B}) = 69°$. Que dire de ce triangle ?

2 Soit un triangle ABC. Les trois hauteurs (AA′), (BB′) et (CC′) se coupent en H. Citer les 12 triangles rectangles de cette figure.

3 Construire le triangle ABC tel que :
AB = 7 cm, AC = 5 cm et BC = 11 cm.
Tracer, à l'aide de l'équerre, la hauteur [BH] issue de B.

4 Tracer un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de 10 cm de diamètre. Placer trois points A, B et C sur $\mathscr{C}$.
Combien mesure le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC ?

5 Soit un triangle ABC. Construire la médiatrice Δ de [BC] et la hauteur [AH] issue de A. Pourquoi a-t-on (AH) // Δ ?

6 Construire un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 3 cm et AC = 7 cm.
Construire le cercle circonscrit au triangle ABC.

SAVOIR FAIRE

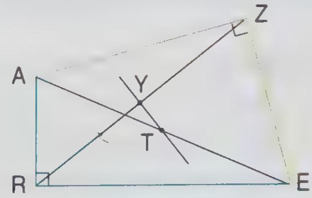
Triangle rectangle, médiane, cercle

7 Soit un triangle quelconque ABC et L le milieu de [BC].
Construire la hauteur [CH]. Démontrer que le triangle BHL est isocèle. Citer un autre triangle isocèle de cette figure.

8 Soit un triangle ABC rectangle en A, et soit I, J et K les milieux de [AB], [AC] et [BC].
Montrer que la médiane [AK] a la même longueur que [IJ].

9 Soit un triangle ABC rectangle en A et soit I le milieu de [BC].
Démontrer que le cercle de diamètre [IB] coupe [AB] en son milieu.

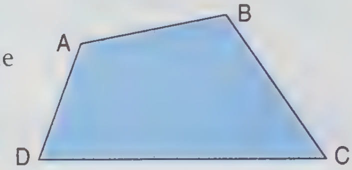
10 Soit un triangle ARE rectangle en R et un triangle AZE rectangle en Z.
Soit T le milieu de [AE] et Y le milieu de [ZR].



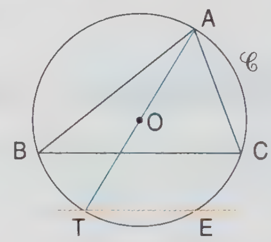
Démontrer que (YT) est la médiatrice de [ZR].

11 Soit un quadrilatère ABCD. Le cercle de diamètre [BC] coupe (DC) en E et le cercle de diamètre [AD] coupe (DC) en F.

Démontrer que (AF) // (BE).

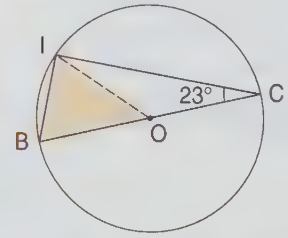


12 Soit un triangle ABC et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit. Soit O le centre du cercle circonscrit et T le point diamétralement opposé à A. Par T, on mène la parallèle à (BC) ; cette parallèle recoupe $\mathscr{C}$ en E.



Montrer que (AE) est la hauteur du triangle ABC, issue de A.

13 L'angle $\widehat{C}$ mesure 23°.

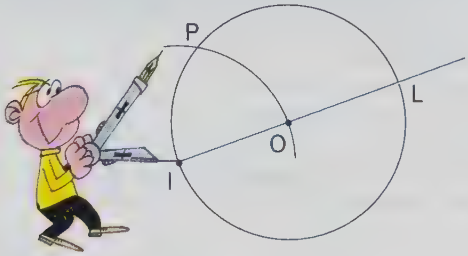


Donner la mesure des angles du triangle OBI. Justifier.

14 Le triangle EDJ est tel que :
mes$(\widehat{D}) = 59°$ et mes $(\widehat{J}) = 31°$.
Soit U le milieu de [DJ].
Calculer les angles du triangle JEU.

15 Soit ABC un triangle rectangle en A et I le milieu de [BC]. Combien mesure le côté [AB] sachant que AC = 7 cm et que la médiane [AI] mesure 3,7 cm ?

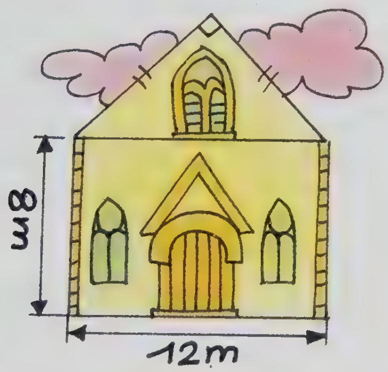
16 On réalise la figure suivante avec un cercle de 7 cm de rayon.



Calculer PL à 1 mm près.

17 ABC est un triangle quelconque ; H et K sont les pieds des hauteurs issues respectivement de B et C. Soit I le milieu de [BC].
a) Faire une figure.
b) Démontrer que le triangle HIK est isocèle.

18 *La façade de l'église*
La façade d'une église a la forme suivante.

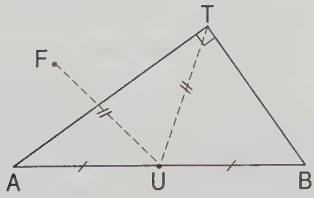


Calculer la hauteur totale de la façade.

19 Construire un triangle ISO isocèle en S.
Soit U le symétrique de I par rapport à S.
Que dire du triangle OUI ? Justifier !

20 *Rumeurs*
Il paraît que : « L'aire d'un triangle rectangle est égale au produit de la médiane relative à l'hypoténuse par la hauteur issue de l'angle droit. »
Êtes-vous d'accord avec cette rumeur ?
Justifiez votre réponse.

21 Soit le triangle TAB rectangle en T, soit U le milieu de [AB]. On suppose que le triangle FUT est isocèle en U.



Démontrer que FAB est rectangle en F.

Tangentes à un cercle

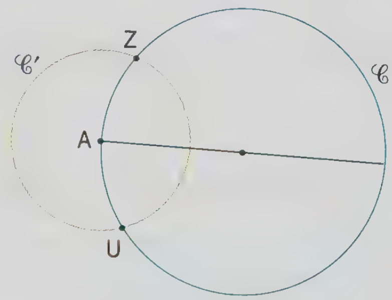
22 Construire un triangle ABC tel que :
AB = 8 cm, mes$(\widehat{A})$ = 37° et mes$(\widehat{B})$ = 53°.
Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon AC.
Montrer que (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en C.

23 Soit le triangle RIZ et [ID] la hauteur issue de I. Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [ID] coupe (IZ) en E.
a) Faire une figure.
b) Que dire de la droite [ZR] pour le cercle $\mathscr{C}$? Justifier.
c) Que dire du triangle DIE ? Justifier.

24 Soit A et B deux points d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.
La médiatrice de [AB] coupe $\mathscr{C}$ en deux points ; soit P l'un de ces points.
a) Construire à la règle et au compas la tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point P.
b) Démontrer que cette tangente est parallèle à (AB).

25 Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [EF] et soit I le milieu de [EF].
Soit L un point de $\mathscr{C}$ et J le milieu de [EL]. La droite (IJ) coupe $\mathscr{C}$ en deux points.
Soit T l'un de ces points.
a) Construire la figure et, en particulier, la tangente à $\mathscr{C}$ en T.
b) Montrer que cette tangente est perpendiculaire à (LF).

26 Soit un segment [AB]. Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] coupe un cercle $\mathscr{C}'$ de centre A en Z et U.



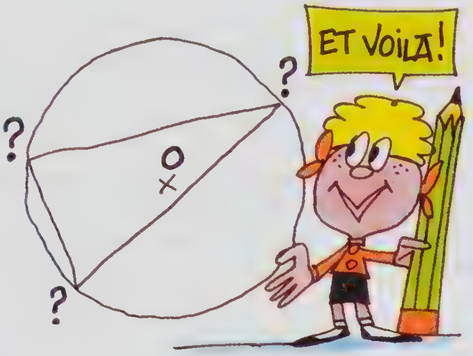
Montrer que la droite (ZB) est tangente au cercle $\mathscr{C}'$ en Z.

Constructions

27 *Le cercle à centre disparu*
Un cercle a été tracé mais son centre a disparu (l'usure du temps sans doute).
Comment, à l'aide de la seule équerre (non graduée) et d'un crayon, peut-on retrouver son centre ?

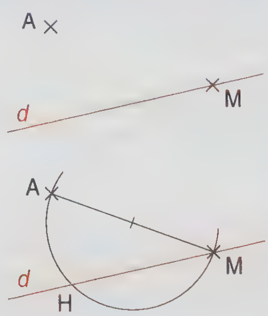
28 *Construction de tangentes*
Soit un cercle $\mathscr{C}$ de rayon 3 cm et de centre P et un point A tel que AP = 7 cm. Tracer le cercle de diamètre [PA] ; celui-ci coupe $\mathscr{C}$ en U et S.
a) Démontrer que les droites (AU) et (SA) sont tangentes au cercle $\mathscr{C}$.
b) Calculer AU à 1 mm près.

29 Charlotte essaie de construire un triangle rectangle inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$, et tel que le centre O soit à l'intérieur du triangle.
Pourquoi n'est-ce pas très raisonnable ?



30 Pour obtenir le point de la droite *d*, le plus proche du point A, Loïc réalise la construction suivante.

1. Loïc choisit M sur *d*.
2. Le cercle de diamètre [AM] coupe *d* en H.
Loïc dit : « H est le point cherché ! »



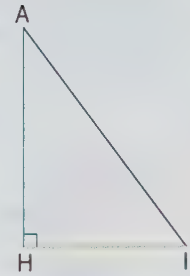
Cette construction est-elle correcte ? Justifier.

31 *Une construction du centre du cercle circonscrit*
Soit ABC un triangle.
Voici un programme de construction.

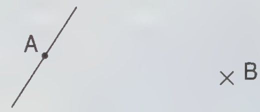
1. Construire, à l'aide de l'équerre, la perpendiculaire à (AB) passant par B.
2. Construire, à l'aide de l'équerre, la perpendiculaire à (AC) passant par C.
3. Ces deux perpendiculaires se coupent en S. Construire le milieu de [AS]. C'est le centre du cercle circonscrit à ABC !

a) Réaliser cette construction.
b) Justifier que l'on obtient bien le centre du cercle circonscrit à ABC.

32 *De beaux restes*
D'un triangle ABC rectangle en A, il ne reste que le triangle AHI formé du sommet A, de la médiane [AI] et de la hauteur [AH].
Retrouver ce triangle en utilisant la règle et le compas.



33 *De beaux restes (bis)*
Du cercle $\mathscr{C}$ avec sa tangente en A, il ne reste que la tangente, le point A et un point B du cercle.



Retrouver ce cercle en utilisant la règle et le compas.

34 Soit un triangle ABC et I le milieu de [BC]. Construire le point M de (AI) tel que MBC soit rectangle en M.

35 **a)** Construire le cercle circonscrit à un triangle dont les dimensions sont :
88 mm ; 105 mm et 137 mm.
b) Calculer le rayon de ce cercle.

RÉSULTATS

8 On a $AK = \dfrac{BC}{2}$ (voir propriété, en **1.B**, p. 187) et $IJ = \dfrac{BC}{2}$ (droite des milieux).
D'où le résultat !

13 $\text{mes}(\widehat{B}) = 67°$; $\text{mes}(\widehat{BIO}) = 67°$ et $\text{mes}(\widehat{BOI}) = 46°$.

15 $BC = 2 \times 3{,}7$ soit $BC = 7{,}4$ cm
donc $AB^2 = 7{,}4^2 - 7^2 = 5{,}76$
d'où $AB = 2{,}4$ cm.

23 **b)** La droite (ZR) est tangente en D au cercle $\mathscr{C}$.
c) Le triangle DIE est rectangle en E (voir la propriété p. 187 en **1.A**).

33 Le centre du cercle est situé sur la médiatrice de [AB] et sur la perpendiculaire à la tangente passant par A (voir la définition p. 188).

DÉMONTRER

Ça se voit sur le dessin !

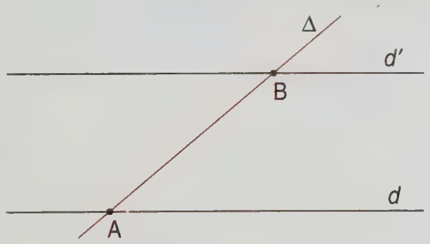
36 *Cercle vicieux*
Construire le triangle VIL tel que VL = 8,1 cm, IL = 4,4 cm et VI = 6,8 cm.
Tracer le cercle de diamètre [VL].
Que remarque-t-on ? Le triangle VIL paraît-il rectangle ? Est-il rectangle ?

37 *Cercle vicieux (bis)*
a) Construire le triangle MAL tel que AL = 7,8 cm, AM = 4,6 cm et LM = 6,3 cm, et construire le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AL].
b) Que remarque-t-on ? Le point M paraît-il être situé sur $\mathscr{C}$?
Est-il situé sur $\mathscr{C}$? Justifier.

38 Construire le triangle AIE tel que AI = 50 mm, IE = 65 mm et AE = 82 mm.
Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon AI.
La droite (IE) est-elle tangente à $\mathscr{C}$ en I ?

Démonstrations

39 *Deux parallèles et un cercle*
Voici une figure et un texte.

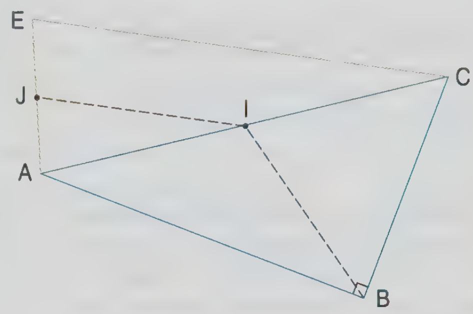


Une droite Δ coupe deux droites parallèles d et d' en A et B. Le cercle de diamètre [AB] recoupe d en U et d' en E.

Que dire du quadrilatère AUBE ? Justifier.

Voici quelques idées pour résoudre le problème.
a) Compléter la figure.
b) Expliquer pourquoi (BU) est perpendiculaire à d.
c) De même expliquer pourquoi l'angle $\widehat{BEA}$ est droit, ainsi que les angles $\widehat{EAU}$, et $\widehat{UBE}$ (voir **Pages bleues**, p. 238).
d) Conclure (voir **Pages bleues**, p. 243).

40 *Demo-puzzle*
Voici une figure et un texte.



Dans cette figure :
- ABC est un triangle rectangle en B et AEC est un triangle isocèle en C ;
- I est le milieu de [AC] et J celui de [AE].

Montrer que I est équidistant de B et de J.

a) Que signifie : I est équidistant de B et de J ?
b) Ordonner les 8 phrases suivantes pour obtenir une démonstration correcte. (Commencer par la phrase (7).)

(1) Or par hypothèse le triangle AEC est isocèle en C.
(2)[BI] est la médiane relative à l'hypoténuse de ABC.
(3) Donc EC = AC.
(4) Par la propriété de la droite des milieux dans le triangle ACE on a $IJ = \frac{1}{2} EC$.
(5) Donc $IB = \frac{1}{2} AC$.
(6) Mais dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse mesure la moitié de l'hypoténuse.
(7) Par hypothèse, I est le milieu de [AC], et J celui de [AE].
(8) D'où finalement IJ = IB.

41 Voici un texte.

Soit AZE un triangle, R et T les milieux de [AZ] et [AE].
La médiatrice de [AE] coupe le cercle de diamètre [RT] en Y.
La droite (RY) coupe (EZ) en U.
Montrer que U est le milieu de [EZ].

a) Construire une figure claire.
b) Quelles sont les hypothèses ?
c) Faire la démonstration en citant les outils utilisés.

CHERCHER

Avec des quadrilatères

42 Soit un triangle ABC rectangle en A, soit I le milieu de [AC], et M celui de [BC].

a) Construire le symétrique E de M par rapport à I.

b) Montrer que AECM est un losange.

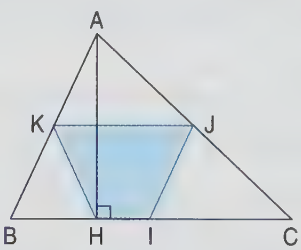
c) *Application numérique.* On suppose que AB = 12 m et AC = 35 m. Calculer le périmètre puis l'aire du losange AECM.

43 Soit un triangle ABC rectangle en A. Soit I le milieu de [BC], J celui de [AI], K celui de [AC] et L celui de [IC].

a) Démontrer que IJKL est un losange.

b) *Application numérique.* On suppose que AB = 8 cm et AC = 15 cm.
Calculer alors le périmètre puis l'aire du losange IJKL.

44 ABC est un triangle tel que AB < AC. H est le pied de la hauteur issue de A.
Les points I, J, K désignent les milieux de [BC], [AC] et [AB].



Démontrer que le quadrilatère HIJK a deux côtés parallèles et les autres de même longueur. (C'est un trapèze isocèle.)

45 *L'aire de RIO et de LYON*
Soit un triangle RIO rectangle en O et soit L le milieu de [RI]. Le cercle de diamètre [OL] recoupe [OI] en Y et [OR] en N.

a) Faire une figure.

b) Montrer que (LY) // (OR) puis que 2 LY = OR.

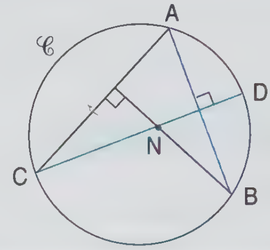
c) Montrer que LYON est un rectangle.
Montrer que l'aire de RIO vaut deux fois l'aire de LYON.

46 Le parallélogramme CINQ est tel que la diagonale (CN) est perpendiculaire au côté (NI). Soit A le milieu de [CI] et E le milieu de [NQ].

a) Construire une figure.

b) Montrer que le quadrilatère CANE est un losange.

47 Soit [AB], une corde d'un cercle $\mathscr{C}$, et soit [CD], le diamètre perpendiculaire à (AB).
La perpendiculaire à (AC), passant par B, coupe (CD) en N.



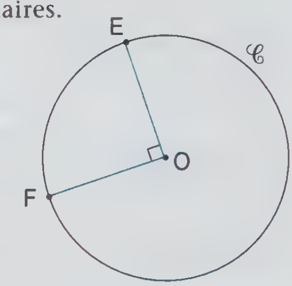
Démontrer que le quadrilatère ANBD est un losange.

Tangentes à un cercle

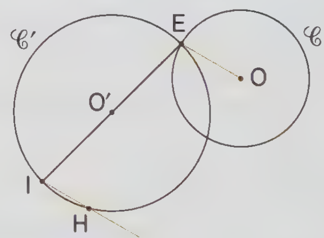
48 Les rayons [OE] et [OF] du cercle $\mathscr{C}$ de centre O sont perpendiculaires.

a) Construire les tangentes en E et F au cercle $\mathscr{C}$. Ces tangentes se coupent en A.

b) Que dire du quadrilatère AEOF ? Justifier.

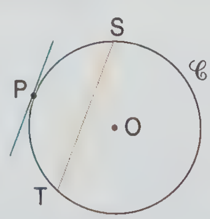


49 Le point E est commun aux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre O et O′ (voir figure).
Soit I le symétrique de E par rapport à O′.
La droite parallèle à (EO) passant par I coupe $\mathscr{C}'$ en I et en H.



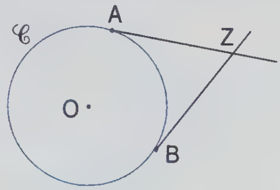
Montrer que (EH) est tangente en E au cercle $\mathscr{C}$.

50 Soit un point P d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et [ST] une corde de $\mathscr{C}$.



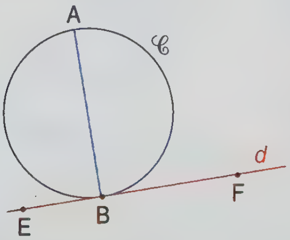
Montrer que si la tangente en P au cercle $\mathscr{C}$ est parallèle à (ST), alors (OP) est la médiatrice de [ST].

51 a) Tracer un cercle 𝒞 de centre O et de 3 cm de rayon. Placer deux points A et B sur le cercle 𝒞 (voir la figure).



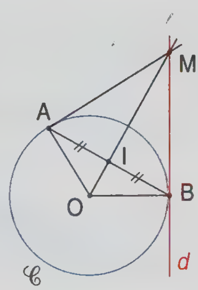
Construire à la règle et au compas les tangentes à 𝒞 en A et B. Elles se coupent en Z.
b) Soit I le milieu de [OZ]. Montrer que I est équidistant de A et B.
c) En déduire que (OZ) est la médiatrice de [AB] puis que ZA = ZB.

52 Voici une figure dans laquelle la droite *d* est tangente en B au cercle 𝒞 de diamètre [AB]. E et F sont sur la droite *d*. La droite (AE) coupe 𝒞 en C et la parallèle à (BC) passant par F coupe (AB) en H.



a) Reproduire la figure.
b) Montrer que (AF) est perpendiculaire à (EH).

53 *Avec une symétrie axiale*
Dans la figure ci-contre, la droite *d* est tangente en B au cercle 𝒞 de centre O. Soit A un point du cercle 𝒞 et I le milieu de [AB]. La droite (OI) coupe *d* en M.
Montrer que (AM) est tangente à 𝒞 en A.

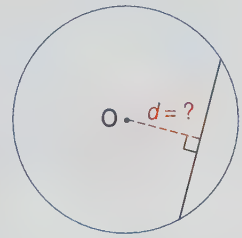


Divers

54 Soit un parallélogramme LHOP. Les cercles de diamètre [LH] et [PL] se coupent en L et en F.
a) Faire une figure.
b) Démontrer que P, F et H sont alignés.

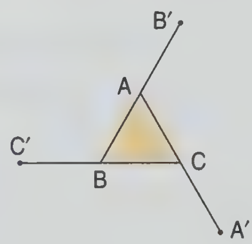
55 *Partage équitable*
Comment partager un triangle rectangle en deux triangles isocèles de même aire ?

56 *Distance d'un point à une droite*
Soit un cercle de centre O et de rayon 3,4 cm.
À quelle distance du point O doit-on tracer une corde pour qu'elle mesure 5 cm ?



57 *Le cercle des cinq points*
Soit ABC un triangle rectangle en A. Démontrer que le sommet A, le pied H de la hauteur issue de A et les milieux des trois côtés sont situés sur un même cercle.

58 *Concours*
ABC est un triangle équilatéral de 1 dm de côté. A est le milieu de [BB′], B celui de [CC′] et enfin C celui de [AA′].
Alors A′B′C′ est un triangle équilatéral dont le côté mesure :
$\boxed{A}$ 3 dm $\boxed{B}$ $\sqrt{7}$ dm $\boxed{C}$ 2 dm.



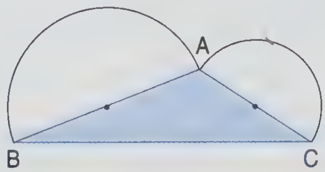
59 *Ne pas perdre le nord*
Soit EST un triangle. Les hauteurs issues de E et de S se coupent en O. La droite (OT) coupe la droite (ES) en U. Soit D le milieu de [TS]. Démontrer que le triangle SUD est isocèle.

60 Un triangle a un angle de 60° et il est inscrit dans un cercle dont un diamètre est un côté du triangle.
a) Déterminer les deux autres angles du triangle.
b) Supposons que le cercle a 6 cm de rayon. Calculer les trois côtés du triangle.

61 Construire le triangle ABC tel que AB = 4 cm, BC = 3,4 cm et AC = 6 cm. Construire les milieux I et J de [AB] et de [AC], puis le pied H de la hauteur issue de A.
Calculer le périmètre du triangle HIJ.

62 Soit un cercle 𝒞 de centre I et V un point de 𝒞. On note 𝒞′ le cercle de diamètre [IV]. Une droite passant par V coupe 𝒞′ en A et 𝒞 en R.
Démontrer que A est le milieu de [VR].

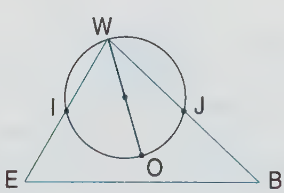
63 Les côtés du triangle ABC mesurent :
AB = 6 cm, AC = 4 cm et BC = 9 cm.
La droite (BA) recoupe le demi-cercle de diamètre [AC] en F, et la droite (AC) recoupe le demi-cercle de diamètre [AB] en E. Les droites (EB) et (CF) se coupent en G.



a) Compléter la figure.
b) Démontrer que (AG) est perpendiculaire à (BC).

64 *Un cercle à la hauteur*
Soit un triangle ABC (prendre par exemple AB = 8 cm, BC = 11 cm et AC = 9 cm).
a) Construire le cercle de diamètre [BC] qui coupe (AB) en I et (AC) en J.
b) Démontrer que [CI] et [BJ] sont des hauteurs du triangle ABC.
c) Construire la troisième hauteur du triangle ABC.
Ainsi, à l'aide d'un cercle, on peut tracer les trois hauteurs d'un triangle.

65 Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle WEB.



Démontrer que le cercle de diamètre [OW] coupe les côtés [WB] et [WE] en leurs milieux.

66 Le triangle ABC est équilatéral. On note H le milieu de [BC] et M celui de [AH]. Soit L le pied de la hauteur du triangle ABH, issue de H.
a) Construire la figure.
b) Démontrer que le triangle MLH est équilatéral.

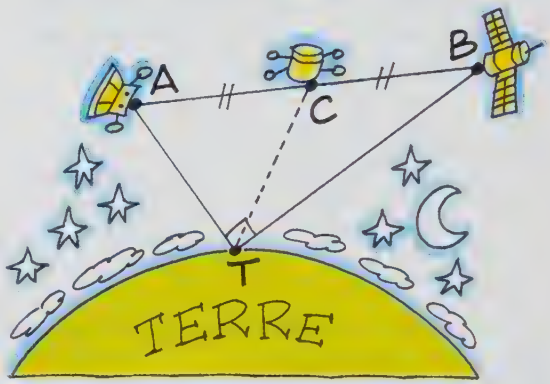
Avec des coordonnées

67 Le plan est muni de deux axes perpendiculaires se coupant en O.
a) Placer les points de coordonnées A (– 2 ; 0), B (0 ; 4), D (8 ; 0).
b) Quelles sont les coordonnées du milieu I de [AD] ?
c) Calculer les distances AD et BI.
Que dire du triangle ABD ? Justifier.

68 Soit A le point de coordonnées (8 ; 6) et B le point de coordonnées (– 4,5 ; 6).
a) Montrer que l'origine O est sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 10.
b) Montrer que la droite (OB) est tangente à $\mathscr{C}$ en O.

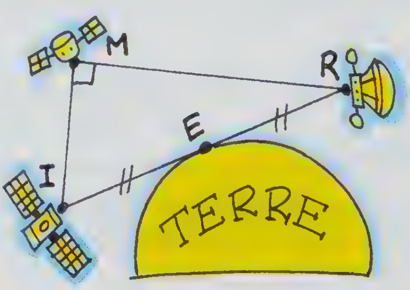
Dans la vie courante

69 *Histoire de satellites (1)*
Le satellite C est au milieu des deux satellites A et B. Par ailleurs (TA) ⊥ (TB).



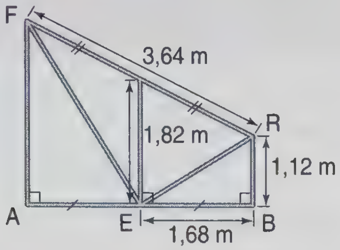
Un signal radio émis de la station T arrive en A en $\frac{1}{60}$ s et en B en $\frac{1}{25}$ s.
Quelle est la distance entre la station T et le satellite C ?
(Un signal radio se propage à 300 000 km par seconde.)

70 *Histoire de satellites (2)*
Trois satellites M, I, R sont disposés de la façon suivante.



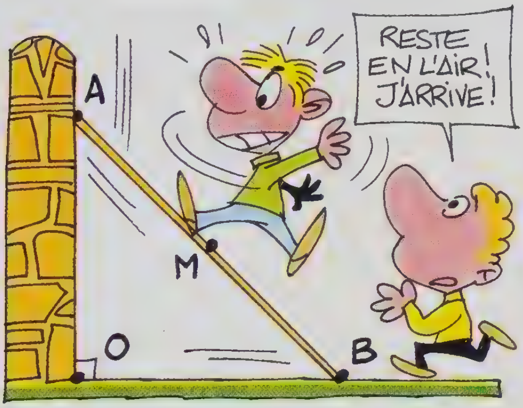
Le satellite M envoie un signal radio qui arrive en E en $\frac{1}{80}$ s.
Quel temps mettra un signal radio pour aller du satellite I au satellite R ? Justifier.

71 *La ferme métallique*
Une ferme métallique a la forme et les dimensions indiquées par la figure.



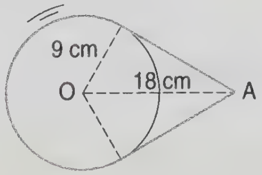
a) Démontrer que le triangle FER est rectangle.
b) Calculer à 1 mm près les longueurs des barres ER, EF et FA.

72 *Et l'échelle chut…*
Une échelle de 3,50 m glisse jusqu'au sol, le point A se déplaçant sur le mur vertical.



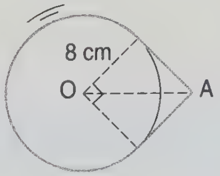
Sur quelle ligne se déplace le milieu M de l'échelle ?

73 *Courroie (1)*
Une courroie s'appuie sur les 2/3 de la poulie de centre O et de rayon 9 cm, et sur la poulie A, suffisamment petite pour être prise pour un point situé à 18 cm de O.

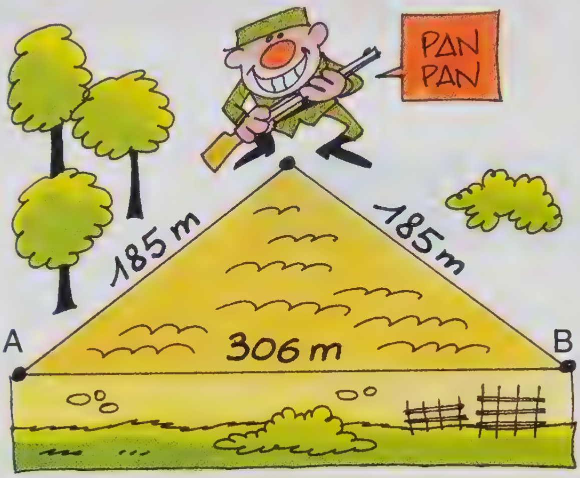


Quelle est la longueur de la courroie, sachant qu'une courroie « quitte » une poulie en étant tangente à la poulie ?

74 *Courroie (2)*
Même exercice, mais la courroie s'appuie sur les 3/4 de la poulie de centre O et de rayon 8 cm.



75 *Le chasseur*
Un chasseur choisit le trajet le plus court pour traverser le champ fraîchement labouré, et rejoindre ainsi le chemin [AB].



Quelle distance va-t-il parcourir ?

COUPS DE POUCE

43 Penser à la droite des milieux.

46 Que représente [NA] pour le triangle CIN ?

47 Démontrer d'abord que ANBD est un parallélogramme, en démontrant que les côtés opposés sont parallèles.

49 Que dire du triangle IHE ?

52 Vous avez dit orthocentre !

53 Vérifier que (OI) est la médiatrice de [AB] puis utiliser la propriété 12 des **Pages bleues**).

56 Pythagore !

57 Soit I le milieu de [BC], J celui de [AC] et K celui de [AB]. Démontrer que le cercle de diamètre [AI] passe par H puis par J et K.

58 Démontrer d'abord que le triangle BCB′ est un triangle rectangle (penser à la médiane) puis considérer C′CB′.

61 Comparer les côtés de HIJ avec ceux de ABC.

62 Soit F le point diamétralement opposé à V dans le cercle $\mathscr{C}$. Démontrer d'abord que (IA) // (FR).

65 Démontrer d'abord que OWE est isocèle et considérer (OI) dans ce triangle.

66 Démontrer d'abord que LM = MH puis que mes $(\widehat{AHL})$ = 60°.

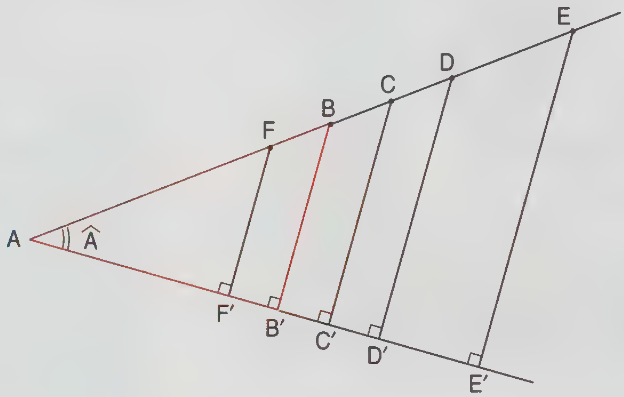
13 Cosinus

Activités

1 À la découverte du cosinus d'un angle aigu

A. Construction

1. Construire un triangle ABB′ rectangle en B′ avec AB = 5 cm et AB′ = 4 cm.



2. Sur la demi-droite [AB), marquer les points C, D, E et F tels que AC = 6 cm, AD = 7 cm, AE = 9 cm et AF = 4 cm.

3. Construire, à l'aide de l'équerre, les points C′, D′, E′ et F′ comme l'indique la figure.

B. Raisonnements et calculs

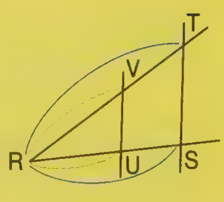
INFORMATION

Lorsque (ST)//(UV), la propriété de Thalès permet d'écrire $\frac{RU}{RS} = \frac{RV}{RT}$.

D'où, en multipliant les deux membres par $\frac{RS}{RV}$:

$\frac{RU}{\cancel{RS}} \times \frac{\cancel{RS}}{RV} = \frac{\cancel{RV}}{RT} \times \frac{RS}{\cancel{RV}}$.

Cela donne en simplifiant : $\frac{RU}{RV} = \frac{RS}{RT}$.



1. Observer la figure du **A.** Est-il vrai que $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$? Pourquoi ?

2. Citer d'autres quotients égaux à $\dfrac{AB'}{AB}$.

3. La valeur de ces quotients dépend de l'angle $\widehat{A}$. C'est un nombre appelé « cosinus de $\widehat{A}$ » et noté $\cos(\widehat{A})$.
Calculer $\cos(\widehat{A})$.

4. Exprimer AC′ en fonction de AC et de $\cos(\widehat{A})$. Calculer AC′.
Calculer pareillement AD′, AE′ et AF′.
Vérifier les résultats en mesurant sur la figure.

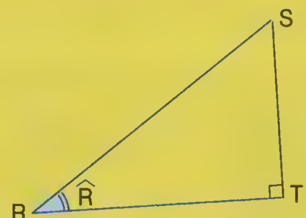
C. Conclusion

Nous venons de voir que, dans un triangle rectangle, on peut calculer la longueur d'un côté en utilisant le cosinus d'un angle aigu.

En s'inspirant du travail fait en **B**, compléter l'encadré suivant avec les termes de la liste :
RS RT $\cos(\widehat{R})$ hypoténuse côté adjacent.

INFORMATION

Soit RST un triangle rectangle en T.



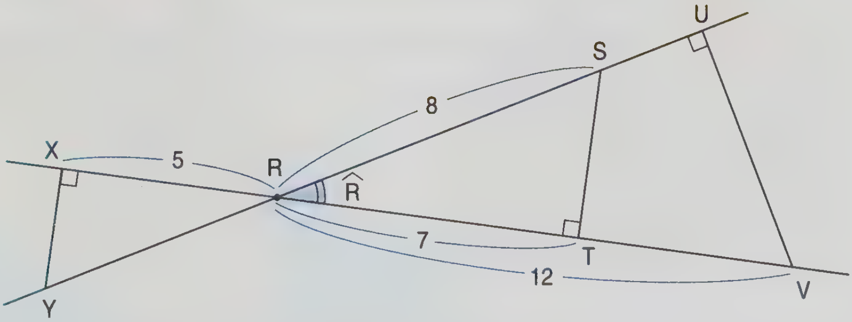
L'angle aigu $\widehat{R}$ est délimité par les deux segments [RS] et [RT] :
- RS est l'**hypoténuse** ;
- RT est le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{R}$.

On a $\cos(\widehat{R}) = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$.

D'où RT = ... × ....

Ou encore RS = $\dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$.

D. Application



1. En considérant le triangle RST, calculer $\cos(\widehat{R})$.

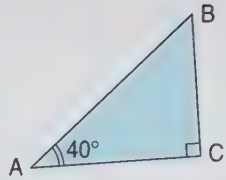
2. En considérant le triangle RUV, calculer RU.

3. Est-ce que $\widehat{XRY}$ et $\widehat{SRT}$ ont même mesure ? Pourquoi ?
En considérant le triangle RXY, calculer RY.

2 Cosinus et calculatrice

A. Comment trouver le cosinus d'un angle donné ?

1. Construire un triangle ABC assez grand, rectangle en C et tel que $\widehat{A}$ mesure 40°. Mesurer les deux côtés qui conviennent, puis calculer une valeur approchée de cos (40°), en effectuant une division.



2. Pour plus de rapidité et de précision, on utilise la touche COS de la calculatrice.
Trouver ainsi une valeur approchée, à 0,001 près, de cos (40°).
(Voir les conseils donnés ci-contre.)

LA MACHINE DOIT ÊTRE EN MODE DEGRÉ.
ON TAPE 4 0 ET COS DANS UN ORDRE QUI DÉPEND DE LA MACHINE : LIRE LE MODE D'EMPLOI OU DEMANDER À QUELQU'UN.

B. Comment trouver un angle dont le cosinus est connu ?

Le plus commode est d'utiliser les touches INV COS de la calculatrice (ou bien la touche COS^{-1}, cela dépend des machines).
Trouver ainsi une mesure approchée de l'angle dont le cosinus est 0,866.

C. Dans les deux sens

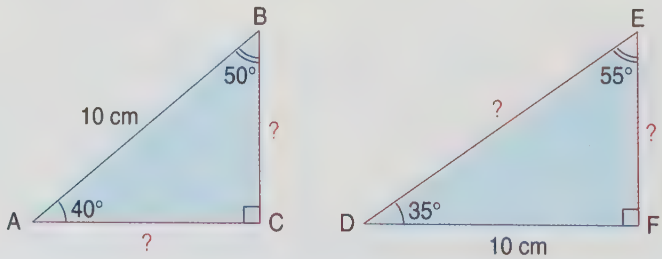
Remplir, à l'aide de la calculatrice, le tableau suivant avec des valeurs approchées à 0,01 près.

Mesures d'angles	10°			50°		60°		70°	
Cosinus		0,9	0,8		0,6		0,4		0,2

3 Mini-problèmes pour utiliser des cosinus

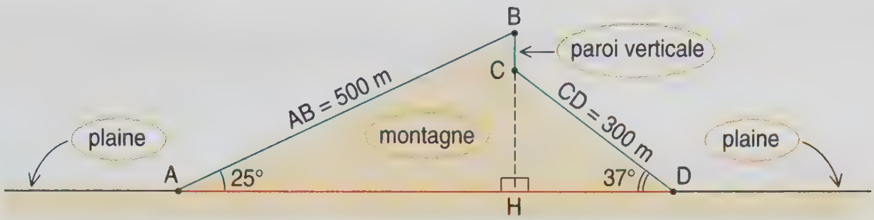
A. Calculs de côtés dans un triangle rectangle

1. Construire les triangles rectangles suivants.



2. Calculer AC et BC à 1 mm près. Vérifier les résultats en mesurant.
3. Calculer DE puis EF à 1 mm près. Vérifier en mesurant.

B. Le tunnel sous la montagne

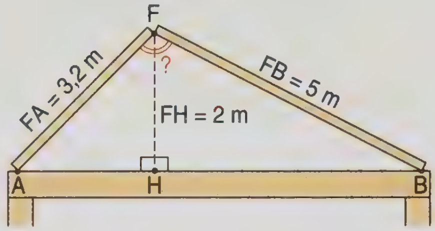


Calculer à 1 cm près la longueur du tunnel allant de A à D.

C. Angle d'une charpente

Joseph a construit la charpente ci-contre.

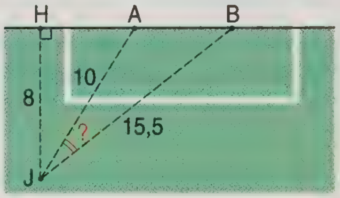
Combien mesure l'angle $\widehat{AFB}$, à 0,01° près ?



D. Angle de tir

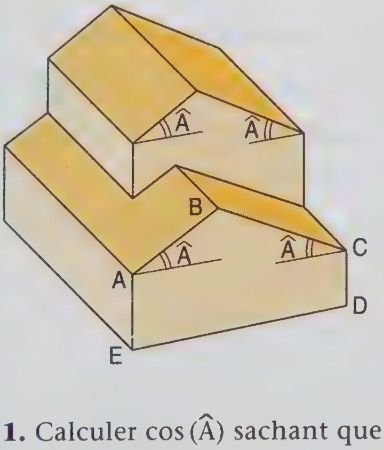
Sur le terrain de football, un joueur J est situé à 8 m de la ligne des buts, à 10 m du poteau A et à 15,50 m du poteau B.

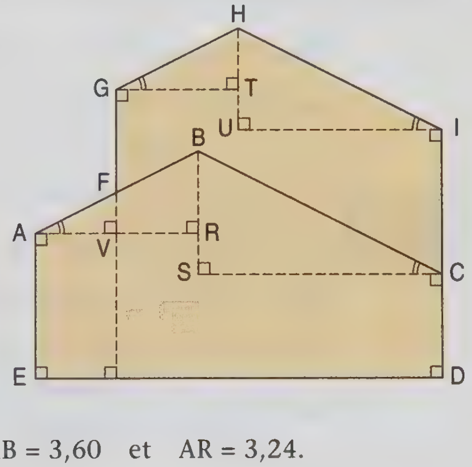
Calculer, à 1° près, la mesure de l'angle de tir $\widehat{AJB}$.



4 Sur les toits

Les toits de cette maison vus en perspective, puis de côté, font tous le même angle $\widehat{A}$ avec l'horizontale.
Toutes les mesures de longueur sont en mètres.





1. Calculer $\cos(\widehat{A})$ sachant que AB = 3,60 et AR = 3,24.
2. Calculer SC sachant que BC = 5,40.
3. Calculer GT sachant que GH = 2,70.
4. Calculer HI sachant que UI = 4,05.
5. Calculer AV, puis AF.

Activités

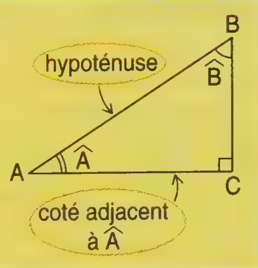
Outils

Cosinus d'un angle aigu

Définition

Dans un triangle ABC rectangle en C, le cosinus de l'angle aigu $\widehat{A}$ est :

$$\cos(\widehat{A}) = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}.$$



Remarque. Pareillement, $\cos(\widehat{B}) = \dfrac{BC}{BA}$.

Propriété

Dans un triangle ABC rectangle en C, on a :

$AC = AB \times \cos(\widehat{A})$ ← côté adjacent = hypoténuse × cosinus

et

$$AB = \frac{AC}{\cos(\widehat{A})}.$$

Méthodes

Calculer...

M 3

Comment calculer une mesure d'angle ?

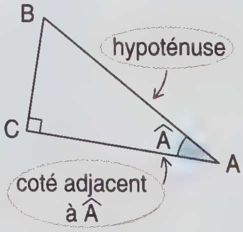
Si on connaît le cosinus d'un angle, alors la calculatrice donne une valeur approchée de la mesure de l'angle, grâce aux touches INV COS ou bien COS^{-1}, selon les modèles. (Attention, la machine doit être en mode « degré ».)

M 10

Comment calculer le cosinus d'un angle aigu ?

Soit ABC un triangle rectangle en C.
Si AB et AC sont connus, alors on peut calculer :

$$\cos(\widehat{A}) = \frac{AC}{AB} \left(= \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \right).$$

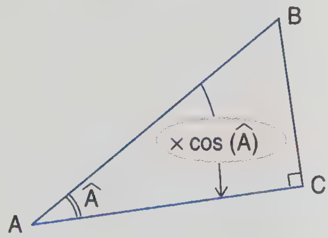


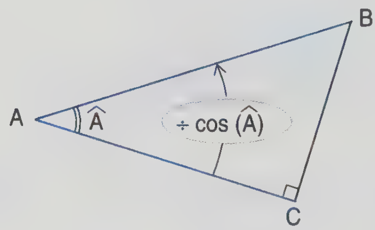
Si on connaît la mesure en degrés d'un angle $\widehat{A}$, alors la touche COS d'une calculatrice donne une valeur approchée de $\cos(\widehat{A})$. (Attention, la machine doit être en mode « degré ».)

M 15 Comment calculer la longueur d'un segment ?

Soit ABC un triangle rectangle en C.

La formule $\cos(\widehat{A}) = \dfrac{AC}{AB}$ donne $AC = AB \times \cos(\widehat{A})$ et $AB = \dfrac{AC}{\cos(\widehat{A})}$.





Ceci permet de calculer AC ou AB.

Exemple

Calculs avec des cosinus

Calculs d'angles et de côtés dans un triangle rectangle

ÉNONCÉ

Soit un triangle ABC rectangle en A tel que BC = 5 et AB = 2.

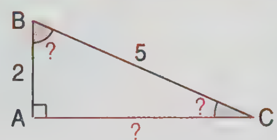
Calculer : $\cos(\widehat{B})$ $\quad$ mes$(\widehat{B})$ $\quad$ mes$(\widehat{C})$ $\quad$ et $\quad$ AC.

Stratégie

Pour mieux « voir » le problème, on dessine une figure en y inscrivant les données.

Le triangle est rectangle, l'hypoténuse et le côté adjacent à $\widehat{B}$ sont connus ; ceci permet de calculer $\cos(\widehat{B})$ et, par suite, tout ce qui est demandé.

Solution



• $\cos(\widehat{B}) = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{2}{5} = \mathbf{0{,}4}$.

• Avec la calculatrice, on obtient mes$(\widehat{B}) \approx \mathbf{66{,}4°}$.

• Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires. D'où :

mes$(\widehat{C})$ = 90° – mes$(\widehat{B}) \approx$ 90° – 66,4°.

Donc mes$(\widehat{C}) \approx \mathbf{23{,}6°}$.

• AC est le côté adjacent à l'angle $\widehat{C}$.

D'où :

$AC = BC \times \cos(\widehat{C})$

$\approx 5 \times \cos(23{,}6°)$

$\approx 5 \times 0{,}916$.

Donc $AC \approx \mathbf{4{,}58}$.

Remarques

Essayer pour vérifier.

Ces résultats ne sont pas exacts mais seulement approchés.

Exercices

CONSOLIDER

1 Trouver x tel que :

a) $3x = 24$ b) $0{,}5x = 2$
c) $8x = 1$ d) $10x = 1{,}5$.

2 Trouver y tel que :

a) $4y = 100$ b) $81 = 0{,}3y$
c) $6 = 8y$ d) $7{,}5 = 4{,}8y$.

3 Trouver x sachant que :

a) $\frac{x}{3} = 6$ b) $25 = \frac{x}{2}$

c) $\frac{x}{0{,}2} = 3$ d) $1{,}5 = \frac{x}{1{,}1}$.

4 Trouver y sachant que :

a) $\frac{y}{0{,}8} = 3{,}5$ b) $2 = \frac{y}{0{,}01}$

c) $\frac{y}{15} = 0{,}1$ d) $0{,}8 = \frac{y}{0{,}5}$.

5 Trouver le nombre x qui vérifie :

a) $4 = \frac{8}{x}$ b) $7{,}5 = \frac{30}{x}$

c) $\frac{9}{x} = 0{,}9$ d) $\frac{1}{x} = 100$.

6 Trouver le nombre y qui vérifie :

a) $\frac{14}{y} = 3{,}5$ b) $\frac{0{,}5}{y} = 2$

c) $1{,}7 = \frac{3{,}4}{y}$ d) $0{,}01 = \frac{0{,}021}{x}$.

7 Trouver le nombre inconnu x tel que :

a) $\frac{3}{5} = \frac{x}{22{,}5}$ b) $\frac{x}{18} = \frac{14}{36}$

c) $\frac{12}{x} = \frac{3}{17}$ d) $\frac{2{,}5}{3} = \frac{5{,}25}{x}$.

8 Trouver le nombre inconnu y tel que :

a) $\frac{0{,}5}{9} = \frac{8}{y}$ b) $\frac{y}{1{,}25} = \frac{0{,}7}{5}$

c) $\frac{1}{y} = \frac{0{,}4}{1{,}71}$ d) $\frac{11}{3{,}2} = \frac{y}{7{,}5}$.

RÉSULTATS

1 a) En divisant les deux membres par 3, on obtient $x = 8$.
b) $x = 4$ **c)** $x = 0{,}125$ **d)** $x = 0{,}15$.

3 a) En multipliant les deux membres par 3, on obtient $x = 18$.
b) $x = 50$ **c)** $x = 0{,}6$ **d)** $x = 1{,}65$.

5 a) En multipliant les deux membres par x, on obtient $4x = 8$.
Puis on divise les deux membres par 4 et on obtient $x = 2$.
b) $x = 4$ **c)** $x = 10$ **d)** $x = 0{,}01$.

7 a) En multipliant les deux membres par 5 et par 22,5, on obtient $67{,}5 = 5x$. (Cela revient à écrire l'égalité des produits en croix.) D'où $x = 67{,}5 \div 5 = 13{,}5$.
b) $x = 7$ **c)** $x = 68$ **d)** $x = 6{,}3$.

SAVOIR FAIRE

Cosinus et calculatrice

Pour les exercices qui suivent, penser à mettre la calculatrice en mode « degré ».
Les résultats trouvés sont des valeurs approchées.

9 Compléter le tableau suivant.

mes ($\hat{a}$)	20°	25°	30°	35°	40°
cos ($\hat{a}$)					

10 Compléter le tableau.

mes ($\hat{a}$)	1°	33°	44°	60°	89°
cos ($\hat{a}$)					

11 Compléter le tableau.

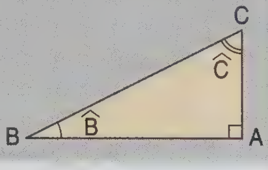
mes ($\hat{a}$)					
cos ($\hat{a}$)	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8

12 Compléter le tableau.

mes ($\hat{a}$)					
cos ($\hat{a}$)	0,22	0,33	0,44	0,55	0,66

Dans un triangle rectangle

Pour les exercices 13 à 21, ABC est un triangle rectangle en A. À l'aide d'une calculatrice, on calculera les longueurs à 0,01 près et les angles à 0,01° près.



13 On sait que BC = 7 et mes $(\widehat{B}) = 41°$.
Calculer cos $(\widehat{B})$ et AB.

14 On sait que BC = 10 et mes $(\widehat{B}) = 72°$.
Calculer AB.

15 On sait que BC = 6 et cos $(\widehat{B}) = 0,85$.
Calculer mes $(\widehat{B})$ et AB.

16 On sait que BC = 6 et AB = 5.
Calculer cos $(\widehat{B})$ et mes $(\widehat{B})$.

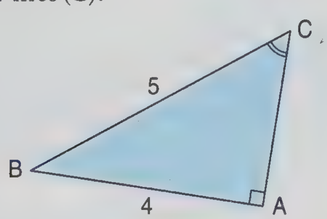
17 On sait que BC = 50 et AB = 31.
Calculer mes $(\widehat{B})$.

18 On sait que AB = 6 et mes $(\widehat{B}) = 38°$.
Calculer cos $(\widehat{B})$ et BC.

19 On sait que BA = 17 et mes $(\widehat{B}) = 46°$.
Calculer BC.

20 On sait que AC = 4 et mes $(\widehat{C}) = 31°$.
Calculer cos $(\widehat{C})$ et BC.

21 Calculer mes $(\widehat{C})$.



RÉSULTATS

13 cos $(\widehat{B}) \approx 0,7547$ AB $\approx 5,28$.

16 cos $(\widehat{B}) = \dfrac{5}{6} \approx 0,8333$

mes $(\widehat{B}) \approx 33,56°$.

18 cos $(\widehat{B}) \approx 0,788$.

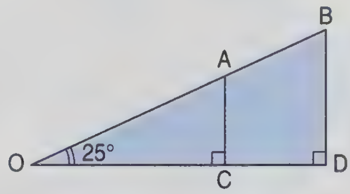
cos $(\widehat{B}) = \dfrac{AB}{BC}$ entraîne BC × cos $(\widehat{B})$ = AB.

D'où BC $= \dfrac{AB}{\cos(\widehat{B})} \approx \dfrac{6}{0,788} \approx 7,61$.

CHERCHER

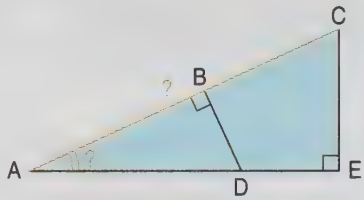
Dans deux triangles rectangles

22 On considère la figure suivante.



a) Si OA = 4, que vaut OC ?
b) Si OD = 5, que vaut OB ?

23 On considère la figure suivante.

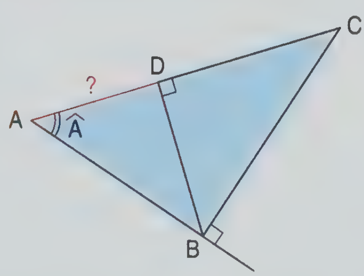


a) Sachant que AB = 4, AD = 5 et AE = 7, calculer AC.
b) Combien mesure l'angle $\widehat{A}$?

24 On considère la figure suivante.

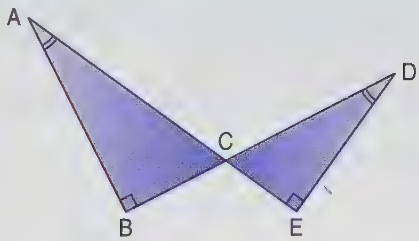
a) Sachant que CH = 5 et AC = 6, calculer BC.
b) Combien mesure l'angle $\widehat{C}$?

25 On considère la figure suivante.



On suppose que AC = 8 et AB = 5. Calculer AD.

26 *Papillon*



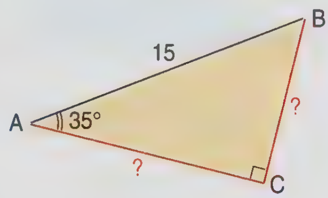
a) Démontrer que les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{D}$ de ce « papillon » ont la même mesure.

b) Construire un « papillon » tel que :
AB = 8 cm, AC = 9 cm et CD = 7 cm.

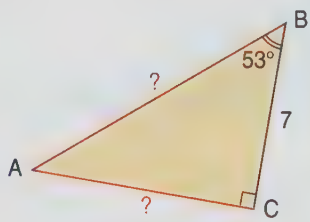
c) Calculer DE à 1 mm près.

Pythagore et cosinus

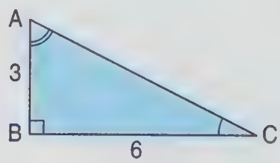
27 a) Calculer AC. b) Calculer BC.



28 a) Calculer AB. b) Calculer AC.



29 a) Calculer AC.

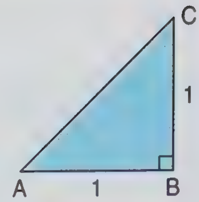


b) Calculer cos ($\widehat{A}$) puis mes ($\widehat{A}$).

c) Calculer cos ($\widehat{C}$) puis mes ($\widehat{C}$).

d) Vérifier les résultats en calculant :
mes ($\widehat{A}$) + mes ($\widehat{C}$).

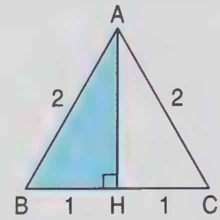
30 *Calcul de cos (45°)*
On considère le triangle rectangle isocèle ci-contre.



a) Calculer AC à 0,001 près.

b) Calculer cos (45°).

31 *Calcul de cos (60°) et de cos (30°)*
On considère le triangle ABH ci-contre, « moitié » du triangle équilatéral ABC.



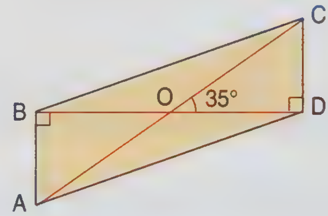
a) Calculer cos (60°).

b) Calculer AH à 0,001 près.

c) Calculer cos (30°).

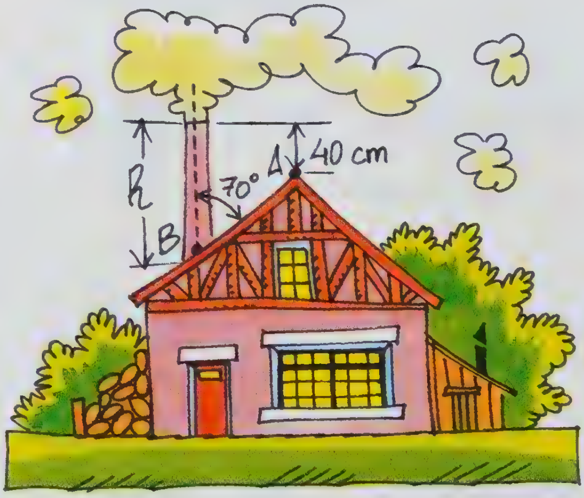
Divers

32 *Dans un parallélogramme*



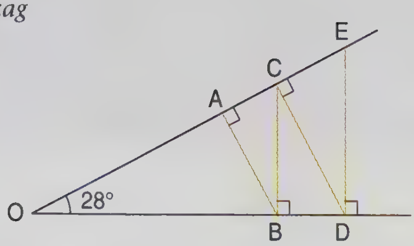
La diagonale [AC] de ce parallélogramme mesure 8 cm.
Combien mesure la diagonale [BD], à 1 mm près ?

33 *Ça va fumer*
Pour qu'une cheminée fonctionne bien, le conduit de fumée doit déboucher à 40 cm au-dessus du faîtage du toit. On sait que le toit fait un angle de 70° avec la verticale et que AB = 3,5 m (voir dessin).



Calculer la hauteur h du conduit de fumée (arrondir à 1 cm près).

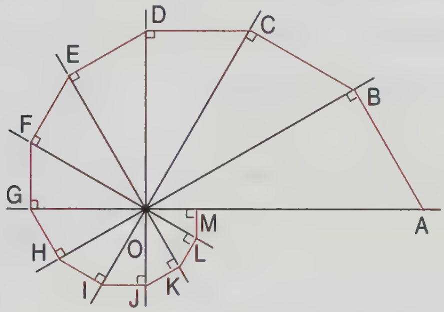
34 *Zigzag*



Sachant que OC = 6 cm, calculer OB, OA, OD et OE, à 1 mm près.

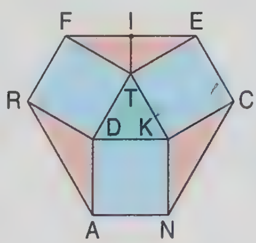
35 *Spirale*

a) Six droites concourantes en un point O partagent le plan en 12 angles de même mesure.
Combien mesure chacun de ces angles ?



b) Tracer ces droites. Prendre un point A sur l'une d'elles à 10 cm de O ; puis construire, à l'aide d'une équerre, douze triangles rectangles comme le montre la figure.
c) Calculer OM à 0,01 cm près.

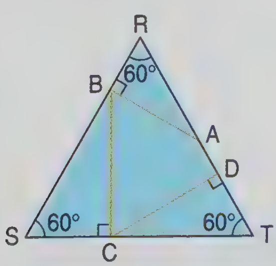
36 *Un étrange hexagone*



a) Construire un triangle équilatéral TDK de 4 cm de côté. Construire ensuite trois carrés comme l'indique la figure et tracer l'hexagone FRANCE.
b) Démontrer que l'angle $\widehat{FTE}$ mesure 120°.
c) Démontrer que l'angle $\widehat{EFT}$ mesure 30°.
d) Soit I le milieu de [FE]. Calculer FI à 0,001 cm près, puis le périmètre de l'hexagone FRANCE.

37 *Dans un triangle équilatéral*

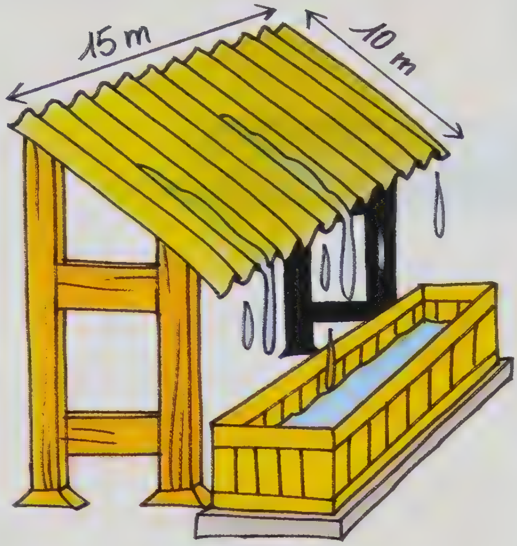
RST est un triangle équilatéral de 8 cm de côté, et RA = 3 cm.



Calculer AD, sachant que cos (60°) = 0,5.

38 *Ô bruit doux de la pluie !*

Lorsque sévit la sécheresse, on recueille l'eau de pluie qui tombe sur les toits pour arroser les jardins ou abreuver les animaux.



Lors de la dernière averse, il est tombé une hauteur de 5 cm d'eau. Comme il n'y avait pas de vent, les gouttes de pluie sont tombées verticalement.
Les dimensions du toit sont indiquées sur le dessin. L'angle de ce toit avec l'horizontale est de 25°.
Quel est alors le volume de l'eau recueillie sur le toit (arrondir à 1 litre près) ?

COUPS DE POUCE

23 a) Exprimer cos $(\widehat{A})$ de deux façons.

24 a) Exprimer cos $(\widehat{C})$ de deux façons.

25 Exprimer cos $(\widehat{A})$ de deux façons.

26 a) Utiliser la propriété 13 des angles opposés par le sommet (**Pages bleues**, p. 241) et la propriété 17 des angles aigus d'un triangle rectangle (**Pages bleues**, p. 242).
c) Deux angles de même mesure ont le même cosinus.

36 c) et **d)** Voir les propriétés du triangle isocèle (**Pages bleues**, p. 242).

37 Calculer successivement RB, BS, SC, CT, TD, AD.

38 Ce qui compte, c'est la surface au sol recouverte par le toit.

14 Translations

Activités

1 Sur un quadrillage

Se munir d'une feuille à petits carreaux.

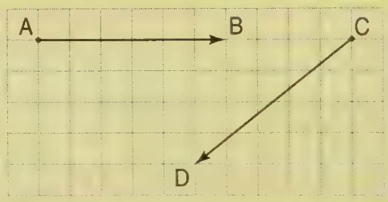
1. Reproduire le motif $\mathcal{M}$ au milieu de la feuille.
Déplacer $\mathcal{M}$ de 6 carreaux vers la droite : on obtient la figure $\mathcal{M}'$.

2. Déplacer $\mathcal{M}$ de 5 carreaux vers la gauche et de 4 carreaux vers le bas : on obtient la figure $\mathcal{M}''$.

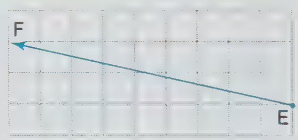
Information

• Dans le 1er cas : on peut dire que $\mathcal{M}'$ est l'image de $\mathcal{M}$ par la translation qui envoie A sur B.

• Dans le 2^{e} cas : on peut dire que $\mathcal{M}''$ est l'image de $\mathcal{M}$ par la translation qui transforme C en D.

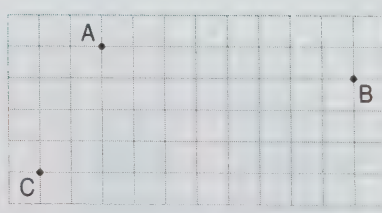


3. Dessiner l'image $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ par la translation qui transforme E en F.



2 Vers une définition

1. Placer 3 points A, B et C, comme, par exemple, dans la figure ci-contre.
Placer l'image C′ de C par la translation qui transforme A en B.
Que dire du quadrilatère ABC′C ?
Que dire alors des diagonales [BC] et [AC′] ?

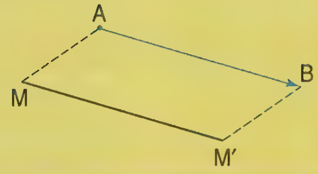


2. Tracer un parallélogramme EFGH.
• Quelle est l'image de H par la translation qui envoie E sur F ?
• Quelle est l'image de G par la translation qui envoie H en E ?

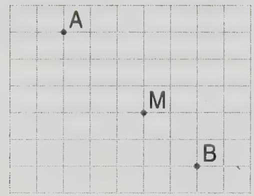
3. Compléter.

DÉFINITION

Soit A, B et M, 3 points **non alignés**.
M′ est l'image de M par la translation qui envoie A sur B
signifie que :
MABM′ est un ....



Que dire des diagonales [BM] et [AM′] ?

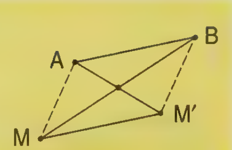


4. Placer trois points A, B et M alignés, comme, par exemple, dans la figure ci-contre.
Placer l'image M′ de M par la translation qui transforme A en B.
Placer le milieu I de [BM].
Que dire de [BM] et de [AM′] ?

5. Compléter la phrase suivante.

DÉFINITION

M′ est l'image de M par la translation qui transforme A en B signifie que [BM] et [AM′] ont ....

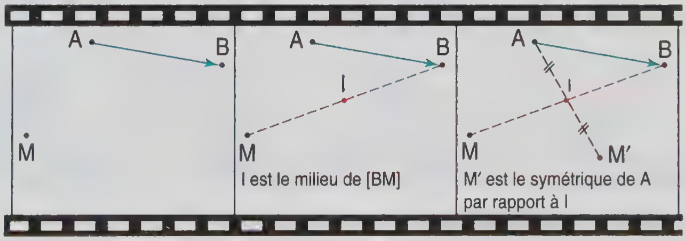


Remarque. Cette définition est valable même si A, B et M sont alignés.

3 Constructions d'images par une translation (1)

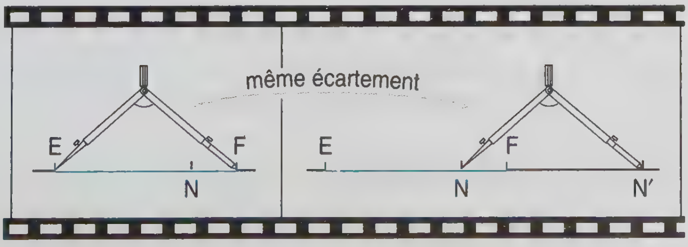
A. Image d'un point

1. Soit A et B deux points distincts et soit M un point en dehors de la droite (AB). Voici une construction de l'image M′ de M par la translation qui envoie A sur B.



Réaliser cette construction. La justifier.
Donner une autre construction de M′, en n'utilisant que le compas.

2. Soit E et F deux points et soit N un point sur la droite (EF). Voici une construction de l'image N′ de N par la translation qui envoie E sur F.



Réaliser cette construction.

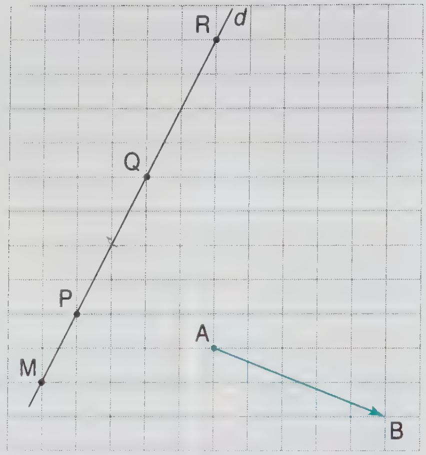
B. Image d'une droite

1. Sur une feuille quadrillée, reproduire le dessin ci-contre.

2. Construire les images des points M, P, Q, R par la translation qui envoie A sur B.

3. Choisir d'autres points sur la droite *d*, dont on construira aussi les images par cette translation.
Que remarque-t-on ?

4. Ce résultat est général.



Compléter la phrase suivante.

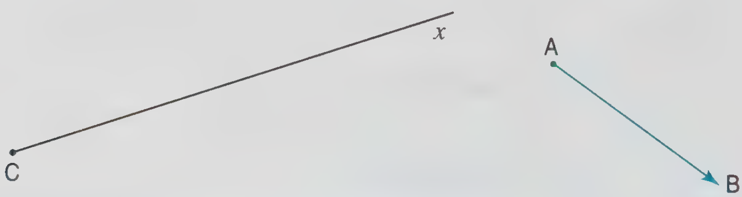
Propriété

L'image d'une droite *d* par une translation est une droite .... à *d*.

4 Constructions d'images par une translation (2)

A. Image d'une demi-droite

1. Marquer deux points distincts A et B et tracer une demi-droite [C*x*).



2. Construire l'image C′ de C par la translation qui transforme A en B. Choisir un point M sur [C*x*), puis construire l'image M′ de M par cette translation.

3. Tracer alors l'image de la demi-droite par la translation qui envoie A sur B.

B. Image d'un segment

1. Marquer deux points distincts A et B et tracer un segment [EF].

2. Soit E′ et F′ les images de E et F par la translation qui transforme A en B. Construire [E′F′].
On admet que l'image du segment [EF] par cette translation est le segment [E′F′].

Comparer les longueurs EF et E′F′.

3. Ce résultat est général.
Compléter la phrase suivante.

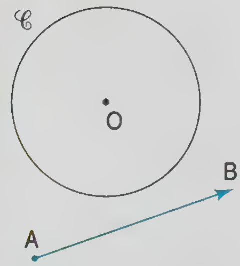
Propriété

Une translation transforme un segment en un .... de même ....

C. Image d'un cercle

INFORMATION

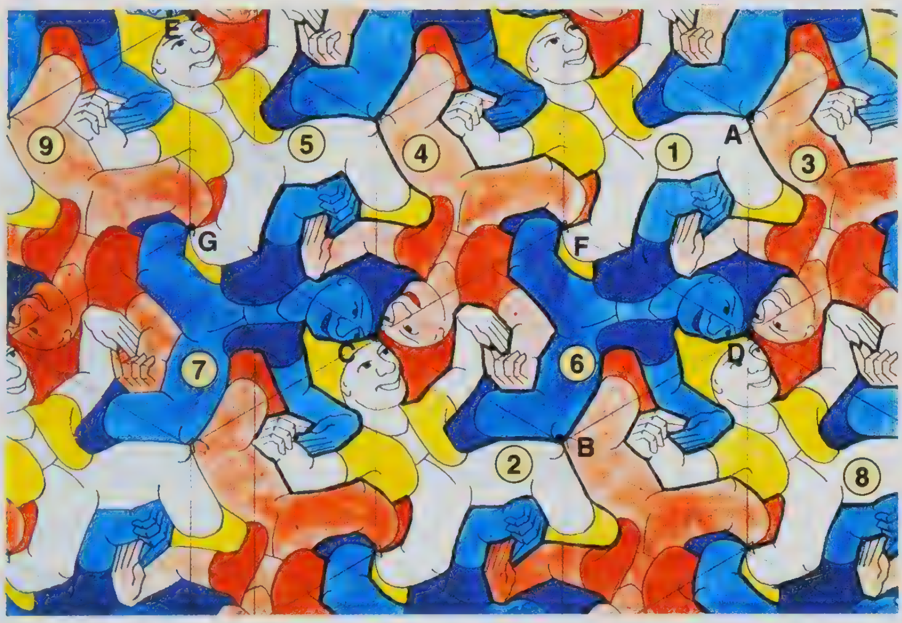
Une translation transforme un cercle $\mathscr{C}$ en un cercle $\mathscr{C}'$ de même rayon, et le centre de $\mathscr{C}'$ est l'image du centre de $\mathscr{C}$ par la translation.



Tracer un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et marquer deux points A et B.
Tracer l'image $\mathscr{C}'$ du cercle $\mathscr{C}$ par la translation qui envoie A sur B.

5 Pavage d'hommes courant

Dans cette activité, au lieu d'écrire « la translation qui transforme A en B », on écrit plus simplement : « la translation t_{AB} ».
Par exemple, en observant le pavage suivant, on peut dire : ② est l'image de ⑧ par la translation t_{DC}.



M. C. Escher (1898-1972), Dessin de symétrie E21, Baarn.

1. Compléter les phrases suivantes.
L'image de ⑤ par la translation t_{ED} est ....
L'image de ⑨ par la translation t_{GF} est ....
② est l'image de ① par ....
⑥ est l'image de ⑦ par ....
③ a pour image .... par la translation t_{DC}.
⑦ a pour image .... par la translation t_{GF}.
② est l'image de .... par la translation t_{EC}.

2. Donner, par leurs numéros, les images de ② par des translations.
Même question avec le bonhomme ④.

3. Donner deux bonshommes dont l'un n'est pas l'image de l'autre par une translation.

6 Frises et translations

ENTRE NOUS

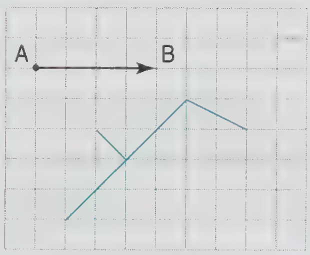
Objectif
Utiliser des translations pour réaliser des frises, en s'appuyant sur des exemples d'architecture romane.

Remarque
Les dessins peuvent éventuellement être réalisés à main levée, ce qui n'exclut pas précision et application.

Des frises ornent souvent les façades de nos églises… (ici celles de Melle et d'Aulnay-de-Saintonge).
Pour concevoir certaines de ces frises, les translations ont souvent été utilisées.
Pour réaliser les frises qui suivent, on commencera par dessiner le motif de base (se munir de papier quadrillé).

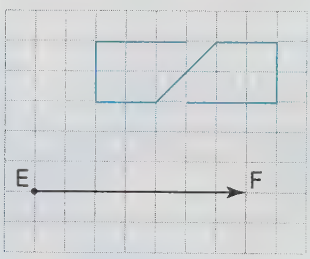
A. Frise n° 1 (Aulnay-de-Saintonge)

Tracer l'image du motif suivant par la translation qui transforme A en B ; recommencer avec le motif obtenu et ainsi de suite…



B. Frise n° 2 (Église St-Hilaire de Melle)

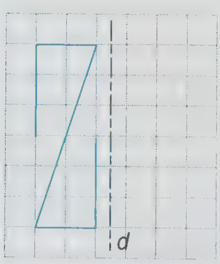
1. Tracer le motif de base suivant.
Ce motif a-t-il des symétries ? Lesquelles ?

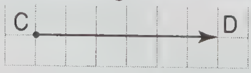


2. Tracer l'image de ce motif par la translation qui envoie E sur F puis recommencer avec le motif obtenu et ainsi de suite…

C. Frise n° 3 (Aulnay)

1. Tracer le symétrique de la figure suivante, par rapport à la droite *d*.
Le motif de base est obtenu en réunissant la figure et son symétrique.



2. Tracer l'image du motif de base par la translation qui transforme C en D 

puis poursuivre la frise.

Note. On pense que les frises, qui peuvent se prolonger indéfiniment dans les deux sens, étaient utilisées pour faire comprendre aux fidèles la notion d'éternité.

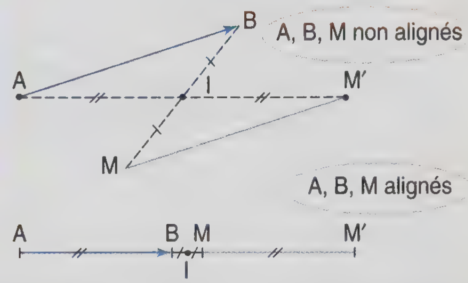
Activités

Outils — Translations

1 Définition et propriétés d'une translation

Définition

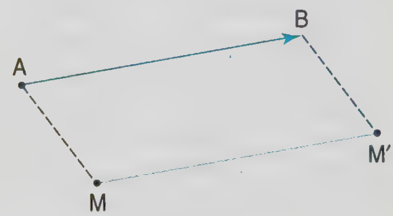
Soit A et B deux points distincts.
L'**image** d'un point M par la translation qui transforme A en B est le point M′ tel que [BM] et [AM′] aient le même milieu.



Remarque. Évidemment l'image de A est B.

Propriété

Soit A, B, M trois points non alignés.
Si M′ est l'image de M par la translation qui transforme A en B, **alors** MABM′ est un parallélogramme.

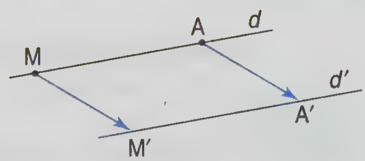


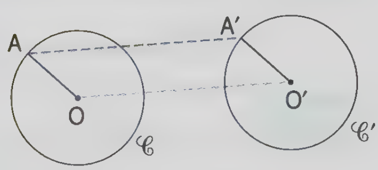
Propriété

Si MABM′ est un parallélogramme, **alors** M′ est l'image de M par la translation qui transforme A en B.

Propriété

Une **translation** transforme :
- une droite *d* en une droite parallèle à *d* ;
- une demi-droite en une demi-droite ;
- un segment en un segment de même longueur ;
- un angle en un angle de même mesure ;
- un cercle en un cercle de même rayon.

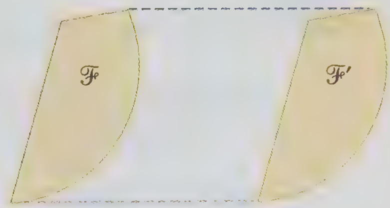




Remarque. La translation, qui transforme 𝒞 en 𝒞′, transforme O en O′.

Propriété

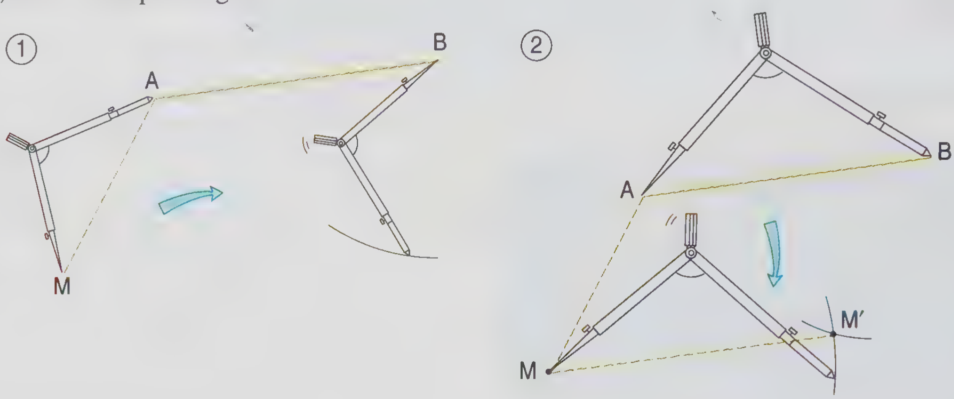
Si une figure ℱ a pour image la figure ℱ′ par une translation, **alors** ℱ et ℱ′ ont la même aire.



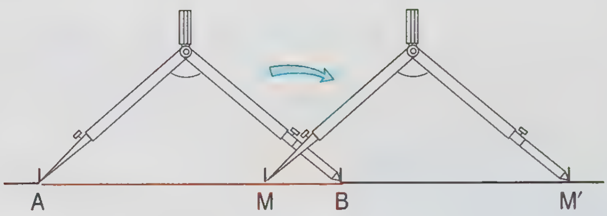
2 Constructions d'images

Construction de l'image M′ d'un point M par la translation qui envoie A sur B.

• Si A, B, M ne sont pas alignés :



• Si A, B, M sont alignés :



Méthodes

Démontrer...

M 2 Comment démontrer que deux angles ont même mesure ?

L'image d'un angle par une translation est un angle de même mesure.

M 16 Comment démontrer que deux segments ont même longueur ?

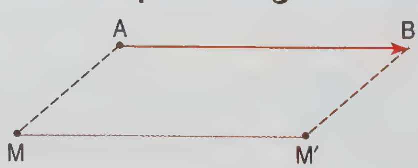
L'image d'un segment par une translation est un segment de même longueur.

M 22 Comment démontrer que deux droites sont parallèles ?

L'image d'une droite *d* par une translation est une droite parallèle à *d*.

M 23 Comment démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ?

Soit A, B et M trois points non alignés. Si M′ est l'image de M par la translation qui transforme A en B, alors ABM′M est un parallélogramme.



Exemple — Construction ; démonstration

Utilisation de la translation

ÉNONCÉ

Soit un triangle ABC rectangle en A et soit le milieu I de [AC].

a/ Construire l'image A′B′C′ de ABC par la translation qui transforme B en I.

b/ Que dire du triangle A′B′C′ ? Justifier.

c/ Démontrer que (AC) ⊥ (A′B′).

Stratégie

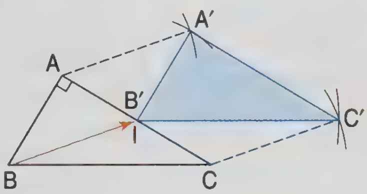
a/ Pour construire A′ on construit le parallélogramme ABIA′ (d'après la définition d'une translation).

- De même pour C′.
- Le cas de B′ est évident.

b/ Utiliser la conservation des angles est la méthode la plus rapide ici.

Solution

a/ Construction :



Notons A′ l'image de A, B′ celle de B, et C′ celle de C. Remarquons que la translation transforme B en I, donc I = B′.

b/ Une translation conserve la mesure des angles donc :

mes $(\widehat{B'A'C'})$ = mes $(\widehat{BAC})$.

Or mes $(\widehat{BAC}) = 90°$.

Donc le triangle A′B′C′ est rectangle en A′.

On peut dire aussi que les deux triangles ont les mêmes dimensions, car une translation transforme un segment en un segment de même longueur.

c/ Une translation transforme une droite en une droite parallèle, donc (AB) // (A′B′).

Mais ABC est un triangle rectangle en A donc, par définition, (AC) ⊥ (AB).

Or, si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Donc (AC) ⊥ (A′B′).

Remarques

Avec le compas on trace un arc de cercle centré en A et de rayon BI, puis un arc de cercle centré en I et de rayon BA.

A′ est à l'intersection de ces deux arcs de cercles.

Par hypothèse, ABC est rectangle en A.

Voir la propriété 3 des **Pages bleues**.

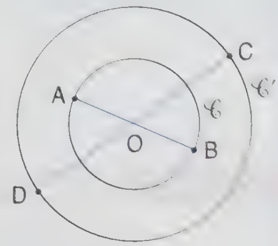
Exercices

CONSOLIDER

Parallélogrammes

1 Construire un triangle VER et sa médiane [EI]. Soit T le symétrique de E par rapport à I.
Démontrer que le quadrilatère VERT est un parallélogramme.

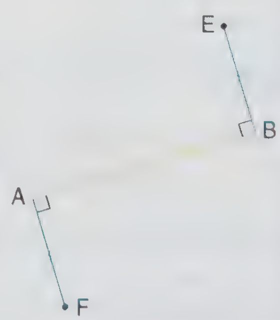
2 Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centre O. Soit [AB] un diamètre de $\mathscr{C}$ et [CD] un diamètre de $\mathscr{C}'$.
Montrer que le quadrilatère ACBD est un parallélogramme.



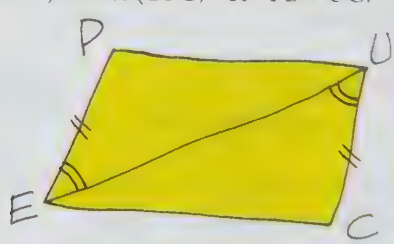
3 Soit un parallélogramme MURE de centre O. La droite Δ, parallèle à (ME) et passant par O, coupe (RE) en I.
Démontrer que I est le milieu de [RE].

4 Soit un triangle SOT et sa médiane [TM]. Soit I le milieu de [TS] et E le milieu de [OT]. Démontrer que MITE est un parallélogramme.

5 Dans la figure ci-contre :
– les droites (AF) et (BE) sont perpendiculaires à (AB) ;
– les deux segments [AF] et [BE] ont la même longueur.
Démontrer que [EF] et [AB] ont le même milieu.



6 Soit un quadrilatère PUCE tel que :
mes$(\widehat{PEU})$ = mes$(\widehat{EUC})$ et PE = UC.



Démontrer que PUCE est un parallélogramme.

SAVOIR FAIRE

Des bons points et des images

7 Tracer un triangle ABC. Construire à la règle et au compas l'image C′ du point C par la translation qui envoie A sur B.
Que dire du quadrilatère BACC′ ?

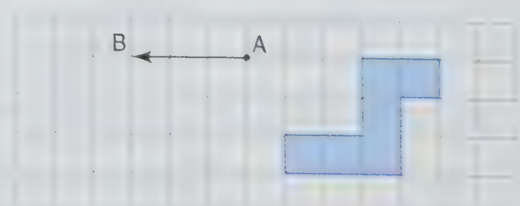
8 Soit un triangle ABC et un point M.
Construire P, image de M par la translation qui envoie A sur B.
Construire N, image de P par la translation qui envoie B sur C.
Construire L, image de N par la translation qui envoie C sur A.
Que remarque-t-on ?

9 Soit un parallélogramme THOR.
Compléter.
a) L'image de R par la translation qui envoie T sur H est ....
b) L'image de R par la translation qui envoie O sur H est ....
c) T est l'image de H par la translation ....
d) H est l'image de ...... par la translation qui envoie R sur T.

10 Soit un parallélogramme ODIN de centre Z.
Compléter.
a) L'image de N par la translation qui envoie I sur D est ....
b) Par la translation qui envoie D sur O, le point I a pour image ....
c) Par la translation qui envoie Z sur I, le point O a pour image ....
d) D est l'image de ...... par la translation qui envoie N sur I.

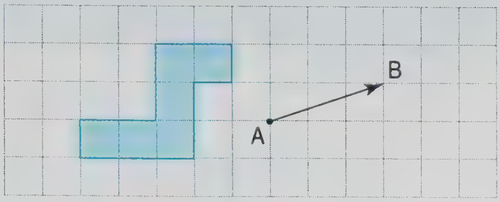
Image d'une figure sur un quadrillage

11 Reproduire ce dessin sur une feuille quadrillée.

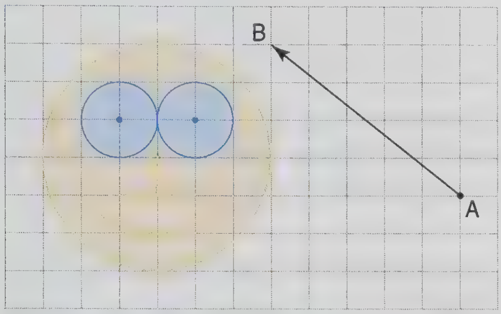


Tracer l'image de la figure coloriée par la translation qui transforme A en B.

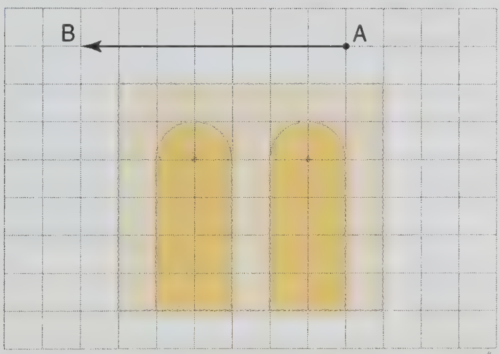
12 Même exercice avec le dessin suivant.



13 *Face ronde*
Même exercice avec le dessin suivant.



14 *Piles de pont*
Même exercice avec le dessin suivant.



15 *Animal virtuel*
Même exercice avec le dessin suivant.

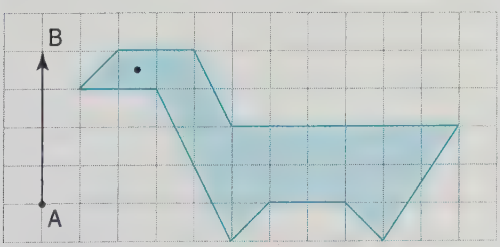
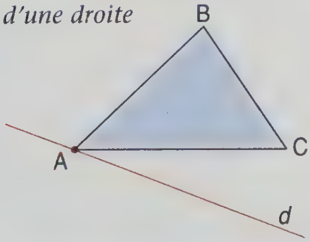


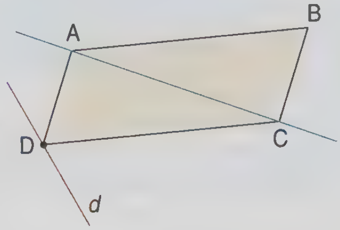
Image d'une figure sans quadrillage

16 *Image d'une droite*



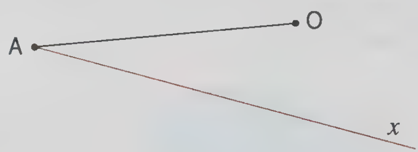
Construire l'image de la droite d :
– par la translation qui transforme A en B ;
– par la translation qui transforme A en C.

17 *Image d'une droite (bis)*
ABCD est un parallélogramme.

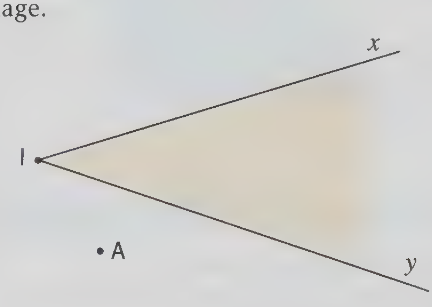


a) Construire l'image de la droite d :
– par la translation qui transforme D en C ;
– par la translation qui transforme A en B ;
– par la translation qui transforme D en B.
b) Construire l'image de la droite (AC) :
– par la translation qui transforme C en B ;
– par la translation qui transforme D en B.

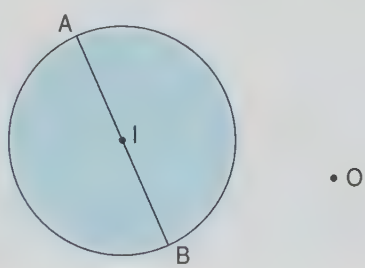
18 *Image d'une demi-droite*
Construire l'image de la demi-droite [Ax) par la translation qui transforme A en O.



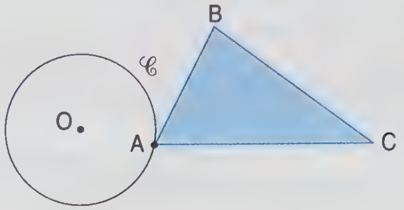
19 *Image d'un angle*
Construire l'image de l'angle $\widehat{xIy}$ par la translation qui transforme I en A.
Comparer la mesure de $\widehat{xIy}$ avec celle de son image.



20 *Image d'un cercle*
Construire l'image du cercle par la translation qui transforme I en O.

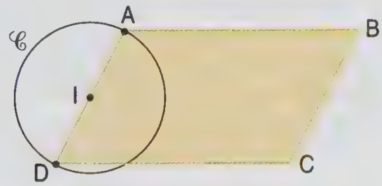


21 *Image d'un cercle (bis)*



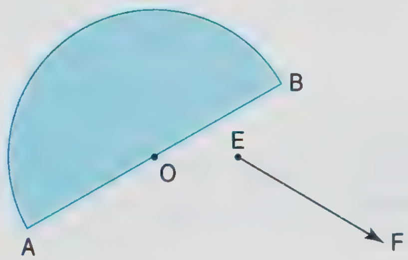
Construire l'image du cercle 𝒞 :
– par la translation qui transforme A en C ;
– par la translation qui transforme B en C ;
– par la translation qui transforme B en A.

22 *Image d'un cercle (ter)*
ABCD est un parallélogramme.



Construire l'image 𝒞′ du cercle 𝒞 par la translation qui transforme A en B.

23 *Image d'un demi-cercle*
Reproduire la figure suivante.



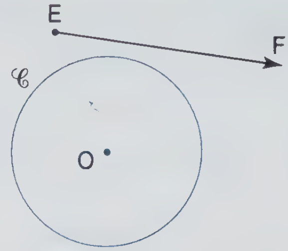
Construire l'image de cette figure par la translation qui envoie E sur F.

Avec des périmètres et des aires

24 Soit un triangle ABC tel que :
AB = 12 cm ; AC = 16 cm ; BC = 8 cm.
Soit Z le milieu de [BC].
Soit A′B′C′ l'image de ABC par la translation qui envoie A sur Z.
a) Construire ABC puis A′B′C′.
b) Calculer le périmètre de A′B′C′.

25 a) Construire un triangle SUR tel que :
SU = 52 mm ; UR = 56 mm et SR = 60 mm.
Soit H le pied de la hauteur issue de S.
b) Construire l'image S′U′R′ du triangle SUR par la translation qui transforme S en H.
c) On sait que l'aire de SUR vaut 1 344 mm^2. Quelle est l'aire du triangle S′U′R′ ? Justifier.

26 Soit un cercle 𝒞 de centre O et de 3 cm de rayon.
Soit 𝒞′ l'image de 𝒞 par la translation qui transforme E en F.



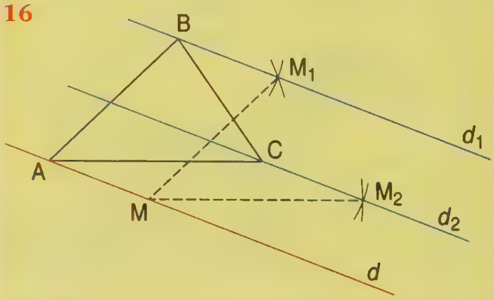
a) Construire 𝒞′.
b) Calculer l'aire du disque délimité par 𝒞′.
c) Calculer le périmètre de 𝒞′.

27 Soit un losange ABCD tel que AC = 10 cm et BD = 7 cm.
Soit I le milieu de [CD] et soit A′B′C′D′ l'image de ABCD par la translation qui envoie A sur I.
a) Faire une figure.
b) Calculer l'aire de A′B′C′D′.

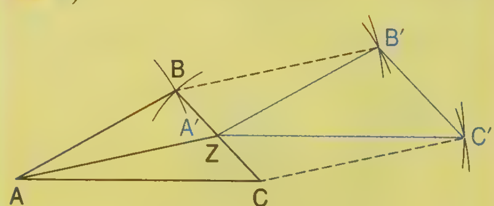
RÉSULTATS

9 **a)** O. **b)** T.
c) La translation qui transforme O en R.
d) O.

16



24 **a)**



b) 36 cm.

DÉMONTRER

28 Voici un texte.

> Les droites d et Δ sont perpendiculaires.
> Le point A est sur d, le point B sur Δ.
> Soit d' l'image de d par la translation qui envoie A sur B.
> Démontrer que $d' \perp \Delta$.

a) Faire une figure en construisant d' à la règle et au compas.
b) Rédiger la démonstration (relire la propriété sur l'image d'une droite par une translation, et la propriété 3 des **Pages bleues**).

29 *Sans figure*
Soit un losange BUIS dont le périmètre mesure 14 cm. Soit B′U′I′S′ l'image de BUIS par une translation.
a) Combien mesure [B′U′] ? Justifier.
b) Démontrer que B′U′I′S′ est un losange.

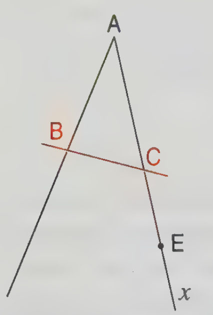
30 Voici un texte.

> Soit un triangle SVT isocèle en S et soit H le pied de la hauteur issue de V.
> Soit S′V′T′ l'image du triangle SVT par la translation qui transforme V en H.
> Démontrer que S′V′T′ est isocèle en S′.

a) Faire une figure à la règle et au compas.
b) Faire la démonstration (voir la méthode M 16, p. 214).

31 Voici un texte et une figure.

> Soit un triangle ABC tel que : AB = 7 cm, AC = 8 cm et BC = 5 cm.
> Soit E le point de la demi-droite [Cx) tel que CE = 4 cm.
> Soit d l'image de (BC) par la translation qui transforme C en E. La droite d coupe (AB) en F.
> Calculer AF.



La figure est volontairement fausse.

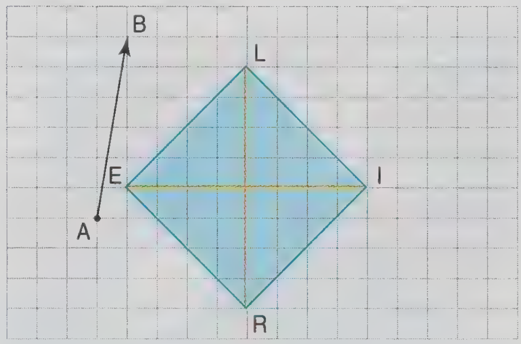
a) Faire une figure à la règle et au compas en respectant les dimensions.
b) Démontrer que d // (BC).
c) Utiliser la propriété de Thalès pour calculer AF. Vérifier le résultat sur le dessin.

CHERCHER

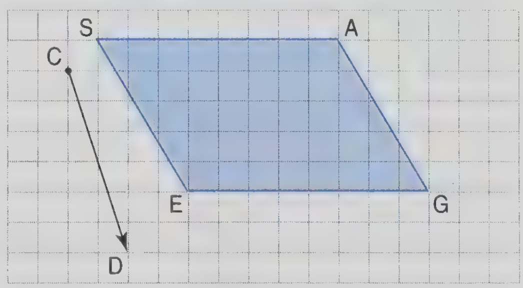
Avec un quadrillage

Dans cette rubrique, l'unité d'aire est le carreau et l'unité de longueur est le côté du carreau.

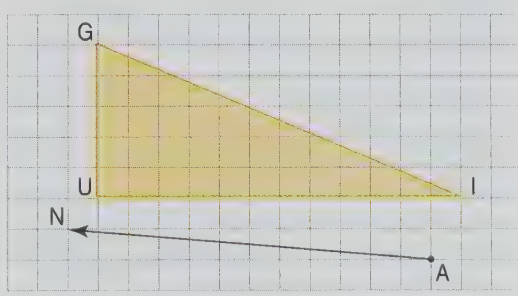
32 *Avec un carré*
a) Construire L′I′R′E′ l'image du carré LIRE par la translation qui envoie A sur B.
b) Calculer l'aire de L′I′R′E′.



33 *Avec un parallélogramme*
a) Construire l'image S′A′G′E′ du parallélogramme SAGE par la translation qui envoie C sur D.
b) Calculer l'aire de S′A′G′E′.



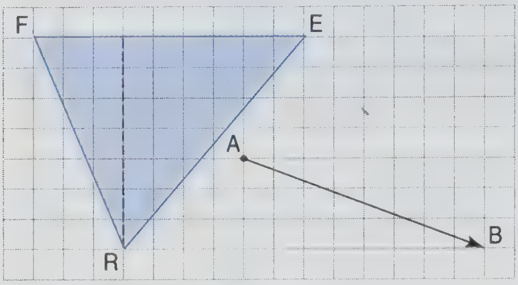
34 *Avec un triangle rectangle*
a) Construire l'image G′U′I′ du triangle GUI par la translation qui transforme A en N.
b) Calculer G′I′.



35 *Avec un triangle (1)*

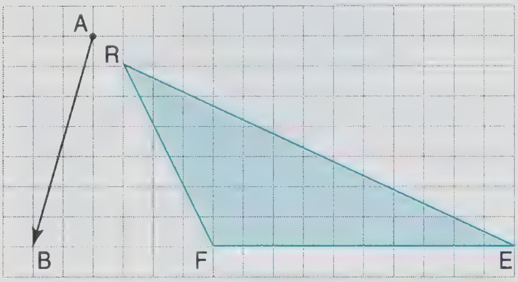
a) Construire l'image F′E′R′ du triangle FER par la translation qui transforme A en B.

b) Calculer l'aire de F′E′R′.



36 *Avec un triangle (2)*

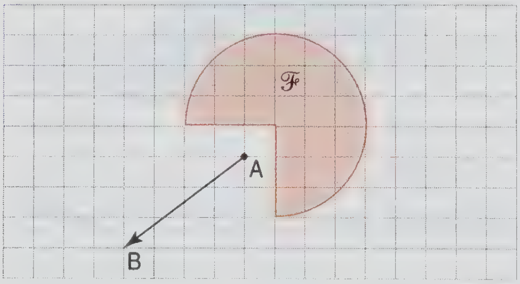
Même exercice.



37 *Avec des arcs de cercle*

a) Construire $\mathcal{F}$ et son image $\mathcal{F}'$ par la translation qui envoie A sur B.

b) Calculer l'aire de $\mathcal{F}'$.



38 *Avec des coordonnées*

Le plan est muni de deux axes perpendiculaires se coupant en O et gradués avec la même unité.

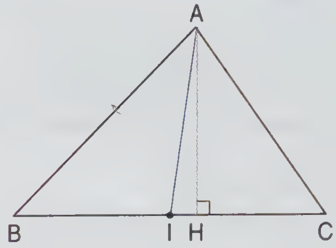
a) Placer les points Z (3 ; 2) ; T (– 4 ; – 5) ; V (– 5 ; 0) ; puis A (1 ; 1) et B (4 ; 5).

b) Placer le point Z′ image de Z par la translation qui transforme A en B.
De même, placer les points T′ et V′ images de T et V par cette translation.

c) Donner les coordonnées de Z′, T′ et V′.

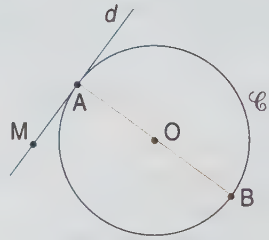
Démonstrations

39 Soit un triangle ABC, I le milieu de [BC] et H le pied de la hauteur issue de A.



Construire l'image d de la droite (AH) par la translation qui transforme A en I.
Démontrer que d est la médiatrice de [BC].

40 Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, A un point de $\mathscr{C}$ et B le point diamétralement opposé à A.
Soit d la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$ et soit M un point de d.



a) Faire une figure et construire d' l'image de d par la translation qui transforme M en B.

b) Démontrer que d' est tangente en B au cercle $\mathscr{C}$.

41 Soit un triangle PIE et soit L le milieu de [EP] et K le milieu de [EI].

a) Construire l'image d de (IE) par la translation qui transforme K en L.

b) Démontrer que d coupe [PI] en son milieu.

42 Soit HAIE un rectangle tel que HA = 6 cm et AI = 4 cm.
Soit H′A′I′E′ l'image de HAIE par la translation qui transforme E en A.

a) Faire une figure.

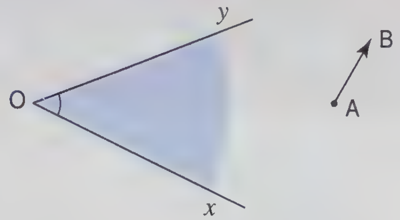
b) Démontrer que H′A′I′E′ est un rectangle. Calculer l'aire de H′A′I′E′.

43 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et E un point à l'intérieur de $\mathscr{C}$.

a) Construire $\mathscr{C}'$ l'image de $\mathscr{C}$ par la translation qui transforme O en E.

b) $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent en A et B.
Démontrer que OAEB est un losange.

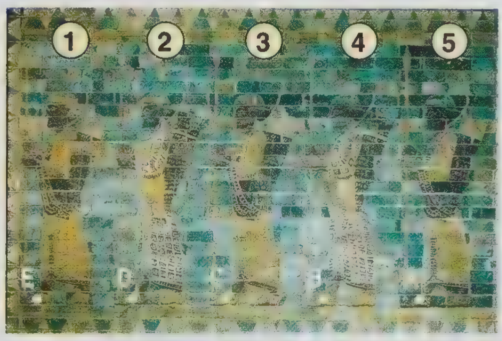
44 Soit $\widehat{xOy}$ un angle et soit deux points A et B.



a) Construire l'image $[O'x')$ de $[Ox)$ par la translation qui transforme A en B.
b) Construire l'image $[O'y')$ de $[Oy)$ par la translation qui transforme A en B.
c) Démontrer, en utilisant des angles alternes internes, que $\text{mes}\,(\widehat{x'O'y'}) = \text{mes}\,(\widehat{xOy})$.

Frises et pavages

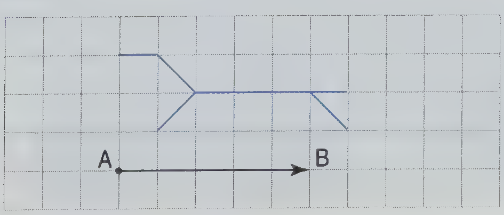
45 *La frise des archers*



Perse : « Frise des archers »,
Brique émaillée de Suse (405-362 avant J.-C.).

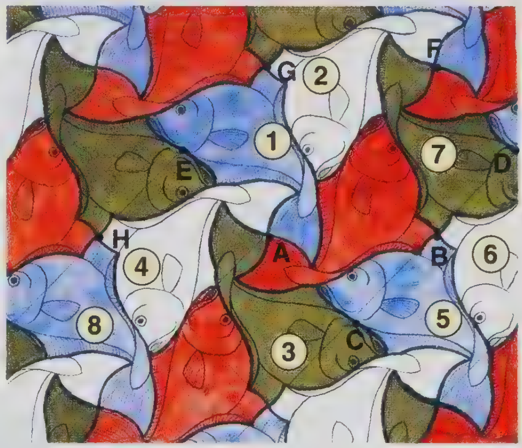
a) Quelle est l'image de l'archer ⑤ par la translation qui transforme A en C ?
Et celle de l'archer ② par la translation qui transforme D en B ?
b) Compléter.
① est l'image de ③ par la ....
④ est l'image de ① par la ....
⑤ est l'image de .... par la translation qui transforme E en A.
c) Compléter.
L'image de ① par la translation qui transforme C en A est ....
L'image de ③ par la translation qui transforme A en B est ....

46 **a)** Sur une feuille quadrillée tracer le motif suivant.



b) Construire l'image de ce motif par la translation qui transforme A en B puis poursuivre la frise.

47 *Les poissons de Escher*



M. C. Escher (1898-1972), Dessin de symétrie E 20, Baarn.

a) En observant le dessin ci-dessus compléter :
① est l'image de ⑤ par la ....
④ est l'image de ② par la ....
⑧ est l'image de ⑤ par la ....
⑥ est l'image de ② par la ....
.... est l'image de ③ par la translation qui envoie C sur D.
⑥ est l'image de .... par la translation qui envoie H sur B.
(*Exemple* : ⑤ est l'image de ① par la translation qui envoie E sur C.)

b) Donner 2 poissons tels que l'un d'eux n'est pas l'image de l'autre par une translation.

COUPS DE POUCE

32 **b)** Un carré est un losange (voir le **Formulaire** pour l'aire du losange).

39 Revoir la définition de la médiatrice (**Pages bleues**, p. 239).

41 **b)** Démontrer d'abord que $d \,//\, (IE)$.

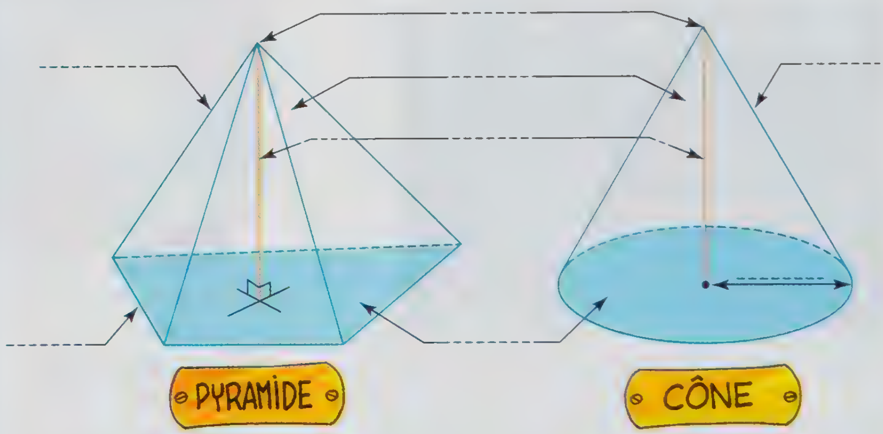
43 Quel est le centre de $\mathscr{C}'$?

15 Pyramides et cônes

Activités

1 Nomenclature

1. Dessiner les deux figures suivantes puis compléter avec les mots : base, hauteur, surface latérale, arête latérale, sommet, rayon de base, génératrice, arête de base.



2. Compléter les phrases suivantes avec les mots :
disque, polygone, triangles, perpendiculaire, sommet.

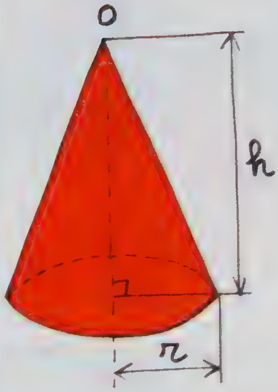
- Les faces latérales d'une pyramide sont des ....
- La base d'un cône est un ....
- La base d'une pyramide est un ....
- La hauteur d'une pyramide ou d'un cône est .... à la base.
- Les faces latérales d'une pyramide ont un point en commun : le ....

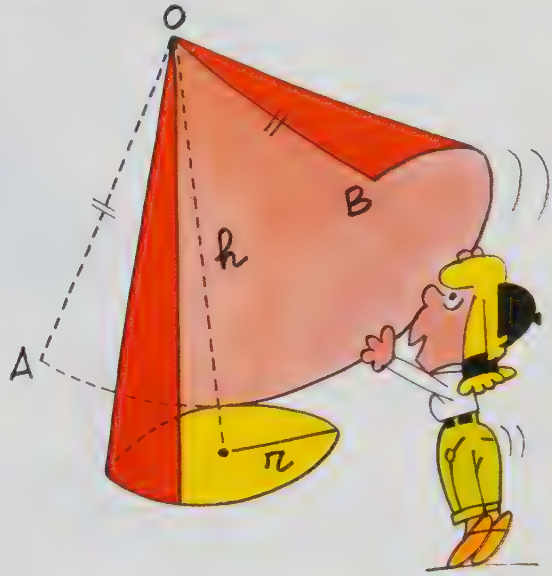
3. Pour chacune de ces pyramides, donner le nombre d'arêtes et le nombre de faces latérales.

2 Patrons de cônes

ENTRE NOUS
Objectifs
• Savoir, à partir d'un cône donné, dessiner un patron de ce cône
• Utiliser un tableau de proportionnalité pour obtenir l'angle du patron
• Construire un cône à partir d'un patron
• Calculer le rayon de base et la hauteur du cône obtenu

Un patron de cône est formé d'un disque (pour la base) et d'un secteur circulaire (pour la surface latérale).





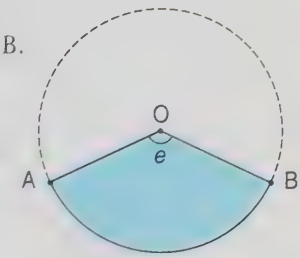
A. Du cône au patron

On donne :
• le rayon de la base, $r = 2{,}4$ cm ;
• la hauteur, $h = 7$ cm.

1. Calculer le rayon OA du secteur circulaire OAB.

2. Calculer la longueur de l'arc AB.

3. Dans le disque de centre O, la mesure e de l'angle du secteur circulaire est proportionnelle à la longueur de l'arc AB.
Compléter le tableau de proportionnalité suivant.



Longueur du cercle

Angle	360°	e
Longueur de l'arc		

Longueur de AB

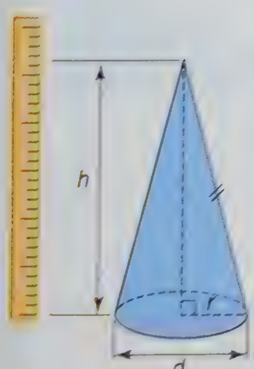
En déduire une valeur approchée à 1° près de la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

4. Dessiner un patron de ce cône.

B. Un quart de disque, pour un cône sans fond

1. Construction et mesures
• Sur une feuille volante, dessiner un quart de disque de rayon 12 cm.
• Construire le cône (sans fond) ayant ce quart de disque pour patron (le fixer avec un ruban adhésif).
• Mesurer le diamètre de la base et la hauteur du cône.

2. Vérification par le calcul
• Calculer la longueur du quart de cercle en fonction de π.
• En déduire le rayon et le diamètre de la base du cône.
• Calculer la hauteur du cône. (Penser à la propriété de Pythagore.)
• Comparer les résultats avec les valeurs trouvées au **1**.

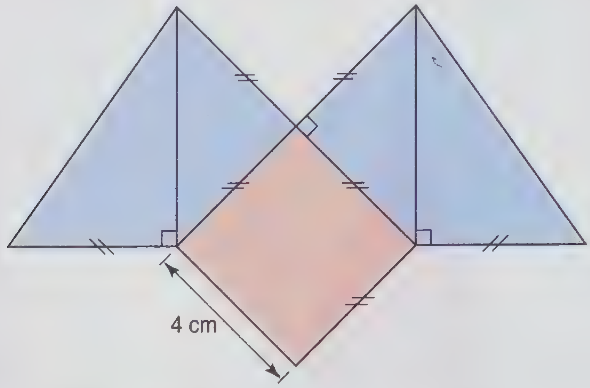


Activités

3 Trois pyramides pour un cube

A. Découpage et construction

1. Sur une feuille de carton construire le patron de la pyramide, à base carrée, ci-dessous.



2. Refaire deux autres patrons identiques au premier.

3. Découper puis construire les trois pyramides (utiliser de la colle forte, type colle contact).

B. Le puzzle

Avec ces trois pyramides, réaliser un cube.

1. Quel est le volume du cube ?

2. En déduire le volume d'une des pyramides. (Donner la réponse sous forme de fraction.)

C. Conclusion

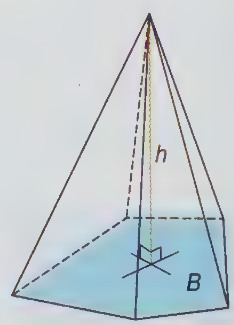
1. Quelle est l'aire B de la base d'une des pyramides construites ?
Combien mesure sa hauteur h ?
On note V le volume de la pyramide.

Vérifier la formule $V = \frac{1}{3} \times B \times h$.

2. Nous admettons que cette formule est générale.
Compléter.

Propriété

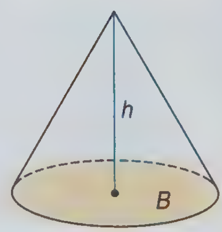
Le .... d'une pyramide est égal au tiers du produit de .... par ....



3. Nous admettons que cette formule est vraie aussi pour un cône.
La réécrire, puis compléter la propriété.

Propriété

Le volume d'un cône ....
....



4 Profession architecte

Xavier, passionné d'architecture, réalise des maquettes de tours.

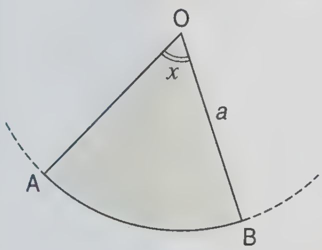
A. La tour Renaissance

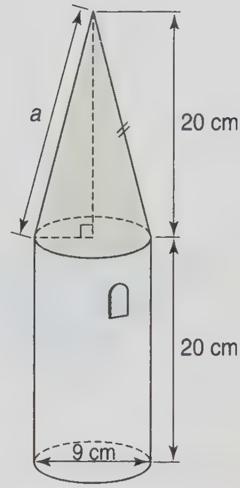
Voici le dessin de sa première maquette.

1. Réaliser un patron de la partie cylindrique de la tour.

2. Calculer la longueur a du toit de la tour.

3. Calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ du patron du toit.





4. Calculer une valeur approchée à 0,1° près de la mesure x de l'angle $\widehat{AOB}$ en complétant le tableau de proportionnalité suivant.

Angle	360°	x
Longueur de l'arc		

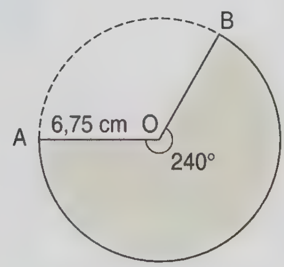
Longueur de $\overset{\frown}{AB}$

5. Réaliser le patron du toit.

6. Calculer le volume (en cm^3) de la tour.
Sachant que la maquette est réalisée à l'échelle 1/100, peut-on connaître le volume réel de la tour ?
(Ne pas oublier qu'à l'échelle 1/100, 1 cm représente 1 m.)

B. La tour du Moyen Âge

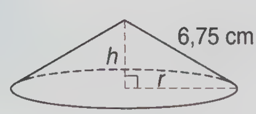
On conserve la partie cylindrique de la tour précédente, mais on change le toit car les toits du Moyen Âge étaient plus aplatis.
Voici un patron du toit.



1. Calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Utiliser le tableau suivant.

Angle	360°	240°
Longueur de l'arc	$2\pi \times 6{,}75$	ℓ



2. En déduire le rayon r de la base puis la hauteur h du toit.

3. Réaliser le toit de la tour.

5 Bon vent, bonne aire

(D'après *Moulins à vent de Charente*, Cadet A., Renaud Y., CDDP, Charente)

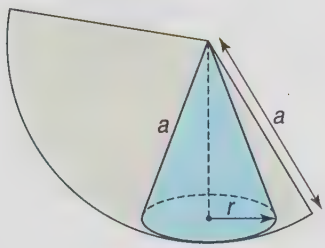
En Poitou-Charentes, les toits des moulins à vent sont souvent de forme conique et recouverts de lamelles de châtaignier ou de chêne, appelées sendes.

Le moulin de Rimbault (Deux-Sèvres).

A. Les calculs du charpentier

Pour calculer l'aire latérale d'un cône, on utilise la formule suivante :

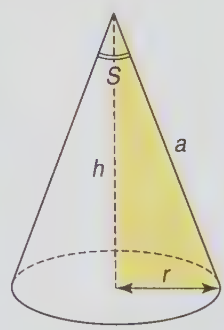
aire = $\pi \times r \times a$.



Compléter le tableau suivant concernant quatre moulins du Poitou-Charentes.

Penser au cosinus dans le triangle jaune

Moulin de :	r (m)	a (m)	S (°)	h (m)	aire (m^2)
Bessac	2,60	5,70			
Rouillac	2,90			4,20	
Berneuil		6		5,40	
Cherves			62°	4,40	



B. Une démonstration

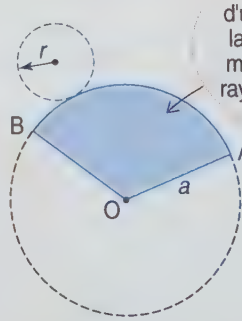
Dans le disque de centre O, l'aire du secteur AOB est proportionnelle à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Compléter le tableau suivant.

en fonction de r

Longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$		
Aire du secteur AOB	?	

aire latérale d'un cône dont la génératrice mesure a et le rayon de base r



En déduire la formule de l'aire latérale d'un cône.

6 Pyramide en 2 moitiés

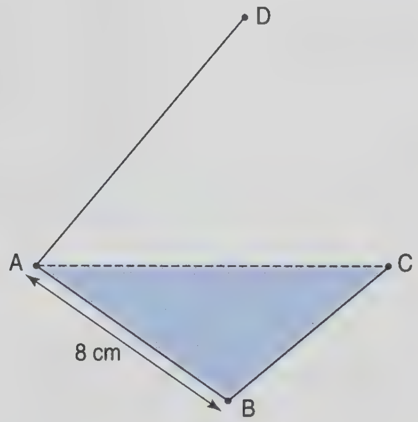
On considère ici une pyramide dont les faces sont des triangles équilatéraux. Une telle pyramide s'appelle un **tétraèdre** régulier.

A. Sur une figure en perspective

1. Reproduire, en le complétant, le dessin en perspective de la pyramide régulière ABCD.

2. Placer I, milieu de [AD], puis J celui de [BD], K celui de [BC] et L celui de [AC].

Expliquer pourquoi IJ = 4 cm.

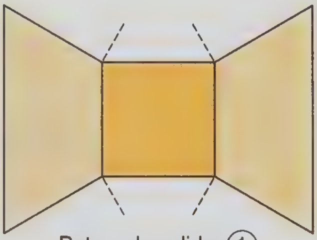


3. On coupe cette pyramide en deux solides (notés ① et ②), par le plan passant par les points I, J, K et L.

Prouver que IJKL est un losange (c'est même un carré : on l'admet).

B. Avec des patrons

1. Sur le dessin en perspective, colorier toutes les arêtes du solide ① en indiquant les segments de même longueur.
2. Que dire du triangle BJK ? Justifier.
3. Sur une feuille volante reproduire, en vraie grandeur et en le complétant, le patron du solide ①.



Patron du solide ①

C. Le casse-tête

1. Observer que les solides ① et ② sont exactement les mêmes. Construire sur une feuille volante un deuxième patron identique au premier.
2. Construire les solides ① et ② (utiliser de la colle forte, type colle contact).
3. Demander à une tierce personne de reconstituer la pyramide à l'aide des solides ① et ②.

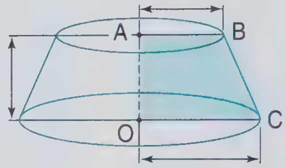
7 L'abat-jour

On a trouvé un curieux texte de problème sur un cahier d'écolier de 1914.

Tracer le développement de la surface latérale d'un tronc de cône destiné à servir d'abat-jour pour bougie. Décorer ce développement au moyen d'un motif floral.
Faire le plan à une échelle réduite.
Dimensions de l'abat-jour : diamètre inférieur = 14 cm, diamètre supérieur = 10 cm, hauteur = 8 cm.

A. Le dessin en perspective

Reproduire le dessin en perspective de l'abat-jour (ci-contre) en y portant les dimensions.



B. Calculs préliminaires

Les droites (OA) et (BC) se coupent en I. Notons x la longueur AI.

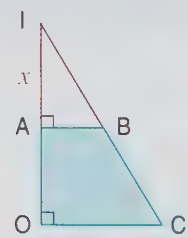
1. Démontrer que x vérifie l'équation :

$\dfrac{x}{8 + x} = \dfrac{5}{7}$ (penser à Thalès).

2. Résoudre cette équation. (Penser aux produits en croix.)

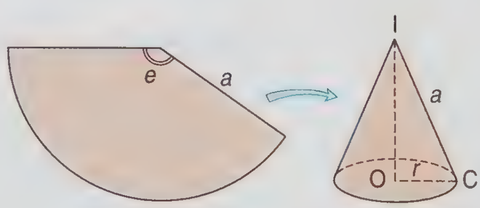
3. Calculer alors une valeur approchée à 1 mm près de IB et de IC. (Penser à Pythagore.)

4. Le triangle OIC engendre un cône en tournant autour de [OI].



On pourrait démontrer (voir activité 2 ou 4) que l'angle du patron de cône mesure (en degrés) :

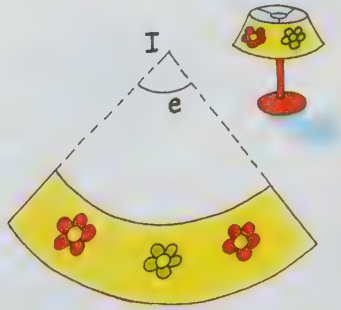
$$e = 360 \times \frac{r}{a}.$$



Calculer la mesure de l'angle du patron de cône.

C. L'abat-jour

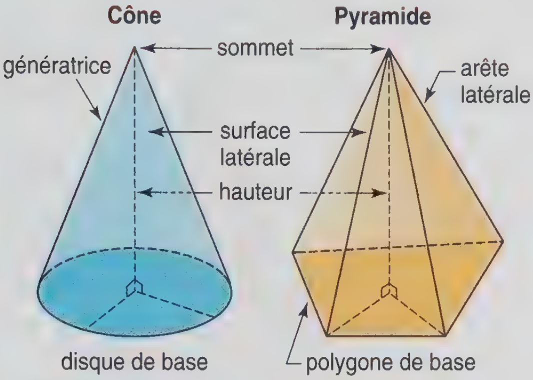
1. Choisir une échelle raisonnable.
2. Tracer le patron de l'abat-jour.
3. Dessiner sur ce patron un motif floral.
4. Construire l'abat-jour (utiliser de la colle forte).



Outils

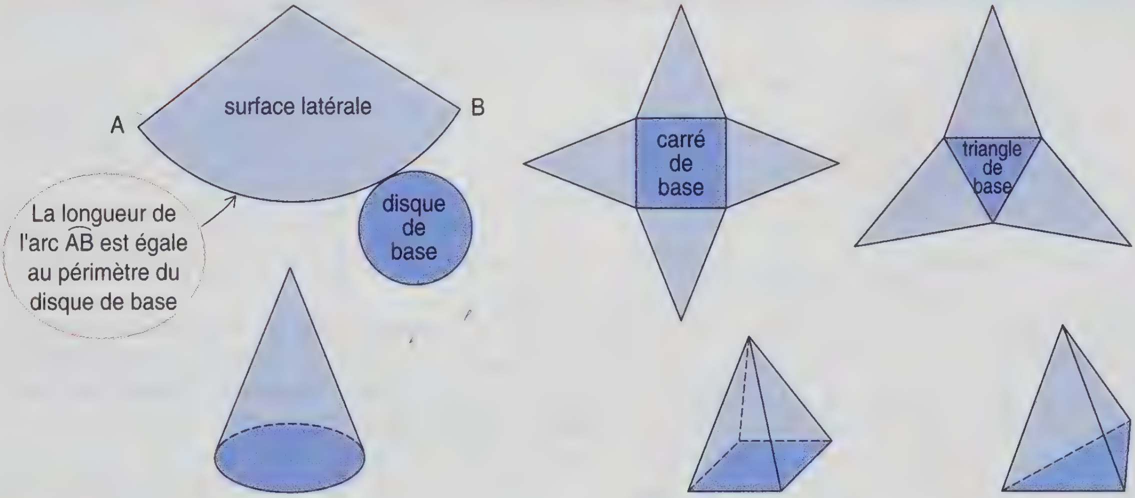
Pyramides et cônes

1 Vocabulaire



Remarque
Dans une pyramide **régulière** :
– les côtés de la base ont la même longueur ;
– les arêtes latérales ont la même longueur ;
– la hauteur passe par le centre de la base.

2 Exemples de patrons

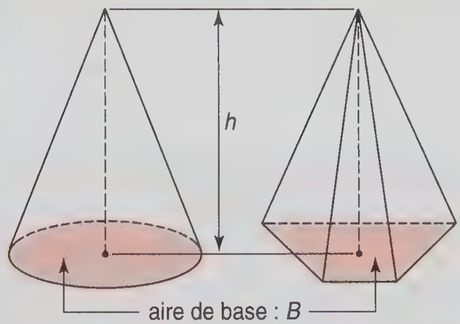


3 Formule du volume

Propriété

Le volume d'une pyramide ou d'un cône, de hauteur h et d'aire de base B, est :

$V = \frac{1}{3} \times B \times h.$



Exemple
Un cône de 4 cm de hauteur et de 7 cm de rayon a pour volume :

$V = \frac{1}{3} \times (\pi \times 7^2) \times 4 = \frac{1}{3} \times 196\,\pi$ soit environ $205{,}25$ cm^3.

Exemple

Calculs de volume, d'aire et de longueur

Volume, aire latérale et longueur des arêtes d'une pyramide

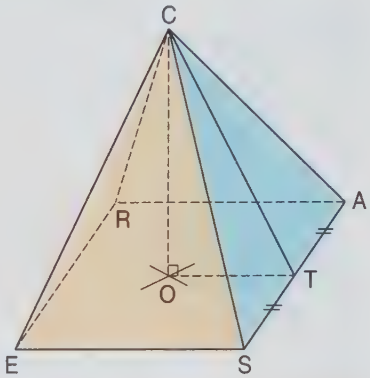
ÉNONCÉ

La pyramide CESAR est régulière et de base carrée. Sa hauteur [OC] mesure 15 cm et le côté du carré mesure 16 cm.

a/ Calculer le volume de la pyramide.

b/ Calculer l'aire latérale de la pyramide.

c/ Calculer la longueur totale des arêtes de la pyramide.



Stratégie

a/ On utilise la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h$$

où B désigne ici l'aire d'un carré de 16 cm de côté.

b/ Pour calculer l'aire latérale, on multiplie par 4 l'aire d'une face (ici le triangle CSA).
Et, pour calculer l'aire de CSA, on calcule la hauteur CT à l'aide du théorème de Pythagore.

c/ Ajouter le périmètre de la base à 4 fois la longueur d'une arête latérale.
Pour la longueur d'une arête latérale, utiliser la propriété de Pythagore.

Solution

a/ On a $V = \frac{1}{3} \times (16)^2 \times 15$.

Soit $V = 1\,280 \text{ cm}^3$.

b/ Soit T le milieu de [AS]. Dans le triangle rectangle OCT on a :
$CT^2 = OC^2 + OT^2 = 15^2 + 8^2 = 289$
donc $CT = 17$ cm.
Comme le triangle CSA est isocèle en C alors la médiane [CT] est aussi la hauteur issue de C ; d'où l'aire du triangle CSA :

$$\frac{1}{2} \times SA \times CT = \frac{1}{2} \times 16 \times 17$$

soit 136 cm^2.
Donc l'aire latérale de la pyramide est :
$136 \times 4 = 544$ soit 544 cm^2.

c/ Le périmètre de la base mesure 4×16 soit 64 cm.
Le triangle SCT est rectangle en T donc :

$$CS^2 = CT^2 + ST^2$$
$$= 289 + (8)^2 = 353.$$

Soit $CS \approx 18{,}79$ cm.
D'où la longueur des arêtes :
$64 + 4 \times CS \approx 139{,}15$ cm.

Remarque

[OT] est une demi-médiane du carré ; donc [OT] mesure la moitié du côté du carré.

T est le milieu de [AS] donc :

$$ST = \frac{16}{2} = 8.$$

CONSOLIDER

1 *Aires*
Classer les terrains suivants par ordre croissant d'aire.
Ⓐ 1,5 ha Ⓑ 21 000 m^2 Ⓒ 1 700 a
Ⓓ 1,2 hm^2 Ⓔ 1 800 dam^2.
(Consulter le **Tableau des mesures**, p. 254.)

2 *Volumes*
Classer les réservoirs suivants par ordre décroissant de volume.
Ⓐ 650 L Ⓑ 7,2 hL Ⓒ 6 m^3
Ⓓ 55 daL Ⓔ 800 dm^3.
(Consulter le **Tableau des mesures**, p. 254.)

3 *Volumes (bis)*
Classer les récipients Ⓔ, Ⓐ, Ⓤ, Ⓥ, Ⓘ, Ⓝ, par ordre croissant de volume.
Ⓔ 750 cm^3 Ⓐ 3,5 dm^3 Ⓤ 42 dL
Ⓥ 730 cL Ⓘ 930 mL Ⓝ 0,4 L.

4 Convertir en cm^3.
a) 33 cL **b)** 15 mL **c)** 4 dL
d) 0,3 dm^3 **e)** 1 500 mm^3.

5 Convertir en litres.
a) 7,5 m^3 **b)** 4 dm^3 **c)** 92 daL
d) 12 hL **e)** 1 200 cm^3 **f)** 21 dL.

6 *De la réserve*
a) Calculer le volume d'un réservoir cubique de 5 dm de côté (en litres puis en m^3).
b) Calculer l'aire latérale de ce cube (en m^2).

7 Une poutre de chêne a 4,5 m de long et sa section est un rectangle de 30 cm sur 40 cm.
a) Calculer le volume, en m^3, de cette poutre.
b) On enduit cette poutre de produit fongicide. Quelle est l'aire de la surface à traiter ?

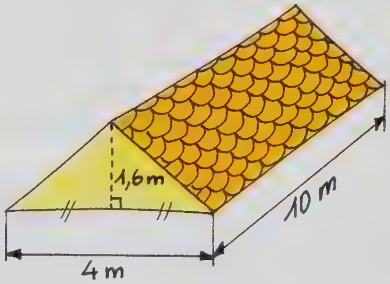
8 *Mise en boîte*
Une boîte cylindrique de 10 cm de diamètre et de 14 cm de haut a-t-elle un volume supérieur à 1 litre ?

9 *Pollution*
Une entreprise peu scrupuleuse a vidé, dans une décharge, 22 bidons pleins d'une substance nuisible à l'environnement. Chaque bidon est un cylindre de 70 cm de diamètre sur 80 cm de haut. Calculer le volume total de substance ainsi rejetée.

10 *Et puis alors ?*
On creuse un puits de 1,80 m de diamètre et de 32 m de profondeur.
Quel volume de terre doit-on enlever ?

11 *Boîte de sel*
Une boîte de sel est un cylindre de carton de 9 cm de diamètre sur 9 cm de haut, fermé aux deux extrémités.
Calculer l'aire de carton nécessaire à la réalisation de 1 000 boîtes.

12 *Et si on parlait de toit*



a) Quel est le volume disponible sous le toit de cette maison ?
b) Calculer l'aire du toit recouvert de tuiles.

13 *C'est du bidon*
Un bidon de fuel de 200 litres a 26 cm de rayon. Calculer :
a) la hauteur du bidon ;
b) la surface de tôle nécessaire pour le fabriquer (hormis les soudures).

RÉSULTATS

2 Ⓒ Ⓔ Ⓑ Ⓐ Ⓓ.
6 **a)** 125 L soit 0,125 m^3.
b) 150 dm^2 soit 1,50 m^2.
10 81,43 m^3 environ.
11 38,17 m^2.

SAVOIR FAIRE

Dessins en perspective

14 Dessiner une pyramide à base carrée posée sur un cube, la pyramide et le cube ayant une face commune.

15 Dessiner un cône posé sur un cylindre, le cône et le cylindre ayant une base commune.

16 Dessiner une pyramide à base triangulaire posée sur un prisme ayant une base commune avec la pyramide.

17 Dessiner une pyramide à base rectangulaire.

18 Dessiner deux cônes ayant leur sommet en commun et leurs bases parallèles.

19 Dessiner une pyramide dont les 3 faces latérales sont des triangles équilatéraux.
Que dire de la base ? (Justifier la réponse.)

Pyramides

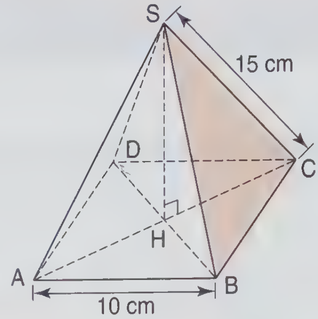
20 *Au BHV*
On désigne par B, H et V l'aire de base, la hauteur et le volume d'une pyramide.
Compléter le tableau suivant.

B	30		15
H	10	10	
V		200	150

21 On considère une pyramide ayant une base carrée de côté c, une hauteur h et un volume V.
Compléter le tableau suivant.

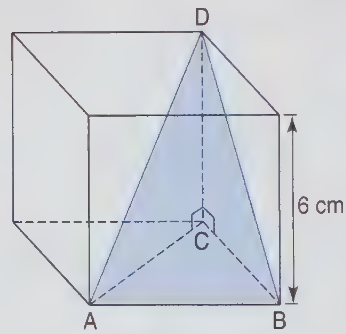
c	10	20	10				10	20	10
h	6	6	12	6	12	6			
V				32	32	64	320	320	640

22 La pyramide SABCD est régulière et sa base est un carré.

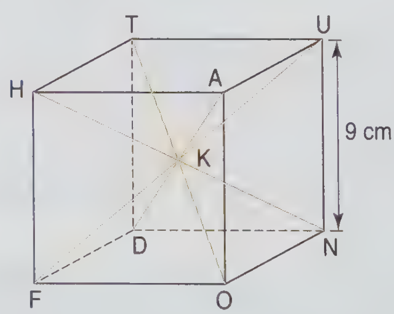


a) Calculer la diagonale AC. En déduire CH puis la hauteur HS de la pyramide. Arrondir les résultats à 0,01 cm près.
b) Calculer le volume de la pyramide. Arrondir le résultat à 1 cm^3 près.

23 *Une pyramide dans un cube*
Un cube a pour côté 6 cm.
Calculer le volume de la pyramide DABC. Comparer le résultat avec le volume du cube.

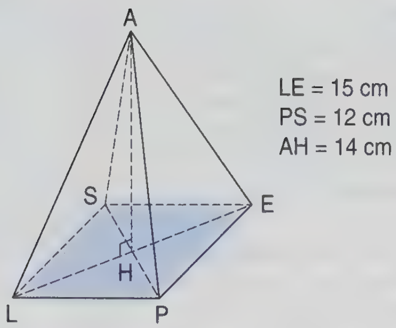


24 HAUTFOND est un cube de centre K et de 9 cm de côté.



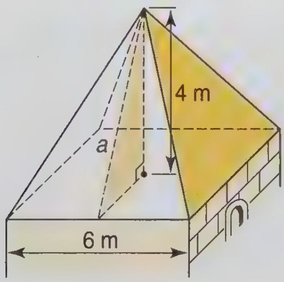
a) Citer les six pyramides régulières à base carrée tracées sur ce dessin.
b) Calculer le volume de la pyramide KFOND, de deux façons différentes.

25 La pyramide ALPES a pour base un losange et la hauteur [AH] passe par le milieu des diagonales.



Calculer le volume de la pyramide, en cm^3.

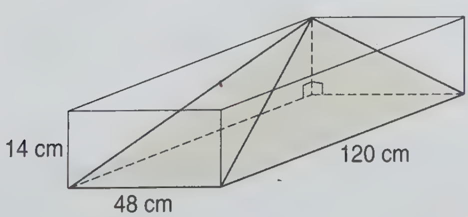
26 *Le toit de la tour*
Le toit d'une tour carrée de 6 m de côté a la forme d'une pyramide de 4 m de hauteur.



a) Calculer le volume disponible sous le toit.
b) Chaque face du toit est un triangle isocèle.
Calculer la hauteur a d'une de ces faces.
c) Calculer l'aire du toit.

27 *La ruche*
Une ruche se compose d'un parallélépipède à base carrée de 45 cm de côté et de 30 cm de hauteur, surmonté d'une pyramide de même base qui a 20 cm de hauteur. Quel est le volume de cette ruche ?

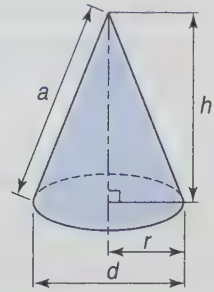
28 *La pièce de bois*
Un menuisier découpe dans une poutre de chêne la pièce représentée sur la figure suivante.



a) Calculer le volume de la pièce découpée.
b) Calculer la longueur de chaque arête.
c) Reprendre les questions **a)** et **b)** quand la poutre est en bouleau.

Cônes

29 Les lettres r, d, h et a désignent les longueurs indiquées sur la figure.
La lettre V désigne le volume du cône.
Compléter le tableau.
(Arrondir à 0,01 près les résultats non entiers.)



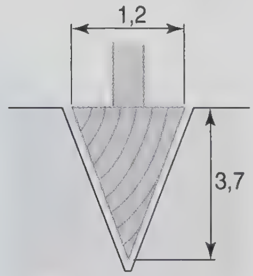
r	d	h	a	V
10		10		
	10	10		
10				1 000
	10			1 000

30 Même exercice avec le tableau suivant.

r	d	h	a	V
5		12		
	16	15		
7			25	
	40		29	

31 *Au cirque*
Le chapiteau d'un cirque a la forme d'un cylindre ayant 12 m de rayon et 3 m de hauteur, surmonté d'un cône dont le sommet est situé à 12 m du sol.
Quel est le volume d'air sous le chapiteau ?

32 *Un foret conique*



Quel est le volume, en cm^3, du trou obtenu par un foret conique de 3,7 cm de hauteur et de 1,2 cm de diamètre de base ?

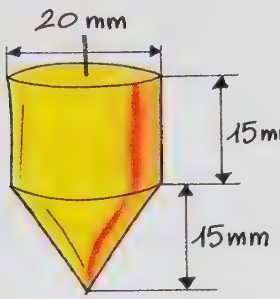
33 Quelle est la hauteur d'un cône de 91 cm^3 de volume et dont la base mesure 7 cm^2 ?

34 Donner une valeur approchée à 0,1 m près de la hauteur d'un cône de 14 m^3 et dont le rayon de base mesure 1,5 m.

35 *Le contrepoids d'horloge comtoise*
Un contrepoids en fer a la forme d'un cône de 3 cm de rayon et de 9 cm de hauteur. Un cm^3 de fer pèse 7,8 g.
Trouver combien pèse ce contrepoids (à 0,1 g près).

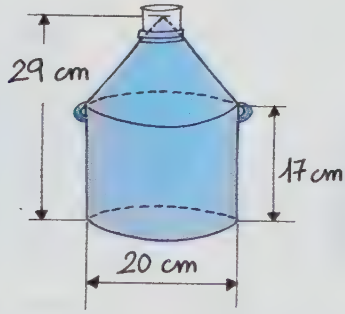
36 *La flûte à champagne*
Une flûte à champagne de forme conique a un diamètre d'ouverture de 4 cm et une profondeur de 11,5 cm.
a) Calculer à 0,001 cm^3 près la contenance d'une flûte.
b) Combien pourra-t-on remplir de ces flûtes avec une bouteille de 3/4 de litre ?
c) Même question mais avec un nabuchodonosor de champagne (très grande bouteille qui vaut 20 bouteilles ordinaires).

37 *Le fil à plomb*
Un fil à plomb se termine par un contrepoids en laiton ayant la forme indiquée ci-dessous.



a) Calculer le volume de ce contrepoids.
b) Calculer la masse de ce contrepoids, sachant que 1 cm^3 de laiton pèse 8,75 g.

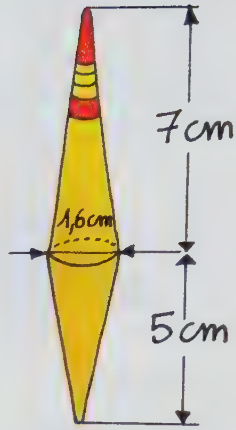
38 *Le réservoir*
Un petit réservoir à essence a la forme suivante.



Contient-il plus de 6,5 litres ?

39 *Le taille-crayon*
Pour fabriquer un taille-crayon, une machine perce, dans un morceau d'aluminium, un trou conique de 25 mm de profondeur et dont la base a 12 mm de diamètre.
Calculer le volume de copeaux obtenu (en dm^3) en fabriquant 10 000 taille-crayons.

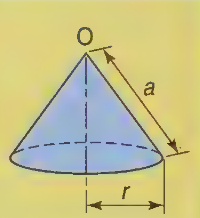
40 *Ça mord ?*
Pour pêcher à la ligne on utilise un bouchon constitué de deux cônes en liège, ayant la même base (voir le dessin ci-contre).
a) Calculer le volume du bouchon.
b) Déterminer son poids, sachant que 1 cm^3 de liège pèse 0,24 g.



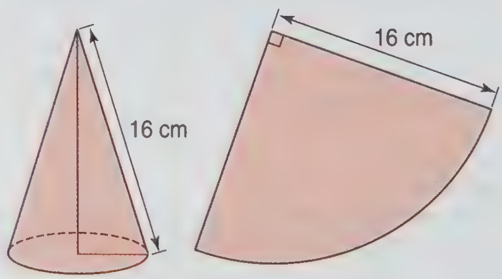
Cônes et aires latérales

INFORMATION

Formule de l'**aire latérale** d'un cône :
aire = $\pi r a$.



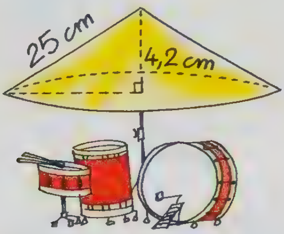
41 *Un éteignoir*
Jadis, on éteignait les bougies haut placées en utilisant un éteignoir conique fixé au bout d'un long manche.
Voici un dessin en perspective et un patron de cet éteignoir.



a) Calculer le rayon de base de l'éteignoir.
b) Calculer son aire latérale.

42 *Le moulin des Gours*
Le moulin des Gours, en Charente, était formé d'une tonnelle (voir **Mini-dico**) cylindrique de 2,5 m de rayon sur 7 m de haut, surmontée d'un toit conique de 4 m de haut.
a) Calculer le volume du moulin.
b) Calculer la longueur d'une génératrice du toit, puis calculer l'aire du toit.

43 *La cymbale*
Une cymbale est réalisée à partir d'une feuille de laiton de 1,5 mm d'épaisseur.
Cette cymbale a la forme d'un cône de 4,2 cm de hauteur et de 25 cm de génératrice.
a) Calculer la surface de métal nécessaire à la réalisation de la cymbale.
b) Combien pèse cette cymbale sachant que 1 cm³ de ce laiton pèse 8,30 g ?



Les problèmes du grenier

44 *Le paratonnerre* (cahier d'élève de 1920)
La flèche d'un paratonnerre est une tige conique en fer de 2,40 m de hauteur et de 32 cm de circonférence à la base. Quel est son poids, sachant que 1 cm³ de fer pèse 7,7 g ?

45 *Un exercice de Nicolas Chuquet* (1484)
Voici un texte de Nicolas Chuquet, un des premiers grands mathématiciens français :

« Il est ung pyramidal duquel sa face par le gros bout est quarree, et a 7 de quarré en aultre, et 12 de dyamêtre, c'est assavoir de hault.
Assavoir moult quantz pyez cubes contient. »

Et voici sa réponse :

« Multiplie 7 par 7, fait 49, qu'il convient multiplier par 4 qui est le tiers du dyamêtre, monte 196, et tant de pyez cubes contient cellui pyramidal. »

Quel est le solide dont il est question dans ce texte écrit en vieux français ?
Quelle est la formule utilisée par l'auteur ?
Quelle est l'unité de volume utilisée ?

46 *Le tas de blé* (dans un cahier de 1876)
Dans un grenier, on a fait un tas de blé en forme de cône ; la circonférence de la base a 9,25 m de longueur, et la hauteur est 1,05 m. Combien ce tas de blé contient-il de décalitres ?

RÉSULTATS

20

B	30	60	15
H	10	10	30
V	100	200	150

28 **a)** 26 880 cm³ soit 26,88 dm³.
b) 50 ; 130 ; ≈ 120,8 ;
et bien sûr 14 ; 48 ; 120.
c) Même « boulot » qu'en chêne !

31 2 714,3 m³ à 0,1 m³ près.

33 h = 39 cm.

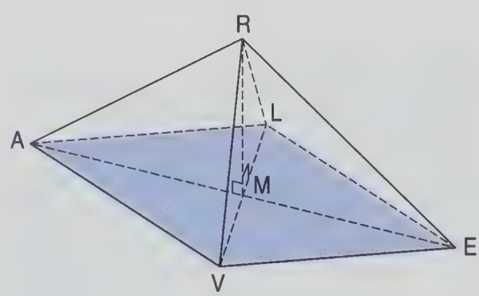
35 661,6 g à 0,1 g près.

41 **a)** 4 cm (exactement !).
b) 201,1 cm² à 0,1 cm² près.

CHERCHER

Pyramides

47 La pyramide RAVEL a pour base le losange LAVE tel que :
AE = 7,2 cm et VL = 4 cm.
La hauteur [RM] passe par le milieu M des diagonales et mesure 4,8 cm.

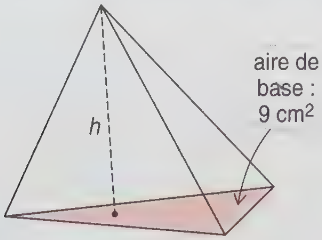


a) Calculer le volume de la pyramide RAVEL.
b) Calculer les longueurs des arêtes de la pyramide. Dessiner un patron de la pyramide.

Exercices

48 *Souvent « h » varie*

Une pyramide de base triangulaire dont l'aire mesure 9 cm² a une hauteur h variable qui varie de 0 cm à 4 cm.
On note V le volume de la pyramide.



a) Compléter le tableau suivant.

h (en cm)	0	0,5	1	1,5	......	4
V (en cm³)					......	

b) Tracer deux axes perpendiculaires se coupant au point O.
Représenter graphiquement V en fonction de h.

c) V est-il proportionnel à h ?

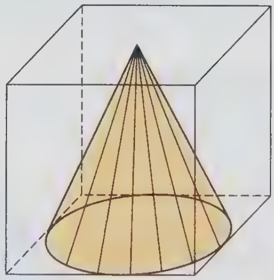
d) Écrire la formule donnant V en fonction de h.

Cônes

49 *Un cône dans un cube*

Un cône est inscrit dans un cube comme l'indique la figure suivante.

L'arête du cube mesure 21 cm.
Calculer le volume du cône $\left(\text{en prenant } \pi \approx \dfrac{22}{7}\right)$.



50 *Du cône au patron*

Un cône a 3 cm de diamètre. Sa génératrice est le double de son diamètre.

a) Calculer le périmètre de base de ce cône.

b) Calculer à l'aide d'un tableau de proportionnalité l'angle du patron de ce cône.

c) Dessiner le patron de ce cône.

51 *Du patron au cône*

La surface latérale d'un cône a pour patron un quart de disque de 9 cm de rayon.

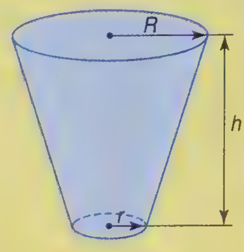
a) Calculer le rayon de la base du cône.

b) Calculer la hauteur du cône puis son volume.

Troncs de cônes

INFORMATION

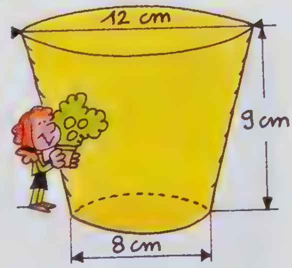
On peut démontrer que le volume V de ce solide appelé tronc de cône est donné par la formule :



$$V = \frac{1}{3}\, h \times \pi \times (R^2 + Rr + r^2).$$

52 *Pots de terre*

Un pépiniériste veut remplir 250 pots avec du bon terreau.
Chaque pot a la forme d'un tronc de cône (voir le dessin ci-contre).
Calculer le volume de terreau nécessaire.

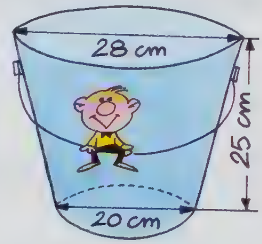


53 *Pots de fer*

Un seau à eau a la forme d'un tronc de cône (voir les dimensions sur le dessin ci-contre).

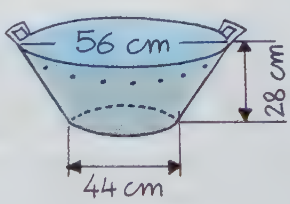
a) Calculer le volume du seau.

b) Combien faudra-t-il remplir de seaux pour vider un réservoir plein d'eau ayant la forme d'un cylindre de 70 cm de haut et de 1 m de diamètre ?



54 *La bassine*

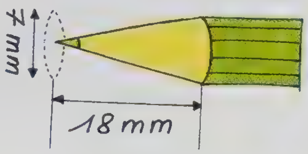
Grand-mère veut vider sa machine à laver des 52 litres de lessive qu'elle contient. Elle dispose d'une bassine en fer galvanisé de forme tronconique (voir les dimensions sur le dessin).



La bassine sera-t-elle assez grande ?

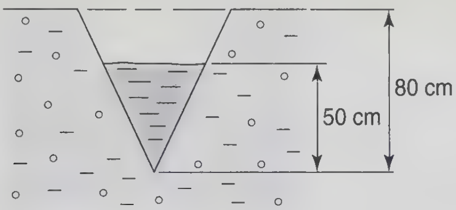
Dans la vie courante

55 *Les crayons de couleur*



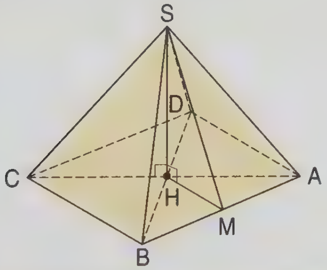
Une fabrique de crayons taille les crayons avant de les disposer dans leur boîte.
En utilisant les dimensions indiquées sur la figure, calculer le volume de copeaux obtenu en taillant 25 000 crayons.

56 *Un cône de bronze*
Dans un moule en terre de forme conique, de 80 cm de profondeur et de 36 cm de diamètre, on verse du bronze fondu jusqu'à une hauteur de 50 cm.



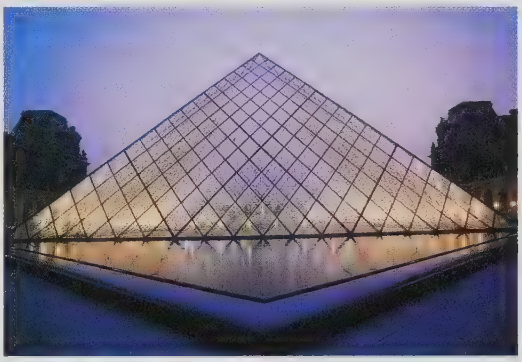
Calculer le volume de bronze coulé dans le moule.

57 *La pyramide de Chéops* (25 siècles av. J.-C.)
La pyramide est régulière. Elle a une hauteur de 138 m et une base carrée de 230 m de côté.



a) Calculer son volume.
b) Combien mesure [SM], à 1 m près ?
c) Calculer l'aire des 4 faces triangulaires. (Arrondir le résultat à 10 m^2 près.)

58 *La pyramide du Louvre* (1988 apr. J.-C.)
C'est, elle aussi, une pyramide régulière dont la hauteur mesure 21 m et dont la base carrée a 34 m de côté.



a) Calculer son volume.
Si vous avez traité la question **a)** de l'exercice précédent, vous constatez que le volume de la pyramide du Louvre est plus petit que celui de la pyramide de Chéops. Combien de fois est-il plus petit ?
b) Combien mesure [SM], à 1 m près ? (Voir figure de l'exercice précédent.)
c) Calculer l'aire totale des plaques de verre qui recouvrent la pyramide du Louvre. (Arrondir à 1 m^2 près.)

59 *Chapeau de Pierrot*
Un chapeau de Pierrot a 14 cm de diamètre et sa hauteur mesure 24 cm.
a) À quel(s) tour(s) de tête convient ce chapeau ?
b) Tracer un patron de ce chapeau à l'échelle $\frac{1}{4}$.

COUPS DE POUCE

47 b) Tous les triangles de sommets M sont rectangles en M.

51 a) Calculer le périmètre de base du cône.
b) Utiliser la propriété de Pythagore pour calculer la hauteur du cône.

56 Utiliser la propriété de Thalès.

59 b) Calculer d'abord la longueur d'une génératrice, puis l'angle du secteur angulaire formant le patron.

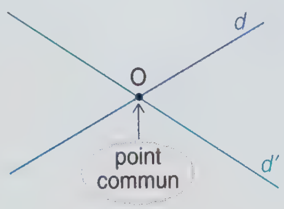
Exercices

Droites

1 Droites

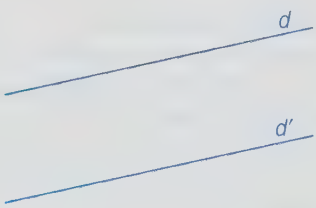
Droites sécantes

Deux droites **sécantes** sont deux droites qui se coupent en un point.



Droites parallèles

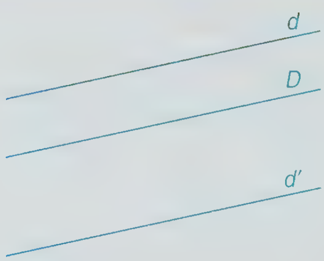
Deux droites n'ayant pas de point commun sont **parallèles**.
Deux droites confondues sont aussi parallèles.



$d \,//\, d'$

Propriété 1

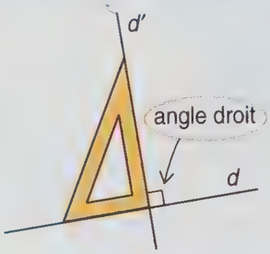
Si deux droites d et d' sont parallèles à une même troisième D, **alors** ces deux droites sont parallèles.



$\left.\begin{array}{l} d \,//\, D \\ d' \,//\, D \end{array}\right\}$ donc $d \,//\, d'$

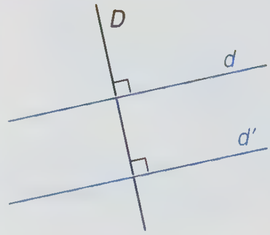
Droites perpendiculaires

Deux droites qui suivent les côtés d'une équerre sont **perpendiculaires**.



Propriété 2

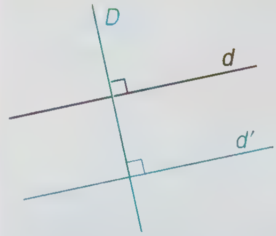
Si deux droites d et d' sont perpendiculaires à une même troisième D, **alors** ces deux droites sont parallèles.



$\left.\begin{array}{l} d \perp D \\ d' \perp D \end{array}\right\}$ donc $d \,//\, d'$

Propriété 3

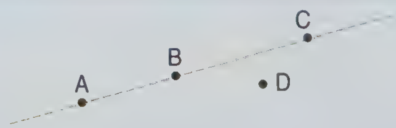
Si deux droites d et d' sont parallèles, **alors** toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.



$\left.\begin{array}{l} d \,//\, d' \\ D \perp d \end{array}\right\}$ donc $D \perp d'$

Points alignés

Des points sont **alignés** s'ils sont situés sur une même droite.

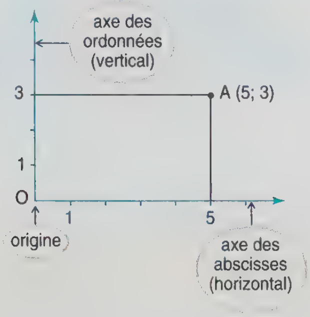


- A, B et C sont alignés.
- A, B et D ne sont pas alignés.

Repérage, médiatrice, symétrie axiale

2 Repérage

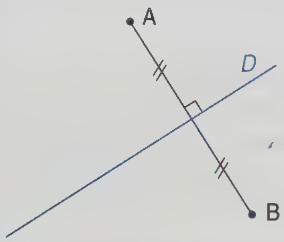
On peut indiquer la position d'un point du plan à l'aide de deux nombres appelés **coordonnées** de ce point.



- L'**abscisse** de A est 5.
- L'**ordonnée** de A est 3.
- Les **coordonnées** de A sont (5 ; 3).

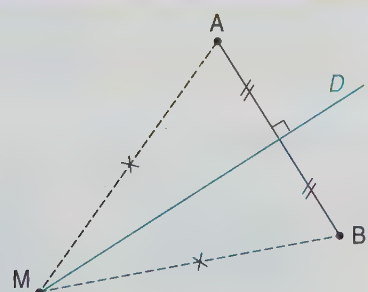
3 Médiatrice d'un segment

La **médiatrice** d'un segment [AB] est la droite D perpendiculaire à (AB) et qui passe par le milieu de [AB].



Propriété 4

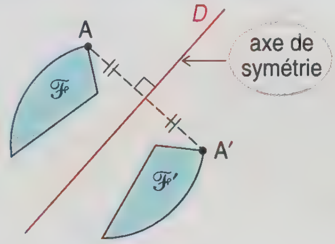
- **Si** M est un point de la médiatrice D du segment [AB], **alors** MA = MB.
- **Réciproquement**, **si** MA = MB, **alors** M appartient à la médiatrice D du segment [AB].



4 Symétrie axiale

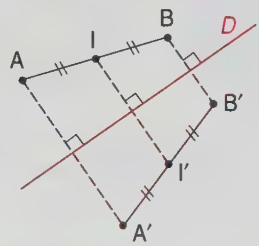
Symétrique d'un point, symétrique d'une figure

Les points A et A′ sont **symétriques** par rapport à la droite D lorsque D est la médiatrice du segment [AA′].



Les figures $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ du dessin sont symétriques par rapport à la droite D.
Elles ont la même aire.

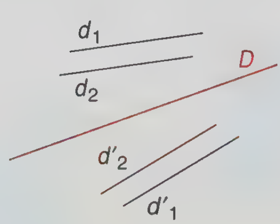
Symétrique d'un segment



Propriété 5

- Le symétrique d'un segment [AB] est un segment [A′B′] de même longueur.
- Le symétrique du milieu I de [AB] est le milieu I′ de [A′B′].

Symétriques de deux parallèles

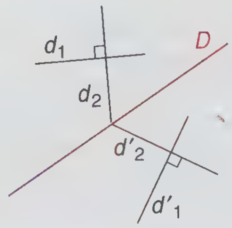


Propriété 6

Si deux droites d_1 et d_2 sont parallèles, **alors** leurs symétriques d_1' et d_2' le sont aussi.

Symétries axiale et centrale

Symétriques de deux perpendiculaires

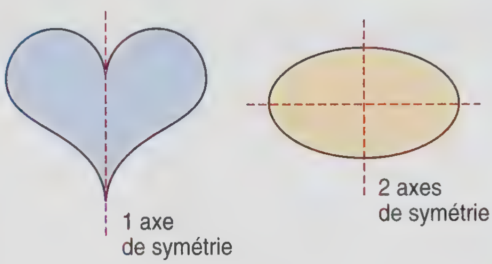


PROPRIÉTÉ 7

Si deux droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires, **alors** leurs symétriques d_1' et d_2' le sont aussi.

Axe de symétrie d'une figure

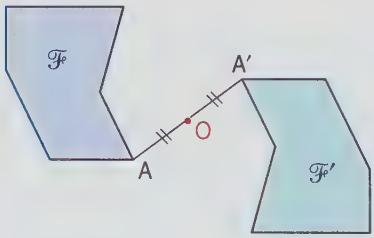
Exemples



5 Symétrie centrale

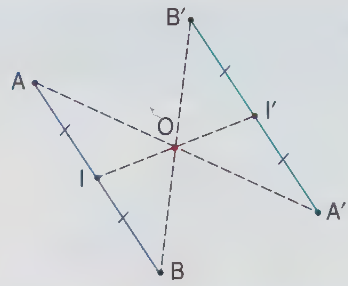
Symétrique d'un point, symétrique d'une figure

Les points A et A′ sont **symétriques** par rapport au point O lorsque O est le milieu du segment [AA′].



Les figures $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ du dessin sont symétriques par rapport au point O.
Elles ont la même aire.

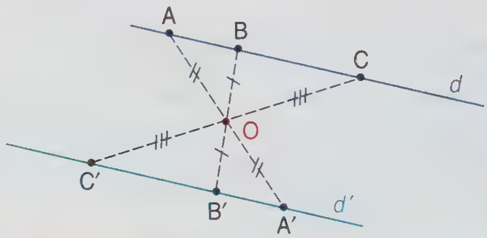
Symétrique d'un segment



PROPRIÉTÉ 8

- Le symétrique d'un segment [AB] est un segment [A′B′] de même longueur.
- Le symétrique du milieu I de [AB] est le milieu I′ de [A′B′].

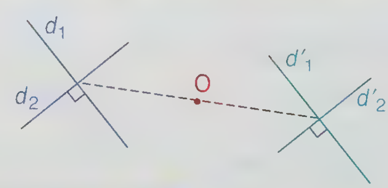
Symétrique d'une droite



PROPRIÉTÉ 9

- Le symétrique d'une droite d par rapport au point O est une droite d' parallèle à d.
- **Si** les points A, B et C sont alignés, **alors** leurs symétriques A′, B′ et C′ sont alignés.

Symétriques de deux perpendiculaires

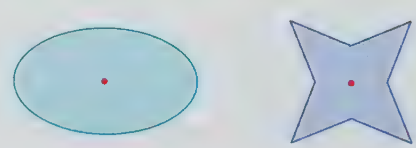


PROPRIÉTÉ 10

Si deux droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires, **alors** leurs symétriques d_1' et d_2' le sont aussi.

Centre de symétrie d'une figure

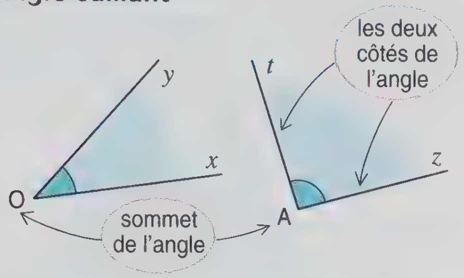
Exemples



Angles

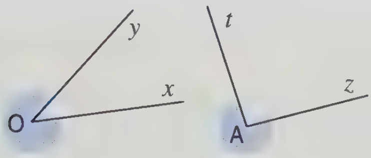
6 Angles

Angle saillant



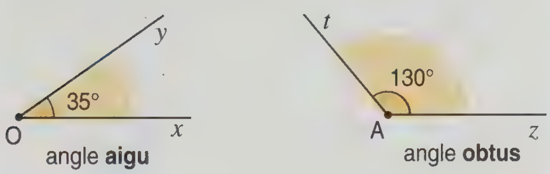
Les angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{zAt}$ sont des angles **saillants**.

Angle rentrant



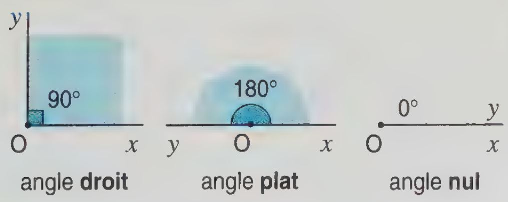
Les angles $\overset{\smile}{xOy}$ et $\overset{\smile}{zAt}$ sont des angles **rentrants**.

Mesures d'angles saillants

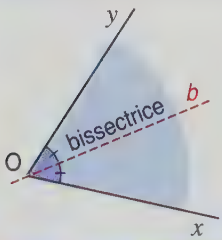


$0° < \text{mes}\,(\widehat{xOy}) < 90°$ $90° < \text{mes}\,(\widehat{zAt}) < 180°$

Angles particuliers



Bissectrice d'un angle



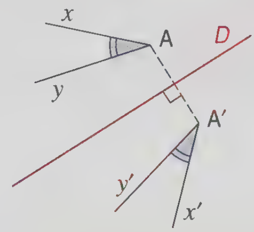
L'axe de symétrie de l'angle $\widehat{xOy}$ est la demi-droite [Ob) appelée **bissectrice** de $\widehat{xOy}$.

PROPRIÉTÉ 11

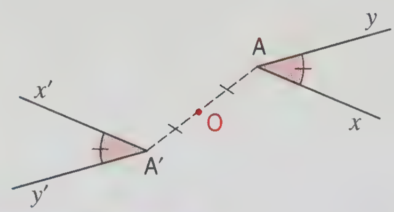
La bissectrice de $\widehat{xOy}$ partage cet angle en deux angles de même mesure :
$\text{mes}\,(\widehat{xOb}) = \text{mes}\,(\widehat{bOy})$.

Symétrique d'un angle

Par rapport à une droite :



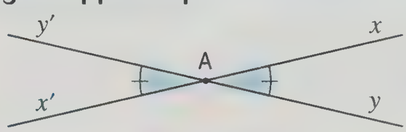
Par rapport à un point :



PROPRIÉTÉ 12

Le symétrique d'un angle $\widehat{xAy}$ est un angle $\widehat{x'A'y'}$ de même mesure.

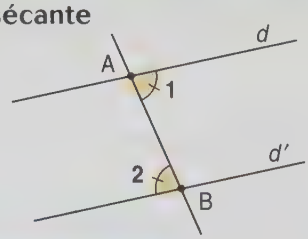
Angles opposés par le sommet



PROPRIÉTÉ 13

Les angles **opposés par le sommet** $\widehat{xAy}$ et $\widehat{x'Ay'}$ ont même mesure.

Angles formés par deux parallèles et une sécante



PROPRIÉTÉ 14

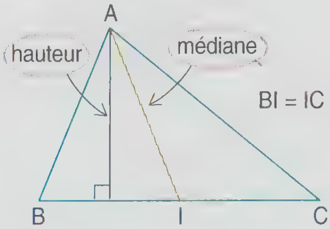
Si d et d' sont parallèles, **alors** les angles alternes internes **1** et **2** ont même mesure.

PROPRIÉTÉ 15

Réciproquement, si les angles alternes internes **1** et **2** ont même mesure, **alors** d et d' sont parallèles.

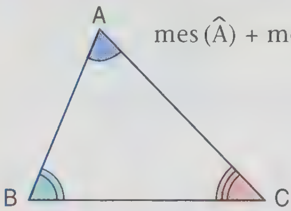
7 Triangles

Droites remarquables



La **médiane** issue de A est la droite passant par A et par le milieu I de [BC].
La **hauteur** issue de A est la droite passant par A et perpendiculaire à (BC).
Les **médiatrices** d'un triangle sont les médiatrices des trois côtés du triangle.
Les **bissectrices** d'un triangle sont les bissectrices des trois angles du triangle.

Angles d'un triangle



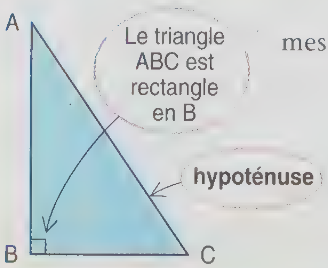
$\text{mes}(\widehat{A}) + \text{mes}(\widehat{B}) + \text{mes}(\widehat{C}) = 180°$

PROPRIÉTÉ 16

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.

Triangle rectangle

Un **triangle rectangle** est un triangle ayant deux côtés perpendiculaires.



$(AB) \perp (BC)$

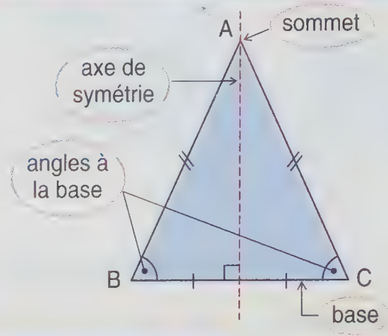
$\text{mes}(\widehat{A}) + \text{mes}(\widehat{C}) = 90°$

PROPRIÉTÉ 17

La somme des mesures des angles aigus d'un triangle rectangle est égale à 90° : ces angles aigus sont **complémentaires**.

Triangle isocèle

Un **triangle isocèle** est un triangle qui a deux côtés de même longueur.



PROPRIÉTÉ 18

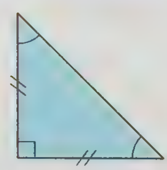
Un triangle ABC isocèle en A possède un axe de symétrie qui est la médiatrice du côté [BC], mais aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$.

PROPRIÉTÉ 19

Les angles à la base d'un triangle isocèle ont même mesure.

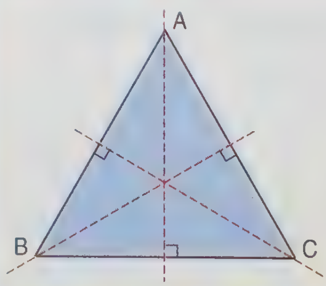
PROPRIÉTÉ 20

Les angles à la base d'un triangle rectangle isocèle mesurent 45°.



Triangle équilatéral

Un **triangle équilatéral** est un triangle qui a ses trois côtés de même longueur.



AB = BC = AC

PROPRIÉTÉ 21

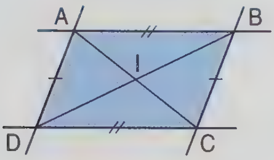
- Un triangle équilatéral est un triangle isocèle particulier.
- Il a 3 axes de symétrie.
- Ses trois angles mesurent 60°.

Parallélogrammes

8 Parallélogrammes

Définition

Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.



(AB) // (DC)
(AD) // (BC)

Propriétés du parallélogramme

PROPRIÉTÉ 22

Un parallélogramme a un **centre de symétrie** : le point d'intersection des deux diagonales.

PROPRIÉTÉ 23

- Les **diagonales** d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux.
- **Réciproquement**, un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leurs milieux est un parallélogramme.

PROPRIÉTÉ 24

- Les **côtés opposés** d'un parallélogramme ont la même longueur.
- **Réciproquement**, un quadrilatère ayant ses côtés opposés de même longueur est un parallélogramme.

PROPRIÉTÉ 25

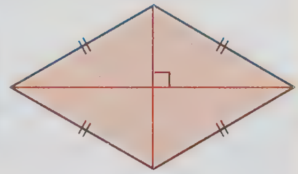
- Les **angles opposés** d'un parallélogramme ont même mesure.
- **Réciproquement**, un quadrilatère ayant ses angles opposés de même mesure est un parallélogramme.

PROPRIÉTÉ 26

Un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme.

Losange

Un **losange** est un quadrilatère qui a tous ses côtés de même longueur.

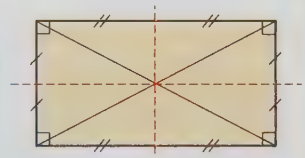


PROPRIÉTÉ 27

Un losange est un parallélogramme particulier ; ses côtés opposés sont parallèles.
- Un losange a deux axes de symétrie perpendiculaires : ses **diagonales**.

Rectangle

Un **rectangle** est un quadrilatère ayant quatre angles droits.



PROPRIÉTÉ 28

Un rectangle est un parallélogramme particulier ; ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur.
- Ses **diagonales** sont de même longueur et se coupent en leur milieu.

PROPRIÉTÉ 29

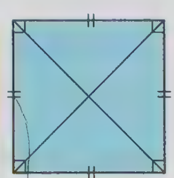
Les **médianes** d'un rectangle sont des axes de symétrie du rectangle. Elles sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.

Carré

Un **carré** est un quadrilatère ayant quatre angles droits et quatre côtés de même longueur.

PROPRIÉTÉ 30

Un carré est à la fois un losange et un rectangle.



Les pages bleues

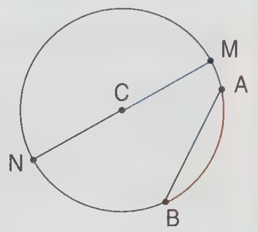
Cercle, disque, prisme et cylindre

9 Cercle et disque

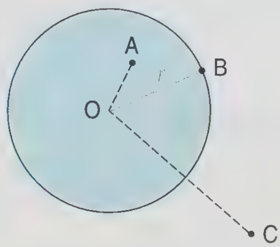
Définitions

Le **cercle** de **centre** C et de **rayon** r est l'ensemble des points M du plan tels que CM = r.

- [CM] est un **rayon**.
- [MN] est un **diamètre**.
- [AB] est une **corde**.
- CM = r.

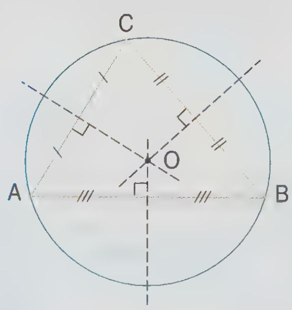


Le **disque** de **centre** O et de **rayon** r est l'ensemble des points du plan dont la distance à O est inférieure ou égale à r.



A et B appartiennent au disque de centre O et de rayon r ; C n'appartient pas à ce disque.

Cercle circonscrit à un triangle

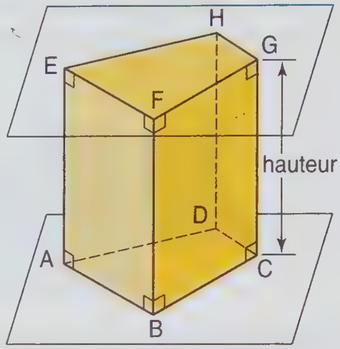


Propriété 31

Les médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.

10 Prisme

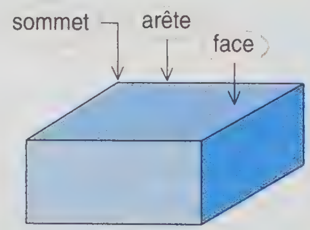
Description



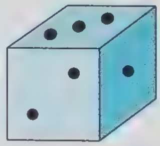
- Les points A, B, C… sont les **sommets**.
- Les deux faces ABCD et EFGH sont les **bases**. Elles sont superposables et situées dans des plans parallèles.
- Les autres faces sont les **faces latérales**.
Elles sont rectangulaires et perpendiculaires aux bases.
- Les **arêtes** (AE), (BF), (CG) et (DH) sont parallèles entre elles et perpendiculaires aux bases.

Prismes particuliers

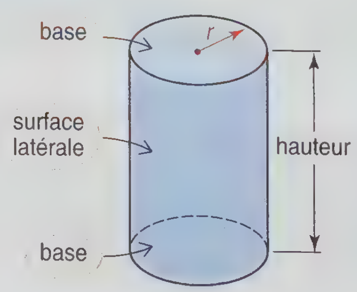
Un **parallélépipède** est un prisme délimité par 6 faces rectangulaires.



Un **cube** est un parallélépipède dont les 6 faces sont carrées.



11 Cylindre



RECUEIL DE MÉTHODES DE CALCUL

M1 **Comment simplifier une fraction ?**
Voir p. 33 (chap. 2).

M2 **Comment réduire des fractions au même dénominateur ?**
Voir p. 33 (chap. 2).

M3 **Comment savoir si deux nombres sont inverses l'un de l'autre ?**
Voir p. 34 (chap. 2).

M4 **Comment trouver un nombre inconnu dans une égalité de quotients ?**
Voir p. 34 (chap. 2).

M5 **Comment développer un produit ?**
Voir p. 67 (chap. 4).

RECUEIL DE MÉTHODES DE GÉOMÉTRIE

TABLE DES MOTS-CLÉS

M1 Comment démontrer que trois points sont **alignés** ?
Utiliser la définition p. 238 (**Pages bleues**).
Utiliser la propriété 9 des **Pages bleues**.

M2 Comment démontrer que deux **angles** ont **même mesure** ?
Utiliser les propriétés 11, 12, 13, 14, 19, 25 des **Pages bleues**.
Voir aussi p. 214 (chap. 14).

M3 Comment calculer une **mesure d'angle** ?
Utiliser les propriétés 16, 17, 21 des **Pages bleues**.
Voir aussi p. 202 (chap. 13).

M4 Comment démontrer qu'une droite est un **axe de symétrie** ?
Utiliser la définition p. 239 (**Pages bleues**).
Utiliser les propriétés 18, 21, 27, 29 des **Pages bleues**.

M5 Comment démontrer qu'une droite est **bissectrice** d'un angle ?
Utiliser la définition p. 241 (**Pages bleues**).
Utiliser la propriété 18 des **Pages bleues**.
Voir aussi p. 157 (chap. 10).

M6 Comment démontrer qu'un quadrilatère est un **carré** ?

Utiliser la définition p. 243 (**Pages bleues**).
Utiliser la définition d'un cube p. 244 (**Pages bleues**).

M7 Comment démontrer qu'un point est **centre de symétrie** ?
Utiliser la définition p. 240 (**Pages bleues**).
Utiliser la propriété 22 des **Pages bleues**.

M8 Comment démontrer qu'un point appartient à un **cercle** ?
Utiliser la définition p. 244 (**Pages bleues**).
Voir aussi p. 188 (chap. 12).

M9 Comment démontrer que trois droites sont **concourantes** ?
Utiliser la propriété 31 des **Pages bleues**.
Voir aussi p. 157 (chap. 10).

M10 Comment calculer le **cosinus** d'un angle aigu ?
Voir p. 202 (chap. 13).

M11 Comment démontrer qu'un point appartient à un **disque** ?
Utiliser la définition p. 244 (**Pages bleues**).

M12 Comment démontrer qu'un triangle est **équilatéral** ?
Utiliser la définition p. 242 (**Pages bleues**).

M13 Comment démontrer qu'une droite est **hauteur d'un triangle** ?
Utiliser la définition p. 242 (**Pages bleues**).
Voir aussi p. 157 (chap. 10).

M14 Comment démontrer qu'un triangle est **isocèle** ?
Utiliser la définition p. 242 (**Pages bleues**).
Voir aussi p. 157 (chap. 10).

M15 Comment calculer la **longueur d'un segment** ?
Voir p. 140 (chap. 9), p. 170 (chap. 11) et p. 203 (chap. 13).

M16 Comment démontrer que deux segments ont **même longueur** ?
Utiliser la définition d'un triangle isocèle, ou équilatéral p. 242 (**Pages bleues**), ou celle d'un losange, ou d'un carré p. 243 (**Pages bleues**).
Utiliser les propriétés 4, 5, 8, 24, 28 des **Pages bleues**.
Voir aussi p. 188 (chap. 12) et p. 214 (chap. 14).

M17 Comment démontrer qu'un quadrilatère est un **losange** ?
Utiliser la définition p. 243 (**Pages bleues**).

M18 Comment démontrer qu'une droite est **médiane d'un triangle** ?
Utiliser la définition p. 242 (**Pages bleues**).
Voir aussi p. 157 (chap. 10).

M19 Comment démontrer qu'une droite est **médiatrice d'un segment** ?
Utiliser la définition p. 239 (**Pages bleues**).
Utiliser les propriétés 4, 18 des **Pages bleues**.

M20 Comment démontrer qu'un point appartient à la **médiatrice d'un segment** ?
Utiliser la propriété 4 des **Pages bleues**.

M21 Comment démontrer qu'un point est **milieu** d'un segment ?
Utiliser les propriétés 5, 8, 23, 28, 29 des **Pages bleues**.
Voir aussi p. 125 (chap. 8) et p. 157 (chap. 10).

M22 Comment démontrer que deux droites sont **parallèles** ?
Utiliser la définition p. 238 (**Pages bleues**).
Utiliser la définition d'un parallélogramme p. 243 (**Pages bleues**).
Utiliser les propriétés 1, 2, 6, 9, 15, 27, 28 des **Pages bleues**.
Voir aussi p. 125 (chap. 8) et p. 214 (chap. 14).

M23 Comment démontrer qu'un quadrilatère est un **parallélogramme** ?
Utiliser la définition p. 243 (**Pages bleues**).
Utiliser les propriétés 23, 24, 25, 26 des **Pages bleues**.
Voir aussi p. 214 (chap. 14).

M24 Comment démontrer que deux droites sont **perpendiculaires** ?
Utiliser la définition d'un triangle rectangle p. 242 (**Pages bleues**), ou celle d'un rectangle ou d'un carré p. 243 (**Pages bleues**).
Utiliser les propriétés 3, 7, 10, 27, 29 des **Pages bleues**.
Voir aussi p. 157 (chap. 10) et p. 188 (chap. 12).

M25 Comment démontrer qu'un quadrilatère est un **rectangle** ?
Utiliser la définition p. 243 (**Pages bleues**).
Utiliser la définition d'un parallélépipède p. 244 (**Pages bleues**).

M26 Comment démontrer qu'un triangle est **rectangle** ?
Utiliser la définition p. 242 (**Pages bleues**).
Voir aussi p. 170 (chap. 11) et p. 189 (chap. 12).

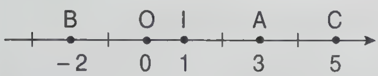
M27 Comment démontrer qu'une droite est **tangente à un cercle** ?
Utiliser la définition p. 188 (chap. 12).

MINI-DICO

A

Abscisse

• Abscisse d'un point sur une droite graduée.
Exemples :



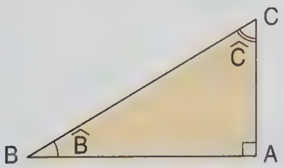
L'abscisse de A est 3, celle de B est – 2, celle de C est 5.
• Voir § 2 des **Pages bleues**.

Addition

• *Exemple* : 103,54 + 25,9 = 129,44.
• Les deux nombres additionnés sont les termes.
Le résultat de l'addition est la somme des deux termes.
• Addition des nombres relatifs : voir p. 14.
• Addition des fractions : voir p. 31.

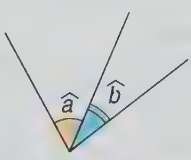
Adjacent (côté)

Dans le triangle ABC rectangle en A, le côté adjacent de $\widehat{B}$ est [BA] et le côté adjacent de $\widehat{C}$ est [CA].



Adjacents (angles)

Les **angles** $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ sont adjacents.



Ils ont un sommet commun et un côté commun.

Aigu (angle)

Angle de mesure inférieure à 90°.

Aire

• C'est la mesure d'une surface.
• Les unités d'aire sont le mètre carré et ses dérivés. Voir les **Unités de mesure**.

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
			31	00	00	
	0	08	50			

On lit sur ce tableau :
31 m^2 = 310 000 cm^2
850 m^2 = 0,085 hm^2.
• Voir **Latérale**.
• Voir le **Formulaire de géométrie**.

Alignés (points)

Voir § 1 des **Pages bleues**.

Alternes internes (angles)

Voir § 6 des **Pages bleues**.

Angle

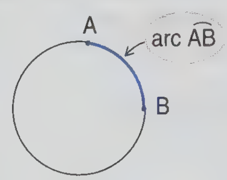
• Voir § 6 des **Pages bleues**.
• Le **degré** et le **grade** sont des unités d'angle. L'angle droit mesure 90 degrés ou 100 grades.
• Voir aussi **Adjacents**, **Aigu**, **Alternes internes**, **Complémentaires**, **Correspondants**, **Droit**, **Nul**, **Obtus**, **Opposés par le sommet**, **Plat**, **Rentrant**, **Saillant**, **Supplémentaires**.

Année-lumière

Unité de distance utilisée en astronomie : c'est la distance parcourue par la lumière en une année. Or la lumière se déplace à 300 000 km par seconde.
Donc, une année-lumière vaut environ :
300 000 × 3 600 × 24 × 365 km
soit ≈ 9 461 milliards de km.
On peut écrire aussi :
1 année-lumière ≈ 9,5 × 10^{12} km
ou encore :
1 année-lumière ≈ 10^{13} km.

Arc

Un arc est une portion de cercle comprise entre deux points A et B.



Are

Unité d'aire utilisée pour les terrains. Voir les **Unités de mesure**.

Arête

• Voir **Polyèdre**, **Latérale**.
• Voir aussi le § 10 des **Pages bleues**.

Arrondi

• *Exemple* : $\frac{10}{\ } \approx 1{,}428\,571$.

L'arrondi d'ordre 0 de $\frac{10}{\ }$ est 1.
L'arrondi d'ordre 1 est 1,4.
L'arrondi d'ordre 2 est 1,43.
L'arrondi d'ordre 3 est 1,429. Etc.
• On arrondit **par défaut** lorsque la décimale qui suit est 0, 1, 2, 3 ou 4, et **par excès** lorsqu'elle est 5, 6, 7, 8 ou 9.
Ainsi : l'arrondi d'ordre 0 de 1,5 est 2, et l'arrondi d'ordre 2 de 3,175 est 3,18.

Axe

• Voir § 2 des **Pages bleues**.
• **Axe de symétrie** : voir § 4 des **Pages bleues**.

B

Base

• Voir **Trapèze**.
• Voir **Triangle isocèle** au § 7 des **Pages bleues**.
• Base d'une pyramide, d'un cône : voir p. 229.
• Base d'un prisme, d'un cylindre : voir le **Formulaire de géométrie**.

Bissectrice (d'un angle)

• Voir § 6 des **Pages bleues**.
• Bissectrices d'un triangle : voir p. 156.

C

Camembert

Voir **Statistiques**.

Carré

• Voir § 8 des **Pages bleues**.
• Voir aussi le **Formulaire de géométrie**.

Carré (d'un nombre)

Le carré d'un nombre a est :
$a^2 = a \times a$.
Exemple : $3^2 = 3 \times 3 = 9$.

Centre

• Centre d'un **cercle** : voir § 9 des **Pages bleues**.
• Centre de **symétrie** : voir § 5 des **Pages bleues**.
• Centre d'un **parallélogramme** : voir § 8 des **Pages bleues**.
• Centre de **gravité** : voir **Gravité**.

Cercle

- Voir § 9 des **Pages bleues**.
- Voir aussi **Arc, Disque**.
- Voir le **Formulaire de géométrie**.

Chiffre

Caractère utilisé pour écrire des nombres.
Les dix chiffres de notre numération sont 0, 1, 2, … 9.

Circonférence

Ce terme désigne aussi bien un cercle que la longueur d'un cercle.

Circonscrit (cercle)

Voir p. 156.

Circulaire (diagramme)

Voir **Statistiques**.

Classe

Regroupement en classes : voir **Statistiques**.

Cocycliques (points)

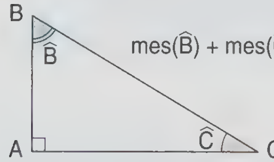
Des points cocycliques sont des points situés sur un même cercle.

Comparer

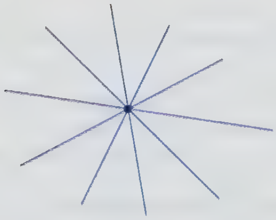
- Comparer deux nombres, c'est trouver le plus petit et le plus grand.
- Voir p. 83.

Complémentaires (angles)

- Des angles sont complémentaires si la somme de leurs mesures vaut 90°.
- *Exemple* : les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.



Concourantes (droites)



Des droites concourantes sont des droites qui se coupent en un même point.

Cône

Voir p. 229.

Conjecture, Conjecturer

- Propriété qui semble vraie mais qui n'est pas encore démontrée. On l'appellera « théorème » lorsqu'elle sera démontrée.
- **Conjecturer** : formuler une conjecture.

Consécutif

Des objets consécutifs sont des objets qui se suivent.
Exemple : les nombres entiers 4, 5, 6, 7 sont consécutifs.

Contre-exemple

Exemple qui montre qu'une phrase est fausse.
Si quelqu'un dit : « Tous les nombres pairs sont divisibles par 4 »,
on peut lui montrer que ceci est faux à l'aide d'un contre-exemple comme 6 (ou 10, ou 14, etc.) qui est pair et non divisible par 4.

Coordonnée

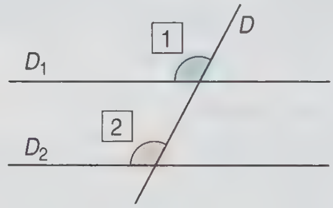
Voir § 2 des **Pages bleues**.

Corde

Voir **Cercle** au § 9 des **Pages bleues**.

Correspondants (angles)

Soit deux droites D_1 et D_2 coupées par une sécante D.
Les angles $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ sont correspondants (ils ont même mesure lorsque D_1 // D_2).



Cosinus

Voir p. 202.

Côté

- Côté d'un angle : voir § 6 des **Pages bleues**.
- Côté d'un polygone : voir **Polygone**.

Critères de divisibilité

Voir **Divisibilité**.

Croissant (ordre)

Du plus petit au plus grand.

Croix (produit en)

Voir **Produit**.

Cube

Voir § 10 des **Pages bleues**.

Cube (d'un nombre)

Le cube d'un nombre a est :
$a^3 = a \times a \times a$.
Exemple : $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

Cumulé

Voir p. 112.

Cylindre

Voir § 11 des **Pages bleues**.
Voir le **Formulaire de géométrie**.

D

Décagone

Polygone à 10 côtés.

Décimal (nombre), décimale

- Un nombre décimal est la somme d'un nombre entier et de quelques dixièmes, centièmes, millièmes, etc.
Exemples :

$$234 + \frac{1}{\quad} + \frac{7}{\quad} = 234{,}17.$$

$$1{,}703\,2 = 1 + \frac{7}{\quad} + \frac{3}{\quad} + \frac{2}{\quad}$$

$$= 1 + \frac{7\,032}{\quad}.$$

- Les chiffres écrits après la virgule sont les **décimales**.
Il ne doit pas y en avoir une infinité.
Ainsi, le nombre $\frac{1}{-} = 0{,}333\,333\,333\ldots$
n'est pas décimal.

Décroissant (ordre)

Du plus grand au plus petit.

Défaut (arrondi par)

Voir **Arrondi**.

Degré

Voir **Angle**.

Dénominateur

Voir **Fraction**.

Développer

Voir p. 66 et 67.

Diagonale

Dans un quadrilatère, droite joignant les sommets opposés.

Diagramme

Diagramme circulaire, diagramme en bâtons : voir **Statistiques**.

Diamètre

Voir **Cercle** au § 9 des **Pages bleues**.

Différence

Résultat d'une soustraction.

Disque

- Surface délimitée par un cercle.
- Voir § 9 des **Pages bleues**.
- Voir le **Formulaire de géométrie**.

Distance

- La distance de **deux points** A et B est la longueur AB.
- Distance **d'un point A à une droite** ***d*** : voir p. 187.

Distributivité
Voir p. 67.

Dividende
Voir **Division**.

Diviseur
Voir **Division**.

Divisibilité (critères de)
Un nombre entier est divisible :
– par 2 si son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
– par 5 si son dernier chiffre est 0 ou 5 ;
– par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
– par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Divisible
Voir **Division**.

Division
• *Exemple de division :*

$$\begin{array}{r|l} 3{,}5 & 4 \\ \hline 30 & 0{,}875 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

Le **dividende** est 3,5, le **diviseur** est 4.
Le **quotient** (exact) est 0,875.
• *Exemple de division avec des nombres entiers :*

$$\begin{array}{r|l} 29 & 8 \\ \hline 5 & 3 \end{array}$$

Le dividende est 29, le diviseur est 8.
Le **quotient entier** est 3, le **reste** est 5.
Et l'on a : 29 = 3 × 8 + 5.
• Un nombre entier a est **divisible** par un nombre entier b si le reste de la division entière de a par b est nul.
Exemple : 91 est divisible par 13

$$\begin{array}{r|l} 91 & 13 \\ \hline 0 & 7 \end{array}$$

On dit aussi que 91 est **multiple** de 13, ou que 13 est un **diviseur** de 91.
• Division de **nombres relatifs** : voir p. 14.
• Division de **fractions** : voir p. 32 et 33.

Dodécagone
Polygone à 12 côtés.

Droit (angle)
Un angle droit mesure 90 degrés, ses deux côtés sont perpendiculaires.

Droite
• Voir § 1 des **Pages bleues**.
• Droite **des milieux** : voir p. 124.

E

Échelle
Exemple. Sur une carte routière à l'échelle $\frac{1}{200\,000}$ 1 cm (sur la carte) représente 200 000 cm (en réalité) ; autrement dit, 1 cm représente 2 km.

Effectif
• Ce mot est utilisé en statistiques et signifie « nombre ».
• Effectif **cumulé** : voir p. 112.
• Effectif **total** : somme de tous les effectifs.

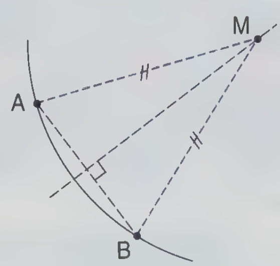
Égalité
• Égalité de deux **fractions** : voir p. 31.
• Égalité de 2 quotients : voir p. 33.
• **Opérations** et égalités : voir p. 14.

Encadrement
• Lorsqu'un nombre x est compris entre deux nombres a et b, on dit que x est **encadré** par a et b.
On écrit : $a \leqslant x \leqslant b$.
• L'**amplitude** de l'encadrement est $b - a$.
Exemple : $\pi \approx 3{,}141\,592$
$3 < \pi < 4$ est un encadrement de π à 1 près.
$3{,}1 < \pi < 3{,}2$ est un encadrement à 0,1 près.
$3{,}14 < \pi < 3{,}15$ est un encadrement à 0,01 près.

Ennéagone
Polygone à 9 côtés.

Équation (résoudre une)
Voir p. 15.

Équidistant
Un point M est équidistant de deux points A et B lorsque la distance MA est égale à la distance MB.



Dans ce cas, M est situé sur la médiatrice du segment [AB] et le triangle AMB est isocèle en M.

Équilatéral
Voir § 7 des **Pages bleues**.

Excès (arrondi par)
Voir **Arrondi**.

Exposant
Voir **Puissance**.

F

Face
• Voir **Polyèdre, Latérale**.
• Voir aussi § 10 des **Pages bleues**.
• Voir aussi p. 229.

Facteur
Voir **Multiplication**.

Factoriser
Factoriser une expression numérique, c'est la mettre sous la forme d'un produit de facteurs.
Exemple : en factorisant $8x + 4y$, on obtient $4(2x + y)$.

Fraction
• *Exemple de fraction :*

$$\frac{2}{3} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{numérateur} \\ \longleftarrow \text{dénominateur} \end{array}$$

Le numérateur est un nombre entier quelconque et le dénominateur un nombre entier différent de zéro.
• $\frac{a}{b}$ est égal au quotient de a par b.
• Une fraction est **décimale** si son dénominateur est 10, 100, 1 000…
• Pour tout savoir sur les fractions : voir p. 31 à 33.

Fréquence
• Quotient d'un effectif par l'effectif total, souvent exprimé en pourcentage.
• Fréquence **cumulée** : voir p. 112.

G

Gigamètre
Unité de longueur.
Voir **Unités de mesure**.

Grade
Voir **Angle**.

Gramme
Unité de masse.
Voir **Unités de mesure**.

Gravité (centre de)
Voir p. 156.

H

Hauteur
• Hauteur d'un triangle : voir p. 156.
• Hauteur d'une pyramide, d'un cône : voir p. 229.
• Hauteur d'un trapèze, d'un parallélogramme, d'un prisme, d'un cylindre : voir le **Formulaire de géométrie**.

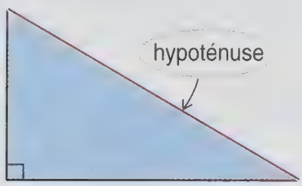
Hectare
Unité d'aire.
Voir **Unités de mesure**.

Heure
Unité de temps.
Voir **Unités de mesure**.

Hexagone
Polygone à 6 côtés.

Histogramme
Voir p. 112 ou voir **Statistiques**.

Hypoténuse
Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit.



Hypothèse
Dans une **démonstration**, les hypothèses sont des données connues (généralement fournies par le texte) à partir desquelles on peut obtenir (plus exactement en **déduire**) une nouvelle donnée appelée **conclusion**.

I

Impair
Voir **Pair**.

Inégalité
• Relation de la forme
$a \leqslant b$ ou $a \geqslant b$.
• Inégalité **stricte** : relation de la forme
$a < b$ ou $a > b$.

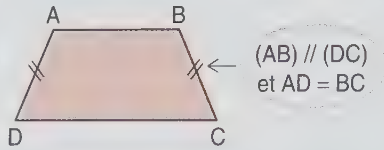
Inscrit (cercle)
• Le cercle inscrit dans un triangle est le cercle tangent aux trois côtés.
• Son centre est le point commun aux trois bissectrices.

Interne
Voir **Alternes internes (angles)**.

Inverse
Voir p. 32 et 33.

Irréductible
Une fraction est irréductible lorsque le seul diviseur commun au numérateur et au dénominateur est 1. On ne peut pas simplifier une fraction irréductible.

Isocèle
• Triangle isocèle : voir § 7 des **Pages bleues**.
• Trapèze isocèle :



L

Latérale
• Arête latérale d'une pyramide : voir p. 229.
• Face latérale d'un prisme : voir § 10 des **Pages bleues**.
• Surface latérale d'un cylindre : voir § 11 des **Pages bleues**.
• Aire latérale d'un prisme, d'un cylindre : voir **Formulaire de géométrie**.
• Aire latérale d'une pyramide : voir p. 230.

Litre
Unité de volume.
Voir les **Unités de mesure**.

Littéral (calcul)
Calcul avec des lettres.

Longueur
Les unités de longueur sont le mètre et ses dérivés. Voir **Unités de mesure**.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
3	2	5	0			
			0	0	6	

Dans ce tableau on lit :
3,25 km = 3 250 m et 6 cm = 0,06 m.

Losange
• Voir § 8 des **Pages bleues**.
• Voir le **Formulaire de géométrie**.

M

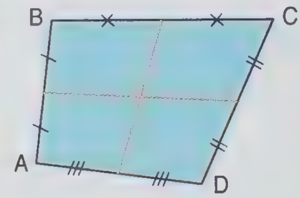
Magique (carré)
Grille carrée remplie de nombres ayant la même somme sur les lignes, les colonnes et les diagonales.
Exemple :

13	2	3	16	→ 34
8	11	10	5	→ 34
12	7	6	9	→ 34
1	14	15	4	→ 34

↙ ↓ ↓ ↓ ↓ ↘
34 34 34 34 34 34

Masse
Voir les **Unités de mesure**.

Médiane
• Médiane d'un triangle : voir p. 156.
• Médiane d'un quadrilatère : droite joignant les milieux de deux côtés opposés.



Médiatrice
• Voir § 3 des **Pages bleues**.
• Médiatrices d'un triangle : voir p. 156.

Mégamètre
Unité de longueur.
Voir les **Unités de mesure**.

Micromètre
Unité de longueur.
Voir les **Unités de mesure**.

Milieu
• Le milieu d'un segment est le point appartenant à ce segment et équidistant des extrémités.

• Droite des milieux : voir p. 124.

Minute
Unité de temps.
Voir **Unités de mesure**.

Moyenne
Voir p. 113.

Multiple
Voir **Division**.

Multiplication
Exemple : $\underbrace{264{,}1 \times 3{,}2}_{\text{facteurs}} = \underbrace{845{,}12}_{\text{produit}}$.

• Multiplication des nombres relatifs : voir p. 14.
• Multiplication des fractions :
voir p. 32.

N

Nanomètre
Unité de longueur.
Voir **Unités de mesure**.

Naturel
Un nombre naturel est un nombre entier positif ou nul.
Exemples : 0, 1, 2, 3…

Négatif
• Un nombre négatif est un nombre inférieur ou égal à 0.
• Voir aussi **Positif** et **Relatif**.

Nul (angle)
Un angle nul mesure 0 degré.

$\widehat{xAx}$ est un angle nul.

Numérateur
Voir **Fraction**.

O

Oblique
Une droite oblique est une droite qui n'est ni verticale, ni horizontale.

Obtus (angle)
Angle dont la mesure est comprise entre 90° et 180°.

Octogone
Polygone à 8 côtés.

Opposés (nombres)
• Deux nombres relatifs sont opposés lorsque leur somme est nulle.
Exemple : + 3,5 et – 3,5 sont opposés.
• Opposé d'une fraction : voir p. 32.

Opposés par le sommet (angles)
Voir § 6 des **Pages bleues**.

Ordonnée
Voir § 2 des **Pages bleues**.

Ordre
Voir **Croissant** ou **Décroissant**.

Origine
Voir § 2 des **Pages bleues**.

Orthocentre
Voir p. 156.

P

Pair
• Un nombre pair est un nombre entier divisible par 2.
Exemples : 0, 2, 4, 6,…
• Un nombre **impair** est un nombre entier qui n'est pas pair.
Exemples : 1, 3, 5,…

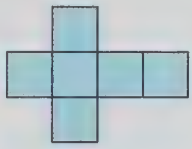
Parallèles (droites)
Voir § 1 des **Pages bleues**.

Parallélépipède
• Voir § 10 des **Pages bleues**.
• Voir le **Formulaire de géométrie**.

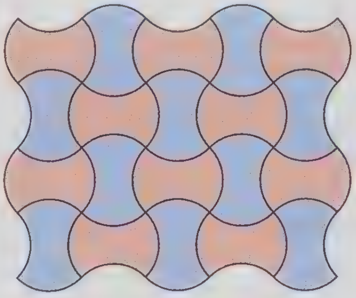
Parallélogramme
• Voir § 8 des **Pages bleues**.
• Voir le **Formulaire de géométrie**.

Partie entière
La partie entière d'un nombre x est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.
Exemples : la partie entière de 3,7 est 3, la partie entière de 5 est 5.

Patron
Figure plane, qui, une fois repliée, forme un solide.
Exemple de patron de cube :



Pavage
Des figures forment un pavage du plan si elles recouvrent le plan sans se chevaucher ni laisser de trous.
Exemple :



Pentagone
Polygone à 5 côtés.

Périmètre
• Mesure du tour ; c'est une longueur.
• Voir le **Formulaire de géométrie**.

Perpendiculaires (droites)
Voir § 1 des **Pages bleues**.

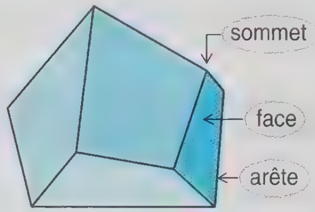
Pi
• Nombre désigné par la lettre grecque π.
$\pi \approx 3{,}141\,592\,653$.
• Pour l'utilisation du nombre π, voir le **Formulaire de géométrie**.

Picomètre
Unité de longueur.
Voir **Unités de mesure**.

Plat
Un angle plat mesure 180°.

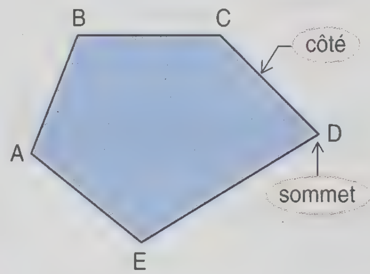
$\widehat{ABC}$ est un angle plat.

Polyèdre
• Solide délimité par plusieurs faces planes.



• Les prismes sont des polyèdres, les pyramides aussi.

Polygone
Figure plane à plusieurs côtés.



Pondérée (moyenne)
Voir p. 113.

Positif
• Un nombre positif est un nombre supérieur ou égal à 0.
• Voir aussi **Négatif** et **Relatif**.

Priorité (des opérations)
Voir p. 66.

Prisme
• Polyèdre ayant deux faces polygonales parallèles pour bases et des rectangles pour faces latérales.
• Voir § 10 des **Pages bleues**.
• Voir le **Formulaire de géométrie**.

Produits en croix
• Avec des quotients égaux : voir p. 33.
• Avec un tableau de proportionnalité : voir p. 97 en bas.

Proportionnalité
Voir p. 95 à 97.

Puissance
• Soit a un nombre et n un entier strictement positif.
Le nombre noté a^n et qui vaut :

$$\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

se lit « a puissance n ».
• L'entier n est appelé « **exposant** ».
• *Exemple* : $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.
• Voir p. 50 et 51.

Pyramide
Voir p. 229.

Q

Quadrilatère
Polygone à 4 côtés.

Quintal
Unité de masse valant 100 kg.
Voir les **Unités de mesure**.

Quotient
Voir **Division**.

R

Racine carrée
Voir p. 166.

Rapport
Synonyme de quotient.

Rapporteur
Instrument ayant généralement la forme d'un demi-disque gradué et servant à mesurer des angles.

Rayon
Voir § 9 des **Pages bleues**.

Rectangle
• Voir § 8 des **Pages bleues**.
• Voir le **Formulaire de géométrie**.

Rectangle (triangle)
• Voir § 7 des **Pages bleues**.
• Voir le **Formulaire de géométrie**.
• Voir aussi p. 170 et 187.

Réduire
• Réduire une expression comme $2a - 3b + 4a + 5b$, c'est l'écrire sous la forme $6a + 2b$. Voir p. 68.
• Réduire des fractions au même dénominateur : voir p. 31.

Régulier(e)
• Un polygone est régulier lorsque ses côtés ont même longueur et ses angles ont même mesure.
• Un polygone régulier est inscriptible dans un cercle.
• Pyramide régulière : voir p. 229.

Relatif
• Un nombre relatif est un nombre positif ou négatif.
• Opérations sur les nombres relatifs : voir p. 14.

Rentrant
• Angle de mesure supérieure à 180°.
• Voir **Saillant**.

Repérage
Voir § 2 des **Pages bleues**.

Résoudre (une équation)
Voir p. 15.

Reste
Voir **Division**.

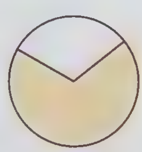
S

Saillant
• Angle de mesure inférieure à 180°.
• Voir § 6 des **Pages bleues**.

Scientifique (notation)
Voir p. 51.

Sécante
Voir § 1 des **Pages bleues**.

Secteur
Un secteur circulaire est une partie de disque comme le montre la figure ci-contre.



Segment

Le segment [AB] est l'ensemble des points de la droite (AB) qui sont situés entre A et B (A et B compris).

Sexagésimal
• Dans un nombre décimal, les unités sont partagées en 10 dixièmes, les dixièmes en 10 centièmes, etc.
Exemple : dans 2,57, le « 5 » indique le nombre de dixièmes et le « 7 » indique le nombre de centièmes.
• Dans un nombre sexagésimal, les unités sont partagées en 60 soixantièmes, les soixantièmes sont partagés eux aussi en 60 parties égales, etc.
Exemple : dans 3 h 20 min 15 s, le « 20 » indique le nombre de soixantièmes d'heure et le « 15 » indique le nombre de soixantièmes de minute.

Simplifier (une fraction)
Voir p. 31.

Solution (d'une équation)
Voir p. 15.

Somme
Résultat d'une addition.

Sommet
• Voir **Polygone**, **Polyèdre**.
• Sommet d'un angle : voir § 6 des **Pages bleues**.
• Sommets d'un parallélépipède (ou d'un prisme : voir § 10 des **Pages bleues**.
• Sommet d'une pyramide, d'un cône : voir p. 229.

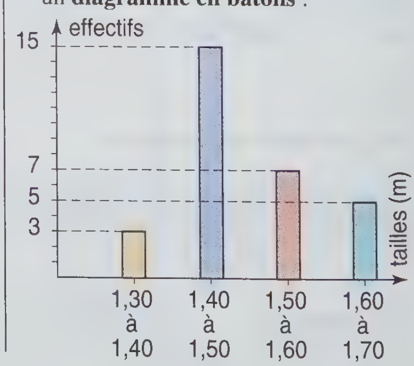
Soustraction
• *Exemple* : $\underbrace{27{,}1 - 4{,}3}_{\text{termes}} = \underbrace{22{,}8}_{\text{différence}}$

• La différence $x - y$ est le nombre qu'il faut additionner à y pour obtenir x.
• Soustraction de nombres relatifs : voir p. 14.
• Soustraction de fractions : voir p. 31.

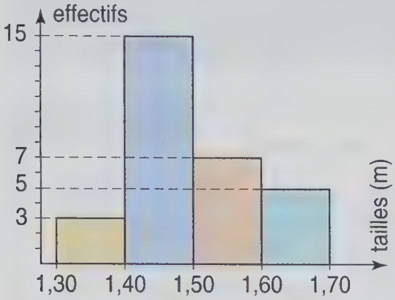
Statistiques
• Voici une distribution statistique : les tailles des 30 adolescents ont été réparties en 4 **classes**.

Tailles t en mètres	Effectifs	Fréquences
$1{,}30 \leq t < 1{,}40$	3	$3 \div 30$ ou 10 %
$1{,}40 \leq t < 1{,}50$	15	$15 \div 30$ ou 50 %
$1{,}50 \leq t < 1{,}60$	7	$7 \div 30$ ou 23,3 %
$1{,}60 \leq t < 1{,}70$	5	$5 \div 30$ ou 16,7 %

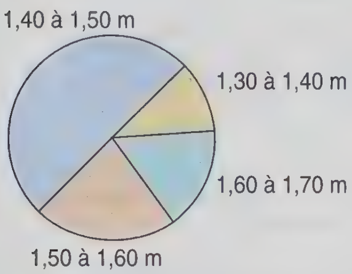
• Cette distribution statistique peut être représentée par :
– un **diagramme en bâtons** :



– un **histogramme** (plus adapté ici) :



– un **diagramme circulaire** (ou « **camembert** ») :



• Voir **Effectif, Fréquence** et **Moyenne**.

Stère
Un stère de bois est la quantité de bois de chauffage qui peut loger dans un mètre cube.

Superficie
Ce mot désigne généralement l'aire d'un terrain.

Supplémentaires (angles)
Des angles sont supplémentaires si la somme de leurs mesures vaut 180°.

Symétrie axiale
Voir § 4 des **Pages bleues**.

Symétrie centrale
Voir § 5 des **Pages bleues**.

Symétrique
Voir § 4 ou 5 des **Pages bleues**.

T

Tangente
Voir p. 188.

Téramètre
Unité de longueur.

Terme
Voir **Addition** ou **Soustraction**.

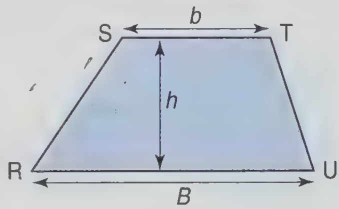
Théorème
Propriété démontrée.
Voir **Conjecture**.

Tonne
Unité de masse.
Voir les **Unités de mesure**.

Tonnelle
Tour en maçonnerie constituant le corps d'un moulin à vent.

Translation
Voir p. 213.

Trapèze
• Quadrilatère ayant 2 côtés parallèles.



Les côtés parallèles [RU] et [ST] sont les **bases** ; *h* est la **hauteur**.
• Les parallélogrammes sont des trapèzes particuliers.
• Trapèze « rectangle » : trapèze ayant deux angles droits.
• Voir aussi **Isocèle**.
• Voir aussi le **Formulaire de géométrie**.

Triangle
Voir § 7 des **Pages bleues**.

Troncature
Exemple : $\pi \approx 3{,}141\,592$.
La troncature d'ordre 0 de π est 3 ; c'est la partie entière.
La troncature d'ordre 1 est 3,1.
La troncature d'ordre 4 est 3,141 5.

V

Vitesse
Voir p. 95.

Volume
• Les unités de volume sont le mètre cube et ses dérivés.

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
			25	000	000	
				1	500	

On lit dans ce tableau :
$25\ m^3 = 25\,000\ dm^3$
$= 25\,000\,000\ cm^3$
$1\,500\ cm^3 = 1{,}5\ dm^3$.
• Voir les **Unités de mesure** et le **Formulaire de géométrie**.

UNITÉS DE MESURE

LONGUEURS

kilomètre	(km)	1 km	= 1 000 m
hectomètre	(hm)	1 hm	= 100 m
décamètre	(dam)	1 dam	= 10 m
mètre	**(m)**		
décimètre	(dm)	1 dm	= 0,1 m
centimètre	(cm)	1 cm	= 0,01 m
millimètre	(mm)	1 mm	= 0,001 m

• Pour des objets très gros ou très petits, on utilise :

téramètre	(Tm)	1 Tm	$= 10^{12}$ m
gigamètre	(Gm)	1 Gm	$= 10^{9}$ m
mégamètre	(Mm)	1 Mm	$= 10^{6}$ m
micromètre	(µm)	1 µm	$= 10^{-6}$ m
nanomètre	(nm)	1 nm	$= 10^{-9}$ m
picomètre	(pm)	1 pm	$= 10^{-12}$ m

VOLUMES

kilomètre cube	(km^3)		
hectomètre cube	(hm^3)		
décamètre cube	(dam^3)	1 dam^3	= 1 000 m^3
mètre cube	**(m^3)**		
décimètre cube	(dm^3)	1 dm^3	= 0,001 m^3
centimètre cube	(cm^3)		
millimètre cube	(mm^3)		

Les unités de volume vont de 1 000 en 1 000.

• Dans la vie courante, on utilise aussi :

hectolitre	(hL)	1 hL	= 100 L = 0,1 m^3
décalitre	(daL)	1 daL	= 10 L
litre	**(L)**	1 L	= 1 dm^3
décilitre	(dL)	1 dL	= 0,1 L
centilitre	(cL)	1 cL	= 0,01 L
millilitre	(mL)	1 mL	= 0,001 L = 1 cm^3

AIRES

kilomètre carré	(km^2)	1 km^2	= 1 000 000 m^2
hectomètre carré	(hm^2)	1 hm^2	= 10 000 m^2
décamètre carré	(dam^2)	1 dam^2	= 100 m^2
mètre carré	**(m^2)**		
décimètre carré	(dm^2)	1 dm^2	= 0,01 m^2
centimètre carré	(cm^2)	1 cm^2	= 0,0001 m^2
millimètre carré	(mm^2)	1 mm^2	= 0,000 001 m^2

Les unités d'aire vont de 100 en 100.

• Pour les terrains, on utilise aussi :

hectare	(ha)	1 ha	= 100 a = 10 000 m^2
are	(a)	1 a	= 100 m^2
centiare	(ca)	1 ca	= 0,01 a = 1 m^2

MASSES

kilogramme	(kg)	1 kg	= 1 000 g
hectogramme	(hg)	1 hg	= 100 g
décagramme	(dag)	1 dag	= 10 g
gramme	**(g)**		
décigramme	(dg)	1 dg	= 0,1 g
centigramme	(cg)	1 cg	= 0,01 g
milligramme	(mg)	1 mg	= 0,001 g

• On utilise aussi :

tonne	(t)	1 t	= 1 000 kg
quintal	(q)	1 q	= 100 kg.

DURÉES

seconde	(s)		
minute	(min)	1 min	= 60 s
heure	(h)	1 h	= 60 min = 3 600 s
jour	(j)	1 j	= 24 h = 86 400 s

• On utilise aussi les divisions décimales de l'heure.
Exemple : 3,5 h = 3 h 30 min.

ANGLES

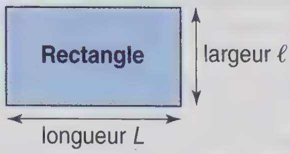
Le **degré**
Un angle droit mesure 90°.
Un angle plat mesure 180°.
Un angle plein mesure 360°.

TABLE D'ILLUSTRATIONS

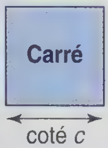
9	ph ©	R. Margaillan
10	ph ©	Château de Versailles, Musée Historique/AKG Photo
18-mg	ph ©	J.-L. Charmet
18-md	ph ©	Collection Viollet
18-b	ph ©	AKG Photo
23	ph ©	B. Revranche
26	ph ©	Londres, British Museum/Hubert Josse
36	ph ©	B. Revranche
45-m	ph ©	Nieto/Jerrican
45-b	ph ©	B. Revranche
49-g	ph ©	AKG Photo
49-d	ph ©	A. Held/Artéphot
	©	Succession Picasso, Paris, 1998
58-bg	ph ©	AAO/D. Mavin/Ciel & Espace
58-bd	ph ©	Institut Pasteur/CNRI
62	ph ©	Fuste-Raga/Jerrican
64	ph ©	B. Revranche
84	ph ©	NASA/Ciel & Espace
98	ph ©	Euro-Vanadium (59)
101-g	ph ©	Dufeu/Jerrican
101-d	ph ©	Campbell/Sipa Press
103	ph ©	B. Revranche
104	ph ©	B. Revranche
137	ph ©	B. Revranche
142	ph ©	B. Revranche
169	ph ©	D. Daviaud
172	ph ©	Dagli Orti
183-h		Illustration Marie-Caroline Revranche
183-b	©	FACOM
212-h, -m, -b	ph ©	B. Revranche
221-hd	ph ©	B. Revranche
221-mg	ph ©	AKG Photo
221-md	ph ©	1998, Cordon Art - Baarn - Holland. All rights reserved.
222-bg	ph ©	B. Revranche
222-bmg	ph ©	B. Revranche
222-bmd	ph ©	B. Revranche
222-bd	ph ©	B. Revranche
226	ph ©	B. Revranche
227	ph ©	B. Revranche
233	ph ©	B. Revranche
237-b	ph ©	S. Grandadam/Hoa Qui
237-h	ph ©	Deplanne/Jerrican

FORMULAIRE DE GÉOMÉTRIE

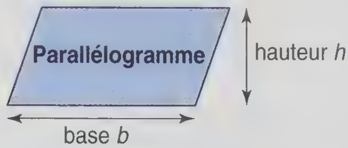
Quadrilatères



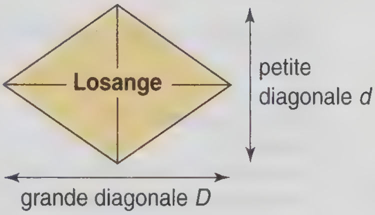
Aire $= L \times \ell$



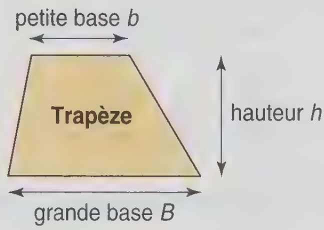
Aire $= c^2$



Aire $= b \times h$

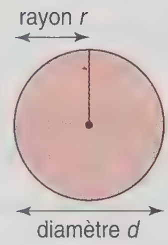


Aire $= \dfrac{D \times d}{2}$



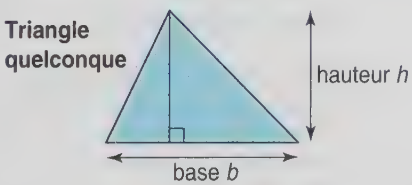
Aire $= \dfrac{(B + b) \times h}{2}$

Cercles et disques



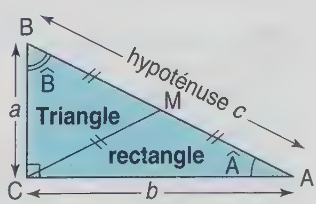
Périmètre $= 2\pi \times r = \pi \times d$
Aire $= \pi \times r^2$

Triangles



Aire $= \dfrac{b \times h}{2}$

Somme des angles $= 180°$



Aire $= \dfrac{b \times a}{2}$

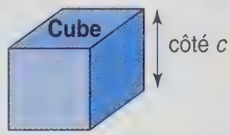
Médiane CM $= \dfrac{1}{2} \times$ hypoténuse

Propriété de Pythagore : $c^2 = a^2 + b^2$

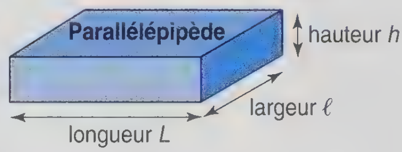
$\cos(\widehat{A}) = \dfrac{b}{c}$ $\qquad b = c \times \cos(\widehat{A})$

$\cos(\widehat{B}) = \dfrac{a}{c}$ $\qquad a = c \times \cos(\widehat{B})$

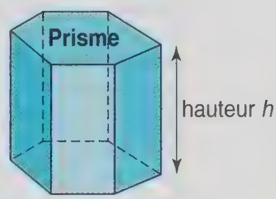
Prismes et cylindres



Volume $= c^3$
Aire totale $= 6 \times c^2$

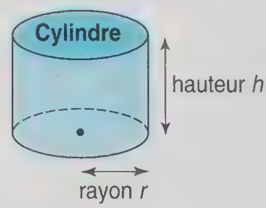


Volume $= L \times \ell \times h$
Aire totale $= 2\,(L \times \ell + L \times h + \ell \times h)$



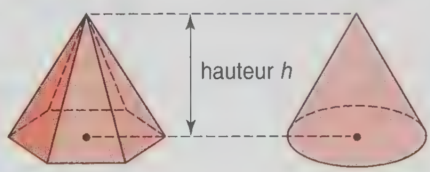
base d'aire B et de périmètre p

Volume $= B \times h$
Aire latérale $= p \times h$



Aire de la base $= \pi \times r^2$
Volume $= \pi \times r^2 \times h$
Aire latérale $= 2\pi \times r \times h$

Pyramides et cônes



Volume $= \dfrac{1}{3} \times$ (aire de base) $\times h$

Symboles géométriques

// : parallèle
⊥ : perpendiculaire
[AB] : segment
(AB) : droite
[AB) : demi-droite
AB : longueur

INDEX

Cet ouvrage est imprimé sur du papier 60 g/m².

Maquette : Yvette Heller
Illustrations : François Dimberton
Composition : Imprimerie Nouvelle
Schémas: Lydie Boué
Impression : Mateu Cromo, S.A. - Espagne
Dépôt Légal : nº 16932 Septembre 1998

48 6103 5

9 782218 721519

GRAPHISME : GEOFFROY RENARD • SCULPTURE DE NATHALIE DECOSTER