T[le]

**Nicolas Nguyen**
*Stéphane Daniel*
*Mathieu Fontes*

PRÉPAS SCIENCES
COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

# MATHÉMATIQUES EXPERTES

NOUVEAUX PROGRAMMES !

- Résumé de cours
- Démonstrations
- Méthodes
- Vrai/Faux
- Exercices avec indications
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

PRÉPAS SCIENCES
collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

# Mathématiques expertes

## Terminale

NOUVEAUX PROGRAMMES

ouvrage coordonné par

Nicolas NGUYEN
*Professeur de mathématiques en MPSI*
*au lycée François Rabelais (Saint-Brieuc)*

Stéphane DANIEL
*Professeur de mathématiques*
*au lycée Arnaut Daniel (Ribérac)*

Mathieu FONTES
*Professeur de mathématiques*
*au lycée Louis Barthou (Pau)*

ellipses

# PRÉFACE

**En route vers de brillantes études scientifiques !**

Vous avez choisi l'option Mathématiques expertes, c'est certainement pour réussir des études scientifiques de haut niveau. Certes, votre but est d'abord de réussir brillamment le baccalauréat, mais vous souhaitez aller beaucoup plus loin dans votre formation scientifique aussi, cet ouvrage est fait pour vous. Il sera en effet particulièrement utile à ceux qui souhaitent acquérir un très bon niveau en maths dans l'optique d'une poursuite d'études supérieures en classe préparatoire scientifique ou économique ou bien dans une formation dans laquelle les mathématiques sont une des composantes importantes comme dans une licence scientifique.

Afin d'établir un lien fort avec le supérieur, c'est une équipe composée d'enseignants de Terminale et de Prépa qui a écrit et coordonné cet ouvrage. Tout en suivant strictement le programme de l'option mathématiques expertes de Terminale, ce livre l'appréhende différemment car il insiste sur les points délicats, il présente des approches plus théoriques mais surtout, il facilite la compréhension des méthodes de raisonnement et de résolution qui sont la clé de la réussite dans les études supérieures scientifiques. Il permet ainsi l'acquisition de connaissances solides en mathématiques.

La structure de chaque chapitre est identique.

- **Le résumé de cours** vous remet en mémoire tous les résultats à savoir. Il vous permet d'accéder à une connaissance synthétique du cours. Sa relecture est indispensable avant un devoir en classe.
- **Les démonstrations**, choisies pour leur intérêt pédagogique, vous familiarisent avec les techniques du raisonnement et vous permettent de mieux retenir les théorèmes importants.
- **La partie « méthodes »** vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.
- **La partie « vrai/faux »** vous permet de tester votre recul par rapport au programme, vous révèle les mauvais reflexes à corriger et vous met en garde contre les erreurs classiques.
- **Les exercices** sont incontournables pour assimiler le programme et pour acquérir un niveau très satisfaisant. Des indications, que les meilleurs pourront ignorer, permettent d'avancer selon son niveau. Les corrigés sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi ce livre complète celui utilisé en cours. Il permet d'aborder avec aisance les interrogations, les devoirs surveillés et, pourquoi pas, de briller au grand oral du baccalauréat. Surtout, il procure une compréhension approfondie des mathématiques étudiées dans l'option Maths expertes et offre ainsi les meilleures conditions pour réussir son entrée dans les études supérieures.

Bertrand Hauchecorne

# SOMMAIRE

# Nombres complexes

# Chapitre 1

# Nombres complexes : point de vue algébrique

La découverte d'un nouvel ensemble de nombres contenant des carrés négatifs est en général surprenant. Lorsque, de plus, on se rend compte que ces nouveaux venus simplifient certains calculs, que la trigonométrie en découle et qu'ils permettent des résolutions en géométrie, on comprend aisément la place importante qu'ils ont prise en mathématiques.

### Un mathématicien

En 1545, Jérôme **Cardan** publie un ouvrage dans lequel on trouve pour la première fois une formule donnant les solutions des équations du troisième degré. Pour certaines d'entre elles, l'application de la formule faisait apparaître l'expression $\sqrt{-1}$ qui se simplifiait par miracle, fournissant le bon résultat. Le mathématicien italien Rafaele **Bombelli** (1526-1573) propose alors de créer de nouveaux nombres, que l'on ne nomme pas encore nombres complexes, puis il définit dessus des règles pour les opérations d'addition et multiplication. Un nouvel ensemble de nombres était né !

**LE SAVIEZ-VOUS ?**

Tout polynôme P de degré $n$, à coefficients complexes, se factorise en produit de $n$ monômes de degré 1 ; en d'autres termes, P possède exactement $n$ racines distinctes ou confondues. Pour un polynôme P de degré supérieur ou égal à 2 ayant toutes ses racines de module inférieur ou égal à 1, le mathématicien bulgare Blagovast **Sendov** (1932-2020) a conjecturé que pour toute racine $a$ de P, il existe une racine de P′ distante d'au plus 1 de $a$. Pour un polynôme de degré 2, c'est facile à montrer mais personne n'a jamais su le prouver pour un polynôme de degré quelconque.

COMPÉTENCES

## les incontournables

- Effectuer des calculs avec les nombres complexes
- Mettre un nombre complexe sous forme algébrique
- Montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur
- Résoudre une équation linéaire de la forme $az = b$

## et plus si affinités

- Résoudre une équation faisant intervenir $z$ et $\overline{z}$
- Calculer des sommes à l'aide de la formule du binôme

# Résumé de cours

## Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

**Théorème-Définition 1.1.—** Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, que l'on appelle ensemble des nombres complexes et vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément $i$ tel que $i^2 = -1$ ;
- tout nombre complexe $z$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$, où $a$ et $b$ sont réels ;
- l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ s'étendent à $\mathbb{C}$ avec les mêmes règles de calcul.

**Définition :** *Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) un nombre complexe. Cette écriture est appelée* **forme algébrique** *de $z$. On dit que $a$ est la* **partie réelle** *de $z$ et que $b$ est sa* **partie imaginaire**. *On note $a = \mathfrak{Re}\,(z)$ et $b = \mathfrak{Im}\,(z)$.*

**Remarque :** un nombre complexe est un réel si, et seulement si, sa partie imaginaire est nulle.

**Définition :** *Un* **imaginaire pur** *est un nombre complexe de la forme $z = ib$ (avec $b \in \mathbb{R}$).*

**Remarque :** un nombre complexe est imaginaire pur si, et seulement si, sa partie réelle est nulle.

**Théorème 1.2.— Unicité de la forme algébrique —.** Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire. Autrement dit :

$$\boxed{z = z' \Leftrightarrow \mathfrak{Re}\,(z) = \mathfrak{Re}\,(z') \text{ et } \mathfrak{Im}\,(z) = \mathfrak{Im}\,(z')}$$

**Théorème 1.3.— Opérations sur les nombres complexes —.** Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes (avec $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$). Alors :

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

**Remarque :** les identités remarquables restent valables dans $\mathbb{C}$, en particulier

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

**Théorème 1.4.— Inverse d'un nombre complexe non nul —.** Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. Alors $z$ admet un inverse que l'on note $\frac{1}{z}$ et on a :

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{ib}{a^2 + b^2}}$$

**Remarque :** dire que $z = a + ib$ est un nombre complexe non nul équivaut à dire que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, soit $a^2 + b^2 \neq 0$.

## ■ Conjugué d'un nombre complexe

**Définition :** *Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) un nombre complexe. On appelle* **conjugué** *de $z$ et on note $\overline{z}$ le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - ib$.*

**Exemple :** si $z = 3$ et $z' = -1 + 2i$, alors $\overline{z} = 3$ et $\overline{z'} = -1 - 2i$.

**Remarque :** si $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) alors $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

**Proposition 1.5.— Propriétés la conjugaison —.** Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes. Alors :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
- Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- Pour tout entier naturel $n$, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

**Remarque :** si $z$ est un nombre complexe non nul, alors $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$, ce qui permet de déterminer l'écriture algébrique de $\frac{1}{z}$ puisque $z\overline{z}$ est un réel.
En effet, si $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) alors $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

**Théorème 1.6.—** Soit $z$ un nombre complexe. Alors :

- $\mathfrak{Re}\,(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
- $\mathfrak{Im}\,(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

**Théorème 1.7.— Caractérisation d'un réel, d'un imaginaire pur —.** Soit $z$ un nombre complexe. Alors :

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$
- $z$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$

## ■ Formule du binôme de Newton

**Théorème 1.8.— Formule du binôme —.** Soit $a$ et $b$ deux nombres complexes et $n$ un entier naturel. Alors :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

**Exemple :** pour $n \in \{0,1,2,3,4\}$ on obtient (voir **méthode 1.8**)

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = a+b$$
$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

**Remarque :** en changeant $b$ en $-b$ dans la formule du binôme, on obtient le développement de $(a-b)^n$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (-b)^{n-k}$$

Par exemple :

$$(a-b)^4 = a^4 + 4a^3 \times (-b) + 6a^2(-b)^2 + 4a(-b)^3 + (-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

En appliquant la formule du binôme à $a = 1$ et $b = 1$, on retrouve la valeur de la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ déjà calculée en dénombrement :

**Théorème 1.9.—** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

# Démonstrations

## Conjugué d'un produit, d'un inverse, d'une puissance entière

Il s'agit de démontrer les troisième, quatrième et sixième points de la **proposition 1.5**.

**Proposition 1.5.—** Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes. Alors :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
- Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- Pour tout entier naturel $n$, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

**Démonstration** $\triangledown$
Rappelons que, pour un nombre complexe $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), on a $\overline{z} = a - ib$.

$\boxed{1}$ **Conjugué d'un produit**
Soit $z = a + ib$ et $z' = c + id$ (avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) deux nombres complexes.
On a $zz' = ac - bd + i(ad + bc)$, d'où $\overline{zz'} = ac - bd - i(ad + bc)$. Par ailleurs,

$$\overline{z} \times \overline{z'} = (a - ib)(c - id) = ac - iad - ibc + i^2 bd = ac - iad - ibc - bd = ac - bd - i(ad + bc),$$

ce qui montre que $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

$\boxed{2}$ **Conjugué d'un inverse**
Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 \neq 0$), un nombre complexe non nul. On a :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2},$$

donc

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2}} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a+ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Ainsi, on a bien $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

$\boxed{3}$ **Conjugué d'une puissance entière**
Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\mathcal{P}(n) : \ll \overline{z^n} = (\overline{z})^n \gg.$$

**Initialisation :** On a $\overline{z^0} = \overline{1} = 1 = 1^0 = \overline{1}^0$, ce qui montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
**Hérédité :** On suppose maintenant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, soit $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
En appliquant la formule donnant le conjugué d'un produit, on a alors :

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} \underset{\mathcal{P}(n)}{=} (\overline{z})^n \times \overline{z} = (\overline{z})^{n+1},$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
**Conclusion :** Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ▲

## ■ Formule du binôme

**Théorème 1.8.—** Soit $a$ et $b$ deux nombres complexes et $n$ un entier naturel. Alors :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

**Démonstration** $\triangledown$

Notons tout d'abord que la deuxième égalité résulte de la première en échangeant $a$ et $b$. En effet, comme $a+b=b+a$, on déduit de la première égalité que :

$$(a+b)^n = (b+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} a^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

On va maintenant démontrer la première égalité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathcal{P}(n) : \ll \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \ \gg .$$

**Initialisation :** On a $(a+b)^0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \times 1 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

**Hérédité :** On suppose maintenant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, alors :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \times (a+b)^n \underset{\mathcal{P}(n)}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

soit

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}. \tag{1.1}$$

Or, la première somme ci-dessus peut également se mettre sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \binom{n}{0} a^1 b^n + \binom{n}{1} a^2 b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} a^{n+1} b^n = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k}.$$

Par conséquent, la relation (1.1) s'écrit :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{n+1-1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Mais $\dbinom{n}{k-1} + \dbinom{n}{k} = \dbinom{n+1}{k}$ d'après la **formule de Pascal**, d'où :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

Enfin, comme $\binom{n+1}{0} = 1$ et $\binom{n+1}{n+1} = 1$, l'égalité ci-dessus s'écrit aussi :

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k},$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
**Conclusion :** Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ▲

# Méthodes

## Forme algébrique d'un nombre complexe

**Méthode 1.1.— Comment mettre une somme, un produit sous forme algébrique**
Donner la forme algébrique d'un nombre complexe, c'est le mettre sous la forme $a + ib$, où $a$ et $b$ sont des réels ($a = \mathfrak{Re}\,(z)$ et $b = \mathfrak{Im}\,(z)$). Pour déterminer la forme algébrique d'une somme ou d'un produit de nombres complexes, on effectue les calculs en appliquant les règles du **théorème 1.3**. On obtient la partie réelle et la partie imaginaire de cette expression, ce qui nous donne sa forme algébrique.

**Exemple :** on pose $z_1 = -2 + 3i$ et $z_2 = 5 + 4i$.
Écrire sous forme algébrique les nombres complexes $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.
D'après les règles de calcul sur les nombres complexes (**théorème 1.3**), on a :

$$z_1 + z_2 = -2 + 3i + 5 + 4i = (-2 + 5) + i(3 + 4) = 3 + 7i\,,$$

et

$$z_1 z_2 = (-2 + 3i)(5 + 4i) = -2 \times 5 - 3 \times 4 + i(-2 \times 4 + 3 \times 5) = -22 + 7i\,.$$

**Mise en œuvre : exercice 1.1**

**Méthode 1.2.— Comment mettre un inverse, un quotient sous forme algébrique**
Notons tout d'abord que la forme algébrique d'un nombre complexe non nul est donnée par le **théorème 1.4** ainsi que par la remarque qui suit la **proposition 1.5**.
• Pour déterminer la forme algébrique d'un inverse $\frac{1}{z}$ (avec $z \neq 0$), on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\overline{z}$ afin de rendre réel le dénominateur, ce qui permet de trouver les parties réelle et imaginaire de $\frac{1}{z}$. En notant $z = a + ib$, on écrit :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}$$

ce qui donne la forme algébrique de $\frac{1}{z}$. Rappelons que, $z$ étant non nul, on a $a^2 + b^2 \neq 0$.
• Pour déterminer la forme algébrique d'un quotient $\frac{z}{z'}$ (avec $z' \neq 0$), on se ramène à un produit en écrivant :

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}.$$

On sait comment déterminer la forme algébrique d'un inverse (point ci-dessus) ainsi que celle d'un produit (**méthode 1.1**), on peut donc en déduire celle de $\frac{z}{z'}$.

**Exemple :** on pose $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = 3 + i$.
Écrire sous forme algébrique les nombres complexes $\dfrac{1}{z_1}$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$.

On a :

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1+2i}{1^2+2^2} = \frac{1+2i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2i}{5}$$

Par ailleurs,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2i}{3+i} = \frac{(1-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{(1-2i)(3-i)}{3^2+1^2} = \frac{1-7i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{7i}{10}$$

**Mise en œuvre : exercice 1.2, exercice 1.4**

## ■ Égalité de deux nombres complexes

> ❑ **Méthode 1.3.— Comment montrer que deux nombres complexes sont égaux**
> Pour montrer que deux nombres complexes sont égaux, on démontre qu'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire. En effet, d'après l'unicité de la forme algébrique (**théorème 1.2**), on a :
>
> $$\boxed{z = z' \Leftrightarrow \mathfrak{Re}\,(z) = \mathfrak{Re}\,(z') \text{ et } \mathfrak{Im}\,(z) = \mathfrak{Im}\,(z')}$$
>
> En particulier, un nombre complexe est nul si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

**Exemple :** soit $a$ et $b$ deux réels. On pose $z_1 = a + 3i - i(b-2i)$ et $z_2 = 3 + i$.
À quelle(s) condition(s) sur $a$ et $b$ les nombres complexes $z_1$ et $z_2$ sont-ils égaux ?
Déterminons la forme algébrique de $z_1$ :

$$z_1 = a + 3i - ib + 2i^2 = a - 2 + i(3-b).$$

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire. Par conséquent, $z_1 = z_2$ si et seulement si $a - 2 = 3$ et $3 - b = 1$. Par conséquent :

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = 5 \text{ et } b = 2$$

**Mise en œuvre : exercice 1.11**, **exercice 1.12** et **exercice 1.13**.

## ■ Montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur

> ❑ **Méthode 1.4.— Comment montrer qu'un nombre complexe est réel**
> Pour montrer qu'un nombre complexe est réel, on peut :
>
> - montrer que sa partie imaginaire est nulle
> - montrer qu'il est égal à son conjugué (**théorème 1.7**)

**Exemple :** soit $z$ un nombre complexe, on pose $Z = z^2 + \overline{z}^2$.
Montrer que $Z$ est un nombre réel.

Nous allons le démontrer par chacune des deux méthodes.
▶ Montrons que la partie imaginaire de $Z$ est nulle. On écrit $z$ sous forme algébrique : $z = a + ib$, où $a$ et $b$ sont deux réels. On a alors :

$$Z = (a+ib)^2+(a-ib)^2 = a^2+2iab+(ib)^2+a^2-2iab+(ib)^2 = a^2+2iab-b^2+a^2-2iab-b^2 = 2(a^2-b^2),$$

ce qui montre que la partie imaginaire de $Z$ est nulle, et donc que $Z$ est réel.
▶ Montrons que $Z$ est égal à son conjugué. On a :

$$\overline{Z} = \overline{z^2 + \overline{z}^2} = \overline{z^2} + \overline{\overline{z}^2} = \overline{z}^2 + \overline{\overline{z}}^2 = \overline{z}^2 + z^2 = z^2 + \overline{z}^2 = Z,$$

ce qui montre que $Z$ est réel.

**Mise en œuvre : exercice 1.7**, **exercice 1.8** et **exercice 1.9**.

> ❑ **Méthode 1.5.— Comment montrer qu'un nombre complexe est imaginaire pur**
> Pour montrer qu'un nombre complexe est imaginaire pur, on peut :
> - montrer que sa partie réelle est nulle
> - montrer qu'il est égal à l'opposé de son conjugué (**théorème 1.7**)

**Exemple :** soit $z$ un nombre complexe, on pose $Z = z^2 - \overline{z}^2$.
Montrer que $Z$ est un imaginaire pur.
De nouveau, nous allons le démontrer par chacune des deux méthodes.
▶ Montrons que la partie réelle de $Z$ est nulle. En écrivant $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) sous forme algébrique, on a :

$$Z = (a+ib)^2-(a-ib)^2 = a^2+2iab+(ib)^2-(a^2-2iab+(ib)^2) = a^2+2iab-b^2-a^2+2iab+b^2 = 4iab,$$

ce qui montre que la partie réelle de $Z$ est nulle. Ainsi, $Z$ est imaginaire pur.
▶ Montrons que $Z$ est égal à l'opposé de son conjugué. On a :

$$\overline{Z} = \overline{z^2 - \overline{z}^2} = \overline{z^2} - \overline{\overline{z}^2} = \overline{z}^2 - \overline{\overline{z}}^2 = \overline{z}^2 - z^2 = -(z^2 - \overline{z}^2) = -Z,$$

ce qui montre que $Z$ est imaginaire pur.

**Mise en œuvre : exercice 1.8**, **exercice 1.9**.

## ■ Résolution d'équations

> ❑ **Méthode 1.6.— Comment résoudre une équation d'inconnue complexe**
> Pour résoudre une équation dont l'inconnue est un nombre complexe $z$, on peut écrire $z$ sous forme algébrique $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) puis trouver $x$ et $y$ en identifiant les parties réelles et imaginaires à partir de l'équation (**théorème 1.2** et **méthode 1.3**), ce qui permet d'en déduire la valeur de $z$.

**Exemple :** résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z - (1+i)\overline{z} = 3 + 5i$.
En cherchant $z$ sous forme algébrique $z = x + iy$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} 2z - (1+i)\overline{z} = 3 + 5i &\Leftrightarrow 2(x+iy) - (1+i)(x-iy) = 3+5i \\ &\Leftrightarrow 2x + 2iy - x + iy - ix - y = 3 + 5i \\ &\Leftrightarrow x - y + i(3y - x) = 3 + 5i\,. \end{aligned}$$

D'après l'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe (**théorème 1.2** et **méthode 1.3**), on en déduit que

$$\begin{aligned} 2z - (1+i)\overline{z} = 3 + 5i &\Leftrightarrow x - y = 3 \text{ et } 3y - x = 5 \\ &\Leftrightarrow 2y = 8 \text{ et } x = 3 + y \\ &\Leftrightarrow x = 7 \text{ et } y = 4\,. \end{aligned}$$

L'unique solution est $7 + 4i$, d'où l'ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \{7 + 4i\}$.

**Mise en œuvre : exercice 1.11**, **exercice 1.12** et **exercice 1.13**.

**❑ Méthode 1.7.— Comment résoudre une équation linéaire de la forme $az = b$**
Pour résoudre une équation linéaire de la forme $az = b$ (avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$), on peut chercher $z$ sous forme algébrique (**méthode 1.6**) ou, plus simplement, écrire

$$az = b \Leftrightarrow z = \frac{b}{a},$$

puis déterminer la forme algébrique de $\frac{b}{a}$ pour en déduire $z$. Notons que, grâce aux propriétés de la conjugaison, cette méthode permet également de résoudre les équations de la forme $a\overline{z} = b$. En effet, comme $\overline{\overline{z}} = z$, l'équation $a\overline{z} = b$ s'écrit aussi $\overline{a}z = \overline{b}$. Nous sommes donc ramenés à résoudre une équation linéaire présentée ci-dessus.

**Exemple :** résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+2i)z = -1 + 3i$. On a :

$$\begin{aligned} (1+2i)z = -1+3i &\Leftrightarrow z = \frac{-1+3i}{1+2i} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5+5i}{5} = 1 + i. \end{aligned}$$

Ainsi, $1 + i$ est l'unique solution. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{1 + i\}$.

**Exemple :** résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3\overline{z} = 4 - i$. On a :

$$\begin{aligned} 3\overline{z} = 4 - i &\Leftrightarrow \overline{z} = \frac{4-i}{3} \\ &\Leftrightarrow \overline{\overline{z}} = \overline{\left(\frac{4-i}{3}\right)} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{4+i}{3}, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\frac{4+i}{3}$ est l'unique solution. Par conséquent, $\mathcal{S} = \{\frac{4+i}{3}\}$.

**Mise en œuvre : exercice 1.10**.

## ■ Formule du binôme

### ❏ Méthode 1.8.— Comment appliquer la formule du binôme

La formule du binôme (**théorème 1.8**) nous permet d'écrire, pour deux nombres complexes, le développement de $(a+b)^n$ :

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\ &= \binom{n}{n}a^n + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n-2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \binom{n}{0}b^n\end{aligned}$$

$\boxed{1}$ On calcule de proche en proche les coefficients binomiaux grâce au triangle de Pascal. Rappelons que, dans le triangle de Pascal, le coefficient $\binom{n}{k}$ situé à l'intersection de la ligne $n$ et de la colonne $k$ se calcule en faisant la somme des coefficients $\binom{n-1}{k}$ et $\binom{n-1}{k-1}$ (**formule de Pascal**).

$\boxed{2}$ On remplace ces coefficients dans la formule pour obtenir le développement de $(a+b)^n$ :

$$(a+b)^n = 1\times a^n + n\times a^{n-1}b + \cdots + n\times ab^{n-1} + 1\times b^n\,.$$

**Exemple :** pour $a, b \in \mathbb{C}$, écrire le développement de $(a+b)^5$.
On construit le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 5$ :

$$\begin{array}{llllll}1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1\end{array}$$

On en déduit que :

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

**Exemple :** à l'aide de la formule du binôme, montrer que $(1+\sqrt{3})^4 + (1-\sqrt{3})^4$ est un entier naturel.
On applique la formule du binôme à $n = 4$ et en prenant $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ :

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3})^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}1^k(\sqrt{3})^{4-k} = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(\sqrt{3})^k 1^{4-k} = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(\sqrt{3})^k \\ &= 1\times(\sqrt{3})^0 + 4(\sqrt{3})^1 + 6(\sqrt{3})^2 + 4(\sqrt{3})^3 + 1\times(\sqrt{3})^4 \\ &= 1 + 4\sqrt{3} + 6\times 3 + 4\times 3\sqrt{3} + 9 = 28 + 16\sqrt{3}\,.\end{aligned}$$

Méthodes

En changeant $\sqrt{3}$ en $-\sqrt{3}$, il vient :

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{3})^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (-\sqrt{3})^k \\ &= 1 \times (\sqrt{-3})^0 + 4(-\sqrt{3})^1 + 6(-\sqrt{3})^2 + 4(-\sqrt{3})^3 + 1 \times (-\sqrt{3})^4 \\ &= 1 - 4\sqrt{3} + 6 \times 3 - 4 \times 3\sqrt{3} + 9 = 28 - 16\sqrt{3}\,.\end{aligned}$$

En sommant les deux égalités obtenues, on en déduit que :

$$(1+\sqrt{3})^4 + (1-\sqrt{3})^4 = 28 + 16\sqrt{3} + 28 - 16\sqrt{3} = 56,$$

ce qui montre bien que $(1+\sqrt{3})^4 + (1-\sqrt{3})^4$ est un entier naturel.

**Mise en œuvre : exercice 1.14**

# Vrai/Faux

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1.** La partie imaginaire d'un nombre complexe est un réel. | ☐ | ☐ |
| **2.** Le nombre complexe $i$ est égal à sa partie imaginaire. | ☐ | ☐ |
| **3.** Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $\mathfrak{Re}(z+z') = \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Re}(z')$. | ☐ | ☐ |
| **4.** Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $\mathfrak{Re}(zz') = \mathfrak{Re}(z) \times \mathfrak{Re}(z')$. | ☐ | ☐ |
| **5.** Pour tout nombre complexe $z$, $z + \overline{z}$ est un nombre réel. | ☐ | ☐ |
| **6.** Pour tout nombre complexe $z$, $z - \overline{z}$ est un nombre réel. | ☐ | ☐ |
| **7.** Pour tout nombre complexe $z$, $z \times \overline{z}$ est un nombre réel. | ☐ | ☐ |
| **8.** Si $z$ est un nombre complexe tel que $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$. | ☐ | ☐ |
| **9.** Si $z$ est un nombre complexe tel que $z\overline{z} = 0$, alors $z = 0$. | ☐ | ☐ |
| **10.** Deux nombres complexes dont la somme et le produit sont réels, sont également réels. | ☐ | ☐ |
| **11.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$. | ☐ | ☐ |
| **12.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$ est égale à 0. | ☐ | ☐ |

# Énoncé des exercices

## Calculs sur les nombres complexes

**Exercice 1.1 :** Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

**1.** $i-(2+3i)$

**2.** $(4+i)(-5+2i)$

**3.** $2(6-5i)-3(4+2i)$

**4.** $(5+3i)^2$

**5.** $(5+3i)(5-3i)$

**6.** $(1-i)^2$

**7.** $(i+1)(i-1)+2$

**8.** $2+i\sqrt{3}+(\frac{1}{2}+3i)^2$

**Exercice 1.2 :** Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

**1.** $\dfrac{1}{i}$

**2.** $\dfrac{1}{1-i}$

**3.** $\dfrac{1}{3-4i}$

**4.** $\dfrac{i}{-2+i}$

**5.** $\dfrac{3-2i}{i}$

**6.** $\dfrac{3+5i}{5-3i}$

**7.** $\dfrac{1}{(3-i)(-1+2i)}$

**8.** $\dfrac{1-3i}{(-1+2i)(1-i)}$

**Exercice 1.3 :** Donner, sous forme algébrique, le conjugué de chacun des nombres complexes suivants.

**1.** $z_1=3-11i$

**2.** $z_2=8i$

**3.** $z_3=2i-7$

**4.** $z_4=(3+i)(-11-2i)$

**5.** $z_5=(1-2i)^2$

**6.** $z_6=\dfrac{2-3i}{8+6i}$

**Exercice 1.4 :** On considère les nombres complexes $z_1=\frac{3-i}{5+7i}$ et $z_2=\frac{3+i}{5-7i}$.

**1.** Vérifier que $z_1=\overline{z_2}$.

**2.** En déduire que $z_1+z_2$ est réel, que $z_1-z_2$ est imaginaire pur et les calculer.

**Exercice 1.5 :** On pose $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**1.** Calculer $j^2$.

**2.** En déduire les relations $1+j+j^2=0$, $j^3=1$, $\frac{1}{j}=j^2=\overline{j}$.

**Exercice 1.6* :** On considère la somme $S$ définie par

$$S=1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{2\,020}.$$

**1.** Calculer $i^3$, $i^4$, $i^5$ et $i^6$.

**2.** Déterminer, selon les valeurs de $n\in\mathbb{N}$, la valeur de $i^n$.

**3.** Calculer la valeur de la somme $S$.

## ■ Caractérisation d'un réel ou d'un imaginaire pur

**Exercice 1.7 :** Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $z = [2a - b - i(a+b)][-a - i(a+b)]$.
À quelle(s) condition(s) sur $a$ et $b$ le nombre complexe $z$ est-il réel ?

**Exercice 1.8 :** On pose $Z = 1 + iz$, où $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que :

$$Z \text{ est réel} \Leftrightarrow z \text{ est imaginaire pur.}$$

**Exercice 1.9* :** Soit $z$ un nombre complexe différent de $i$, on pose $Z = \dfrac{z}{z-i}$. À quelle condition sur $z$ le nombre complexe $Z$ est-il un réel ?

## ■ Résolution d'équations

**Exercice 1.10 :** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

**1.** $(7-i)z = 2$

**2.** $iz + 2i - 3 = 0$

**3.** $(3+5i)z = 1 - z$

**4.** $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$

**5.** $5\overline{z} = 3 - i$

**6.** $(1+i)\overline{z} + 1 - i = 0$

**Exercice 1.11 :** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3\overline{z} - 2iz = 5 - 3i$.

**Exercice 1.12* :** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3\overline{z} + 2 = 0$.

**Exercice 1.13** :** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 4i$.

## ■ Formule du binôme

**Exercice 1.14 :** Développer les expressions suivantes.

**1.** $(1+z)^6$ (où $z \in \mathbb{C}$)

**2.** $(1-z)^6$ (où $z \in \mathbb{C}$)

**3.** $(1+i)^5$

**Exercice 1.15 :** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Sans effectuer de récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

**Exercice 1.16* :** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$.
Calculer $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$. En déduire la valeur des sommes $S_n$ et $T_n$.

**Exercice 1.17** :** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est un multiple de 7.

**Exercice 1.18** :** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

**1.** Montrer que $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$.

**2.** En déduire la valeur de $2S_n$, puis celle de $S_n$.

# Indications

**Ex. 1.11**

*Chercher $z$ sous la forme $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.*

**Ex. 1.15**

*Appliquer la formule du binôme en prenant $a = 1$ et $b = x$.*

**Ex. 1.16**

*Que valent les sommes $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ ?*

**Ex. 1.17**

*On appliquera la formule du binôme en commençant par écrire $3 = 7 - 4$...*

**Ex. 1.18**

*Pour la première question, on pourra appliquer la formule de symétrie.*

# ■■ Corrigé des vrai/faux

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | F | V | F | V | F | V | F | V | F | F | V |

**1.** Dans l'écriture $z = a + ib$ d'un nombre complexe sous forme algébrique, la partie imaginaire de $z$ est $b$, c'est un nombre réel !

**2.** On vient de revoir que la partie imaginaire d'un complexe est un réel !
On a $i = 0 + i \times 1$ et la partie imaginaire est 1.

**3.** C'est le **théorème 1.3**. En effet, si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ (avec $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$), on a $z + z' = (a + a') + i(b + b')$, donc $\mathfrak{Re}\,(z + z') = a + a' = \mathfrak{Re}\,(z) + \mathfrak{Re}\,(z')$. De même, on a $\mathfrak{Im}\,(z + z') = \mathfrak{Im}\,(z) + \mathfrak{Im}\,(z')$.

**4.** Voir le **théorème 1.3** : si $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ (avec $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$), on a $\mathfrak{Re}\,(zz') = aa' - bb'$ alors que $\mathfrak{Re}\,(z) \times \mathfrak{Re}\,(z') = aa'$. Par exemple, si $z = 1 + i$ et $z' = 2 + i$, on a $zz' = 1 + 3i$, $\mathfrak{Re}\,(zz') = 1$ et $\mathfrak{Re}\,(z) \times \mathfrak{Re}\,(z') = 1 \times 2 = 2$.

**5.** C'est le **théorème 1.6**. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $z + \overline{z} = 2\mathfrak{Re}\,(z)$ qui est un réel.

**6.** C'est encore le **théorème 1.6**. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $z - \overline{z} = 2i\mathfrak{Im}\,(z)$ qui est un imaginaire pur, et donc pas un réel.

**7.** On a vu (remarque qui suit la définition du conjugué) que, si $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$ qui est un réel (positif).

**8.** En prenant par exemple $z = i$, on a $z + \overline{z} = i + \overline{i} = i - i = 0$. De manière générale, lorsque $z + \overline{z} = 0$, on peut affirmer que $z$ est imaginaire pur (**théorème 1.7**).

**9.** On a vu que $z\overline{z} = a^2 + b^2$ (pour $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$). Si $z\overline{z} = 0$, on a $a^2 + b^2 = 0$, soit $a = b = 0$ donc $z = 0$.

**10.** En prenant par exemple $z = 1 + i$ et $z' = \overline{z} = 1 - i$, on a $z + z' = 2$ et $zz' = 2$. Ainsi, $z + z'$ et $zz'$ sont réels alors que $z$ et $z'$ ne le sont pas.

**11.** Dans la formule du binôme, la sommation commence à 0 et pas à 1 : $3^n = (2+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

**12.** On applique la formule du binôme à $a = 1$ et $b = -1$ :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0.$$

Corrigé

# Corrigé des exercices

## Exercice 1.1

*Méthode 1.1*

On applique les règles de somme et produit de nombres complexes.

1. $i - (2+3i) = i - 2 - 3i = -2 - 2i$
2. $2(6-5i) - 3(4+2i) = 12 - 10i - 12 - 6i = -16i$
3. $(4+i)(-5+2i) = -20 - 2 + i(-5+8) = -22 + 3i$
4. $(5+3i)^2 = 25 + 2 \times 15i + (3i)^2 = 25 + 30i - 9 = 16 + 30i$
5. $(5+3i)(5-3i) = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$
6. $(1-i)^2 = 1^2 - 2 \times i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$
7. $(i+1)(i-1) + 2 = i^2 - 1^2 + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$
8. $2 + i\sqrt{3} + (\frac{1}{2} + 3i)^2 = 2 + i\sqrt{3} + (\frac{1}{2})^2 + 2 \times \frac{3i}{2} + (3i)^2 = -\frac{27}{4} + i(3+\sqrt{3})$ ▲

## Exercice 1.2

*Méthode 1.2 : on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.*

On met en œuvre la **méthode 1.2**.

1. $\dfrac{1}{i} = \dfrac{\bar{i}}{i\bar{i}} = \dfrac{-i}{i \times (-i)} = \dfrac{-i}{-i^2} = \dfrac{-i}{1} = -i$
2. $\dfrac{1}{1-i} = \dfrac{\overline{1-i}}{(1-i) \times \overline{1-i}} = \dfrac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+i}{1^2+1^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$
3. $\dfrac{1}{3-4i} = \dfrac{\overline{3-4i}}{(3-4i) \times \overline{3-4i}} = \dfrac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \dfrac{3+4i}{3^2+4^2} = \dfrac{3}{25} + \dfrac{4i}{25}$
4. $\dfrac{i}{-2+i} = \dfrac{i \times (\overline{-2+i})}{(-2+i) \times \overline{-2+i}} = \dfrac{i(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \dfrac{-2i-i^2}{(-2)^2+1^2} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2i}{5}$
5. $\dfrac{3-2i}{i} = \dfrac{(3-2i) \times (\bar{i})}{i \times \bar{i}} = \dfrac{(3-2i) \times (-i)}{i \times (-i)} = \dfrac{-2-3i}{1} = -2 - 3i$
6. $\dfrac{3+5i}{5-3i} = \dfrac{(3+5i) \times (\overline{5-3i})}{(5-3i) \times \overline{5-3i}} = \dfrac{(3+5i)(5+3i)}{(5+3i)(5-3i)} = \dfrac{15-15+34i}{5^2+3^2} = i$
7. $\dfrac{1}{(3-i)(-1+2i)} = \dfrac{1}{-1+7i} = \dfrac{-1-7i}{(-1+7i)(-1-7i)} = \dfrac{-1-7i}{50} = -\frac{1}{50} - \frac{7i}{50}$
8. $\dfrac{1-3i}{(-1+2i)(1-i)} = \dfrac{1-3i}{1+3i} = \dfrac{(1-3i)^2}{(1+3i)(1-3i)} = \dfrac{1-6i-9}{1^2+3^2} = -\dfrac{4}{5} - \dfrac{3i}{5}$ ▲

## Exercice 1.3

1. $\overline{z_1} = \overline{3-11i} = 3 + 11i$
2. $\overline{z_2} = \overline{8i} = -8i$
3. $\overline{z_3} = \overline{2i-7} = -7 - 2i$
4. $\overline{z_4} = \overline{(3+i)(-11-2i)} = \overline{-31-17i} = -31 + 17i$
5. $\overline{z_5} = \overline{(1-2i)^2} = \overline{1-4i-4} = -3 + 4i$

**6.** On peut déterminer la forme algébrique de $z_6$ puis en déduire son conjugué, ou appliquer la **proposition 1.5** :

✎ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

$$\overline{z_6} = \overline{\left(\frac{2-3i}{8+6i}\right)} = \frac{\overline{2-3i}}{\overline{8+6i}} = \frac{2+3i}{8-6i} = \frac{(2+3i)(8+6i)}{(8-6i)(8+6i)} = \frac{16-18+i(12+24)}{8^2+6^2}$$
$$= \frac{-2+36i}{100} = -\frac{2}{50} + \frac{9i}{25}$$

▲

## Exercice 1.4

**1.** On a :

$$\overline{z_2} = \overline{\left(\frac{3+i}{5-7i}\right)} = \frac{\overline{\overline{3+i}}}{\overline{\overline{5-7i}}} = \frac{3-i}{5+7i} = z_1.$$

**2.** D'après le **théorème 1.6**, peut alors écrire :

$$z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} = 2\mathfrak{Re}\,(z_1) \qquad \text{et} \qquad z_1 - z_2 = z_1 - \overline{z_1} = 2i\mathfrak{Im}\,(z_1),$$

ce qui montre que $z_1 + z_2$ est réel et $z_1 - z_2$ imaginaire pur. Pour trouver leur valeur, il suffit donc d'avoir la forme algébrique de $z_1$. On a :

✎ **Méthode 1.2**

$$z_1 = \frac{3-i}{5+7i} = \frac{(3-i)(5-7i)}{(5+7i)(5-7i)} = \frac{15-21i-5i-7}{5^2+7^2} = \frac{8-26i}{74} = \frac{4-13i}{37}\,.$$

Par conséquent, $z_1 + z_2 = 2\mathfrak{Re}\,(z_1) = \dfrac{8}{37}$ et $z_1 - z_2 = 2i\mathfrak{Im}\,(z_1) = -\dfrac{26i}{37}$. ▲

## Exercice 1.5

**1.** On a :

$$j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2i \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4} = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**2.** On peut alors en déduire que :

$$1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0\,.$$

On a donc $j^2 = -1 - j$, d'où :

$$j^3 = j \times j^2 = j(-1-j) = -j - j^2 = 1\,.$$

Comme $j^3 = 1$, on a $j^2 \times j = 1$, soit $j^2 = \frac{1}{j}$. Enfin, d'après la question 1 :

$$j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \overline{j}$$

▲



Corrigé

#### Exercice 1.6

**1.** Comme $i^2 = -1$, on a :

- $i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$
- $i^4 = i^3 \times i = -i^2 = 1$
- $i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$
- $i^6 = i^5 \times i = i \times i = -1$

*$k$ est le reste de la division de $n$ par 4.*

**2.** Nous allons utiliser la question précédente et distinguer les cas selon les valeurs de $n$. Tout entier naturel $n$ peut s'écrire sous la forme $n = 4p + k$, où $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Par conséquent,

$i^4 = 1$

- si $n = 4p$ (où $p \in \mathbb{N}$), $i^n = i^{4p} = (i^4)^p = 1^p = 1$ ;
- si $n = 4p + 1$ (où $p \in \mathbb{N}$), $i^n = i^{4p+1} = (i^4)^p \times i = 1^p \times i = i$ ;
- si $n = 4p + 2$ (où $p \in \mathbb{N}$), $i^n = i^{4p+2} = (i^4)^p \times i^2 = 1^p \times (-1) = -1$ ;
- si $n = 4p + 3$ (où $p \in \mathbb{N}$), $i^n = i^{4p+3} = (i^4)^p \times i^3 = 1^p \times (-i) = -i$.

*Pour $q \neq 1$ :* $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

**3.** $S$ est la somme des termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $i$. On a donc :

$$S = 1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{2\,020} = \frac{1 - i^{2\,021}}{1 - i}.$$

$2021 = 4 \times 505 + 1$

Or, le reste de la division de 2021 par 4 est 1, donc $i^{2\,021} = i$, d'où :

$$S = \frac{1 - i}{1 - i} = 1.$$

▲

#### Exercice 1.7

On a :

$$\begin{aligned} z &= -a(2a - b) - (a + b)^2 + i[a(a + b) - (2a - b)(a + b)] \\ &= -2a^2 + ab - (a^2 + 2ab + b^2) + i\,[(a + b)(a - (2a - b)] \\ &= -3a^2 - ab - b^2 + i(a + b)(-a + b) \end{aligned}$$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathfrak{Im}\,(z) = 0$

Par conséquent, $z$ est réel si, et seulement si, $(b + a)(b - a) = 0$, c'est-à-dire $a = b$ ou $a = -b$. ▲

#### Exercice 1.8

**Méthode 1.4**

On a :

$$\begin{aligned} Z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{Z} = Z \\ &\Leftrightarrow \overline{1 + iz} = 1 + iz \\ &\Leftrightarrow \overline{1} + \overline{iz} = 1 + iz \\ &\Leftrightarrow 1 - i\overline{z} = 1 + iz \\ &\Leftrightarrow \overline{z} = -z \end{aligned}$$

Cela montre que $Z$ est réel si, et seulement si, $z$ est un imaginaire pur. ▲ **Méthode 1.5**

## Exercice 1.9

On a :

*On applique la* **méthode 1.4**.

$$\begin{aligned} Z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{Z} = Z \\ &\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z}{z-i}\right)} = \frac{z}{z-i} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{z}}{\overline{z-i}} = \frac{z}{z-i} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{z}}{\overline{z}+i} = \frac{z}{z-i} \\ &\Leftrightarrow \overline{z}(z-i) = (\overline{z}+i)z \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - i\overline{z} = z\overline{z} + iz \\ &\Leftrightarrow \overline{z} = -z \end{aligned}$$

Ainsi, $Z$ est réel si, et seulement si, $z$ est imaginaire pur (différent de $i$). ▲ **Méthode 1.5**

## Exercice 1.10

**Méthode 1.7**

Ce sont toutes des équations de la forme $az = b$, où s'y ramenant.

**1.** $(7-i)z = 2 \Leftrightarrow z = \dfrac{2}{7-i} = \dfrac{2(7+i)}{(7-i)(7+i)} = \dfrac{14+2i}{7^2+1^2} = \dfrac{7+i}{25}$

L'unique solution est $\dfrac{7}{25} + \dfrac{i}{25}$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{\frac{7}{25} + \frac{i}{25}\}$.

**2.** L'équation équivaut à :

$$iz = 3-2i \Leftrightarrow z = \frac{3-2i}{i} = \frac{(3-2i)\times(-i)}{-i^2} = -2-3i,$$

et l'unique solution de l'équation est $\{-2-3i\}$. On a $\mathcal{S} = \{-2-3i\}$.

**3.** L'équation s'écrit encore $(4+5i)z = 1$, soit :

$$z = \frac{1}{4+5i} = \frac{4-5i}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{4-5i}{4^2+5^2} = \frac{4}{41} - \frac{5i}{41},$$

et l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{\frac{4}{41} - \frac{5i}{41}\}$.

**4.** Cette équation est définie pour tout $z$ différent de 1. Pour $z \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} = 2i &\Leftrightarrow z+1 = 2i(z-1) \\ &\Leftrightarrow (1-2i)z = -1-2i \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-1-2i}{1-2i} = \frac{(-1-2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-3-4i}{1^2+2^2} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \end{aligned}$$

ce qui montre que l'unique solution de l'équation est $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ : $\mathcal{S} = \{-\frac{3}{5} - \frac{4i}{5}\}$.

**5.** $5\overline{z} = 3-i \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{3-i}{5} \Leftrightarrow \overline{\overline{z}} = \dfrac{3+i}{5} \Leftrightarrow z = \dfrac{3+i}{5}$

$\overline{\overline{z}} = z$

Par conséquent, l'unique est $\frac{3+i}{5}$ et $\mathcal{S} = \{\frac{3+i}{5}\}$.

Corrigé

**6.** On a :

$$(1+i)\overline{z}+1-i=0 \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{i-1}{1+i}=\frac{(i-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-1+1+i(1+1)}{1^2+1^2}=\frac{2i}{2},$$

ce qui montre que $i$ est l'unique solution de l'équation. Ainsi, $\mathcal{S}=\{i\}$. ▲

**Exercice 1.11**

✎ **Méthode 1.6**

Cherchons $z$ sous la forme $z=x+iy$, où $x$ et $y$ sont des réels. On a :

$$\begin{aligned} 3\overline{z}-2iz=5-3i &\Leftrightarrow 3\overline{(x+iy)}-2i(x+iy)=5-3i \\ &\Leftrightarrow 3(x-iy)-2i(x+iy)=5-3i \\ &\Leftrightarrow 3x+2y+i(-2x-3y)=5-3i \end{aligned}$$

✎ **Théorème 1.2**

D'après l'unicité de la forme algébrique, la dernière équation équivaut au système :

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ -2x-3y=-3 \end{cases}$$

✎ $L_2 \leftarrow 3L_2+2L_1$

ou encore :

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ \quad -5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5-2\times(-\frac{1}{5})}{3}=\frac{9}{5} \\ y=-\frac{1}{5} \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution de l'équation est $z=\frac{9}{5}-\frac{i}{5}$. On a $\mathcal{S}=\{\frac{9}{5}-\frac{i}{5}\}$. ▲

**Exercice 1.12**

En cherchant $z$ sous la forme $z=x+iy$, avec $x,y\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} z^2-3\overline{z}+2=0 &\Leftrightarrow (x+iy)^2-3(x-iy)+2=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+2ixy-y^2-3x+3iy+2=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-3x-y^2+2+i(2xy+3y)=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2-3x+2=0 \\ 2xy+3y=0 \end{cases} \end{aligned}$$

✎ *C'est l'unicité de la forme algébrique.*

la dernière équivalence résultant du fait qu'un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles. La deuxième équation du système s'écrit aussi :

$$y(2x+3)=0 \Leftrightarrow y=0 \text{ ou } 2x+3=0.$$

• **Premier cas : $y=0$.** Si $y=0$ (c'est-à-dire $z\in\mathbb{R}$), la première équation du système ci-dessus s'écrit alors $x^2-3x+2=0$, équation du second degré dont les solutions sont 1 et 2. Dans ce cas, l'équation $z^2-3\overline{z}+2=0$ admet comme solutions les nombres (réels) 1 et 2.

• **Deuxième cas : $2x+3=0$.** Si $2x+3=0$, on a $x=-\frac{3}{2}$ (c'est-à-dire $\mathfrak{Re}\,(z)=-\frac{3}{2}$) et la première équation du système s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{2}\right)^2-y^2-3\left(-\frac{3}{2}\right)+2=0 &\Leftrightarrow \frac{9}{4}-y^2+\frac{9}{2}+2=0 \\ &\Leftrightarrow y^2=2+\frac{9}{4}+\frac{9}{2}=\frac{35}{4} \\ &\Leftrightarrow y=\sqrt{\frac{35}{4}}=\frac{\sqrt{35}}{2} \text{ ou } y=-\sqrt{\frac{35}{4}}=-\frac{\sqrt{35}}{2} \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a trouvé deux solutions (complexes conjuguées) à l'équation :

$$z = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{35}}{2} \quad \text{et} \quad \overline{z} = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{35}}{2}.$$

Finalement, l'équation $z^2 - 3\overline{z} + 2 = 0$ admet quatre solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{1, 2, -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{35}}{2}, -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{35}}{2}\right\}$$

▲

## Exercice 1.13

On cherche $z$ sous forme algébrique $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'écrire :

*✎ Ne pas écrire $z = \sqrt{4i}$ ou $z = -\sqrt{4i}$, cela n'a pas de sens ! $\sqrt{x}$ n'existe que pour $x \in \mathbb{R}_+$.*

$$\begin{aligned} z^2 = 4i &\Leftrightarrow (x+iy)^2 = 4i \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 4i. \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, cela équivaut à :

*✎ Unicité de la forme algébrique.*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

La deuxième équation du système s'écrit aussi $y = \frac{2}{x}$, relation que l'on injecte dans la première :

$$\begin{aligned} x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^4 - 4}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0, \end{aligned}$$

la dernière équivalence résultant du fait que $x^2 + 2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

✎ $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2 \geqslant 2$

On obtient donc $x = \sqrt{2}$ (et alors $y = \frac{2}{\sqrt{2}}$) ou $x = -\sqrt{2}$ (et alors $y = -\frac{2}{\sqrt{2}}$).
Ainsi, l'équation admet deux solutions opposées $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ :

$$\mathcal{S} = \left\{\sqrt{2} + i\sqrt{2}, -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right\}$$

▲

## Exercice 1.14

**1.** On applique la formule du binôme à $a = 1$, $b = x$ et $n = 6$ ; les coefficients binomiaux étant calculés à l'aide du triangle de Pascal.

✎ **Méthode 1.8**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

Corrigé

On a alors :

$$(1+z)^6 = 1^6 \times z^0 + 6 \times 1^5 z^1 + 15 \times 1^4 z^2 + 20 \times 1^3 z^3 + 15 \times 1^2 z^4 + 6 \times 1^1 z^5 + 1^0 \times z^6,$$

soit

$$(1+z)^6 = z^6 + 6z^5 + 15z^4 + 20z^3 + 15z^2 + 6z + 1\,.$$

*Pas de changement pour les puissances paires, changement en l'opposé pour les puissances impaires.*

**2.** Pour obtenir le développement de $(1-z)^6$, il suffit de remplacer $z$ par $-z$ dans l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}(1+z)^6 &= (-z)^6 + 6(-z)^5 + 15(-z)^4 + 20(-z)^3 + 15(-z)^2 + 6(-z) + 1\\ &= z^6 - 6z^5 + 15z^4 - 20z^3 + 15z^2 - 6z + 1\,.\end{aligned}$$

**3.** On applique la formule du binôme à $a=1$, $b=i$ et $n=5$ :

$$\begin{aligned}(1+i)^5 &= 1^5 \times i^0 + 5i \times 1^1 + 10i^2 \times 1^2 + 10i^3 \times 1^2 + 5i^4 \times 1^1 + i^5 \times 1^0\\ &= 1 + 5i + 10i^2 + 10i^3 + 5i^4 + i^5\end{aligned}$$

**Exercice 1.6**

Or, $i^3 = i^2 \times i = -i$, $i^4 = i^3 \times i = -i^2 = 1$ et $i^5 = i^4 \times i = i$, d'où :

$$(1+i)^5 = 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i = -4 - 4i\,.$$

▲

## Exercice 1.15

*Formule du binôme appliquée à $a=1$ et $b=x$.*

L'inégalité est trivialement vraie pour $n=0$ (elle s'écrit $1 \geqslant 1$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule du binôme donne :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Or $x$ est positif, donc la somme $\sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k$ l'est aussi. On en déduit que :

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx\,.$$

▲

## Exercice 1.16

*En sommant ou retranchant, on parcourt tous les entiers compris entre 0 et $n$.*

La formule du binôme permet de calculer $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$ :

$$S_n + T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

$$S_n - T_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$$

On en déduit que $S_n = T_n$ et $S_n + T_n = 2T_n = 2^n$. Par conséquent,

$$S_n = T_n = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}.$$

▲

## Exercice 1.17

Tout d'abord, $3^{2n+1} + 2^{4n+2} = 3^{2n+1} + (2^2)^{2n+1} = 3^{2n+1} + 4^{2n+1}$.
Par ailleurs, d'après la formule du binôme, on a :

*Formule du binôme appliquée à $a = 7$ et $b = -4$.*

$$\begin{aligned}
3^{2n+1} = (7-4)^{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 7^k (-4)^{2n+1-k} \\
&= (-4)^{2n+1} + \sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 7^k (-4)^{2n+1-k} \\
&= -4^{2n+1} + 7 \underbrace{\sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 7^{k-1} (-4)^{2n+1-k}}_{m}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $3^{2n+1} + 4^{2n+1} = 7m$, avec $m \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $3^{2n+1} + 4^{2n+1}$ est un multiple de 7. ▲

## Exercice 1.18

**1.** D'après la formule de symétrie, on a :

*Formule de symétrie sur les coefficients binomiaux.*

$$\forall k \in \{n+1, \cdots, 2n+1\}, \ \binom{2n+1}{k} = \binom{2n+1}{2n+1-k}.$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2n+1-k}.$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}
S_n &= \binom{2n+1}{2n+1} + \binom{2n+1}{2n} + \cdots + \binom{2n+1}{n+2} + \binom{2n+1}{n+1} \\
&= \binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{n+2} + \cdots + \binom{2n+1}{2n} + \binom{2n+1}{2n+1} \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}.
\end{aligned}$$

**2.** La question précédente permet d'écrire :

$$2S_n = S_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}.$$

D'après la formule du binôme, on en déduit que :

*D'après le* **théorème 1.9**, *on a :*

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} = 2^p$$

$$2S_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \times 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1}.$$

Finalement, on obtient $S_n = \dfrac{2^{2n+1}}{2} = 2^{2n}$. ▲

Corrigé

# Chapitre 2

# Nombres complexes : point de vue géométrique

La représentation plane des nombres complexes, introduite au début du XIX$^{e}$ siècle, permet des résolutions géométriques, en particulier grâce à la notion d'affixe. Il faut bien savoir manier le passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique que seule une bonne vision géométrique permet de faire aisément.

### Un mathématicien

D'origine suisse mais installé rapidement en France, Jean-Robert **Argand** (1768-1822) était un libraire passionné des idées révolutionnaires. S'intéressant aux nombres complexes, il publie un opuscule, *Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, dans lequel il présente la vision géométrique de ces nombres. Cependant son ouvrage, publié à compte d'auteur, ne mentionne même pas son nom ! Il en envoie une copie à Adrien-Marie **Legendre** qui le donne au mathématicien François **Français**. Malheureusement celui-ci meurt peu après. Son frère Jacques retrouve ce texte et comprend tout de suite son intérêt. Il écrit en 1813 un article sur ce thème dans le *Journal de Gergonne* en précisant que l'idée provient d'un mathématicien inconnu. Argand dévoile alors qu'il en est l'auteur.

**LE SAVIEZ-VOUS ?**

Le Norvégien devenu danois, Caspar **Wessel** (1745-1818) rédige en 1797 un essai dans lequel il introduit, le premier, l'interprétation géométrique des nombres complexes. Celui-ci ne sera publié que deux ans plus tard par l'Académie royale des sciences du Danemark. Cet article reste inconnu des mathématiciens de son époque. Il n'est retrouvé qu'en 1897 ; son compatriote Sophus **Lie** le fait alors publier en traduction française sous le titre *Essai sur la représentation analytique de la direction*.

COMPÉTENCES

## les incontournables

- Représenter un nombre complexe par un point
- Déterminer l'affixe d'un point
- Déterminer le module et les arguments d'un nombre complexe
- Mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique
- Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement

## et plus si affinités

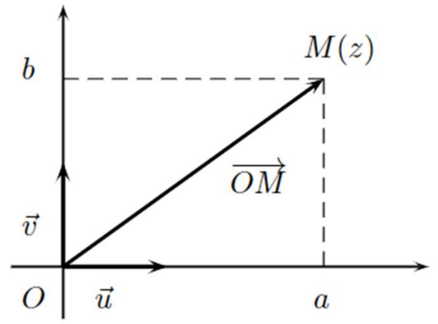
- Utiliser les nombres complexes pour interpréter un problème géométrique simple
- Étudier une récurrente de nombres complexes

# Résumé de cours

## Image d'un nombre complexe, affixe

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$

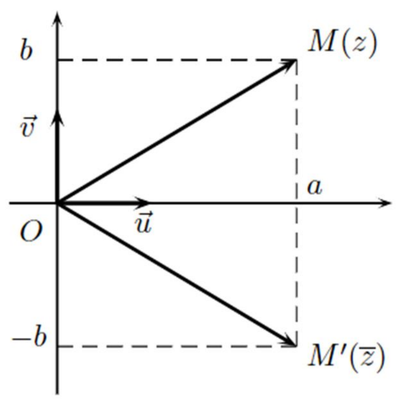
**Définition :** *À tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), on associe le point $M$ du plan de coordonnées $(a, b)$ dans le repère $\mathcal{R}$. On dit que $M$ est* **l'image** *de $z$ et que $z$ est* **l'affixe** *du point $M$. De même, on dit que $z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.*




**Vocabulaire :** *l'axe des abscisses est aussi appelé axe des réels. De même, l'axe des ordonnées est appelé axe des imaginaires purs.*

**Théorème 2.1.—** Soit $M$ un point d'affixe $z$ et $M'$ un point d'affixe $z'$. Alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $z' - z$.

**Proposition 2.2.—** Soit $M$ un point du plan d'affixe $z = a+ib$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Le point $M'$ d'affixe $\overline{z} = a - ib$ est le symétrique du point $M$ par rapport à l'axe des abscisses.



## ■ Module d'un nombre complexe

**Définition :** *Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) un nombre complexe. On appelle* **module** *de $z$ et on note $|z|$ le réel positif défini par :*

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Remarque :** le module d'un réel est égal à sa valeur absolue.

Si $M$ a pour coordonnées $(a, b)$ dans le repère $\mathcal{R}$, alors $OM = ||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Cela nous donne l'interprétation géométrique du module.

**Théorème 2.3.— Interprétation géométrique du module —.** Soit $M$ et $M'$ deux points du plan d'affixes respectives $z$ et $z'$. Alors $MM' = |z' - z|$. En particulier, $OM = |z|$.

**Théorème 2.4.—** Pour tout nombre complexe $z$, on a :

$$\boxed{|z|^2 = z\,\overline{z}}$$

**Proposition 2.5.— Propriétés du module —.** Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes. Alors :

- $|\overline{z}| = z$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
- Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- Pour tout entier naturel $n$, $|z^n| = |z|^n$

## ■ Ensemble des nombres complexes de module 1

**Notation :** *l'ensemble des nombres complexes de module 1 se note $\mathbb{U}$.*

**Théorème 2.6.—** Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes de module 1. Alors :

- $|z\,z'| = 1$
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$

**Remarque :** le théorème précédent traduit la stabilité de $\mathbb{U}$ par produit et passage à l'inverse. Si $z$ et $z'$ sont deux éléments de $\mathbb{U}$, alors $zz'$ et $\frac{1}{z}$ aussi.

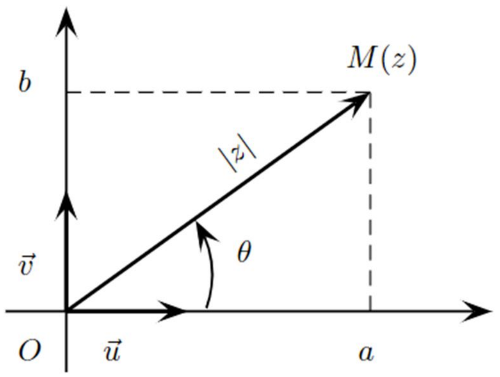
**Théorème 2.7.— Caractérisation des éléments de $\mathbb{U}$ —.**

- Tout nombre complexe de la forme $\cos\theta + i\sin\theta$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$) est de module 1.
- Réciproquement, tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire sous la forme $\cos\theta + i\sin\theta$, où $\theta$ est un réel.

**Remarque :** ainsi, $z \in \mathbb{U}$ si, et seulement si, il existe réel $\theta$ tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

## ■ Arguments d'un nombre complexe non nul

**Définition :** *Soit $z$ un nombre complexe non nul. On appelle* **argument** *de $z$ toute mesure (en radians) $\theta$ de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$.*



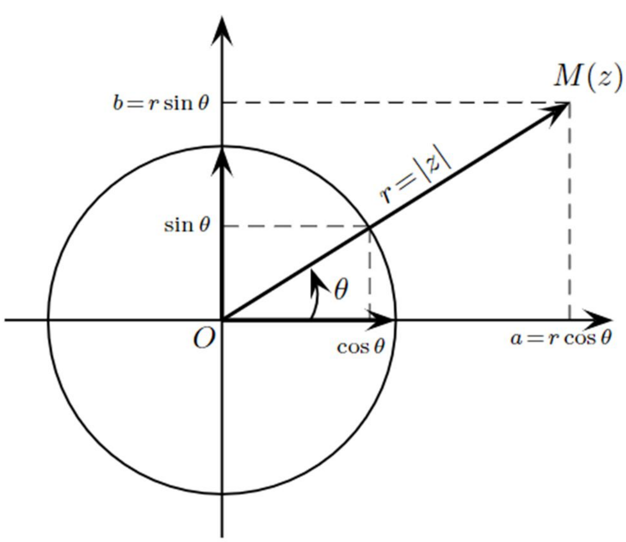

**Remarque :** un nombre complexe non nul admet une **infinité** d'arguments. Si $\theta_0$ est un argument de $z$, les arguments de $z$ sont tous les réels de la forme $\theta_0 + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

## ■ Forme trigonométrique

**Théorème-Définition 2.8.—** Soit $z$ un nombre complexe non nul. Il existe un couple $(r, \theta)$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** de $z$.




**Remarque :** dans l'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r$ est le module de $z$ et $\theta$ un argument de $z$. Comme $z$ admet une infinité d'arguments, la forme trigonométrique n'est pas unique (contrairement à la forme algébrique).

# Démonstrations

## Formule $|z|^2 = z\overline{z}$

**Théorème 2.4.—** Pour tout nombre complexe $z$, on a :

$$\boxed{|z|^2 = z\,\overline{z}}$$

**Démonstration** $\triangledown$
Rappelons que, pour un nombre complexe $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), on a $\overline{z} = a - ib$.
Par ailleurs, par définition du module, on a :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Par conséquent,

$$|z|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2 + b^2$$

Or,

$$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2\,.$$

Ainsi, on a bien $|z|^2 = z\overline{z}$. ▲

## Propriétés du module

Il s'agit de démontrer la **proposition 2.5**.

**Proposition 2.5.— Propriétés du module —.** Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes. Alors :

- $|\overline{z}| = z$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
- Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- Pour tout entier naturel $n$, $|z^n| = |z|^n$

**Démonstration** $\triangledown$
D'après le **théorème 2.4** démontré ci-dessus, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

$\boxed{1}$ **Module d'un conjugué**
Soit $z$ un nombre complexe. Comme $\overline{\overline{z}} = z$, on a :

$$|\overline{z}| = \sqrt{\overline{z}\,\overline{\overline{z}}} = \sqrt{\overline{z}z} = \sqrt{z\overline{z}} = |z|$$

ce qui montre qu'un nombre complexe et son conjugué ont même module.

$\boxed{2}$ **Nullité du module**
Si $z$ est un nombre complexe, on a :

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\Leftrightarrow |z|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \overline{z} = 0 \end{aligned}$$

Mais, dire que $z$ est nul équivaut à dire que $\overline{z}$ est nul. En effet, en notant $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), on a $\overline{z} = a - ib$ donc $\overline{z} = 0$ si, et seulement si, $a = 0$ et $-b = 0$, soit $a = 0$ et $b = 0$ ou encore $z = 0$. Ainsi,

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$\boxed{3}$ **Module d'un produit**
Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes, alors :

$$|zz'| = \sqrt{(zz')\overline{zz'}}.$$

Or, $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ donc :

$$|zz'| = \sqrt{zz'\overline{z}\overline{z'}} = \sqrt{z\overline{z}z'\overline{z'}} = \sqrt{z\overline{z}} \times \sqrt{z'\overline{z'}} = |z| \times |z'|,$$

et on a bien démontré que le module d'un produit est égal au produit des modules.

$\boxed{4}$ **Module d'un inverse**
Soit $z$ un nombre complexe non nul. D'après l'égalité donnant le module d'un produit que nous venons de démontrer, on a :

$$\left|z \times \frac{1}{z}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z}\right|$$

Or, $\left|z \times \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{z}{z}\right| = |1| = 1$, d'où :

$$|z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = 1$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$\boxed{5}$ **Module d'un quotient**
Pour démontrer cette égalité, nous allons utiliser les deux propriétés précédentes. En effet, faire un quotient c'est multiplier par l'inverse. Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes avec $z' \neq 0$. On a :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z \times \frac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \left|\frac{z}{z'}\right|$$

ce qui montre que le module d'un quotient est égal au quotient des modules.

$\boxed{6}$ **Module d'une puissance**
Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\mathcal{P}(n) : \ll \ |z^n| = |z|^n \ \gg .$$

**Initialisation :** On a $|z^0| = |1| = 1 = |z|^0$, ce qui montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
**Hérédité :** On suppose maintenant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, soit $|z^n| = |z|^n$.
En appliquant la formule donnant le module d'un produit, on a alors :

$$|z^{n+1}| = |z^n \times z| = |z^n| \times |z|.$$

Mais, d'après $\mathcal{P}(n)$, on a $|z^n| = |z|^n$, d'où :

$$|z^{n+1}| = |z|^n \times |z| = |z|^{n+1},$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
**Conclusion :** Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ▲

# Méthodes

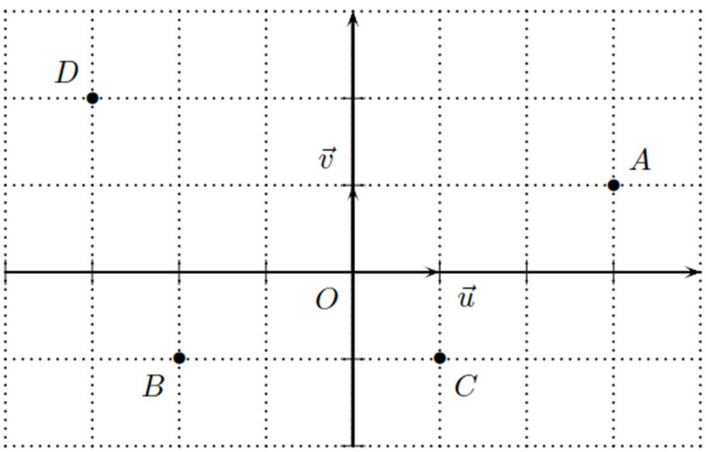
## Représentation des nombres complexes

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$

> **❑ Méthode 2.1.— Comment représenter un nombre complexe dans le plan**
> Au nombre complexe $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) correspond le point $M$ du plan de coordonnées $(a, b)$ dans le repère $\mathcal{R}$. Le point $M$ est l'image de $z$ et le nombre complexe $z$ est l'affixe du point $M$.
>
> ▸ Pour représenter le complexe $z = a + ib$, on place le point $M$ de coordonnées $(a, b)$.
>
> ▸ L'affixe du point $M$ de coordonnées $(a, b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$.

**Exemple :** dans la figure ci-dessous,

- les points d'affixes respectives $z_A = 3 + i$ et $z_B = -2 - i$ sont les points $A\,(3, 1)$ et $B\,(-2, -1)$ ;
- les affixes respectives des points $C\,(1, -1)$ et $D\,(-3, 2)$ sont $z_C = 1 - i$ et $z_D = -3 + 2i$.




**Mise en œuvre : exercice 2.1, exercice 2.2.**

## Module

> **❑ Méthode 2.2.— Comment calculer le module d'un nombre complexe**
> Pour calculer le module d'un nombre complexe dont on connaît la forme algébrique $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, on applique simplement la formule :
> $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

**Exemple :** le module du nombre complexe $z = 1 + 3i$ est $|z| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}\,.$

**Mise en œuvre : exercice 2.3, exercice 2.4.**

**❑ Méthode 2.3.— Comment calculer le module de l'inverse d'un nombre complexe**
Lorsque l'on doit calculer le module de l'inverse d'un nombre complexe $z \neq 0$, il n'est pas utile de déterminer la forme algébrique de $\frac{1}{z}$. On applique directement la formule :

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}.$$

**Exemple :** si $z = 4 - i$, le module de $\dfrac{1}{z}$ est

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{4-i}\right| = \frac{1}{|4-i|} = \frac{1}{\sqrt{4^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{16+1}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

**Mise en œuvre : exercice 2.3.**

**❑ Méthode 2.4.— Comment calculer le module d'un produit, d'un quotient ou d'une puissance**
Lorsque l'on doit calculer le module d'un produit, d'un quotient ou d'une puissance, il n'est pas utile de mettre ces expressions sous forme algébrique. On applique directement les formules données par la **proposition 2.5** :

$$|zz'| = |z| \times |z'|$$
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$
$$|z^n| = |z|^n$$

**Exemple :** calculer le module des nombres complexes suivants

$$z_1 = (4+3i)(-2+5i) \qquad z_2 = \frac{\sqrt{8}+i}{1-2i} \qquad z_3 = (\sqrt{3}-i)^5$$

On applique les formules ci-dessus :

$$|z_1| = |4+3i| \times |-2+5i| = \sqrt{4^2+3^2} \times \sqrt{(-2)^2+5^2} = \sqrt{25} \times \sqrt{29} = 5\sqrt{29}$$
$$|z_2| = \left|\frac{\sqrt{8}+i}{1-2i}\right| = \frac{|\sqrt{8}+i|}{|1-2i|} = \frac{\sqrt{\sqrt{8}^2+1^2}}{1^2+(-2)^2} = \frac{\sqrt{8+1}}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$
$$|z_3| = \left|(\sqrt{3}-i)^5\right| = \left|\sqrt{3}-i\right|^5 = \left(\sqrt{\sqrt{3}^2+1}\right)^5 = \left(\sqrt{4}\right)^5 = 2^5 = 32$$

**Mise en œuvre : exercice 2.3.**

**❑ Méthode 2.5.— Comment calculer une distance à l'aide du module**
Pour calculer la distance entre le point $M$ d'affixe $z$ et le point $M'$ d'affixe $z'$, on applique simplement la formule $MM' = |z' - z|$.

Méthodes

**Exemple :** on considère le point $A$ d'affixe $1-2i$ et le point $B$ d'affixe $-3+i$. Alors :

$$OA = |1-2i| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$$
$$AB = |-3+i-(1-2i)| = |-4+3i| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = 5$$

**Mise en œuvre : exercice 2.4.**

> ❑ **Méthode 2.6.— Comment simplifier une expression où intervient un module**
> Lorsqu'un nombre complexe n'est pas donné sous forme explicite, on peut, pour simplifier une expression dans laquelle apparaît $|z|$ ou $|z-a|$, élever ce module au carré et le remplacer par le produit du complexe par son conjugué. On utilise la relation $|Z|^2 = Z\overline{Z}$.

**Exemple :** résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z-1| = |z-i|$.
Les deux nombres étant positifs, cette équation équivaut à $|z-1|^2 = |z-i|^2$. Sachant que, pour un nombre complexe $Z$, on a $|Z|^2 = Z\overline{Z}$, il vient :

$$\begin{aligned}
|z-1|^2 = |z-i|^2 &\Leftrightarrow (z-1)\times\overline{z-1} = (z-i)\times\overline{z-i} \\
&\Leftrightarrow (z-1)\times(\overline{z}-1) = (z-i)\times(\overline{z}+i) \\
&\Leftrightarrow z\overline{z}-z-\overline{z}+1 = z\overline{z}+iz-i\overline{z}-i^2 \\
&\Leftrightarrow |z|^2-z-\overline{z}+1 = |z|^2+iz-i\overline{z}+1 \\
&\Leftrightarrow -(z+\overline{z}) = i(z-\overline{z})
\end{aligned}$$

Or, $z+\overline{z} = 2\mathfrak{Re}(z)$ et $z-\overline{z} = 2i\mathfrak{Im}(z)$, d'où :

$$|z-1| = |z-i| \Leftrightarrow -2\mathfrak{Re}(z) = i\times(-2i\mathfrak{Im}(z)) \Leftrightarrow \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Im}(z).$$

Ainsi, les nombres complexes solutions sont ceux dont la partie réelle est égale à la partie imaginaire, c'est-à-dire les nombres de la forme $a+ia$, où $a\in\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \{a+ia,\ a\in\mathbb{R}\}$$

**Mise en œuvre : exercice 2.5, exercice 2.7.**

## ■ Arguments et forme trigonométrique

Rappelons que tout nombre complexe non nul s'écrit sous forme trigonométrique :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

où $r = |z|$ et $\theta$ est un argument de $z$.

> ❑ **Méthode 2.7.— Comment mettre sous forme algébrique un nombre complexe donné sous forme trigonométrique**
> Si un nombre complexe s'écrit sous forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, où $r$ est le module de $z$ et $\theta$ un argument de $z$, on a alors :
>
> $$z = r\cos\theta + ir\sin\theta.$$
>
> Ainsi, $\mathfrak{Re}(z) = r\cos\theta$ et $\mathfrak{Im}(z) = r\sin\theta$, ce qui nous donne la forme algébrique de $z$.

**Exemple :** déterminer la forme algébrique des nombres complexes

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\cos\frac{2\pi}{3}\right)$$

On a :

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + i\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} + i\frac{(\sqrt{2})^2}{2} = 1 + i \\
z_2 &= 4\cos\frac{2\pi}{3} + 4i\sin\frac{2\pi}{3} = 4\times(-\frac{1}{2}) + 4\times\frac{\sqrt{3}}{2} = -2 + 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

**Mise en œuvre : exercice 2.9**.

---

### ❑ Méthode 2.8.— Comment déterminer un argument d'un complexe non nul

Si $z$ est un nombre complexe non nul, ses arguments sont tous les réels $\theta$ tels que

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)\,.$$

D'après les relations données dans la **méthode 2.7**, ce sont tous les réels $\theta$ vérifiant :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\mathfrak{Re}\,(z)}{|z|} \\[2mm] \sin\theta = \dfrac{\mathfrak{Im}\,(z)}{|z|} \end{cases}$$

On détermine un argument de $z$ en trouvant un réel $\theta$ solution du système ci-dessus. Rappelons qu'un nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments, il y a une infinité de réels $\theta$ vérifiant ce système ! Si l'on a trouvé un argument $\theta_0$ de $z$, tout réel de la forme $\theta_0 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ est également un argument de $z$.

---

**Exemple :** déterminer un argument du nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$.
Le module de $z$ étant égal à :

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2,$$

un argument de $z$ est tout réel $\theta$ vérifiant :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\[2mm] \sin\theta = \dfrac{1}{r} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Par conséquent, $\theta = \frac{\pi}{6}$ est un argument de $z$. Les arguments de $z$ sont tous les réels de la forme $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Par exemple, $\frac{\pi}{6} - 4\pi = -\frac{23\pi}{6}$ est également un argument de $z$.

**Mise en œuvre : exercice 2.10**.

❑ **Méthode 2.9.— Comment mettre un nombre complexe non nul sous forme trigonométrique**

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. Pour mettre $z$ sous forme trigonométrique :

$\boxed{1}$ On commence par calculer son module $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$\boxed{2}$ On détermine ensuite un argument $\theta$ de $z$ en appliquant la **méthode 2.8**.

On a alors mis $z$ sous forme trigonométrique :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

En pratique, après avoir calculé le module $r$ de $z$, on écrit :

$$z = r\left(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}\right),$$

et on détermine un réel $\theta$ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$.

**Exemple :** dans l'exemple précédent, on a vu que $\sqrt{3} + i$ a pour module 2 et que $\frac{\pi}{6}$ est un de ses arguments. On peut donc écrire $\sqrt{3} + i$ sous forme trigonométrique :

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

**Exemple :** écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z = \frac{1-i}{3}$.
On applique la **méthode 2.9** en commençant par calculer le module de $z$ :

$$r = |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

On écrit ensuite :

$$z = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Or $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(-\frac{\pi}{4})$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4})$, donc $-\frac{\pi}{4}$ est un argument de $z$ et on peut écrire $z$ sous forme trigonométrique :

$$z = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$$

**Mise en œuvre : exercice 2.11.**

## ■ Résolution de problèmes géométriques

**❑ Méthode 2.10.— Comment utiliser l'affixe d'un vecteur**
Si $A$ est un point d'affixe $z_A$ et $B$ un point d'affixe $z_B$, $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Pour un vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $z$ et un vecteur $\overrightarrow{v}$ d'affixe $z'$ :

- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ si, et seulement si, $z = z'$ ;
- s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z' = \lambda z$, on a $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Cela permet de montrer, à l'aide des affixes, que des vecteurs sont égaux ou colinéaires. On peut, en particulier, montrer que des droites sont parallèles ou que des points sont alignés.

**Exemple :** on considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $1+\frac{i}{2}$, $\frac{3}{2}+2i$ et $-1-\frac{11i}{2}$. Montrer que les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A = \frac{3}{2} + 2i - (1 + \frac{i}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{3i}{2}$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $z_C - z_A = -1 - \frac{11i}{2} - (1 + \frac{i}{2}) = -2 - 6i$. Or,

$$-2 - 6i = -4\left(\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}\right),$$

ce qui montre que $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Par conséquent, les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

**Exemple :** on considère les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives $z_A = 2 - 2i$, $z_B = 3 + i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 1 + 5i$. Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A = 3 + i - (2 - 2i) = 1 + 3i$ et le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour affixe $z_D - z_C = 1 + 5i - 2i = 1 + 3i = z_B - z_A$. Par conséquent, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

**Mise en œuvre : exercice 2.12, exercice 2.13**.

**❑ Méthode 2.11.— Comment utiliser le module d'un nombre complexe**
Si $A$ est un point d'affixe $z_A$ et $B$ un point d'affixe $z_B$, la distance $AB$ (la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$) est égale à $|z_B - z_A|$. Cela permet de traduire certains problèmes faisant intervenir des modules en termes de distances, et de proposer une résolution géométrique. Pour cela, on introduit les affixes des points correspondant à l'énoncé puis on interprète le problème en termes de distances avant de le résoudre géométriquement.

**Exemple :** déterminer l'ensemble des points d'affixe $z$ vérifiant $|z-1| = |z-i|$.
Nous allons donc de nouveau résoudre l'équation étudiée comme exemple d'application de la **méthode 2.6** en proposant cette fois une résolution géométrique.
Introduisons les points $A$, $B$ et $M$ du plan d'affixe respectives 1, $i$ et $z$. On a $|z-1| = AM$ et $|z-i| = BM$ de sorte que :

$$|z-1| = |z-i| \Leftrightarrow AM = BM.$$

L'ensemble des points $M$ recherchés est donc l'ensemble des points équidistants de $A$ et $B$, c'est-à-dire la médiatrice du segment $AB$. Comme $A$ a pour coordonnées $(1, 0)$ et $B$ pour coordonnées $(0, 1)$, cette droite est la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice du repère). On peut également dire que l'ensemble des points recherchés est l'ensemble des points dont les affixes ont les mêmes parties réelle et imaginaire, c'est-à-dire les points d'affixe $a + ia$, avec $a \in \mathbb{R}$. On retrouve ainsi le résultat obtenu dans l'exemple illustrant la **méthode 2.6**.

**Mise en œuvre : exercice 2.14**.

# Vrai/Faux

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1.** Le module de $a - ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) est $a^2 - b^2$. | ☐ | ☐ |
| **2.** Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $\lvert z \times z' \rvert = \lvert z \rvert \times \lvert z' \rvert$. | ☐ | ☐ |
| **3.** Le module de 0 est 0. | ☐ | ☐ |
| **4.** Un argument de 0 est 0. | ☐ | ☐ |
| **5.** Si $\lvert z \rvert = 0$, alors $z = 0$. | ☐ | ☐ |
| **6.** Si un argument de $z$ vaut 0, alors $z = 0$. | ☐ | ☐ |
| **7.** Le module du nombre complexe $\cos(\frac{\pi}{15}) + i \sin(\frac{\pi}{15})$ est égal à 1. | ☐ | ☐ |
| **8.** Si $\lvert z \rvert = 1$, alors $\overline{z} = \frac{1}{z}$. | ☐ | ☐ |
| **9.** Un nombre complexe non nul admet une unique forme trigonométrique. | ☐ | ☐ |
| **10.** $i$ peut s'écrire sous forme trigonométrique $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$. | ☐ | ☐ |
| **11.** $-\frac{5\pi}{3}$ et $\frac{19\pi}{3}$ sont des arguments de $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. | ☐ | ☐ |
| **12.** Tout réel non nul a pour argument 0. | ☐ | ☐ |

# Énoncé des exercices

## Représentation des nombres complexes

**Exercice 2.1 :** Placer dans le plan les points $A$, $B$, $C$, $D$ et $E$ d'affixes respectives

$$z_A = -1 + i \qquad z_B = 2 + i \qquad z_C = -3 \qquad z_D = 3 - i \qquad z_E = 2i$$

**Exercice 2.2 :** Déterminer les affixes respectives des points $F\,(1,1)$, $G\,(2,0)$, $H\,(-3,1)$, $I\,(0,-1)$.

## Module

**Exercice 2.3 :** Calculer le module des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = 5$
2. $z_2 = -4$
3. $z_3 = \dfrac{2}{3}i$
4. $z_4 = -7i$
5. $z_5 = -1 + 2i$
6. $z_6 = -1 - 2i$
7. $z_7 = (4 + 3i)(12 - 5i)$
8. $z_8 = \frac{i-\sqrt{8}}{5-3i}$
9. $z_9 = (1 - 7i)^3$
10. $z_{10} = \frac{1}{3+i} - \frac{1}{1+2i}$

**Exercice 2.4 :** On considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives

$$z_A = -1 + 2i \qquad z_B = 2 + 5i \qquad z_C = 2 - i$$

1. Calculer $AB$, $AC$ et $BC$.
2. Que peut-on dire du triangle $ABC$ ?

**Exercice 2.5** : Inégalité triangulaire**

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{Re}\,(z) \leqslant |z|$. Préciser le cas d'égalité.
2. Démontrer l'inégalité triangulaire :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ \ |z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

3. Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité ci-dessus.

## Nombres complexes de module 1

**Exercice 2.6 :** Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + i\dfrac{2t}{1+t^2}$.
Montrer que le module de $z$ est égal à 1.

**Exercice 2.7* :** Soit $z$ un nombre complexe différent de $i$. Montrer que :

$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

**Exercice 2.8* :** Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

## ■ Arguments et forme trigonométrique

**Exercice 2.9 :** Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants, donnés sous forme trigonométrique.

**1.** $z_1 = 3\left(\cos\frac{9\pi}{2} + i\sin\frac{9\pi}{2}\right)$

**2.** $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

**3.** $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

**4.** $z_4 = 6\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

**5.** $z_5 = 5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

**Exercice 2.10 :** Déterminer un argument des nombres complexes suivants.

**1.** $z_1 = 5$

**2.** $z_2 = -4$

**3.** $z_3 = \dfrac{2}{3}i$

**4.** $z_4 = -7i$

**5.** $z_5 = 1 + i\sqrt{3}$

**6.** $z_6 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$

**7.** $z_7 = -4 - 4i$

**8.** $z_8 = \frac{\sqrt{3}+i}{2i}$

**Exercice 2.11 :** Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

**1.** $z_1 = 3$

**2.** $z_2 = -7$

**3.** $z_3 = 2i$

**4.** $z_4 = 1 + i\sqrt{3}$

**5.** $z_5 = 1 - i\sqrt{3}$

**6.** $z_6 = -1 + i$

**7.** $z_7 = -6\sqrt{3} - 6i$

**8.** $z_8 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$

**9.** $z_9 = \cos\frac{\pi}{17} - i\sin\frac{\pi}{17}$

**10.** $z_{10} = 1 + i\tan\frac{\pi}{17}$

## ■ Un peu de géométrie

**Exercice 2.12 :** On considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $z_A = -2 + i$, $z_B = 3 + 3i$ et $z_C = 1 + \frac{11i}{5}$. Montrer que les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

**Exercice 2.13 :** On considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $z_B = 4 + 5i$ et $z_C = 8 + 2i$. Déterminer l'affixe du point $D$ tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

**Exercice 2.14* :** Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que

**1.** $|z - 6i| = 3$

**2.** $|z + 2| = |z - 3i + 1|$

**3.** $|iz - 2| = |z + 5|$

**4.** $\left|\overline{z} + \frac{i}{2}\right| = 4$

**5.** $(z - 4 + 2i)(\overline{z} - 4 - 2i) = 4$

**Exercice 2.15** :** Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $z^2 + \overline{z}$ soit réel.

## ■ Étude de suites récurrentes

**Exercice 2.16* :** On considère la suite $(z_n)$ définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = (2-i)z_n$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |z_n|$.

**1.** Montrer que la suite $(u_n)$ est géométrique.

**2.** En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**3.** Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**4.** Écrire, en langage Python, une fonction de paramètre $p$ qui renvoie la plus petite valeur de $n$ telle que $u_n > p$, où $p$ est un réel quelconque.

**Exercice 2.17** :** On considère la suite $(z_n)$ définie par $z_0 = 16$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n$ le point d'affixe $z_n$ et $r_n$ le module de $z_n$. Par ailleurs, on introduit la longueur $L_n$ de la ligne brisée qui relie le point $A_0$ au point $A_n$ en passant par $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$. Autrement dit :

$$L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_kA_{k+1}.$$

**1.** Démontrer que la suite $(r_n)$ est géométrique.

**2.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $r_n$ en fonction de $n$.

**3.** Calculer la limite de la suite $(r_n)$.

**4.** Donner une interprétation géométrique.

**5.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.

**6.** Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $L_n$ en fonction de $n$.

**7.** Calculer la limite de la suite $(L_n)$.

# ■■ Indications

### Ex. 2.4

*Placer les points pour n'oublier aucune propriété !*

### Ex. 2.5

*Pour démontrer l'inégalité triangulaire, on pourra élever les deux membres au carré et utiliser la relation* $|Z|^2 = Z\overline{Z}$.

### Ex. 2.7

*Un nombre complexe est réel si, et seulement si, il est égal à son conjugué.*

### Ex. 2.8

*Si* $|z| = 1$, *on a* $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

### Ex. 2.14

*Appliquer la* **méthode 2.11**.

# Corrigé des vrai/faux

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | V | V | F | V | F | V | V | F | V | V | F |

**1.** Le module de $a - ib$ est $a^2 + b^2$ ! En effet :

$$|a - ib| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On peut aussi dire que, $a + ib$ et $a - ib$ étant conjugués, ils ont même module.

**2.** C'est la **proposition 2.5**.

**3.** On a $|0| = 0^2 + 0^2 = 0 + 0 = 0$...

**4.** 0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.

**5.** Si le module de $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) est nul, on a $a^2 + b^2 = 0$, donc $a = b = 0$ et $z = 0$. C'est également écrit dans la **proposition 2.5**.

**6.** Le nombre complexe $z = \cos 0 + i \sin 0 = 1$ a pour argument 0 mais il n'est pas nul. Par ailleurs, rappelons que 0 n'a pas d'argument...

**7.** Tout nombre complexe de la forme $\cos\theta + i\sin\theta$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ est a un module égal à 1 (voir le **théorème 2.7**). En effet :

$$|\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$$

**8.** Si $|z| = 1$, on a $|z|^2 = 1$, soit $z\overline{z} = 1$ ou encore $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

**9.** Un nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments, donc une infinité d'écritures possibles sous forme trigonométrique. Si $\theta_0$ est un argument de $z$, on peut écrire $z$ sous forme trigonométrique :

$$z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right),$$

pour tout réel $\theta$ de la forme $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

**10.** On a $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i \times 1 = i$.

**11.** On a $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. Par conséquent, $\frac{\pi}{3}$ est un argument de $z$ et les arguments de $z$ sont tous les réels de la forme $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. En particulier, $-\frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 2\pi$ et $\frac{19\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 4\pi$ sont des arguments de $z$.

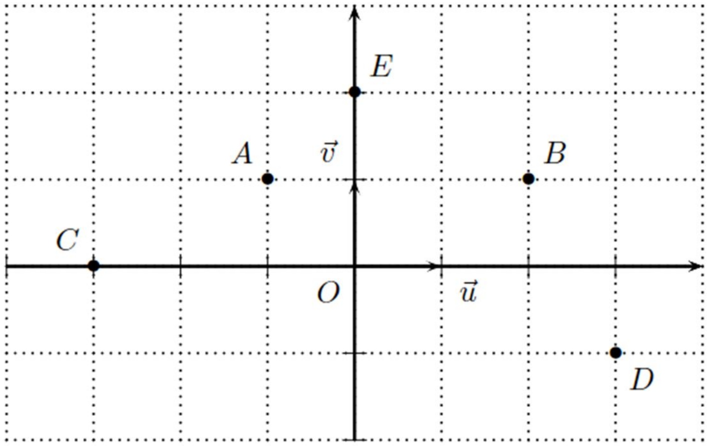
**12.** Pour $x > 0$, on peut écrire $x = x(\cos 0 + i\sin 0)$ et 0 est donc un argument de 0. En revanche, si $x < 0$, on a $x = -x \times (-1) = -x(\cos\pi + i\sin\pi)$. Dans ce cas, le module de $x$ est $-x$ et $\pi$ est un argument de $x$.

# Corrigé des exercices

## Exercice 2.1

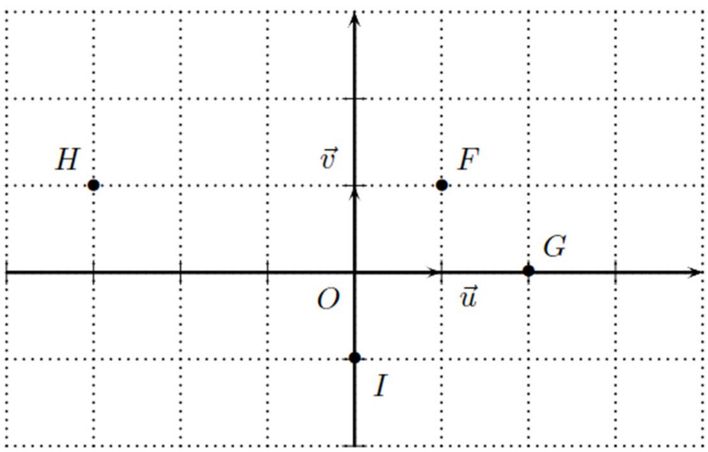
On applique la **méthode 2.1** en plaçant dans chaque cas l'image du complexe.

*L'image de $z = a + ib$ est le point de coordonnées $(a, b)$.*




▲

## Exercice 2.2




On applique de nouveau la **méthode 2.1** en donnant cette fois l'affixe de chacun des points. On a :

*L'affixe du point de coordonnées $(a, b)$ est le complexe $a + ib$.*

$$z_F = 1 + 1 \times i = 1 + i$$
$$z_G = 2 + 0 \times i = 2$$
$$z_H = -3 + 1 \times i = -3 + i$$
$$z_I = 0 - 1 \times i = -i$$

▲

### Exercice 2.3

On applique la formule $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ ainsi que les propriétés du module (**proposition 2.5**).

1. $|z_1| = |5| = \sqrt{5^2+0^2} = \sqrt{25} = 5$
2. $|z_2| = |-4| = \sqrt{(-4)^2+0^2} = \sqrt{16} = 4$
3. $|z_3| = \left|\frac{2}{3}i\right| = \left|\frac{2}{3}\right| \times |i| = \frac{2}{3} \times \sqrt{0^2+1^2} = \frac{2}{3}$
4. $|z_4| = |-7i| = |-7| \times |i| = 7 \times 1 = 7$
5. $|z_5| = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
6. On a $z_6 = \overline{z_5}$, donc $|z_6| = |\overline{z_5}| = \sqrt{5}$
7. On a :

$$|z_7| = |(4+3i)(12-5i)| = |4+3i| \times |12-5i| = \sqrt{4^2+3^2} \times \sqrt{12^2+(-5)^2}$$
$$= \sqrt{25} \times \sqrt{169} = 5 \times 13 = 65$$

8. $|z_8| = \left|\frac{i-\sqrt{8}}{5-3i}\right| = \frac{|i-\sqrt{8}|}{|5-3i|} = \frac{\sqrt{\left(-\sqrt{8}\right)^2+1^2}}{\sqrt{5^2+(-3)^2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$
9. On utilise cette fois la propriété $|z^n| = |z|^n$ :

$$|z_9| = |(1-7i)^3| = |1-7i|^3 = \left(\sqrt{1^2+(-7)^2}\right)^3 = (\sqrt{50})^3$$
$$= (5\sqrt{2})^3 = 5^3(\sqrt{2})^3 = 125 \times 2\sqrt{2} = 250\sqrt{2}$$

10. On commence par écrire $z_{10}$ sous forme d'un quotient :

$$z_{10} = \frac{1}{3+i} - \frac{1}{1+2i} = \frac{1+2i-(3+i)}{(3+i)(1+2i)} = \frac{-2+i}{(3+i)(1+2i)}.$$

On en déduit alors le module de $z_{10}$ :

$$|z_{10}| = \left|\frac{-2+i}{(3+i)(1+2i)}\right| = \frac{|-2+i|}{|3+i| \times |1+2i|} = \frac{\sqrt{(-2)^2+1^2}}{\sqrt{3^2+1^2} \times \sqrt{1^2+2^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10} \times \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

*Le module d'un réel est aussi égal à sa valeur absolue.*

*$i$ est de module 1.*

$|\overline{z}| = |z|$

$|zz'| = |z| \times |z'|$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

▲

### Exercice 2.4

**Méthode 2.5**

1. On calcule ces longueurs en utilisant le module :

$$AB = |z_B - z_A| = |2+5i-(-1+2i)| = |3-3i| = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{18}$$
$$AB = |z_B - z_A| = |2-i-(-1+2i)| = |3-3i| = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{18}$$
$$BC = |z_C - z_B| = |2-i-(2+5i)| = |-6i| = |-6| \times |i| = 6 \times 1 = 6$$

Corrigé

**2.** On a déjà $AB = AC$, donc $ABC$ est isocèle en $A$. De plus, on a :

$$BC^2 = 6^2 = 36 = 18 + 18 = (\sqrt{18})^2 + (\sqrt{18})^2 = AB^2 + AC^2.$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, $ABC$ est rectangle en $A$. Finalement, le triangle $ABC$ est isocèle rectangle en $A$. ▲

## Exercice 2.5

**1.** Soit $z = a+ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) un nombre complexe. Sachant que $\mathfrak{Re}\,(z) = a$ et $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, on doit donc démontrer l'inégalité $a \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$. Or,

$$\sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2},$$

✎ $\forall a \in \mathbb{R},\ \sqrt{a^2} = |a|$

c'est-à-dire $|a| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$. Mais $a \leqslant |a|$ puisque qu'un réel est toujours inférieur ou égal à sa valeur absolue. Ainsi, on a bien $a \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ soit :

$$\mathfrak{Re}\,(z) \leqslant |z|$$

D'après ce qui précède, l'égalité a lieu si, et seulement si, $a = \sqrt{a^2+b^2}$, ce qui équivaut à :

$$a \geqslant 0 \quad \text{et} \quad a^2 = a^2 + b^2$$

ou encore $a \geqslant 0$ et $b = 0$, c'est-à-dire $\mathfrak{Re}\,(z) \geqslant 0$ et $\mathfrak{Im}\,(z) = 0$. Finalement, l'égalité $\mathfrak{Re}\,(z) = |z|$ a lieu si, et seulement si, $z$ est un réel positif.

✎ **Méthode 2.6**

**2.** Les deux membres de l'inégalité étant positifs, elle est équivalente à :

$$|z+z'|^2 \leqslant (|z| + |z'|)^2 \tag{2.1}$$

✎ $|Z|^2 = Z\overline{Z}$

• Nous avons d'une part :

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= (z+z')(\overline{z+z'}) = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\ &= |z|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} + |z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} \end{aligned}$$

✎ $Z + \overline{Z} = 2\,\mathfrak{Re}\,(Z)$

Mais $z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} = 2\,\mathfrak{Re}\,(z\overline{z'})$, d'où :

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathfrak{Re}\,(z\overline{z'})$$

• D'autre part, on a :

$$(|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + 2|z| \times |z'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2$$

• Par ailleurs, $|zz'| = |z| \times |z'| = |z| \times |\overline{z'}| = |z\overline{z'}|$. Par conséquent, démontrer l'inégalité (2.1), et donc l'inégalité triangulaire, équivaut à montrer que :

$$2\,\mathfrak{Re}\,(z\overline{z'}) \leqslant 2|z\overline{z'}|,$$

✎ $\mathfrak{Re}\,(Z) \leqslant |Z|$ *d'après la question* **1**.

inégalité qui est vraie d'après la question **1**. Ainsi, on a bien établi l'inégalité triangulaire :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z+z'| \leqslant |z| + |z'|$$

**3.** D'après les calculs effectués à la question précédente, l'égalité a lieu si, et seulement si, $\mathfrak{Re}\left(z\overline{z'}\right) = |z\overline{z'}|$. Cela équivaut, d'après la question **1**, à dire qu'il existe un réel positif $\lambda$ tel que :

$$z\overline{z'} = \lambda.$$

Si $z' \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} z\overline{z'} = \lambda &\Leftrightarrow zz'\,\overline{z'} = \lambda z' \\ &\Leftrightarrow z|z'|^2 = \lambda z' \\ &\Leftrightarrow z = \frac{\lambda}{|z'|^2} z', \end{aligned}$$

relation qui s'écrit encore $z = \mu z'$, avec $\mu = \frac{\lambda}{|z'|^2}$. Ainsi :

*$\mu \geqslant 0$ car $\lambda \geqslant 0$ et $|z'|^2 > 0$.*

$$|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow (z' = 0 \text{ ou il existe } \mu \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } z = \mu z')$$

et on a déterminé le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. ▲

## Exercice 2.6

On a :

$$\begin{aligned} \left|\frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2}\right| &= \sqrt{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} + \frac{(2t)^2}{(1+t^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

▲

## Exercice 2.7

Les deux membres de l'égalité étant positifs, elle est équivalente à $\left|\frac{z+i}{z-i}\right|^2 = 1^2$.
On a :

**Méthode 2.6**

$$\begin{aligned} \left|\frac{z+i}{z-i}\right|^2 = 1^2 &\Leftrightarrow \frac{|z+i|^2}{|z-i|^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow |z+i|^2 = |z-i|^2 \\ &\Leftrightarrow (z+i) \times \overline{z+i} = (z-i) \times \overline{z-i} \\ &\Leftrightarrow (z+i)(\overline{z}-i) = (z-i)(\overline{z}+i) \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - iz + i\overline{z} - i^2 = z\overline{z} + iz - i\overline{z} - i^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - iz + i\overline{z} = |z|^2 + iz - i\overline{z} \\ &\Leftrightarrow 2i\overline{z} = 2iz \\ &\Leftrightarrow \overline{z} = z \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi, $\left|\frac{z+i}{z-i}\right|$ est de module 1 si, et seulement si, $z$ est un nombre réel. ▲

Corrigé

## Exercice 2.8

$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{Z} = Z$

Nous allons démontrer que $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est égal à son conjugué, ce qui prouvera qu'il est réel. D'après les propriétés du conjugué, on a :

$$\overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)} = \frac{\overline{z+z'}}{\overline{1+zz'}} = \frac{\overline{z}+\overline{z'}}{\overline{1}+\overline{zz'}} = \frac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{z}\times\overline{z'}}$$

*Voir le* **Vrai/Faux**.

Mais, comme $z$ et $z'$ sont de module 1, on a $\overline{z} = \frac{1}{z}$ et $\overline{z'} = \frac{1}{z'}$, d'où :

$$\overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)} = \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}}{1+\frac{1}{z}\times\frac{1}{z'}} = \frac{\frac{z'+z}{zz'}}{\frac{zz'+1}{zz'}} = \frac{z'+z}{zz'+1} = \frac{z+z'}{1+zz'}$$

Ainsi, $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est égal à son conjugué, il est donc réel. ▲

## Exercice 2.9

On applique la **Méthode 2.7**.

$\frac{9\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 4\pi$

**1.** $z_1 = 3\left(\cos\frac{9\pi}{2} + i\sin\frac{9\pi}{2}\right) = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3(0 + i\times 1) = 3i$

**2.** $z_2 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\times\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$

$\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$

**3.** Sachant que $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ et $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$, on a :

$$\begin{aligned} z_3 &= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -\frac{(\sqrt{2})^2}{2} + i\frac{(\sqrt{2})^2}{2} = -1 + i \end{aligned}$$

$\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$

**4.** Comme $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$ et $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$, on peut en déduire que :

$$z_4 = 6\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{6\sqrt{3}}{2} - 3i = -3\sqrt{3} - 3i$$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ *et* $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.

**5.** On a $\frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$, d'où :

$$z_5 = 5\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right) = 5\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2} - \frac{5i\sqrt{3}}{2}$$

▲

## Exercice 2.10

Rappelons qu'un nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments. Si $\theta_0$ est un argument de $z \in \mathbb{C}^*$, les arguments de $z$ sont tous les réels de la forme $\theta_0 + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

**1.** $z_1 = 5 = 5(\cos 0 + i\sin 0)$ et un argument de $z_1$ est 0.

**2.** $z_2 = -4 = 4\times(-1) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$, ce qui montre que $\pi$ est un argument de $z_2$.

*Voir le* **Vrai/Faux**.

Notons que, si $x \in \mathbb{R}_+^*$, un argument de $x$ est 0 et, si $x \in \mathbb{R}_-^*$, un argument de $x$ est $\pi$.

$\frac{\pi}{2}$ *est un argument de* $i$ *et* $-\frac{\pi}{2}$ *est un argument de* $-i$.

**3.** $z_3 = \frac{2}{3}i = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, donc $\frac{\pi}{2}$ est un argument de $z_3$.

**4.** $z_4 = 7\times(-i) = 7\left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin -(\frac{\pi}{2})\right)$ et $-\frac{\pi}{2}$ est un argument de $z_4$.

**5.** Tout d'abord, $|z_5| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$. Par conséquent, un argument de $z_5$ est tout réel $\theta$ tel que :

**Méthode 2.8**

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\mathfrak{Re}\,(z_5)}{|z_5|} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\mathfrak{Im}\,(z_5)}{|z_5|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Par exemple, $\theta = \frac{\pi}{3}$ est un argument de $z_5$. Plus généralement, tout réel de la forme $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ est un argument de $z_5$.

**6.** On applique de nouveau la **méthode 2.8**. On a :

$$|z_6| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}.$$

Par conséquent, un argument de $z_6$ est un réel $\theta$ vérifiant :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\mathfrak{Re}\,(z_6)}{|z_6|} = \dfrac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\mathfrak{Im}\,(z_6)}{|z_6|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Par conséquent, $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ est un argument de $z_6$.

**7.** Comme $|z_7| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$, un argument de $z_7$ est un réel $\theta$ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\mathfrak{Re}\,(z_7)}{|z_7|} = \dfrac{-4}{4\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\mathfrak{Im}\,(z_6)}{|z_6|} = \dfrac{-4}{4\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ainsi, $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ est un argument de $z_7$.

$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$
$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

**8.** On a :

$$z_8 = \frac{\sqrt{3} + i}{2i} = \frac{\sqrt{3}}{2i} + \frac{i}{2i} = \frac{-i\sqrt{3}}{-2i^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right),$$

ce qui montre que $-\frac{\pi}{3}$ est un argument de $z_8$. ▲

*$z_8$ est de module 1.*

### Exercice 2.11

Nous allons mettre chacun de ces nombres sous la forme $r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ en commençant par calculer le module $r$ du nombre complexe. Rappelons en particulier (voir l'**exercice 2.10**) que :

**Méthode 2.9**

- 0 est un argument de tout réel strictement positif
- $\pi$ est un argument de tout réel strictement négatif
- $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de tout imaginaire pur de la forme $ib$ avec $b > 0$
- -$\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de tout imaginaire pur de la forme $ib$ avec $b < 0$

**1.** $z_1 = 3 = 3\,(\cos 0 + i \sin 0)$

**2.** $z_2 = -7 = 7 \times (-1) = 7\,(\cos \pi + i \sin \pi)$

**3.** $z_3 = 2i = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$

✎ **Méthode 2.9**

**4.** On a tout d'abord $|z_4| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. On peut alors écrire :

$$z_4 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right),$$

ce qui donne $z_4$ sous forme trigonométrique.

✎ *Au lieu de refaire les calculs, on utilise le résultat de la question précédente et le fait que $z_5 = \overline{z_4}$.*

**5.** On a $z_5 = \overline{z_4}$, donc :

$$\begin{aligned} z_5 = \overline{z_4} &= \overline{2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)} = \overline{2} \times \overline{\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right], \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du fait que $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.

**6.** On applique de nouveau la **méthode 2.9**. On a $|z_6| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, puis :

$$\begin{aligned} z_6 &= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

**7.** On a :

$$|z_7| = \sqrt{\left(-6\sqrt{3}\right)^2 + (-6)^2} = \sqrt{36 \times 3 + 36} = \sqrt{36 \times 4} = \sqrt{36} \times \sqrt{4} = 12$$

✎ **Méthode 2.9**

d'où :

$$\begin{aligned} z_7 &= 12\left(-\frac{6\sqrt{3}}{12} - \frac{6i}{12}\right) = 12\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \times \frac{1}{2}\right) = 12\left(-\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 12\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 12\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

**8.** On commence par calculer le module de $z_8$ :

$$|z_8| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{2 + 6} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

✎ *Toujours la* **méthode 2.9** *!*

On écrit ensuite :

$$\begin{aligned} z_8 &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

**9.** On utilise les relations $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ pour mettre $z_9$ sous forme trigonométrique :

$$z_9 = \cos\frac{\pi}{17} - i\sin\frac{\pi}{17} = \cos\frac{\pi}{17} + i\sin(-\frac{\pi}{17}) = \cos(-\frac{\pi}{17}) + i\sin(-\frac{\pi}{17})$$

Notons que $z_9$ est un nombre complexe de module 1.

**10.** On a :

$$z_{10} = 1 + i\frac{\sin\frac{\pi}{17}}{\cos\frac{\pi}{17}} = \frac{\cos\frac{\pi}{17} + i\sin\frac{\pi}{17}}{\cos\frac{\pi}{17}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{17}}\left(\cos\frac{\pi}{17} + i\sin\frac{\pi}{17}\right)$$

Or $\frac{\pi}{17} \in [0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos\frac{\pi}{17} > 0$, d'où $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{17}} > 0$. Par conséquent, $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{17}}$ est le module de $z_{10}$ et la dernière égalité donne l'écriture de $z_{10}$ sous forme trigonométrique. ▲

✎ *$\frac{\pi}{17}$ est un argument de $z_{10}$.*

### Exercice 2.12

Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Or, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $3 + 3i - (-2 + i) = 5 + 2i$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $1 + \frac{11i}{5} - (-2 + i) = 3 + \frac{6i}{5}$. Mais

✎ *Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.*

$$5 + 2i = \frac{5}{3}\left(3 + \frac{6i}{5}\right)$$

et, par conséquent, $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, les points $A$, $B$ et $C$ sont donc alignés. ▲

✎ **Méthode 2.10**

### Exercice 2.13

Notons $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) l'affixe (que l'on recherche) du point $D$. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Or, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $4 + 5i - (1 + i) = 3 + 4i$ et l'affixe du vecteur $\overrightarrow{DC}$ est $8 + 2i - (a + ib) = 8 - a + i(2 - b)$. Par conséquent, $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si,

✎ *C'est l'unicité de la forme algébrique.*

$$\begin{cases} 8 - a = 3 \\ 2 - b = 4 \end{cases}$$

soit $a = 5$ et $b = -2$. L'affixe du point $D$ est donc $z_D = 5 - 2i$.

▲

### Exercice 2.14

**1.** En notant $\Omega$ le point d'affixe $6i$, la relation $|z - 6i| = 3$ s'écrit $\Omega M = 3$. Par conséquent, l'ensemble des points recherchés est le cercle de centre $\Omega$ et de rayon 3.

✎ $\Omega M = |z_\Omega - z_M|$

**2.** Notons $C$ le point d'affixe $-2$ et $D$ le point d'affixe $3i - 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} |z + 2| = |z - 3i + 1| &\Leftrightarrow |z - (-2)| = |z - (3i - 1)| \\ &\Leftrightarrow CM = DM \end{aligned}$$

L'ensemble recherché est donc l'ensemble des points équidistants de $C$ et $D$, c'est-à-dire la médiatrice du segment $[CD]$.

$\frac{1}{i} = -i$

**3.** Nous allons nous ramener à la question précédente. Pour cela, on écrit $iz - 2 = i(z - \frac{2}{i}) = i(z + 2i)$. En introduisant les points $E$ d'affixe $-2i$ et $F$ d'affixe $-5$, on a alors :

$$\begin{aligned} |iz - 2| = |z + 5| &\Leftrightarrow |i(z + 2i)| = |z + 5| \\ &\Leftrightarrow |i| \times |z + 2i| = |z + 5| \\ &\Leftrightarrow 1 \times |z + 2i| = |z + 5| \\ &\Leftrightarrow EM = FM \end{aligned}$$

et l'ensemble recherché est la médiatrice du segment $[EF]$.

$\overline{Z} = Z$

**4.** Étant donné qu'un complexe et son conjugué ont même module, on a :

$$\left|\overline{z} + \frac{i}{2}\right| = \left|\overline{z - \frac{i}{2}}\right| = \left|z - \frac{i}{2}\right|$$

Si l'on introduit le point $\Omega'$ d'affixe $-\frac{i}{2}$, la relation $\left|\overline{z} + \frac{i}{2}\right| = 4$ peut donc s'écrire $\Omega' M = 4$. L'ensemble recherché est ainsi le cercle de centre $\Omega'$ et de rayon 4.

**5.** Comme $\overline{4 + 2i} = 4 - 2i$, on a $\overline{z} - 4 - 2i = \overline{z - 4 + 2i}$ de sorte que :

$$\begin{aligned} (z - 4 + 2i)(\overline{z} - 4 - 2i) = 4 &\Leftrightarrow (z - 4 + 2i) \times \overline{(z - 4 + 2i)} = 4 \\ &|z - 4 + 2i|^2 = 4 \\ &|z - 4 + 2i| = 2 \end{aligned}$$

En notant $\Omega''$ le point d'affixe $4 - 2i$, on a $\Omega'' M = |z - (4 - 2i)| = |z - 4 + 2i|$. Finalement, l'ensemble recherché est le cercle de centre $\Omega''$ et de rayon 2. ▲

### Exercice 2.15

$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{Z} = Z.$

Rappelons qu'un nombre complexe est réel si, et seulement si, il est égal à son conjugué. On a :

$$\begin{aligned} z^2 + \overline{z} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{z^2 + \overline{z}} = z^2 + \overline{z} \\ &\Leftrightarrow \overline{z^2} + \overline{\overline{z}} = z^2 + \overline{z} \\ &\Leftrightarrow \overline{z}^2 + z = z^2 + \overline{z} \\ &\Leftrightarrow z^2 - \overline{z}^2 + \overline{z} - z = 0 \\ &\Leftrightarrow (z - \overline{z})(z + \overline{z}) + \overline{z} - z = 0 \\ &\Leftrightarrow (z - \overline{z})(z + \overline{z} - 1) = 0 \end{aligned}$$

Or, $z + \overline{z} = 2\mathfrak{Re}\,(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\mathfrak{Im}\,(z)$, d'où :

$$z^2 + \overline{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathfrak{Im}\,(z) = 0 \text{ ou } \mathfrak{Re}\,(z) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble des points $M$ recherchés est formé par l'ensemble des points dont l'affixe a une partie imaginaire nulle ou une partie réelle égale à $\frac{1}{2}$. D'un point de vue géométrique, c'est l'ensemble composé de la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) et de la droite (horizontale) d'équation $y = \frac{1}{2}$. ▲

## Exercice 2.16

**1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| = |(2-i)z_n| = |2-i| \times |z_n| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} \times |z_n| = \sqrt{5}\, u_n$$

ce qui montre que la suite $(u_n)$ est géométrique de raison $\sqrt{5}$.

**2.** D'après la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \left(\sqrt{5}\right)^n$. Or,

$$u_0 = |z_0| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

On obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2\left(\sqrt{5}\right)^n$$

*✎ Le terme général d'une suite géométrique $(u_n)$ de premier terme $u_0$ et de raison $q$ est $u_n = u_0 q^n$.*

**3.** Comme $\sqrt{5} > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{5}\right)^n = +\infty$ et on en déduit que la limite de la suite $(u_n)$ est $+\infty$.

*✎ Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.*

**4.** On vient de voir que la limite de la suite $(u_n)$ est $+\infty$. Par conséquent, pour tout réel $p$, il existe une infinité d'entiers $n$ tels que $u_n > p$. Nous allons déterminer à l'aide d'une fonction Python (que l'on appelle par exemple `seuil`) le plus petit de ces entiers. Pour cela, on utilise une boucle « tant que » afin de calculer les termes successifs de la suite $(u_n)$ et de s'arrêter dès que $u_n > p$.

```
def seuil(p):
  u=2
  n=0
  while u<= p:
     u=sqrt(5)*u
     n=n+1
  return n
```

*✎ On calcule de proche en proche les termes de la suite grâce à la relation $u_{n+1} = \sqrt{5}\, u_n$ et l'on s'arrête dès que $u_n > p$.*

▲

## Exercice 2.17

**1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2} z_n\right| = \frac{1}{2} \times |1+i| \times |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}\, r_n$$

ce qui montre que la suite $(r_n)$ est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**2.** Comme $r_0 = |z_0| = 16$, on déduit de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = r_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

*✎ Suite géométrique de premier terme 16 et de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.*

**3.** Comme, $-1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$$

*✎ Si $q \in ]-1, 1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.*

Corrigé

✎ $r_n = |z_n| = OA_n$

**4.** D'un point de vue géométrique, cela signifie que la distance du point $O$ au point $A_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.

**5.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| &= \left|\frac{1+i}{2} z_n - z_n\right| = \left|\left(\frac{1+i}{2} - 1\right) z_n\right| = \left|\frac{1-i}{2} z_n\right| \\ &= \frac{1}{2} \times |1-i| \times |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n \end{aligned}$$

Mais $\frac{\sqrt{2}}{2} r_n = r_{n+1}$ d'après la question **1**. Ainsi, $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.

**6.** On déduit de la question précédente que :

$$L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n = r_1 + r_2 + \cdots + r_n.$$

✎ *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$, $r_p = 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^p$.

d'où

$$\begin{aligned} L_n &= 16\frac{\sqrt{2}}{2} + 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cdots + 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} + 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{2}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right] \end{aligned}$$

✎ *Pour* $q \neq 1$ *et* $p \in \mathbb{N}$, *on a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} q^k = \frac{1-q^{p+1}}{1-q}$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} L_n &= 8\sqrt{2} \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 8\sqrt{2} \times 2 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{2 - \sqrt{2}} \\ &= 16\sqrt{2} \times (2+\sqrt{2}) \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} \\ &= 16\sqrt{2} \times (2+\sqrt{2}) \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = 16\sqrt{2} \times \sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right) \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{2} \\ &= 16\left(\sqrt{2}+1\right)\left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right] \end{aligned}$$

**7.** Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} L_n = 16(\sqrt{2}+1)$. ▲

# Chapitre 3
# Nombres complexes et trigonométrie

Merveilleux nombres complexes : toute la trigonométrie en découle. Ils permettent d'en retrouver facilement les formules les plus importantes mais, mieux vaut les connaître vraiment. L'étude des nombres complexes de module 1 est très riche de conséquences, en particulier la formule de Moivre devient un jeu d'enfant, elle qui fournit tant d'expressions trigonométriques intéressantes.

### Un mathématicien

Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855) fait preuve, dès le plus jeune âge, d'aptitudes intellectuelles exceptionnelles. Il se passionne pour l'astronomie et, la même année, il découvre l'astéroïde Cérès et publie un ouvrage fondamental sur la théorie des nombres : il n'a que 24 ans ! Par la suite, il explore de nombreuses branches des mathématiques, ouvrant chaque fois des perspectives nouvelles. Il utilise dès 1801 les nombres complexes pour déterminer les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas. C'est à lui qu'on doit le qualificatif de « complexe » pour nommer ces nombres, non pas parce qu'ils sont compliqués mais parce qu'ils s'expriment à l'aide de deux nombres réels.

**LE SAVIEZ-VOUS ?**

L'exponentielle complexe se définit de manière naturelle en posant pour $z = a + ib$, $e^z = e^a \times e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$. En généralisant la formule d'Euler, on peut alors poser $\cos(z) = {}^1/_2\,(e^{iz} + e^{-iz})$ et $\sin(z) = {}^1/_{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$. Ceci permet de définir la trigonométrie complexe mais, attention aux pièges, une équation du type $\cos z = 2$ admet des solutions.

COMPÉTENCES

## ■ les incontournables

- Mettre un nombre complexe sous forme exponentielle
- Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et inversement
- Calculer des puissances de nombres complexes
- Effectuer des calculs avec les nombres complexes en choisissant la forme adaptée
- Utiliser les formules d'Euler et de Moivre

## ■ et plus si affinités

- Transformer des expressions trigonométriques
- Calculer des sommes trigonométriques

# Résumé de cours

## Formules d'addition de duplication

**Théorème 3.1.— Formules d'addition —.** Soit $a$ et $b$ deux nombres réels. Alors :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

**Théorème 3.2.— Formules de duplication —.** Pour tout réel $\theta$, on a :

- $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
  $= 2\cos^2\theta - 1$
  $= 1 - 2\sin^2\theta$
- $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

## Exponentielle imaginaire

**Définition :** *Pour tout réel $\theta$, on définit l'**exponentielle imaginaire** d'angle $\theta$ par :*

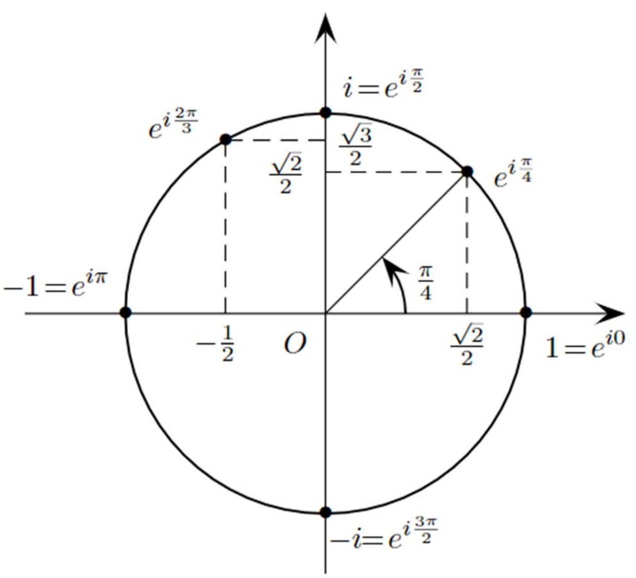
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

**Remarque :** les fonctions cosinus et sinus étant $2\pi$-périodiques, on a :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \forall k\in\mathbb{Z},\ e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$$

**Exemples :**

- $e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^{2i\pi}$
- $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 = e^{-i\pi}$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = i$
- $e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$
- $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$




**Théorème 3.3.—** Soit $\theta$ un réel. Alors :

- $e^{i\theta}$ est un nombre complexe de module 1
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$

**Théorème 3.4.— Relation fonctionnelle —.** Soit $\theta$ et $\theta'$ deux réels. Alors :

$$\boxed{e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}}$$

**Remarque :** on déduit des deux derniers théorèmes que

$$\boxed{\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R},\ e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}}$$

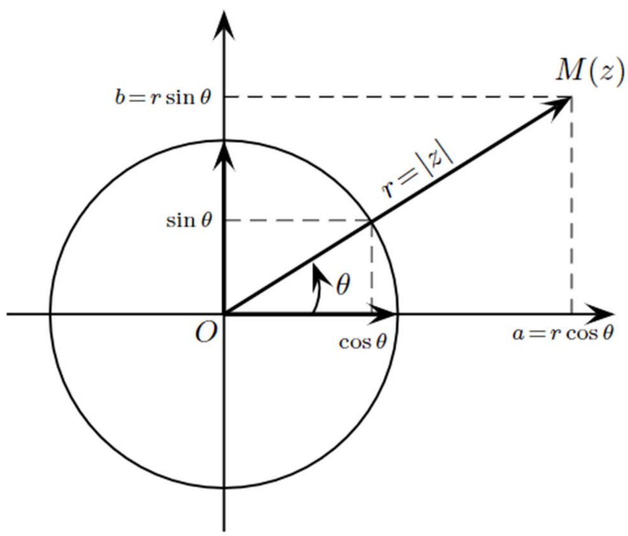
## ■ Forme exponentielle d'un nombre complexe

Rappelons que tout nombre complexe non nul $z$ peut s'écrire sous la forme $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, où $r$ est le module de $z$ et $\theta$ un argument de $z$ (forme trigonométrique de $z$). Comme, par définition, $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, on peut donc écrire $z = re^{i\theta}$ (forme exponentielle de $z$)

**Théorème-Définition 3.5.—** Soit $z$ un nombre complexe non nul. Il existe un couple $(r, \theta)$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

Cette écriture est appelée **forme exponentielle** de $z$.




**Remarque :** dans l'écriture $z = re^{i\theta}$, $r$ est le module de $z$ et $\theta$ un argument de $z$. Comme $z$ admet une infinité d'arguments, la forme exponentielle (tout comme la forme trigonométrique) n'est donc pas unique, contrairement à la forme algébrique.

**Théorème 3.6.—** Deux nombres complexes écrits sous forme exponentielle sont égaux si, et seulement si, ils ont le même module et des arguments égaux **à un multiple de $2\pi$ près**.

**Remarque :** autrement dit

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La proposition ci-dessous donne les opérations sur les nombres complexes écrits sous forme exponentielle. Ces relations permettent notamment de mettre un produit, un inverse, un quotient, une puissance ou un conjugué sous forme exponentielle (voir la **méthode 3.5** et la **méthode 3.6**).

**Proposition 3.7.—** Soit $\theta$ et $\theta'$ deux réels, $r$ $r'$ deux réels strictement positifs et $n$ un entier relatif. Alors

- $re^{i\theta} \times re^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$
- $\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
- $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$
- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$

**Remarque :** la forme exponentielle est particulièrement adaptée aux calculs de produits, quotients et puissances de nombres complexes alors que, pour calculer une somme de nombres complexes, on utilise plutôt la forme algébrique.

## ■ Formules d'Euler et formule de Moivre

**Théorème 3.8.— Formules d'Euler —.** Soit $\theta$ un réel. Alors :

- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

**Théorème 3.9.— Formule de Moivre —.** Soit $\theta$ un réel et $n$ un entier relatif. Alors :

$$\boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}}$$

**Remarque :** autrement dit,

$$\boxed{\forall\theta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

# Démonstrations

## Formules d'addition

Il s'agit de démontrer le **théorème 3.1**.

**Théorème 3.1.— Formules d'addition —.** Soit $a$ et $b$ deux nombres réels. Alors :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

**Démonstration** ▽

Nous allons démontrer, en utilisant le produit scalaire, la deuxième formule, puis en déduire les trois autres.

$\boxed{1}$ En utilisant le produit scalaire, montrons que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

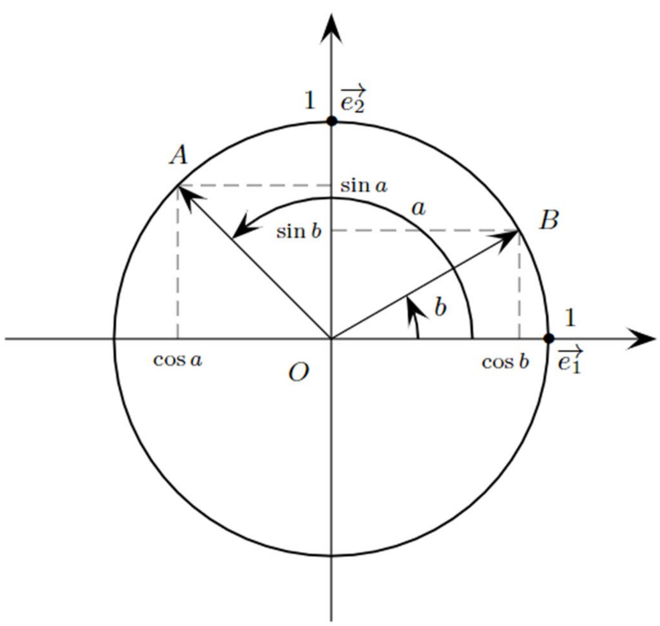
On considère un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (0\,; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan. Rappelons que le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est défini par la formule :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \tag{3.1}$$

où $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une mesure de l'angle orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On sait que l'on peut également exprimer ce produit scalaire à l'aide des coordonnées $(x, y)$ de $\overrightarrow{u}$ et $(x', y')$ de $\overrightarrow{v}$ dans le repère $\mathcal{R}$ :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' \tag{3.2}$$

Introduisons deux points $A$ et $B$ du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{0A}) = a$ et $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{0B}) = b$.




Comme $A$ et $B$ sont sur le cercle trigonométrique, on a $||\overrightarrow{OA}|| = ||\overrightarrow{OB}|| = 1$. D'après (3.2), on a alors :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = ||\overrightarrow{OB}|| \times ||\overrightarrow{OA}|| \times \cos(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 1 \times 1 \times \cos(a-b) = \cos(a-b) \tag{3.3}$$

Par ailleurs, dans le repère $\mathcal{R}$, le point $A$ a pour coordonnées $(\cos a, \sin a)$ et le point $B$ a pour coordonnées $(\cos b, \sin b)$. Par conséquent, d'après (3.2), on a :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b \tag{3.4}$$

Les relations (3.3) et (3.4) permettent de conclure :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$\boxed{2}$ En changeant $b$ en $-b$ dans la relation que nous venons d'obtenir, il vient :

$$\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

car $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. Nous avons ainsi établi la première formule du **théorème 3.1**.

$\boxed{3}$ Comme $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$, on a $\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right)$, ce qui permet d'écrire :

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$$

En appliquant la deuxième formule du **théorème 3.1**, on a alors :

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b$$

Mais $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$, d'où :

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

ce qui démontre la troisième formule du **théorème 3.1**.

$\boxed{4}$ Enfin, en changeant $b$ en $-b$ dans la formule ci-dessus, on a :

$$\sin(a - b) = \sin(a + (-b)) = \sin a \cos(-b) + \sin(-b)\cos a = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

puisque $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, ce qui démontre la quatrième formule du **théorème 3.1**. ▲

## ■ Formule de Moivre

Il s'agit de démontrer le **théorème 3.9**.

**Théorème 3.9.— Formule de Moivre —.** Soit $\theta$ un réel et $n$ un entier relatif. Alors :

$$\boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}}$$

**Démonstration** ▽

Soit $\theta$ un réel fixé. Nous devons établir que :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \tag{3.5}$$

$\boxed{1}$ Nous allons d'abord montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que la relation (3.5) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$$\mathcal{P}(n) :\ \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

**Initialisation :** On a $(e^{i\theta})^0 = 1$ et $e^{i0\theta} = e^{i0} = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
**Hérédité :** On suppose maintenant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, soit :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

Comme $\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} = \left(e^{i\theta}\right)^n \times e^{i\theta}$, le **théorème 3.4** permet alors d'écrire :

$$\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} = \left(e^{i\theta}\right)^n \times e^{i\theta} \underset{\mathcal{P}(n)}{=} e^{in\theta} \times e^{i\theta}$$

Mais, toujours d'après le **théorème 3.4**, $e^{in\theta} \times e^{i\theta} = e^{in\theta + i\theta} = e^{i(n+1)\theta}$, d'où :

$$\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} = e^{i(n+1)\theta}$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
**Conclusion :** Par récurrence, on a montré que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{2}$ Il reste à démontrer l'égalité (3.5) pour un entier strictement négatif. Soit $n$ un tel entier. Alors $-n > 0$ et on peut appliquer ce que l'on a obtenu lors de la première étape à l'entier positif $-n$ :

$$\left(e^{i\theta}\right)^{-n} = e^{-in\theta}$$

Mais, d'après le **théorème 3.3**, on a $e^{in\theta} = \dfrac{1}{e^{-in\theta}}$, d'où :

$$e^{in\theta} = \frac{1}{e^{-in\theta}} = \frac{1}{(e^{i\theta})^{-n}} = \left(e^{i\theta}\right)^n$$

ce qui démontre l'égalité (3.5) pour un entier strictement négatif et termine la démonstration. ▲

# Méthodes

## Utilisation des formules d'addition et de duplication

**Méthode 3.1.— Comment calculer un cosinus ou un sinus**
Lorsque l'on doit calculer le cosinus ou le sinus d'un angle qui n'est pas une valeur particulière du cercle trigonométrique, on peut :
$\boxed{1}$ Commencer par exprimer cet angle comme somme ou différence d'angles remarquables.
$\boxed{2}$ Appliquer ensuite une formule d'addition ou de duplication pour calculer son cosinus ou son sinus.

**Exemple :** en écrivant $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

$\boxed{1}$ On a bien $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$ puisque $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{12} + \dfrac{3\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{12}$.
$\boxed{2}$ On en déduit alors que :

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

De même, on a :

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

**Exemple :** en écrivant $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.
$\boxed{1}$ On a $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4}$, soit $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$.
$\boxed{2}$ Comme $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$, on a $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$, relation que l'on applique à $\theta = \frac{\pi}{8}$ :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

Or, $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, d'où :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Nous en déduisons $\sin\frac{\pi}{8}$ grâce à la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ :

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

Comme $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, on a $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, d'où :

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

**Mise en œuvre : exercice 3.2.**

**❑ Méthode 3.2.— Comment résoudre une équation trigonométrique**
Pour résoudre certaines équations trigonométriques, on peut utiliser les formules d'addition ou de duplication pour simplifier l'expression et se ramener à une équation trigonométrique plus simple à résoudre, c'est-à-dire de la forme $\cos x = a$ ou $\sin x = b$.

**Exemple :** en utilisant les formules d'addition, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Comme $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$ et $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, on peut écrire :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On reconnaît la formule d'addition donnant $\cos(a+b)$, de sorte que :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On s'est ramené à une équation trigonométrique simple $\cos X = \frac{\sqrt{2}}{2}(= \cos\frac{\pi}{4})$ dont les solutions sont tous les réels $X$ de la forme $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

et on en déduit l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

**Exemple :** en utilisant les formules de duplication résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(2x) = \sin x$.
Sachant que $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, on a :

$$\begin{aligned}
\sin(2x) = \sin x &\Leftrightarrow 2\sin x\cos x = \sin x \\
&\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \sin x = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } 2\cos x - 1 = 0
\end{aligned}$$

L'équation équivaut donc à $\sin x = 0$ ou $\cos x = \frac{1}{2}$ et on en déduit l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions :

$$\mathcal{S} = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

**Mise en œuvre : exercice 3.5.**

## ■ Forme exponentielle d'un nombre complexe

Rappelons que tout nombre complexe non nul s'écrit sous forme exponentielle :

$$z = re^{i\theta}$$

où $r = |z| \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de $z$.

**❑ Méthode 3.3.— Comment mettre sous forme algébrique un nombre complexe donné sous forme exponentielle**

Si un nombre complexe s'écrit sous forme exponentielle $z = re^{i\theta}$, où $r$ est le module de $z$ et $\theta$ un argument de $z$, on a alors :

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cos\theta + ir\sin\theta.$$

Ainsi, $\mathfrak{Re}\,(z) = r\cos\theta$ et $\mathfrak{Im}\,(z) = r\sin\theta$, ce qui nous donne la forme algébrique de $z$.

**Exemple :** déterminer la forme algébrique des nombres complexes $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.On a :

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i$$

**Mise en œuvre : exercice 3.7**.

**❑ Méthode 3.4.— Comment mettre un complexe sous forme exponentielle**

Nous avons déjà vu dans le chapitre **Nombres complexes : point de vue géométrique** comment mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique.

La méthode est ici la même. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. Pour mettre $z$ sous forme exponentielle :

$\boxed{1}$ On commence par calculer son module $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$\boxed{2}$ On écrit ensuite :

$$z = r\left(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}\right),$$

et on détermine un réel $\theta$ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$. On a alors :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

et on a ainsi mis $z$ sous forme exponentielle.

**Exemple :** écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$.
On applique la **méthode 3.4** en commençant par calculer le module de $z$ :

$$r = |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2.$$

Méthodes

On obtient ensuite la forme exponentielle de $z$ en mettant en facteur ce module :

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

**Mise en œuvre : exercice 3.8**, **exercice 3.9** et **exercice 3.10**.

**❑ Méthode 3.5.— Comment mettre un conjugué sous forme exponentielle**
Si $z$ s'écrit sous forme exponentielle $re^{i\theta}$, alors $\overline{z} = re^{-i\theta}$ d'après la **proposition 3.7**. Cela permet d'écrire $\overline{z}$ sous forme exponentielle. Le module de $\overline{z}$ est $r = |z|$ et $-\theta$ est un argument de $\overline{z}$.

**Exemple :** nous avons vu dans l'exemple ci-dessus que $\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Par conséquent,

$$\sqrt{3} - i = \overline{\sqrt{3} + i} = \overline{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

et nous avons mis $\sqrt{3} - i$ sous forme exponentielle.

**Mise en œuvre : exercice 3.8**.

**❑ Méthode 3.6.— Comment mettre un produit, un quotient ou une puissance sous forme exponentielle**
Lorsqu'on doit mettre sous forme exponentielle un produit, un quotient ou une puissance de nombres complexes dont on connaît la forme exponentielle, on applique les formules données par la **proposition 3.7** :

- $re^{i\theta} \times re^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
- $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

**Exemple :** mettre sous forme exponentielle les nombres complexes

$$z_1 = (\sqrt{3} + i)(1 - i), \qquad z_2 = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}, \qquad z_3 = \left(\sqrt{3} + i\right)^5$$

Dans les exemples précédents, nous avons écrit $1 - i$ et $\sqrt{3} + i$ sous forme exponentielle :

$$\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad\qquad 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

En utilisant les formules rappelées dans la **méthode 3.6**, on en déduit que :

$$z_1 = (\sqrt{3} + i)(1 - i) = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$$
$$z_2 = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{4})\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$
$$z_3 = \left(\sqrt{3} + i\right)^5 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5 = 2^5 e^{i\frac{5\pi}{6}} = 32e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

**Mise en œuvre : exercice 3.8**, **exercice 3.9** et **exercice 3.10**.

## ■ Utilisation des formules d'Euler et de Moivre

**❑ Méthode 3.7.— Comment linéariser une expression de la forme $\cos^p\theta\sin^q\theta$**
Linéariser, c'est transformer un produit en somme. Par exemple, on déduit de la formule de duplication $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ que $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$. On vient de **linéariser** $\cos^2\theta$.
Plus généralement, pour linéariser une expression de la forme $\cos^p\theta\sin^q\theta$, avec $p, q \in \mathbb{N}$

$\boxed{1}$ On commence par appliquer les formules d'Euler en écrivant

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$\boxed{2}$ On développe $\left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^p$ et $\left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^q$ à l'aide de la formule du binôme

$\boxed{3}$ Une fois l'expression entièrement développée, on obtient une somme composée de termes de la forme $e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}$ ou $e^{il\theta}-e^{-il\theta}$ que l'on simplifie à l'aide des formules d'Euler :

$$e^{ik\theta}+e^{-ik\theta} = 2\cos(k\theta) \quad \text{et} \quad e^{il\theta}-e^{-il\theta} = 2i\sin(l\theta)$$

**Exemple :** linéariser, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^3\theta$.

$\boxed{1}$ On a, d'après les **formules d'Euler**, $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$.

$\boxed{2}$ Comme $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (**formule du binôme**), on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\cos^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^3}{2^3}\\ &= \frac{1}{2^3}\left[\left(e^{i\theta}\right)^3 + 3\left(e^{i\theta}\right)^2 \times e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \times \left(e^{-i\theta}\right)^2 + \left(e^{-i\theta}\right)^3\right]\end{aligned}$$

Or, d'après la **formule de Moivre**, on a $(e^{i\theta})^k = e^{ik\theta}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, d'où :

$$\cos^3\theta = \frac{1}{8}\Big(e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta} \times e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \times e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}\Big) = \frac{1}{8}\Big(e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}\Big)$$

$\boxed{3}$ On simplifie cette expression en utilisant, de nouveau, les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}\cos^3\theta &= \frac{1}{8}\Big[e^{3i\theta} + 3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right) + e^{-3i\theta}\Big] = \frac{1}{8}\Big[e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\Big]\\ &= \frac{1}{8}\Big(2\cos 3\theta + 3 \times 2\cos\theta\Big) = \frac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4}\end{aligned}$$

On a ainsi obtenu $\cos^3\theta = \dfrac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4}$ et nous avons linéarisé $\cos^3\theta$.

**Mise en œuvre : exercice 3.11.**

❑ **Méthode 3.8.— Comment développer $\cos(px)$ ou $\sin(px)$**

C'est l'opération inverse de la linéarisation. D'après la formule de Moivre, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{N},\ (\cos x + i \sin x)^p = \cos(px) + i \sin(px)$$

En particulier, $\cos(px) = \mathfrak{Re}\left((\cos x + i\sin x)^p\right)$ et $\sin(px) = \mathfrak{Im}\left((\cos x + i\sin x)^p\right)$.

Soit $p$ un entier naturel et $x$ un réel. Pour calculer $\cos(px)$ ou $\sin(px)$.

$\boxed{1}$ On développe $(\cos x + i\sin x)^p$ à l'aide de la formule du binôme.

$\boxed{2}$ La partie réelle de l'expression obtenue est $\cos(px)$, et sa partie imaginaire $\sin(px)$.

**Exemple :** développer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$.

$\boxed{1}$ D'après la formule du binôme, $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, d'où :

$$\begin{aligned}(\cos x + i\sin x)^4 &= (\cos x)^4 + 4(\cos x)^3 i\sin x + 6(\cos x)^2(i\sin x)^2 + 4\cos x(i\sin x)^3 + (i\sin x)^4\\ &= \cos^4 x + 4i\cos^3 x\ \sin x - 6\cos^2 x\sin^2 x - 4i\cos x\sin^3 x + \sin^4 x\\ &= \cos^4 x + \sin^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + i\big(4\cos^3 x\ \sin x - 4\cos x\sin^3 x\big)\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Par conséquent,

$$\cos(4x) = \mathfrak{Re}\left((\cos x + i\sin x)^4\right) = \cos^4 x + \sin^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x$$

$$\sin(4x) = \mathfrak{Im}\left((\cos x + i\sin x)^4\right) = 4\cos^3 x\ \sin x - 4\cos x\sin^3 x = 4\cos x\sin x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$$

**Mise en œuvre : exercice 3.12**.

❑ **Méthode 3.9.— Comment simplifier les sommes $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ et $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$**

Pour simplifier la somme $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$

$\boxed{1}$ On factorise $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ par $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ en utilisant le **théorème 3.4** :

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$$

$\boxed{2}$ On simplifie l'expression obtenue en appliquant la relation d'Euler $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ :

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \times 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

La même factorisation permet de simplifier $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$ en appliquant la relation d'Euler $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$ :

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \times 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

En particulier, en prenant $\beta = 0$, on obtient une factorisation par l'angle « moitié » :

$$e^{i\alpha} + 1 = 2e^{i\frac{\alpha}{2}}\cos\tfrac{\alpha}{2} \qquad \text{et} \qquad e^{i\alpha} - 1 = 2ie^{i\frac{\alpha}{2}}\sin\tfrac{\alpha}{2}$$

**Exemple :** soit $\theta$ un réel différent de $2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. Simplifier le nombre complexe $z = \dfrac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}$.

Notons que, pour $\theta$ différent de $2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), on a $e^{i\theta} \neq 1$ et, par conséquent, $e^{i\theta} - 1 \neq 0$. On applique la **méthode 3.9** en écrivant :

$$e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\tfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$
$$e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2i\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

On en déduit que :

$$z = \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{i\sin\frac{\theta}{2}} = -i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = -\frac{i}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

On a, au passage, déterminé la forme algébrique de $z$ et montré que c'est un imaginaire pur.

**Mise en œuvre : exercice 3.13**, **exercice 3.14** et **exercice 3.15**.

## Calcul de sommes trigonométriques

**Méthode 3.10.— Comment calculer une somme à l'aide des nombres complexes**
Une somme de nombres réels peut parfois s'écrire comme la partie réelle (ou imaginaire) d'une somme $S$ de nombres complexes, plus facile à simplifier. Dans ce cas, on commence par calculer la somme $S$ et on déduit, selon la question posée, la somme $\mathfrak{Re}\,(S)$ ou $\mathfrak{Im}\,(S)$. Cette méthode fait souvent intervenir la **méthode 3.9**.

**Exemple :** soit $\theta$ un réel qui n'est pas un multiple de $2\pi$ et $n$ un entier naturel. Calculer la somme :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$$

Comme $\cos(k\theta) = \mathfrak{Re}\,(e^{ik\theta})$, introduisons la somme $S_n$ de nombres complexes définie par :

$$S_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)}_{A_n} + i\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

de sorte que $A_n = \mathfrak{Re}\,(S_n)$. Or,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\big[\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)\big] = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$$

D'après la formule de Moivre, on a donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k$$

Méthodes

Par conséquent, $S_n$ est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{i\theta} \neq 1$ (puisque $\theta$ n'est pas un multiple de $2\pi$). On en déduit que :

$$S_n = \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}}$$

Nous allons alors factoriser numérateur et dénominateur par l'angle « moitié » (**méthode 3.9**) :

$$S_n = \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}(e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})} = e^{i[\frac{(n+1)\theta}{2} - \frac{\theta}{2}]}\frac{-2i\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{-2i\sin(\frac{\theta}{2})} = e^{i\frac{n\theta}{2}}\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

La forme algébrique de $S_n$ est ainsi donnée par :

$$S_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left[\cos(\frac{n\theta}{2}) + i\sin(\frac{n\theta}{2})\right]$$

Il n'y a plus qu'à extraire la partie réelle de $S_n$ pour obtenir la valeur de $A_n$ :

$$A_n = \mathfrak{Re}\,(S_n) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\cos(\frac{n\theta}{2})}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Notons que, lorsque $\theta$ est un multiple de $2\pi$, on a $\cos(k\theta) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n}1 = n + 1$$

**Mise en œuvre : exercice 3.15**, **exercice 3.16**.

# Vrai/Faux

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1.** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(2\theta) = 2\sin\theta$. | ☐ | ☐ |
| **2.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$. | ☐ | ☐ |
| **3.** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}$ est un nombre complexe de module 1. | ☐ | ☐ |
| **4.** L'exponentielle imaginaire $e^{i\theta}$ est toujours un nombre non réel. | ☐ | ☐ |
| **5.** Pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$. | ☐ | ☐ |
| **6.** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$. | ☐ | ☐ |
| **7.** $-5$ s'écrit sous forme exponentielle $-5e^{i0}$. | ☐ | ☐ |
| **8.** L'écriture sous forme exponentielle d'un nombre complexe non nul est unique. | ☐ | ☐ |
| **9.** $\left(4\cos\frac{\pi}{8} + 4i\sin\frac{\pi}{8}\right)^3 = 4\cos\frac{3\pi}{8} + 4i\sin\frac{3\pi}{8}$. | ☐ | ☐ |
| **10.** $(1 + i\sqrt{3})^6$ est un nombre réel. | ☐ | ☐ |
| **11.** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} + 1 = 2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}$. | ☐ | ☐ |

# Énoncé des exercices

## Formules d'addition et de duplication

**Exercice 3.1 :** Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ les expressions suivantes

**1.** $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ ;

**2.** $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

**Exercice 3.2 :** Calculer de deux façons le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{12}$.

**1.** En écrivant $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$.

**2.** En écrivant $\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}$.

**3.** Y a-t-il une incohérence dans les résultats des deux questions précédentes ?

**Exercice 3.3 :** On considère l'intégrale $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$

**1.** Soit $x$ un réel. Exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$.

**2.** En déduire la valeur de l'intégrale $I$.

**Exercice 3.4 :** Soit $\theta\in\mathbb{R}$.

**1.** Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ uniquement.

**2.** Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin\theta$ uniquement.

**Exercice 3.5* :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes.

**1.** $\cos(2x)+3\cos x=4$

**2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\frac{1}{2}$

**Exercice 3.6* :** Soit $a$ et $b$ deux réels. En calculant de deux manières différentes $e^{ia}e^{ib}$, retrouver les formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

## Forme exponentielle d'un nombre complexe

**Exercice 3.7 :** Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants, donnés sous forme exponentielle.

**1.** $z_1=8e^{i\frac{\pi}{6}}$

**2.** $z_2=3e^{i\pi}$

**3.** $z_3=2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

**4.** $z_4=4e^{\frac{4i\pi}{3}}$

**5.** $z_5=7e^{i\frac{\pi}{2}}$

**6.** $z_6=5e^{i\frac{11\pi}{6}}$

**Exercice 3.8 :** Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants.

1. $z_1 = 1 + i$
2. $z_2 = 1 - i$
3. $z_3 = -\dfrac{5}{4}$
4. $z_4 = \dfrac{2}{3}i$
5. $z_5 = (-\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{3} + i)$
6. $z_6 = \frac{5(1-i)}{\sqrt{3}+i}$
7. $z_7 = \frac{2}{1-i}$
8. $z_8 = (1 - i)^5$
9. $z_9 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{10}$
10. $z_{10} = \left(\sqrt{3} + i\right)^{2\,020}$

**Exercice 3.9 :** On pose $z = 1 + i\sqrt{3}$.

1. Écrire $z$ sous forme exponentielle.
2. En déduire les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $z^n$ soit un nombre réel.

**Exercice 3.10 :** On pose $z = (1 + i)(\sqrt{3} - i)$.

1. Déterminer la forme algébrique de $z$.
2. Mettre $z$ sous forme exponentielle.
3. Déduire des questions précédentes la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

## Utilisation des formules d'Euler et de Moivre

**Exercice 3.11* :** Linéariser les expressions suivantes

1. $\sin^3 \theta$
2. $\sin \theta \cos^2 \theta$

**Exercice 3.12* :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos 5x$ en fonction de $\cos x$ uniquement, et $\sin 5x$ en fonction de $\sin x$ uniquement.

**Exercice 3.13* :** Pour $p, q \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

**Exercice 3.14** :** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Mettre, lorsque cela est possible, $1 + e^{i\theta}$ sous forme exponentielle.

## Calcul de sommes

**Exercice 3.15** :** Soit $\theta$ un réel et $n$ un entier naturel. Calculer la valeur des sommes

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

**Exercice 3.16** :** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$.

1. Écrire le nombre complexe $z = (1 + i)^{2n}$ sous forme exponentielle.
2. En déduire la valeur des sommes $S_n$ et $T_n$.

# Indications

**Ex. 3.1**

*On applique tout simplement les formules d'addition !*

**Ex. 3.4**

*On pourra écrire* $3\theta = 2\theta + \theta$ *puis appliquer les formules d'addition et de duplication.*

**Ex. 3.12**

*Appliquer la* **méthode 3.8** *puis utiliser la relation* $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

**Ex. 3.13**

*On pourra commencer par écrire* $\cos p + \cos q = \mathcal{R}e(e^{ip} + e^{iq})$ *puis on utilisera la* **méthode 3.9**.

**Ex. 3.14**

*On commencera par transformer* $1 + e^{i\theta}$ *en utilisant l'angle « moitié » (***méthode 3.9***).*

**Ex. 3.15**

*On appliquer la* **méthode 3.10** *en commençant par calculer la somme* $C_n = A_n + iB_n$

# Corrigé des vrai/faux

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | V | V | F | V | F | F | F | F | V | V |

**1.** En prenant par exemple $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $\sin(2\theta) = \sin(\pi) = 0$ et $2\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2$, ce qui montre que la relation donnée est fausse. La formule correcte est (formules de duplication, **théorème 3.2**) :

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

**2.** On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ (**théorème 3.2**). En appliquant cette formule à $\theta = \frac{x}{2}$, on obtient :

$$\cos x = \cos\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

**3.** C'est une des deux propriétés du **théorème 3.3**. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$$

**4.** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}$ (nombre complexe de module 1, voir la question précédente) est l'affixe d'un point du cercle trigonométrique. Deux points de ce cercle sont situés sur l'axe des réels : 1 et $-1$. Ainsi, pour tout $\theta$ multiple de $\pi$, $e^{i\theta}$ est un réel. Plus précisément, pour tout entier relatif $k$ :

$$e^{2ik\pi} = 1 \quad \text{et} \quad e^{\pi+2ik\pi} = -1$$

**5.** C'est le **théorème 3.4**.

**6.** Ne pas oublier $i$ dans cette formule d'Euler ! Pour tout réel $\theta$, $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i}$.

**7.** Dans l'écriture sous forme exponentielle $re^{i\theta}$, on a $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Or $-5 < 0$. Comme $-1 = e^{i\pi}$, on peut écrire $-5$ sous forme exponentielle de la manière suivante : $-5 = 5e^{i\pi}$.

**8.** Dans l'écriture sous forme exponentielle $z = re^{i\theta}$, $\theta$ est un argument de $z$. On sait qu'il en existe une infinité. Il n'y a donc pas unicité de l'écriture sous forme exponentielle.

**9.** Attention à ne pas oublier de distribuer la puissance :

$$\left(4\cos\frac{\pi}{8} + 4\sin\frac{\pi}{8}\right)^3 = \left(4e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^3 = (4)^3\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^3 = 4^3e^{3i\frac{\pi}{8}} = 64\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

**10.** Le nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$ (dont le module est 2) peut s'écrire sous forme exponentielle $2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Par conséquent, $(1+i\sqrt{3})^6 = (2e^{i\frac{\pi}{6}})^6 = 2^6e^{i\pi} = 2^6 \times (-1) = -2^6$ , nombre qui est réel.

**11.** C'est la factorisation de $e^{i\theta} + 1$ par l'angle « moitié » (**méthode 3.9**) :

$$e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}$$

# Corrigé des exercices

## Exercice 3.1

*Théorème 3.1*

C'est une application directe des formules d'addition

**1.** On a :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos x\,\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\,\sin\frac{\pi}{4} = \cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}\,(\cos x - \sin x)}{2}$$
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin x\,\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \cos x$$
$$= \frac{\sqrt{2}\,(\cos x + \sin x)}{2}$$

**2.** De même :

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos x\,\cos\frac{\pi}{3} + \sin x\,\sin\frac{\pi}{3} = \cos x \times \frac{1}{2} + \sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{\cos x + \sqrt{3}\,\sin x}{2}$$
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \sin x\,\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \sin x \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos x$$
$$= \frac{\sin x - \sqrt{3}\,\cos x}{2}$$

▲

## Exercice 3.2

*On met en œuvre la **méthode 3.1**.*

**1.** On a $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$ et on applique les formules d'addition :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

De même, on a :

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

*C'est encore la **méthode 3.1**.*

**2.** On utilise cette fois une formule de duplication. On déduit de la relation $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ que $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$, égalité que l'on applique à $\theta = \frac{\pi}{12}$ :

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1+\cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

Or, $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{\pi}{12} > 0$, d'où :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Nous en déduisons $\sin\frac{\pi}{12}$ grâce à la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ :

$$\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Comme $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$, on a $\sin\frac{\pi}{12} > 0$, d'où :

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

**3.** Cela ne saute pas vraiment aux yeux mais les deux expressions de $\cos\frac{\pi}{12}$ obtenues lors deux questions précédentes sont évidemment égales ! Et il en est bien sûr de même pour les deux expressions de $\sin\frac{\pi}{12}$. Vérifions-le pour $\cos\frac{\pi}{12}$. On peut effectuer les produits en croix pour montrer que les deux fractions sont égales, ou écrire :

*On veut montrer l'égalité :* $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{16}} = \sqrt{\frac{8+2\sqrt{12}}{16}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{12}+2}{16}}\\ &= \sqrt{\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{16}} = \frac{|\sqrt{6}+\sqrt{2}|}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que $\sqrt{6}+\sqrt{2} > 0$. D'où l'égalité attendue. On montre, de la même façon, l'égalité des deux expressions de $\sin\frac{\pi}{12}$. ▲

$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x|$

## Exercice 3.3

**1.** D'après les formules de duplication, on a $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, d'où :

*On* **linéarise** $\cos^2 x$ *(transformation d'un produit en somme).*

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

**2.** On utilise cette expression de $\cos^2 x$ pour en trouver une primitive :

*La linéarisation permet de trouver simplement une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^2 x$.*

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\sin(2\times\frac{\pi}{2})}{4} - \left(\frac{0}{2} + \frac{\sin 0}{4}\right)\\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\sin\pi}{4} - \left(\frac{0}{2} + \frac{\sin 0}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + 0 - (0+0)\\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

▲

## Exercice 3.4

**1.** On écrit $3\theta = 2\theta + \theta$ puis on applique les formules d'addition et de duplication :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta+\theta) = \cos(2\theta)\cos\theta - \sin(2\theta)\sin\theta\\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\times\sin\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\end{aligned}$$

✎ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Or $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, d'où :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

✎ *Cette fois on écrit* $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$, *qui ne fait intervenir que* $\sin\theta$.

**2.** On procède de la même façon en appliquant cette fois la formule d'addition donnant $\sin(a+b)$ :

$$\begin{aligned}\sin(3\theta) &= \sin(2\theta+\theta) = \sin(2\theta)\cos\theta + \sin\theta\cos(2\theta)\\ &= 2\sin\theta\cos\theta\times\cos\theta + \sin\theta(1-2\sin^2\theta)\\ &= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta\end{aligned}$$

✎ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Comme $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\sin(3\theta) &= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta\\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{aligned}$$

Cet exercice permet de manipuler les formules d'addition et de duplication mais on peut aussi obtenir ces relations en appliquant la **méthode 3.8**. ▲

## Exercice 3.5

**1.** Comme $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, on a :

$$\begin{aligned}\cos(2x) + 3\cos x = 4 &\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 3\cos x = 4\\ &\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 5 = 0\end{aligned}$$

En posant $X = \cos x$, cette dernière équation s'écrit $2X^2 + 3X - 5 = 0$, équation du second degré dont les solutions sont $X_1 = 1$ et $X_2 = \frac{5}{2}$. En revenant à $x$, on a donc :

$$\cos(2x) + 3\cos x = 4 \Leftrightarrow \cos x = 1 \text{ ou } \cos x = \frac{5}{2}$$

✎ $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

L'équation $\cos x = \frac{5}{2}$ n'a pas de solution puisque $\frac{5}{2} > 1$. Par ailleurs, les solutions de l'équation $\cos x = 1$ sont tous les réels de la forme $2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

**2.** Nous allons appliquer la **méthode 3.2** en faisant apparaître une formule d'addition. Comme $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \cos x\,\cos\frac{\pi}{4} + \sin x\,\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

*Pour résoudre une équation de la forme $a\cos x + b\sin x = c$, on la transforme en une équation de la forme $\alpha\cos(x+\beta) = \gamma$.*

Ainsi,

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

*On s'est ramené à une équation de la forme $\cos X = \cos\frac{\pi}{3}$, bien plus simple à résoudre.*

soit :

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

On en déduit l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

▲

## Exercice 3.6

Suivons l'énoncé en calculant de deux façons différentes $e^{ia}e^{ib}$.

▶ On a, d'une part, par définition de l'exponentielle imaginaire et du produit de deux nombres complexes :

*Par définition, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.*

$$\begin{aligned}e^{ia} \times e^{ib} &= (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)\\ &= \cos a\cos b - \sin a\sin b + i(\cos a\sin b + \sin a\cos b)\end{aligned}$$

▶ D'autre part, d'après le **théorème 3.3**, on a $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$, soit :

$$e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires des deux expressions que l'on vient d'obtenir, il vient :

*Unicité de la forme algébrique.*

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b\\ \sin(a+b) &= \sin a\cos b + \sin b\cos a\end{aligned}$$

ce qui permet de retrouver les formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$. Notons qu'en remplaçant $b$ par $-b$ dans les relations ci-dessus, on retrouve également les formules donnant $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$. ▲

## Exercice 3.7

On applique la **méthode 3.3**.

**1.** $z_1 = 8e^{i\frac{\pi}{6}} = 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{3} + 4i$

**2.** $z_2 = 3e^{i\pi} = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3(-1 + i \times 0) = -3$

Corrigé

$\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$

**3.** $z_3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2+2i$

$\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$

**4.** $z_4 = 4e^{\frac{4i\pi}{3}} = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2-2i\sqrt{3}$

**5.** $z_5 = 7e^{i\frac{\pi}{2}} = 7\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 7(0+i\times 1) = 7i$

**6.** Comme $\frac{11\pi}{6} - 2\pi = -\frac{\pi}{6}$, on en déduit que :

$$z_6 = 5e^{11\frac{i\pi}{6}} = 5\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 5\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\times\frac{1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5i}{2}$$

▲

## Exercice 3.8

**1.** Appliquons la **méthode 3.4** en commençant par calculer le module de $z_1$ :

$$|z_1| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

**Méthode 3.4**

On factorise ensuite $z_1$ par $|z_1|$ :

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et nous avons écrit $z_1$ sous forme exponentielle.

**Méthode 3.5**

**2.** Comme $z_2 = \overline{z_1}$, la question précédente donne directement $z_2$ sous forme exponentielle :

$$z_2 = \overline{z_1} = \overline{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

*Voir le* **Vrai/Faux**.

**3.** Attention, $z_3$ n'est pas donné sous forme trigonométrique puisque $-\frac{5}{4} < 0$ ! On a $z_3 = \frac{5}{4}\times(-1) = \frac{5}{4}e^{i\pi}$.

**4.** Comme $i$ s'écrit sous forme exponentielle $e^{i\frac{\pi}{2}}$, on a $z_4 = \frac{2}{3}i = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

*Mise sous forme exponentielle d'un produit.*

**5.** Nous allons mettre les nombres complexes $-\sqrt{3}+3i$ et $\sqrt{3}+i$ sous forme exponentielle, puis leur produit $z_3$ en appliquant la **méthode 3.6**. On a :

$$|-\sqrt{3}+3i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

d'où

$$-\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 2\sqrt{3}\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\sqrt{3}e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

De même,

$$|\sqrt{3}+i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

puis

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\times\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$$

Par conséquent,

$$z_3 = (-\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}+i) = 2\sqrt{3}e^{\frac{2i\pi}{3}} \times 2e^{\frac{i\pi}{6}} = 4\sqrt{3}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} = 4\sqrt{3}e^{i\frac{5i\pi}{6}}$$

✎ **Méthode 3.6**

**6.** Nous allons de nouveau appliquer la **méthode 3.6** pour mettre cette fois un quotient sous forme exponentielle. Comme nous avons déjà écrit $1-i$ (question **2**) et $\sqrt{3}+i$ (question **5**) sous forme exponentielle, on a alors :

✎ **Méthode 3.6** *pour la mise d'un quotient sous forme exponentielle.*

$$z_6 = \frac{5(1-i)}{\sqrt{3}+i} = \frac{5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \times e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{5}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5i\pi}{12}}$$

**7.** Comme $1-i$ s'écrit sous forme trigonométrique $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, on a directement :

✎ *Voir la question* **2**.

$$z_7 = \frac{2}{1-i} = \frac{2}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

✎ $\frac{1}{e^{-i\theta}} = e^{i\theta}$

**8.** De nouveau, nous utilisons l'écriture sous forme exponentielle de $1-i$ obtenue à la question **2** puis la **méthode 3.6** :

✎ **Méthode 3.6** *pour mettre une puissance sous forme exponentielle.*

$$z_8 = (1-i)^5 = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \times \sqrt{2}e^{-\frac{5i\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{-\frac{5i\pi}{4}}$$

**9.** À partir de l'écriture sous forme exponentielle de $1+i$ et $\sqrt{3}+i$ obtenue aux questions précédentes, nous allons appliquer la **méthode 3.6** pour mettre un quotient puis une puissance sous forme exponentielle :

$$z_9 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^{10} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}\left(e^{\frac{i\pi}{4}-\frac{i\pi}{6}}\right)^{10}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{10} = \frac{1}{32}e^{\frac{10i\pi}{6}} = \frac{1}{32}e^{\frac{5i\pi}{3}}$$

**10.** Comme $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, on en déduit que :

✎ *Voir la question* **3**.

$$z_{10} = \left(\sqrt{3}+i\right)^{2\,020} = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2\,020} = 2^{2\,020}\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2\,020} = 2^{2\,020}e^{i\frac{2\,020\pi}{6}}$$
$$= 2^{2\,020}e^{i\frac{1\,010\pi}{3}}$$

Or $1\,010 = 1\,008 + 2 = 3 \times 336 + 2$ et $336\pi$ est un multiple de $2\pi$.
Par conséquent,

✎ $1\,010$ *n'est pas un multiple de* $3$*, contrairement à* $1\,008$.

$$z_{10} = 2^{2\,020}e^{i\frac{(3\times336+2)\pi}{3}} = 2^{2\,020}e^{i\pi(336+\frac{2}{3})} = 2^{2\,020}\underbrace{e^{336i\pi}}_{=1} \times e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2^{2\,020}e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

▲

## Exercice 3.9

**1.** On applique la **méthode 3.4**. On a :

$$|z| = |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$



Corrigé

puis

$$z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

**2.** D'après la formule de Moivre, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$$

*Voir le* **Vrai/Faux**.

Or, $2^n$ est évidemment un réel et, par ailleurs, $e^{i\theta}$ est un réel si, et seulement si, $\theta$ est un multiple de $\pi$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} z^n \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{n\pi}{3} = k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{n}{3} = k \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 3k \end{aligned}$$

Finalement, $z^n$ est réel si, et seulement si, $n$ est un multiple de 3. ▲

## Exercice 3.10

**1.** On détermine la forme algébrique de $z$ :

$$z = (1+i)(\sqrt{3} - i) = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + 1 = \sqrt{3} + 1 + i\left(\sqrt{3} - 1\right) \tag{3.6}$$

**2.** Nous allons mettre $z$ sous forme exponentielle grâce à la **méthode 3.6** à partir de l'écriture sous forme exponentielle de $1+i$ et $\sqrt{3}-i$. Dans l'**exercice 3.8**, nous avons mis $1+i$ et $\sqrt{3}-i$ sous forme exponentielle, on a :

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \sqrt{3} - i &= \overline{\sqrt{3}+i} = \overline{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

**Méthode 3.6**

Cela permet d'obtenir $z$ sous forme exponentielle :

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

**3.** En utilisant l'unicité de la forme algébrique, nous allons déduire des deux questions précédentes la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. D'après la question **2**, on a $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$, soit :

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + i \times 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

*Unicité de la forme algébrique.*

Par ailleurs, la relation (3.6) nous donne également la forme algébrique de $z$. On en déduit que :

$$\mathfrak{Re}\,(z) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{3} + 1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}\,(z) = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{3} - 1$$

Ainsi,

*On retrouve les résultats obtenus à l'***exercice 3.2**.

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

▲

## Exercice 3.11

Nous allons appliquer la **méthode 3.7** qui permet de linéariser les expressions de la forme $\cos^p\theta\sin^q\theta$, où $p$ et $q$ sont deux entiers naturels.

**1.** On commence par écrire :

*Formule d'Euler.*

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2i}$$

Comme $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, on a alors :

*Formule du binôme (***théorème 1.8***).*

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3}{(2i)^3}\\
&= \frac{1}{2^3i^3}\left[\left(e^{i\theta}\right)^3 - 3\left(e^{i\theta}\right)^2\times e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\times\left(e^{-i\theta}\right)^2 - \left(e^{-i\theta}\right)^3\right]\\
&= \frac{1}{-8i}\left(e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}\times e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\times e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}\right)\\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\right) = -\frac{1}{8i}\left[e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\right]
\end{aligned}$$

On regroupe alors les termes grâce à la formule d'Euler :

*Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, $e^{i\alpha}-e^{-i\alpha} = 2i\sin\alpha$*

$$\sin^3\theta = -\frac{1}{8i}\left[2i\sin 3\theta - 3\times 2i\sin\theta\right] = \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}$$

**2.** Sachant que $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$, on a :

*Formules d'Euler.*

$$\begin{aligned}
\sin\theta\cos^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)\frac{\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^2}{2^2}\\
&= \frac{1}{8i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\left[(e^{i\theta})^2 + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + (e^{-i\theta})^2\right]\\
&= \frac{1}{8i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\left(e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}\right)\\
&= \frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta} + 2e^{i\theta} + e^{-i\theta} - e^{i\theta} - 2e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\right)\\
&= \frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} + e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{8i}\left(2i\sin 3\theta + 2i\sin\theta\right)\\
&= \frac{\sin 3\theta + \sin\theta}{4}
\end{aligned}$$

*Dans le cas d'un produit $\cos^p\theta\sin^q\theta$ avec $p$ et $q$ non nuls, on développe complètement l'expression avant de la simplifier à l'aide des formules d'Euler.*

▲

## Exercice 3.12

On applique la **méthode 3.8**. D'après la formule de Moivre, on a :

$$(\cos x + i\sin x)^5 = \cos(5x) + i\sin(5x)$$

Par conséquent,

$$\cos(5x) = \mathfrak{Re}\left((\cos x + i\sin x)^5\right) \quad \text{et} \quad \sin(5x) = \mathfrak{Im}\left((\cos x + i\sin x)^5\right)$$

*Formule du binôme (***théorème 1.8***).*

Or, comme $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, on a :

$$\begin{aligned}(\cos x + i\sin x)^5 &= (\cos x)^5 + 5(\cos x)^4 i\sin x + 10(\cos x)^3(i\sin x)^2 \\ &\quad + 10(\cos x)^2(i\sin x)^3 + 5\cos x(i\sin x)^4 + (i\sin x)^5 \\ &= \cos^5 x + 5i\cos^4 x\,\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x \\ &\quad - 10i\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x \\ &= \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x \\ &\quad + i\big(5\cos^4 x\,\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x\big)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\cos(5x) &= \mathfrak{Re}\left((\cos x + i\sin x)^5\right) = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x \\ \sin(5x) &= \mathfrak{Im}\left((\cos x + i\sin x)^5\right) = 5\cos^4 x\,\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x\end{aligned}$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Nous allons maintenant éliminer les termes en $\sin x$ dans la première égalité en utilisant la relation $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ :

$$\begin{aligned}\cos(5x) &= \cos^5 x - 10\cos^3 x(1-\cos^2 x) + 5\cos x(1-\cos^2 x)^2 \\ &= \cos^5 x - 10\cos^3 x + 10\cos^5 x + 5\cos x(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \\ &= \cos^5 x - 10\cos^3 x + 10\cos^5 x + 5\cos x - 10\cos^3 x + 5\cos^5 x \\ &= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x\end{aligned}$$

De la même façon, on élimine les termes en $\cos x$ dans la relation donnant $\sin(5x)$ à l'aide de l'égalité $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ :

$$\begin{aligned}\sin(5x) &= 5(1-\sin^2 x)^2\,\sin x - 10(1-\sin^2 x)\sin^3 x + \sin^5 x \\ &= 5(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\sin x - 10\sin^3 x + 10\sin^5 x + \sin^5 x \\ &= 5\sin x - 10\sin^3 x + 5\sin^5 x - 10\sin^3 x + 10\sin^5 x + \sin^5 x \\ &= 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x\end{aligned}$$

▲

## Exercice 3.13

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Comme

$$e^{ip} + e^{iq} = \cos p + i\sin p + \cos q + i\sin q = \cos p + \cos q + i(\sin p + \sin q)$$

on a :

$$\cos p + \cos q = \mathfrak{Re}\left(e^{ip} + e^{iq}\right)$$

Or, en appliquant la **méthode 3.9**, on factorise la somme $e^{ip}+e^{iq}$ par $e^{i\frac{p+q}{2}}$ :

$$e^{ip}+e^{iq}=e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)$$

D'après la formule d'Euler, on a donc :

$e^{i\theta}+e^{i\theta}=2\cos\theta$

$$e^{ip}+e^{iq}=e^{i\frac{p+q}{2}}\times 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

ou encore

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$$\begin{aligned}e^{ip}+e^{iq}&=\left[\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)+i\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\right]\times 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\&=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)+2i\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule attendue :

$$\cos p+\cos q=\mathfrak{Re}\left(e^{ip}+e^{iq}\right)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Notons que nous avons également démontré au passage que :

$$\sin p+\sin q=\mathfrak{Im}\left(e^{ip}+e^{iq}\right)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

▲

## Exercice 3.14

On pourrait commencer par calculer le module de $1+e^{i\theta}$ puis utiliser la **méthode 3.4** pour mettre ce nombre sous forme trigonométrique. Mais nous allons plutôt factoriser $1+e^{i\theta}$ en utilisant l'angle « moitié » :

**Méthode 3.9**

$$1+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=e^{i\frac{\theta}{2}}\times 2\cos\frac{\theta}{2}=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Dans l'écriture ci-dessus, $2\cos\frac{\theta}{2}$ est un réel et $e^{i\frac{\theta}{2}}$ un nombre complexe de module 1. Nous allons alors distinguer trois cas.

**Premier cas : $\cos\frac{\theta}{2}>0$.** Dans ce cas, $2\cos\frac{\theta}{2}$ est le module de $1+e^{i\theta}$ qui s'écrit donc sous forme trigonométrique :

*Dans ce cas, un argument de $1+e^{i\theta}$ est $\frac{\theta}{2}$.*

$$1+e^{i\theta}=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

**Deuxième cas : $\cos\frac{\theta}{2}<0$.** Dans ce cas, le module de $1+e^{i\theta}$ n'est pas $2\cos\frac{\theta}{2}$ puisque $2\cos\frac{\theta}{2}<0$. Sachant que $-1=e^{i\pi}$, on écrit :

$$1+e^{i\theta}=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}=-2\cos\frac{\theta}{2}\times(-1)e^{i\frac{\theta}{2}}=-2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\pi}e^{i\frac{\theta}{2}}=-2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$$

Le module de $1+e^{i\theta}$ est $-2\cos\frac{\theta}{2}$ (réel strictement positif) et $1+e^{i\theta}$ s'écrit donc sous forme trigonométrique :

*Dans ce cas, un argument de $1+e^{i\theta}$ est $\frac{\theta}{2}+\pi$.*

$$1+e^{i\theta}=-2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$$

**Troisième cas : $\cos\frac{\theta}{2}=0$.** On a alors $1+e^{i\theta}=0$ et, dans ce cas, $1+e^{i\theta}$ ne peut donc pas se mettre sous forme trigonométrique. ▲

*Seul un nombre complexe non nul admet un argument.*

Corrigé

### Exercice 3.15

Nous allons appliquer la **méthode 3.10** et, pour cela, introduire la somme $C_n$ définie par

$$C_n = A_n + iB_n$$

On a $A_n = \mathfrak{Re}\,(C_n)$ et $B_n = \mathfrak{Im}\,(C_n)$. Or,

$$\begin{aligned}C_n = A_n + iB_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big[\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)\big] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{i\theta})^k.\end{aligned}$$

*On utilise la formule du binôme,* **théorème 1.8**.

On va maintenant utiliser la formule du binôme puisqu'on peut alors écrire :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{i\theta})^k \times 1^{n-k} = \left(e^{i\theta} + 1\right)^n$$

*Utilisation de l'angle « moitié ».*

Mais, en appliquant la **méthode 3.9**, on a :

$$e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Par conséquent,

$$C_n = \left(2\cos\tfrac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^n = 2^n \left(\cos\tfrac{\theta}{2}\right)^n \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^n = 2^n \cos^n\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\, e^{i\frac{n\theta}{2}}$$

On a ainsi :

$$C_n = 2^n \cos^n\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \left[\cos\left(\tfrac{n\theta}{2}\right) + i\sin\left(n\tfrac{\theta}{2}\right)\right]$$

c'est-à-dire

$$C_n = 2^n \cos^n\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \cos\left(\tfrac{n\theta}{2}\right) + i2^n \cos^n\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \sin\left(\tfrac{n\theta}{2}\right)$$

Il n'y a plus qu'à donner les parties réelle et imaginaire de $C_n$ pour obtenir $A_n$ et $B_n$ :

$$A_n = \mathfrak{Re}\,(C_n) = 2^n \cos^n\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \cos\left(\tfrac{n\theta}{2}\right)$$

$$B_n = \mathfrak{Im}\,(C_n) = 2^n \cos^n\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \sin\left(\tfrac{n\theta}{2}\right)$$

▲

### Exercice 3.16

**1.** Nous avons déjà mis, dans l'**exercice 3.8**, $1+i$ sous forme trigonométrique :

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

**Méthode 3.6**

On peut alors écrire :

$$z = (1+i)^{2n} = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2n} = \left(\sqrt{2}\right)^{2n} \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2n} = \left(\sqrt{2}^2\right)^n e^{i\frac{2n\pi}{4}} = 2^n e^{in\frac{\pi}{2}}$$

**2.** On peut trouver une autre expression de $z$ en appliquant la formule du binôme :

$$z = (1+i)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k i^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} i^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} i^k$$

Nous allons séparer cette somme en deux, en regroupant les indices de sommation pairs (de la forme $2k$) ou impairs (de la forme $2k+1$) :

$$z = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} i^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} i^{2k+1}$$

Mais, une puissance paire de $i$ est un réel, alors qu'une puissance impaire de $i$ est un imaginaire pur. On a, en particulier,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ i^{2k} = (-1)^k$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} z =& \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} i^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} i^{2k} \times i^1 \\ =& \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k \times i \\ =& \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k + i \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k = S_n + i\,T_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $S_n = \mathfrak{Re}\,(z)$ et $T_n = \mathfrak{Im}\,(z)$. Or, d'après la question **1** :

$$z = 2^n e^{in\frac{\pi}{2}} = 2^n \left[\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Ainsi,

$$S_n = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad T_n = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

▲

Corrigé

Chapitre **4**

# Applications des nombres complexes à la géométrie

Les nombres complexes sont apparus au XVI$^e$ siècle pour résoudre les équations du troisième degré. Leur représentation géométrique n'apparaît qu'au début du XIX$^e$ siècle. On les utilise en géométrie, en analyse mais ils sont utiles aussi en physique, par exemple en électricité.

### Un mathématicien

Le mathématicien et astronome irlandais William **Hamilton** rédige en 1830 la première théorie rigoureuse des nombres complexes. Enfant génial, il savait déjà le latin, le grec et l'hébreu à l'âge de cinq ans. Ses travaux sont très variés ; ils concernent l'algèbre, l'analyse mais aussi la physique. Hamilton reste célèbre pour avoir introduit des nombres analogues aux nombres complexes mais avec quatre coordonnées au lieu de deux. Appelés *quaternions d'Hamilton*, ils permettent d'exprimer une rotation dans l'espace par une banale multiplication.

**LE SAVIEZ-VOUS ?**

Dans son ouvrage *Invention nouvelle en l'algèbre* publié en 1629, le mathématicien flamand Albert **Girard** nomme « solutions enveloppées » celles qui ne sont pas réelles. D'autres les qualifient d'inexplicables ou d'impossibles. **Descartes** préfère parler de nombres imaginaires quant à **Leibniz**, il se méfie de « ces monstres du monde des idées » qui n'ont pour lui aucune réalité.

COMPÉTENCES

## les incontournables

- Calculer, à l'aide des nombres complexes, une distance ou un angle
- Utiliser les nombres complexes pour démontrer un alignement ou une orthogonalité
- Déterminer la nature d'un triangle grâce aux nombres complexes
- Déterminer les racines $n$-ièmes de l'unité d'un entier donné

## et plus si affinités

- Utiliser les racines $n$-ièmes de l'unité pour résoudre une équation

# Résumé de cours

## Module et arguments : rappels

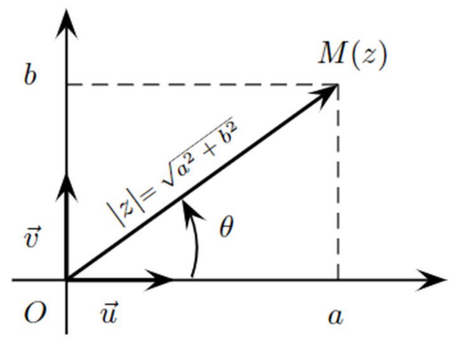
On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$.

**Définition :** *Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) un nombre complexe. On appelle* **module** *de $z$ et on note $|z|$ le réel positif défini par :*

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

*En notant $M$ le point d'affixe $z$, on a $OM = ||\overrightarrow{OM}|| = |z|$.*

**Définition :** *Soit $z$ un nombre complexe non nul. On appelle* **argument** *de $z$ toute mesure (en radians) $\theta$ de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$.*




**Remarque :** rappelons qu'un nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments. Si $\theta_0$ est un argument de $z$, les arguments de $z$ sont tous les réels de la forme $\theta_0 + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

## Distances et angles

**Théorème 4.1.—** Si $A$ et $B$ sont deux points du plan d'affixes respectives $z_A$ et $z_B$, alors $AB = |z_B - z_A|$.

**Théorème 4.2.—** Soit $A$, $B$ et $C$ trois points distincts du plan, d'affixes respectives $z_A$, $z_B$ et $z_C$. Alors :

- $\dfrac{AC}{AB} = \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right|$ ;
- une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est donnée par un argument quelconque de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

**Remarque :** il découle en particulier de ces propriétés que

- $ABC$ est un triangle isocèle (en A) si, et seulement si, $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$.
- Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés si, et seulement si, $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel.
- Les droites $(AB)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur.

## ■ Racines $n$-ièmes de l'unité

**Définition :** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle* ***racine n-ième de l'unité*** *tout nombre complexe $z$ vérifiant $z^n = 1$.*

**Remarque :** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 1 est une racine $n$-ième de l'unité (puisque $1^n = 1$). De plus, par définition, les racines $n$-ièmes de l'unité sont les racines du polynôme $z^n - 1$.

**Notation :** *pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité se note $\mathbb{U}_n$. Autrement dit,*

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$$

**Remarque :** si $z^n = 1$ alors $|z|^n = 1$ d'où $|z| = 1$ puisque $|z|$ est un réel positif. Par conséquent, le module de toute racine $n$-ième de l'unité est égal à 1. Ainsi, $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

**Théorème 4.3.— Description de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ —.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe exactement $n$ racines $n$-ièmes de l'unité. Ce sont les nombres complexes $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$, avec $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Autrement dit :

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\} = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{\frac{4i\pi}{n}}, \cdots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\right\}}$$

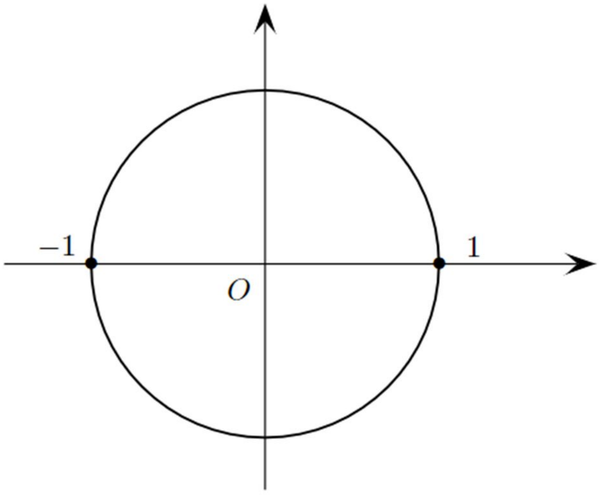
**Théorème 4.4.— Interprétation géométrique de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ —.** Soit $n \geqslant 2$. Les images des $n$ racines $n$-ièmes de l'unité sont les $n$ sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

## ■ Cas particuliers $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

Nous allons maintenant décrire plus précisément l'ensemble $\mathbb{U}_n$ pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.
Comme l'indique le **théorème 4.4**, les images des racines $n$-ièmes de l'unité sont les $n$ sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique. En particulier, les images des racines troisièmes de l'unité forment un triangle équilatéral et les images des racines quatrièmes de l'unité forment un carré.

- $\mathbb{U}_1 = \{1\}$.

- $\mathbb{U}_2 = \{z \in \mathbb{C},\ z^2 = 1\} = \{1, e^{i\pi}\} = \{1, -1\}$

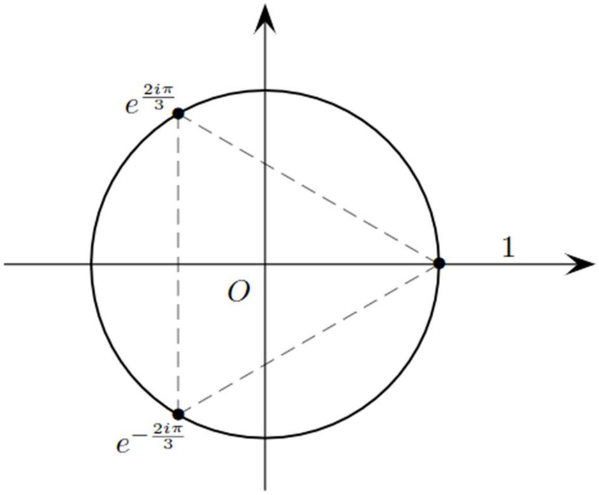


• $\mathbb{U}_3 = \{z \in \mathbb{C},\ z^3 = 1\} = \{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\} = \{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}\}$

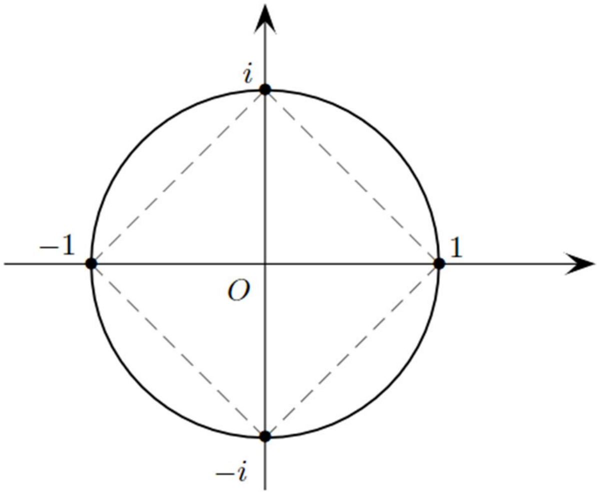
On a $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \overline{e^{\frac{2i\pi}{3}}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On note souvent $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, on a ainsi :

$$\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\} = \{1, j, \bar{j}\}$$




• $\mathbb{U}_4 = \{z \in \mathbb{C},\ z^4 = 1\} = \{1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\} = \{1, i, -1, -i\}$



# ■■ Démonstrations

## ■ Description de l'ensemble $\mathbb{U}_n$.

Il s'agit de démontrer le **théorème 4.3**.

**Théorème 4.3.—** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe exactement $n$ racines $n$-ièmes de l'unité. Ce sont les nombres complexes $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$, avec $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Autrement dit :

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\} = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{\frac{4i\pi}{n}}, \cdots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\right\}}$$

**Démonstration** ▽
Tout d'abord, nous avons vu qu'une racine $n$-ième de l'unité est nécessairement de module 1. Nous allons donc rechercher une racine $n$-ième de l'unité $z$ sous forme exponentielle $z = e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{U}_n &\Leftrightarrow z^n = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(e^{i\theta}\right)^n = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{in\theta} = 1 \\ &\Leftrightarrow n\theta = 2k\pi,\ \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n},\ \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ainsi, une racine $n$-ième de l'unité est un nombre complexe de la forme $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Mais, si $k$ et $k'$ sont deux entiers relatifs, on a :

$$\begin{aligned} z_k = z_{k'} &\Leftrightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ik'\pi}{n}} \\ &\Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = \frac{2k'\pi}{n} + 2p\pi, \text{où } p \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow 2k\pi = 2k'\pi + 2np\pi, \text{où } p \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow k = k' + np,\ \text{où } p \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow k - k' \text{ est un multiple de } n \end{aligned}$$

Par conséquent, $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ sont $n$ racines $n$-ièmes de l'unité distinctes. Or, une racine $n$-ième de l'unité est une racine du polynôme $z^n - 1$, polynôme de degré $n$ qui, d'après le **théorème 5.7**, a au plus $n$ racines. Nous avons donc trouvé toutes les racines $n$-ièmes de l'unité, ce sont les $n$ nombres complexes distincts $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$. Ainsi, on a bien :

$$\mathbb{U}_n = \{z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}\} = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\} = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{\frac{4i\pi}{n}}, \cdots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\right\}$$

▲

## ■ Interprétation géométrique de l'ensemble $\mathbb{U}_n$

Il s'agit maintenant de démontrer le **théorème 4.4**

**Théorème 4.4.—** Soit $n \geqslant 2$. Les images des $n$ racines $n$-ièmes de l'unité sont les $n$ sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

**Démonstration** $\triangledown$

Les $n$ racines $n$-ièmes de l'unité sont les nombres complexes $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ avec, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Notons, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $M_k$ l'image de $z_k$. Nous devons montrer que le polygone dont les sommets sont $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ est régulier et inscrit dans le cercle trigonométrique. Tout d'abord, comme $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ sont de module 1, les points $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ sont sur le cercle trigonométrique. Il reste à montrer que les $n$ côtés de ce polygone ont la même longueur. Pour cela, nous allons calculer la longueur d'un côté formé par deux sommets consécutifs quelconques. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n-2\}$, on a :

$$\begin{aligned} M_k M_{k+1} = |z_{k+1} - z_k| &= \left| e^{\frac{2i(k+1)\pi}{n}} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right| = \left| e^{\frac{i(2k+1)\pi}{n}} \left( e^{\frac{i\pi}{n}} - e^{-\frac{i\pi}{n}} \right) \right| = \left| e^{\frac{i(2k+1)\pi}{n}} \right| \left| e^{\frac{i\pi}{n}} - e^{-\frac{i\pi}{n}} \right| \\ &= 1 \times \left| 2i \sin \frac{\pi}{n} \right| = |2i| \times \left| \sin \frac{\pi}{n} \right| = 2 \left| \sin \frac{\pi}{n} \right| = 2 \sin \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

puisque $\frac{\pi}{n} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$. Par conséquent, tous les côtés de ce polygone ont la même longueur, égale à $2 \sin \frac{\pi}{n}$. Ainsi, nous avons bien montré que $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ sont les $n$ sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique. $\blacktriangle$

# Méthodes

## Distances et angles

> **Méthode 4.1.— Comment calculer une distance à l'aide des nombres complexes**
> Pour calculer la distance entre le point $A$ d'affixe $z_A$ et le point $B$ d'affixe $z_B$, on applique la formule $AB = |z_B - z_A|$.

**Exemple :** on considère le point $A$ d'affixe $-4+3i$ et le point $B$ d'affixe $1+2i$. Alors :

$$OA = |-4+3i| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$
$$AB = |1+2i-(-4+3i)| = |5-i| = \sqrt{5^2+(-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

**Mise en œuvre : exercice 4.1.**

> **Méthode 4.2.— Comment calculer un angle à l'aide des nombres complexes**
> Pour calculer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, où $A$, $B$ et $C$ sont trois points distincts d'affixes respectives $z_A$, $z_B$ et $z_C$, on détermine un argument quelconque de $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ (**théorème 4.2**).

**Exemple :** soit $A$ le point d'affixe $\sqrt{3}+i$ et $B$ le point d'affixe $1+i$. Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
D'après le **théorème 4.2**, un argument quelconque du nombre complexe

$$\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{\sqrt{3}+i}{1+i}$$

donne une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. On commence par mettre $1+i\sqrt{3}$ et $1+i$ sous forme exponentielle :

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

On a alors :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Par conséquent, un argument de $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ est $\frac{\pi}{12}$, qui est donc une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

**Mise en œuvre : exercice 4.2, exercice 4.5.**

## ■ Alignement et orthogonalité

> ❑ **Méthode 4.3.— Comment montrer que trois points sont alignés**
> Pour montrer que trois points distincts $A$, $B$ et $C$ sont alignés, on peut montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel. C'est en effet une conséquence du **théorème 4.2** : les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés si, et seulement si, $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel.

**Exemple :** on considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $z_B = 4 + 2i$ et $z_C = -5 - i$. On a :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-5 - i - (1+i)}{4 + 2i - (1+i)} = \frac{-6 - 2i}{3 + i} = \frac{-2(3+i)}{3+i} = -2$$

Comme $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel, les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

**Mise en œuvre : exercice 4.3**.

> ❑ **Méthode 4.4.— Comment montrer que deux droites sont perpendiculaires**
> Pour établir que les droites $(AB)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires, on peut montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur. C'est de nouveau une conséquence du **théorème 4.2** : les droites $(AB)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur.

**Exemple :** on considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $z_A = 2 - 3i$, $z_B = 5 - i$ et $z_C = -2 + 3i$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{-2 + 3i - (2 - 3i)}{5 - i - (2 - 3i)} = \frac{-4 + 6i}{3 + 2i} = \frac{(-4+6i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} \\ &= \frac{-12 + 8i + 18i + 12}{3^2 + 2^2} = \frac{26i}{13} = 2i\end{aligned}$$

ce qui montre que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur. Par conséquent, les droites $(AB)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires.

**Mise en œuvre : exercice 4.2**.

## ■ Nature de triangles

Le **théorème 4.2** donne, pour trois nombres complexes distincts $a$, $b$ et $c$, une interprétation géométrique du module et d'un argument de $\frac{c-a}{b-a}$. Cela permet de déterminer rapidement la nature de certains triangles.

Méthodes

❑ **Méthode 4.5.— Comment déterminer la nature d'un triangle**

Soit $A$, $B$ et $C$ trois points distincts d'affixes respectives $z_A$, $z_B$ et $z_C$.

- Si $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ alors $AB = AC$, ce qui signifie que le triangle $ABC$ est isocèle en $A$.
- Si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur, les droites $(AB)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires et le triangle $ABC$ est donc rectangle en $A$.
- Si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$, le triangle $ABC$ est rectangle isocèle en $A$, en combinant les deux propriétés ci-dessus.
- Si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, le triangle $ABC$ est équilatéral (car isocèle en $A$ avec de plus une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ égale à $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$).

**Exemple :** on reprend les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $z_A = 2 - 3i$, $z_B = 5 - i$ et $z_C = -2 + 3i$ de l'exemple précédent. Nous avons vu dans cet exemple que :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 2i$$

Comme $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur, le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.

**Exemple :** déterminer la nature du triangle $ABC$ où $A$, $B$ et $C$ sont les points d'affixes respectives $z_A = -1 - i\sqrt{3}$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{2 - \left(-1 - i\sqrt{3}\right)}{2 - \left(-1 + i\sqrt{3}\right)} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{(3 + i\sqrt{3})^2}{(3 - i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{3})} = \frac{9 + 6i\sqrt{3} - 3}{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12} \\ &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}\end{aligned}$$

Par conséquent, le triangle $ABC$ est équilatéral car :

- il est isocèle en $A$ puisque $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ (donc $AC = AB$) ;
- une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ égale à $\frac{\pi}{3}$.

**Mise en œuvre : exercice 4.4, exercice 4.6.**

## ■ Recherche d'un ensemble de points

> ❑ **Méthode 4.6.— Comment déterminer un ensemble de points**
> Pour déterminer un ensemble de points dont les affixes vérifient une propriété donnée, on interprète les modules apparaissant dans cette relation en termes de distances (**méthode 4.1**) et les arguments en termes d'angles (**méthode 4.2**) afin de reconnaître un ensemble connu.

**Exemple :** déterminer l'ensemble des points d'affixe $z$ vérifiant $|z-3| = |z+2i|$.
On introduit les points $A$, $B$ et $M$ du plan d'affixes respectives 3, $-2i$ et $z$. On a $|z-3| = AM$ et $|z+2i| = |z-(-2i)| = BM$. Par conséquent,

$$|z-3| = |z+2i| \Leftrightarrow AM = BM.$$

L'ensemble des points $M$ recherchés est donc l'ensemble des points équidistants de $A$ et $B$, c'est-à-dire la médiatrice du segment $[AB]$.

**Exemple :** déterminer l'ensemble des points d'affixe $z$ tel que $\dfrac{z+1}{z-2i} \in \mathbb{R}$.
Notons tout d'abord que, lorsque $z = 2i$, le quotient ci-dessus n'est pas défini. On considère donc un nombre complexe $z$ différent de $2i$. En notant $A$, $B$ et $M$ les points du plan d'affixes respectives $-1$, $2i$ et $z$, on a alors :

$$\frac{z+1}{z-2i} = \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} = \frac{z_A - z_M}{z_B - z_M}$$

et on sait, d'après le **théorème 4.2**, qu'une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$ est donnée par un argument quelconque de $\frac{z_A - z_M}{z_B - z_M}$. En appliquant la **méthode 4.3**, on a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-2i} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{z_A - z_M}{z_B - z_M} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow A, B \text{ et } M \text{ sont alignés (et } M \neq B) \\
&\Leftrightarrow M \text{ est un point de la droite } (AB)\text{, différent de } B
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des points recherchés est la droite $(AB)$ privée du point $B$.

**Mise en œuvre : exercice 4.7, exercice 4.8.**

## ■ Racines $n$-ièmes de l'unité

> ❑ **Méthode 4.7.— Comment déterminer les racines de l'unité d'un entier $n$ donné**
> Pour déterminer les racines $n$-ièmes de l'unité d'un entier $n$ donné, on applique le **théorème 4.3** :
>
> $$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\} = \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{\frac{4i\pi}{n}}, \cdots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}} \right\}$$
>
> à l'entier $n$ en question.

Méthodes

**Exemple :** déterminer les racines sixièmes de l'unité.
On applique le **théorème 4.3** à $n = 6$ pour d'obtenir les 6 racines sixièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_6 = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{6}},\ k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket \right\} = \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{6}}, e^{\frac{4i\pi}{6}}, e^{\frac{6i\pi}{6}}, e^{\frac{8i\pi}{6}}, e^{\frac{10i\pi}{6}} \right\} = \left\{ 1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, -1, e^{\frac{4i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{3}} \right\}$$

Comme $e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \overline{e^{\frac{2i\pi}{3}}}$ et $e^{\frac{5i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}} = \overline{e^{\frac{i\pi}{3}}}$, on peut également écrire :

$$\mathbb{U}_6 = \left\{ 1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, -1, \overline{e^{\frac{i\pi}{3}}}, \overline{e^{\frac{2i\pi}{3}}} \right\}$$

**Mise en œuvre : exercice 4.9, exercice 4.10**.

# Vrai/Faux

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1.** En notant $A$ et $B$ les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ et $z_B = -3 + 2i$, on a $AB = 4$. | ☐ | ☐ |
| **2.** Les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $z_A = 3 + 6i$, $z_B = 7 + 18i$ et $z_C = -1 - 6i$ sont alignés. | ☐ | ☐ |
| **3.** L'ensemble des points d'affixe $z$ tels que $\|z - i\| = \|z + i\|$ est l'axe des ordonnées. | ☐ | ☐ |
| **4.** L'ensemble des points d'affixe $z$ tels que $\|z - 1 + 3i\| = 4$ est un cercle. | ☐ | ☐ |
| **5.** Le module d'une racine $n$-ième de l'unité est égal à 1. | ☐ | ☐ |
| **6.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $n$ racines $n$-ièmes de l'unité distinctes. | ☐ | ☐ |
| **7.** Les racines troisièmes de l'unité sont 1, $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$. | ☐ | ☐ |
| **8.** Les points d'affixe 1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}}$ forment un triangle équilatéral. | ☐ | ☐ |

# Énoncé des exercices

## Distances, angles, alignement et orthogonalité

**Exercice 4.1 :** On considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives

$$z_A = 3i \qquad z_B = 1 + i \qquad z_C = \sqrt{3} + \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)$$

**1.** Calculer les longueurs $AB$, $AC$ et $BC$.

**2.** En déduire la nature du triangle $ABC$.

**Exercice 4.2 :** On considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives

$$z_A = 2 - i\sqrt{3} \qquad z_B = -1 \qquad z_C = 3$$

**1.** Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

**2.** Que peut-on dire du triangle $ABC$ ?

**3.** En déduire l'affixe du centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$.

**Exercice 4.3 :** On considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives

$$z_A = 2 + \frac{1}{2}i \qquad z_B = -1 - i \qquad z_C = 3 + i$$

Montrer que les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

**Exercice 4.4 :** Soit $A$ et $B$ les points d'affixes respectives $z_A = 3 - i$ et $z_B = 4 + 2i$. Déterminer la nature du triangle $OAB$.

**Exercice 4.5* :** On considère deux points $A$ et $B$ d'affixes respectives $a$ et $b$ telles que $\frac{b}{a} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Déterminer la nature du triangle $OAB$.

**Exercice 4.6** :** On considère trois points distincts $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$. Montrer que le triangle $ABC$ est équilatéral si, et seulement si, $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

## Recherche d'ensembles de points

**Exercice 4.7* :** Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que

**1.** $|z - 1 + 2i| = 4$

**2.** $|z - 3| = |z + 2i|$

**3.** $\dfrac{z - 3 - i}{z - 2i + 1}$ est réel

**4.** $\dfrac{z - 3 - i}{z - 2i + 1}$ est imaginaire pur

**Exercice 4.8** :** Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que les points d'affixe $z$, $z^2$ et $z^3$ forment un triangle rectangle.

## ■ Racines $n$-ièmes de l'unité et applications

**Exercice 4.9 :** Déterminer les racines huitièmes de l'unité.

**Exercice 4.10* :** Soit $n$ un entier naturel non nul.

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$.

**2.** Donner, sans effectuer de calcul supplémentaire, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2+z+1 = 0$.

**3.** À l'aide de l'équation $z^{12} = 1$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$.

**Exercice 4.11* :** Soit $n$ un entier naturel non nul. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+z)^n = (1-z)^n$.

**Exercice 4.12* : Somme et produit des racines $n$-ièmes de l'unité.**
Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.

**1.** Montrer que la somme des racines $n$-ièmes de l'unité est nulle.

**2.** Calculer le produit des racines $n$-ièmes de l'unité.

**Exercice 4.13** : Construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas.**
On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $u = \omega + \frac{1}{\omega}$.

**1.** Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

**2.** En déduire que $u$ est solution de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$.

**3.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z - 1 = 0$ et en déduire la valeur de $u$.

**4.** Déterminer alors la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\sin \frac{2\pi}{5}$.

**5.** Déduire des questions précédentes une méthode de construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier.

**Exercice 4.14** : Racines $n$-ièmes d'un nombre complexe.**
Soit $n$ un entier naturel non nul. On sait que tout réel positif $x$ admet une unique racine $n$-ième positive, que l'on note $\sqrt[n]{x}$ (c'est le réel positif $y$ tel $y^n = x$). Plus généralement, on appelle racine $n$-ième d'un nombre complexe $a$ tout nombre complexe $z$ tel que $z^n = a$. L'unique racine $n$-ième de 0 est 0 (puisque 0 est l'unique solution de $z^n = 0$). Par ailleurs, les racines $n$-ièmes de 1 sont les racines $n$-ièmes de l'unité étudiées dans ce chapitre. L'objet de cet exercice est de déterminer les racines $n$-ièmes d'un nombre complexe non nul $a$ et de présenter quelques applications.

**1.** Soit $a$ un nombre complexe non nul. À l'aide de l'écriture exponentielle de $a$, déterminer les racines $n$-ièmes de $a$.

**2.** Déterminer les racines troisièmes (ou « cubiques ») de $-8$.

**3.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 + i = 0$.

**4.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = \frac{3\sqrt{2}}{1+i}$.

**5.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$$

# Indications

**Ex. 4.5**

*Exploiter au maximum le* **théorème 4.2**.

**Ex. 4.6**

*Appliquer la* **méthode 4.5** *afin de caractériser un triangle équilatéral à l'aide des affixes des trois sommets.*

**Ex. 4.7**

*Appliquer la* **méthode 4.6**.

**Ex. 4.10**

*Pour la première question, utiliser la factorisation de* $z^n - 1$ *vue dans le chapitre* **équations polynomiales**.

**Ex. 4.11**

*Après s'être ramené à une équation de la forme* $Z^n = 1$, *utiliser les racines* $n$*-ièmes de l'unité.*

# Corrigé des vrai/faux

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | V | F | V | V | V | F | V |

**1.** On a :

$$AB = |z_B - z_A| = |-3+2i-(1-i)| = |-4+3i| = \sqrt{(-4)^2+3^3} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

**2.** Le quotient $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel puisque

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1-6i-(3+6i)}{7+18i-(3+6i)} = \frac{-4-12i}{4+12i} = \frac{-(4+12i)}{4+12i} = -1$$

Par conséquent, d'après le **théorème 4.2** (voir aussi la **méthode 4.3**), les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

**3.** En notant $A$, $B$ et $M$ les points d'affixes respectives $i$ et $-i$, l'égalité $|z-i| = |z+i|$ s'écrit $AM = BM$. Les points $M$ correspondants sont les points équidistants de $A$ et $B$, c'est-à-dire la médiatrice du segment $[AB]$, qui est l'axe $(Ox)$ des abscisses.

**4.** En notant $A$ et $M$ les points d'affixes respectives $1-3i$ et $z$, l'égalité $|z-1+3i| = 4$ s'écrit $AM = 4$. L'ensemble des points $M$ vérifiant $AM = 4$ est le cercle de centre $A$ et de rayon 4.

**5.** Nous l'avons remarqué après avoir défini une racine $n$-ième de l'unité.

**6.** C'est le **théorème 4.3**.

**7.** Les trois racines troisièmes (ou « cubiques ») de l'unité sont 1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \overline{e^{\frac{2i\pi}{3}}}$.

**8.** D'après le **théorème 4.4**, les images des $n$ racines $n$-ièmes de l'unité sont les $n$ sommets d'un polygone régulier. Comme 1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}}$ sont les racines cubiques de l'unité, leurs images forment un triangle équilatéral.

Corrigé

# Corrigé des exercices

## Exercice 4.1

Méthode 4.1.

**1.** On a :

$$AB = |z_B - z_A| = |1 + i - 3i| = |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}
AC = |z_C - z_A| &= \left|\sqrt{3} + \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right) - 3i\right| = \left|\sqrt{3} + \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\right| \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{3 + \sqrt{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \sqrt{3} + 1} = \sqrt{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BC = |z_C - z_B| &= \left|\sqrt{3} + \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right) - (1+i)\right| \\
&= \left|\sqrt{3} - \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2} \\
&= \sqrt{3 - \sqrt{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \sqrt{3} + 1} = \sqrt{5}
\end{aligned}$$

**2.** On vient de montrer que $AB = AC = BC$, le triangle $ABC$ est donc équilatéral. ▲

## Exercice 4.2

Méthode 4.2.

**1.** Un argument quelconque de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ donne une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{3 - (2 - i\sqrt{3})}{-1 - (2 - i\sqrt{3})} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(-3 - i\sqrt{3})}{(-3 + i\sqrt{3})(-3 - i\sqrt{3})} \\
&= \frac{-3 - i\sqrt{3} - 3i\sqrt{3} + 3}{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{-4i\sqrt{3}}{12} = -i\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

Par conséquent, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $-\frac{\pi}{2}$.

Méthode 4.4.

**2.** Nous venons de voir que $-\frac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, les droites $(AB)$ et $(AC)$ sont donc perpendiculaires. Cela montre que le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.

*Le milieu d'un segment $[MM']$ a pour affixe $\frac{z_M + z_{M'}}{2}$.*

**3.** Comme le triangle $ABC$ est rectangle en $A$, le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$ est le milieu $I$ de l'hypoténuse $[BC]$ de ce triangle. Celui-ci a pour affixe :

$$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

▲

#### Exercice 4.3

Nous allons mettre en œuvre la **méthode 4.3** et, pour cela, montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel. On a :

*Ce calcul montre que $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$.*

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3 + i - \left(2 + \frac{1}{2}i\right)}{-1 - i - \left(2 + \frac{1}{2}i\right)} = \frac{1 + \frac{1}{2}i}{-3 - \frac{3}{2}i} = \frac{1 + \frac{1}{2}i}{-3\left(1 + \frac{1}{2}i\right)} = -\frac{1}{3}$$

ce qui montre que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel. Par conséquent, les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés. ▲

**Méthode 4.3.**

#### Exercice 4.4

Lorsqu'on place les points, on peut conjecturer le résultat. On applique la **méthode 4.5** en calculant $\frac{z_B - z_A}{z_O - z_A}$ :

*On peut aussi écrire $\frac{1+3i}{-3+i} = \frac{-i(-3+i)}{-3+i} = -i$*

$$\begin{aligned}\frac{z_B - z_A}{z_O - z_A} &= \frac{4 + 2i - (3 - i)}{0 - (3 - i)} = \frac{1 + 3i}{-3 + i} = \frac{(1 + 3i)(-3 - i)}{(-3 + i)(-3 - i)} \\ &= \frac{-3 - i - 9i + 3}{(-3)^2 + 1^2} = \frac{-10i}{10} = -i\end{aligned}$$

On en déduit que le triangle est triangle $ABC$ est rectangle isocèle en $A$ puisque :

**Méthode 4.5.**

- $\left|\frac{z_B - z_A}{z_O - z_A}\right| = 1$ donc $AB = AO$
- une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$ est $-\frac{\pi}{2}$ donc $(AO)$ et $(AB)$ sont perpendiculaires.

▲

#### Exercice 4.5

Étant donné que $\frac{b-0}{a-0} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, il découle du **théorème 4.2** que :

- $OB = \sqrt{2}\,OA$ ;
- une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est $\frac{\pi}{4}$ .

*La longueur d'une diagonale d'un carré de côté $\alpha$ est $\sqrt{2}\alpha$.*

Par conséquent, le triangle $OAB$ est rectangle en $A$. On reconnaît en effet un « demi-carré ». ▲

#### Exercice 4.6

Le triangle $ABC$ est équilatéral si, seulement si, $AB = AC = BC$ ou encore si, et seulement si $AB = AC$ et une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est égale à $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$. En utilisant le **théorème 4.2** (voir aussi la **méthode 4.5**), on a donc :

*$ABC$ équilatéral lorsqu'il est isocèle en $A$ avec une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ égale à $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$.*

$$\begin{aligned}ABC \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow \frac{c - a}{b - a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } \frac{c - a}{b - a} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow c - a - (b - a)e^{i\frac{\pi}{3}} = 0 \text{ ou } c - a - (b - a)e^{-i\frac{\pi}{3}} = 0\end{aligned}$$

Comme le produit de deux nombres est nul si, et seulement si l'un (au moins) de ces nombres est nul, on en déduit que :

*$xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$*

$$\begin{aligned}ABC \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow \left[c - a - (b - a)e^{i\frac{\pi}{3}}\right]\left[c - a - (b - a)e^{-i\frac{\pi}{3}}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow (c - a)^2 - (c - a)(b - a)(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}) \\ &\qquad + (b - a)^2 e^{i\frac{\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{3}} = 0\end{aligned}$$

Mais $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ et $e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1$, d'où :

$$\begin{aligned} ABC \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow (c-a)^2 - (c-a)(b-a) + (b-a)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow c^2 - 2ac + a^2 - cb + ac + ab - a^2 + b^2 - 2ab + a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc \end{aligned}$$

▲

## Exercice 4.7

Nous allons appliquer la **méthode 4.6** en interprétant, dans chaque relation, les modules en termes de distances et les arguments en termes d'angles.

$AM = |z_M - z_A|$

**1.** En notant $A$ le point d'affixe $1 - 2i$ et $M$ le point d'affixe $z$, la relation $|z - 1 + 2i| = 4$ s'écrit $AM = 4$. Par conséquent, l'ensemble des points recherchés est le cercle de centre $A$ et de rayon 4.

**2.** Notons $B$ le point d'affixe 3, $C$ le point d'affixe $-2i$ et $M$ le point d'affixe $z$. On a alors :

$$\begin{aligned} |z-3| = |z+2i| &\Leftrightarrow |z-3| = |z-(-2i)| \\ &\Leftrightarrow BM = CM \end{aligned}$$

L'ensemble recherché est donc l'ensemble des points équidistants de $B$ et $C$, c'est-à-dire la médiatrice du segment $[BC]$.

**Méthode 4.3**

**3.** Tout d'abord, l'expression n'est pas définie lorsque $z = 2i - 1$. Pour $z \neq 2i - 1$, nous allons interpréter ce quotient en termes d'angles en utilisant le **théorème 4.2**. En notant $E$, $F$ et $M$ les points d'affixes respectives $3 + i$, $2i - 1$ et $z$ (différent de $2i - 1$), on a :

$$\begin{aligned} \frac{z-3-i}{z-2i+1} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{3+i-z}{2i-1-z} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \frac{z_E - z_M}{z_F - z_M} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \text{les points } E, F \text{ et } M \text{ sont alignés} \\ &\Leftrightarrow M \text{ est un point de la droite } (EF) \end{aligned}$$

*$M \neq F$ car $z \neq 2i - 1$.*

Par conséquent, l'ensemble des points recherchés est la droite $(EF)$ privée du point $F$.

*L'ensemble des points $M$ tels que le triangle $EFM$ est rectangle en $M$ est le cercle de diamètre $[EF]$.*

**4.** On considère un nombre complexe $z$ différent de $2i - 1$ et on reprend les points $E, F$ et $M$ introduits dans la question précédente. En appliquant cette fois la **méthode 4.4**, on a :

$$\begin{aligned} \frac{z-3-i}{z-2i+1} \text{ est imaginaire pur} &\Leftrightarrow \frac{3+i-z}{2i-1-z} \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow \frac{z_A - z_M}{z_B - z_M} \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow (ME) \text{ et } (MF) \text{ sont perpendiculaires} \\ &\Leftrightarrow M \text{ est un point du cercle de diamètre } [EF] \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des points recherchés est le cercle de diamètre $[EF]$, privé du point $F$ puisque $z \neq 2i - 1$. ▲

## Exercice 4.8

Soit $z$ un nombre complexe. On considère les points $M$, $N$ et $P$ d'affixes respectives $z$, $z^2$ et $z^3$. Tout d'abord, nous allons écarter le cas où deux (au moins) des trois points sont confondus. On a

$$z^2 = z \Leftrightarrow z(z-1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 1$$
$$z^3 = z^2 \Leftrightarrow z^2(z-1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 1$$
$$z^3 = z \Leftrightarrow z(z^2-1) = 0 \Leftrightarrow z(z-1)(z+1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 1 \text{ ou } z = -1$$

On considère désormais un nombre complexe $z$ différent de 0, 1 et $-1$. Dans ce cas, $MNP$ est un « vrai » triangle et on recherche les valeurs de $z$ pour lesquelles il est rectangle, mais on ignore en quel point. Il y a donc trois possibilités : $MNP$ rectangle en $M$ ou en $N$ ou en $P$. On décrit ces trois cas de figure en appliquant la **méthode 4.4**.

*Avec la* **méthode 4.4**, *on traduit la perpendicularité de deux des trois droites formant le triangle $MNP$.*

*Voir aussi la* **méthode 4.5**.

- $$\begin{aligned} MNP \text{ rectangle en } M &\Leftrightarrow \frac{z^3-z}{z^2-z} \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow \frac{z(z^2-1)}{z^2-z} \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow \frac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)} \text{ est imaginaire pur} \end{aligned}$$

Comme $z \neq 0$ et $z \neq 1$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} MNP \text{ rectangle en } M &\Leftrightarrow z+1 \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{Re}\,(z+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{Re}\,(z) = -1 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} MNP \text{ rectangle en } N &\Leftrightarrow \frac{z^3-z^2}{z-z^2} \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow \frac{z^2(z-1)}{z(1-z)} \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow -z \text{ est imaginaire pur} \end{aligned}$$

puisque $z \neq 0$ et $z \neq 1$. Ainsi :

$$MNP \text{ rectangle en } N \Leftrightarrow z \text{ est imaginaire pur}$$

- $$\begin{aligned} MNP \text{ rectangle en } P &\Leftrightarrow \frac{z-z^3}{z^2-z^3} \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow \frac{z(1+z)(1-z)}{z^2(1-z)} \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow \frac{1+z}{z} \text{ est imaginaire pur} \end{aligned}$$

la dernière équivalence découlant de nouveau du fait que $z \neq 0$ et $z \neq 1$.

*C'est encore la* **méthode 4.4**.

Mais, en notant $A$ le point d'affixe $-1$ :

$$\frac{1+z}{z} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \text{les droites } (AM) \text{ et } (OM) \text{ sont perpendiculaires}$$

*Voir la question* **4** *de l'***exercice 4.7**.

Par conséquent,

$$MNP \text{ rectangle en } P \Leftrightarrow M \text{ est un point du cercle de diamètre } [OA]$$

Finalement, l'ensemble des points recherchés est la réunion de l'axe des ordonnées, de la droite d'équation $x=-1$ et du cercle de centre $\Omega(-\frac{1}{2},0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, privée des points $O$ et $A$. ▲

## Exercice 4.9

On applique le **théorème 4.3** pour obtenir les huit racines huitièmes de l'unité :

**Méthode 4.7** *: il s'agit d'appliquer le* **théorème 4.3** *à $n=8$.*

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_8 &= \left\{e^{\frac{2ik\pi}{8}},\ k\in[\![0,\cdots,7]\!]\right\} = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{8}}, e^{\frac{4i\pi}{8}}, e^{\frac{6i\pi}{8}}, e^{\frac{8i\pi}{8}}, e^{\frac{10i\pi}{8}}, e^{\frac{12i\pi}{8}}, e^{\frac{14i\pi}{8}}\right\}\\ &= \left\{1, e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{i\pi}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{2}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}\right\}\end{aligned}$$

*Les racines huitièmes de l'unité sont les huit racines de $z^8-1$.*

Comme $e^{i\pi}=-1$, $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{\frac{3i\pi}{2}}=e^{-i\frac{\pi}{2}}=\overline{e^{i\frac{\pi}{2}}}=-i$, $e^{\frac{5i\pi}{4}}=e^{-\frac{3i\pi}{4}}=\overline{e^{\frac{3i\pi}{4}}}$ et $e^{\frac{7i\pi}{4}}=e^{-i\frac{\pi}{4}}=\overline{e^{i\frac{\pi}{4}}}$, on peut plus simplement écrire :

$$\mathbb{U}_8 = \left\{1,-1,i,-i,e^{i\frac{\pi}{4}},\overline{e^{i\frac{\pi}{4}}},e^{\frac{3i\pi}{4}},\overline{e^{\frac{3i\pi}{4}}}\right\}$$

▲

## Exercice 4.10

*Factorisation de $z^n-1$ par $z-1$.*

**1.** On a vu dans le chapitre **Équations polynomiales** que :

$$z^n-1=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}z^n-1=0 &\Leftrightarrow z-1=0 \text{ ou } z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1=0\\ &\Leftrightarrow z=1 \text{ ou } z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1=0\end{aligned}$$

Mais, on sait également que les solutions de l'équation $z^n-1=0$ sont les racines $n$-ièmes de l'unité. D'après la dernière équivalence, les solutions de l'équation $z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1=0$ sont donc les racines de l'unité différentes de 1. L'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\mathcal{S}=\left\{e^{\frac{2i\pi}{n}},e^{\frac{4i\pi}{n}},\cdots,e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\right\}$$

*En notant $j=e^{2i\pi/3}$, les racines de $z^2+z+1$ sont $j$ et $j^2=\overline{j}$.*

**2.** D'après la question précédente appliquée à $n=3$, les solutions de l'équation $z^2+z+1=0$ sont les racines troisièmes (ou cubiques) de l'unité différentes de 1, c'est-à-dire $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}}=\overline{e^{\frac{2i\pi}{3}}}$.

**3.** En posant $Z=z^4$, l'équation $z^8+z^4+1=0$ s'écrit $Z^2+Z+1=0$, équation dont les solutions $Z$ sont les racines cubiques de l'unité différentes de 1, d'après la question **1**. Autrement dit,

$$\begin{aligned} z^8 + z^4 + 1 = 0 &\Leftrightarrow Z^3 = 1 \text{ et } Z \neq 1 \\ &\Leftrightarrow (z^4)^3 = 1 \text{ et } z^4 \neq 1 \\ &\Leftrightarrow z^{12} = 1 \text{ et } z^4 \neq 1 \end{aligned}$$

Par conséquent, les solutions de $z^8 + z^4 + 1 = 0$ sont les racines douzièmes de l'unité qui ne sont pas des racines quatrièmes de l'unité. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\} = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{\frac{4i\pi}{n}}, \cdots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\right\}$$

L'ensemble des solutions de $z^8 + z^4 + 1 = 0$ est donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \mathbb{U}_{12} \setminus \mathbb{U}_4 &= \left\{e^{\frac{2ik\pi}{12}},\ k \in [\![0, 11]\!]\right\} \setminus \left\{e^{\frac{2ik\pi}{4}},\ k \in [\![0, 3]\!]\right\} \\ &= \left\{e^{\frac{2ik\pi}{12}},\ k \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}\right\} \\ &= \left\{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}, e^{\frac{7i\pi}{6}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{3}}, e^{\frac{11i\pi}{6}}\right\} \end{aligned}$$

Comme $e^{\frac{7i\pi}{6}} = e^{-\frac{5i\pi}{6}} = \overline{e^{5i\frac{\pi}{6}}}$, $e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \overline{e^{\frac{2i\pi}{3}}}$, $e^{\frac{5i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}} = \overline{e^{\frac{i\pi}{3}}}$ et $e^{\frac{11i\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \overline{e^{i\frac{\pi}{6}}}$, on peut également écrire cet ensemble sous forme de solutions deux à deux conjuguées :

$$\mathcal{S} = \left\{e^{i\frac{\pi}{6}}, \overline{e^{i\frac{\pi}{6}}}, e^{i\frac{\pi}{3}}, \overline{e^{i\frac{\pi}{3}}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, \overline{e^{\frac{2i\pi}{3}}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}, \overline{e^{\frac{5i\pi}{6}}}\right\}$$

▲

## Exercice 4.11

Il est clair que 1 n'est pas solution de cette équation. Pour $z \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned} (1+z)^n = (1-z)^n &\Leftrightarrow \frac{(1+z)^n}{(1-z)^n} = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1 \end{aligned}$$

Par conséquent, $z$ est solution de $(1+z)^n = (1-z)^n$ si, et seulement si, $\frac{1+z}{1-z}$ est une racine $n$-ième de l'unité. Autrement dit,

$$\begin{aligned} (1+z)^n = (1-z)^n &\Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!] \\ &\Leftrightarrow 1 + z = (1-z)e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!] \\ &\Leftrightarrow 1 + z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - ze^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!] \\ &\Leftrightarrow z(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1) = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!] \\ &\Leftrightarrow z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!] \end{aligned}$$

Or, en factorisant par l'angle « moitié » :

$$\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1} = \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)}{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} + e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)} = \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} \times 2i \sin\frac{k\pi}{n}}{e^{\frac{ik\pi}{n}} \times 2\cos\frac{k\pi}{n}} = i\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{\cos\frac{k\pi}{n}} = i\tan\frac{k\pi}{n}$$



Corrigé

*Les $n$ solutions de l'équation sont des nombres imaginaires purs.*

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $(1+z)^n = (1-z)^n$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ i\tan\frac{k\pi}{n},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

▲

## Exercice 4.12

Rappelons que l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines $n$-ièmes de l'unité est donné par :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\} = \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{\frac{4i\pi}{n}}, \cdots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}} \right\}$$

**1.** Il s'agit donc de calculer la somme $S$ suivante :

$$S = 1 + e^{\frac{2i\pi}{n}} + e^{\frac{4i\pi}{n}} + \cdots + e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k$$

*Pour $q \neq 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$*

On reconnaît la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et raison $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$. On a donc :

$$S = \frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = \frac{1-e^{\frac{2i\pi}{n}\times n}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = \frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = \frac{1-1}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = \frac{0}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0$$

On a montré que, pour $n \geqslant 2$, la somme des racines $n$-ièmes de l'unité est nulle.

**2.** Il s'agit cette fois de calculer le produit $P$ suivant :

$$P = 1 \times e^{\frac{2i\pi}{n}} \times e^{\frac{4i\pi}{n}} \times \cdots \times e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}} = e^{\frac{2i\pi}{n}} \times e^{\frac{4i\pi}{n}} \times \cdots \times e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}$$

Or, nous savons que pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, d'où :

$$P = e^{\frac{2i\pi}{n} + \frac{4i\pi}{n} + \cdots + \frac{2i(n-1)\pi}{n}} = e^{\frac{2i\pi}{n}(1+2+3+\cdots+n-1)}$$

*Somme des premiers entiers.*

Mais $1+2+3+\cdots+n-1 = \frac{(n-1)n}{2}$. Par conséquent,

$$P = e^{\frac{2i\pi}{n} \times \frac{(n-1)n}{2}} = e^{i\pi(n-1)} = \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

▲

## Exercice 4.13

**1.** Étant donné que $\omega$ est une racine cinquième de l'unité, on a $w^5 = 1$, d'où :

*Somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $\omega \neq 1$.*

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \sum_{k=1}^{4} \omega^k = \frac{1-\omega^5}{1-\omega} = \frac{1-1}{1-\omega} = 0.$$

Notons que l'on pouvait répondre à la question en utilisant un résultat plus général obtenu précédemment. En effet, $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$ étant la somme des racines cinquièmes de l'unité, elle est nulle d'après l'**exercice 4.12**.

**2.** Comme $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
u^2 + u - 1 &= \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 + \omega + \frac{1}{\omega} - 1 = \omega^2 + 2 \times \omega \times \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \omega + \frac{1}{\omega} - 1 \\
&= \omega^2 + 2 + \frac{1}{\omega^2} + \omega + \frac{1}{\omega} - 1 = \frac{\omega^4 + 2\omega^2 + 1 + \omega^3 + \omega - \omega^2}{\omega^2} \\
&= \frac{1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4}{\omega^2} = 0\,.
\end{aligned}$$

**3.** Le trinôme $z^2 + z - 1$ a un discriminant égal à $1^2 - 4 \times (-1) = 5$. Par conséquent, ce trinôme admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

On a $z_1 > 0$ et $z_2 < 0$. Or $u$ est une racine de $z^2 + z - 1$ et on a :

✎ $\sqrt{5} > 1$

$$u = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$$

donc $u$ est positif puisque $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$. Par conséquent, $u$ est la racine positive de $z^2 + z - 1$. Ainsi, $u = z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

✎ $\frac{2\pi}{5} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$

**4.** Comme $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{u}{2}$, on déduit de la question précédente que :

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Par ailleurs,

✎ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\sin^2\frac{2\pi}{5} = 1 - \cos^2\frac{2\pi}{5} = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{8} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

Comme $\sin\frac{2\pi}{5} \geqslant 0$ (car $\frac{2\pi}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}]$), on en déduit que :

$$\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

**5.** Pour $k \in \{0, \cdots, 4\}$, on note $M_k$ le point d'affixe $e^{\frac{2ik\pi}{5}}$. On sait que ces cinq points forment un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique. Nous allons le construire à la règle et au compas en utilisant ce qui précède. Tout d'abord, construisons un cercle de rayon quelconque. Ce rayon est pris pour unité. On sait alors construire (en utilisant la médiatrice) à la règle et au compas un segment de longueur $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$. On peut alors construire la longueur $\sqrt{5}/4$ comme hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit mesurent respectivement $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$. En retranchant la longueur $\frac{1}{4}$, on peut donc construire à la règle et au compas la longueur $\cos\frac{2\pi}{5}$, abscisse du point $M_1$ d'affixe $\omega$. On peut alors construire un pentagone régulier de la manière suivante :

✎ *Ces points sont les images des 5 racines cinquièmes de l'unité.*

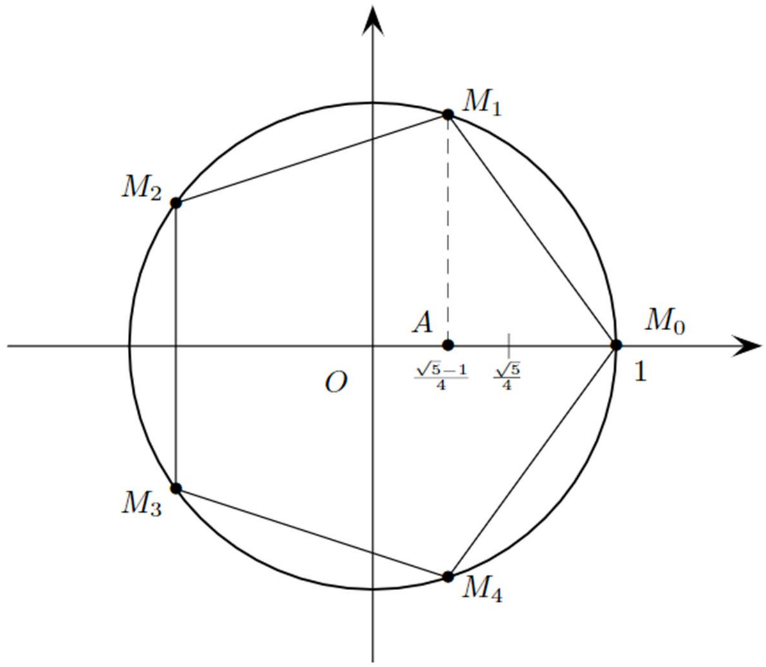
✎ $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

- On commence par placer le point $M_0$ d'affixe 1, premier sommet du pentagone.
- On place le point $A$ d'affixe $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (voir la méthode ci-dessus), puis son projeté $M_1$ sur le cercle unité parallèlement à l'axe des ordonnées. Le point $M_1$ est le deuxième sommet du pentagone.

✎ *$M_1$ est le point d'affixe $\omega$.*

- En partant du point $M_1$, on reporte sur le cercle, au compas, trois fois la longueur $M_0M_1$ pour obtenir les autres sommets $M_2$, $M_3$ et $M_4$ du pentagone.

Corrigé




▲

## Exercice 4.14

*$\sqrt[n]{r}$ est la racine $n$-ième du réel positif $r$.*

*Au passage, $\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$ est une racine $n$-ième de $a$ puisque $\left(\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n = re^{i\theta} = a$*

**1.** Nous allons nous ramener à une équation $Z^n = 1$ puis utiliser finalement les racines $n$-ièmes de l'unité. Pour cela, commençons par écrire $a$ sous forme exponentielle : $a = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Comme $r = (\sqrt[n]{r})^n$ et $e^{i\theta} = (e^{i\frac{\theta}{n}})^n$, on a :

$$\begin{aligned} z^n = a &\Leftrightarrow z^n = re^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow z^n = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n \left(e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n \\ &\Leftrightarrow \frac{z^n}{\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}}\right)^n = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $z$ est une racine $n$-ième de $a$ si, et seulement si, $\frac{z}{\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}}$ est une racine $n$-ième de l'unité. Par conséquent,

$$\begin{aligned} z^n = a &\Leftrightarrow \frac{z}{\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!] \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}} \times e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!] \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!] \end{aligned}$$

L'ensemble des racines $n$-ièmes de $a = re^{i\theta}$ est donc :

$$\left\{\sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\} = \left\{\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

On a donc démontré que tout nombre complexe non nul $a = re^{i\theta}$ admet $n$ racines $n^{\text{ièmes}}$. On les obtient en multipliant une racine $n$-ième $\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}$ de $a$ par les racines $n$-ièmes de l'unité.

**2.** On applique la question précédente à $n = 3$ et $a = -8$ que l'on écrit sous forme trigonométrique $8e^{i\pi}$. Les trois racines cubiques de $-8$ sont :

$8e^{i\pi} = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^3$

$$\sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$
$$\sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2e^{i\pi} = -2$$
$$\sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{\frac{4i\pi}{3}} = 2e^{\frac{5i\pi}{3}} = 2e^{-\frac{i\pi}{3}} = \overline{2e^{\frac{i\pi}{3}}} = 1 - i\sqrt{3}$$

*En notant $j = e^{2i\pi/3}$, les racines cubiques de $-8$ sont $-2$, $-2j$ et $-2j^2 =$.*

**3.** Cette équation s'écrit aussi $z^5 = -i$. Ses solutions sont les racines cinquièmes de $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. D'après la question **1**, ce sont les cinq nombres complexes $e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{\frac{2ik\pi}{5}}$, avec $k \in [\![0, 4]\!]$ :

*Question **1** appliquée à $n = 5$, $r = 1$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$.*

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} \times e^{i0} = -i \times 1 = -i$$
$$e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{\frac{2i\pi}{5}} = e^{-i\frac{\pi}{10}}$$
$$e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{\frac{4i\pi}{5}} = e^{\frac{3i\pi}{10}}$$
$$e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{\frac{7i\pi}{10}}$$
$$e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{\frac{11i\pi}{10}}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $z^5 + i = 0$ est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{-i, e^{-\frac{i\pi}{10}}, e^{\frac{3i\pi}{10}}, e^{\frac{7i\pi}{10}}, e^{\frac{11i\pi}{10}}\right\}$$

**4.** On va de nouveau appliquer la question **1** en commençant par mettre $\frac{3\sqrt{2}}{1+i}$ sous forme exponentielle :

$$\frac{3\sqrt{2}}{1+i} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Les solutions de l'équation sont les quatre racines quatrièmes de $3e^{-i\frac{\pi}{4}}$ que l'on obtient grâce à la question **1** :

*Les racines quatrièmes de $3e^{-i\frac{\pi}{4}}$ sont les nombres*

$$\sqrt[4]{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)}$$

*avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.*

$$\sqrt[4]{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
$$\sqrt[4]{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right)} = \sqrt[4]{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$\sqrt[4]{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4}\right)} = \sqrt[4]{3}e^{3i\frac{\pi}{4}}$$
$$\sqrt[4]{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{4}\right)} = \sqrt[4]{3}e^{5i\frac{\pi}{4}} = \sqrt[4]{3}e^{-3i\frac{\pi}{4}}$$

L'ensemble des solutions est :

*Les solutions sont deux à deux conjuguées.*

$$\mathcal{S} = \left\{\sqrt[4]{3}e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt[4]{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}, \sqrt[4]{3}e^{3i\frac{\pi}{4}}, \sqrt[4]{3}e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right\}$$

Corrigé

**5.** Cette équation est définie lorsque $z \neq 1$ et $z \neq -1$. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, on pose $Z = \frac{z+1}{z-1}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0 &\Leftrightarrow Z^3 + \frac{1}{Z^3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{Z^6+1}{Z^3} = 0 \\ &\Leftrightarrow Z^6 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow Z^6 = -1\end{aligned}$$

Nous sommes donc ramenés à déterminer les racines sixièmes de $-1$. Comme $-1 = e^{i\pi}$, ce sont les six nombres complexes données par la question **1** :

$$\left\{e^{i\frac{\pi}{6}} e^{\frac{2ik\pi}{6}},\ k \in [\![0,5]\!]\right\} = \left\{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{\frac{3i\pi}{6}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}, e^{\frac{7i\pi}{6}}, e^{\frac{9i\pi}{6}}, e^{\frac{11i\pi}{6}}\right\}$$

*On connaît la valeur de $Z$ en fonction de $z$ et on déduit celle de $z$ en fonction de $Z$.*

Les valeurs de $Z$ étant trouvées, il reste à en déduire $z$ :

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z-1} = Z &\Leftrightarrow z + 1 = (z-1)Z \\ &\Leftrightarrow z + 1 = zZ - Z \\ &\Leftrightarrow z(Z-1) = Z + 1 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{Z+1}{Z-1}\end{aligned}$$

Les six valeurs de $z$ sont donc :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}+1}{e^{i\frac{\pi}{6}}-1} = \frac{(e^{i\frac{\pi}{6}}+1)(e^{-i\frac{\pi}{6}}-1)}{(e^{i\frac{\pi}{6}}-1)(e^{-i\frac{\pi}{6}}-1)} = \frac{1-(e^{i\frac{\pi}{6}}-e^{-i\frac{\pi}{6}})-1}{1-(e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{-i\frac{\pi}{6}})+1} = \frac{-2i\sin\frac{\pi}{6}}{2-2\cos\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{-i}{2-\sqrt{3}} = -\frac{i(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = -i(2+\sqrt{3}) \\ z_2 &= \frac{e^{\frac{3i\pi}{6}}+1}{e^{\frac{3i\pi}{6}}-1} = \frac{i+1}{i-1} = \frac{(i+1)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-i+1-1-i}{(-1)^2+1^2} = \frac{-2i}{2} = -i \\ z_3 &= \frac{e^{\frac{5i\pi}{6}}+1}{e^{\frac{5i\pi}{6}}-1} = \frac{(e^{\frac{5i\pi}{6}}+1)(e^{-\frac{5i\pi}{6}}-1)}{(e^{\frac{5i\pi}{6}}-1)(e^{\frac{-5i\pi}{6}}-1)} = \frac{1-(e^{\frac{5i\pi}{6}}-e^{\frac{-5i\pi}{6}})-1}{1-(e^{\frac{5i\pi}{6}}+e^{-\frac{5i\pi}{6}})+1} = \frac{-2i\sin\frac{5\pi}{6}}{2-2\cos\frac{5\pi}{6}} \\ &= \frac{-i}{2+\sqrt{3}} = -\frac{i(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = -i(2-\sqrt{3}) \\ z_4 &= \frac{e^{7i\frac{\pi}{6}}+1}{e^{7i\frac{\pi}{6}}-1} = \frac{e^{-5i\frac{\pi}{6}}+1}{e^{-5i\frac{\pi}{6}}-1} = \frac{\overline{e^{5i\frac{\pi}{6}}}+1}{\overline{e^{5i\frac{\pi}{6}}}-1} = \overline{\frac{e^{5i\frac{\pi}{6}}+1}{e^{5i\frac{\pi}{6}}-1}} = \overline{z_3} = i(2-\sqrt{3}) \\ z_5 &= \frac{e^{9i\frac{\pi}{6}}+1}{e^{i\frac{9\pi}{6}}-1} = \frac{-i+1}{-i-1} = \overline{\frac{i+1}{i-1}} = \overline{z_2} = i \\ z_6 &= \frac{e^{11i\frac{\pi}{6}}+1}{e^{11i\frac{\pi}{6}}-1} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}+1}{e^{-i\frac{\pi}{6}}-1} = \frac{\overline{e^{i\frac{\pi}{6}}}+1}{\overline{e^{i\frac{\pi}{6}}}-1} = \overline{\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}+1}{e^{i\frac{\pi}{6}}-1}} = \overline{z_1} = i(2+\sqrt{3})\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \left\{i, -i, i(2+\sqrt{3}), -i(2+\sqrt{3}), i(2-\sqrt{3}), -i(2-\sqrt{3})\right\}$$

▲

Chapitre 5

# Équations polynomiales

Nous avons une formule simple pour la résolution des équations polynomiales de degré deux. Pour les degrés trois et quatre, les formules existent mais sont tellement complexes qu'elles sont, de fait, inutilisables. Aussi, les recherches de factorisation ou de méthodes permettant de se ramener à des équations de moindre degré, sont importantes à connaître.

### Un mathématicien

Le génial mathématicien Évariste **Galois** (1811-1832) a démontré, alors qu'il était encore étudiant, qu'une équation polynomiale de degré cinq ne peut se résoudre par radicaux c'est-à-dire qu'il n'existe pas de formule donnant les solutions en fonction de racines des coefficients. Sa méthode de démonstration allait beaucoup plus loin que ce simple problème puisqu'elle a débouché sur la théorie des groupes qui est devenue la base de nombreuses branches des mathématiques. Mort en duel à vingt ans, l'importance de ses écrits n'a été comprise que quinze ans plus tard par Joseph **Liouville**.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Jean **le Rond d'Alembert** (1717-1783) a démontré le premier que toute équation polynomiale possède au moins une racine complexe. Sa preuve, énoncée en 1746, n'était cependant pas tout à fait rigoureuse et l'on dut attendre 1799 pour que Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855) en donne une démonstration tout à fait satisfaisante. Ceci explique pourquoi ce résultat est connu sous le nom de *théorème de D'Alembert-Gauss* mais aussi de *théorème fondamental de l'algèbre.*

COMPÉTENCES

## ■ les incontournables

- Résoudre une équation polynomiale de degré deux à coefficients réels
- Factoriser un trinôme du second degré
- Trouver une racine évidente d'un polynôme
- Résoudre une équation polynomiale de degré 3 dont une racine est connue

## ■ et plus si affinités

- Résoudre, avec indications, certaines équations polynomiales de degré 3 ou 4

# Résumé de cours

## Notion de polynôme

**Définition :** *On appelle **fonction polynôme** à coefficients réels, ou plus simplement **polynôme**, toute fonction $P$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

*où $n$ est un entier naturel et $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des réels.*

**Vocabulaire :** *dans l'écriture ci-dessus les réels $a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont appelés les **coefficients** du polynôme $P$.*

**Définition :** *On considère un polynôme $P$ de la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Si $a_n \neq 0$, l'entier $n$ est appelé le **degré** du polynôme $P$.*

**Remarques :**

- Un polynôme de degré 0 est une fonction constante non nulle de la forme $P(x) = a$, avec $a \neq 0$.
- Un polynôme de degré 1 est une fonction affine de la forme $P(x) = ax + b$, avec $a \neq 0$.
- Un polynôme de degré 2 est un trinôme du second degré de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

**Théorème 5.1.—** Un polynôme est nul si, et seulement si, ses coefficients sont nuls.

**Corollaire 5.2.—** Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients.

**Définition :** *On dit qu'un nombre (réel ou complexe) $a$ est **racine** d'un polynôme $P$ lorsque $P(a) = 0$.*

**Exemple :** on pose $P(x) = 3x^3 - x^2 - 2$, $Q(x) = x^3 - 8$ et $R(x) = x^2 + 1$.
Alors 1 est racine de $P$, 2 est racine de $Q$ et $i$ est racine de $R$. En effet,

$$\begin{aligned}
P(1) &= 3 \times 1^3 - 1^2 - 2 = 3 - 1 - 2 = 0\\
Q(2) &= 2^3 - 8 = 8 - 8 = 0\\
R(i) &= i^2 + 1 = -1 + 1 = 0
\end{aligned}$$

**Définition :** *Soit $P$ un polynôme et $a$ un nombre réel ou complexe. Le polynôme $P$ est factorisable par $x - a$ lorsque l'on peut écrire $P(x) = (x - a)Q(x)$, où $Q$ est un polynôme.*

## ■ Solutions d'une équation polynomiale du second degré à coefficients réels

**Théorème 5.3.— Solutions complexes d'une équation du second degré à coefficients réels—.** On considère l'équation du second degré $(E)$ : $az^2 + bz + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $az^2 + bz + c$.

- Si $\Delta > 0$, $(E)$ admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  On a alors la factorisation suivante :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

- Si $\Delta = 0$, $(E)$ admet une unique solution réelle dite **double** :

$$z_0 = -\frac{b}{a}.$$

  On a alors la factorisation suivante :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$$

- Si $\Delta < 0$, $(E)$ admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

  On a alors la factorisation suivante :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = a(z - z_1)(z - \overline{z_1})$$

**Remarque :** le théorème précédent permet notamment de déterminer les racines d'un polynôme de degré deux. En notant $\Delta$ le discriminant d'un trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ :

- si $\Delta > 0$, $P$ admet deux racines réelles distinctes ;
- si $\Delta = 0$, $P$ admet une unique racine réelle (double) ;
- si $\Delta < 0$, $P$ admet deux racines complexes conjuguées.

Pour synthétiser, on parle alors des deux racines distinctes ou confondues d'un polynôme de degré 2.

**Théorème 5.4.—** Soit $z_1$ et $z_2$ les racines (distinctes ou confondues) de l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Alors :

$$\boxed{z_1 z_2 = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}}$$

## ■ Factorisation d'un polynôme

Le **théorème 5.3** donne la factorisation d'un polynôme de degré 2, obtenue à partir des racines de ce polynôme. Comme nous l'avons vu dans ce cas-là, la factorisation peut faire intervenir des nombres complexes bien que le polynôme soit à coefficients réels. Nous allons généraliser ce résultat en établissant le lien entre racine d'un polynôme et factorisation. Nous commençons par un cas particulier, la factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$. Le cas $n = 1$ est évident puisque $z^1 - a^1 = z - a$ et le cas $n = 2$ est une identité remarquable connue puisque :

$$z^2 - a^2 = (z-a)(z+a)$$

La factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$ pour un entier $n$ quelconque est donnée par le résultat suivant.

**Théorème 5.5.—** Soit $z$ et $a$ deux nombres complexes, $n$ un entier naturel non nul. Alors :

$$\boxed{\begin{aligned} z^n - a^n &= (z-a)\left(z^{n-1} + z^{n-2}a + z^{n-3}a^2 + \cdots + za^{n-2} + a^{n-1}\right) \\ &= (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}a^k \end{aligned}}$$

**Remarque :** pour $a = 1$, on obtient

$$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1)$$

En particulier, $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$.

Le lien fondamental entre racine et factorisation est donné par le théorème suivant.

**Théorème 5.6.—** Si $P$ est un polynôme et $a$ une racine de $P$, alors $P$ est factorisable par $z - a$.

**Remarque :** autrement dit, on peut alors écrire $P(z) = (z-a)Q(z)$, où $Q$ est un polynôme.

**Théorème 5.7.— Nombre maximal de racines d'un polynôme —.** Un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus $n$ racines.

**Remarque :** nous avions déjà vu ce résultat pour un trinôme du second degré qui admet une ou deux racines (**théorème 5.3**).

# Démonstrations

## Factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$

Il s'agit de démontrer le **théorème 5.5**.

**Théorème 5.5.—** Soit $z$ et $a$ deux nombres complexes, $n$ un entier naturel non nul. Alors :

$$\boxed{\begin{aligned} z^n - a^n &= (z-a)\left(z^{n-1} + z^{n-2}a + z^{n-3}a^2 + \cdots + za^{n-2} + a^{n-1}\right) \\ &= (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}a^k \end{aligned}}$$

**Démonstration** ▽
Nous allons développer le membre de droite afin de montrer qu'il est bien égal à $z^n - a^n$. On a :

$$\begin{aligned} (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}a^k &= (z-a)\left(z^{n-1} + z^{n-2}a + z^{n-3}a^2 + \cdots + za^{n-2} + a^{n-1}\right) \\ &= z \times z^{n-1} + z \times z^{n-2}a + z \times z^{n-3}a^2 + \cdots + z \times za^{n-2} + z \times a^{n-1} \\ &\qquad - a \times z^{n-1} - a \times z^{n-2}a - a \times z^{n-3}a^2 - \cdots - a \times za^{n-2} - a \times a^{n-1} \\ &= z^n + z^{n-1}a + z^{n-2}a^2 + \cdots + za^{n-1} - az^{n-1} - z^{n-2}a^2 - \cdots - za^{n-1} - a^n \\ &= z^n - a^n \end{aligned}$$

Notons que, dans la somme précédente, il se produit une succession de simplifications, que l'on appelle « télescopage ». ▲

## Factorisation de $P(z)$ par $z - a$ lorsque $P(a) = 0$

Il s'agit de démontrer le **théorème 5.6**.

**Théorème 5.6.—** Si $P$ est un polynôme et $a$ une racine de $P$, alors $P$ est factorisable par $z - a$.

**Démonstration** ▽
Nous devons montrer que, lorsque $a$ est racine de $P$, on peut écrire :

$$P(z) = (z-a)Q(z)$$

où $Q$ est un polynôme. Introduisons les coefficients de $P$ en notant :

$$P(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Comme $a$ est racine de $P$, on a $P(a) = 0$ donc :

$$\begin{aligned} P(z) = P(z) - P(a) &= \alpha_n z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 - \alpha_n a^n - \alpha_{n-1}a^{n-1} - \cdots - \alpha_1 a - \alpha_0 \\ &= \alpha_n z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z - \alpha_n a^n - \alpha_{n-1}a^{n-1} - \cdots - \alpha_1 a \\ &= \alpha_n(z^n - a^n) + \alpha_{n-1}(z^{n-1} - a^{n-1}) + \cdots + \alpha_1(z-a) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(z^k - a^k) \end{aligned}$$

Mais, d'après le **théorème 5.5**, $z^k - a^k$ est factorisable par $z - a$. Par conséquent, pour $k \in [\![1, n]\!]$, il existe un polynôme $P_k$ tel que :

$$z^k - a^k = (z - a)P_k(z)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (z-a)P_k(z) = \alpha_1(z-a)P_1(z) + \alpha_2(z-a)P_2(z) + \cdots + \alpha_n(z-a)P_n(z) \\ &= (z-a)\left[\alpha_1 P_1(z) + \alpha_2 P_2(z) + \cdots + \alpha_n P_n(z)\right] \end{aligned}$$

En notant $Q$ le polynôme défini par $Q(z) = \alpha_1 P_1(z) + \alpha_2 P_2(z) + \cdots + \alpha_n P_n(z)$, on obtient finalement

$$P(z) = (z - a)Q(z)$$

ce qui montre que $P$ est factorisable par $z - a$. ▲

## ■ Nombre maximal de racines

Il s'agit cette fois de démontrer le **théorème 5.7**.

| **Théorème 5.7.—** Un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus $n$ racines. |
|---|

**Démonstration** ▽

Nous allons procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en introduisant, pour $n \in \mathbb{N}$ la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \ll \text{ Un polynôme de degré } n \text{ a au plus } n \text{ racines } \gg .$$

**Initialisation :** Un polynôme de degré 0 est une fonction constante de la forme $P(x) = a$, avec $a \neq 0$. Comme $a \neq 0$, la fonction $P$ ne s'annule jamais, donc $P$ n'a aucune racine, ce qui montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie ($P$ a zéro racine !).

**Hérédité :** On suppose maintenant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé. Autrement dit,

$$\ll \text{ un polynôme de degré } n \text{ a au plus } n \text{ racines } \gg .$$

Montrons maintenant que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Soit $P$ un polynôme de degré $n+1$. On distingue deux cas.

▶ Si $P$ n'a aucune racine, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (puisque $P$ a zéro racine).

▶ Si $P$ une racine $a$, alors $P$ est factorisable par $z - a$ d'après le **théorème 5.6**. On peut donc écrire :

$$P(z) = (z - a)Q(z)$$

où $Q$ est un polynôme de degré $n$ (puisque $P$ est de degré $n+1$). Maintenant, si $b$ est une racine de $P$, on a $P(b) = 0$, soit :

$$(b - a)Q(b) = 0$$

donc $b - a = 0$ ou $Q(b) = 0$, c'est-à-dire $b = a$ ou $b$ est racine de $Q$. Or, $Q$ étant un polynôme de degré $n$, il admet au plus $n$ racines d'après $\mathcal{P}(n)$. Par conséquent, il y a, au plus, $n+1$ possibilités pour $b$ (une possibilité si $b = a$ et et au plus $n$ possibilités si $b$ est racine de $Q$). Ainsi, $P$ a au plus $n+1$ racines, ce qui montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

**Conclusion :** Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ▲

# Méthodes

## Racines d'un polynôme

> **Méthode 5.1.— Comment montrer qu'un nombre est racine d'un polynôme**
> Pour montrer qu'un nombre (réel ou complexe) $a$ est racine d'un polynôme $P$, il suffit de vérifier que $P(a) = 0$.

**Exemple :** on pose $P(x) = 4x^3 + 7x^2 + 4$ et $Q(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x - 1$.
Vérifier que $-2$ est racine de $P$ et que $i$ est racine de $Q$. On a :

$$P(-2) = 4 \times (-2)^3 + 7 \times (-2)^2 + 4 = 4 \times (-8) + 7 \times 4 + 4 = -32 + 28 + 4 = 0$$

donc $-2$ est racine de $P$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} Q(i) &= 2i^4 + 3i^3 + i^2 + 3i - 1 = 2(i^2)^2 + 3i^2 \times i + i^2 + 3i - 1 \\ &= 2(-1)^2 + 3 \times (-1) \times i - 1 + 3i - 1 = 2 - 3i - 1 + 3i - 1 = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que $i$ est racine de $Q$.

**Mise en œuvre :** presque tous les exercices de ce chapitre !

> **Méthode 5.2.— Comment trouver une racine évidente d'un polynôme**
> Trouver une racine « évidente » d'un polynôme $P$, c'est trouver sans indication un nombre $a$ tel que $P(a) = 0$. Quand on parle de racine évidente, c'est généralement 1 ou $-1$, éventuellement 2 ou $-2$.

**Remarque :** trouver une racine évidente permet notamment de

- résoudre une équation polynomiale de degré 2 sans utiliser le discriminant (**méthode 5.4**) ;
- résoudre une équation polynomiale de degré 3 (**méthode 5.8**).

**Exemple :** trouver une racine évidente des polynômes définis par $P(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2$ et $Q(x) = 2x^4 - x - 1$.
On a :

$$\begin{aligned} &P(-1) = 2 \times (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 2 = -2 - 1 + 1 + 2 = 0 \\ &Q(1) = 2 \times 1^4 - 1 - 1 = 2 - 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que $-1$ est racine de $P$ et que 1 est racine de $Q$.

**Mise en œuvre : exercice 5.2, exercice 5.5.**

## ■ Équations polynomiales du second degré

> ❑ **Méthode 5.3.— Comment résoudre une équation polynomiale du second degré**
> Pour résoudre une équation polynomiale du second degré $az^2+bz+c=0$, avec $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$ :
> $\boxed{1}$ On commence par calculer le discriminant $\Delta=b^2-4ac$ du trinôme $az^2+bz+c$.
> $\boxed{2}$ On applique le **théorème 5.3** suivant le signe de $\Delta$.

**Exemple :** résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+2=0$.

$\boxed{1}$ On a $\Delta=(-2)^2-4\times 1\times 2=4-8=-4$.

$\boxed{2}$ On applique le **théorème 5.3**. Comme $\Delta<0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées données par :

$$z_1=\frac{-(-2)+i\sqrt{-(-4)}}{2\times 1}=\frac{2+i\sqrt{4}}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i \qquad \text{et} \qquad z_2=\overline{z_1}=1-i$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\mathcal{S}=\{1+i,\ 1-i\}$.

**Exemple :** résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z-12=0$.

$\boxed{1}$ On a $\Delta=1^2-4\times 1\times(-12)=1+48=49$.

$\boxed{2}$ Comme $\Delta>0$, l'équation admet, d'après le **théorème 5.3**, deux solutions réelles distinctes :

$$z_1=\frac{-1+\sqrt{49}}{2\times 1}=\frac{-1+7}{2}=\frac{6}{2}=3 \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{-1-\sqrt{49}}{2\times 1}=\frac{-1-7}{2}=\frac{-8}{2}=-4$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\mathcal{S}=\{3,\ -4\}$.

**Exemple :** résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+6z+9=0$.

$\boxed{1}$ On a $\Delta=6^2-4\times 1\times 9=36-36=0$.

$\boxed{2}$ D'après le **théorème 5.3**, l'équation admet une unique solution réelle (double) :

$$z_0=-\frac{6}{2\times 1}=-\frac{6}{2}=-3$$

Notons que l'on pouvait procéder différemment et se passer du calcul du discriminant en reconnaissant une identité remarquable :

$$\begin{aligned} z^2+6z+9=0 &\Leftrightarrow (z+3)^2=0\\ &\Leftrightarrow z+3=0\\ &\Leftrightarrow z=-3 \end{aligned}$$

ce qui montre que $-3$ est l'unique solution de l'équation $z^2+6z+9=0$. Ainsi, $\mathcal{S}=\{-3\}$.

**Mise en œuvre : exercice 5.1**, **exercice 5.3**.

Méthodes

**❑ Méthode 5.4.— Comment utiliser une racine évidente pour résoudre une équation du second degré sans calcul de discriminant**
Dans le cas où l'on a trouvé une racine évidente de l'équation $ax^2+bx+c=0$, l'autre solution peut s'obtenir directement grâce au **théorème 5.4**. Connaissant une racine évidente $z_1$ et sachant, d'après le **théorème 5.4**, que $z_1z_2 = \frac{c}{a}$, on en déduit la valeur de $z_2$.

**Exemple :** résoudre, sans calculer de discriminant, l'équation $2z^2+3z-5=0$.
Le réel $z_1 = 1$ est racine évidente de $2z^2+3z-5=0$. En effet,

$$2\times 1^2 + 3\times 1 - 5 = 2+3-5 = 0$$

Or, d'après le **théorème 5.4**, le produit $z_1z_2$ des deux solutions (distinctes ou confondues) de $2z^2+3z-5=0$ est égal à $\frac{-5}{2}$. Ainsi,

$$\underbrace{z_1}_{1} z_2 = -\frac{5}{2}$$

soit $z_2 = -\frac{5}{2}$, ce qui montre que l'autre solution de l'équation $2z^2+3z-5=0$ est $-\frac{5}{2}$.
Finalement, l'équation $2z^2+3z-5=0$ admet deux solutions réelles distinctes, 1 et $-\frac{5}{2}$ :

$$\mathcal{S} = \left\{1,\ -\frac{5}{2}\right\}.$$

**Mise en œuvre : exercice 5.2**.

**❑ Méthode 5.5.— Comment factoriser un polynôme du second degré**
Pour factoriser un trinôme du second degré $az^2+bz+c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ :
$\boxed{1}$ On commence par déterminer les racines de ce trinôme (**méthode 5.3**).
$\boxed{2}$ On en déduit la factorisation du trinôme donnée par le **théorème 5.3**.

Pour synthétiser les trois cas de figure donnés par le **théorème 5.3**, en notant $z_1$ et $z_2$ les racines (distinctes ou confondues) du trinôme $az^2+bz+c$, la factorisation s'écrit :

$$az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$$

**Exemple :** donner la factorisation des trinômes $z^2-2z+2$, $z^2+z-12$ et $z^2+6z+9$. Nous avons déjà calculé les racines de ces trois polynômes comme illustration de la **méthode 5.3**. Il reste à appliquer la factorisation donnée par le **théorème 5.3**.

- Le trinôme $z^2-2z+2$ admet deux racines complexes conjuguées $1+i$ et $1-i$ donc :

$$z^2-2z+2 = [z-(1+i)]\,[z-(1-i)] = (z-1-i)(z-1+i)$$

- Le trinôme $z^2+2z-3$ admet deux racines réelles distinctes 3 et $-4$ donc :

$$z^2+z-12 = (z-3)(z-(-4)) = (z-3)(z+4)$$

- Le trinôme $z^2+6z+9$ admet un unique racine (double) -3 donc :

$$z^2+6z+9 = (z-(-3))^2 = (z+3)^2$$

**Mise en œuvre : exercice 5.4**.

## ■ Équations polynomiales de degré trois ou plus

> ❑ **Méthode 5.6.— Comment factoriser un polynôme de degré 3 dont on connaît une racine**
> Supposons que l'on connaisse une racine $a$ d'un polynôme $P$ de degré 3.
>
> $\boxed{1}$ On peut alors, d'après le **théorème 5.6**, factoriser $P$ par $z - a$ :
>
> $$P(z) = (z - a)Q(z)$$
>
> où $Q$ est un polynôme de degré 2, c'est-à-dire de la forme $Q(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$.
>
> $\boxed{2}$ En développant l'égalité $P(z) = (z - a)Q(z)$ puis en identifiant les coefficients de ces deux polynômes, on détermine les coefficients $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ de $Q$.
>
> $\boxed{3}$ Connaissant les coefficients du polynôme $Q$, on peut alors le factoriser en appliquant la **méthode 5.5** et on en déduit la factorisation de $P$.

**Remarque :** cette méthode permet notamment de déterminer les racines d'un polynôme de degré 3 si l'on en connaît une.

Méthodes

**Exemple :** vérifier que 3 est racine du polynôme $P(z) = 2z^3 + z^2 - 25z + 12$ puis le factoriser.
3 est bien racine de $P$ puisque :

$$P(3) = 2 \times 3^3 + 3^2 - 25 \times 3 + 12 = 2 \times 27 + 9 - 75 + 12 = 54 + 9 - 75 + 12 = 75 - 75 = 0$$

$\boxed{1}$ On peut alors écrire :

$$P(z) = (z - 3)Q(z)$$

où $Q$ est un polynôme de degré 2. Autrement dit,

$$P(z) = (z - 3)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ En développant, l'égalité précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} 2z^3 + z^2 - 25z + 12 &= \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z - 3\alpha z^2 - 3\beta z - 3\gamma \\ &= \alpha z^3 + (\beta - 3\alpha)z^2 + (\gamma - 3\beta)z - 3\gamma \end{aligned}$$

On identifie alors les coefficients des deux polynômes en vertu du **corollaire 5.2** :

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta - 3\alpha = 1 \\ \gamma - 3\beta = -25 \\ -3\gamma = 12 \end{cases}$$

On obtient $\alpha = 2$, $\beta = 7$ et $\gamma = -4$ soit :

$$Q(z) = 2z^2 + 7z - 4$$

$\boxed{3}$ Le polynôme $Q$ est un trinôme du second degré dont le discriminant est égal à $49 + 32 = 81$. Il admet donc deux racines réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-7 + \sqrt{81}}{4} = \frac{-7 + 9}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-7 - \sqrt{81}}{4} = \frac{-7 - 9}{4} = -4$$

et on a donc $Q(z) = 2(z - \frac{1}{2})(z + 4)$. Finalement, la factorisation de $P$ est donnée par :

$$P(z) = 2(z - 3)(z - \frac{1}{2})(z + 4)$$

**Mise en œuvre : exercice 5.7**, **exercice 5.8**.

> ❑ **Méthode 5.7.— Comment factoriser un polynôme de degré 3 après avoir trouvé une racine évidente**
> Si l'on a trouvé une racine évidente d'un polynôme de degré 3, on peut alors le factoriser en appliquant la **méthode 5.6**. Cette méthode permet notamment de déterminer les racines d'un polynôme de degré 3 lorsque l'on en a trouvé une racine évidente.

**Exemple :** factoriser le polynôme $P(z) = z^3 - 3z^2 + 12z - 10$.
On vérifie que 1 est racine évidente de $P$ puisque :

$$P(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 + 12 \times 1 - 10 = 1 - 3 + 12 - 10 = 13 - 13 = 0$$

$\boxed{1}$ On peut donc factoriser $P$ par $z - 1$ :

$$P(z) = (z - 1)Q(z)$$

où $Q$ est un polynôme de degré 2, soit

$$P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c)$$

$\boxed{2}$ Après développement, cette égalité s'écrit :

$$z^3 - 3z^2 + 12z - 10 = az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c$$

L'identification des coefficients donne alors :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -3 \\ c - b = 12 \\ -c = -10 \end{cases}$$

On obtient $a = 1$, $b = -2$ et $c = 10$, d'où :

$$P(z) = (z - 1)(z^2 - 2z + 10)$$

$\boxed{3}$ Le trinôme $z^2 - 2z + 10$ a un discriminant égal à $(-2)^2 - 4 \times 10 = 4 - 40 = -36$. Par conséquent, il admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2 + i\sqrt{36}}{2} = \frac{2 + 6i}{2} = 1 + 3i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \overline{z_1} = 1 - 3i$$

Ainsi, $z^2 - 2z + 10 = [z - (1 + 3i)]\,[z - (1 - 3i)]$ et on en déduit la factorisation de $P$ :

$$P(z) = (z - 1)(z - 1 - 3i)(z - 1 + 3i)$$

**Mise en œuvre : exercice 5.5**.

> ❑ **Méthode 5.8.— Comment résoudre une équation polynomiale de degré 3**
> Lorsque l'on dispose d'une racine d'un polynôme $P$ de degré 3 (évidente ou donnée par l'énoncé), on peut alors le factoriser en appliquant la **méthode 5.6** et en déduire les racines de $P$, c'est-à-dire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

**Exemple :** résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $2z^3 + z^2 - 25z + 12 = 0$ et $z^3 - 3z^2 + 12z + 10 = 0$.
Nous avons obtenu, dans les deux exemples précédents, la factorisation de ces deux polynômes :

$$2z^3 + z^2 - 25z + 12 = 2(z-3)(z-\frac{1}{2})(z+4)$$
$$z^3 - 3z^2 + 12z + 10 = (z-1)(z-1-3i)(z-1+3i)$$

Par conséquent, les racines de $2z^3+z^2-25z+12$ sont 3, $\frac{1}{2}$ et $-4$ ; les racines de $z^3-3z^2+12z+10$ sont 1, $1+3i$ et $1-3i$. Ainsi :

L'ensemble des solutions de l'équation $2z^3 + z^2 - 25z + 12 = 0$ est $\left\{-4, \frac{1}{2}, 3\right\}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $z^3 - 3z^2 + 12z + 10 = 0$ est $\{1, 1-3i, 1+3i\}$.

**Mise en œuvre : exercice 5.8**.

**Remarque :** la méthode précédente permet de résoudre une équation polynomiale de degré 3 lorsque l'on connaît déjà une racine (évidente ou obtenue grâce à une indication de l'énoncé). Il existe une méthode générale mais elle n'est pas au programme du cours. Elle est présentée à travers un exemple dans l'**exercice 5.14**.

> ❑ **Méthode 5.9.— Comment factoriser un polynôme dont on connaît une racine**
> Les méthodes présentées pour un polynôme de degré 3 s'étendent à un polynôme de degré supérieur, toujours en utilisant le **théorème 5.6** : si $a$ est racine de $P$ alors $P$ est factorisable par $z - a$.

**Exemple :** résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 8z^3 + 15z^2 - 8z - 16 = 0$. On commencera par trouver deux solutions évidentes.
Tout d'abord, 1 et $-1$ sont solutions évidentes de cette équation puisque :

$$1^4 + 8 \times 1^3 + 15 \times 1^2 - 8 \times 1 - 16 = 1 + 8 + 15 - 8 - 16 = 0$$
$$(-1)^4 + 8 \times (-1)^3 + 15 \times (-1)^2 - 8 \times (-1) - 16 = 1 - 8 + 15 + 8 - 16 = 0$$

Par conséquent, le polynôme $z^4 + 8z^3 + 15z^2 - 8z - 16$ est factorisable par $z - 1$ et $z + 1$. On peut donc écrire :

$$z^4 + 8z^3 + 15z^2 - 8z - 16 = (z-1)(z+1)Q(z)$$

où $Q$ est un polynôme de degré 2, soit

$$z^4 + 8z^3 + 15z^2 - 8z - 16 = (z^2-1)(az^2+bz+c)$$

Méthodes

avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$. Ainsi, on a :

$$z^4 + 8z^3 + 15z^2 - 8z - 16 = az^4 + bz^3 + (c-a)z^2 - bz - c$$

L'identification des coefficients de ces deux polynômes s'écrit :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 8 \\ c - a = 15 \\ -b = -8 \\ -c = -16 \end{cases}$$

Ainsi, $a = 1$, $b = 8$ et $c = 16$, d'où :

$$z^4 + 8z^3 + 15z^2 - 8z - 16 = (z-1)(z+1)(z^2 + 8z + 16) = (z-1)(z+1)(z+4)^2$$

ce qui montre que les racines du polynôme $z^4 + 8z^3 + 15z^2 - 8z - 16$ sont donc $-1$, $1$ et $-4$. L'ensemble des solutions de $z^4 + 8z^3 + 15z^2 - 8z - 16 = 0$ est :

$$\mathcal{S} = \{-1, 1, -4\}$$

**Mise en œuvre : exercice 5.9**.

> ❑ **Méthode 5.10.— Comment résoudre une équation $az^4 + bz^2 + c = 0$**
> Pour résoudre une équation de degré 4 de la forme $az^4 + bz^2 + c = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ :
>
> $\boxed{1}$ On se ramène à une équation du second degré en posant $Z = z^2$, l'équation $az^4 + bz^2 + c = 0$ s'écrit alors $aZ^2 + bZ + c = 0$.
>
> $\boxed{2}$ On résout l'équation du second degré $aZ^2 + bZ + c = 0$ à l'aide du **théorème 5.3**.
>
> $\boxed{3}$ Suivant les valeurs de $Z$ trouvées, on en déduit celles de $z$ sachant que $z^2 = Z$.

**Exemple :** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$.

$\boxed{1}$ En posant $Z = z^2$, l'équation s'écrit $Z^2 + 4Z - 21 = 0$.

$\boxed{2}$ On résout maintenant l'équation du second degré $Z^2 + 4Z - 21 = 0$. Son discriminant $\Delta$ est égal à $\Delta = 4^2 - 4 \times (-21) = 16 + 84 = 100$. Par conséquent, l'équation $Z^2 + 4Z - 21 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes :

$$Z_1 = \frac{-4 + \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 + 10}{2} = 3 \qquad \text{et} \qquad Z_2 = \frac{-4 - \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 - 10}{2} = -7$$

$\boxed{3}$ On en déduit maintenant $z$ sachant que $z^2 = Z$. D'après l'étape précédente, on a :

$$z^2 = 3 \qquad \text{ou} \qquad z^2 = -7$$

On a $z^2 = 3$ si, et seulement si, $z = \sqrt{3}$ ou $z = -\sqrt{3}$. Par ailleurs, l'équation $z^2 = -7$ est une équation du second degré ($z^2 + 7 = 0$) qu'on peut résoudre en appliquant encore le **théorème 5.3**. On peut aussi, plus simplement, écrire :

$$\begin{aligned} z^2 = -7 &\Leftrightarrow z^2 = \left(i\sqrt{7}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow z = i\sqrt{7} \text{ ou } z = -i\sqrt{7} \end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$ admet quatre solutions : $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $i\sqrt{7}$ et $-i\sqrt{7}$. L'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\mathcal{S} = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, i\sqrt{7}, -i\sqrt{7}\}$$

**Mise en œuvre : exercice 5.6**.

**Remarque :** dans le cadre du programme, la **méthode 5.10** ne peut s'appliquer que dans le cas d'un discriminant positif du trinôme $aZ^2+bZ+c$ (valeurs réelles de $Z$). Pour un exemple d'équation de ce type à discriminant strictement négatif, on pourra consulter l'**exercice 5.11**.

# Vrai/Faux

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1.** Les racines du trinôme $z^2 - z + 2$ sont imaginaires pures. | ☐ | ☐ |
| **2.** Si 1 est racine du trinôme $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), l'autre racine est $\frac{c}{a}$. | ☐ | ☐ |
| **3.** Les racines du trinôme $z^2 + z + 3$ sont $\frac{-1+\sqrt{-11}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-11}}{2}$. | ☐ | ☐ |
| **4.** Comme $-1$ et 2 sont racines de $2x^2 - 2x - 4$, la factorisation de ce trinôme est $(x+1)(x-2)$. | ☐ | ☐ |
| **5.** Si $z_0$ est l'unique racine de $az^2 + bz + c$, ce trinôme se factorise sous la forme $a(z - z_0)$. | ☐ | ☐ |
| **6.** Le polynôme $3z^5 - 4z^4 + z^3 + 5z^2 - 3z - 2$ est factorisable par $z - 1$. | ☐ | ☐ |
| **7.** Si on note $z_1$ et $z_2$ les solutions de $2z^2 - 15z - 8 = 0$, alors $z_1 + z_2 = -\frac{15}{2}$ et $z_1 z_2 = -4$. | ☐ | ☐ |
| **8.** Si $P$ est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, l'équation $P(x) = 0$ a au plus $n$ solutions. | ☐ | ☐ |
| **9.** Les racines du polynôme $x^2 + 1$ sont $i$ et $-i$. | ☐ | ☐ |
| **10.** Le polynôme $x^4 + x^2 + 1$ n'a pas de racine réelle. | ☐ | ☐ |

# Énoncé des exercices

## Équations polynomiales du second degré

**Exercice 5.1 :** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

**1.** $z^2 + 2z + 5 = 0$

**2.** $z^2 - 4z - 1 = 0$

**3.** $z^2 + 11 = 0$

**4.** $3z^2 - 8z + 9 = z^2 - 2z + 4$

**5.** $z + \frac{1}{z} = 1$

**Exercice 5.2 :** Résoudre, sans utiliser de discriminant, les équations suivantes.

**1.** $3z^2 + 5z + 2 = 0$

**2.** $-z^2 + (1 + \sqrt{3})z - \sqrt{3} = 0$

**Exercice 5.3* :** Soit $\theta$ un réel qui n'est pas un multiple de $\pi$. On considère l'équation :

$$z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0 \qquad (E)$$

**1.** Calculer le discriminant $\Delta$ de l'équation $(E)$.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

## Factorisation

**Exercice 5.4 :** Factoriser les trinômes du second degré suivants.

**1.** $4z^2 + 9z - 9$

**2.** $z^2 - 3z + 4$

**3.** $-z^2 + 10z - 25$

**Exercice 5.5* :** Factoriser les polynômes de degré 3 suivants.

**1.** $z^3 - 8$

**2.** $z^3 + z^2 - 17z + 15$

## Équations polynomiales de degré 3 ou plus

**Exercice 5.6 :** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

**1.** $z^4 - 7z^2 + 12 = 0$

**2.** $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$

**Exercice 5.7* :** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

**1.** $z^3 - 27 = 0$

**2.** $z^4 - 1 = 0.$

**Exercice 5.8 :** On considère l'équation $z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$. $(E)$

**1.** Vérifier que 2 est solution de $(E)$.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

**Exercice 5.9* :** Après avoir montré que $i$ et $-i$ sont solutions, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 - z^3 + 3z^2 - z + 2 = 0$$

**Exercice 5.10* : Une équation à coefficients complexes**

On considère l'équation suivante :

$$z^3 - (4+3i)z^2 + z(2+12i) - 6i = 0. \qquad (E)$$

**1.** Vérifier que $3i$ est solution de $(E)$.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

**Exercice 5.11** :** On considère l'équation $z^4 + z^2 + 1 = 0$. $(E)$

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

**2.** Écrire les solutions sous forme exponentielle.

**3.** En utilisant ce qui précède, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

## ■ Pour aller plus loin

**Exercice 5.12** : Racines carrées d'un nombre complexe**

On appelle racine carrée d'un nombre complexe $\omega$ tout nombre complexe $z$ tel que $z^2 = \omega$. Par exemple, $1+i$ est une racine carrée de $2i$ puisque :

$$(1+i)^2 = 1^2 + 2 \times i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

Attention, la notation $\sqrt{x}$ est exclusivement réservée aux réels positifs $x$. Notons que, si $z$ est une racine carrée d'un nombre complexe $\omega$ alors $-z$ aussi puisque $(-z)^2 = z^2$. Enfin, l'équation $z^2 = 0$ étant équivalente à $z = 0$, l'unique racine carrée de 0 est 0. Ce cas trivial étant traité, on s'intéresse dans cet exercice aux racines carrées d'un nombre complexe non nul.

**1.** Déterminer les racines carrées d'un réel strictement négatif $\omega$.

**2.** Soit $\omega$ un nombre complexe non nul. En mettant $\omega$ sous forme exponentielle, montrer que $\omega$ admet exactement deux racines carrées.

**3.** À l'aide de la question précédente, déterminer les racines carrées de $i$, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\sqrt{3} + i$.

Dans la suite de cet exercice, on souhaite déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées de $3 - 4i$. La méthode présentée sur cet exemple s'étend à la recherche des racines carrées d'un nombre complexe non nul quelconque $a + ib$.

Dans les questions qui suivent, on recherche donc $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = 3 - 4i$.

**4.** En écrivant $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$), montrer que $x^2 - y^2 = 3$ et $xy = -2$.

**5.** En calculant $|z|^2$, montrer que $x^2 + y^2 = 5$.

**6.** En déduire la valeur des racines carrées de $3 - 4i$.

**Exercice 5.13** : Équations du second degré à coefficients complexes**
On considère l'équation du second degré à coefficients complexes

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (E)$$

avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b, c \in \mathbb{C}$. Nous allons montrer que les formules données par le **théorème 5.3** se généralisent à une équation du second degré à coefficients complexes. Pour cela, nous allons faire appel aux racines carrées d'un nombre complexe (**exercice 5.12**). On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de $(E)$ et $\delta$ une racine carrée de $\Delta$ (dont l'existence a été établie à l'**exercice 5.12**, question**3**).

**1.** En mettant le trinôme $az^2 + bz + c$ sous forme canonique, montrer que :
- si $\Delta = 0$, $(E)$ admet une unique solution $z_0 = -\frac{b}{2a}$ ;
- si $\Delta \neq 0$, $(E)$ admet deux solutions distinctes

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

**2.** En remarquant que $(1+i)^2 = 2i$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + (3-i)z - 2 - 2i = 0$.

**3.** Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées complexes de $5 + 12i$.

**4.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z - 1 - 3i = 0$.

**Exercice 5.14** : Résolution d'une équation de degré 3 par la méthode de Cardan**
La résolution d'une équation de degré trois $ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c, d \in \mathbb{R}$ peut toujours se ramener à une équation plus simple de la forme $z^3 + pz + q$, où $p, q \in \mathbb{R}$. On peut alors résoudre cette dernière équation grâce à la méthode de Cardan. Nous allons présenter cette méthode pour résoudre l'équation du troisième degré suivante :

$$z^3 - 30z - 36 = 0 \quad (E)$$

Pour cela, on pose $z = u + v$.

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. Donner les solutions sous forme exponentielle.

**2.** Montrer que $z^3 - 3uvz - (u^3 + v^3) = 0$.

*On choisit en conséquence $u$ et $v$ tels que $uv = 10$ et $u^3 + v^3 = 36$ de sorte que $z^3 - 30z - 36 = 0$.*

**3.** Calculer $u^3v^3$ puis déterminer la valeur de $u^3$ et $v^3$. *On choisira $u^3$ tel que $\mathfrak{Im}(u^3) > 0$.*

**4.** Calculer $(3+i)^3$.

**5.** À l'aide des questions précédentes, déduire toutes les valeurs possibles du nombre complexe $u$.

**6.** Déterminer alors toutes les valeurs possibles pour du couple $(u, v)$.

**7.** En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E)$.

# ■■ Indications

### Ex. 5.5

*Penser au* **théorème 5.5** *pour la question* **1**. *Chercher une racine évidente pour la question* **2**.

### Ex. 5.6

*Appliquer la* **méthode 5.10**.

**Ex. 5.7**

*Utiliser le* **théorème 5.5** *pour la question* **1**.

**Ex. 5.11**

*Pour la question* **3**, *penser à factoriser* $z^2 - e^{i\alpha}$.

**Ex. 5.13**

*Pour la question* **3**, *utiliser la méthode de recherche des racines carrées sous forme algébrique présentée à l'***exercice 5.12**.

# Corrigé des vrai/faux

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | V | F | F | F | V | F | V | V | V |

**1.** Ce trinôme a un discriminant égal à $(-1)^2 - 4 \times 2 = 1 - 8 = -7$. Par conséquent, il admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}$$

qui ne sont pas des nombres réels, mais pas non plus imaginaires purs. Rappelons qu'un imaginaire pur est un nombre complexe de la forme $ib$, avec $b \in \mathbb{R}$.

**2.** D'après le **théorème 5.4**, le produit des deux racines de ce trinôme est égal à $\frac{c}{a}$. Si l'une est égale à 1, l'autre est nécessairement égale à leur produit $\frac{c}{a}$.

**3.** Cette écriture n'a aucun sens, la notation $\sqrt{x}$ est exclusivement réservée aux réels $x$ positifs. Cette équation, dont le discriminant vaut $-11$ a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}$$

**4.** Ne pas oublier le coefficient $a$ de $x^2$ dans la factorisation. La factorisation correcte est :

$$2x^2 - 2x - 4 = 2(x+1)(x-2)$$

**5.** Lorsque $z_0$ est l'unique racine de $az^2 + bz + c$, la factorisation est $az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$. Autrement dit, $az^2 + bz + c$ est factorisable par $(z - z_0)^2$, c'est pour cela que l'on dit que $z_0$ est racine double de ce trinôme.

**6.** 1 est racine de $3z^5 - 4z^4 + z^3 + 5z^2 - 3z - 2$ puisque :

$$3 \times 1^5 - 4 \times 1^4 + 1^3 + 5 \times 1^2 - 3 \times 1 - 2 = 3 - 4 + 1 + 5 - 3 - 2 = 0$$

Par conséquent, d'après le **théorème 5.6**, $3z^5 - 4z^4 + z^3 + 5z^2 - 3z - 2$ est factorisable par $z - 1$.

**7.** D'après le **théorème 5.4**, les racines $z_1$ et $z_2$ de $az^2 + bz + c$ (avec $a \neq 0$) vérifient $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$, c'est-à-dire ici : $z_1 + z_2 = -\frac{-15}{2} = \frac{15}{2}$et $z_1 z_2 = \frac{-8}{2} = -4$.

**8.** Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont les racines du polynôme $P$. Comme $P$ est de degré $n$, il admet au plus $n$ racines d'après le **théorème 5.7**.

**9.** On peut calculer les racines de $x^2 + 1$ grâce au **théorème 5.3** ou écrire :

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow (x - i)(x - i) = 0 \Leftrightarrow x - i = 0 \text{ ou } x - i = 0 \Leftrightarrow x = i \text{ ou } x = -i$$

**10.** Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geqslant 0$ et $x^4 \geqslant 0$, donc $x^4 + x^2 + 1 \geqslant 1$. Par conséquent, $x^4 + x^2 + 1$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, ce qui montre que le polynôme $x^4 + x^2 + 1$ n'a pas de racine réelle.

# Corrigé des exercices

## Exercice 5.1

Nous allons appliquer la **méthode 5.3** permettant de résoudre une équation polynomiale de degré 2.

**1.** Le discriminant de ce trinôme est égal à $2^2 - 4 \times 5 = 4 - 20 = -16$. Par conséquent, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

*Théorème 5.3 dans le cas $\Delta < 0$.*

$$z_1 = \frac{-2 + i\sqrt{-(-16)}}{2 \times 1} = \frac{-2 + i\sqrt{16}}{2} = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i$$
$$z_2 = \overline{z_1} = -1 - 2i$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\mathcal{S} = \{-1 + 2i,\ -1 - 2i\}$.

**2.** Ce trinôme a un discriminant égal à $(-4)^2 - 4 \times (-1) = 16 + 4 = 20$. D'après le **théorème 5.3**, ce trinôme admet deux racines réelles distinctes données par :

*Théorème 5.3 dans le cas $\Delta > 0$.*

$$z_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{4 + \sqrt{4 \times 5}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}$$
$$z_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{4 - \sqrt{4 \times 5}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\mathcal{S} = \{2 + \sqrt{5},\ 2 - \sqrt{5}\}$.

**3.** On pourrait calculer le discriminant de ce trinôme puis appliquer le **théorème 5.3** mais on peut plus simplement écrire :

*Plus généralement, les solutions de $x^2 + a = 0$ avec $a > 0$ sont $i\sqrt{a}$ et $-i\sqrt{a}$.*

$$\begin{aligned} z^2 + 11 = 0 &\Leftrightarrow z^2 = -11 \\ &\Leftrightarrow z^2 = \left(i\sqrt{11}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow z = i\sqrt{11} \text{ ou } z = -i\sqrt{11} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est $\mathcal{S} = \{i\sqrt{11},\ -i\sqrt{11}\}$.

**4.** On a :

$$3z^2 - 8z + 9 = z^2 - 2z + 4 \Leftrightarrow 2z^2 - 6z + 5 = 0$$

Le discriminant de $2z^2 - 6z + 5$ est égal à $(-6)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 36 - 40 = -4$. D'après le **théorème 5.3**, $2z^2 - 6z + 5$ admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-6) + i\sqrt{-(-4)}}{2 \times 2} = \frac{6 + i\sqrt{4}}{4} = \frac{6 + 2i}{4} = \frac{3}{2} + \frac{i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$$

et l'ensemble des solutions de l'équation est donc $\mathcal{S} = \{\frac{3}{2} + \frac{i}{2},\ \frac{3}{2} - \frac{i}{2}\}$.

**5.** Cette équation est définie si, et seulement si, $z \neq 0$. Pour $z \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} = 1 &\Leftrightarrow z + \frac{1}{z} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{z^2 + 1 - z}{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme $z^2 - z + 1$ est égal à $(-1)^2 - 4 \times 1 = -3$ et les deux racines de ce trinôme sont donc complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-1) + i\sqrt{-(-3)}}{2 \times 1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \overline{z_1} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \ \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$. ▲

## Exercice 5.2

Nous allons mettre en œuvre la **méthode 5.4** qui permet, en utilisant sur une racine évidente, de résoudre une équation du second degré sans avoir à calculer de discriminant.

**1.** On remarque que $-1$ est une solution évidente de $3z^2 + 5z + 2 = 0$. En effet,

$$3 \times (-1)^2 + 5 \times (-1) + 2 = 3 - 5 + 2 = 0$$

Par ailleurs, d'après le **théorème 5.4**, le produit des deux solutions est égal à $\frac{2}{3}$. En notant $z_2$ la deuxième solution, on a donc :

$z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

$$-1 \times z_2 = \frac{2}{3}$$

*Ici, $a = 3$, $c = 2$ et $z_1 = -1$.*

c'est-à-dire $z_2 = \frac{\frac{2}{3}}{-1} = -\frac{2}{3}$. L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \left\{1, \ -\frac{2}{3}\right\}$.

**2.** On applique de nouveau la **méthode 5.4** en remarquant cette fois que 1 est solution :

$$-1^2 + (1 + \sqrt{3}) \times 1 - \sqrt{3} = -1 + 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$$

Par conséquent,

**Théorème 5.4**.

$$\underbrace{z_1}_{1} z_2 = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

et la deuxième solution est donc $\sqrt{3}$. L'équation admet deux solutions réelles distinctes et l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{1, \ \sqrt{3}\}$. ▲

## Exercice 5.3

**1.** On a :

$$\Delta = (-2\cos\theta)^2 - 4 = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta$$

la dernière égalité découlant de la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

**2.** On a $\Delta = -(2\sin\theta)^2$ donc $\Delta \leqslant 0$. Mais, comme $\theta$ n'est pas un multiple de $\pi$, $\sin\theta \neq 0$, d'où $\Delta < 0$. L'équation $(E)$ admet deux solutions complexes conjuguées $z_1$ et $z_2 = \overline{z_1}$ avec :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-(-2\cos\theta) + i\sqrt{-(-4\sin^2\theta)}}{2} = \frac{2\cos\theta + i\sqrt{4\sin^2\theta}}{2} \\ &= \frac{2\cos\theta + 2i|\sin\theta|}{2} = \cos\theta + i|\sin\theta| \end{aligned}$$

Corrigé

Suivant le signe de $\sin\theta$, une des deux racines est donc $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et la deuxième son conjugué $e^{-i\theta}$. Les deux solutions (complexes conjuguées) de $(E)$ sont donc $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ :

$$\mathcal{S} = \{e^{i\theta},\ e^{-i\theta}\}$$

L'ensemble des solutions de $(E)$ est donc $\mathcal{S} = \{e^{i\theta},\ e^{-i\theta}\}$. ▲

**Exercice 5.4**

Appliquons la **méthode 5.5** pour factoriser ces trinômes du second degré.

**1.** Le discriminant de $4z^2 + 9z - 9$ est $9^2 - 4 \times 4 \times (-9) = 81 + 144 = 225$. Ce trinôme admet donc deux racines réelles distinctes :

✎ **Théorème 5.3.**

$$z_1 = \frac{-9+\sqrt{225}}{2\times 4} = \frac{-9+15}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-9-15}{8} = \frac{-24}{8} = -3$$

On obtient donc la factorisation :

✎ *Ou encore* $4z^2 + 9z - 9 = (4z-3)(z+3)$

$$4z^2 + 9z - 9 = 4(z - \frac{3}{4})(z+3)$$

**2.** Ce trinôme a un discriminant égal à $(-3)^2 - 4 \times 4 = 9 - 16 = -7$. Par conséquent, il admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-3) + i\sqrt{-(-7)}}{2} = \frac{3+i\sqrt{7}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \overline{z_1} = \frac{3-i\sqrt{7}}{2}$$

✎ **Théorème 5.3.**

Ainsi,

$$z^2 - 3z + 4 = \left(z - \frac{3+i\sqrt{7}}{2}\right) = \left(z - \frac{3-i\sqrt{7}}{2}\right)$$

**3.** On pourrait de nouveau calculer le discriminant du trinôme et appliquer le **théorème 5.3** mais on peut s'en passer en reconnaissant une identité remarquable :

✎ *5 est l'unique racine (double) du trinôme.*

$$-z^2 + 10z - 25 = -\left(z^2 - 10z + 25\right) = -\left(z^2 - 2\times 5\times z + 5^2\right) = -(z-5)^2$$

▲

**Exercice 5.5**

**1.** On pourrait remarquer que 2 est racine de $z^3 - 8$ puis appliquer ensuite la **méthode 5.6**. Mais, comme $z^3 - 8 = z^3 - 2^3$, il est plus rapide d'utiliser le **théorème 5.5** :

✎ **Théorème 5.5** *avec* $a = 2$ *et* $n = 3$.

$$z^3 - 8 = z^3 - 2^3 = (z-2)(z^2 + 2z + 2^2) = (z-2)(z^2 + 2z + 4)$$

Le discriminant du trinôme $z^2 + 2z + 4$ est égal à $2^2 - 4 \times 4 = 4 - 16 = -12$. Par conséquent, ce trinôme admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2 + i\sqrt{-(-12)}}{2} = \frac{-2 + i\sqrt{4\times 3}}{2} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$$
$$z_2 = \overline{z_1} = -1 - i\sqrt{3}$$

Par conséquent, la factorisation est :

$$z^3 - 8 = (z-2)(z-z_1)(z-z_2) = (z-2)(z+1-i\sqrt{3})(z+1+i\sqrt{3})$$

**2.** Nous allons appliquer la **méthode 5.7** après avoir remarqué que 1 est racine évidente de ce polynôme :

$$1^3 + 1^2 - 17 \times 1 + 15 = 1 + 1 - 17 + 15 = 17 - 17 = 0$$

On peut alors factoriser $z^3 + z^2 - 17z + 15$ par $z - 1$ et écrire :

✎ **Théorème 5.6**.

$$z^3 + z^2 - 17z + 15 = (z-1)(az^2 + bz + c)$$

où $a$, $b$, $c$ sont des réels avec $a \neq 0$. En développant, l'égalité précédente s'écrit :

$$z^3 + z^2 - 17z + 15 = az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$$

L'identification des coefficients de ces deux polynômes donne alors :

✎ **Corollaire 5.2**.

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = -17 \\ -c = 15 \end{cases}$$

On obtient $a = 1$, $b = 2$ et $c = -15$, d'où :

$$z^3 + z^2 - 17z + 15 = (z-1)(z^2 + 2z - 15)$$

Le discriminant du trinôme $z^2 + 2z - 15$ est égal à $2^2 - 4 \times (-15) = 4 + 60 = 64$. Par conséquent, ce trinôme a deux racines réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2} = \frac{-2+8}{2} = 3 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2} = \frac{-2-8}{2} = -5$$

et on peut donc écrire $z^2 + 2z - 15 = (z-3)(z+5)$. Ainsi,

$$z^3 + z^2 - 17z + 15 = (z-1)(z-3)(z+5)$$

▲

## Exercice 5.6

Nous allons appliquer la **méthode 5.10** qui permet de résoudre ces équations de degré 4 sans puissances impaires de $z$ en posant $Z = z^2$.

✎ *Équations de la forme $az^4 + bz^2 + c$.*

**1.** En posant $Z = z^2$, l'équation $z^4 - 7z^2 + 12 = 0$ s'écrit $Z^2 - 7Z + 12 = 0$. C'est une équation du second degré en $Z$, de discriminant égal à :

$$(-7)^2 - 4 \times 12 = 49 - 48 = 1$$

Par conséquent, l'équation $Z^2 - 7Z + 12 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes :

$$Z_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{1}}{2} = \frac{7+1}{2} = 4 \qquad \text{et} \qquad Z_2 = \frac{-(-7) - \sqrt{1}}{2} = \frac{7-1}{2} = 3$$

*En revenant à $z$, on a $z^2 = Z_1$ ou $z^2 = Z_2$.*

Étant donné que $z^2 = Z$, on a alors :

$$z^2 = 4 \quad \text{ou} \quad z^2 = 3$$

*Les solutions de $z^2 = a$, avec $a > 0$ sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.*

Or,

$$z^2 = 4 \Leftrightarrow z = 2 \text{ ou } z = -2$$
$$z^2 = 3 \Leftrightarrow z = \sqrt{3} \text{ ou } z = -\sqrt{3}$$

Par conséquent, l'équation $z^4 - 7z^2 + 12 = 0$ admet quatre solutions : $2, -2, \sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. L'ensemble des solutions de cette équation est donc :

$$\mathcal{S} = \{2, -2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$$

*$Z_1 Z_2 = \frac{c}{a} = -4$*

**2.** On pose de nouveau $Z = z^2$, ce qui permet de se ramener à l'équation du second degré $Z^2 + 3Z - 4 = 0$. Comme 1 est racine évidente de $Z^2 + 3Z - 4$, l'autre racine est $-4$. Sachant que $z^2 = Z$, on a donc :

$$z^2 = 1 \quad \text{ou} \quad z^2 = -4$$

Or, $z^2 = 1$ si, et seulement si, $z = 1$ ou $z = -1$. Par ailleurs, on peut résoudre l'équation du second degré $z^2 + 4 = 0$ sans calculer son discriminant puisque :

*Les solutions de $z^2 = a$, avec $a < 0$ sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.*

$$\begin{aligned} z^2 = -4 &\Leftrightarrow z^2 = (2i)^2 \\ &\Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = -2i \end{aligned}$$

Finalement, les quatre solutions de $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$ sont $1$, $-1$, $2i$ et $-2i$ :

$$\mathcal{S} = \{1, -1, 2i, -2i\}$$

▲

## Exercice 5.7

**1.** On peut remarquer que 3 est solution de $z^3 - 27 = 0$ puis appliquer la **méthode 5.6**. Mais, comme $z^3 - 27 = z^3 - 3^3$, il est plus efficace d'utiliser la factorisation donnée par le **théorème 5.5** :

**Théorème 5.5** *avec $a = 3$ et $n = 3$.*

$$z^3 - 27 = z^3 - 3^3 = (z - 3)(z^2 + 3z + 3^2) = (z - 3)(z^2 + 3z + 9)$$

On détermine ensuite les racines du trinôme $z^2 + 3z + 9$. Son discriminant est égal à $3^2 - 4 \times 9 = 9 - 36 = -27$. Par conséquent, ce trinôme admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{-(-27)}}{2} = \frac{-3 + i\sqrt{9 \times 3}}{2} = \frac{-3 + 3i\sqrt{3}}{2}$$
$$z_2 = \overline{z_1} = \frac{-3 - 3i\sqrt{3}}{2}$$

Par conséquent, les racines du polynôme $z^3-27$ sont 3, $\dfrac{-3+3i\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-3-3i\sqrt{3}}{2}$, ce qui donne l'ensemble des solutions de l'équation $z^3-27=0$ :

$$\mathcal{S}=\left\{3, \frac{-3+3i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-3i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

**2.** C'est aussi une équation de la forme $z^n-a^n=0$. On peut obtenir factoriser rapidement $z^4-1$ à l'aide de l'identité remarquable $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ :

$$z^4-1=(z^2-1)(z^2+1)=(z-1)(z+1)(z^2+1)$$

Par ailleurs, les solutions de $z^2+1=0$ sont $i$ et $-i$, on a donc :

✎ $z^2+1=(z-i)(z+i)$

$$z^4-1=(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$$

Cela permet d'en déduire l'ensemble des solutions de l'équation $z^4-1=0$ :

✎ *Les solutions sont les 4 racines de $z^4-1$.*

$$\mathcal{S}=\{1,-1,i,-i\}$$

▲

## Exercice 5.8

**1.** On a :

$$2^3+4\times 2^2+2\times 2-28=8+4\times 4+4-28=8+16+4-28=0$$

ce qui montre que 2 est bien solution de l'équation $(E)$.

**2.** D'après le **théorème 5.6**, on peut alors factoriser $z^3+4z^2+2z-28=0$ par $z-2$ :

✎ **Méthode 5.6.**

$$z^3+4z^2+2z-28=(z-2)(az^2+bz+c)$$

avec $a\in\mathbb{R}^*$, $b,c\in\mathbb{R}$. Autrement dit,

$$z^3+4z^2+2z-28=az^3+(b-2a)z^2+(c-2b)z-2c$$

L'identification des coefficients des deux polynômes s'écrit :

✎ **Corollaire 5.2.**

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=4 \\ c-2b=2 \\ -2c=-28 \end{cases}$$

On obtient $a=1$, $b=6$ et $c=14$ soit :

$$z^3+4z^2+2z-28=(z-2)(z^2+6z+14)$$

Le discriminant de $z^2+6z+14$ est égal à $6^2-4\times 14=36-56=-20$. Par conséquent, le trinôme $z^2+6z-14$ a deux racines complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{-6+i\sqrt{-(-20)}}{2}=\frac{-6+i\sqrt{4\times 5}}{2}=\frac{-6+2i\sqrt{5}}{2}=-3+i\sqrt{5}$$
$$z_2=\overline{z_1}=-3-i\sqrt{5}$$

Corrigé

Ainsi, les racines de $z^3+4z^2+2z-28$ sont 2, $z_1$ et $\overline{z_1}$. L'ensemble des solutions de $(E)$ est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{2, -\frac{3}{2}+i\sqrt{5}, -\frac{3}{2}-i\sqrt{5}\right\}$$

▲

## Exercice 5.9

✎ *C'est un résultat général : si $z$ est racine d'un polynôme (à coefficients réels) alors $\overline{z}$ aussi.*

Comme $i^2=-1$, $i^3=i^2\times i=-1\times i=-i$ et $i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$, on a :

$$i^4-i^3+3\times i^2-i+2=1+i-3-i+2=3-3+i-i=0$$
$$(-i)^4-(-i)^3+3\times(-i)^2-(-i)+2=1-i-3+i+2=3-3-i+i=0$$

ce qui montre que $i$ et $-i$ sont racines du polynôme $z^4-z^3+3z^2-z+2$. Par conséquent, $z^4-z^3+3z^2-z+2$ est factorisable par $z-i$ et $z-(-i)=z+i$. On peut donc écrire :

$$z^4-z^3+3z^2-z+2=(z-i)(z+i)(az^2+bz+c)$$

✎ $(z-i)(z+i)=z^2+1$

avec $a\in\mathbb{R}^*$, $b,c\in\mathbb{R}$. L'égalité précédente s'écrit encore :

$$z^4-z^3+3z^2-z+2=(z^2+1)(az^2+bz+c)=az^4+bz^3+(a+c)z^2+bz+c$$

En identifiant les coefficients, on obtient $a=1$, $b=-1$ et $c=2$, d'où :

$$z^4-z^3+3z^2-z+2=(z-i)(z+i)(z^2-z+2)$$

Le discriminant de $z^2-z+2$ est égal à $(-1)^2-4\times 2=1-8=-7$. Ce trinôme admet donc deux racines complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{-(-1)+i\sqrt{-(-7)}}{2}=\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2=\overline{z_1}=\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$$

✎ *Les racines d'un polynôme $P$ sont les solutions de l'équation $P(z)=0$*

Les racines de $z^4-z^3+3z^2-z+2$ sont donc $i$, $-i$, $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$ ; on en déduit l'ensemble des solutions de l'équation $z^4-z^3+3z^2-z+2=0$ :

$$\mathcal{S} = \left\{i, -i, \frac{1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right\}$$

▲

## Exercice 5.10

✎ $(3i)^2=3^2i^2=-9$
$(3i)^3=332i^3=-27i$

**1.** On a :

$$\begin{aligned}(3i)^3-(4+3i)(3i)^2+3i(2+12i)-6i&=-27i+9(4+3i)+6i-36-6i\\&=36-36+27i-27i+6i-6i=0\end{aligned}$$

ce qui montre que $3i$ est solution de $(E)$.

**2.** On peut alors factoriser $z^3-(4+3i)z^2+z(2+12i)-6i$ par $z-3i$ d'après **théorème 5.6**. Il existe donc des nombres $a$, $b$ et $c$ (avec $a\neq 0$) *a priori* complexes tels que :

$$z^3-(4+3i)z^2+z(2+12i)-6i=(z-3i)(az^2+bz+c)$$

c'est-à-dire :

$$z^3 - (4+3i)z^2 + z(2+12i) - 6i = az^3 + (b-3ia)z^2 + (c-3ib)z - 3ic$$

L'identification des coefficients donne :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3ia = -4 - 3i \\ c - 3ib = 2 + 12i \\ -3ic = -6i \end{cases}$$

On obtient $a = 1$, $b = -4$ et $c = 2$ ; on a donc :

$$z^3 - (4+3i)z^2 + z(2+12i) - 6i = (z-3i)(z^2 - 4z + 2)$$

Le trinôme $z^2 - 4z + 2$ a un discriminant égal à $(-4)^2 - 4 \times 2 = 16 - 8 = 8$. Par conséquent, $z^2 - 4z + 2$ a deux racines réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{8}}{2} = \frac{4+\sqrt{4\times 2}}{2} = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2}$$
$$z_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{8}}{2} = \frac{4-\sqrt{4\times 2}}{2} = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2}$$

On vient donc de montrer que les solutions de $(E)$ sont $3i$, $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$ :

$$\mathcal{S} = \left\{3i, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\right\}$$

▲

## Exercice 5.11

**1.** Le discriminant de $z^2 + z + 1$ est $1^2 - 4 \times 1 = -3$, ce trinôme admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

L'ensemble des solutions de $z^2 + z + 1 = 0$ est donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

**2.** On a :

$$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$
$$z_2 = \overline{z_1} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

**3.** Nous allons nous ramener à une équation de degré 2 en posant $Z = z^2$ ; $(E)$ s'écrit alors $Z^2 + Z + 1 = 0$, équation dont les solutions sont $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ d'après les questions précédentes. Autrement dit,

*Nous ne pouvons pas, dans le cadre du programme, appliquer la* **méthode 5.10** *car le discriminant du trinôme en $Z$ est strictement négatif.*

$$Z = e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad Z = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Par conséquent,

*On revient à $z$ sachant que $z^2 = Z$.*

$$z \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow z^2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad z^2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2$ *d'après la formule de Moivre.*

Or,

$$\begin{aligned} z^2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} &\Leftrightarrow z^2 - e^{\frac{2i\pi}{3}} = 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 - \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(z + e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow z - e^{\frac{i\pi}{3}} = 0 \text{ ou } z + e^{\frac{i\pi}{3}} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = e^{\frac{i\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad z = -e^{\frac{i\pi}{3}} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} z^2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} &\Leftrightarrow z^2 - \left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)\left(z + e^{-\frac{i\pi}{3}}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = e^{-\frac{i\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad z = -e^{-\frac{i\pi}{3}} \end{aligned}$$

Finalement, les quatre valeurs de $z$ obtenues sont $e^{\frac{i\pi}{3}}$, $-e^{\frac{i\pi}{3}}$, $e^{-\frac{i\pi}{3}}$ et $-e^{-\frac{i\pi}{3}}$. L'ensemble des solutions de $(E)$ est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{e^{\frac{i\pi}{3}}, -e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{-\frac{i\pi}{3}}, -e^{-\frac{i\pi}{3}}\right\}$$

▲

## Exercice 5.12

**1.** Soit $\omega$ un réel strictement positif et $z \in \mathbb{C}$. Comme $\omega > 0$, on a :

$$z^2 = \omega \Leftrightarrow z = \sqrt{\omega} \quad \text{ou} \quad z = -\sqrt{\omega}$$

Les racines carrées de $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ sont $\sqrt{\omega}$ et $-\sqrt{\omega}$, ce qui est assez logique...

*C'est une équation déjà traitée dans le chapitre : pour $a > 0$, les racines de $z^2 + a$ sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.*

**2.** Soit $\omega$ un réel strictement négatif et $z \in \mathbb{C}$. On a $-\omega > 0$, d'où :

$$\begin{aligned} z^2 = \omega &\Leftrightarrow z^2 = -(\sqrt{-\omega})^2 = (i\sqrt{-\omega})^2 \\ &\Leftrightarrow z^2 - (i\sqrt{-\omega})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z - i\sqrt{-\omega}\right)\left(z + i\sqrt{-\omega}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -i\sqrt{-\omega} \quad \text{ou} \quad z = -i\sqrt{-\omega} \end{aligned}$$

Les racines carrées de $\omega$ sont les nombres imaginaires purs $i\sqrt{-\omega}$ et $-i\sqrt{-\omega}$.

*Cela montre que $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ est une racine carrée de $\omega$.*

**3.** Écrivons $\omega$ sous forme exponentielle $\omega = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left(\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = (\sqrt{r})^2\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = re^{i\frac{\theta}{2}\times 2} = re^{i\theta} = \omega$$

De même,

$$\left(-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = (-\sqrt{r})^2\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = (-1)^2 re^{i\frac{\theta}{2}\times 2} = re^{i\theta} = \omega$$

$r \neq 0$

Par conséquent, $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ sont deux racines carrées (distinctes) de $\omega$. Or, les racines carrées de $\omega$ sont les racines du polynôme $z^2 - \omega$, polynôme de degré 2 qui a au plus deux racines d'après le **théorème 5.7**. Nous avons donc montré que $\omega$ admet deux racines carrées (distinctes et opposées) et qu'il n'en existe pas d'autre.

**4.** Nous venons de montrer que les deux racines carrées de $re^{i\theta}$ sont $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$. Nous allons appliquer ce résultat aux trois nombres donnés, après les avoir mis sous forme exponentielle.

▶ Comme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, les racines carrées complexes de $i$ sont $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{4}}$.

▶ $e^{i\frac{\pi}{3}}$ est déjà sous forme exponentielle, ses racines carrées sont $e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{6}}$.

▶ $\sqrt{3}+i$ s'écrit sous forme exponentielle $2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Par conséquent, les racines carrées de $\sqrt{3}+i$ sont $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

*Faire le calcul !*

**5.** Sachant que $z^2 = 3-4i$, on a $|z^2| = |3-4i|$ ou encore $|z|^2 = |3-4i|$, soit :

$|z^n| = |z|^n$

$$x^2+y^2 = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

**6.** D'après les questions précédentes, on a :

*En sommant les première et troisième lignes, on obtient la valeur de $x^2$.*

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ xy=-2 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ xy=-2 \\ 2x^2=8 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2-3 = 4-3 = 1 \\ xy=-2 \\ x^2=4 \end{cases}$$

Les solutions de $x^2 = 4$ sont 2 et $-2$ ; les solutions de $y^2 = 1$ sont 1 et $-1$. Par ailleurs, comme $xy = -2$, $x$ et $y$ sont de signe opposé. On obtient donc :

*Les deux racines carrées d'un nombre complexe non nul sont opposés d'après la question **3**.*

$$(x = 2 \text{ et } y = -1) \text{ ou } (x = -2 \text{ et } y = 1)$$

soit $z = 2-i$ ou $z = -2+i$. Ainsi, les racines carrées de $3-4i$ sont les deux nombres complexes (opposés) $2-i$ et $-2+i$. ▲

## Exercice 5.13

**1.** On écrit :

$$\begin{aligned} az^2+bz+c &= a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right) = a\left[z^2+2\times\frac{b}{2a}z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Comme $a \neq 0$, on a donc :

$$az^2+bz+c = 0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

On distingue alors deux cas.

Corrigé

▶ Si $\Delta = 0$, on a :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'unique solution de $az^2 + b + c = 0$ est donc $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

✎ **Exercice 5.12**.

▶ Si $\Delta \neq 0$, $\Delta$ admet une racine carrée $\delta$. Par définition, on a $\delta^2 = \Delta$, d'où :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} = \frac{-b-\delta}{2a} \end{aligned}$$

Dans ce cas, $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$.

**2.** C'est une application de la question précédente. On commence par calculer le discriminant $\Delta$ de cette équation :

$$\Delta = (3-i)^2 - 4i(-2-2i) = 3^2 - 2 \times 3i + i^2 + 8i + 8i^2 = 9 - 6i + 8i - 9 = 2i$$

D'après la question **1**, l'équation $iz^2 + (i+3)z + 1 - 2i = 0$ admet donc deux solutions données par $z_1 = \frac{-(3-i)+\delta}{2i}$ et $z_2 = \frac{-(3-i)-\delta}{2i}$, où $\delta$ est une racine carrée de $\Delta$. Or, en suivant l'indication de l'énoncé, $1 + i$ est bien une racine carrée de $\Delta$ puisque :

$$(1+i)^2 = 1^2 + 2 \times i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i = \Delta$$

Par conséquent, les deux solutions de l'équation sont

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-(3-i)+1+i}{2i} = \frac{-3+i+1+i}{2i} = \frac{-2+2i}{2i} = \frac{-1+i}{i} = 1+i \\ z_2 &= \frac{-(3-i)-(1+i)}{2i} = \frac{-3+i-1-i}{2i} = \frac{-4}{2i} = 2i \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $iz^2 + (i+3)z + 1 - 2i = 0$ est $\mathcal{S} = \{2i, 1+i\}$.

✎ *Cette question a déjà traitée dans l'*__exercice 5.12__.

**3.** On cherche $z$ sous la forme $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) tel que $z^2 = 5 + 12i$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on a :

$$z^2 = 5 + 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases}$$

✎ $|z^2| = |z|^2$

Par ailleurs, comme $|z|^2 = |5 + 12i| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$, on obtient :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \\ 2x^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 - 5 = 9 - 5 = 4 \\ xy = 6 \\ x^2 = 9 \end{cases}$$

Finalement, $x = 3$ ou $x = -3$, $y = 2$ ou $y = -2$ et $x$ et $y$ sont de même signe puisque $xy = 6$. Ainsi,

$$(x = 3 \text{ et } y = 2) \text{ ou } (x = -3 \text{ et } y = -2)$$

Les racines carrées de $5 + 12i$ sont donc $3 + 2i$ et $-3 - 2i$

**4.** Nous allons appliquer la question **1** en commençant par calculer le discriminant $\Delta$ de cette équation :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1 - 3i) = 1 + 4 + 12i = 5 + 12i$$

D'après la question **1**, l'équation admet deux solutions données par $z_1 = \frac{-1+\delta}{2}$ et $z_2 = \frac{-1-\delta}{2}$, où $\delta$ est une racine carrée de $5 + 12i$. Or, nous avons montré à la question **3** que $3 + 2i$ est une racine carrée de $5 + 12i$. Les deux solutions de l'équation sont donc :

$$z_1 = \frac{-1 + 3 + 2i}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i$$

L'ensemble des solutions de $z^2 + z - 1 - 3i = 0$ est $\mathcal{S} = \{1 + i, -2 - i\}$. ▲

## Exercice 5.14

**1.** D'après le **théorème 5.5**, on a :

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

Or, nous avons montré dans l'**exercice 5.11** que les racines de $z^2 + z + 1$ sont $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. L'ensemble des solutions de $z^3 - 1$ est donc $\mathcal{S} = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right\}$.

**2.** On a :

$$\begin{aligned} z^3 - 3uvz - (u^3 + v^3) &= (u + v)^3 - 3uv(u + v) - u^3 - v^3 \\ &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3u^2v - 3uv^2 - u^3 - v^3 = 0 \end{aligned}$$

**3.** Comme $uv = 10$, on a $u^3v^3 = (uv)^3 = 10^3 = 1\,000$. Or $u^3 + v^3 = 36$, d'où :

$$u^3(36 - u^3) = 1\,000$$

soit $(u^3)^2 - 36u^3 + 1000 = 0$, ce qui montre que $u^3$ est solution de l'équation $x^2 - 36x + 1\,000 = 0$. Le discriminant de ce trinôme est :

$$36^2 - 4 \times 1\,000 = 1\,296 - 4000 = -2\,704 = -52^2$$

Par conséquent, les deux racines de $x^2 - 36x + 1\,000 = 0$ sont $\frac{36+52i}{2} = 18 + 26i$ et $\overline{18 + 26i} = 18 - 26i$. Avec le choix $\mathfrak{Im}\,(u^3) > 0$ de l'énoncé, on obtient :

$$u^3 = 18 + 26i \quad \text{et} \quad v^3 = 36 - u^3 = 36 - (18 + 26i) = 18 - 26i.$$

**4.** On a :

$$(3 + i)^3 = 3^3 + 3 \times 3^2 i + 3 \times 3i^2 + i^3 = 27 + 27i - 9 - i = 18 + 26i$$

✎ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Corrigé

$u^3 = 18 + 26i$ *d'après la question* **3**.

**5.** On vient de montrer que $(3+i)^3 = 18 + 26i = u^3$, d'où :

$$\left(\frac{u}{3+i}\right)^3 = \frac{u^3}{(3+i)^3} = 1$$

Or, nous avons établi à la question **1** que les solutions de l'équation $z^3 = 1$ sont 1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. Par conséquent,

$$\frac{u}{3+i} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{u}{3+i} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad \frac{u}{3+i} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

On en déduit les valeurs possibles de $u$ :

$$u = 3+i \quad \text{ou} \quad u = (3+i)e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad u = (3+i)e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

**6.** La relation $uv = 10$ permet de déterminer $v$ à partir des valeurs possibles de $u$ obtenues à la question précédente :

$$u = 3+i \Leftrightarrow v = \frac{10}{u} = \frac{10}{3+i} = \frac{10(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{10(3-i)}{10} = 3-i$$

$$u = (3+i)e^{\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow v = \frac{10}{u} = \frac{10}{(3+i)e^{\frac{2i\pi}{3}}} = \frac{10(3-i)e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{(3+i)(3-i)} = (3-i)e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

$$u = (3+i)e^{-\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow v = \frac{10}{u} = \frac{10}{(3+i)e^{-\frac{2i\pi}{3}}} = \frac{10(3-i)e^{\frac{2i\pi}{3}}}{(3+i)(3-i)} = (3-i)e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Par conséquent, les trois valeurs possibles pour le couple $(u, v)$ sont :

$$(3+i, 3-i)\ ; \quad \left((3+i)e^{\frac{2i\pi}{3}}, (3-i)e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)\ ; \quad \left((3+i)e^{-\frac{2i\pi}{3}}, (3-i)e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

*D'après les formules d'Euler :*

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$
$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

**7.** Comme $x = u + v$, les trois solutions de l'équation $(E)$ sont :

$$\begin{aligned}
z_1 &= (3+i) + (3-i) = 6 \\
z_2 &= (3+i)e^{\frac{2i\pi}{3}} + (3-i)e^{-\frac{2i\pi}{3}} = 3(e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{-\frac{2i\pi}{3}}) + i(e^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{-\frac{2i\pi}{3}}) \\
&= 3 \times 2\cos\frac{2\pi}{3} + i \times 2i\sin\frac{2\pi}{3} \\
&= 6 \times \frac{-1}{2} + 2i^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -3 - \sqrt{3} \\
z_3 &= (3+i)e^{-\frac{2i\pi}{3}} + (3-i)e^{\frac{2i\pi}{3}} = 3(e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{-\frac{2i\pi}{3}}) + i(e^{-\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{2i\pi}{3}}) \\
&= 3 \times 2\cos\frac{2\pi}{3} + i \times (-2i)\sin\frac{2\pi}{3} \\
&= 6 \times \frac{-1}{2} - 2i^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -3 + \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $(E)$ est $\mathcal{S} = \left\{6\,, -3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}\right\}$. ▲

# Arithmétique

# Chapitre 6
# Arithmétique

L'arithmétique, c'est-à-dire la partie des mathématiques s'intéressant aux propriétés des nombres entiers positifs, a souvent laissé place à l'algèbre à partir du XVIe siècle. Cependant, sous le nom de théorie des nombres, elle a repris un bel essor lorsque des méthodes analytiques ont permis de démontrer de nouvelles propriétés. De nos jours, on utilise des propriétés arithmétiques sur les nombres premiers pour envoyer des messages cryptés.

### Un mathématicien

Les équations diophantiennes doivent leur nom au mathématicien grec **Diophante** qui vivait à Alexandrie au IIe siècle de notre ère. Il cherchait les solutions en nombres entiers d'équations à deux ou plusieurs inconnues. Son ouvrage *Arithmetica* a été sorti de l'oubli quinze siècles plus tard et traduit en latin par le sieur Claude-Gaspard **Bachet de Méziriac**.

**LE SAVIEZ-VOUS ?**

Dans une lettre envoyée à **Euler** en 1742, Christian **Goldbach** affirme que tout entier pair supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers. Par exemple $12 = 5 + 7$, $16 = 5 + 11$, etc. Depuis, personne n'a su le démontrer mais aucun contre-exemple n'a été trouvé.

COMPÉTENCES

## Les incontournables

- Justifier la divisibilité d'un entier relatif par un autre
  - avec la division euclidienne
  - avec les congruences
- Calculer des PGCD
  - avec l'algorithme d'Euclide
  - avec les décompositions en produits de facteurs premiers
- Résoudre des équations diophantiennes
- Utiliser les nombres premiers
  - décomposer un nombre en produit de facteurs premiers
  - trouver les diviseurs d'un entier relatif
  - trouver le PGCD de deux entiers naturels non nuls
- Démonstrations
  - des théorèmes de Bézout et Gauss
  - du théorème d'Euclide sur les nombres premiers
  - du petit théorème de Fermat

## Et plus si affinités

- Crible d'Ératosthène
- Critère d'Eisenstein
- Résoudre l'équation $x^2 + y^2 = z^2$
- Découvrir les nombres de Mersenne
- Découvrir la base du système de cryptographie RSA

# Résumé de cours

## Multiples et diviseurs d'un entier relatif

**Définition :** *Soit $a$ et $b$ des entiers relatifs. On dit que $b$* ***est un multiple de*** *$a$, ou encore que $a$* ***divise*** *$b$, et on note $a \mid b$, s'il existe un entier relatif $k$ tel que $b = ak$. On dit aussi que $b$* ***est divisible par*** *$a$.*

**Proposition 6.1.—** Soit $a$, $b$, $c$, $d$, $x$ et $y$ des entiers relatifs.

- $a \mid b$ et $a \mid c) \Longrightarrow (a \mid bx + cy)$
- $(a \mid b) \Longrightarrow (ac \mid bc)$
- $(a \mid b$ et $c \mid d) \Longrightarrow (ac \mid bd)$
- $(a \mid b$ et $b \neq 0) \Longrightarrow (|a| \leqslant |b|)$
- $(a \mid b$ et $b \mid c) \Longrightarrow (a \mid c)$, on dit que la relation de divisibilité est **transitive**.

## Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

**Théorème 6.2.— Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ —.** Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^\star$.

Il existe un unique couple d'entiers relatifs $(q, r)$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.

**Remarque :** si $a$ et $b$ sont des entiers naturels, il en est de même de $q$ ($r$ étant de toute façon un entier naturel).

**Vocabulaire :** *Dans le théorème précédent l'égalité avec la condition sur $r$ constitue la* ***division euclidienne*** *de $a$ par $b$, $a$ est le* ***dividende***, *$b$ le* ***diviseur***, *$q$ le* ***quotient*** *et $r$ le* ***reste***.

## Congruences

**Définition :** *Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs et soit $m$ un entier naturel non nul. On dit que $a$ est* ***congru*** *à $b$* ***modulo*** *$m$, et on écrit $a \equiv b\ [m]$ s'il existe un entier relatif $k$ tel que $a = b + mk$. Le nombre $m$ est appelé* ***module*** *de la* ***congruence***.

**Proposition 6.3.—** Soit $a$, $b$, $c$, $d$ quatre entiers relatifs et $m$ un entier naturel non nul. Supposons que $a \equiv b\ [m]$ et $c \equiv d\ [m]$. Alors :

- $a + c \equiv b + d\ [m]$
- $ac \equiv bd\ [m]$
- $\forall \lambda \in \mathbb{Z},\ \lambda a \equiv \lambda b\ [m]$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a^n \equiv b^n\ [m]$
- $(a \equiv b\ [m]$ et $b \equiv c\ [m]) \Longrightarrow (a \equiv c\ [m])$, on dit que la relation de congruence est **transitive**.

## PGCD de deux entiers relatifs

**Définition :** *Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs tels que $(a, b) \neq (0\ ;\ 0)$, on appelle* ***plus grand diviseur commun*** *de $a$ et $b$, le plus grand des diviseurs communs de $a$ et $b$ et on le note $PGCD(a, b)$.*

**Remarque :** soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs, $PGCD(a, b) \geqslant 1$, donc le $PGCD$ est un entier naturel non nul. D'autre part $PGCD(a, b) = PGCD(|a|, |b|)$.

**Lemme 6.4.— Lemme d'Euclide —.** Soit $a$, $b$ et $r$ trois entiers relatifs avec $b > 0$. Si $r$ est le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$, alors

$$\boxed{PGCD(a,b) = PGCD(b,r)}$$

L'algorithme d'Euclide (voir la **méthode 6.8**) permet de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 6.5.—** Soit $a$, $b$ et $\Delta$ trois entiers relatifs avec $(a,b) \neq (0,0)$.

- $(\forall d \in \mathbb{Z}),\ \big((d \mid a \text{ et } d \mid b) \Leftrightarrow (d \mid PGCD(a\ ;\ b))\big)$ ;
- $\forall k \in \mathbb{Z}^\star,\ PGCD(ka,kb) = |k|PGCD(a,b)$ ;
- $(\Delta = PGCD(a,b)) \Leftrightarrow (\exists a',\ b' \in \mathbb{Z} : a = \Delta a' \text{ et } b = \Delta b' \text{ et } PGCD(a',b') = 1)$.

**Remarque :** la première proposition de ce théorème affirme que les diviseurs communs à $a$ et $b$ sont diviseurs sont les diviseurs de leur $PGCD$ et réciproquement.

## ■ Nombres premiers entre eux

**Définition :** *Deux entiers relatifs $a$ et $b$ sont* ***premiers entre eux*** *si leurs seuls diviseurs communs sont $1$ et $(-1)$. Autrement dit $a$ et $b$ sont premiers entre eux si $PGCD(a,b) = 1$.*

**Théorème 6.6.— Identité de Bézout —.** Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs avec $(a,b) \neq (0,0)$, alors il existe un couple d'entiers relatifs $(u,v)$ tel que :

$$\boxed{au + bv = PGCD(a,b)}$$

**Théorème 6.7.— Théorème de Bézout —.** Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs avec $(a,b) \neq (0,0)$. $a$ et $b$ sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple d'entiers relatifs $(u,v)$ tel que :

$$\boxed{au + bv = 1}$$

**Théorème 6.8.— Théorème de Gauss —.** Soit $a$, $b$ et $c$ trois entiers relatifs avec $(a,b) \neq (0,0)$. Si $a \mid bc$ et si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, alors $a \mid c$.

**Corollaire 6.9.—** Soit $a$, $b$ et $c$ trois entiers relatifs avec $(a,b) \neq (0,0)$. Si $a \mid c$, $b \mid c$ et si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, alors $ab \mid c$.

## Nombres premiers

**Définition :** *Un **nombre premier** est un entier naturel supérieur ou égal à 2 qui n'admet pas d'autres diviseurs positifs que 1 et lui-même. Dans le cas contraire, il est dit **composé**.*

**Théorème 6.10.—** Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs non nuls, $p$ un nombre premier et $n$ un entier naturel non nul.

- Si $p$ divise $a$, alors $PGCD(a,p) = p$.
- Si $p$ ne divise pas $a$, alors $PGCD(a,p) = 1$.
- Si $p$ divise $ab$, alors $p$ divise $a$ ou $p$ divise $b$.
- Si $p$ divise $a^n$, alors $p$ divise $a$.

**Théorème 6.11.—** L'ensemble des nombres premiers est infini.

**Théorème 6.12.— Théorème fondamental de l'arithmétique —.** Soit $n$ un entier naturel, $n \geqslant 2$. Il existe alors des nombres premiers $p_1$, $p_2$, ..., $p_r$ et des entiers naturels non nuls $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_r$ tels que :

$$\boxed{n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}}$$

**Vocabulaire :** *Cette écriture, unique à l'ordre des facteurs près, s'appelle la **décomposition primaire** de $n$.*

**Théorème 6.13.—** Soit $n$ un entier naturel, $n \geqslant 2$. $n$ est premier si, et seulement si, il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$.

**Théorème 6.14.— Petit théorème de Fermat —.** Soit $p$ un nombre premier et $n$ un entier naturel. Alors :

- $n^p \equiv n \ [p]$ ;
- si $p$ ne divise pas $n$, $n^{p-1} \equiv 1 \ [p]$.

# ■■ Démonstrations

**Théorème 6.6.— Identité de Bézout —.** Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs avec $(a, b) \neq (0, 0)$, alors il existe un couple d'entiers relatifs $(u, v)$ tel que :

$$\boxed{au + bv = PGCD(a, b)}$$

**Démonstration** ▽
Notons $\Delta = PGCD(a, b)$ et $\mathscr{E}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls de la forme $ax + by$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs. $\mathscr{E}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. En effet, comme $(a, b) \neq (0, 0)$, $a$ ou $b$ est non nul, sans perte de généralité posons $a \neq 0$. Soit $a > 0$, alors $a \times 1 + b \times 0 \in \mathscr{E}$, soit $a < 0$, alors $a \times (-1) + b \times 0 \in \mathscr{E}$. Par conséquent $\mathscr{E}$ contient un unique plus petit élément $n$. Autrement dit, il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $n = au + bv$, $n > 0$ et tout élément $z$ de $\mathscr{E}$ vérifie $n \leqslant z$. Nous allons montrer dans la suite que $n = \Delta$.

• $\Delta \mid a$ et $\Delta \mid b$, donc $\Delta \mid au + bv$ autrement dit $\Delta \mid n$. $\Delta$ et $n$ étant des entiers naturels non nuls, la **proposition 6.1** entraîne $\Delta \leqslant n$.

• La division euclidienne de $a$ par $n$ implique l'existence d'un couple d'entiers relatifs $(q,\ r)$ tel que $a = nq + r$ où $0 \leqslant r < n$. Par conséquent $r = a - nq = a - q(au + bv) = a(1 - qu) + b(-qv)$, ainsi $r$ est de la forme $ax + by$ avec $x$ et $y$ entiers relatifs. Puisque $r \geqslant 0$, soit $r = 0$, soit $r \in \mathscr{E}$. Si la deuxième possibilité est vraie, alors par définition de $n$, $n \leqslant r$, ce qui est contraire à la condition $r < n$, donc le cas $r \in \mathscr{E}$ est absurde, et seule l'égalité $r = 0$ est vraie. En découle l'identité $a = nq$ donc $n \mid a$. De la même manière, on montrerait que $n \mid b$.
Il s'avère que $n$ est un diviseur commun à $a$ et $b$ donc d'après le **théorème 6.5**, $n \mid \Delta$, de plus $n$ et $\Delta$ étant positifs, avec $\Delta \neq 0$, la **proposition 6.1** entraîne $n \leqslant \Delta$.

Finalement $\Delta \leqslant n \leqslant \Delta$, donc $n = \Delta$. En conséquence il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $au + bv = PGCD(a, b)$. ▲

**Théorème 6.7.— Théorème de Bézout —.** Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs avec $(a, b) \neq (0, 0)$. $a$ et $b$ sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple d'entiers relatifs $(u, v)$ tel que :

$$\boxed{au + bv = 1}$$

**Démonstration** ▽
Notons comme précédemment $\Delta = PGCD(a, b)$.

• $a$ et $b$ sont premiers entre eux si, et seulement si, $PGCD(a, b) = 1$ donc d'après le théorème précédent, il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $au + bv = 1$.

• Réciproquement, supposons l'existence de deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $au + bv = 1$, comme $\Delta$ divise $a$ et $b$, il divise aussi $au + bv$, donc $\Delta \mid 1$. Par conséquent $\Delta = 1$, ainsi $a$ et $b$ sont premiers entre eux.

On a montré que $a$ et $b$ sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $au + bv = 1$. ▲

**Théorème 6.8.— Théorème de Gauss —.** Soit $a$, $b$ et $c$ trois entiers relatifs avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Si $a \mid bc$ et si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, alors $a \mid c$.

**Démonstration** $\triangledown$

Supposons que $a \mid bc$ avec $a$ et $b$ premiers entre eux. Puisque $a \mid bc$, il existe un entier relatif $k$ tel que $bc = ka$, d'autre part, $a$ et $b$ étant premiers entre eux, il existe , d'après le **théorème de Bézout**, deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $au + bv = 1$. Il résulte de cette **identité de Bézout** l'égalité $acu + bcv = c$, donc $acu + kav = c$ et par factorisation de $a$ : $a(cu + kv) = c$. Comme $cu + kv \in \mathbb{Z}$, la dernière égalité entraîne $a \mid c$. ▲

**Théorème 6.11.—** L'ensemble des nombres premiers est infini.

**Démonstration** $\triangledown$

Raisonnons par l'absurde et supposons que l'ensemble $\mathscr{P}$ des nombres premiers possède un nombre fini d'éléments, ainsi $\mathscr{P} = \{p_1,\ p_2, \dots,\ p_n\}$. Posons $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$, il s'avère que pour tous nombres premiers $p$ on a $p < N$ donc $N \notin \mathscr{P}$ autrement dit $N$ est composé. De ce fait, d'après le **théorème fondamental de l'arithmétique**, il existe un nombre premier $p_k$ divisant $N$, de sorte que $N \equiv 0\ [p_k]$. D'autre part, $N = p_1 \cdots p_k \cdots p_n + 1 \equiv 1\ [p_k]$. D'où la contradiction. On a montré par l'absurde que l'ensemble des nombres premiers possède une infinité d'éléments. ▲

**Théorème 6.14.— Petit théorème de Fermat —.** Soit $p$ un nombre premier et $n$ un entier naturel. Alors :

- $n^p \equiv n\ [p]$ ;
- si $p$ ne divise pas $n$, $n^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

**Démonstration** $\triangledown$

Nous allons démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ et tout nombre premier $p$, $n^p \equiv n\ [p]$.
Soit $p$ un nombre premier, on définit pour tout entier naturel $n$ la proposition $\mathcal{P}(n)$ : « $n^p \equiv n\ [p]$ ».

- **Initialisation :** Si $n = 0$, on a bien $0^p \equiv 0\ [p]$, donc la proposition $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit un entier naturel $n$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après la formule du binôme :

$$(n+1)^p = 1 + \binom{p}{1} n + \cdots + \binom{p}{k} n^k + \cdots + \binom{p}{p-1} n^{p-1} + n^p$$

Soit $k$ un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant p-1$ :

$$k\binom{p}{k} = \frac{p!}{(k-1)!(p-k)!} = p\frac{(p-1)!}{(k-1)![(p-1)-(k-1)]!} = p\binom{p-1}{k-1}$$

$k$, $p$, $\binom{p}{k}$ et $\binom{p-1}{k-1}$ sont des entiers naturels et $p \mid p\binom{p-1}{k-1}$, donc $p \mid k\binom{p}{k}$. $p$ est un nombre premier et $k < p$, donc $p$ et $k$ sont premiers entre eux, par conséquent d'après le **théorème de Gauss**, $p \mid \binom{p}{k}$. Autrement dit, pour tout entier $k \in [\![1, p-1]\!]$

$$\binom{p}{k} \equiv 0\ [p]$$

Comme par hypothèse de récurrence $n^p \equiv n\ [p]$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}(n+1)^p &\equiv 1 + \binom{p}{1} n + \cdots + \binom{p}{p-1} n^{p-1} + n^p.\ [p] \\ &\equiv 1 + 0 + n\ [p] \\ (n+1)^p &\equiv n + 1\ [p]\end{aligned}$$

- **Conclusion :** On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $a$, $a^p \equiv a\ [p]$.

Soit $n$ un entier naturel non divisible par $p$.

$$n^p \equiv n\ [p] \Leftrightarrow n^p - n \equiv 0\ [p] \Leftrightarrow n(n^{p-1} - 1) \equiv 0\ [p] \Leftrightarrow p \mid n(n^{p-1} - 1)$$

$p$ est premier avec $n$ (sinon il serait dans la décomposition de $n$ en produit de facteurs premiers et il le diviserait), donc d'après le **théorème de Gauss** $p \mid n^{p-1} - 1$, autrement dit $n^{p-1} \equiv 1\ [p]$. ▲

# Approfondissements, algorithmes

## Crible d'Ératosthène

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on peut déterminer l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à $n$ en procédant *par élimination* de la manière suivante :

$\boxed{0}$ On fait la liste des entiers de 2 à $n$.

$\boxed{1}$ Le premier terme de la liste est 2. Il est premier, on le conserve et on barre tous les termes de la suite qui sont multiples de 2.

$\boxed{2}$ Le premier terme de la liste restante est 3. Il est premier, on le conserve et on barre tous les termes de la suite qui sont multiples de 3.

...

Ainsi de suite, on continue ce procédé, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de premier terme non barré dans la liste. À la fin, les entiers non barrés sont les nombres premiers cherchés.

**Exemple :** appliquons la méthode du crible d'Érathostène pour déterminer la liste des nombres premiers inférieurs à 100.

On obtient que les entiers premiers inférieurs à 100 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ |
| 11 | ~~12~~ | 13 | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ | 17 | ~~18~~ | 19 | ~~20~~ |
| ~~21~~ | ~~22~~ | 23 | ~~24~~ | ~~25~~ | ~~26~~ | ~~27~~ | ~~28~~ | 29 | ~~30~~ |
| 31 | ~~32~~ | ~~33~~ | ~~34~~ | ~~35~~ | ~~36~~ | 37 | ~~38~~ | ~~39~~ | ~~40~~ |
| 41 | ~~42~~ | 43 | ~~44~~ | ~~45~~ | ~~46~~ | 47 | ~~48~~ | ~~49~~ | ~~50~~ |
| ~~51~~ | ~~52~~ | 53 | ~~54~~ | ~~55~~ | ~~56~~ | ~~57~~ | ~~58~~ | 59 | ~~60~~ |
| 61 | ~~62~~ | ~~63~~ | ~~64~~ | ~~65~~ | ~~66~~ | 67 | ~~68~~ | ~~69~~ | ~~70~~ |
| 71 | ~~72~~ | 73 | ~~74~~ | ~~75~~ | ~~76~~ | ~~77~~ | ~~78~~ | 79 | ~~80~~ |
| ~~81~~ | ~~82~~ | 83 | ~~84~~ | ~~85~~ | ~~86~~ | ~~87~~ | ~~88~~ | 89 | ~~90~~ |
| ~~91~~ | ~~92~~ | ~~93~~ | ~~94~~ | ~~95~~ | ~~96~~ | 97 | ~~98~~ | ~~99~~ | ~~100~~ |

Voici une traduction de ce crible en langage Python :

```
def Eratosthène(n):
    n=n+1
    L=list(range(2,n)) # L est la liste des entiers de 2 à n-1
    x=2
    while max(L)!=x:
        k=2
        while k*x<=max(L):
            if k*x in L:
                L.remove(k*x) # Efface de L l'élément k*x
            k=k+1
        i=L.index(x) # Donne le rang de x dans L
        x=L[i+1]
    return L
```

À l'exécution, on obtient par exemple :
`>>> Eratosthène(100)`
[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97]

## ■ Décomposition primaire

Il s'agit d'une illustration algorithmique du **théorème 6.12** donnant la décomposition primaire d'un entier naturel $n$ non nul.

```
def Décomposition(n):
    L=Eratosthène(n)
    D=[]
    for p in L:#On passe en revue les nombres premiers p inférieurs à n
        k=0
        while n%p==0:#Si p divise n, on cherche l'exposant de p dans
        #la décomposition primaire de n
            k=k+1
            n=n//p
        if k>=1:
            D.append([p,k])#D est la liste des p^k
    return D
```

Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$ est la décomposition primaire de $n$, avec $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$, ce programme affiche la liste $[[p_1, \alpha_1], [p_2, \alpha_2], \ldots, [p_r, \alpha_r]]$. Par exemple :
>>> `Décomposition`(15 453)
$[[3, 2], [5, 1], [7, 3]]$

## ■ Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers

**Définition :** *Soit $f$ une fonction non constante définie sur $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$), on dit que $f$ est un* ***polynôme*** *de* ***degré*** *$n$, $n \in \mathbb{N}^\star$, s'il existe $n+1$ nombres complexes $a_n$, $a_{n-1}$, ..., $a_1$, $a_0$ avec $a_n \neq 0$, tels que pour tout nombre complexe $x$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.*
*Soit $a$ un nombre complexe, on dit que $a$ est une* ***racine*** *de $f$ si $f(a) = 0$.*

**Théorème 6.15.— Critère d'Eisenstein —.** Soit $f\ :\ x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ un polynôme de degré $n$ à coefficients entiers relatifs, et soit $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible.

$$\boxed{\text{Si } \frac{p}{q} \text{ est une racine de } f\text{, alors } p \mid a_0 \text{ et } q \mid a_n}$$

**Démonstration** ▽
Reprenons les hypothèses du théorème. $\dfrac{p}{q}$ est une racine de $f$, donc :

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{p}{q}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_n\left(\tfrac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\tfrac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\tfrac{p}{q} + a_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\quad -a_0 q^n = a_1 pq^{n-1} + \cdots + a_n p^n$ et $-a_n p^n = a_0 q^n + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}q$
En particulier, $p \mid a_0 q^n$ et $q \mid a_n p^n$. Comme $p$ et $q$ sont premiers entre eux, une utilisation répétée du théorème de Gauss permet d'en déduire que $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$. ▲

**Exemple :** résoudre dans $\mathbb{Q}$ l'équation $3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = 0$.
Supposons que cette équation admette une solution rationnelle $\frac{p}{q}$, alors d'après le **critère d'Eisenstein** $p \mid 4$ et $q \mid 3$, donc $\frac{p}{q} \in \left\{-4\ ;\ -2\ ;\ -\frac{4}{3}\ ;\ -1\ ;\ -\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ 1\ ;\ \frac{4}{3}\ ;\ 2\ ;\ 4\right\}$, ce sont les seules solutions rationnelles possibles, reste à savoir celles qui parmi elles sont les solutions de cette équation, s'il y en a. On constate que seule $\frac{2}{3}$ est solution de l'équation, donc $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}} = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

# Méthodes

## Utiliser les congruences

Vous utilisez les congruences pour établir une divisibilité ou plus généralement pour calculer le reste de la division euclidienne. Les règles de calcul sont très souples :

**Méthode 6.1.— Comment calculer modulo $m$**

Soit $m$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in \mathbb{Z}$. Rappelons tout d'abord que la relation de congruence modulo $m$ est compatible avec l'addition et la multiplication : si $a \equiv b\ [m]$ et $c \equiv d\ [m]$ alors

• $a + c \equiv b + d\ [m]$ ; • $a \times c \equiv b \times d\ [m]$ ; • $k \times a \equiv k \times b\ [m]$ ; • $a^n \equiv b^n\ [m]$.

**Exemple :** vérifions que $1234^{6789} + 9876^{4321}$ est congru à 0 modulo 5. Par compatibilité avec le produit, on a d'abord

- $1234 \equiv 4 \equiv -1\ [5]$. Par conséquent $1234^{6789} \equiv (-1)^{6789} \equiv -1\ [5]$.
- $9876 \equiv 1\ [5]$. Par conséquent $6789^{4321} \equiv 1^{4321} \equiv 1\ [5]$.

Finalement, par compatibilité avec la somme, il s'ensuit que $1234^{6789} + 9876^{4321} \equiv -1 + 1 \equiv 0\ [5]$.

**Mise en œuvre : exercice 6.2**, **exercice 6.3** et **exercice 6.4**.

**Méthode 6.2.— Comment calculer une puissance modulo $m$**

On cherche à calculer $a^n$ modulo $m$ avec $a$ entier relatif différent de $-1$, 0 et 1, $m$ et $n$ étant des entiers naturels strictement supérieurs à 1.

▸ **Cas général**

$\boxed{1}$ Tout d'abord, on réduit $a$ modulo $m$. Dans la suite on donnera le même nom $a$ à la forme réduite.

$\boxed{2}$ L'idéal est de trouver un entier naturel $b$ non nul tel que $a^b \equiv 1\ [m]$, mais il n'existe pas toujours (voir la remarque ci-dessous).

$\boxed{3}$ Si l'entier $b$ existe, on effectue la **division euclidienne** (**théorème 6.2**) de $n$ par $b$, on obtient $n = bq + r$ où $q$ et $r$ sont des entiers naturels avec $0 \leqslant r < b$. $a^n = a^{bq+r} = a^{bq}a^r = (a^b)^q a^r$, nous obtenons alors la succession de congruences suivante $a^b \equiv 1\ [m]$ donc $(a^b)^q \equiv 1\ [m]$ et enfin $(a^b)^q a^r \equiv a^r\ [m]$, conclusion $a^n \equiv a^r\ [m]$.

$\boxed{4}$ S'il n'existe pas d'entier $b$ tel que $a^b \equiv 1\ [m]$, on cherche une valeur de $b$ tel que $a^b$ soit le plus petit entier naturel $k$ possible modulo $m$, on effectue la division euclidienne de $n$ par $b$ et on obtient $a^n \equiv k^q a^r\ [m]$.

▸ **Si $m$ est un nombre premier $p$**, alors le **théorème 6.14** (**petit théorème de Fermat**) est incontournable :

- $a^p \equiv a\ [p]$.
- Si $p$ et $n$ sont premiers entre eux, $n^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

**Remarque :** $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 2^n \not\equiv 1\ [6]$.

**Exemple :** Déterminons le reste de la division euclidienne de $247^{349}$ par 7. Tout d'abord on constate que $247 \equiv 2$ [7], donc $247^{349} \equiv 2^{349}$ [7]. D'autre part en calculant les premières puissances de 2, on remarque que $2^3 \equiv 1$ [7]. La division euclidienne de 349 par 3 donne $349 = 3 \times 116 + 1$, alors d'après notre fiche méthode $2^{349} \equiv 2^1$ [7] c'est-à-dire $247^{349} \equiv 2$ [7] et comme $0 \leqslant 2 < 7$, 2 est le reste de la division euclidienne de $247^{349}$ par 7.

**Exemple :** quel est le reste de la division euclidienne de $8^{1\ 001}$ par 5 ?
$1\ 001 = 4 \times 250 + 1$ donc $8^{1\ 001} = 8^{4\times 250+1} = (8^4)^{250} \times 8$. 5 est un nombre premier qui ne divise pas 8, donc d'après le **petit théorème de Fermat**, $8^4 \equiv 1$ [5]. Il s'ensuit $(8^4)^{250} \equiv 1$ [5], puis $(8^4)^{250} \times 8 \equiv 8$ [5], donc $8^{1\ 001} \equiv 3$ [5], or $0 \leqslant 3 < 5$, donc 3 est le reste de la division euclidienne de $8^{1\ 001}$ par 5.

**Mise en œuvre : exercice 6.3**, **exercice 6.17**, **exercice 6.19**, **exercice 6.21** et **exercice 6.22**.

❑ **Méthode 6.3.— Comment diviser modulo $m$**

Résoudre l'équation $ax \equiv b$ $[m]$ dans $\mathbb{Z}$ n'est pas toujours possible. C'est néanmoins toujours le cas lorsque $a$ et $m$ sont premiers entre eux.

$\boxed{1}$ Déterminer un couple $(u, v)$ d'entiers relatifs tel que $au + mv = 1$.

$\boxed{2}$ On a donc $au \equiv 1$ $[m]$. On peut dire que $u$ est l'inverse de $a$ modulo $m$ (il est unique modulo $m$). On a donc

$$ax \equiv b[m] \Leftrightarrow uax \equiv ub\ [m] \Leftrightarrow x \equiv bu\ [m]$$

$\boxed{3}$ En conclusion $\mathcal{S} = \{bu + km\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

**Exemple :** résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $4x \equiv 5$ [21].

$\boxed{1}$ 4 et 21 sont premiers entre eux, donc d'après le **théorème de Bézout** (cf. **théorème 6.7**) l'équation $4u + 21v = 1$ admet un couple $(u, v)$ d'entiers relatifs solution, comme par exemple $(-5, 1)$. Si on ne trouve pas empiriquement une solution à cette équation, on peut toujours utiliser l'algorithme d'Euclide étendu de la **méthode 6.9**. $-5$ est l'inverse de 4 modulo 21.

$\boxed{2}$ $4x \equiv 5$ $[21] \Leftrightarrow x \equiv 5 \times (-5)$ $[21] \Leftrightarrow x \equiv 17$ $[21]$

$\boxed{3}$ $\mathcal{S} = \{17 + 21k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

**Mise en œuvre : exercice 6.14**.

## ■ Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

La divisibilité est le thème central de ce chapitre d'arithmétique en Terminale, de nombreuses méthodes sont envisageables pour établir une relation de divisibilité. Voici les procédés les plus fréquemment utilisés.

> ❑ **Méthode 6.4.— Comment montrer que $a$ divise $b$**
> Soit $a$, $b$ et $c$ des entiers relatifs non nuls.
>
> - On peut effectuer la **division euclidienne** de $b$ par $a$ (**théorème 6.2**) :
>
>   $$a \mid b \text{ si et seulement si le reste est nul.}$$
>
> - On peut utiliser les **congruences** :
>
>   $$a \mid b \text{ si et seulement si } b \equiv 0 \ [a].$$
>
> - On peut utiliser le **théorème de Gauss** (**théorème 6.8**)
>
>   $$\text{Si } a \mid bc \text{ avec } a \text{ et } c \text{ premiers entre eux, alors } a \mid b.$$
>
> - On peut utiliser le **corollaire du théorème de Gauss** (**corollaire 6.9**) :
>
>   $$\text{Si } a = pq \text{ et } p \mid b,\ q \mid b \text{ avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux alors } a \mid b.$$
>
> - On peut utiliser le **théorème fondamental de l'arithmétique** (**théorème 6.12**) :
>   Si $a$ et $b$ se décomposent comme produits de nombres premiers sous la forme $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_r^{\beta_r}$ alors
>
>   $$a \mid b \text{ si, et seulement si, } \forall i \in [\![1, r]\!],\ 0 \leqslant \alpha_i \leqslant \beta_i$$
>
> - On peut utiliser une **factorisation polynomiale** :
>   Si $a = P(n)$ et $b = Q(n)$ où $P$ et $Q$ sont des polynômes à coefficients entiers relatifs avec $n$ un entier relatif, et que $Q$ se factorise sous la forme $Q = PR$ avec $R$ un polynôme à coefficients entiers de degré non nul, alors $Q(n) = P(n)R(n)$, soit $a \mid b$.

**Exemple : Utilisation des congruences**
Soit $u_n = 3 \times 5^n + 2 \times 3^n + 3$. Montrons que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est divisible par 8.

$\boxed{1}$ Pour établir une divisibilité par 8, on va calculer des congruences modulo 8. Mettons en œuvre la **méthode 6.2**. Nos premiers calculs permettent de constater que $5^2 \equiv 1 \ [8]$ et $3^2 \equiv 1 \ [8]$.

$\boxed{2}$ La division euclidienne de $n$ par 2 assure l'existence d'un unique couple d'entiers naturels $(q, r)$ vérifiant $n = 2q + r$ avec $0 \leqslant r < 2$, donc $(5^2)^q \times 5^r \equiv 5^r \ [8]$ ainsi $3 \times 5^n \equiv 3 \times 5^r \ [8]$ avec $r \in \{0, 1\}$ et $2 \times 3^n \equiv 2 \times 3^r \ [8]$. Finalement par somme, $u_n \equiv 3 \times 5^r + 2 \times 3^r + 3 \ [8]$ avec $r = 0$ ou $r = 1$.

$\boxed{3}$ On constate que si $r = 0$ ou $r = 1$, on a $3 \times 5^r + 2 \times 3^r + 3 \equiv 0 \ [8]$, donc pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n \equiv 0 \ [8]$, autrement dit $8 \mid u_n$.

**Exemple : Utilisation de polynômes**
Montrons que pour tout entier naturel $n$, $n \geqslant 2$, $u_n = \frac{1}{4}\left[n^3 + (n+2)^3\right]$ est un entier naturel composé.

$\boxed{1}$ Après développement, on obtient l'égalité $u_n = \frac{1}{4}\left[n^3 + (n+2)^3\right] = \frac{1}{2}(n^3 + 3n^2 + 6n + 4)$.

Posons donc pour tout réel $x$, $P(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 4$ de sorte que $u_n = P(n)$ et factorisons le polynôme $P$.

$\boxed{2}$ Remarquons que $P(-1) = 0$ et le coefficient dominant de $P$ est 1, il existe deux réels $a$ et $b$ tels que pour tous réels $x$ on ait $P(x) = (x+1)(x^2 + ax + b)$, donc $P(x) = x^3 + (a+1)x^2 + (a+b)x + b$. Par identification des coefficients, il vient que $a$ et $b$ sont solutions du système suivant

$$\begin{cases} a + 1 = 3 \\ a + b = 6 \\ b = 4 \end{cases}$$

Ce qui donne $a = 2$ et $b = 4$. Ainsi $P$ se factorise-t-il sous la forme

$$P(x) = (x+1)(x^2 + 2x + 4)$$

$\boxed{3}$ Ainsi $u_n$ s'écrit aussi $u_n = \frac{1}{2}(n+1)(n^2 + 2n + 4)$.

- Si $n$ est impair, $\frac{n+1}{2}$ et $(n^2 + 2n + 4)$ sont entiers naturels.
- Si $n$ est pair $\frac{(n^2+2n+4)}{2}$ et $n + 1$ sont entiers naturels.

Dans tous les cas $u_n = \frac{1}{2}(n+1)(n^2 + 2n + 4)$ est un entier naturel, donc $\frac{1}{4}\left[n^3 + (n+2)^3\right]$ aussi. Par ailleurs, $n \geqslant 2$ entraîne $\frac{n+1}{2} > 1$ et $\frac{(n+2)^2}{2} > 1$, et par conséquent $u_n = \frac{1}{4}\left[n^3 + (n+2)^3\right]$ est toujours un produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2, c'est donc un nombre entier composé dès que $n \geqslant 2$.

**Mise en œuvre : exercice 6.2**, **exercice 6.3**, **exercice 6.4**, **exercice 6.11**, **exercice 6.12**, **exercice 6.15** et tous les **exercices** de **6.17** à **6.22**.

## ■ Nombres premiers

### Montrer qu'un nombre est premier

Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geqslant 2$, si $n$ est composé alors il admet des diviseurs premiers. Le plus petit diviseur premier de $n$ est nécessairement inférieur à $\sqrt{n}$. Ainsi

> ❑ **Méthode 6.5.— Comment montrer qu'un entier naturel est premier**
> Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Si $n$ n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$, alors $n$ est premier.

**Exemple :** le nombre $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 + 1 = 510\ 511$ est-il premier ? La partie entière de $\sqrt{510\ 511}$ est 714, par conséquent on divise successivement 510 522 par chacun des nombres premiers inférieurs ou égaux à 714 et si aucun d'entre eux ne divise 510 522 il est premier sinon il est composé. Notre nombre est divisible par 19, en fait $510\ 522 = 19 \times 26\ 869$, donc 510 522 n'est pas premier.

**Mise en œuvre : exercice 6.14**.

### Obtenir la décomposition d'un entier comme produit de nombres premiers

**❑ Méthode 6.6.— Comment factoriser un entier en produit de nombres premiers**
Soit $n \geqslant 2$ un entier. D'après le **théorème 6.12**, $n$ s'écrit de manière unique sous la forme d'un produit de nombres premiers. Pour déterminer cette factorisation, on suit l'algorithme suivant :

$\boxed{1}$ On cherche le plus petit nombre premier $p_1$ qui divise $n$ : $n = p_1 \times q_1$. Deux cas se présentent :

- Si $q_1 = 1$, alors $n = p_1$ est la factorisation cherchée.
- Si $q_1 \geqslant 2$, alors on recommence avec le même procédé avec le quotient $q_1$.

$\boxed{2}$ On cherche le plus petit nombre premier $p_2$ qui divise $q_1$ : $q_1 = p_2 \times q_2$. Deux cas se présentent :

- Si $q_2 = 1$, alors $n = p_1 p_2$ est la factorisation cherchée.
- Si $q_2 \geqslant 2$, alors on recommence avec le même procédé avec le quotient $q_2$.

...
Ainsi de suite, jusqu'à l'obtention d'un quotient égal à 1.

**Exemple :** déterminons la factorisation en produit de nombres premiers de $n = 37026$. On a :

| **quotients successifs** | **facteurs premiers** |
|---|---|
| $n = 37026$ | $p_1 = 2$ |
| $q_1 = 18513$ | $p_2 = 3$ |
| $q_2 = 6171$ | $p_3 = 3$ |
| $q_3 = 2057$ | $p_4 = 11$ |
| $q_4 = 187$ | $p_5 = 11$ |
| $q_5 = 17$ | $p_6 = 17$ |
| $q_6 = 1$ | |

Ainsi $n = 37026 = 2 \times 3^2 \times 11^2 \times 17$.

**Mise en œuvre : exercice 6.19.**

## ■ Nombres premiers entre eux et PGCD

### Calcul du PGCD de deux entiers

**❑ Méthode 6.7.— Comment calculer le PGCD de $a$ et $b$**
Il existe essentiellement deux méthodes pour déterminer le PGCD de deux entiers :

- connaissant les factorisations de $a$ et $b$ en produits de nombres premiers, on obtient celle de $PGCD(a, b)$ en élevant chaque facteur premier, commun à $a$ et $b$, à la puissance minimale dans les deux factorisations;
- par une suite de divisions euclidiennes, l'**algorithme d'Euclide** présenté en détail ci-après, permet de déterminer $PGCD(a, b)$.

**Exemple :** calculons le PGCD de $a = 924$ et $b = 840$ à l'aide des factorisations suivantes :

$$a = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \text{ et } b = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$
Par conséquent, $PGCD(a, b) = 2^2 \times 3 \times 5^0 \times 7 \times 11^0 = 84$.

### L'algorithme d'Euclide

Rappelons que l'algorithme d'Euclide s'appuie sur le **lemme 6.4** : étant donné un couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$, on note $r$ le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$. Alors
$$PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$$
Examinons plus en détail le **principe de l'algorithme d'Euclide** :

$\boxed{0}$ On souhaite calculer $d = PGCD(a, b)$. Notons $a_0 = \max\{|a|, |b|\}$ et $a_1 = \min\{|a|, |b|\}$, de sorte que $d = PGCD(a_0, a_1)$.

$\boxed{1}$ **Étape 1**. Deux cas se présentent :

- Si $a_1 = 0$, alors $d = PGCD(a_0, a_1) = a_0$.
- Si $a_1 \neq 0$, effectuons la division euclidienne de $a_0$ par $a_1$ : $a_0 = q_1 a_1 + a_2$, où $0 \leqslant a_2 < a_1$. D'après le lemme précédent, $d = PGCD(a_1, a_2)$.

$\boxed{2}$ **Étape 2**. Deux cas se présentent :

- Si $a_2 = 0$, alors $d = PGCD(a_0, a_1) = PGCD(a_1, a_2) = a_1$.
- Si $a_2 \neq 0$, effectuons la division euclidienne de $a_1$ par $a_2$ : $a_1 = q_2 a_2 + a_3$, où $0 \leqslant a_3 < a_2$. D'après le lemme, $d = PGCD(a_0, a_1) = PGCD(a_1, a_2) = PGCD(a_2, a_3)$.

$\boxed{3}$ **Étape 3**. Ainsi de suite. Comme $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont des entiers naturels et $a_0 \geqslant a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $a_{m+1}$ soit nul. Si tel est le cas,
$$d = PGCD(a_0, a_1) = PGCD(a_1, a_2) = \cdots = PGCD(a_m, a_{m+1}) = PGCD(a_m, 0) = a_m$$

Résumons :

> ❑ **Méthode 6.8.— Algorithme d'Euclide**
> Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on calcule $d = PGCD(a, b)$. Pour cela :
> $\boxed{0}$ On pose $a_0 = \max\{|a|, |b|\}$ et $a_1 = \min\{|a|, |b|\}$.
> $\boxed{1}$ On effectue des divisions euclidiennes successives jusqu'à l'obtention d'un reste nul.
> $\boxed{2}$ $d = PGCD(a, b)$ est le dernier reste non nul obtenu dans l'algorithme d'Euclide.

**Exemple :** calculons $PGCD(2\ 100, 4\ 356)$ à l'aide de cet algorithme.

$\boxed{0}$ On pose $a = 4\ 356$, $b = 2\ 100$.

$\boxed{1}$ On effectue des divisions euclidiennes successives jusqu'à l'obtention d'un reste nul :
$$\begin{array}{ccccccc} 4\ 356 & = & 2\ 100 & \times & 2 & + & 156 \\ 2\ 100 & = & 156 & \times & 13 & + & 72 \\ 156 & = & 72 & \times & 2 & + & \boxed{12} \\ 72 & = & 12 & \times & 6 & + & 0 \end{array}$$

$\boxed{2}$ Finalement $PGCD(2\ 100, 4\ 356) = 12$.

**Mise en œuvre : exercice 6.7, exercice 6.14.**

### Obtenir une identité de Bézout $au + bv = PGCD(a, b)$

Soit $a, b$ des entiers relatifs non tous les deux nuls, on cherche un couple $(u, v)$ d'entiers relatifs tels que $au + bv = PGCD(a, b)$. Une solution est de mettre en œuvre l'**algorithme d'Euclide étendu**.

> ❑ **Méthode 6.9.— Algorithme d'Euclide étendu**
>
> $\boxed{1}$ On commence par effectuer l'algorithme d'Euclide.
>
> $\boxed{2}$ Pour chaque division euclidienne, on exprime le reste obtenu en fonction de $a$ et $b$.
>
> $\boxed{3}$ Comme le dernier reste non nul est précisément $PGCD(a, b)$, à la fin, on a bien $PGCD(a, b)$ comme combinaison linéaire de $a$ et $b$.

**Exemple :** reprenons l'exemple précédent et déterminons $u$ et $v$ de sorte que $au + bv = 12$.

| **Divisions euclidiennes** | **Combinaisons linéaires de $a$ et $b$** |
|---|---|
| $a = b \times 2 + 156$ | $a - 2b = 156$ |
| $b = 156 \times 13 + 72$ | $b = (a - 16b) \times 3 + 18$<br>$b = 13a - 26b + 72$<br>$-13a + 27b = 72$ |
| $156 = 72 \times 2 + 12$ | $a - 2b = (-13a + 27b) \times 2 + 12$<br>$a - 2b = -26a + 54b + 12$<br>$\boxed{27a - 56b = 12}$ |
| $72 = 12 \times 6 + 0$ | |

Le couple $(27, -56)$ répond à la question.

**Mise en œuvre : exercice 6.7**, **exercice 6.14**.

### Entiers premiers entre eux

> ❑ **Méthode 6.10.— Comment montrer que deux entiers sont premiers entre eux**
>
> Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs non nuls.
>
> - Si $PGCD(a, b) = 1$, alors $a$ et $b$ sont premiers entre eux.
> - S'il existe un couple d'entiers relatifs $(u, v)$ tel que $au + bv = 1$ le **théorème de Bézout** permet de conclure.
> - Si les décompositions en produits de facteurs premiers de $a$ et $b$ n'ont pas de facteurs communs, alors $a$ et $b$ sont premiers entre eux.

**Exemple :** pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $-n + 4$ et $3n - 11$ sont premiers entre eux car $1 = (-n + 4) \times 3 + (3n - 11) \times 4$. L'affirmation est montrée *via* le théorème de Bézout.

**Mise en œuvre : exercice 6.2**, **exercice 6.9** et **exercice 6.10**.

## ■ Résolution d'équations

### Équations diophantiennes $ax + by = c$

**❑ Méthode 6.11.— Comment résoudre l'équation diophantienne $ax + by = c$**
Pour résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E)\quad ax + by = c$, où $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$.

$\boxed{1}$ On détermine $d = PGCD(a, b)$ :

- si $d$ ne divise pas $c$, l'équation $(E)$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$ ;
- sinon, on se ramène après simplification par $d$ au cas où les coefficients $(a', b')$ sont premiers entre eux :

$$(E) \Leftrightarrow a'x + b'y = c',\ \text{où } a' \text{ et } b' \text{ sont premiers entre eux.}$$

$\boxed{2}$ On détermine une solution particulière $(x_0, y_0)$ à l'aide d'une égalité de Bézout. En remplaçant le second membre, on obtient une équation du type :

$$(E) \Leftrightarrow a'(x - x_0) = b'(y_0 - y),\ \text{où } a' \text{ et } b' \text{ sont premiers entre eux.}$$

$\boxed{3}$ On observe alors que $a'$ doit diviser $b'(y_0 - y)$ tout en étant premier avec $b'$. D'après le **théorème de Gauss**, il divise nécessairement $y_0 - y$. Ainsi, $y_0 - y$ s'écrit-il nécessairement sous la forme $y_0 - y = k\,a'$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
$\boxed{4}$ On achève la résolution à l'aide du changement d'inconnue $y_0 - y = k\ a'$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Il vient

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 - y = k\ a' \\ a'(x - x_0) = b'(y_0 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 - y = k\ a' \\ x - x_0 = kb' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + kb' \\ y = y_0 - k\ a' \end{cases}.$$

**Exemple :** résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E)$ $280x + 132y = 24$.
$\boxed{1}$ Tout d'abord on constate que 280, 132 et 24 sont des multiples de 4, donc $PGCD(280, 132) = 4PGCD(70, 33) = 4$ et $4 \mid 24$, donc l'équation admet des solutions et

$$(E) \Leftrightarrow 280x + 132y = 24 \Leftrightarrow 70x + 33y = 6$$

$\boxed{2}$ 70 et 33 étant premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout il existe un couple d'entiers relatifs $(x_0, y_0)$ solution de $70x + 33y = 1$. Développons l'algorithme d'Euclide étendu pour trouver un couple solution. Posons $a = 70$ et $b = 33$.

| **Divisions euclidiennes** | **Combinaisons linéaires de $a$ et $b$** |
|---|---|
| $a = b \times 2 + 4$ | $a - 2b = 4$ |
| $b = 4 \times 8 + 1$ | $b = (a - 2b) \times 8 + 1$<br>$b = 8a - 16b + 1$<br>$\boxed{-8a + 17b = 1}$ |
| $4 = 1 \times 4 + 0$ | |

Le couple $(-8, 17)$ est solution de $70x + 33y = 1$ donc $(-48, 102)$ est solution de $70x + 33y = 6$.

$$(E) \Leftrightarrow 70x + 33y = 70 \times (-48) + 22 \times 102 \Leftrightarrow 70 \times (x + 48) = 33 \times (102 - y)$$

$\boxed{3}$ On constate que 70 divise $33 \times (102 - y)$ et est premier avec 33. D'après le **théorème de Gauss** il doit diviser $102 - y$.

Méthodes

$\boxed{4}$ On conclut à l'aide du changement d'inconnue $102 - y = 70\ k$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Il vient

$$(E) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 102 - y &=& 70\ k \\ 70 \times (x+48) &=& 33 \times (102 - y) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 102 - y &=& 70\ k \\ x + 48 &=& 33\ k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 33\ k - 48 \\ y &=& 102 - 70\ k \end{array}\right. .$$

Finalement, $S = \{(33\ k - 48, 102 - 70\ k);\ k \in \mathbb{Z}\}$.

**Mise en œuvre : exercice 6.7**, **exercice 6.8**.

**Systèmes d'équations à deux inconnues faisant intervenir un PGCD**

❑ **Méthode 6.12.— Comment résoudre un système d'équations avec un PGCD**

$\boxed{1}$ On effectue le changement d'inconnues $x = \Delta x'$ et $y = \Delta y'$ où $\Delta = PGCD(x, y)$.

$\boxed{2}$ On a alors $PGCD(x', y') = 1$ ce qui permet de simplifier le système.

**Exemple :** résolvons dans $\mathbb{N}^2$ le système suivant : $(S)$ $\left\{\begin{array}{rcl} xy &=& 210PGCD(x,y)^2 \\ y - x &=& PGCD(x,y) \end{array}\right.$ .

Notons pour alléger $\Delta = PGCD(x, y)$.

$\boxed{1}$ Effectuons le changement d'inconnues préconisé.

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \Delta x', y = \Delta y' \\ x \times y &=& 210PGCD(x,y)^2 \\ y - x &=& PGCD(x,y) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \Delta x', y = \Delta y' \\ x' \times y' &=& 210 \\ y' - x' &=& 1 \end{array}\right.$$

$\boxed{2}$ Cherchons les couples d'entiers diviseurs positifs de 210. Pour ce faire on décompose 210 en produits de facteurs premiers : $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$. On en déduit les couples cherchés.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x' =$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 10 | 14 | 15 | 21 | 30 | 35 | 42 | 70 | 105 | 210 |
| $y' =$ | 210 | 105 | 70 | 42 | 35 | 30 | 21 | 15 | 14 | 10 | 7 | 6 | 5 | 3 | 2 | 1 |

$\boxed{3}$ Pour finir, on sélectionne parmi ceux qui vérifient $y' - x' = 1$ (et qui sont automatiquement premiers entre eux). Il ne reste que le couple $x' = 14, y' = 15$. En définitive, l'ensemble solution du système est $\mathcal{S} = \{(14k, 15k); k \in \mathbb{N}^\star\}$.

**Mise en œuvre : exercice 6.13**.

## ■ Principe des tiroirs

❑ **Méthode 6.13.— Existence de congruences dans un ensemble d'entiers**

On doit à Peter Gustav Lejeune-Dirichlet l'énoncé suivant : « $k$ étant un entier naturel non nul, si $k+1$ chemises sont rangées dans une commode ayant $k$ tiroirs, alors nécessairement un des tiroirs contient au moins deux chemises ! »

Une traduction arithmétique est la suivante : soit $k+1$ entiers, modulo $k$ chacun d'eux est congru à l'un des entiers de l'ensemble $[\![0, k-1]\!]$. Par le principe de Dirichlet, deux de ces $k+1$ nombres ont le même reste dans la division euclidienne par $k$, si $a$ et $b$ sont ces nombres alors on a $a \equiv b\ [k]$ ou encore $k \mid a - b$.

**Exemple :** parmi 11 entiers relatifs deux à deux distincts, il en existe toujours deux dont la différence est multiple de 10.
Effectuons la division euclidienne par 10 de chacun des 11 entiers, comme il y a 10 restes possibles et 11 entiers, deux des entiers ont le même reste, c'est le principe des tiroirs, donc leur différence est un multiple de 10.

**Mise en œuvre : exercice 6.18**.

Méthodes

# Vrai/Faux

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1.** Si $a \mid c$ et $b \mid c$ alors $ab \mid c$. | ☐ | ☐ |
| **2.** Si $4x \equiv 8$ [20] alors $x \equiv 2$ [20]. | ☐ | ☐ |
| **3.** Soit $P$ la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (2x-7)(x^2-3x-1)$, alors quel que soit l'entier relatif $n$, $P(n)$ est un nombre composé. | ☐ | ☐ |
| **4.** Si $a \equiv a'$ $[m]$ et $b \equiv b'$ $[m]$ et $a \leqslant b$, alors $a' \leqslant b'$. | ☐ | ☐ |
| **5.** $a$, $b$, $u$, $v$ et $d$ étant des entiers relatifs avec $d \geqslant 1$, si $au+bv=d$, alors $d = PGCD(a,b)$. | ☐ | ☐ |
| **6.** $(u_n)_{n\geqslant 1} : \begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = n! - u_{n-1} \end{cases}$, $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est une suite de nombres premiers. | ☐ | ☐ |
| **7.** $\forall m, n, p \in \mathbb{N}$ $(m+n \leqslant p \Rightarrow m!n! \mid p!)$. | ☐ | ☐ |
| **8.** Si $a = 5b+4$, alors 4 est le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$. | ☐ | ☐ |
| **9.** Si $a$, $b$, $m$ et $n$ sont des entiers relatifs avec avec $m \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$, alors on a l'implication suivante : $(a \equiv b\ [mn]) \Longrightarrow (a \equiv b\ [m])$. | ☐ | ☐ |
| **10.** $p$, $a$ et $n$ étant des entiers naturels, si $p \mid a^n$, alors $p \mid a$. | ☐ | ☐ |

# Énoncé des exercices

## Divisibilité, congruences et divisions euclidiennes

**Exercice 6.1 :** Le diviseur d'une division euclidienne est 45, le reste est le carré du quotient. Calculer le dividende entier naturel.

**Exercice 6.2 :** $n$ étant un entier relatif quelconque, montrer que les fractions suivantes sont irréductibles.

**1.** $\dfrac{2n+1}{3n+1}$. **2.** $\dfrac{15n^2+8n+6}{30n^2+21n+13}$.

**Exercice 6.3 :** $n$ étant un entier naturel quelconque, montrer les relations de divisibilité suivantes :

**1.** $7 \mid 3^{2n+1}+2^{n+2}$. **2.** $225 \mid 16^n-15n-1$. **3.** $11 \mid 5^{10^{5^{10^{5^{10}}}}}+10^{5^{10^{5^{10^{5}}}}}$.

**Exercice 6.4 :** Soit $a$, $b$ et $c$ des entiers relatifs. Montrer que si $7 \mid a^3+b^3+c^3$ alors $7 \mid abc$.

**Exercice 6.5 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
**1.** Montrer que le produit de $n$ entiers naturels consécutifs est toujours un multiple de $n!$.
**2.** En déduire que $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \in \mathbb{N}$.

## PGCD et théorèmes classiques

**Exercice 6.6 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = 3n^2+2n$ et $b_n = 2n^2+n$, déterminer $PGCD(a_n, b_n)$.

**Exercice 6.7 :** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $1\ 665x + 1\ 035y = 45$.

**Exercice 6.8* :** Montrer que 24 est le plus petit entier naturel $n$, à partir duquel tous les entiers naturels $n$ s'écrivent $5a+7b$ où $a$ et $b$ sont des entiers naturels.

**Exercice 6.9 :** Pour tout entier naturel $n$, on définit le nombre $u_n = 5^n + 6^n$, calculez alors $PGCD(u_n, u_{n+1})$.

**Exercice 6.10 :** On suppose que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible.
**1.** Démontrer qu'il en est de même de $\frac{a+b}{ab}$.
**2.** En déduire que $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ est également irréductible.

**Exercice 6.11 :** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les nombres réels $a_n$ et $b_n$ tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
**1.** Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel et en déduire que $a_n$ et $b_n$ sont uniques.
**2.** Montrer que $a_n$ et $b_n$ sont des entiers naturels premiers entre eux.

**Exercice 6.12 :** Existe-t-il des entiers relatifs $n$ tels que $\frac{n-6}{15}$ et $\frac{n-5}{12}$ soient des entiers relatifs ?

**Exercice 6.13* :** Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système : $a^2+b^2 = 85\ 113$ et $ab = 1\ 764PGCD(a,b)$.

## ■ Nombres premiers

**Exercice 6.14 : 1.** Montrer que 2003 est un nombre premier.
**2.** Déterminer deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que : $123u + 2003v = 1$.
**3.** En déduire un entier relatif $k_0$ tel que : $123k_0 \equiv 1$ [2003].
**4.** Montrer que, pour tout entier relatif $x$, $123x \equiv 456$ [2003] si, et seulement si, $x \equiv 456k_0$ [2003].
**5.** Déterminer l'ensemble des entiers relatifs $x$ tels que : $123x \equiv 456$ [2003].
**6.** Montrer qu'il existe un unique entier naturel $n$ tel que : $1 \leqslant n \leqslant 2002$ et $123n \equiv 456$ [2003].

*D'après Baccalauréat S, Métropole, septembre 2003*

**Exercice 6.15 :** Montrer que si $p$ est un nombre premier, $p \geqslant 5$, alors $24 \mid p^2 - 1$.

**Exercice 6.16 : 1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que : $2^n + 1 = m^2$.

**a.** Montrer qu'il existe deux entiers naturels $p$ et $q$ tels que : $0 \leqslant p < q \leqslant n$, $p + q = n$ et $m = 2^p + 1 = 2^q - 1$.

**b.** En déduire que $p = q - p = 1$. Que vaut alors $n$ ?

**2.** Pour quelle(s) valeur(s) de $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n + 1$ est-il un carré ?

**Exercice 6.17 :** Les questions suivantes sont indépendantes.
**1.** Démontrer que, pour tout entier naturel $k$, 7 divise $10^{6k+4} + 3$.
**2.** Démontrer que pour tout nombre premier $n$, $n$ divise $1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \cdots + (n-1)^{n-1} + 1$.

**Exercice 6.18* :** Pour tout entier naturel $n$, on définit le **nombre de Fermat** $F_n = 2^{2^n} + 1$.
**1.** Montrer que si $p$ est un entier naturel pair et $x$ un entier relatif, alors $x + 1 \mid x^p - 1$.
**2.** Montrer que pour tous les entiers naturels $m$ et $n$ avec $m \neq n$, on a $PGCD(F_m, F_n) = 1$.
**3.** En déduire que l'ensemble des nombres premiers est infini.

**Exercice 6.19 :** Démontrer que pour tout entier naturel $a$, $a^{37} - a$ est divisible par 1 919 190.

## ■ Pour aller plus loin

**Exercice 6.20 : Triplets pythagoriciens**
Soit $x$, $y$ et $z$ trois entiers naturels strictement positifs. On dit que $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ forme un triplet pythagoricien si : $x^2 + y^2 = z^2$.
**1.**

**a.** Démontrer, en étudiant tous les cas possibles, qu'aucun carré n'est congru à 2 modulo 4.

**b.** En déduire que $x$ et $y$ ne peuvent pas être impairs tous les deux.

Dans toute la suite, on suppose que $y$ est pair.

**c.** Démontrer que $x$ et $z$ ont même parité.

**2.** Étude d'un exemple : posons $y = 12$.

**a.** Déterminer tous les couples $(x\ ;\ z)$ d'entiers naturels qui satisfont à la relation $x^2 + y^2 = z^2$.

**b.** Parmi les triplets déterminés ci-dessus, quels sont ceux pour lesquels $x$, $y$ et $z$ n'ont aucun diviseur commun positif autre que 1 ?

On appellera désormais un tel triplet « triplet pythagoricien primitif » ou encore TPP.

**3.** On suppose ici que $x$, $y$ et $z$ forment un TPP.

**a.** Démontrer que $x$ et $z$ sont premiers entre eux.

**b.** On pose $y = 2p$, avec $p \in \mathbb{N}$. Démontrer que $p^2 = \frac{z+x}{2} \times \frac{z-x}{2}$.

**c.** Démontrer que $\frac{z+x}{2}$ et $\frac{z-x}{2}$ sont deux entiers naturels premiers entre eux.

**d.** En déduire qu'il existe deux entiers naturels $u$ et $v$ tels que $\frac{z+x}{2} = u^2$ et $\frac{z-x}{2} = v^2$.

**e.** Justifier que $u$ et $v$ sont premiers entre eux, de parités différentes, et que $u > v$.

**4.**

**a.** Démontrer qu'on a : $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$.

**b.** Réciproquement démontrer que si les entiers naturels $u$ et $v$ sont premiers entre eux, de parités différentes avec $u > v$, alors $(u^2 - v^2\ ;\ 2uv\ ;\ u^2 + v^2)$ est un TPP.

**5.**

**a.** Soit $d$ le plus grand diviseur commun à $x$, $y$ et $z$. Vérifier que si $x$, $y$ et $z$ forment un triplet pythagoricien, alors le triplet $\frac{x}{d}$, $\frac{y}{d}$ et $\frac{z}{d}$ est un TPP.

**b.** En déduire la forme générale d'un triplet pythagoricien.

**Exercice 6.21 : Nombres de Mersenne**

On appelle **nombre de Mersenne** les nombres notés $M_p$ de la forme $2^p - 1$, où $p$ est un entier naturel.

**Partie A. Exploration**

**1.**

**a.** Écrire un programme `Premier`$(n)$ en langage Python qui affiche True si $n$ est premier et False sinon.

**b.** Écrire un programme `Mersenne()` qui affiche tous les nombres $M_p$, $0 \leqslant p \leqslant 20$, qui sont premiers. Qu'observe-t-on quand $p$ est composé ? Quand $p$ est premier ?

**2.** Soit $a$ un nombre réel, vérifier que, pour tout entier naturel non nul $n$,
$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$. En déduire que si $p$ est composé, alors $M_p$ l'est aussi.

**3.** On suppose désormais que $M_p$ admet un diviseur premier $d$. Justifier les résultats :

**a.** $2^p \equiv 1\ [d]$ ;

**b.** $2^{d-1} \equiv 1\ [d]$.

Si $p$ est composé, tous les $M_p$ sont composés. Mais d'après la question **A.1.**, si $p$ est premier, il existe des $M_p$ composés. Ce sont leurs diviseurs que nous allons étudier.

**Partie B. Recherche**

On considère un nombre premier $p$ tel que $M_p = 2^p - 1$ admette un diviseur premier $d$. Soit $I$ l'ensemble des entiers naturels non nuls $n$ tels que $2^n \equiv 1\ [d]$.

**4.** Justifier que $I$ n'est pas vide et qu'il admet un plus petit élément $p_0$ (c'est-à-dire un élément de $I$, inférieur à tous les éléments de $I$) strictement supérieur à 1.

**5.** En écrivant la division euclidienne de $n$ par $p_0$, démontrer que tout élément de $I$ est un multiple de $p_0$.

**6.** En déduire que $p_0 = p$, et que $d - 1$ est un multiple de $p$.

**Partie C. Conclusion**

**7.** Démontrer finalement le résultat suivant : si $p$ est un nombre premier impair et si $d$ est un diviseur premier de $M_p = 2^p - 1$, alors il existe un entier naturel $k$ tel que $d = 2kp + 1$.

**8. Exemple.** Soit $M_{19} = 2^{19} - 1 = 524\,287$. D'après la règle énoncée à la question **C1**, les diviseurs premiers sont de la forme : $d = 2k \times 19 + 1 = 38k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$.

**a.** On donne $E\left(\sqrt{M_{19}}\right) = 747$ ($E(x)$ est la partie entière du nombre réel $x$). Combien y a-t-il de diviseurs de la forme $d = 38k + 1$, avec $d \leqslant 747$ ?

**b.** Démontrer que si $k$ prend l'une des formes $3m + 1$, $5m + 3$, $7m + 2$, avec $m \in \mathbb{N}$, $d$ n'est pas premier.

**c.** Combien y a-t-il finalement de cas à examiner ? $M_{19}$ est-il premier ?

**Exercice 6.22* : La base du système RSA**

**Partie A**

Dans toute la suite, $p$ et $q$ sont deux nombres premiers distincts et $a$ un entier naturel premier avec $p$ et $q$.

**1.** Montrer que $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1\ [p]$.

**2.** Montrer que $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1\ [q]$.

**3.** En déduire que $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1\ [pq]$.

**4.** Démontrer que, pour tout entier naturel $a$, si $k \equiv 1\ [(p-1)(q-1)]$ alors $a^k \equiv a\ [pq]$.

**Partie B**

Posons $n = (p-1)(q-1)$. Soit $c$ un entier naturel premier avec $n$, avec $1 < c < n$.

**1.** Justifier l'existence d'entiers relatifs $x$ et $y$ tels que $cx - ny = 1$.

**2.**

**a.** Démontrer que, si $(x_0\ ;\ y_0)$ est une solution de l'équation précédente, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + kn$.

**b.** En déduire qu'il existe un entier naturel $d$ et un seul strictement inférieur à $n$ tel que $cd \equiv 1\ [n]$.

**Partie C**

**1.** Déduire de tout ce qui précède que, quels que soient les entiers naturels $a$ et $b$, si $b \equiv a^c\ [pq]$ alors $b^d \equiv a\ [pq]$.

**2.** Exemple : prenons $p = 5$, $q = 19$ et $c = 61$.

**a.** Calculer les entiers naturels $n$ et $d$ introduits à la partie **B**.

**b.** Prenons $a = 3$. Vérifier que $3^7 \equiv 2\ [95]$. En déduire l'entier naturel $b$ compris entre 0 et 94 tel que $b \equiv a^c\ [pq]$.

**c.** Vérifier qu'on a bien alors $a \equiv b^d\ [pq]$.

# Indications

## Ex. 6.1

*Ne pas oublier la condition sur le reste pour réduire le nombre de cas à étudier.*

## Ex. 6.2

*Le PGCD de a et b divise n'importe quelle combinaison linéaire $ax + by$.*
*Utilisez cette propriété pour réduire au maximum le degré des polynômes en $n$.*

## Ex. 6.3

*Bien sûr raisonner avec des congruences, et pour chaque puissance, rechercher en premier lieu, le plus petit entier naturel $n$ non nul, s'il existe, vérifiant $a^n \equiv 1\ [m]$.*

## Ex. 6.4

*Les congruences toujours …*

## Ex. 6.5

*Voir du côté des coefficients binomiaux.*

## Ex. 6.7

*Voir la* **méthode 6.9** *et la* **méthode 6.11**.

## Ex. 6.8

*Voir la* **méthode 6.11**.

#### Ex. 6.9

*Encore une fois le PGCD divise toute expression* $xu_n + yu_{n+1}$ *et on choisit cette dernière de façon à réduire le nombre de termes de la somme.*

#### Ex. 6.10

**1.** *Montrez que* $a$ *et* $b$ *sont premiers avec* $a+b$.

**2.** *Exprimez le numérateur en fonction de* $a+b$ *et* $ab$.

#### Ex. 6.11

**1.** *Pour l'irrationalité, un raisonnement par l'absurde s'impose.*

**2.** *Une récurrence peut-être...*

#### Ex. 6.12

12 *et* 15 *sont des multiples de* 3*...*

#### Ex. 6.13

$a = a'PGCD(a\ ;\ b)$ *et* $b = b'PGCD(a\ ;\ b)$ *avec* $a'$ *et* $b'$*...*

#### Ex. 6.14

**1.** *Utiliser la* **méthode 6.5**.

**2.** *On pourra développer l'algorithme d'Euclide étendu détaillé dans la* **méthode 6.9**.

**3.** *Voir la* **méthode 6.3**.

#### Ex. 6.15

*On pourra montrer que* $p$ *est congrue à* 1 *ou* 3 *modulo* 4.

#### Ex. 6.16

**1.** *Quels sont les diviseur positifs de* $2^n$ *?*

**2.** *Reprendre la question précédente, sachant que* $p = \ldots$ *et* $q = \ldots$.

#### Ex. 6.17

*Il s'agit d'applications du* **petit théorème de Fermat** *(cf.* **théorème 6.14***).*

#### Ex. 6.18

**1.** *Au préalable, on pourra montrer que pour tout nombre réel* $x$ *et tout entier naturel non nul* $n$, $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$.

**2.** *Faire apparaître une identité de Bézout.*

**3.** *Utiliser le principe de Dirichlet (***méthode 6.13***) dans le cadre d'un raisonnement par l'absurde.*

#### Ex. 6.19

*On pourra décomposer* 1 919 190 *en produit de facteurs premiers en utilisant la* **méthode 6.6** *et utiliser plusieurs fois le* **théorème 6.14** *et le* **corollaire 6.14**.

#### Ex. 6.20

**1.b.c.** *On pourra réaliser un raisonnement par l'absurde.*

**3.d.** *Utiliser une décomposition en produits de facteurs premiers.*

**4.b.** *On pourra, entre autre, raisonner par l'absurde et considérer un diviseur premier* $p$ *commun à* $u^2 - v^2$, $2uv$ *et* $u^2 + v^2$ *et par combinaisons linéaires obtenir* $p \mid 2u^2$ *et* $p \mid 2v^2$*...*

**5.a.** *Si* $d'$ *est le plus grand diviseur commun à* $\frac{x}{d}$, $\frac{y}{d}$ *et* $\frac{z}{d}$, *alors* $dd'$ *est un diviseur commun à* $x$, $y$ *et* $z$.

#### Ex. 6.21

**1.** *On pourra utiliser la* **méthode 6.5**.

**4.** *Toute partie non vide de* $\mathbb{N}$ *admet un plus petit élément, c'est-à-dire un entier naturel inférieur à tous les autres.*

# Corrigé des vrai/faux

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | V | F | F | F | V | F | V | F |

**1.** Ce résultat ressemble au **corollaire 6.9**, mais l'hypothèse $a$ et $b$ premiers entre eux est absente, en conséquence l'affirmation est fausse, par exemple : $4 \mid 12$ et $6 \mid 12$, mais $4 \times 6 \nmid 12$.
**2.** Prenons $x = 7$, on a bien $4 \times 7 \equiv 8$ [20], mais $7 \not\equiv 2$ [20].
**3.** $P$ est factorisé, mais cela n'implique nullement que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ se factorise. Dans le cas d'espèce l'affirmation est fausse, puisqu'on a par exemple $P(4) = 3$ qui est un nombre premier.
**4.** $3 \equiv 8$ [5] et $4 \equiv -1$ [5], on a bien $3 < 4$, mais $8 > -1$.
**5.** Ce résultat est faux, plus exactement c'est $PGCD(a, b) \mid d$ qui est vraie. Par contre la réciproque est vraie, c'est même l'objet du **théorème 6.6**.
**6.** $u_9 = 326\ 981 = 79 \times 4\ 139$ donc $(u_n)_{n \geqslant 3}$ n'est pas une suite de nombres premiers, et $u_9$ est le premier terme de cette suite qui soit composé. En arithmétique, et ailleurs, il ne faut pas hésiter à faire des calculs pour se convaincre des résultats annoncés et avant de se lancer dans une démonstration.
**7.** Si $m$ ou $n$ est nul, le résultat est immédiat : par exemple si $m = 0$, $p! = n!(n+1)(n+2)...p$ et $m! = 1$ donc $m!n! \mid p!$. Plaçons-nous dans le cas où $m$ et $n$ ne sont pas nuls et considérons un mot de $p$ lettres, ce mot admet $p!$ anagrammes. Supposons que ce mot contienne deux lettres, que nous noterons A et B, se répétant respectivement $m$ et $n$ fois. Parmi les anagrammes précédemment cités, beaucoup se répètent, sans les permutations de la lettre A, il y a $\frac{p!}{m!}$ anagrammes et sans les permutations de B il en existe $\frac{\frac{p!}{m!}}{n!} = \frac{p!}{m!n!}$, d'où le résultat annoncé.
**8.** Il suffit de poser $a = 19$ et $b = 3$, ainsi $a = 5b + 4$ n'est pas la division euclidienne de $a$ par $b$. Attention à ne pas oublier la condition sur le reste !
**9.** $m \mid mn$ et $mn \mid a - b$ donc $m \mid a - b$ d'où le résultat annoncé.
**10.** On a par exemple $12 \mid 6^2$, mais $12 \nmid 6$.

**❑ Erreurs classiques**

- Avec la relation de congruence, on peut ajouter, soustraire et multiplier d'où la facilité d'utilisation de cette relation. Mais seule la division n'est pas toujours réalisable, en fait un entier relatif $a$ admet un inverse modulo un entier naturel non nul $m$ si, et seulement si, $a$ et $m$ sont premiers entre eux (cf. **méthode 6.3**).
- Si $P$ et $Q$ sont des fonctions polynomiales non constantes à coefficients entiers relatifs, et $n$ un entier relatif, le nombre $P(n)Q(n)$ n'est pas nécessairement composé.
- L'identité de Bézout (**théorème 6.6**) n'est pas une équivalence, contrairement au théorème de Bézout.

# Corrigé des exercices

## Exercice 6.1

Dans cette division euclidienne, on peut écrire : $a = 45q + q^2$ avec $0 \leqslant q^2 < 45$, $a$ est le dividende, $q$ le quotient et $q^2$ le reste. L'encadrement permet d'affirmer que $-6 \leqslant q \leqslant 6$. On veut que $a$ soit un entier naturel, donc $a \geqslant 0$ autrement dit $q(45+q) \geqslant 0$, étant donné l'encadrement de $q$ on a nécessairement $45 + q \geqslant 0$ donc $q \geqslant 0$. Conclusion : $a = 45q + q^2$ avec $q \in [\![0, 6]\!]$, autrement dit les dividendes cherchés sont 0, 46, 94, 144, 196, 250 et 306. ▲

## Exercice 6.2

**1.** Soit $n$ un entier relatif et $d_n = PGCD(2n+1, 3n+1)$, alors $d_n \mid 3(2n+1) - 2(3n+1)$, donc $d_n \mid 1$, ainsi $d_n = 1$ et par conséquent $2n+1$ et $3n+1$ sont premiers entre eux, conclusion la fraction $\dfrac{2n+1}{3n+1}$ est toujours irréductible.

**2.** Soit $n$ un entier relatif et $d_n = PGCD(15n^2 + 8n + 6, 30n^2 + 21n + 13)$,
$\left\{\begin{array}{l} d_n \mid 15n^2 + 8n + 6 \\ d_n \mid 30n^2 + 21n + 13 \end{array}\right. \Rightarrow d_n \mid 30n^2 + 21n + 13 - 2(15n^2 + 8n + 6)$
$\Rightarrow d_n \mid 5n + 1$. D'autre part $\left\{\begin{array}{l} d_n \mid 15n^2 + 8n + 6 \\ d_n \mid 5n + 1 \end{array}\right.$
$\Rightarrow d_n \mid 15n^2 + 8n + 6 - 3n(5n+1) \Rightarrow d_n \mid 5n + 6$. En conséquence $\left\{\begin{array}{l} d_n \mid 5n + 1 \\ d_n \mid 5n + 6 \end{array}\right.$
$\Rightarrow d_n \mid 5n + 6 - (5n+1) \Rightarrow d_n \mid 5$, donc $d_n \in \{1, 5\}$. On a montré que $d_n = PGCD(15n^2 + 8n + 6, 30n^2 + 21n + 13) \Rightarrow d_n \in \{1, 5\}$. Nous avons bien trouvé une condition nécessaire pour que $d_n$ soit le $PGCD$ cherché, reste à passer en revue les différents cas pour obtenir une condition suffisante. Supposons que 5 soit un $PGCD$ possible, étudions les valeurs modulo 5 du numérateur et du dénominateur, on obtient le tableau suivant

| $n \equiv \ldots$ [5] | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $15n^2 + 8n + 6 \equiv \ldots$ [5] | 1 | 4 | 2 | $\boxed{0}$ | 3 |
| $30n^2 + 21n + 13 \equiv \ldots$ [5] | 3 | 4 | $\boxed{0}$ | 1 | 2 |

D'après ce tableau, 5 n'est pas un diviseur commun de $15n^2 + 8n + 6$ et $30n^2 + 21n + 13$, donc puisque $d_n \in \{1, 5\}$, 1 est le seul diviseur commun, autrement dit $15n^2 + 8n + 6$ et $30n^2 + 21n + 13$ sont premiers entre eux. Conclusion la fraction $\dfrac{15n^2 + 8n + 6}{30n^2 + 21n + 13}$ est toujours irréductible. ▲

✎ *Les polynômes s'annulent bien modulo 5, mais pas pour les mêmes valeurs de $n$.*

## Exercice 6.3

On met en œuvre la **méthode 6.2** et la **méthode 6.4**. Dans ce qui suit $n$ est un entier naturel.

**1.** $3^{2n+1} = (3^2)^n 3$, or $3^2 \equiv 2$ [7] donc $(3^2)^n \equiv 2^n$ [7] et $(3^2)^n 3 \equiv 2^n 3$ [7]. On constate que $2^3 \equiv 1$ [7], effectuons alors la division euclidienne de $n$ par 3, il existe ainsi deux entiers naturels $q$ et $r$ tels que $n = 3q + r$ avec $0 \leq r < 3$, comme $2^n = 2^{3q+r} = (2^3)^q 2^r \equiv 2^r$ [7] on a en définitive $3^{2n+1} \equiv 2^r 3$ [7].

Conclusion partielle : $3^{2n+1} \equiv \left\{\begin{array}{l} 3 \text{ [7] si } r = 0 \\ 6 \text{ [7] si } r = 1 \\ 5 \text{ [7] si } r = 2 \end{array}\right.$. Par ailleurs

Corrigé

$2^{n+2} = 2^n 2^2 \equiv 2^{r+2}$ [7] donc $2^{n+2} \equiv \begin{cases} 4 \ [7] \text{ si } r=0 \\ 1 \ [7] \text{ si } r=1 \\ 2 \ [7] \text{ si } r=2 \end{cases}$ et dans tous les cas $3^{3n+1} + 2^{n+2} \equiv 0$ [7] donc $7 \mid 3^{3n+1} + 2^{n+2}$.

**2.** $225 = 3^2 5^2$, nous allons montrer que $3^2$ et $5^2$ divisent $16^5 - 15n - 1$, puis nous conclurons avec le corollaire du théorème de Gauss (**théorème 6.8**).

• Étudions la divisibilité par 9. Tout d'abord nous avons que $16^3 \equiv 1$ [9], nous effectuons alors la division euclidienne de $n$ par 3 et comme précédemment on obtient $16^n \equiv 16^r$ [9] où $r$ est le reste de cette division. Si $q$ est son quotient $15n = 15(3q+r) = 45q + 15r \equiv 15r$ [9], donc $16^n - 15n - 1 \equiv 16^r - 15r - 1$ [9] et pour toutes les valeurs de $r$ (0, 1 ou 2), $16^r - 15r - 1 \equiv 0$ [9], donc $\boxed{9 \mid 16^n - 15n - 1}$.

• Nous allons montrer de même que $25 \mid 16^n - 15n - 1$. Tout d'abord nous constatons que $16^5 \equiv 1$ [25], nous effectuons alors la division euclidienne de $n$ par 5 et comme précédemment on obtient $16^n \equiv 16^r$ [25] où $r$ est le reste de cette division. Si $q$ est son quotient $15n = 15(5q+r) = 75q + 15r \equiv 15r$ [25], donc $16^n - 15n - 1 \equiv 16^r - 15r - 1$ [25] et pour toutes les valeurs de $r$ (0, 1, 2, 3 et 4), $16^r - 15r - 1 \equiv 0$ [25], donc $\boxed{25 \mid 16^n - 15n - 1}$.

• 9 et 25 sont premiers entre eux, donc d'après un corollaire du théorème de Gauss $9 \times 25 \mid 16^n - 15n - 1$ c'est-à-dire $\boxed{225 \mid 16^n - 15n - 1}$.

**3.** $10 \equiv -1$ [11], et 5 étant impair, $5^{10^{5^{10^5}}}$ l'est aussi, donc puisque $10^{5^{10^{5^{10^5}}}} \equiv (-1)^{5^{10^{5^{10^5}}}}$ [11] on a $\boxed{10^{5^{10^{5^{10^5}}}} \equiv -1 \ [11]}$. D'autre part, posons $b = 5^{10^{5^{10}}}$, alors $5^{10^{5^{10^{5^{10}}}}} = 5^{10^b}$ or $5^{10} \equiv 1$ [11] et
$5^{10^b} = 5^{10 \times 10^{b-1}} = (5^{10})^{10^{b-1}}$ comme $(5^{10})^{10^{b-1}} \equiv 1$ [11], on a $\boxed{5^{10^{5^{10^{5^{10}}}}} \equiv 1 \ [11]}$. Conclusion : $10^{5^{10^{5^{10^5}}}} + 5^{10^{5^{10^{5^{10}}}}} \equiv 0$ [11], autrement dit $\boxed{11 \mid 5^{10^{5^{10^{5^{10}}}}} + 10^{5^{10^{5^{10^5}}}}}$. ▲

## Exercice 6.4

| $x \equiv \ldots$ [7] | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^3 \equiv \ldots$ [7] | 0 | 1 | 1 | 6 | 1 | 6 | 6 |

Notons $a'$, $b'$ et $c'$ les restes respectifs de la division euclidienne de $a^3$, $b^3$ et $c^3$ par 7, d'après le tableau ci-dessus,

$$\begin{aligned} (a'+b'+c' \equiv 0 \ [7]) \quad &\Leftrightarrow \quad (a'=b'=c'=0 \text{ ou } \{a',b',c'\} = \{0,1,6\}) \\ &\Longrightarrow \quad a'b'c' \equiv 0 \ [7] \end{aligned}.$$

D'après le **théorème 6.10**, 7 étant premier et puisque $7 \mid a'b'c'$ nécessairement 7 divise l'un des facteurs $a'$, $b'$ ou $c'$, or d'après le tableau, ceci n'aura lieu que si 7 divise $a$, $b$ ou $c$ auquel cas $7 \mid abc$. Nous avons montré que
$7 \mid a^3 + b^3 + c^3 \Longrightarrow 7 \mid abc$. ▲

## Exercice 6.5

Dans ce qui suit $n$ est un entier naturel non nul.

**1.** Le produit de $n$ entiers naturels consécutifs est de la forme
$N = (p+1)(p+2)...(p+n)$ où $p$ est un entier naturel. Par ailleurs

$\binom{n+p}{p} = \frac{(n+p)!}{p!n!} = \frac{(p+1)(p+2)...(p+n)}{n!} = \frac{N}{n!}$, or $\binom{n+p}{p}$ est un entier naturel, donc il en est de même de $\frac{N}{n!}$ ainsi $n! \mid N$. Conclusion le produit de $n$ entiers naturels consécutifs est toujours un multiple de $n!$.

**2.** $(2n)! = \underbrace{1 \times 2 \times ... \times n}_{n \text{ entiers consécutifs}} \times \underbrace{(n+1) \times (n+2) \times ... \times 2n}_{n \text{ entiers consécutifs}}$, or d'après la question précédente, il existe deux entiers naturels $k$ et $k'$ tels que $1 \times 2 \times ... \times n = k(n!)$ et $(n+1) \times (n+2) \times ... \times 2n = k'(n!)$, donc $(2n)! = kk'(n!)^2$, ainsi on a montré que $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$. ▲

## Exercice 6.6

Il s'agit de mettre en œuvre la **méthode 6.10**. Soit $n$ un entier naturel non nul, $PGCD(a_n, b_n) = n^2 PGCD(3n+2, 2n+1)$. $2(3n+2) - 3(2n+1) = 1$ donc d'après le théorème de Bézout
$PGCD(3n+2, 2n+1) = 1$, conclusion $PGCD(a_n, b_n) = n^2$. ▲

## Exercice 6.7

Il s'agit de mettre en œuvre la **méthode 6.11**. En divisant par 45, l'équation $1\ 665x + 1\ 035y = 45$ devient $37x + 23y = 1$, notons $(E)$ cette équation. Il nous faut maintenant trouver une solution particulière à cette équation, pour cela appliquons l'algorithme d'Euclide étendu expliqué dans la **méthode 6.9**. Dans ce qui suit, posons $a = 37$ et $b = 23$.

*37 et 23 étant premiers entre eux, le théorème de Bézout nous assure l'existence d'un couple solution.*

| **Divisions euclidiennes** | **Combinaisons linéaires de $a$ et $b$** |
|---|---|
| $a = b \times 1 + 14$ | $a - b = 14$ |
| $b = 14 \times 1 + 9$ | $b = a - b + 9$ <br> $-a + 2b = 9$ |
| $14 = 9 \times 1 + 5$ | $a - b = -a + 2b + 5$ <br> $2a - 3b = 5$ |
| $9 = 5 \times 1 + 4$ | $-a + 2b = 2a - 3b + 4$ <br> $-3a + 5b = 4$ |
| $5 = 4 \times 1 + 1$ | $2a - 3b = -3a + 5b + 1$ <br> $\boxed{5a - 8b = 1}$ |
| $4 = 1 \times 4 + 0$ | |

$(5, -8)$ est solution de l'équation $(E)$, recherchons toutes les autres. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble solution de $(E)$. Soit $(x, y) \in \mathcal{S}$, on a
$37x + 23y = 37 \times 5 + 23 \times (-8)$, donc $37(x-5) = -23(y+8)$ $(*)$, ainsi $37 \mid -23(y+8)$ or 37 et 23 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss $37 \mid y+8$, il existe alors un entier relatif $k$ tel que $y + 8 = 37k$ donc $y = -8 + 37k$. L'égalité $(*)$ devient $37(x-5) = -23 \times 37k$ donc $x = 5 - 23k$.
On a montré que :

$$(x, y) \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x &= 5 - 23k \\ y &= -8 + 37k \end{cases}$$

c'est-à-dire l'inclusion : $\mathcal{S} \subset \{(5 - 23k, -8 + 37k) : k \in \mathbb{Z}\}$. Reste à montrer l'inclusion inverse pour avoir l'égalité entre les deux ensembles. Soit $k$ un entier relatif quelconque, définissons les entiers relatifs $x = 5 - 23k$ et $y = -8 + 37k$, $(x, y)$ est-il une solution de l'équation $37x + 23y = 1$ ? Faisons le calcul :

$37x + 23y = 37(5 - 23k) + 23(-8 + 37k) = 1$. Nous avons montré que $\boxed{\mathcal{S} = \{(5 - 23k, -8 + 37k) : k \in \mathbb{Z}\}}$. ▲

**Exercice 6.8**

Soit $n \in \mathbb{N}$ nous allons résoudre l'équation $(E) : 5x + 7y = n$ dans $\mathbb{Z}^2$. Reprenons la **méthode 6.11**. $(3n, -2n)$ est une solution de l'équation $(E)$, recherchons toutes les autres. Notons $S$ l'ensemble solution de $(E)$. Soit $(x, y) \in S$, on a $5x + 7y = 5 \times 3n + 7 \times (-2n)$, donc $5(x - 3n) = -7(y + 2n)$ $(*)$, ainsi $5 \mid -7(y + 2n)$ or 5 et 7 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss $5 \mid y + 2n$, il existe alors un entier relatif $k$ tel que $y + 2n = 5k$ donc $y = -2n + 5k$. L'égalité $(*)$ devient $5(x - 3n) = -7 \times 5k$ donc $x = 3n - 7k$. On a montré que :

$$(x, y) \in S \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 3n - 7k \\ y & = & -2n + 5k \end{array} \right.$$

c'est-à-dire l'inclusion : $S \subset \{(3n - 7k, -2n + 5k) : k \in \mathbb{Z}\}$. Reste à montrer l'inclusion inverse pour avoir l'égalité entre les deux ensembles. Soit $k$ un entier relatif quelconque, définissons les entiers relatifs $x = 3n - 7k$ et $y = -2n + 5k$, $(x, y)$ est-il une solution de l'équation $5x + 7y = n$ ? Faisons le calcul :
$5x + 7y = 5(3n - 7k) + 7(-2n + 5k) = n$. Nous avons montré que
$\boxed{S = \{(3n - 7k, -2n + 5k) : k \in \mathbb{Z}\}}$. Pour répondre au problème posé, nous cherchons un couple d'entiers naturels $(a, b)$ tel que $n = 5a + 7b$. D'après ce qui précède, $(a, b) \in S$ donc il existe un entier relatif $k$ tel que $a = 3n - 7k$ et $b = -2n + 5k$. $a$ et $b$ étant des entiers naturels, ils sont positifs donc $3n - 7k \geq 0$ et $-2n + 5k \geq 0$, il en résulte alors l'encadrement suivant : $\frac{2n}{5} \leqslant k \leqslant \frac{3n}{7}$. $k$ est un entier relatif, et pour qu'il en soit ainsi, il suffit que l'intervalle $\left[\dfrac{2n}{5}, \dfrac{3n}{7}\right]$ soit de longueur au moins égale à 1. La longueur de l'intervalle est $\dfrac{3n}{7} - \dfrac{2n}{5} = \dfrac{n}{35}$ et $\dfrac{n}{35} \geqslant 1 \Leftrightarrow n \geqslant 35$, donc si $n \geqslant 35$, il existe un entier naturel $k$ tel que $a = 3n - 7k \geqslant 0$ et $b = -2n + 5k \geqslant 0$. Conclusion partielle : pour tout entier naturel $n \geqslant 35$, il existe un couple d'entiers naturels $(a, b)$ tel que $5a + 7b = n$. Pour les cas de 24 à 34, on teste à la « main » : $24 = 5 \times 2 + 7 \times 2$, $25 = 5 \times 5 + 7 \times 0$, $26 = 5 \times 1 + 7 \times 3$, $27 = 5 \times 4 + 7 \times 1$, $28 = 5 \times 0 + 7 \times 4$, $29 = 5 \times 3 + 7 \times 2$, $30 = 5 \times 6 + 7 \times 0$, $31 = 5 \times 2 + 7 \times 3$, $32 = 5 \times 5 + 7 \times 1$, $33 = 5 \times 1 + 7 \times 4$, $34 = 5 \times 4 + 7 \times 2$. Par contre 23 ne vérifie pas la condition requise par l'énoncé. Nous avons montré que 24 est le plus petit entier naturel $n$, à partir duquel tous les entiers naturels $n$ s'écrivent $5a + 7b$ où $a$ et $b$ sont des entiers naturels. ▲

✎ *$k$ est un entier relatif supérieur à $\frac{2n}{5}$, il est donc positif par conséquent c'est un entier naturel.*

**Exercice 6.9**

$n$ étant un entier naturel, notons $d_n = PGCD(u_n, u_{n+1})$. $d_n \mid 6u_n - u_{n+1}$, donc $d_n \mid 5^n$, d'autre part $d_n \mid u_n - 5u_{n+1}$, donc $d_n \mid 6^n$. Supposons que $d_n \neq 1$, alors $d_n$ est divisible par un nombre premier $p_n$, ainsi $p_n \mid 5^n$ et $p_n \mid 6^n$, d'après le **théorème 6.10**, $p_n \mid 5$ et $p_n \mid 6$, ce qui est impossible, donc $d_n = 1$, conclusion $\forall n \in \mathbb{N},\ PGCD(u_n, u_{n+1}) = 1$. ▲

## Exercice 6.10

Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs avec $b \neq 0$, tels que $\dfrac{a}{b}$ soit irréductible, alors $a$ et $b$ sont premiers entre eux.

**1.** Soit $d$ un diviseur positif commun de $a$ et $a+b$, alors $d \mid a+b-a$, donc $d \mid b$, ainsi $d \mid a$ et $d \mid b$, $a$ et $b$ étant premiers entre eux, nécessairement $d=1$, conclusion $a$ et $a+b$ sont premiers entre eux. On montrerait de même que $b$ et $a+b$ sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout il existe deux couples d'entiers relatifs $(u,v)$ et $(u',v')$ tels que $(a+b)u+av=1$ et $(a+b)u'+bv'=1$, faisons le produit membre à membre :
$(a+b)^2uu'+abvv'+(a+b)buv'+(a+b)au'v=1$ que l'on peut réécrire $(a+b)U+abV=1$ avec $U=(a+b)uu'+buv'+au'v$ et $V=vv'$ deux entiers relatifs, donc toujours d'après le théorème de Bézout $a+b$ et $ab$ sont premiers entre eux et donc la fraction $\dfrac{a+b}{ab}$ est irréductible.

*Deux entiers relatifs admettent au moins 1 comme diviseur commun, par conséquent ils ont toujours un diviseur positif.*

**2.** Remarquons tout d'abord que $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b} = \dfrac{(a+b)^2-ab}{a+b}$. Soit $d$ un diviseur positif de $(a+b)^2-ab$ et $a+b$, alors il existe deux entiers relatifs $k$ et $k'$ tels que $a+b=kd$ et $(a+b)^2-ab=k'd$, donc $(kd)^2-ab=k'd$ et de fait $(k^2d-k')d=ab$. Finalement $d \mid ab$ et $d \mid a+b$, or d'après la question précédente $a+b$ et $ab$ sont premiers entre eux, donc $d=1$. Conclusion, $a^2+ab+b^2$ et $a+b$ sont premiers entre eux et donc la fraction $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ est irréductible. ▲

## Exercice 6.11

**1.** Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel, alors il existe deux entiers naturels premiers entre eux $p$ et $q$ tels que $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$. Il résulte de cette égalité que $p^2=2q^2$, par conséquent $2 \mid p^2$, 2 étant premier, d'après le **théorème 6.10** $2 \mid p$ donc il existe un entier naturel $p'$ tel que $p=2p'$, ainsi $4p'^2=2q^2$, soit $2p'^2=q^2$ donc $2 \mid q^2$ ce qui entraîne là aussi que $2 \mid q$. Nous avons montré que 2 est un diviseur commun de $p$ et $q$ ce qui est absurde puisque par hypothèse ils sont premiers entre eux, conclusion $\sqrt{2}$ est irrationnel.

*Toute fraction non nulle admet une écriture irréductible.*

Montrons que les $a_n$ et $b_n$ sont uniques. Soit $(a_n,b_n)$ et $(a'_n,b'_n)$ deux couples de nombres réels tels que $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ et $(1+\sqrt{2})^n=a'_n+b'_n\sqrt{2}$, alors $a_n+b_n\sqrt{2}=a'_n+b'_n\sqrt{2}$, autrement dit $a_n-a'_n=(b'_n-b_n)\sqrt{2}$. Si $(b'_n-b_n)=0$, alors $a_n-a'_n=0$, donc $(a_n,b_n)=(a'_n,b'_n)$. Si $(b'_n-b_n)\neq 0$, alors $\sqrt{2}=\dfrac{a_n-a'_n}{b'_n-b_n}$ (quotient de deux entiers relatifs), donc $\sqrt{2}$ est rationnel ce qui est absurde. Conclusion, les $a_n$ et $b_n$ sont bien uniques.

**2.** Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $a_n$ et $b_n$ sont des entiers naturels premiers entre eux.

Pour tout entier naturel $n$, on définit la proposition $\mathcal{P}_n$ par « $a_n$ et $b_n$ sont des entiers naturels premiers entre eux ».

- **Initialisation :** Si $n=0$, $(1+\sqrt{2})^0=1=1+0\sqrt{2}$, donc par unicité des nombres $a_n$ et $b_n$, $a_0=1$ et $b_0=0$ qui sont bien premiers entre eux, donc la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \geqslant 0$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Corrigé

$\mathcal{P}_n$ est vraie donc $a_n$ et $b_n$ sont des entiers naturels premiers entre eux.

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^{n+1} &= (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n \\ &= (1+\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2}) \\ (1+\sqrt{2})^{n+1} &= a_n+2b_n+(a_n+b_n)\sqrt{2}\end{aligned}$$

Par unicité des nombres $a_n$ et $b_n$, $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$. $a_n$ et $b_n$ étant des entiers naturels, il en est de même de $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$. Notons $d = PGCD(a_{n+1}, b_{n+1})$, alors $d \mid a_{n+1}$ et $d \mid b_{n+1}$, donc $d \mid 2b_{n+1} - a_{n+1}$, autrement dit $d \mid a_n$. D'autre part $d \mid a_n + b_n$ donc puisque $d \mid a_n$, on a $d \mid a_n + b_n - a_n$, soit $d \mid b_n$. Nous avons $d \mid a_n$ et $d \mid b_n$, or $a_n$ et $b_n$ sont premiers entre eux, donc $d = 1$, par conséquent $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ sont premiers entre eux et la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• **Conclusion :** On a montré par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $a_n$ et $b_n$ sont des entiers naturels premiers entre eux. ▲

### Exercice 6.12

Supposons l'existence d'un entier relatif $n$ tel que $\frac{n-6}{15}$ et $\frac{n-5}{12}$ soient des entiers relatifs, alors $15 \mid n-6$ et $12 \mid n-5$. Comme 3 divise 15 et 12, 3 divise $n-6$ et $n-5$, autrement dit $n-6 \equiv 0$ [3] et $n-5 \equiv 0$ [3], autrement dit $n \equiv 0$ [3] et $n \equiv 2$ [3] et par conséquent $2 \equiv 0$ [3] ce qui signifie que $3 \mid 2$ ce qui est absurde, conclusion $\frac{n-6}{15}$ et $\frac{n-5}{12}$ ne sont jamais des entiers relatifs (pour aucun entier relatif $n$). ▲

### Exercice 6.13

On résout dans $\mathbb{N}^2$ le système ci-dessous, autrement dit on cherche tous les couples d'entiers naturels $(a\ ;\ b)$ vérifiant celui-ci.

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 85\ 113 \\ ab = 1\ 764 PGCD(a,b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a'PGCD(a,b) \text{ et } b = b'PGCD(a,b) \\ (a'^2+b'^2)PGCD(a,b)^2 = 85\ 113 \\ a'b'PGCD(a,b)^2 = 1\ 764 PGCD(a,b) \end{cases}$$

✎ **Théorème 6.5.**

Résoudre ce système revient à trouver tous les couples $(a'\ ;\ b')$ d'entiers naturels premiers entre eux vérifiant :

$$\begin{cases} k \in \mathbb{N}^* \text{ et } a = ka' \text{ et } b = kb' \\ (a'^2+b'^2)k^2 = 85\ 113 \\ a'b'k = 1\ 764 \end{cases}$$

. Décomposons 85 113 et 1 764 en produits de facteurs premiers : $85\ 113 = 3^2 \times 7^2 \times 193$ et $1\ 764 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2$. D'après le précédent système, $k^2$ divise 85 113 et $k$ divise 1 764, donc d'après les décompositions en produits de facteurs premiers, $k = 1$ ou $k = 3$ ou $k = 7$ ou $k = 21$. Recherchons une condition nécessaire vérifiée par $a'$ et $b'$. On sait que $a'^2 + b'^2 = \frac{85\ 113}{k^2}$ et $a'b' = \frac{1\ 764}{k}$. Multiplions la première égalité par $a'^2$, on obtient alors $a'^4 + (a'b')^2 = \frac{85\ 113}{k^2}a'^2$ ou encore $a'^4 - \frac{85\ 113}{k^2}a'^2 + \frac{1\ 764^2}{k^2} = 0$, nous sommes donc en présence d'une équation bicarrée en $a'$. Par conséquent, si $\Delta = \frac{85\ 113^2}{k^4} - 4\frac{1\ 764^2}{k^2}$ est le discriminant de l'équation du second degré sous-jacente, on a $a'^2 = \dfrac{\frac{85\ 113}{k^2} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, il reste à passer en revue toutes les valeurs de $k$ possibles. À ce stade, on utilise la calculatrice. Si $k = 1$, $a'^2$ n'est

✎ *Une équation bicarrée est de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ avec $a \neq 0$. Pour la résoudre, on pose $X = x^2$.*

pas un entier donc impossible ; si $k = 3$ idem ; si $k = 7$ idem ; si $k = 21$ alors ${a'}^2 = 49$ ou ${a'}^2 = 144$ donc $a' = 7$ ou $a' = 12$. Par ailleurs $a'b' = \dfrac{1\ 764}{k}$ on a $b' = \dfrac{84}{a'}$, donc si $a' = 7$ alors $b' = 12$ et si $a' = 12$, $b' = 7$. En conséquence les solutions possibles du système initial sont $(21 \times 12\ ;\ 21 \times 7) = (252\ ;\ 147)$ et $(147\ ;\ 252)$, et pour finir, on constate après calcul avec le système initial, que ce sont effectivement les solutions cherchées. ▲

## Exercice 6.14

**1.** Utilisons la **méthode 6.5**. $\sqrt{2003} \approx 44$ et on vérifie que 2003 n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à 44, donc 2003 est un nombre premier.

**2.** Afin de trouver un couple $(u, v)$ solution, nous développerons l'algorithme d'Euclide étendu. Posons $a = 2003$ et $b = 123$.

| **Divisions euclidiennes** | **Combinaisons linéaires de $a$ et $b$** |
|---|---|
| $a = b \times 16 + 35$ | $a - 16b = 35$ |
| $b = 35 \times 3 + 18$ | $b = (a - 16b) \times 3 + 18$<br>$b = 3a - 48b + 18$<br>$-3a + 49b = 18$ |
| $35 = 18 \times 1 + 17$ | $a - 16b = (-3a + 49b) \times 1 + 17$<br>$4a - 65b = 17$ |
| $18 = 17 \times 1 + 1$ | $-3a + 49b = (4a - 65b) \times 1 + 1$<br>$\boxed{-7a + 114b = 1}$ |
| $17 = 1 \times 17 + 0$ | |

Nous obtenons par cette méthode $(u, v) = (114, -7)$.

**3.** $123 \times 114 + 2003 \times (-7) = 1$, donc $123 \times 114 \equiv 1\ [2003]$, prenons alors $k_0 = 114$, ainsi $123k_0 \equiv 1\ [2003]$.

**4.** Ici nous utiliserons la **méthode 6.3**.

$$123x \equiv 456\ [2003] \Longrightarrow k_0 123x \equiv 456k_0\ [2003]$$

D'autre part

$$123k_0 \equiv 1\ [2003] \Longrightarrow 123k_0x \equiv x\ [2003]$$

Par conséquent, par transitivité de la relation de congruence (voir la **proposition 6.3**), on a l'implication :

$$123x \equiv 456\ [2003] \Longrightarrow x \equiv 456k_0\ [2003]$$

Réciproquement

$$x \equiv 456k_0\ [2003] \Longrightarrow 123x \equiv 456k_0 \times 123\ [2003]$$

D'autre part

$$123k_0 \equiv 1\ [2003] \Longrightarrow 123k_0 \times 456 \equiv 456\ [2003]$$

Par conséquent, par transitivité de la relation de congruence, on a l'implication :

$$x \equiv 456k_0\ [2003] \Longrightarrow 123x \equiv 456\ [2003]$$

L'équivalence est démontrée.

**5.** Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
123x \equiv 456\ [2003] \quad &\Leftrightarrow \quad x \equiv 456k_0\ [2003] \\
&\Leftrightarrow \quad x \equiv 456 \times 114\ [2003] \\
&\Leftrightarrow \quad x \equiv 1909\ [2003] \\
123x \equiv 456\ [2003] \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{S} = \{1909 + 2003k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Corrigé

**6.** On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant n \leqslant 2002 \\ 123n \equiv 456\ [2003] \end{array}\right.$. Par conséquent, on cherche $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \in \mathcal{S}$ et $1 \leqslant n \leqslant 2002$, il existe alors un entier relatif $k$ tel que $n = 1909 + 2003k$ et $1 \leqslant n \leqslant 2002$.

$$\begin{array}{rcl} 1 \leqslant n \leqslant 2002 & \Leftrightarrow & 1 \leqslant 1909 + 2003k \leqslant 2002 \\ & \Leftrightarrow & -1908 \leqslant 2003k \leqslant 93 \\ 1 \leqslant n \leqslant 2002 & \Leftrightarrow & -\frac{1908}{2003} \leqslant k \leqslant \frac{93}{2003} \end{array}$$

0 est la seule valeur de $k$ vérifiant cet encadrement, donc 1909 est l'unique valeur de $n$ répondant au problème. ▲

## Exercice 6.15

Soit $p$ un nombre premier, $p \geqslant 5$, $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. $p-1$, $p$ et $p+1$ sont trois entiers naturels consécutifs, donc l'un d'eux est divisible par 3, en effet $r$ étant le reste de la division euclidienne de $p$ par 3, si $r = 0$, alors $p$ est divisible par 3 ; si $r = 1$, alors le reste de la division euclidienne de $p-1$ par 3 est 0, donc 3 divise $p-1$ ; enfin si $r = 2$ c'est $p+1$ qui est divisible par 3. D'autre part, $p$ étant premier, si $p$ est divisible par 3 c'est que $p = 3$, ce qui est impossible, puisque $p \geqslant 5$, donc finalement 3 divise $p-1$ ou $p+1$, ainsi $3 \mid p^2 - 1$.
Montrons tout d'abord que $p \equiv 1\ [4]$ ou $p \equiv 3\ [4]$. $p$ est congrue à 0, 1, 2 ou 3 modulo 4. Si $p \equiv 0\ [4]$, alors $4 \mid p$ ce qui est impossible puisque $p$ est premier. Si $p \equiv 2\ [4]$, alors il existe un entier naturel $k$ tel que $p = 2 + 4k$, donc $2 \mid p$, $p$ étant premier, $p = 2$, ce qui est aussi impossible puisque $p \geqslant 5$. On a ainsi montré que $p \equiv 1\ [4]$ ou $p \equiv 3\ [4]$. Si $p \equiv 1\ [4]$, alors $4 \mid p-1$ et si $p \equiv 3\ [4]$, alors $p \equiv -1\ [4]$, donc $4 \mid p+1$. Par ailleurs $p$ est un nombre premier supérieur à 2, donc il est impair, par conséquent $p-1$ et $p+1$ sont pairs. Sans perte de généralité, on peut écrire que $4 \mid p-1$, donc il existe un entier naturel $k$ tel que $p - 1 = 4k$ ; d'autre part $2 \mid p+1$, donc il existe un entier naturel $k'$ tel que $p + 1 = 2k'$, en conséquence $(p-1)(p+1) = 8kk'$, donc $8 \mid p^2 - 1$.
Pour conclure $3 \mid p^2 - 1$ et $8 \mid p^2 - 1$, or 3 et 8 sont premiers entre eux, donc d'après le **corollaire 6.9** du théorème de Gauss $24 \mid p^2 - 1$. ▲

## Exercice 6.16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que : $2^n + 1 = m^2$.

**1.**

**a.** $2^n = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$, donc $m - 1 \mid 2^n$, ainsi, d'après le **théorème 6.10** il existe un entier naturel $p$, $p \leq n$, tel que $m - 1 = 2^p$, donc $2^n = 2^p(m+1)$ ce qui devient $m = 2^q - 1$ où $q = n - p$. Finalement $m = 2^p + 1 = 2^q - 1$ avec $p$ et $q$ deux entiers naturels tels que $p + q = n$. Comme $2^p + 1 = 2^q - 1$, on a $2 = 2^q - 2^p$, donc $0 < 2^q - 2^p$ soit $2^p < 2^q$ et enfin $p < q$. On a montré qu'il existe deux entiers naturels $p$ et $q$ tels que : $0 \leqslant p < q \leqslant n$, $p + q = n$ et $m = 2^p + 1 = 2^q - 1$.

**b.** $2^n + 1 = m \times m = (2^p + 1)(2^q - 1) = 2^{p+q} - 2^p + 2^q - 1$, avec $p + q = n$ on obtient $2^q - 2^p = 2$ ou encore $2^p(2^{q-p} - 1) = 2$, donc par unicité (à l'ordre des facteurs près) de la décomposition en produits de facteurs premiers $p = 1$ et $q - p = 1$. Finalement $p = 1$ et $q = p + 1 = 2$.

**2.** D'après ce qui précède, si $2^n + 1 = m^2$, alors $m = 2^1 + 1 = 3$, donc si $2^n + 1$ est un carré, il est égal à 9, or $2^n + 1 = 9$ implique que $n = 3$. Conclusion, 3 est la seule valeur de $n$ telle que $2^n + 1$ est un carré. ▲

## Exercice 6.17

**1.** 7 est un nombre premier qui ne divise pas 10, donc d'après le **petit théorème de Fermat** (cf. **théorème 6.14**) $10^6 \equiv 1\ [7]$. Soit $k$ un entier naturel quelconque, $\left(10^6\right)^k \equiv 1\ [7]$, ainsi $10^{6k} \equiv 1\ [7]$ et $10^{6k} \times 10^4 \equiv 10^4\ [7]$. $10 \equiv 3\ [7]$, donc $10^2 \equiv 3^2\ [7]$, $10^2 \equiv 2\ [7]$ et $10^4 \equiv 4\ [7]$. Finalement $10^{6k+4} \equiv 4\ [7]$ qui entraîne $10^{6k+4} + 3 \equiv 0\ [7]$, ainsi $7 \mid 10^{6k+4} + 3$.

**2.** Soit $n$ un nombre premier et $k$ un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, alors $n$ ne divise pas $k$, par conséquent d'après le **petit théorème de Fermat** $k^{n-1} \equiv 1\ [n]$. Effectuons la somme membre à membre des $n-1$ congruences précédentes, on obtient alors :

$$1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \cdots + (n-1)^{n-1} \equiv \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n-1 \text{ fois}}\ [n]$$

Par conséquent

$$1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \cdots + (n-1)^{n-1} \equiv n-1\ [n]$$

D'où le résultat

$$1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \cdots + (n-1)^{n-1} + 1 \equiv 0\ [n]$$

Conclusion, $n$ divise $1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \cdots + (n-1)^{n-1} + 1$. ▲

## Exercice 6.18

Pour tout entier naturel $n$, $F_n = 2^{2^n} + 1$.

**1.** Montrons au préalable que pour tout nombre réel $x$ et tout entier naturel $n$ non nul, on a $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$.
Notons $S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$, $S$ est la somme de termes consécutifs de la suite géométrique $(x^k)$, donc si $x \neq 1$, $S = \frac{x^n - 1}{x-1}$ donc $x^n - 1 = (x-1)S$. Si $x = 1$, $x^n - 1 = 0$ et $(x-1)S = 0$, le résultat annoncé est démontré dans tous les cas.
Soit $p$ un entier naturel pair et $x$ un entier relatif,
$x^p - 1 = (x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1)$, si on remplace $x$ par $-x$, on a $(-x)^p - 1 = (-x-1)((-x)^{p-1} + (-x)^{p-2} + \ldots - x + 1)$, $p$ étant pair, $(-x)^p = x^p$, donc $x^p - 1 = (x+1)(-(-x)^{p-1} - (-x)^{p-2} - \ldots + x - 1)$, $(-(-x)^{p-1} - (-x)^{p-2} - \ldots + x - 1)$ étant un entier relatif, on a bien $x+1 \mid x^p - 1$.

**2.** Soit $m$ et $n$ deux entiers naturels tels que $m < n$, alors
$2^{2^n} - 1 = 2^{2^m \times 2^{n-m}} - 1 = \left(2^{2^m}\right)^{2^{n-m}} - 1$, donc d'après la factorisation précédente, et en posant $x = 2^{2^m}$ et $p = 2^{n-m}$, on a $2^{2^n} - 1 = (2^{2^m} + 1)K$, où $K$ est un entier relatif. Il résulte de cette égalité que $F_n - 2 = KF_m$ donc $F_n - KF_m = 2$. Notons $d$ le $PGCD$ de $F_n$ et $F_m$, $d \mid F_n - KF_m$ et donc $d \mid 2$, ainsi $d = 1$ ou $d = 2$. Si $d = 2$, alors $2 \mid F_n$, ce qui est impossible puisque $F_n$ est impair, donc $d = 1$. On a montré que pour tous les entiers naturels $m$ et $n$ avec $m \neq n$, on a $PGCD(F_m, F_n) = 1$.

**3.** Raisonnons par l'absurde et supposons que l'ensemble des nombres premiers est fini, notons $\mathscr{P}$ cet ensemble et $n$ le nombre de ses éléments, d'autre part, notons $\mathscr{F} = \{F_0, F_1, \ldots, F_n\}$. Tout entier naturel différent de 1 est divisible par un nombre premier, donc tous les éléments de $\mathscr{F}$ sont divisibles par un nombre premier. Dans $\mathscr{F}$ il y a un élément de plus que dans $\mathscr{P}$, donc d'après le principe de Dirichlet, un nombre premier divise deux nombres de $\mathscr{F}$, or les nombres de cet ensemble sont tous distincts, donc d'après la question précédente, ils sont tous deux à deux premiers entre eux, ce qui est contraire

*Voir ce principe avec la* **méthode 6.13**.

Corrigé

avec le fait d'avoir un diviseur premier commun.

**Conclusion :** L'ensemble des nombres premiers est infini. ▲

## Exercice 6.19

Décomposons l'entier 1 919 190 en produit de facteurs premiers en utilisant la **méthode 6.6**.

| | |
|---|---|
| 1 919 190 | 2 |
| 959 595 | 5 |
| 191 919 | 3 |
| 63 973 | 13 |
| 4 921 | 19 |
| 259 | 37 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

Finalement $1\ 919\ 190 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 19 \times 37$. Soit $a$ un entier naturel.

- 37 est un nombre premier, donc d'après le **corollaire 6.14** $a^{37} \equiv a\ [37]$.
- $37 = 18 + 19$ donc $a^{37} = a^{18} \times a^{19}$, d'après le **théorème 6.14** et le **corollaire 6.14**, dans le cas où 19 ne divise pas $a$, $a^{18} \equiv 1\ [19]$ et $a^{19} \equiv a\ [19]$, donc $a^{18} \times a^{19} \equiv 1 \times a\ [19]$ et $a^{37} \equiv a\ [19]$ congruence également vraie si $19 \mid a$.

*Si $19 \mid a$, alors $a \equiv 0\ [19]$ et $a^{37} \equiv 0\ [19]$, donc $a^{37} \equiv a\ [19]$.*

- $37 = 13 \times 2 + 11$, donc $a^{37} = \left(a^{13}\right)^2 \times a^{11}$. Grâce au **corollaire 6.14**, $a^{13} \equiv a\ [13]$, donc $\left(a^{13}\right)^2 \times a^{11} \equiv a^2 \times a^{11}\ [13]$ qui entraîne $a^{37} \equiv a^{13}\ [13]$ et $a^{37} \equiv a\ [13]$.
- $37 = 5 \times 7 + 2$, donc $a^{37} = \left(a^5\right)^7 \times a^2$. Grâce au **corollaire 6.14**, $a^5 \equiv a\ [5]$, donc $\left(a^5\right)^7 \times a^2 \equiv a^7 \times a^2\ [5]$ qui entraîne $a^{37} \equiv a^9\ [5]$.
Or $a^9 = a^5 \times a^4 \equiv a \times a^4\ [5]$ et puisque $a \times a^4 = a^5$, $a^9 \equiv a\ [5]$, donc finalement $a^{37} \equiv a\ [5]$.
- $37 = 7 \times 5 + 2$, donc $a^{37} = \left(a^7\right)^5 \times a^2$. Grâce au **corollaire 6.14**, $a^7 \equiv a\ [7]$, donc $\left(a^7\right)^5 \times a^2 \equiv a^5 \times a^2\ [7]$ qui entraîne $a^{37} \equiv a^7\ [7]$ autrement dit $a^{37} \equiv a\ [7]$.
- $37 = 3 \times 12 + 1$, donc $a^{37} = \left(a^3\right)^{12} \times a$. Grâce au **corollaire 6.14**, $a^3 \equiv a\ [3]$, donc $\left(a^3\right)^{12} \times a \equiv a^{12} \times a\ [3]$, soit $a^{37} \equiv a^{13}\ [3]$.
$13 = 3 \times 4 + 1$, donc $a^{13} = \left(a^3\right)^4 \times a$. Grâce au **corollaire 6.14**, $a^3 \equiv a\ [3]$, donc $\left(a^3\right)^4 \times a \equiv a^4 \times a\ [3]$, soit $a^{13} \equiv a^5\ [3]$. Enfin $a^5 = a^3 \times a^2$, donc avec le **théorème 6.14** (si $a$ n'est pas divisible par 3) et le **corollaire 6.14** $a^5 \equiv a \times 1\ [3]$ soit $a^5 \equiv a\ [3]$. Au final $a^{37} \equiv a\ [3]$, congruence également vraie si $3 \mid a$.
- $a$ est nécessairement congru à 0 ou 1 modulo 2, donc $a^{37} \equiv a\ [2]$.

Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des diviseurs premiers de 1 919 190, d'après ce qui précède, quel que soit $k \in \mathscr{E}$, $a^{37} \equiv a\ [k]$ autrement dit $k \mid a^{37} - a$. Les nombre de $\mathscr{E}$ sont des nombres premiers distincts, donc deux à deux premiers entre eux, par conséquent, d'après le **théorème 6.8** leur produit divise $a^{37} - a$, donc $1\ 919\ 190 \mid a^{37} - a$ pour tout entier naturel $a$. ▲

## Exercice 6.20

Dans cet exercice $x$, $y$ et $z$ sont des entiers naturels non nuls et on suppose que $x^2 + y^2 = z^2$.

**1.**

**a.** Établissons le tableau des congruences des carrés modulo 4.

| $x \equiv \dots$ [4] | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x^2 \equiv \dots$ [4] | 0 | 1 | 0 | 1 |

D'après ce tableau, aucun carré n'est congru à 2 modulo 4.

**b.** Raisonnons par l'absurde et supposons que $x$ et $y$ sont tous les deux impairs, alors il existe deux entiers naturels $x'$ et $y'$ tels que $x = 2x' + 1$ et $y = 2y' + 1$, alors :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = z^2 &\implies (2x'+1)^2 + (2y'+1)^2 = z^2 \\ &\implies 4x'^2 + 4x' + 1 + 4y'^2 + 4y' + 1 = z^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 &\implies 2\left(2x'^2 + 2y'^2 + 2x' + 2y' + 1\right) = z^2 \end{aligned}$$

$2x'^2 + 2y'^2 + 2x' + 2y' + 1 \in \mathbb{Z}$, donc $2 \mid z^2$ ce qui est absurde d'après la question précédente, ainsi $x$ et $y$ ne peuvent pas être impairs tous les deux.

**Dans la suite, on suppose $y$ pair.**

**c.** Raisonnons par l'absurde et supposons que $x$ et $z$ n'ont pas la même parité.

- **Supposons $x$ pair et $z$ impair.** Alors $x^2 + y^2$ est pair et donc $z^2$ aussi ce qui est impossible d'après la première question.
- **Supposons $x$ impair et $z$ pair.** Alors $x^2 = z^2 - y^2$, or $z^2 - y^2$ est pair donc $x^2$ aussi ce qui est impossible d'après la première question.

Finalement $x$ et $z$ ont même parité.

**2.** Dans cette question $y = 12$

**a.** L'équation devient $x^2 + 144 = z^2$ ou encore $144 = z^2 - x^2 = (z-x)(z+x)$. D'après la **méthode 6.6** on trouve $144 = 2^4 \times 3^2$ ainsi les paires d'entiers naturels dont le produit donne 144 sont $\{1 ; 144\}$, $\{2 ; 72\}$, $\{4 ; 36\}$, $\{8 ; 18\}$, $\{9 ; 16\}$, $\{6 ; 24\}$, $\{3 ; 48\}$. Pour exister, $x$ et $z$ doivent satisfaire un des systèmes qui suivent, sachant qu'ils ont même parité et que $z - x \leqslant z + x$.

*$x$ étant positif, $-x \leqslant x$, donc $z - x \leqslant z + x$.*

- $\begin{cases} z - x = 1 \\ z + x = 144 \end{cases}$ entraîne par somme des deux lignes $2z = 145$ ce qui est impossible.
- $\begin{cases} z - x = 2 \\ z + x = 72 \end{cases}$ entraîne par somme des deux lignes $2z = 74$, donc $z = 37$ et la deuxième ligne donne $x = 72 - 37 = 35$ ce qui est possible puisque $x$ et $z$ ont même parité.
- $\begin{cases} z - x = 4 \\ z + x = 36 \end{cases}$ entraîne par somme des deux lignes $2z = 40$, donc $z = 20$ et la deuxième ligne donne $x = 36 - 20 = 16$ ce qui est possible puisque $x$ et $z$ ont même parité.
- $\begin{cases} z - x = 8 \\ z + x = 18 \end{cases}$ entraîne par somme des deux lignes $2z = 26$, donc $z = 13$ et la deuxième ligne donne $x = 18 - 13 = 5$ ce qui est possible puisque $x$ et $z$ ont même parité.
- $\begin{cases} z - x = 9 \\ z + x = 16 \end{cases}$ entraîne par somme des deux lignes $2z = 25$ impossible.

Corrigé

- $\begin{cases} z-x=6 \\ z+x=24 \end{cases}$ entraîne par somme des deux lignes $2z=30$, donc $z=15$ et la deuxième ligne donne $x=24-15=9$ ce qui est possible puisque $x$ et $z$ ont même parité.
- $\begin{cases} z-x=3 \\ z+x=48 \end{cases}$ entraîne par somme des deux lignes $2z=51$ impossible.

Les seuls couples $(x\ ;\ z)$ qui vérifient l'identité $x^2+144=z^2$ sont $(35\ ;\ 37)$, $(16\ ;\ 20)$, $(5\ ;\ 13)$ et $(9\ ;\ 15)$.

**b.** Parmi les triplets solutions, les TPP sont $(35\ ;\ 12\ ;\ 37)$, $(5\ ;\ 12\ ;\ 13)$ et $(9\ ;\ 12\ ;\ 15)$.

**3.** Soit $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un TPP.

**a.** Raisonnons par l'absurde et supposons que $x$ et $z$ ne soient pas premiers entre eux, alors ils admettent un diviseur premier commun $p$. $p \mid x$ et $p \mid z$, donc $p \mid x^2$ et $p \mid z^2$, ainsi $p \mid z^2-x^2$ autrement dit $p \mid y^2$ et d'après le **théorème 6.10** $p \mid y$. Par conséquent $p$ est un diviseur commun à $x$, $y$ et $z$ ce qui est absurde puisque $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est un TPP, donc $x$ et $z$ sont premiers entre eux.

**b.** $y$ étant pair, il existe un entier naturel $p$ tel que $y=2p$. Par conséquent

$$x^2+(2p)^2=z^2,\text{ ainsi } 4p^2=z^2-x^2=(z-x)(z+x),$$

d'où le résultat annoncé $p^2=\frac{z+x}{2}\times\frac{z-x}{2}$.

**c.** Tout d'abord, $\frac{z+x}{2}\times\frac{z-x}{2}\geqslant 0$ et $\frac{z+x}{2}\geqslant 0$, donc $\frac{z-x}{2}\geqslant 0$.

*Rappelons que d'après la question* **1c** *$x$ et $z$ ont même parité.*

Si $x$ et $z$ sont pairs, il existe deux entiers naturels $x'$ et $z'$ tels que $x=2x'$ et $y=2y'$, donc $\frac{z+x}{2}=z'+x'\in\mathbb{N}$ et $\frac{z-x}{2}=z'-x'\in\mathbb{N}$. Si $x$ et $z$ sont impairs, il existe deux entiers naturels $x'$ et $z'$ tels que $x=2x'+1$ et $y=2y'+1$, donc $\frac{z+x}{2}=z'+x'+1\in\mathbb{N}$ et $\frac{z-x}{2}=z'-x'\in\mathbb{N}$. Dans tous les cas $\frac{z+x}{2}$ et $\frac{z-x}{2}$ sont des entiers naturels.

Soit $d$ un diviseur commun positif de $\frac{z+x}{2}$ et $\frac{z-x}{2}$, alors $d \mid \frac{z+x}{2}+\frac{z-x}{2}$, donc $d \mid z$. De même $d \mid \frac{z+x}{2}-\frac{z-x}{2}$, donc $d \mid x$. $d$ est donc aussi un diviseur commun de $x$ et $z$, mais ces deux nombres sont premiers entre eux, par conséquent $d=1$ et donc $\frac{z+x}{2}$ et $\frac{z-x}{2}$ sont des entiers naturels premiers entre eux.

**d.** Soit $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$ et $q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\dots q_s^{\beta_s}$ des décompositions en produits de facteurs premiers de respectivement $\frac{z+x}{2}$ et $\frac{z-x}{2}$. $\frac{z+x}{2}$ et $\frac{z-x}{2}$ étant premiers, pour tout $i$ et $j$, $p_i\neq q_j$, d'autre part $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\dots q_s^{\beta_s}$ est une décomposition de $p^2$ en produit de facteur premiers. L'exposant de $p^2$ est pair, donc les $\alpha_i$ et les $\beta_j$ le sont aussi, on peut alors définir les entiers naturels $u=p_1^{\alpha_1/2}p_2^{\alpha_2/2}\dots p_r^{\alpha_r/2}$ et $v=q_1^{\beta_1/2}q_2^{\beta_2/2}\dots q_s^{\beta_s/2}$, ainsi $\frac{z+x}{2}=u^2$ et $\frac{z-x}{2}=v^2$.

**e.** On a vu à la question précédente que pour tous $i$ et $j$, $p_i\neq q_j$, donc $u$ et $v$ sont premiers entre eux.

Par hypothèse $x$ est un entier naturel non nul, donc $-x<x$ ce qui entraîne $z-x<z+x$ et $\frac{z-x}{2}<\frac{z+x}{2}$. Par conséquent $v^2<u^2$, enfin la fonction racine carré est strictement croissante, et $u$ et $v$ sont des entiers naturels donc $u>v$. $u$ et $v$ ne peuvent pas être pairs, sinon ils ne seraient pas premiers entre eux. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'ils sont impairs, alors $u^2$ et $v^2$ sont également impairs et il existe deux entiers naturels $m$ et $n$ tels que $u^2=2m+1$ et $v^2=2n+1$.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{z+x}{2}=2m+1\\ \frac{z-x}{2}=2n+1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{z+x}{2}+\frac{z-x}{2}=2(m+n+1)\\ \frac{z+x}{2}-\frac{z-x}{2}=2(m-n)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}z=2(m+n+1)\\ x=2(m-n)\end{array}\right.$$

$x$ et $z$ sont donc pairs, ce qui est absurde puisqu'ils sont premiers entre eux d'après la question **3a**. Conclusion $u$ et $v$ sont de parités différentes.

**4.**

**a.** Revenons à la question **3d** :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{z+x}{2}=u^2\\ \frac{z-x}{2}=v^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{z+x}{2}+\frac{z-x}{2}=u^2+v^2\\ \frac{z+x}{2}-\frac{z-x}{2}=u^2-v^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}z=u^2+v^2\\ x=u^2-v^2\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl}x^2+y^2=z^2 & \Leftrightarrow & y^2=\left(u^2+v^2\right)^2-\left(u^2-v^2\right)^2\\ & \Leftrightarrow & y^2=u^4+2u^2v^2+v^4-\left(u^4-2u^2v^2+v^4\right)\\ x^2+y^2=z^2 & \Leftrightarrow & y^2=4u^2v^2\end{array}$$

$y$, $u$ et $v$ sont positifs, donc $y=2uv$.

**b.** Reprenons les hypothèses de cette question. $u>v$, donc $u^2>v^2$ et $u^2-v^2>0$, ainsi $u^2-v^2$ est un entier naturel non nul comme $2uv$ et $u^2+v^2$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $u^2-v^2$, $2uv$ et $u^2+v^2$ aient un diviseur premier $p$ commun, alors $p \mid u^2-v^2+u^2+v^2$, donc $p \mid 2u^2$. De même $p \mid u^2+v^2-(u^2-v^2)$, donc $p \mid 2v^2$. Par ailleurs $u$ et $v$ sont de parités différentes, donc $u^2+v^2$ est impair, donc $p$ aussi. $p \mid 2u^2$ et $p$ est impair donc premier avec 2, ainsi d'après le théorème de Gauss, $p \mid u^2$ et d'après le **théorème 6.10** $p \mid u$. De même $p \mid v$, par conséquent $p$ est un diviseur commun de $u$ et $v$ ce qui est absurde puisque $u$ et $v$ sont premiers entre eux. En définitive $u^2-v^2$, $2uv$ et $u^2+v^2$ sont premiers entre eux.

*Si $u^2-v^2=0$, alors $|u|=|v|$ donc $u$ et $v$ ne sont pas premiers entre eux, ce qui est absurde par hypothèse.*

*Par exemple si $u=2u'$ et $v=2v'+1$, $u^2+v^2=4u'^2+4v'^2+4v'+1=2(2u'^2+2v'^2+2v')+1$ est impair.*

$$\begin{array}{rcl}\left(u^2-v^2\right)^2+(2uv)^2 & = & u^4-2u^2v^2+v^4+4u^2v^2\\ & = & u^4+2u^2v^2+v^4\\ \left(u^2-v^2\right)^2+(2uv)^2 & = & \left(u^2+v^2\right)^2\end{array}$$

Finalement $\left(u^2-v^2\ ;\ 2uv\ ;\ u^2+v^2\right)$ est un TPP.

**5.**

**a.** Soit $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un triplet pythagoricien et $d$ le plus grand diviseur commun à $x$, $y$ et $z$, alors $\frac{x}{d}$, $\frac{y}{d}$ et $\frac{z}{d}$ est aussi un triplet pythagoricien. Soit $d'$ le plus grand diviseur commun à $\frac{x}{d}$, $\frac{y}{d}$ et $\frac{z}{d}$, $d' \mid \frac{x}{d}$, $d' \mid \frac{y}{d}$ et $d' \mid \frac{x}{d}$, donc $dd' \mid x$, $dd' \mid y$ et $dd' \mid z$. $1 \leqslant d'$, donc $d \leqslant dd'$ et $dd'$ est un diviseur commun à $x$, $y$ et $z$ plus grand que le plus grand diviseur commun, donc en fait $dd'=d$, autrement dit $d'=1$. $\frac{x}{d}$, $\frac{y}{d}$ et $\frac{z}{d}$ n'ont pas d'autres diviseurs communs que 1 et le triplet $\left(\frac{x}{d}\ ;\ \frac{y}{d}\ ;\ \frac{z}{d}\right)$ est un TPP.

**b.** Soit $d$ un entier naturel non nul, $u$ et $v$ deux entiers naturels, premiers entre eux, de parités différentes, avec $u>v$, alors la forme générale d'un triplet pythagoricien est $\left\{\begin{array}{l}x=d\left(u^2-v^2\right)\\ y=d(2uv)\\ z=d\left(u^2+v^2\right)\end{array}\right.$. ▲

## Exercice 6.21

### Partie A

**1.**

**a.** D'après la **méthode 6.5** on va tester tous les entiers $d$ tels que $2 \leqslant d \leqslant \sqrt{n}$, si $d \mid n$, alors $n$ est composé, sinon il est premier.

```
from math import sqrt,floor #floor(x) est la partie entière
#de x

def Premier(n):
```



Corrigé

```
    if n==0 or n==1:
        return False
    d=2
    borne=floor(sqrt(n))
    while d<=borne:
        if n%d==0:
            return False
        d=d+1
    return True
```

**b.** Voici un programme qui convient.

```
def Mersenne():
    for k in range(21):
        if Premier(2**k-1)==True:
            print('M_',k,'est premier')
```

On obtient
>>> `Mersenne()`
$M_2$ est premier
$M_3$ est premier
$M_5$ est premier
$M_7$ est premier
$M_{13}$ est premier
$M_{17}$ est premier
$M_{19}$ est premier
On constate que si $p$ est composé, il en est de même pour $M_p$. Si $p$ est premier, $M_p$ peut être premier comme $M_3$ ou composé comme $M_{11}$.
**2.** Soit $a$ un nombre réel et $n$ un entier naturel non nul, on définit

$$S_n(a) = a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1.$$

$S_n(a)$ est une somme de termes consécutifs de la suite géométrique $\left(a^k\right)$, donc si $a \neq 1$, $S_n(a) = \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a^n-1}{a-1}$, donc $a^n - 1 = (a-1)S_n(a)$. Si $a = 1$, $a^n - 1 = 0$ et $(a-1)S_n(a) = 0$, donc pour tous les nombres réels $a$ et tous les entiers naturels $n$ non nuls,

$$a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1\right).$$

Soit $p$ un entier naturel composé, alors il existe deux entiers naturels $q$ et $r$ supérieurs ou égaux à 2 tels que $p = qr$.

$$M_p = (2^q)^r - 1 = (2^q - 1)\left((2^q)^{r-1} + (2^q)^{r-2} + \cdots + 2^q + 1\right)$$

$q \geqslant 2$, donc $(2^q)^r - 1$ et $(2^q)^{r-1} + (2^q)^{r-2} + \cdots + 2^q + 1$ sont des entiers naturels strictement supérieurs à 1, ainsi $M_p$ est composé.
**3.** Soit $p$ un entier naturel, on suppose que $M_p$ admette un diviseur premier $d$.

**a.** $d \mid M_p$, donc $2^p - 1 \equiv 0\ [d]$, autrement dit $2^p \equiv 1\ [p]$.

**b.** $M_p$ est impair, donc $d$ aussi, ainsi $d$ ne divise pas 2, par conséquent d'après le **petit théorème de Fermat** $2^{d-1} \equiv 1\ [d]$.

**Partie B**

Soit $p$ et $d$ deux nombres premiers tels que $d \mid M_p$. Soit $I$ l'ensemble des entiers naturels non nuls tels que $2^n \equiv 1\ [d]$.
**4.** Par hypothèse $2^p - 1 \equiv 0\ [d]$, donc $2^p \equiv 1\ [d]$, ainsi $p \in I$. $I$ est une partie non vide de $I$ donc elle admet un plus petit élément $p_0$. Par définition de $I$,

$p_0 \geqslant 1$. D'autre part $2^1 = 2 \not\equiv 1$ $[d]$ (sinon $d \mid 2-1$ donc $d = 1$ qui n'est pas un nombre premier), donc en fait $p_0 > 1$.

**5.** Soit $n$ un entier naturel, effectuons la division euclidienne de $n$ par $p_0$, alors il existe deux entiers naturels $q$ et $r$ est $n = p_0q + r$ où $0 \leqslant r < p_0$. $2^n = (2^{p_0})^q \times 2^r$, or $2^{p_0} \equiv 1$ $[d]$, donc $(2^{p_0})^q \times 2^r \equiv 2^r$ $[d]$ autrement dit $2^n \equiv 2^r$ $[d]$. Si $n \in I$ alors $2^n \equiv 1$ $[d]$ qui entraîne $2^r \equiv 1$ $[d]$, par conséquent soit $r = 0$, soit $r \neq 0$ auquel cas $r \in I$. Si $r \in I$, par définition de $p_0$, $p_0 \leqslant r$ ce qui est absurde puisque $r < p_0$. Par conséquent $r = 0$ et donc $n = p_0q$. Tout élément de $I$ est un multiple de $p_0$.

**6.** D'après la question **A.3.a.**, $p \in I$ ($p$ étant un nombre premier, $p \geqslant 2$, donc $p \neq 0$) donc la question précédente entraîne $p_0 \mid p$. Or $p_0 > 1$ d'après la question **B.4.** et $p$ est un nombre premier, donc $p_0 = p$.

D'après la question **A.3.b.**, $d - 1 \in I$ donc d'après la question précédente $p_0 \mid d-1$ autrement dit $p \mid d-1$ puisque $p_0 = p$.

*$d$ est un nombre premier, donc $d \geqslant 2$ ainsi $d-1 \geqslant 1$ d'où $d-1 \neq 0$.*

**Partie C**

**7.** D'après la question précédente, $p \mid d-1$ donc il existe un entier naturel $m$ tel que $d - 1 = mp$ c'est-à-dire $d = mp + 1$. Par ailleurs $d \mid M_p$ et $M_p$ est impair, donc $d$ aussi. Par conséquent il existe un entier naturel $n$ tel que $d = 2n+1$, ainsi $2n+1 = mp+1$ ou encore $2n = mp$. $2 \mid 2n$ donc $2 \mid mp$, or 2 et $p$ sont premiers entre eux (puisque $p$ est impair) donc d'après le théorème de Gauss $2 \mid m$ ainsi il existe un entier naturel $k$ tel que $m = 2k$ d'où l'égalité $d = 2kp + 1$.

**8.**

**a.** $d$ est un diviseur premier impair puisque $M_p$ est impair, donc :

$$3 \leqslant d \leqslant 747 \Leftrightarrow 3 \leqslant 38k + 1 \leqslant 747 \Leftrightarrow \frac{2}{38} \leqslant k \leqslant \frac{746}{38} \Leftrightarrow 1 \leqslant k \leqslant 19$$

Il y a 19 diviseurs $d$ de la forme $d = 38k + 1$ avec $d \leqslant 747$.

**b.** Soit $m \in \mathbb{N}$

- Si $k = 3m + 1$, $d = 38(3m + 1) + 1 = 114m + 39 = 3(38m + 13)$ or $38m + 13 \in \mathbb{N}$, donc $3 \mid d$, soit $d = 3$, soit $d$ n'est pas premier. Si $d = 3$, alors $38k + 1 = 3$ donc $k = \frac{2}{38} \notin \mathbb{N}$ par conséquent $d \neq 3$ et $d$ n'est pas un nombre premier.
- Si $k = 5m + 3$, $d = 38(5m + 3) + 1 = 190m + 115 = 5(38m + 23)$ or $38m + 23 \in \mathbb{N}$, donc $5 \mid d$, soit $d = 5$, soit $d$ n'est pas premier. Si $d = 5$, alors $38k + 1 = 5$ donc $k = \frac{4}{38} \notin \mathbb{N}$ par conséquent $d \neq 5$ et $d$ n'est pas un nombre premier.
- Si $k = 7m + 2$, $d = 38(7m + 2) + 1 = 266m + 76 = 2(133m + 38)$ or $133m + 38 \in \mathbb{N}$, donc $2 \mid d$, soit $d = 2$, soit $d$ n'est pas premier. Si $d = 2$, alors $38k + 1 = 2$ donc $k = \frac{1}{38} \notin \mathbb{N}$ par conséquent $d \neq 2$ et $d$ n'est pas un nombre premier.

**c.** Faisons la liste des entiers naturels $d$ appartenant à $[\![1\ ;\ 19]\!]$ qui ne sont pas de la forme $3m+1$, $5m+3$ et $7m+2$. On obtient : 3, 5, 6, 11, 12, 14, 15 et 17. $M_{19}$ reste à tester la divisibilité de ce nombre par les nombres premiers 3, 5, 11 et 17. Aucun de ces nombres ne divise $M_{19}$, il est donc premier. ▲

Corrigé

## Exercice 6.22

### Partie A

**1.** $p$ est un nombre premier qui ne divise pas $a$ donc il ne divise pas $a^{q-1}$ ainsi d'après le **petit théorème de Fermat** $\left(a^{q-1}\right)^{p-1} \equiv 1\ [p]$, donc $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1\ [p]$.

**2.** $q$ est un nombre premier qui ne divise pas $a$ donc il ne divise pas $a^{p-1}$ ainsi d'après le **petit théorème de Fermat** $\left(a^{p-1}\right)^{q-1} \equiv 1\ [q]$, donc $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1\ [q]$.

**3.** D'après les questions précédentes $p \mid a^{(p-1)(q-1)} - 1$ et $q \mid a^{(p-1)(q-1)} - 1$ or $p$ et $q$ sont deux nombres premiers distincts donc premiers entre eux, ainsi avec le corollaire du théorème de Gauss **théorème 6.7** $pq \mid a^{(p-1)(q-1)} - 1$, donc $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1\ [pq]$.

**4.** Soit $a, k$ deux entiers naturels tels que $k \equiv 1\ [(p-1)(q-1)]$. Par définition, ceci revient à dire qu'il existe un entier $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $k-1 = \ell(p-1)(q-1)$. On a alors

$$\begin{aligned} a^{k-1} &\equiv a^{\ell(p-1)(q-1)} \equiv \left(a^{(p-1)(q-1)}\right)^{\ell}\ \ [(p-1)(q-1)] \\ &\equiv 1^{\ell} \equiv 1\ [(p-1)(q-1)] \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit en multipliant les deux membres par $a$.

### Partie B

Posons $n = (p-1)(q-1)$ et $c \in \mathbb{N}$ avec $1 < c < n$, $c$ étant premier avec $n$.

**1.** Par hypothèse, $c$ et $n$ sont premiers entre eux, donc d'après le **théorème de Bézout** il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $cu + nv = 1$, posons alors $x = u$ et $y = -v$. Par conséquent il existe deux entiers relatifs $x$ et $y$ tels que $cx - ny = 1$.

**2.**

**a.** Soit $(x_0\ ;\ y_0)$ et $(x\ ;\ y)$ deux solutions de l'équation précédente, alors $cx - ny = cx_0 - ny_0$ puis $c(x - x_0) = n(y - y_0)$. $n \mid n(y - y_0)$ donc $n \mid c(x - x_0)$ or $n$ et $c$ sont premiers entre eux ainsi d'après le **théorème de Gauss** $n \mid x - x_0$ d'où l'existence d'un entier relatif $k$ tel que $x - x_0 = kn$ autrement dit $x = x_0 + kn$.

**b.** Puisque $cx - ny = 1$ on en déduit que $cx \equiv 1\ [n]$ or d'après la question précédente il existe un entier relatif $k$ tel que $x = x_0 + kn$. Par conséquent si on ajoute la condition $0 \leqslant x < n$, on obtient $0 \leqslant x_0 + kn < n$ d'où $-\frac{x_0}{n} \leqslant k < 1 - \frac{x_0}{n}$. $\left[-\frac{x_0}{n}\ ;\ 1 - \frac{x_0}{n}\right[$ est un intervalle semi-ouvert de longueur 1 donc il contient un unique entier relatif $k_0$. En conclusion, $d = x_0 + k_0 n$ est l'unique entier naturel strictement inférieur à $n$ réalisant la congruence $cd \equiv 1\ [n]$.

### Partie C

**1.** Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs tels que $b \equiv a^c\ [pq]$, alors $b^d \equiv (a^c)^d\ \ [pq]$ donc $b^d \equiv a^{cd}\ [pq]$. D'après la question précédente $cd \equiv 1\ [(p-1)(q-1)]$ ainsi il existe un entier relatif $k$ tel que $cd = 1 + k(p-1)(q-1)$.
$a^{cd} = a^{1+k(p-1)(q-1)} = a\left(a^{(p-1)(q-1)}\right)^k$ et d'après la question **A4** $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1\ [pq]$, donc $\left(a^{(p-1)(q-1)}\right)^k \equiv 1\ [pq]$ et finalement $a\left(a^{(p-1)(q-1)}\right)^k \equiv a\ [pq]$, donc $a^{cd} \equiv a\ [pq]$ et $b^d \equiv a\ [pq]$.

**2.** Posons $p = 5$, $q = 19$ et $c = 61$

**a.** $n = (5-1)(19-1) = 72$ et $c = 61$ sont premiers entre eux donc d'après le **théorème de Bézout** on peut trouver une solution dans $\mathbb{Z}^2$ à l'équation $61x - 72y = 1$. Mettons en œuvre l'algorithme d'Euclide étendu (voir la **méthode 6.9**) pour trouver une solution particulière à cette équation. Posons $a = 72$ et $b = 61$.

| **Divisions euclidiennes** | **Combinaisons linéaires de $a$ et $b$** |
|---|---|
| $a = b \times 1 + 11$ | $a - b = 11$ |
| $b = 11 \times 5 + 6$ | $b = (a-b) \times 5 + 6$<br>$b = 5a - 5b + 6$<br>$-5a + 6b = 6$ |
| $11 = 6 \times 1 + 5$ | $a - b = -5a + 6b + 5$<br>6a-7b=5 |
| $6 = 5 \times 1 + 1$ | $-5a + 6b = 6a - 7b + 1$<br>$\boxed{-11a + 13b = 1}$ |

On obtient alors $-11n + 13c = 1$, donc $x_0$ ; $y_0) = (13$ ; $-11)$. $d$ vérifie $d = 13 + 72k$ et $0 \leqslant d < 72$ où $k$ est un entier relatif à déterminer.

$$0 \leqslant d < 72 \Leftrightarrow 0 \leqslant 13 + 72k < 72 \Leftrightarrow -\frac{13}{72} \leqslant k < \frac{59}{72} \Leftrightarrow k = 0$$

En résumé $n = 72$ et $d = 13$.

**b.** Posons $a = 3$ et rappelons que $pq = 95$. $3^7 = 2\ 187 = 95 \times 23 + 2$, donc $3^7 \equiv 2\ [95]$. $61 = 7 \times 8 + 5$, donc $a^c = 3^{61} = (3^7)^8 \times 3^5 \equiv 2^8 \times 3^5\ [95]$ à l'aide d'une calculatrice on trouve $a^c \equiv 78\ [95]$, donc $b = 78$. On a bien $b \equiv a^c\ [pq]$.

**c.** Effectuons les calculs à l'aide d'une calculatrice. $78^2 \equiv 4\ [95]$ et $13 = 2 \times 6 + 1$ donc $78^{13} = (78^2)^6 \times 78 \equiv 4^6 \times 78\ [95]$ et $78^{13} \equiv 3\ [95]$. On a bien vérifié que $a \equiv b^d\ [95]$.

**Remarque :** les résultats de cet exercice sont à la base de la méthode de cryptographie appelée RSA, inventée en 1978 par trois mathématiciens, Ronald Rivest, Adi Shamir et Léonard Adleman. Dans ce système, le message initial $a$ est codé par $b$ grâce à la formule $b \equiv a^c\ [pq]$. On retrouve ensuite $a$ grâce à $b^d \equiv a\ [pq]$.
Le produit $pq$ est public ainsi que $c$, ce qui permet à chacun de crypter un message. Mais les entiers $p$ et $q$ proprement dits ne sont pas connus, ce qui interdit de calculer $n = (p-1)(q-1)$ et l'entier $d$. Il n'est donc pas possible de décrypter un message.
Pour garder $p$ et $q$ secrets tout en rendant public le produit $pq$, on doit prendre deux nombres premiers suffisamment grands pour que la factorisation du produit $pq$ soit impossible dans un délai raisonnable.
Aujourd'hui est utilisé le code RSA 1024 où le produit $pq$ est de l'ordre de $2^{1024} \approx 10^{308}$ qui s'écrit avec 309 chiffres. ▲

Corrigé

# Calcul matriciel et graphes

# Chapitre 7
# Calcul matriciel

Dès le XVIIIe siècle on effectue des calculs qui correspondent à des produits de matrices. Ce n'est cependant qu'au siècle suivant qu'on a l'idée de les écrire en forme de tableaux de nombres. C'est Arthur **Cayley** qui les manie comme de nouveau « nombres » et ose en considérer en dimension supérieure à trois.

### Un mathématicien

Arthur **Cayley** est considéré comme l'inventeur des matrices ; c'est en tout cas lui qui le premier a défini les opérations d'addition et de multiplication matricielles. Ce mathématicien anglais, d'abord avocat, était pétri de talents ; polyglotte, il peignait des aquarelles et pratiquait l'escalade dans les Alpes. Ses travaux scientifiques ont permis une avancée notoire de l'algèbre dans la deuxième moitié du XIXe siècle.

**LE SAVIEZ-VOUS ?**

Le mot *matrice* est formé sur le mot latin *mater* qui signifie *mère*. Il apparaît au Moyen Âge dans son sens anatomique d'utérus. Comme on enregistrait les enfants à la naissance, il désigna bien sûr le registre où on les inscrivait, d'où les mots *matricule* et *immatriculation*. Au début de l'imprimerie, *matrice* désignait le moule à imprimer sur lequel on place les caractères. Par analogie, Cayley en 1845, utilise ce mot pour nommer le tableau où l'on enregistre les composantes d'un système linéaire.

COMPÉTENCES

## les incontournables

- Savoir faire diverses opérations sur les matrices
- Savoir reconnaître une matrice carrée d'ordre 2 inversible et donner son inverse
- Savoir traduire un système d'équations en écriture matricielle
- Savoir écrire une application géométrique sous forme matricielle
- Savoir manipuler des suites de matrices
- Démontrer l'unicité de la matrice inverse
- Démontrer l'écriture de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2
- Démontrer une écriture matricielle d'applications et de transformations planes

## et plus si affinités

- Donner une écriture matricielle d'une rotation
- Donner une écriture matricielle d'une réflexion
- Utilisation de matrices en cryptographie

# Résumé de cours

## Matrices

**Définition :** *Une **matrice** $A$ est un tableau à $n$ lignes et $p$ colonnes de nombres, appelés **coefficients** de la matrice. On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ où $i$ désigne le numéro de la ligne et $j$ le numéro de colonne. Ainsi, $a_{i,j}$ est le coefficient situé à la $i$-ème ligne et à la $j$-ième colonne de $A$.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

**Vocabulaire :** *On dit alors que la matrice est de **taille** (ou de **format**) $n \times p$. $n$ et $p$ sont appelés les dimensions de la matrice. Lorsque $n = p$, on dit que la matrice est **carrée d'ordre** $n$.*

- *Une matrice de taille $1 \times p$ est appelée une **matrice ligne**.*
- *Une matrice de taille $n \times 1$ est appelée une **matrice colonne**.*
- *On appelle **diagonale** d'une matrice carrée $A$, l'ensemble des coefficients $a_{i,j}$ tels que $i = j$.*
- *Une matrice carrée dont tous les coefficients non situés sur la diagonale sont nuls est appelée une **matrice diagonale**.*

**Définition :** *Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices. On dit que $A$ et $B$ sont **égales**, et on note $A = B$, si elles ont même taille $n \times p$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{i,j} = b_{i,j}$.*

**Notation :** *Une matrice qui a tous ses coefficients nuls est appelée **matrice nulle**, on la note $0$.*

*La matrice carrée d'ordre $n$ qui a ses coefficients diagonaux égaux à $1$ et les autres égaux à $0$ est appelée **matrice unité** ou **identité**, on la note $I_n$.*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

## Opérations sur les matrices

### Addition de deux matrices

**Définition :** *Soit $A, B$ deux matrices de même taille $n \times p$. La **matrice somme** de $A$ et $B$ est la matrice de taille $n \times p$ qui a pour coefficients les sommes des coefficients de $A$ et $B$. Plus précisément si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, alors $A + B$ est la matrice égale à $(c_{i,j})$ où pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.*

**Proposition 7.1.— Propriétés de l'addition des matrices —.** Soit $A, B, C$ et la matrice nulle $0$ des matrices de même taille $n \times p$.

- **Commutativité :** $A + B = B + A$
- **Associativité :** $(A + B) + C = A + (B + C)$
- **Élément neutre :** $0 + A = A + 0 = A$
- **Matrice opposée :** Si $A = (a_{i,j})$, la matrice $-A = (-a_{i,j})$ vérifie $A + (-A) = (-A) + A = 0$. $-A$ est appelée la **matrice opposée** à $A$.

**Notation :** *Ici, $O$ désigne la matrice nulle de taille $n \times p$, $A - B$ est défini par $A + (-B)$.*

### Multiplication d'une matrice par un nombre réel

**Définition :** *Si $A$ est une matrice de taille $n \times p$ et $\lambda$ est un réel, alors $\lambda A$ est la matrice de taille $n \times p$ qui a pour coefficients $\lambda$ fois ceux de $A$. Plus précisément si $A = (a_{i,j})$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, alors $\lambda A$ est une matrice égale à $(d_{i,j})$ où pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], d_{i,j} = \lambda a_{i,j}$.*

**Proposition 7.2.— Propriétés de la multiplication des matrices par un réel —.** Soit $A, B$ deux matrices de même taille, $\lambda, \mu$ des réels.

- $\lambda\ (A + B) = \lambda\ A + \lambda\ B$
- $(\lambda\ \mu)\ A = \lambda(\mu\ A)$
- $(\lambda + \mu)\ A = \lambda\ A + \mu\ A$
- $1\ A = A$ et $0\ A = 0$

### Multiplication de deux matrices

**Définition :** *Soit $A = (a_{1,k})_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une matrice ligne, $B = (b_{k,1})_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une matrice colonne. On définit la* **matrice produit** *$C = A \times B$ comme la matrice constituée d'un seul coefficient $c$, où*

$$c = a_{1,1}\ b_{1,1} + a_{1,2}\ b_{2,1} + \cdots + a_{1,p} b_{p,1} = \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k,1}.$$

**Définition :** *Soit $A, B$ deux matrices de tailles respectives $n \times p$ et $p \times m$. La* **matrice produit** *$C = A \times B$ est la matrice de taille $n \times m$ telle que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, $c_{i,j}$ est égal au produit de la $i$-ème ligne de $A$ par la $j$-ème colonne de $B$. Plus précisément, si $A = (a_{i,k})$ et $B = (b_{k,j})$, alors $A \times B = (c_{i,j})$ où pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$,*

$$c_{i,j} = a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + \cdots + a_{i,p} b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\ b_{k,l}.$$

**Remarque :** le produit $A \times B$ est défini lorsque le nombre de colonnes de la matrice $A$ est égal au nombre de lignes de la matrice $B$.

**Notation :** *On note indifféremment $A \times B$ ou $AB$ la matrice produit.*

**Proposition 7.3.— Propriétés du produit matriciel —.** Pourvu que les sommes et produits ci-dessous soient bien définis

- **Associativité :** $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- **Distributivité à gauche :** $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- **Distributivité à droite :** $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- **Compatibilité avec le produit par un réel :** $\lambda\ (A \times B) = (\lambda\ A) \times B = A \times (\lambda\ B)$
- **$I_n$ est l'élément neutre :** si $A$ est carrée d'ordre $n$ alors $I_n \times A = A \times I_n = A$

**Remarque :** la multiplication des matrices n'est pas commutative. En général, $A \times B \neq B \times A$.

### Inverse d'une matrice carrée

**Théorème-Définition 7.4.—** Une matrice carrée $A$ d'ordre $n$ est dite **inversible** s'il existe une matrice $M$, carrée d'ordre $n$, telle que $AM = MA = I_n$.
En ce cas, la matrice $M$ est unique, on l'appelle la **matrice inverse** de $A$ et on la note $A^{-1}$.

**Remarque :** si $A$ est inversible alors $A^{-1}$ est inversible et a pour matrice inverse $A$ : $(A^{-1})^{-1} = A$.

**Théorème 7.5.— Inversion d'une matrice carrée d'ordre 2 —.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice.

$$\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } ad - bc \neq 0}$$

En ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

### Puissances d'une matrice carrée d'ordre $p$

**Définition :** *Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $p$. On définit les* **puissances** *de $A$ par :*

$$A^0 = I_p \ (\textit{si } A \neq 0), \ A^1 = A \ \textit{et pour } n \geqslant 2, \ A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}.$$

**Proposition 7.6.—** Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $p$ et soit $m$ et $n$ deux entiers naturels. Alors

$$A^m \times A^n = A^n \times A^m = A^{n+m}.$$

**Proposition 7.7.—** Si $D$ est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_p \end{pmatrix}$ alors $D^n = \begin{pmatrix} d_1^n & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_p^n \end{pmatrix}$.

## ■ Applications du calcul matriciel

### Écriture matricielle des systèmes linéaires

Considérons le système de $n$ équations linéaires à $n$ inconnues $(S)$ ci-dessous. On note $A = (a_{i,j})$ la matrice des coefficients, $X$ (resp. $Y$) les matrices colonnes constituées des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (resp. des seconds membres $y_1, y_2, \ldots, y_n$). On a alors l'écriture matricielle :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & y_n \end{array} \right. \Leftrightarrow A \times X = Y$$

**Proposition 7.8.—** Si $A$ est inversible, l'unique solution $(x_1, \ldots, x_n)$ de $(S)$ est donnée par :

$$X = A^{-1} \times Y$$

### Diagonalisation d'une matrice carrée d'ordre $n$

**Définition :** *Une matrice carrée $A$ est dite* **diagonalisable** *s'il existe une matrice carrée $P$ inversible et une matrice diagonale $D$ telle que $A = P\,D\,P^{-1}$.*

**Proposition 7.9.—** Avec les notations ci-dessus, on a :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^\star, \ A^n = P\,D^n\,P^{-1}.}$$

### Suite de matrices colonnes

**Définition :** *Soit $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ une suite de matrices colonnes de taille $p \times 1$, c'est-à-dire que pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n$ est une matrice de taille $p \times 1$. On note $(U_n)_{n \geqslant 0}$ cette suite.*
*On dit que $(U_n)_{n \geqslant 0}$* ***est convergente*** *si tous les coefficients de la matrice $U_n$ sont les termes généraux de suites convergentes de réels.*

**Proposition 7.10.— Suite géométrique de matrices colonnes —.** $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de matrices colonnes de taille $p \times 1$ définie par la donnée de son premier terme $U_0$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = A\, U_n$ où $A$ est une matrice carrée d'ordre $p$. Alors

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n\, U_0}$$

### Transformations planes

**Définition :** *Le plan est muni d'un repère.*

- *On appelle* ***application*** *du plan, toute fonction qui à chaque point $M$ du plan associe un unique point $M'$.*
- *On dit qu'une application $f$ est une* ***transformation*** *du plan dans lui-même si pour tout point $M'$ il existe un unique point $M$ tel que $M' = f(M)$.*

**Théorème 7.11.—** Le plan est muni d'un repère. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 et $B$ une matrice colonne à deux lignes.

- Alors $f : M(x\ ;\ y) \mapsto M'(x'\ ;\ y')$, où $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, est une application du plan.
- Si $ad - bc \neq 0$, alors $f$ est une transformation du plan.

# Démonstrations

**Théorème 7.4.—** Une matrice carrée $A$ d'ordre $n$ est dite **inversible** s'il existe une matrice $M$, carrée d'ordre $n$, telle que $AM = MA = I_n$.
En ce cas, la matrice $M$ est unique, on l'appelle la **matrice inverse** de $A$ et on la note $A^{-1}$.

**Démonstration** ▽
Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ inversible. Montrons l'unicité de l'inverse de $A$. Soit $M$ et $M'$ deux matrices carrées telles que $AM = MA = I_n$ et $AM' = M'A = I_n$. En particulier $AM = I_n = AM'$, les implications qui suivent résultent de l'associativité du produit matriciel.

$$AM = AM' \Longrightarrow M(AM) = M(AM') \Longrightarrow (MA)M = (MA)M' \Longrightarrow I_nM = I_nM' \Longrightarrow M = M'$$

L'unicité de la matrice $M$ est démontrée. ▲

**Théorème 7.5.— Inversion d'une matrice carrée d'ordre 2 —.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice.

$$\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } ad - bc \neq 0}$$

En ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

**Démonstration** ▽
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ deux matrices carrées d'ordre 2, on constate que

$$AB = BA = (ad - bc)I_2 \qquad (\star)$$

- Si $ad - bc \neq 0$, posons $B' = \frac{1}{ad-bc}B$, alors les égalités$(\star)$ deviennent $AB' = B'A = I_2$, ainsi $A$ est inversible et sa matrice inverse est $B'$, donc $A^{-1} = B'$.
- Réciproquement, supposons $A$ inversible. Elle admet donc une unique matrice inverse $A^{-1}$. Raisonnons par l'absurde et faisons l'hypothèse que $ad - bc = 0$, alors les égalités $(\star)$ entraînent en particulier $AB = 0I_2 = 0$, par conséquent $A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0$ et $(A^{-1}A)B = 0$, $I_2B = 0$ et enfin $B = 0$ $(\star\star)$. Par ailleurs $A$ étant inversible, elle est non nulle, sinon $AA^{-1} = I_2$ mais aussi $AA^{-1} = 0$, donc $I_2 = 0$ ce qui est absurde. Puisque $A \neq 0$ au moins un de ses coefficients est non nul, donc $B \neq 0$ contraire avec l'égalité$(\star\star)$, par conséquent $ad - bc \neq 0$.

L'équivalence est démontrée. ▲

**Proposition 7.9.—** Soit $A$, $P$ et $D$ trois matrices carrées de même ordre, avec $P$ inversible et $D$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$, alors :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^\star,\ A^n = P\,D^n\,P^{-1}.}$$

**Démonstration** ▽
Soit $A$, $P$ et $D$ trois matrices carrées de même ordre $p$, avec $P$ inversible et $D$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$ non nul $A^n = PD^nP^{-1}$. Pour tout entier naturel $n$ non nul on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ : $A^n = PD^nP^{-1}$.

- **Initialisation :** Si $n = 1$, $A^1 = A$ et $PD^1P^{-1} = PDP^{-1} = A$, donc $A^1 = PD^1P^{-1}$, la proposition $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- **Hérédité :** Soit $n$ un entier naturel non nul tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. $\mathcal{P}(n)$ est vraie donc $A^n = PD^nP^{-1}$.
$$A^{n+1} = AA^n = (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) = PD(P^{-1}P)D^nP^{-1} = PDI_pD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$
La proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion :** La proposition $\mathscr{P}$ est vraie au rang 1 et se transmet héréditairement, donc on a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n$ non nul $A^n = PD^nP^{-1}$. ▲

**Théorème 7.11.—** Le plan est muni d'un repère. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 et $B$ une matrice colonne à deux lignes. Alors

- $f : M(x;y) \mapsto M'(x';y')$, où $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, est une application du plan.
- Si de plus $ad - bc \neq 0$, alors $f$ est une transformation du plan.

**Démonstration** ▽

Le plan est muni d'un repère. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 et $B$ une matrice colonne à deux lignes.

- Soit $M(x\ ;\ y)$ un point du plan, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ définit une unique matrice colonne de deux lignes, et même chose pour $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$ égale à la matrice $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, donc le point $M'(x'\ ;\ y')$ est unique. L'application $f : M(x\ ;\ y) \mapsto M'(x'\ ;\ y')$ est bien définie.
- Si $ad - bc \neq 0$ alors la matrice $A$ est inversible (voir le **théorème 7.5**). Soit $M'(x'\ ;\ y')$ un point du plan, posons $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et résolvons l'équation $Y = AX + B$ d'inconnue $X$.
$$\begin{aligned} Y = AX + B &\Leftrightarrow AX = Y - B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}(Y - B) \\ &\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}(Y - B) \Leftrightarrow I_2X = A^{-1}(Y - B) \\ Y = AX + B &\Leftrightarrow X = A^{-1}(Y - B) \end{aligned}$$

Cette équation admet une unique solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donc $M'$ admet un unique antécédent $M(x\ ;\ y)$ par $f$. $f$ est une transformation du plan. ▲

**Remarque :** pour « enlever » $A$, on multiplie $AX$ à gauche par $A^{-1}$, donc on fait de même avec l'autre membre. Rappelons qu'il ne faut pas intervertir l'ordre des facteurs dans un produit, car la multiplication des matrices n'est pas commutative.

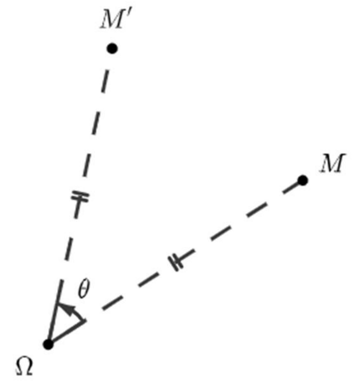
# Approfondissements, algorithmes

### Forme algébrique d'une rotation

**Définition :** *Le plan est muni d'un repère orthonormal direct. Soit $\Omega$ un point du plan, et $\theta$ un nombre réel. On dit qu'un point $M$ a pour image le point $M'$ par la* ***rotation*** *de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ si $M'$ est tel que*

$$\begin{cases} M' = M \text{ si } M = \Omega \\ \Omega M' = \Omega M \text{ et } \left(\overrightarrow{\Omega M}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ [2\pi] \text{ si } M \neq \Omega \end{cases}$$

*Cette rotation est notée $R_{(\Omega\ ;\ \theta)}$.*




**Théorème 7.12.—** Le plan est muni d'un repère orthonormal direct. Soit $\Omega(x_\Omega\ ;\ y_\Omega)$ un point du plan, et $\theta$ un nombre réel. Soit $M(x\ ;\ y)$ et $M'(x'\ ;\ y')$ deux points du plan.
$M'$ est l'image de $M$ par la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ si, et seulement si, leurs coordonnées vérifient

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' - x_\Omega \\ y' - y_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_\Omega \\ y - y_\Omega \end{pmatrix}}$$

**Démonstration** $\triangledown$
Pour cette démonstration, nous utilisons les outils géométriques issus du **chapitre 2** sur les nombres complexes, par conséquent posons $\omega = x_\Omega - \mathrm{i}y_\Omega$, $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$.
Soit $M \neq \Omega$, par définition de $M'$ :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ [2\pi] \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta\ [2\pi] \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) \\
&\Leftrightarrow x' - x_\Omega + \mathrm{i}(y' - y_\Omega) = (\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))\,(x - x_\Omega + \mathrm{i}(y - y_\Omega)) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x_\Omega = \cos(\theta)(x - x_\Omega) - \sin(\theta)(y - y_\Omega) \\ y' - x_\Omega = \sin(\theta)(x - x_\Omega) + \cos(\theta)(y - y_\Omega) \end{cases} \\
\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ [2\pi] \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - x_\Omega \\ y' - y_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_\Omega \\ y - y_\Omega \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Si $M = \Omega$, $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\Omega - x_\Omega \\ y_\Omega - y_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $M' = \Omega$ et on a bien $R_{(\Omega\ ;\ \theta)}(\Omega) = \Omega$.
L'égalité énoncée dans le théorème est vraie pour tous les points du plan. ▲

# Méthodes

## Effectuer des opérations sur les matrices

### Additionner les matrices

**❑ Méthode 7.1.— Comment effectuer une somme de matrices**

Pour additionner deux matrices $A$ et $B$ :

$\boxed{1}$ Vérifier que les deux matrices ont même format $n \times p$.

$\boxed{2}$ La matrice somme $A+B$ est la matrice de taille $n \times p$ obtenue en ajoutant deux à deux les coefficients situés à la « même position » dans les matrices $A$ et $B$.

**Exemple :** $\begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & \boxed{2} & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & \boxed{5} & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Ici, par exemple, 5 a été obtenu en effectuant $3+2$.

**Mise en œuvre : exercice 7.1.**

**❑ Méthode 7.2.— Comment effectuer une combinaison linéaire de matrices**

Pour calculer la combinaison linéaire de deux matrices $\alpha A + \beta B$ :

$\boxed{1}$ Vérifier que les deux matrices ont même format $n \times p$.

$\boxed{2}$ La matrice $\alpha A + \beta B$ est la matrice de taille $n \times p$ obtenue en combinant deux à deux les coefficients situés à la « même position » dans les matrices $A$ et $B$.

**Exemple :** $2 \begin{pmatrix} \boxed{7} \\ 9 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{17} \\ 24 \end{pmatrix}$

Ici, par exemple, 17 a été obtenu en effectuant $2 \times 7 + 3 \times 1$.

**Mise en œuvre : exercice 7.1.**

### Multiplier les matrices

**❑ Méthode 7.3.— Comment effectuer un produit de deux matrices**

$\boxed{1}$ Pour pouvoir calculer $A \times B$, le nombre de colonnes de $A$ doit être égal au nombre de lignes de $B$. Si $A$ possède $n$ lignes et $p$ colonnes, et si $B$ possède $p$ lignes et $q$ colonnes, alors $A \times B$ possède $n$ lignes et $q$ colonnes. De façon schématique :

$$\text{Format}\,(n;p) \;\times\; \text{Format}\,(p;q) = \text{Format}\,(n;q)$$

$\boxed{2}$ On peut présenter le calcul comme ci-après.

$\boxed{3}$ On calcule « l'un après l'autre » les $n \times q$ coefficients de $C$ : le coefficient $c_{i,j}$ est le résultat du produit de la $i$-ème ligne de $A$ par la $j$-ème colonne de $B$.

#### Le produit ligne-colonne

Pour effectuer ce calcul, il est utile de disposer ce calcul comme indiqué ci-contre. Notons $C = A \times B$. Le coefficient $c_{i,j}$ de $C$ qui se trouve à la $i$-ème ligne et à la $j$-ème colonne est la somme des produits des coefficients de la $i$-ème ligne de $A$ par ceux de la $j^{\text{ième}}$ colonne de $B$ :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1}b_{1,j} + \cdots + a_{i,k}b_{k,j} + \cdots + a_{i,p}b_{p,j}.$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \boxed{b_{1,j}} & b_{1,q} \\ \vdots & \vdots & \\ & b_{k,j} & \vdots \\ & \vdots & \\ b_{p,1} & b_{p,j} & b_{p,q} \end{pmatrix} \\ & \downarrow \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ & & \\ a_{i,1} & \cdots a_{i,k} \cdots & a_{i,p} \\ & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \rightarrow & \begin{pmatrix} c_{1,1} & & c_{1,q} \\ & & \\ & \boxed{c_{i,j}} & \\ & & \\ c_{n,1} & & c_{n,q} \end{pmatrix} \end{array}$$

Cette disposition vaut aussi pour les produits de trois matrices ou plus encore. Il suffit d'écrire tous les facteurs à droite de $B$ et d'effectuer les produits de proche en proche.

**Exemple :** calculons $A \times B$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Constatons tout d'abord que les formats de ces deux matrices sont compatibles pour la multiplication :

Format $(2;3)$ $\times$ Format $(3;2)$ = Format $(2;2)$

On sait alors que nous obtiendrons une matrice ayant 2 lignes et 2 colonnes. Pour effectuer ce produit, adoptons la disposition pratique.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 2 \\ \boxed{2} & 4 \\ \downarrow & \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{5} & \rightarrow \\ 2 & 4 & 6 & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{14} & 26 \\ 18 & 32 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Mise en œuvre : exercice 7.1** et **exercice 7.2**.

#### Inverser une matrice

Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ supérieur ou égal à 2. Par définition $A$ est inversible s'il existe une matrice $B$, carrée d'ordre $n$ également, telle que $A \times B = I_n$ et $B \times A = I_n$. En ce cas, $A^{-1} = B$. En pratique, une seule vérification suffit :

> ❑ **Méthode 7.4.— Comment montrer qu'une matrice carrée est inversible**
> L'énoncé fournit parfois des indications pour déterminer la matrice $B$ carrée d'ordre $n$, en ce cas :
> $\boxed{1}$ On vérifie uniquement que $A \times B = I_n$.
> $\boxed{2}$ On peut conclure que $A$ est inversible et que $A^{-1} = B$.

**Exemple :** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrons que $A$ est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{1}$ Posons $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et calculons le produit $AB$,

$\boxed{2}$ À l'aide de la disposition pratique pour le produit on obtient aisément $AB = I_3$. Nous pouvons conclure que $A$ est inversible et que $A^{-1} = B$.

**Remarque :** pour une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 3$, lorsque l'énoncé ne fournit pas d'indication, on peut utiliser la calculatrice. On rentre $A$ dans sa calculatrice et on tape $A^{-1}$.

- Si $A$ n'est pas inversible, un message d'erreur s'affiche.
- Sinon, elle donne $A^{-1}$.

Pour les matrices carrées d'ordre 2, on peut aussi utiliser le **théorème 7.5** de la manière suivante :

> ❑ **Méthode 7.5.— Comment montrer qu'une matrice d'ordre 2 est inversible**
>
> Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.
>
> $\boxed{1}$ On calcule le réel $ad - bc$, appelé **déterminant** de $A$ et noté $\mathrm{Det}(A)$ pour vérifier l'inversibilité de $A$ :
>
> $$A \text{ inversible } \Leftrightarrow \mathrm{Det}(A) \neq 0$$
>
> $\boxed{2}$ Si $\mathrm{Det}(A) \neq 0$, $A$ est donc inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{Det}(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

**Exemple :** montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculons son inverse.

$\boxed{1}$ $\mathrm{Det}\, A = 1 \times 1 - 0 \times 2 = 1 \neq 0$, donc $A$ est inversible.

$\boxed{2}$ De plus, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Mise en œuvre : exercice 7.3**, **exercice 7.5** et **exercice 7.13**.

### Calculer les puissances d'une matrice

Soit $A$ une matrice carrée. Lorsque $A$ est une matrice diagonale, la **proposition 7.7** permet de conclure directement puisque pour tout entier naturel $n$, $A^n$ est la matrice diagonale qui a pour coefficients les puissances $n$-ième de ceux de $A$.
Dans le cas général, plusieurs pistes sont possibles.

> ❑ **Méthode 7.6.— Comment calculer les puissances de $A$ par récurrence**
>
> $\boxed{1}$ Calculer les premières puissances de $A$ : $A^2$, $A^3$, ...
>
> $\boxed{2}$ Conjecturer l'expression de $A^n$ en fonction de $n$.
>
> $\boxed{3}$ Démontrer cette formule par récurrence.

**Exemple :** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons les puissances successives de $A$.

$\boxed{1}$ **Premiers calculs :** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ **Conjecture :** À la lumière de ces premiers calculs, nous pouvons conjecturer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{3}$ Montrons-le par récurrence

- **Initialisation :** $n = 1$. On a bien $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Hérédité** : Posons l'hypothèse de récurrence selon laquelle pour un entier $n \geqslant 1$ fixé, on a $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrons qu'alors $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  $$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + n\times 0 & 1\times 1 + n \times 1 \\ 0\times 1 + 1\times 0 & 0\times 1 + 1\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Conclusion :** Les deux étapes de la démonstration par récurrence ayant été vaillamment franchies, nous pouvons conclure que pour tout $n \geqslant 1$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

> ❑ **Méthode 7.7.— Comment calculer les puissances de $A$ par diagonalisation**
> S'il existe une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $P$ (souvent données par l'énoncé) telles que $D = P^{-1} \times A \times P$, alors $A = P \times D \times P^{-1}$.
> $\boxed{1}$ D'après la **proposition 7.9** pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.
> $\boxed{2}$ Comme $D$ est diagonale, on obtient $D^n$ en élevant tous les coefficients de $D$ à la puissance $n$.
> $\boxed{3}$ Finalement, on obtient $A^n$ en effectuant produit $P \times D^n \times P^{-1}$.

Méthodes

**Exemple :** soit $A = \begin{pmatrix} -18 & -40 \\ 12 & 26 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
À l'aide de la relation matricielle $D = P^{-1}AP$ déterminons les puissances successives de $A$.

$\boxed{0}$ On a tout d'abord (**méthode 7.5**) $P$ est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. En effectuant alors le produit $P^{-1}\ A\ P$, on obtient bien $D$. Ainsi, $A = P\ D\ P^{-1}$.

$\boxed{1}$ $A^2 = (P\ D\ P^{-1})(P\ D\ P^{-1}) = P\ D^2\ P^{-1}$. Une récurrence (ou directement la **proposition 7.9**) donne alors $A^n = P\ D^n\ P^{-1}$.

$\boxed{2}$ Comme $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}$ d'après la **proposition 7.7**, il s'ensuit finalement,

$$A^n = \begin{pmatrix} 6.2^n - 5.6^n & 10.2^n - 10.6^n \\ -3.2^n + 3.6^n & -5.2^n + 6.6^n \end{pmatrix}.$$

**Mise en œuvre : exercice 7.4, exercice 7.8.**

## ■ Systèmes de $n$ équations linéaires à $n$ inconnues

**❑ Méthode 7.8.— Comment résoudre un système à l'aide de matrices**
Étant donné un système d'équations linéaires, par exemple de 3 équations à 3 inconnues,

$$(S)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 &= y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 &= y_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 &= y_3 \end{cases}$$

$\boxed{1}$ On écrit le système sous forme matricielle :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ Si $A$ est inversible, alors l'unique solution du système $S$ est donnée par $X = A^{-1}Y$.

**Remarque :** si $A$ n'est pas inversible, soit le système n'a pas de solution, soit la solution n'est pas unique.

**Exemple :** résolvons le système $(S)\ \begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$

$\boxed{1}$ On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ de sorte que $(S) \Leftrightarrow A \times X = Y$.

$\boxed{2}$ On obtient (à la calculatrice, ou encore par l'une des méthodes d'inversion de matrice explicitées précédemment) :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Ainsi le système $(S)$ a une unique solution $X = A^{-1}\,Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nous pouvons conclure $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$. L'unique solution de $(S)$ est le triplet $(1;1;1)$.

**Mise en œuvre : exercice 7.6.**

## ■ Étude d'une suite de matrices colonnes

On considère dans cette partie une suite de matrices colonnes $(U_n)$ de taille $p \times 1$.

### Suites récurrentes $U_{n+1} = AU_n$

Lorsque la suite $(U_n)$ vérifie la relation de récurrence $U_{n+1} = A \times U_n$, où $A$ est une matrice carrée d'ordre $p$, la **proposition 7.10** permet d'obtenir directement l'expression de $U_n$ en fonction de $n$ et de la matrice initiale $U_0$ :

$$U_n = A^n\,U_0$$

Tout revient à calculer les puissances successives de la matrice $A$ au moyen de l'une des méthodes présentées par exemple.

### Suites récurrentes $U_{n+1} = AU_n + B$

Lorsque la suite $(U_n)$ vérifie la relation de récurrence $U_{n+1} = A \times U_n + B$, où $A$ est une matrice carrée d'ordre $p$ et $B$ est une matrice colonne de taille $p \times 1$, on peut exprimer $U_n$ directement en fonction de $n$ et des conditions initiales en procédant de la manière suivante :

> ❑ **Méthode 7.9.— Comment exprimer $U_n$ en fonction de $n$**
>
> Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices colonnes de taille $p \times 1$ vérifiant, pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = AU_n + B$, où $A$ est une matrice carrée d'ordre $p$, et $B$ est une matrice colonne de taille $p \times 1$.
>
> $\boxed{1}$ On résout l'équation matricielle $C = A\,C + B$.
>
> $\boxed{2}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $V_n = U_n - C$. On a
>
> $$\left\| \begin{array}{lrcl} \bullet & U_{n+1} & = & A\,U_n + B \\ \bullet & C & = & A\,C + B \end{array} \right.$$
>
> En soustrayant membre à membre, il vient $U_{n+1} - C = A\,(U_n - C)$, soit $V_{n+1} = A\,V_n$. La suite $(V_n)$ est une suite géométrique de matrices colonnes.
>
> $\boxed{3}$ D'après la **proposition 7.10**, il en résulte que $V_n = A^n V_0$, soit $U_n = A^n\,(U_0 - C) + C$.

**Mise en œuvre : exercice 7.11**.

## ■ Applications du plan dans lui-même

Dans ce qui suit, $A$ est une matrice carrée d'ordre 2 et $B$ une matrice colonne à deux lignes.

> ❑ **Méthode 7.10.— Comment utiliser une application du plan définie par $Y = AX + B$**
>
> Le plan est muni d'un repère, éventuellement orthonormal, direct ou pas selon l'exercice. Soit $f$ une application du plan dans lui-même, par définition elle associe à un point $M$ du plan un unique point $M'$, cette association peut se faire de deux façons, géométriquement ou algébriquement. Étudions le deuxième cas.
>
> $\boxed{1}$ Au point $M(x\ ;\ y)$, on associe la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
>
> $\boxed{2}$ Calcul de $Y = AX + B$.
>
> $\boxed{3}$ On obtient $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $M'(x'\ ;\ y')$ est l'image de $M$ par $f$.

**Remarque :** pour passer d'une définition géométrique d'une application à une définition algébrique (qui permet de déterminer les points invariants et autres caractéristiques de l'application) on peut utiliser les définitions vectorielles, les nombres complexes, et le produit scalaire.

**Mise en œuvre : exercice 7.12**.

❑ **Méthode 7.11.— Comment savoir si l'application définie par $Y = AX + B$ est une transformation**

Il faut et il suffit que $A$ soit inversible (voir le **théorème 7.5**) et dans ce cas l'antécédent $M(x\ ;\ y)$ de $M'(x'\ ;\ y')$ par $f$ vérifie $X = A^{-1}(Y - B)$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

**Exemple :** le plan étant muni d'un repère, on considère le point $\Omega(-1\ ;\ 2)$ et l'application $f$ du plan dans lui-même qui à tout point $M$ associe le point $M'$ tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega M}$.

**1.** Exprimer algébriquement $f$ sous la forme $Y = AX + B$.

**2.** $f$ est-elle une transformation du plan ?

**1.** Soit $M(x\ ;\ y)$ et $M'(x'\ ;\ y')$ deux points du plan tels que $M' = f(M)$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega M'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega M} &\Leftrightarrow \begin{cases} x' - (-1) = -\frac{1}{2}(x - (-1)) \\ y' - 2 = -\frac{1}{2}(y - 2) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ y' = -\frac{1}{2}y + 1 + 2 = -\frac{1}{2}y + 3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow Y = AX + B
\end{aligned}$$

Où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.

**2.** $\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 0 \times 0 = \frac{1}{4} \neq 0$, donc d'après le **théorème 7.5**, $A$ est inversible ainsi $f$ est bien une transformation du plan.

**Remarque :** on dit que $f$ est l'**homothétie** de centre $\Omega$ est de rapport $-\frac{1}{2}$.

**Mise en œuvre : exercice 7.12, exercice 7.13**.

# Vrai/Faux

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1.** Une matrice nulle est nécessairement carrée. | ☐ | ☐ |
| **2.** Une matrice unité est nécessairement carrée. | ☐ | ☐ |
| **3.** Si le produit $AB$ et le produit $BA$ sont tous les deux « calculables », alors $A$ et $B$ sont des matrices carrées. | ☐ | ☐ |
| **4.** Pour que le produit $AB$ soit une matrice carrée, il faut que $A$ et $B$ soient des matrices carrées de même taille. | ☐ | ☐ |
| **5.** Quelles que soient les matrices carrées $A, B$ et $C$ de même taille, si $AB = AC$ avec $A$ non égale à la matrice nulle, alors $B = C$. | ☐ | ☐ |
| **6.** Quelles que soient les matrices carrées $A$ et $B$ de même taille, si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$. | ☐ | ☐ |
| **7.** Quelles que soient deux matrices $A$ et $B$ de même taille, alors les produits $AB$ et $BA$ sont différents. | ☐ | ☐ |
| **8.** Si $\exists n \geqslant 2,\ A^n = 0$, alors $A = 0$. | ☐ | ☐ |
| **9.** Quelles que soient deux matrices $A$ et $B$ de même taille, alors $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. | ☐ | ☐ |
| **10.** Si le système $\left\{\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right.$ d'inconnue $(x;y)$ n'a pas de solution, alors la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. | ☐ | ☐ |
| **11.** Si le système $\left\{\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right.$ d'inconnue $(x;y)$ a au moins une solution, alors la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ est inversible. | ☐ | ☐ |
| **12.** Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M^n = \begin{pmatrix} 0 & 2^n \\ 3^n & 0 \end{pmatrix}$ | ☐ | ☐ |

# Énoncé des exercices

## Un entraînement au calcul matriciel

**Exercice 7.1 :** On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer : $A+B$, $A-B$, $2A+3B$, $AB$, $BA$, $ABC$, $A^{-1}$, $B^{-1}$, $C^{-1}$.

**Exercice 7.2* :** Pour tout réel $\theta$, on pose $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Montrer que pour tous réels $\theta$ et $\theta'$, on a $M(\theta)\, M(\theta') = M(\theta+\theta')$.

**Exercice 7.3 :** On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
**1.** Calculer $A^2$. Montrer que $A^2$ se met sous la forme $\alpha A + \beta I$, où $I$ est la matrice unité et $\alpha$, $\beta$ sont deux réels que l'on déterminera.
**2.** En déduire que $A$ est inversible et donner $A^{-1}$.

**Exercice 7.4* :** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. En posant $A = 3I + J$, où $I$ est la matrice unité, et $J$ une matrice que l'on explicitera, exprimer $A^n$ pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2.

**Exercice 7.5 :** Soit $A$ et $B$ deux matrices inversibles. Démontrer que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

**Exercice 7.6 : 1.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A$ vérifie l'égalité $A^2 - 5A + 4I = 0$.
**2.** En déduire que $A$ est inversible et donner $A^{-1}$.
**3.** Soit $B$ une matrice carrée ayant $n$ lignes ($n$ entier naturel supérieur ou égal à 2) vérifiant :

$$a_0 I + a_1 B + a_2 B^2 + \cdots + a_q B^q = 0$$

où $q$ est un entier naturel supérieur ou égal à 1, et $a_0$ un réel non nul *(les autres coefficients $a_i$ sont des réels quelconques)*. Montrer que $B$ est inversible et donner $B^{-1}$.

## Des matrices particulières

**Exercice 7.7* :** Soit $A$ une matrice carrée vérifiant $A^2 = A$. (On dit que $A$ est **idempotente**).
**1.** Montrer que $A^n = A$ pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1.
**2.** On pose $B = 2A - I$. Exprimer simplement $B^2$.

**Exercice 7.8** :** Soit $A$ une matrice carrée ayant $n$ lignes. On dit que $A$ est **nilpotente** s'il existe un entier naturel $p$ tel que $A^p = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $p$ vérifiant $A^p = 0$ est appelé **indice de nilpotence de la matrice** $A$.
**1.** Montrer que si $A$ est nilpotente d'indice de nilpotence $p$, alors $\forall k \geqslant p,\ A^k = 0$.
**2.** Développer $(I-A) \times \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right)$. En déduire que, si $A$ est nilpotente, alors $I - A$ est inversible et donner son inverse.
**3.** Montrer que la somme de deux matrices nilpotentes qui commutent est également nilpotente.

## ■ Suites de matrices

**Exercice 7.9** :** Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**1.** Calculer $A^2$ et $A^3$.

**2.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n$ et $b_n$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, expliciter les relations de récurrence vérifiées par les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$.

**3.** En déduire une expression de $A^n$ en fonction de $n$, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1.

**Exercice 7.10 :** Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 0.$$

En s'aidant des matrices et de la calculatrice pour les calculs matriciels, donner $u_5$ et $v_5$.

**Exercice 7.11 :** Dans un jardin public, un artiste doit installer une œuvre aquatique commandée par la mairie. Cette œuvre sera constituée de deux bassins A et B ainsi que d'une réserve filtrante R. Au départ, les deux bassins contiennent chacun 100 litres d'eau. Un système de canalisations devra alors permettre de réaliser, toutes les heures et dans cet ordre, les transferts d'eau suivants :

- dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R ;
- ensuite, les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A ;
- enfin, on rajoute 200 litres d'eau dans le bassin A et 300 litres d'eau dans le bassin B.

Une étude de faisabilité du projet amène à étudier la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour éviter tout débordement. On modélise les quantités d'eau des deux bassins A et B à l'aide de deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ : plus précisément pour tout entier naturel $n$, on note $a_n$ et $b_n$ les quantités d'eau en centaines de litres qui seront respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de $n$ heures. On suppose pour cette étude mathématique que les bassins sont *a priori* suffisamment grands pour qu'il n'y ait pas de débordement.

Pour tout entier naturel $n$, on note $U_n$ la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**1.** Justifier que, pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = MU_n + C$ où $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**2.** On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- **a.** Calculer $P^2$. En déduire que la matrice $P$ est inversible et préciser sa matrice inverse.
- **b.** Montrer que $PMP$ est une matrice diagonale $D$ que l'on précisera.
- **c.** Calculer $PDP$.
- **d.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $M^n = PD^nP$.

On admet par la suite que pour tout entier naturel $n$, $M^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,5^n - 3 \times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}$.

**3.** Montrer que la matrice $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $X = MX + C$.

**4.** Pour tout entier naturel $n$, on définit la matrice $V_n$ par $V_n = U_n - X$.

- **a.** Montrer que tout entier naturel $n$, $V_{n+1} = MV_n$.

**b.** On admet que, pour tout entier naturel non nul $n$, $V_n = M^n V_0$. Montrer que pour tout entier naturel non nul $n$, $U_n = \begin{pmatrix} -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10 \\ -3 \times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$.

**5.**

**a.** Montrer que la suite $(b_n)$ est croissante et majorée. Déterminer sa limite.

**b.** Déterminer la limite de la suite $(a_n)$.

**c.** On admet que la suite $(a_n)$ est croissante. En déduire la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour la faisabilité du projet, c'est-à-dire pour éviter tout débordement.

*D'après Baccalauréat S, Liban mai 2019*

## ■ Matrices et géométrie

**Exercice 7.12 :** Le plan est muni d'un repère orthonormal. On considère la droite $\Delta$ d'équation réduite $y = -2x + 1$. L'objectif de l'exercice est de définir par une égalité matricielle la **réflexion** (i.e. symétrie axiale orthogonale) d'axe $\Delta$.

**1.** Soit $M(x_M \; ; \; y_M)$ un point du plan, donner l'équation réduite de la droite $\Delta_M$ passant par $M$ et orthogonale à $\Delta$.

**2.** Calculer les coordonnées du point $H$ intersection des droites $\Delta$ et $\Delta_M$ en fonction de $x_M$ et $y_M$.

**3.** Calculer les coordonnées du point $M'$ image de $M$ par la réflexion d'axe $\Delta$.

**4.** En déduire une expression matricielle de la réflexion d'axe $\Delta$, et montrer qu'elle est de la forme $Y = AX + B$.

**Exercice 7.13* :** Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O \; ; \; \vec{\imath}, \; \vec{\jmath})$. Soit $f$ l'application du plan dans lui-même définie par $Y = AX + B$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**1.** $f$ est-elle une transformation plane ?

**2.** On dit qu'un **point** $M$ est **invariant** par une application $f$ si $f(M) = M$. Montrer que $f$ n'a pas de points invariants.

**3.** Soit $t$ la translation de vecteur $\vec{\jmath}$, donner une forme matricielle de cette application.

**4.** Soit $s$ la réflexion d'axe $\Delta$, la droite d'équation $x = 1$, donner une forme matricielle de cette application.

**5.** Donner la forme matricielle de l'application $s \circ t$ et en déduire la nature de $f$.

Rappelons la définition de la **loi rond** « $\circ$ » appliquée à la géométrie : pour tout point $M$ du plan $(s \circ t)(M) = s[t(M)]$.

## ■ Matrices et cryptographie

**Exercice 7.14 :** Deux matrices colonnes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ à coefficients entiers sont dites **congrues** modulo 5 si et seulement si $x \equiv x' \; [5]$ et $y \equiv y' \; [5]$.

Deux matrices carrées d'ordre 2 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ à coefficients entiers sont dites **congrues** modulo 5 si et seulement si $a \equiv a' \; [5], b \equiv b' \; [5], c \equiv c' \; [5], d \equiv d' \; [5]$

Alice et Bob veulent s'échanger des messages en utilisant la procédure décrite ci-dessous.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | A | B | C | D | E |
| 1 | F | G | H | I | J |
| 2 | K | L | M | N | O |
| 3 | P | Q | R | S | T |
| 4 | U | V | X | Y | Z |

**NB :** la lettre W est remplacée par les deux lettres accolées V.

- Ils choisissent une matrice M carrée d'ordre 2, à coefficients entiers.
- Leur message initial est écrit en lettres majuscules sans accent.
- Chaque lettre de ce message est remplacée par une matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ déduite du tableau ci-contre : $x$ est le chiffre situé en haut de la colonne et $y$ est le chiffre situé à la gauche de la ligne ; par exemple, la lettre T d'un message initial correspond à la matrice colonne $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- On calcule une nouvelle matrice $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ en multipliant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à gauche par $M$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- On calcule $r'$ et $t'$ les restes respectifs des divisions euclidiennes de $x'$ et $y'$ par 5.
- On utilise le tableau ci-contre pour obtenir la lettre correspondant à la matrice colonne $\begin{pmatrix} r' \\ t' \end{pmatrix}$.

**1.** Bob et Alice choisissent la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

**a.** Montrer que la lettre « T » du message initial est codée par la lettre « U » puis coder le message « TE ».

**b.** On pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que les matrices $PM$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont congrus modulo 5.

**c.** On considère $A$, $A'$ deux matrices d'ordre 2 à coefficients entiers congrus modulo 5 et $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Z' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients entiers congrus modulo 5. Montrer alors que les matrices $AZ$ et $A'Z'$ sont congrus modulo 5.
Dans ce qui suit on admet que si $A$, $A'$ sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrus modulo 5 et si $B$, $B'$ sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrus modulo 5 alors les matrices produit $AB$ et $A'B'$ sont congrus modulo 5.

**d.** On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients entiers. Déduire des questions précédentes que si $MX$ et $Y$ sont congrus modulo 5 alors les matrices $X$ et $PY$ sont congrus modulo 5 ; ce qui permet de « décoder » une lettre chiffrée par la procédure utilisée par Alice et Bob avec la matrice $M$ choisie.

**e.** Décoder alors la lettre « D ».

**2.** On souhaite déterminer si la matrice $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ peut être utilisée pour coder un message.

**a.** On pose $S = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que la matrice $RS$ et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont congrus modulo 5.

**b.** On admet qu'un message codé par la matrice $R$ peut être décodé s'il existe une matrice $T$ telle que les matrices $TR$ et $I$ soient congrus modulo 5.

Montrer que si c'est le cas alors les matrices $TRS$ et $S$ sont congrues modulo 5 (par la procédure expliquée en question **1. d.** pour le codage avec la matrice $M$).

**c.** En déduire qu'un message codé par la matrice $R$ ne peut être décodé.

*D'après Baccalauréat S, Amérique du Nord mai 2019*

# Indications

### Ex. 7.1

*Revoir les conditions d'inversion de matrices.*

### Ex. 7.2

*Pensez aux formules trigonométriques : cos $(\theta+\theta')$ et sin $(\theta+\theta')$.*

### Ex. 7.3

*Pour $A^2$, penser à faire intervenir $I$.*

### Ex. 7.4

*Pensez à la formule du binôme de Newton.*

### Ex. 7.5

*Calculer $(AB)\times\left(B^{-1}A^{-1}\right)$.*

### Ex. 7.7

*Récurrence ...*

### Ex. 7.9

*Montrez que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est arithmétique.*

### Ex. 7.12

**1.** *Si $a$ et $a'$ sont des coefficients directeurs de deux droites, alors des vecteurs directeurs de chacune d'elles sont $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\a'\end{pmatrix}$. À quelle condition $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ? On pourra déterminer une équation cartésienne de $\Delta_M$, puis son équation réduite. Dans tous les cas revoir le chapitre de géométrie repérée vu en Première.*

**3.** $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MH}$...

### Ex. 7.13

**2.** $f(M)=M\Leftrightarrow X=AX+B$ *et résoudre cette équation ou la traduire par un système* $\begin{cases}x=\cdots\\y=\cdots\end{cases}$ *d'inconnues $x$ et $y$ et le résoudre.*

**3.** $M'=t(M)\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ ...

**4.** *On peut s'aider d'un dessin.*

**5.** *Si $s$ et $t$ sont caractérisées respectivement par $Y=AX+B$ et $Y=A'X+B'$, alors $s\circ t$ est définie par $Y=A(A'X+B')+B$.*

# Corrigé des vrai/faux

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | V | F | F | F | F | F | F | F | V | F | F |

**1.** Contre-exemple : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nulle.

**2.** Elle possède $n$ lignes et $n$ colonnes.

**3.** Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $BA = (8)$.

**4.** Contre-exemple : le même que pour la proposition précédente ...

**5.** Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = AC = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

**6.** Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**7.** Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = I$, $AB = BA\ (= A)$

**Remarque :** Quand $AB = BA$, on dit que les matrices $A$ et $B$ commutent.

**8.** Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et pourtant $A \neq 0$.

**9.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 29 & 14 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$. $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 29 & 15 \\ 13 & 8 \end{pmatrix}$.

**Remarque :** Si $A$ et $B$ commutent, cette formule est vraie.

**10.** Si la matrice était inversible, le système aurait une solution unique.

**11.** Contre-exemple : le système $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$ a une infinité de solutions (les couples de la forme $(1; 1-x)$ où $x$ est réel), et la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

**12.** Contre-exemple : $n = 2$, $M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 2^2 \\ 3^2 & 0 \end{pmatrix}$

**Erreurs classiques**

- Croire que la multiplication des matrices est commutative : elle ne l'est pas !
- Croire qu'un produit de deux matrices est nul seulement si l'une des matrices est nulle.
- Utiliser la formule du binôme de Newton pour des matrices qui ne commutent pas.

# Corrigé des exercices

## Exercice 7.1

*On met en œuvre la* **méthode 7.1**.

- $A+B=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-3\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\2&9\end{pmatrix}$

*On met en œuvre la* **méthode 7.2**.

- $A-B=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-3\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6\\2&-1\end{pmatrix}$

*On met en œuvre la* **méthode 7.3**.

- $2A+3B=2\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&-3\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-3\\4&23\end{pmatrix}$

*On met en œuvre la* **méthode 7.4**.

- $AB=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&12\\2&14\end{pmatrix}$

*La multiplication des matrices est associative.*

- $BA=\begin{pmatrix}1&-3\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-9\\10&20\end{pmatrix}$
- $ABC=(AB)\,C=\begin{pmatrix}1&12\\2&14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&13\\16&16\end{pmatrix}$

*Ces deux derniers résultats peuvent être obtenus soit à la calculatrice soit par la* **méthode 7.5**.

- $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&\frac{3}{2}\\1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
- $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3\\0&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{3}{5}\\0&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$
- Attention, piège ! $C$ n'est pas inversible car son déterminant est nul. Donc, on n'a pas le droit d'écrire $C^{-1}$ !

▲

## Exercice 7.2

On met en œuvre la **méthode 7.4**.

$$M(\theta)\,M(\theta')=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta')&-\sin(\theta')\\\sin(\theta')&\cos(\theta')\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta')&-\cos(\theta)\sin(\theta')-\sin(\theta)\cos(\theta')\\\sin(\theta)\cos(\theta')+\cos(\theta)\sin(\theta')&-\sin(\theta)\sin(\theta')+\cos(\theta)\cos(\theta')\end{pmatrix}$$

*Coïncidence ? Je ne pense pas ... Vous apprendrez plus tard que $M(\theta)$ correspond à une rotation d'angle $\theta$.*

et grâce aux formules de trigonométrie, on reconnaît :

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta+\theta')&-\sin(\theta+\theta')\\\sin(\theta+\theta')&\cos(\theta+\theta')\end{pmatrix}=M(\theta+\theta')$$

▲

## Exercice 7.3

**1.** $A^2=\begin{pmatrix}17&8\\8&17\end{pmatrix}$. Cherchons $A^2$ sous la forme $\alpha A+\beta I$.

$$\begin{pmatrix}17&8\\8&17\end{pmatrix}=\alpha A+\beta I=\begin{pmatrix}4\alpha+\beta&\alpha\\\alpha&4\alpha+\beta\end{pmatrix}$$

On en déduit immédiatement : $\alpha=8$ et $\beta=17-4\alpha=17-32=-15$.

*On met en œuvre la* **méthode 7.4**.

**2.** De la question précédente, on tire :

$$A^2 - 8A = -15I \Leftrightarrow -\frac{1}{15}A\,(A-8I) = I.$$

Ainsi, $A$ est bien inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{15}\,(A-8I)$. ▲

## Exercice 7.4

$A = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3I + J, \quad \text{avec } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Utilisons la formule du binôme de Newton pour $n \geqslant 2$ :

*On met en œuvre la* **méthode 7.6**.

$$A^n = (3I+J)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} 3^k I^k J^{n-k}$$

Or on a : $\forall k \geqslant 2,\ J^k = 0$ (matrice nulle).

Ainsi, dans la **formule du binôme de Newton**, il ne reste plus que :

$$\begin{aligned} A^n &= \binom{n}{n} 3^n I^n J^0 + \binom{n}{n-1} 3^{n-1} I^{n-1} J^1 \\ &= 3^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n3^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

▲

## Exercice 7.5

*Associativité de la multiplication*

$$\begin{aligned} (AB) \times \left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} \\ &= AIA^{-1} = AA^{-1} = I \end{aligned}$$

Donc $AB$ est inversible et d'inverse $B^{-1}A^{-1}$. ▲

*On met en œuvre la* **méthode 7.4**.

## Exercice 7.6

**1.**

$$\begin{aligned} A^2 - 5A + 4I &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & -5 & -5 \\ -5 & -10 & -5 \\ -5 & -5 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**2.**

$$\begin{aligned} A^2 - 5A + 4I = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\left(-A^2 + 5A\right) = I \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}A\,(-A+5I) = I \end{aligned}$$

Donc $A$ est inversible et :

$$A^{-1} = \tfrac{1}{4}\,(-A+5I) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Corrigé

*Rappelons que $a_0$ est différent de zéro*

**3.** $a_0 I + a_1 B + a_2 B^2 + \ldots + a_q B^q = 0 \;\Leftrightarrow\; -\dfrac{a_1}{a_0}B - \dfrac{a_2}{a_0}B^2 - \ldots - \dfrac{a_q}{a_0}B^q = I.$

$a_0 I + a_1 B + a_2 B^2 + \ldots + a_q B^q = 0 \;\Leftrightarrow\; B\left(-\dfrac{a_1}{a_0}I - \dfrac{a_2}{a_0}B - \ldots \dfrac{a_q}{a_0}B^{q-1}\right) = I.$

Ainsi $B$ est bien inversible, et $B^{-1} = -\dfrac{a_1}{a_0}I - \dfrac{a_2}{a_0}B - \cdots - \dfrac{a_q}{a_0}B^{q-1}$. ▲

## Exercice 7.7

**1.** La démonstration sera par récurrence :

• **Initialisation :** $A^1 = A$.

• **Hérédité :** Posons l'hypothèse de récurrence selon laquelle pour un $n$ fixé supérieur ou égal à 1, on a $A^n = A$. Alors :

*$A$ est idempotente donc $A^2 = A$*

$$A^{n+1} = A^n A = AA = A^2 = A$$

• **Conclusion :** Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que $A^n = A$ pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1.

**2.** On peut utiliser l'identité remarquable car $I$ commutant avec toutes les matrices commute en particulier avec la matrice $2A$. $B^2 = (2A - I)^2 = 4A^2 - 4I + I^2 = 4A^2 - 4AI + I = 4A - 4A + I = I$. ▲

## Exercice 7.8

**1.** $A$ est nilpotente, donc il existe un entier naturel $p$ tel que $A^p = 0$. Pour tout entier $k \geqslant p$, il en résulte que

$$A^k = A^p A^{k-p} = 0 \times A^{k-p} = 0$$

*On a $k - p \geqslant 0$.*

*Par convention, $A^0 = I$.*

**2.** $(I - A)\left(\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^k\right) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} A^k - \sum\limits_{k=1}^{p} A^k = A^0 - A^p = I - A^p$. Si $A$ est nilpotente d'indice de nilpotence $p$, alors $A^p = 0$ de sorte que $I - A^p = I$.

Ainsi : $(I - A)\left(\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^k\right) = I.$

Si $A$ est nilpotente d'indice de nilpotence $p$, alors $I - A$ est inversible, et a pour inverse : $\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^k$.

**3.** Soit $A$ et $B$ deux matrices nilpotentes de même taille qui commutent. Soit $p$ et $q$ deux entiers tels que $A^p = 0$ et $B^q = 0$. Utilisons la formule du binôme de Newton, il vient :

*On peut utiliser la formule du binôme car $A$ et $B$ commutent.*

$$(A+B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k}$$

car, pour tout $k \geqslant p$, $A^k = 0$ (d'après la première question).

Mais si $k$ est strictement inférieur à $p$, alors $p + q - k$ est supérieur à $q$ et donc $B^{p+q-k} = 0$. Ainsi $\sum\limits_{k=0}^{p-1} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k} = 0$, d'où l'on tire finalement que $(A+B)^{p+q} = 0$. La matrice $A + B$ est nilpotente.

**Remarque :** l'indice de nilpotence de $(A + B)$ n'est pas connu. On peut simplement dire qu'il est inférieur ou égal à $p + q$. ▲

## Exercice 7.9

**1.** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**2.** On raisonne par récurrence.

- **Initialisation** : Cette étape a été effectuée précédemment.
- **Hérédité** : Supposons que $A^n$ soit bien de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour un $n$ fixé supérieur ou égal à 1.

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+a_n & a_n+b_n \\ 0 & 1 & 1+a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est bien de la forme attendue.

- **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, nous concluons : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $A^n$ est de la forme $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**3.** La question précédente nous fournit de plus les relations $a_{n+1} = 1 + a_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$. En particulier, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est arithmétique de raison 1. Comme $a_1 = 1$, il s'ensuit que $a_n = a_1 + n - 1 = n$.

✎ *Il y a « télescopage » des termes.*

$$\begin{cases} b_n = n - 1 + b_{n-1} \\ b_{n-1} = n - 2 + b_{n-2} \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ b_2 = b_1 + 1 \\ b_1 = b_1 \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre toutes ces égalités, et tenant compte de $b_1 = 0$, il vient :

$$b_n = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + b_1 = \frac{(n-1)\,n}{2}.$$

Ainsi, pour $n \geqslant 1$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ▲

## Exercice 7.10

Posons $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a donc : $U_5 = A^5 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

La calculatrice nous fournit $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 137 & 123 \\ 41 & 14 \end{pmatrix}$, d'où l'on tire

$$U_5 = \begin{pmatrix} 137 & 123 \\ 41 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 151 \\ 68 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi : $u_5 = 151$ et $v_5 = 68$. ▲

Corrigé

## Exercice 7.11

**1.** Décrivons chacun des trois temps des remplissages des deux bassins A et B. Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_n$ et $b_n$ sont les volumes d'eau respectivement présents dans les bassins A et B.

$\boxed{1}$ Le bassin A contient $0,5a_jn$ litres d'eau.

$\boxed{2}$ Le bassin A contient $0,5a_n + 0,75b_n$ litres et le B contient $0,25b_n$.

$\boxed{3}$ Finalement $\begin{cases} a_{n+1} = 0,5a_n + 0,75b_n + 2 \\ b_{n+1} = 0,25b_n + 3 \end{cases}$.

De ce fait l'écriture matricielle de ce système est : $U_{n+1} = MU_n + C$ où $U_n \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**2.** Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**a.** $P^2 = I_2$, où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $P$ est inversible et sa matrice inverse est $P^{-1} = P$.

**b.** $PMP = D$ où $D = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

**c.** $D = PMP \Leftrightarrow PDP = P(PMP)P = (PP)M(PP) = I_2MI_2 = M$. Finalement $PDP = M$.

**d.** Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $M^n = PD^nP$. Pour tout entier naturel $n$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ telle que $M^n = PD^nP$.

• **Initialisation :** Si $n = 0$, $M^0 = I_2$ et $PD^0P = PI_2P = P^2 = I_2$, donc $M^0 = PD^0P$, la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** Soit $n \geqslant 0$ un entier tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
$\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc $M^n = PD^nP$.

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \times M^n = (PDP)(PD^nP) = (PD)(PP)(D^nP) \\ &= (PD)I_2(D^nP) = P(DD^n)P = PD^{n+1}P \end{aligned}$$

$M^{n+1} = PD^{n+1}P$, la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion :** La proposition $\mathcal{P}$ est vraie au rang 0, elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence, il s'ensuit que pour tout entier naturel $n$, $M^n = PD^nP$.

On admet que pour tout entier naturel $n$, $M^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,5^n - 3 \times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}$.

**3.** On vérifie avec une calculatrice que $X = MX + C$ avec $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$.

**4.** Pour tout entier naturel $n$, on définit la matrice $V_n$ par $V_n = U_n - X$.

**a.** Soit $n$ un entier naturel, $MV_n = M(U_n - X) = MU_n - MX$. D'après la question **1.** $MU_n = U_{n+1} - C$ et d'après la question précédente $MX = X - C$, donc $MV_n = U_{n+1} - C - (X - C) = U_{n+1} - C - X + C = U_{n+1} - X = V_{n+1}$, le résultat attendu est démontré.

**b.** Soit $n$ un entier naturel, on admet que $V_n = M^nV_0$ avec $V_0 = U_0 - X$. D'après l'énoncé $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc $V_0 = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$. Finalement

$$\begin{aligned}
V_n &= \begin{pmatrix} 0,5^n & 3\times 0,5^n - 3\times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -9\times 0,5^n - 3\times(3\times 0,5^n - 3\times 0,25^n) \\ -9\times 0 - 3\times 0,25^n \end{pmatrix} \\
V_n &= \begin{pmatrix} -18\times 0,5^n + 9\times 0,25^n \\ -3\times 0,25^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par définition de $V_n$, $U_n = V_n + X = \begin{pmatrix} -18\times 0,5^n + 9\times 0,25^n + 10 \\ -3\times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$.

**5.**

**a.** D'après la question précédente, pour tout entier naturel $n$, $b_n = -3\times 0,25^n + 4$. $0 < 0,25 < 1$ donc la suite géométrique $(0,25^n)$ est décroissante, donc $(-3\times 0,25^n)$ est croissante (puisque $-3 < 0$), de même que $(b_n)$. Par ailleurs, soit $n \in \mathbb{N}$, $-3\times 0,25^n < 0$, donc en ajoutant 4 des deux côtés de l'inégalité on obtient $b_n < 4$. La suite $(b_n)$ est majorée par 4. $-1 < 0,25 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 4$.

**b.** D'après la question **4.b.**, pour tout entier naturel $n$, $a_n = -18\times 0,5^n + 9\times 0,25^n + 10$. Puisque $-1 < 0,5 < 1$ et $-1 < 0,25 < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(-18\times 0,5^n + 9\times 0,25^n) = 0$, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 10$.

**c.** La suite $(a_n)$ est croissante et a pour limite 10, donc elle est majorée par 10. D'autre part la suite $(b_n)$ est majorée par 4, en conséquence il suffit que les bassins A et B aient pour contenances respectives 1 000 et 400 litres pour éviter tout débordement. ▲

## Exercice 7.12

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on définit la droite $\Delta$ d'équation $y = -2x + 1$ et un point $M(x_M\ ;\ y_M)$.

**1.** $\Delta$ a pour équation cartésienne $-2x - y + 1 = 0$, donc d'après le chapitre de géométrie repérée vue en Première, un vecteur directeur de cette droite est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Par conséquent le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}$, puisque $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 1\times 2 + (-2)\times 1 = 0$. Par conséquent une équation cartésienne de la droite $\Delta_M$ est de la forme $x - 2y + d = 0$ où $d$ est un nombre réel à déterminer. $M \in \Delta_M$, donc $x_M - 2y_M + d = 0$, donc $d = -x_M + 2y_M$, ainsi une équation cartésienne de $\Delta_M$ est $x - 2y - x_M + 2y_M = 0$ et son équation réduite est $y = \frac{1}{2}x + \frac{-x_M+2y_M}{2}$.

*✎ Rappelons que si $ax + by + c = 0$ est une équation de droite, alors $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.*

*✎ Rappelons q'une droite du plan admet une infinité d'équations cartésiennes, mais une seule équation réduite.*

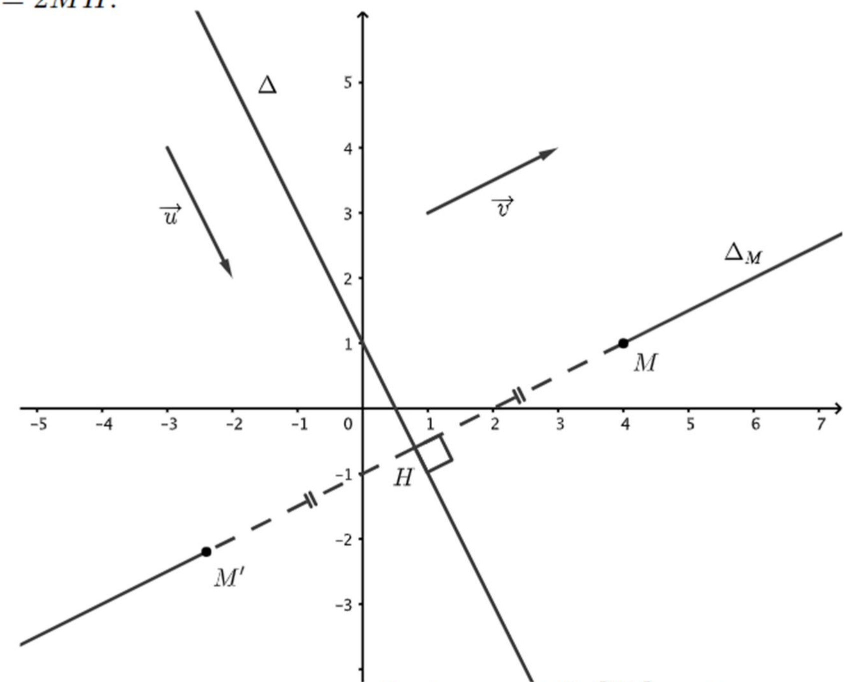
**2.** Il s'agit ici de résoudre d'un système d'équations à deux inconnues.

$$\begin{aligned}
H(x\ ;\ y) \in \Delta\cap\Delta_M &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{-x_M+2y_M}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 1 \\ -2x + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{-x_M+2y_M}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 1 \\ -4x + 2 = x - x_M + 2y_M \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 1 \\ -5x = -x_M + 2y_M - 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_M-2y_M+2}{5} \\ y = -2\frac{x_M-2y_M+2}{5} + 1 \end{cases} \\
H(x\ ;\ y) \in \Delta\cap\Delta_M &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_M-2y_M+2}{5} \\ y = \frac{-2x_M+4y_M+1}{5} \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement $H\left(\frac{x_M-2y_M+2}{5}\ ;\ \frac{-2x_M+4y_M+1}{5}\right)$.

*Pour alléger les écritures on remplace $x_M$ et $y_M$ respectivement par $x$ et $y$.*

**3.** Soit $M'(x'\ ;\ y')$ l'image de $M(x\ ;\ y)$ par la réflexion d'axe $\Delta$, alors $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$.




$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = 2(\frac{x-2y+2}{5}-x) \\ y'-y = 2(\frac{-2x+4y+1}{5}-y) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{2x-4y+4}{5}-x \\ y' = \frac{-4x+8y+2}{5}-y \end{cases}$$
$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{-3x-4y+4}{5} \\ y' = \frac{-4x+3y+2}{5} \end{cases}$$

Par conséquent $M'\left(\frac{-3x-4y+4}{5}\ ;\ \frac{-4x+3y+2}{5}\right)$.

**4.** Reprenons le système trouvée à la question précédente.
$$\begin{cases} x' = \frac{-3x-4y+4}{5} = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{4}{5} \\ y' = \frac{-4x+3y+2}{5} = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{2}{5} \end{cases}$$
Une écriture matricielle de la réflexion d'axe $\Delta$ est la suivante : $Y = AX + B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $A = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$. ▲

## Exercice 7.13

**1.** $-1\times 1 - 0\times 0 = -1 \neq 0$, donc $A$ est inversible d'après la **méthode 7.5**, par ailleurs la **méthode 7.11** permet d'affirmer que $f$ est une transformation plane.

**2.** Soit $M(x\ ;\ y)$ un point du plan.
$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -x+2 \\ y = y+1 \end{cases}$$
$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ 0y = 1 \text{ impossible} \end{cases}$$
L'équation $f(M) = M$ n'a pas de solutions, donc $f$ n'a pas de points invariants.

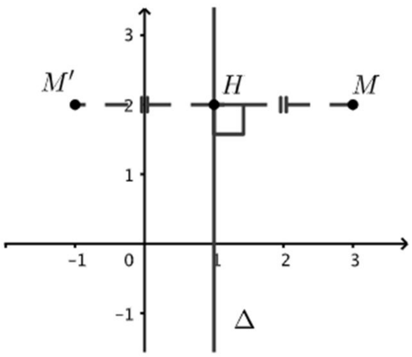
**3.** Soit $M(x\ ;\ y)$ et $M'(x'\ ;\ y')$ deux points du plan tels que $M' = t(M)$, donc :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{\jmath} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 0 \\ y' - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{\jmath} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'écriture matricielle de $t$ est $Y = I_2 X + B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**4.** La situation est celle décrite dans le dessin ci-dessous.




Soit $M(x\ ;\ y)$ et $\mu'(x'\ ;\ y')$ deux points du plan tels que $M' = s(M)$, alors si $H$ est le milieu du segment $[MM']$, alors $H$ a pour abscisse 1, et les points $M$, $H$ et $M'$ ont la même ordonnée. Finalement, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{x+x'}{2} = 1 \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Rappelons qu'un point $K(x_K\ ;\ y_K)$ est le milieu du segment $[AB]$ si, et seulement si,* $\begin{cases} x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_K = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$.

Une forme matricielle de $s$ est $Y = AX + C$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**5.** Soit $M(x\ ;\ y)$ un point du plan, alors son image $M'(x'\ ;\ y')$ par $t$ vérifie l'égalité $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $M''(x''\ ;\ y'')$ l'image de $M'$ par $s$, alors $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, que nous pouvons écrire en fonction de la matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par définition $M'' = s(M') = s[t(M)] = (s \circ t)(M)$ et on vient de montrer que $M'' = f(M)$, pour tout point $M$ du plan, donc $f = s \circ t$. $f$ est la composée d'une translation suivie d'une réflexion. À noter que le vecteur de

Corrigé

la translation est aussi un vecteur directeur de l'axe de la translation. ▲

## Exercice 7.14

**1.** Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

**a.** Le codage se déroule essentiellement en quatre étapes.

$\boxed{1}$ La lettre T est repérée par la matrice $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \end{pmatrix}$.

$\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} 10 \\ 24 \end{pmatrix}$ est congrue à $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ modulo 5.

$\boxed{4}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ repère la lettre U.

En définitive, T est codée par U.
Codons la lettre E.

$\boxed{1}$ La lettre E est repérée par la matrice $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

$\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ est congrue à $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ modulo 5.

$\boxed{4}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ repère la lettre O.

En définitive, E est codée par O, et le message « TE » est codé par « UO ».

**b.** Posons $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, alors $PM = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}$. Par conséquent $PM$ est congrue à $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ modulo 5.

**c.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers relatifs congrues modulo 5. Soit $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Z' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes coefficients entiers relatifs congrues modulo 5.
$AZ = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$ et $A'Z' = \begin{pmatrix} a'x' + c'y' \\ b'x' + d'y' \end{pmatrix}$. Par définition $a \equiv a'$ [5], $c \equiv c'$ [5], $x \equiv x'$ [5] et $y \equiv y'$ [5], donc $ax + cy \equiv a'x' + c'y'$ [5]. De même on montrerait que $bx + dy \equiv b'x' + d'y'$ [5]. Les matrices $AZ$ et $A'Z'$ sont bien congrues modulo 5.

*Pour des rappels sur les congruences, voir la* **proposition 6.3** *du chapitre* **Arithmétique**.

**d.** $P$ est congrue à $I$ modulo 5 et $MX$ est congrue à $Y$ modulo 5, donc d'après le résultat admis, $P(MX)$ est congrue à $PY$ modulo 5. D'autre part $P(MX) = (PM)X = IX = X$, donc d'après ce qui vient d'être dit, $X$ est congrue à $PY$ modulo 5.

**e.** La lettre D est repérée par $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. $PY = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$ est congrue à $X$ modulo 5 d'après la question précédente, or $\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$ est congrue à $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ modulo 5.

$0 \leqslant 4 < 5$ et $0 \leqslant 2 < 5$, donc $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ainsi le décodage de la lettre « D » donne la lettre « O ».

**2.** Posons $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

**a.** $RS = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$ est congrue à la matrice nulle modulo 5.

**b.** $TRS - S = TRS - IS = (TR - I)S$ et d'après le préambule on peut affirmer que $TR - I$ est congrue à la matrice nulle, notée 0, modulo 5, et $S$ est congrue à elle-même modulo 5. D'autre part $0S = 0$, donc $(TR - I)S$ est congrue à 0 modulo 5, de même que $TRS - S$. Conclusion $TRS$ est congrue à $S$ modulo 5.

**c.** Raisonnons par l'absurde et supposons que l'on puisse décoder un message codé avec la matrice $R$, alors d'après la question **1.d.**, il existe une matrice $T$ telle que $TR$ et $I$ soient congrues modulo 5. D'après la question **1.a.** $RS$ est congrue à 0 modulo 5, donc il en est de même de $TRS$, or d'après la question précédente $TRS$ est congrue à $S$ modulo 5, donc finalement $S$ est congrue à 0 ce qui est absurde. Conclusion un message codé par la matrice $R$ ne sera pas décodé. ▲

Corrigé

# Chapitre 8
# Les graphes

Le problème des ponts de Königsberg proposé par Leonhard **Euler** est souvent considéré comme le point de départ de la théorie des graphes (voir p. 246). Pourtant, pendant longtemps, la théorie des graphes était avant tout considérée comme une curiosité mathématique. Le développement de l'informatique et de l'algorithmique depuis les années 1950 a permis un essor très important à cette discipline.

### Un mathématicien

Andreï **Markov** (1856-1922) a suivi les cours de son compatriote Pafnouti **Tchebychev** à l'université de Saint-Pétersbourg. Son doctorat obtenu, il y enseigne jusqu'en 1908, date à laquelle il en est exclu suite à son opposition au gouvernement du Tsar.
Après avoir travaillé sur la théorie des nombres, il s'intéresse aux probabilités. Il définit de manière précise la notion de processus aléatoire, et étudie ce que l'on nomme désormais une chaîne de Markov. On lui doit également la première démonstration rigoureuse du *théorème central limite*, résultat fondamental du calcul des probabilités.

**LE SAVIEZ-VOUS ?**

Le mathématicien français Claude **Berge** (1926-2002) s'intéresse à la théorie des jeux. Après avoir passé l'année 1956 à l'université de Princeton, il jette les bases de la théorie moderne des graphes. En 1960, il travaille au CNRS à la mise au point de programmes sur les jeux d'échecs.
En 1960, il participe à la création de l'Oulipo avec entre autres Raymond **Queneau** et Georges **Perec**. Les membres de ce groupe littéraire, inspiré du surréalisme, cherchaient à jouer sur le langage pour en obtenir des créations littéraires inattendues.

COMPÉTENCES

## les incontournables

- Les graphes orientés ou non
  - sommets, nœuds, arêtes et arcs
  - ordre, degré, sommets adjacents
  - chemins et cycles de longueur donnée
  - graphes pondérés
  - graphes complets ou connexes
- Matrices d'adjacences
  - nombre de chemins, de longueur donnée, entre deux sommets
- Graphes probabilistes
  - matrice de transition
- Chaîne de Markov $(X_n)$
  - espace des états
  - représentation par un graphe probabiliste
  - calcul de la loi $\pi_n$ suivie par $X_n$ au temps $n$
  - convergence de la loi $\pi_n$ vers un état stable, notamment dans le cas d'un espace à deux états
- Démonstrations
  - interprétation des coefficients de $m^n$ ou $M$ est une matrice d'adjacence
  - $\pi_n = \pi_0 T^n$ où $T$ est la matrice de transition d'un graphe probabiliste et interprétation des coefficients de $T^n$

## et plus si affinités

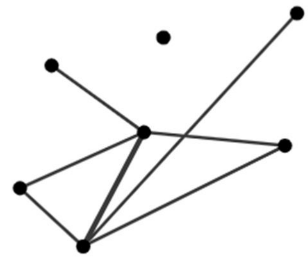
- Graphes eulériens
- Les ponts de Königsberg
- PageRank, l'algorithme de Google

# Résumé de cours

## Généralités sur les graphes

### Les graphes non orientés

**Définition :** *Un* ***graphe non orienté*** *est un ensemble fini, non vide, de points et de segments, ou d'arcs, qui relient certains de ces points. Les points sont appelés* ***sommets*** *ou* ***nœuds*** *du graphe. Les segments en sont les* ***arêtes****. Les sommets situés « à chaque bout » sont alors les* ***extrémités*** *de l'arête.*



**Remarque :** sommets et arêtes suffisent pour identifier les graphes, mais pour des raisons de clarté on pourra nommer ou numéroter les sommets.

**Définition :**

- *On appelle* ***ordre*** *d'un graphe le nombre de ses sommets.*
- *Dans un graphe non orienté, le* ***degré*** *d'un sommet est le nombre d'arêtes dont il est une extrémité.*
- *Deux sommets reliés par une arête sont dits* ***adjacents****.*

> **Théorème 8.1.—** La somme des degrés des sommets d'un graphe non orienté, est égale au double du nombre d'arêtes.

**Définition :** *Considérons un graphe non orienté.*

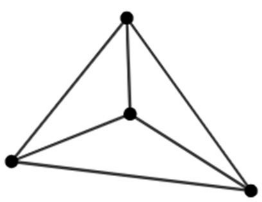
- *Une* ***chaîne*** *est une suite quelconque d'arêtes, donc de sommets adjacents. La* ***longueur d'une chaîne*** *est le nombre d'arêtes qu'elle comporte.*
- *Un* ***cycle*** *est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues, à condition que toutes les arêtes soient différentes. Si les arêtes ne sont pas toutes distinctes, on parlera simplement de* ***chaîne fermée****.*

**Remarque :** un cycle peut comporter plusieurs fois le même sommet.

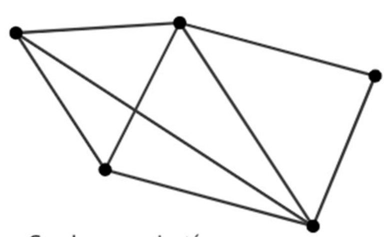
**Définition :**

- *Un graphe non orienté est* ***complet*** *lorsque deux sommets quelconques distincts sont toujours adjacents.*
- *Un graphe non orienté est* ***connexe*** *lorsque deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne.*

**Remarque :** un graphe non orienté complet est connexe, mais la réciproque est fausse.



Graphe non orienté complet



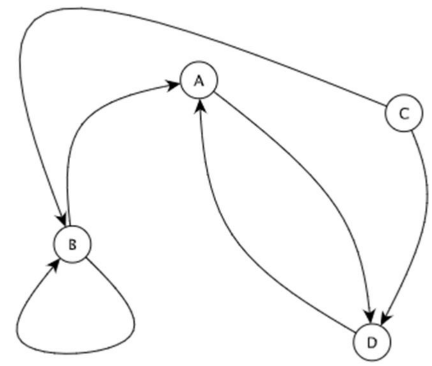
Graphe non orienté connexe,
mais non complet

### Les graphes orientés

**Définition :** *On appelle* ***graphe orienté*** *tout graphe non orienté, dont les arêtes sont munies d'un sens de parcours. Une arête d'un graphe orienté est définie par la donnée d'un couple de sommets.*

**Vocabulaire :** *dans le cas d'un graphe orienté, une arête s'appelle un* ***arc*** *et une chaîne, un* ***chemin****.*

**Définition :** *Un* ***graphe****, orienté ou non, est* ***pondéré*** *lorsqu'à chaque arête ou arc est associé un nombre réel positif appelé* ***poids****.*




## ■ Graphes et matrices

### Matrice d'adjacence

**Définition :** *Étant donné un graphe d'ordre $n$, on appelle* ***matrice d'adjacence*** *de ce graphe la matrice carrée d'ordre $n$ dont le coefficient $a_{i,j}$ est égal :*

- *au nombre d'arêtes reliant les sommets $i$ et $j$, si le graphe n'est pas orienté ;*
- *à $1$ si un arc relie le sommet $i$ au sommet $j$ dans ce sens, et $0$ sinon, si le graphe est orienté.*

**Remarque :** dans le cas d'un graphe non orienté, la matrice d'adjacence est symétrique par rapport à sa diagonale principale (cette diagonale est constituée des coefficients $a_{i,i}$).

**Théorème 8.2.—** Soit $M$ la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté (resp. orienté). Soit $q \in \mathbb{N}^\star$, le terme $m_{i,j}$ de $M^q$ est égal au nombre de chaînes (resp. chemins), de longueur $q$ reliant le sommet n°$i$ au n°$j$ (resp. dans ce sens).

### Graphe probabiliste

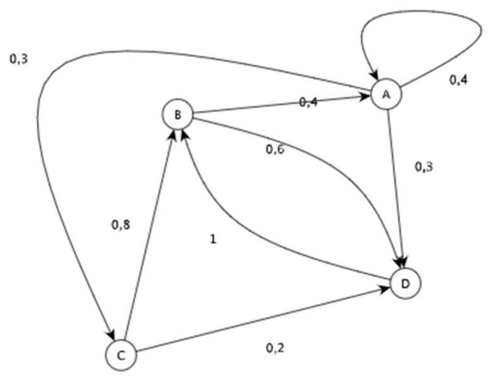
**Définition :** *On appelle* ***graphe probabiliste*** *un graphe orienté, pondéré, tel que*

- *d'un sommet à un autre il y a au plus un arc ;*
- *la somme des poids des arcs partant d'un même sommet est égale à $1$.*

*En ce cas, on appelle* ***matrice de transition*** *du graphe la matrice dont chaque coefficient $t_{i,j}$ est le poids se trouvant sur l'arc menant du sommet $i$ au sommet $j$, s'il y en a un, et $0$ sinon.*

**Remarque :** une matrice de transition n'est pas une matrice d'adjacence.

**Graphe probabiliste**




**Matrice de transition**

$$T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,3 & 0,3 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## ■ Évolution d'un modèle dynamique : les chaînes de Markov

### La théorie

**Définition :** *Une matrice est dite* ***stochastique*** *si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne vaut* 1.

**Remarque :** les matrices de transition sont des matrices stochastiques.

**Définition :** *Soit $\mathscr{X} = (X_n)$ une suite de variables aléatoires, chaque variable $X_n$ étant à valeurs dans $\mathscr{E} = [\![1; k]\!]$ où $k \in \mathbb{N}^\star$ est fixé. On dit que cette suite est une* ***chaîne de Markov*** *homogène (on omettra ce terme par la suite) d'****espace des états*** *$\mathscr{E}$, de loi initiale $\mathscr{L}_0 = (p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k)$ sur $\mathscr{E}$, où les $p_i \in [0; 1]$, et de matrice de transition $T$, $T$ étant une matrice carrée stochastique d'ordre $k$ dont les coefficients sont notés $t_{ij}$ si :*

- *$\mathscr{L}_0$ est la loi suivie par $X_0$ ;*
- *Pour tout entier naturel $n$, et tout élément (ou état) $i_0,\ i_1,\ \ldots,\ i_{n-1},\ i,\ j \in \mathscr{E}$ tels que $P\left(\{X_0 = i_0\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} = i_{n-1}\} \cap \{X_n = i\}\right) \neq 0$, on a*

$$P_{\{X_0=i_0\}\cap\cdots\cap\{X_{n-1}=i_{n-1}\}\cap\{X_n=i\}}\left(X_{n+1} = j\right) = t_{i,j}$$

**Remarque :** dans ce cadre, les coefficients $t_{ij}$ sont des probabilités conditionnelles et $T$ sera représenté par un graphe probabiliste.

**Théorème 8.3.—** Soit $\mathscr{X}$ une chaîne de Markov d'espace des états $\mathscr{E}$, de loi initiale $\mathscr{L}_0$ sur $\mathscr{E}$ et de matrice de transition $T$. Alors, quel que soit l'entier naturel $n$ et les états $i$ et $j$ avec $P(X_n = i) \neq 0$, on a :

$$\boxed{P_{\{X_n=i\}}(X_{n+1} = j) = t_{ij}}$$

**Remarque :** l'indice $n$ de la suite $\mathscr{X}$ est interprété comme un temps. La variable $X_n$ représente la position spatiale à l'instant $n$, $X_0,\ \ldots,\ X_{n-1}$ représente son passé tandis que $X_{n+1},\ X_{n+2},\ \ldots$ son futur. Les chaînes de Markov sont des suites aléatoires sans mémoire, en quelque sorte. Dans l'évolution au cours du temps, l'état du processus à un instant futur ne dépend que de celui à l'instant présent, mais non de ses états antérieurs.
On dit souvent que conditionnellement au présent, passé et futur sont indépendants.

### La pratique

Une chaîne de Markov $\mathscr{X} = (X_n)$ à $k$ états ($k \in \mathbb{N}^\star$ et l'espace des états est $\mathscr{E} = [\![1\ ;\ k]\!]$), est entièrement déterminée par sa matrice ligne $\pi_0 = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \end{pmatrix}$ (associée à sa loi initiale $\mathscr{L}_0$, c'est-à-dire $p_i = P(X_0 = i)$ pour tout $i \in \mathscr{E}$) et sa matrice de transition $T$.
Pour tout entier naturel $n$, on définit la loi de probabilité suivie par $X_n$ par la matrice ligne $\pi_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & \ldots & P(X_n = k) \end{pmatrix}$. $T = (t_{i,j})$ où $t_{i,j} = P_{\{X_n=i\}}(X_{n+1} = j)$. La formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$P(X_{n+1} = j) = P(X_n = 1)t_{1,j} + P(X_n = 2)t_{2,j} + \cdots + P(X_n = k)t_{k,j}.$$

On écrit cette égalité pour chacune des valeurs de $j \in \mathscr{E}$, ces $k$ égalités se résument par une seule égalité matricielle :

$$\pi_{n+1} = \pi_n T.$$

**Remarque :** par abus de langage, on identifiera la loi $\mathscr{L}_n$ suivie par $X_n$, avec la matrice ligne $\pi_n$ qui sera également nommée loi (de probabilité) de $X_n$.

**Théorème 8.4.—** Avec les notations précédentes, pour tout entier naturel $n$ :

$$\boxed{\pi_n = \pi_0 T^n}$$

Si $T^n = \left(t_{i,j}^{(n)}\right)$, alors $t_{i,j}^{(n)} = P_{\{X_0=i\}}(X_n = j)$.

**Remarque :** « $t_{i,j}^{(n)}$ » est une notation désignant le coefficient de la matrice $T^n$ se trouvant au croisement de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne, dans cette notation, $n$ est un indice pas un exposant. Ne pas confondre : $t_{i,j}^{(n)} \neq t_{i,j}^{n}$.

### État stable

**Définition :** *Étant donné une chaîne de Markov de matrice de transition $T$. Une loi de probabilité $\Pi$ est appelée **distribution stationnaire**, ou **loi stationnaire**, ou encore **état stable**, de la chaîne de Markov si $\Pi\ T = \Pi$.*

**Remarque :** l'état stable $\Pi$, s'il existe, est indépendant de l'état initial $\pi_0$.

**Définition :** *On appelle suite de matrices une matrice dont les coefficients sont les termes généraux de suites numériques. On dit qu'une **suite de matrices** est **convergente** si tous ses coefficients sont les termes généraux de suites convergentes. Si l'un des coefficients est le terme général d'une suite divergente, on dit que la **suite de matrices** est **divergente**.*

**Théorème 8.5.—** Soit $(X_n)$ une chaîne de Markov à $k$ états telle que pour tout $i \in [\![1\ ;\ k]\!]$ la suite $(P(X_n = i))_{n\geqslant 0}$ converge vers le nombre réel $\ell_i$, alors la matrice ligne $\Pi = \begin{pmatrix}\ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_k\end{pmatrix}$ est une loi stationnaire de $(X_n)$.

**Vocabulaire :** *On dit que la suite des matrices $\left(\begin{pmatrix}P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & \cdots & P(X_n = k)\end{pmatrix}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers l'état stable $\begin{pmatrix}\ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_k\end{pmatrix}$.*

**Théorème 8.6.—** Soit un graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition ne comporte pas de 0. Ce graphe admet un unique état stable $\Pi$, et l'état probabiliste $\pi_n$ converge vers $\Pi$.

# Démonstrations

**Théorème 8.2.—** Soit $M$ la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté (resp. orienté). Soit $q \in \mathbb{N}^\star$, le terme $m_{ij}$ de $M^q$ est égal au nombre de chaînes (resp. chemins), de longueur $q$ reliant le sommet $i$ au sommet $j$ (resp. dans ce sens).

**Démonstration** ▽
Nous allons réaliser une démonstration par récurrence. Pour tout entier naturel $q$ non nul on définit la proposition $\mathcal{P}(q)$ : « le terme $m_{ij}$ de $M^q$ est égal au nombre de chaînes (resp. chemins), de longueur $q$ reliant le sommet $i$ au sommet $j$ (resp. dans ce sens) ».

- **Initialisation :** Si $q = 1$, $M^1 = M$ donne le nombre de chaînes ou de chemins de longueur 1 qui « vont » de chaque sommet à un autre puisque c'est la définition même de la matrice $M$. Une telle chaîne est en fait une simple arête. Le nombre de ces arêtes est égal à $m_{ij}$, terme de la matrice $M$ situé à la $i$-ème ligne et à la $j$-ième colonne.
  Ce nombre est égal à 0 ou 1 dans le cas d'un graphe non orienté. Il peut être supérieur à 1 dans le cas d'un graphe orienté.
- **Hérédité :** Supposons l'existence d'un entier naturel $q$ tel que $\mathcal{P}(q)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie.
  $\mathcal{P}(q)$ est vraie donc la matrice $M^q$ donne le nombre de chemins (ou de chaînes) de longueur $q$ qui vont d'un sommet à un autre. Soit $a_{ik}$ un coefficient de cette matrice, il est égal au nombre de chemins de longueur $q$ de $i$ vers $j$. Il nous faut démontrer que la matrice $M^{q+1}$ donne le nombre de chemins de longueur $q+1$ qui vont d'un sommet à un autre. Détaillons la démonstration.

  $\boxed{1}$ Cherchons le nombre de chemins (ou chaînes) de longueur $q+1$ qui vont d'un sommet $i$ au sommet $j$. Pour obtenir un tel chemin :

  - On « prend » un chemin de longueur $q$ allant du sommet $i$ à un sommet $k$ ($k$ variant de 1 à $n$ puisque le graphe est d'ordre $n$). Il y en a $a_{ik}$ par hypothèse.
  - On y ajoute une arête de $k$ vers $j$. On obtient un chemin de longueur $q+1$, le précédent ayant une longueur $q$. Le chemin de $i$ vers $k$ est comptabilisé dans la matrice $M^q$ d'après l'hypothèse de récurrence. L'arête ajoutée, sous réserve qu'une telle arête existe, est comptabilisée dans la matrice $M$ par définition de cette matrice. Et elle peut être multiple, s'il s'agit d'un graphe orienté, comme il est dit ci-dessus. Le nombre de ces arêtes est par définition égal à $m_{kj}$.

  En procédant de cette façon, chacun des $a_{ik}$ chemins de $i$ à $k$ donne naissance à $m_{kj}$ chemins de $k$ à $j$. Ce qui fait en tout $m_{kj}$ fois plus de $i$ vers $j$ en passant par $k$, soit $a_{ik} \times m_{kj}$.

  $\boxed{2}$ Nous devons tenir compte du fait que $k$ varie de 1 à $n$, autrement dit qu'il y a « $n$ » sommets « intermédiaires » possibles, et que nous devons donc additionner le nombre de chemins obtenus pour chaque valeur de $k$. Ainsi, en sommant tous ces termes, on obtient $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times m_{k,j}$.

  $\boxed{3}$ Revenons à la définition du produit de deux matrices : cette somme n'est autre que le terme de la matrice $M^q \times M$, donc $M^{q+1}$, situé à la $i$-ème ligne et à la $j$-ième colonne.

  $\boxed{4}$ D'après $\boxed{2}$, le nombre total de chemins de $i$ vers $j$ est égal à $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times m_{k,j}$, nombre qui est lui-même égal, d'après le $\boxed{3}$, au terme de la matrice $M^{q+1}$ situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.
  Ce terme nous donne donc, comme on voulait le démontrer, le nombre de chemins (ou chaînes) du sommet « $i$ » vers le sommet « $j$ ».
- **Conclusion :** $\mathcal{P}$ est vraie au rang 1 et se transmet héréditairement, donc on a montré par récurrence que $\mathcal{P}$ est vraie sur $\mathbb{N}^\star$. ▲

**Théorème 8.4.—** Avec les notations précédentes, pour tout entier naturel $n$ :

$$\boxed{\pi_n = \pi_0 T^n}$$

Si $T^n = \left(t_{i,j}^{(n)}\right)$, alors $t_{i,j}^{(n)} = P_{\{X_0=i\}}(X_n = j)$.

**Démonstration** ▽

Montrons ce théorème par récurrence sur $n$. Pour tout entier naturel $n$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ : « $\pi_n = \pi_0 T^n$ et pour tous les états $i$ et $j$, $t_{i,j}^{(n)} = P_{\{X_0=i\}}(X_n = j)$ ».

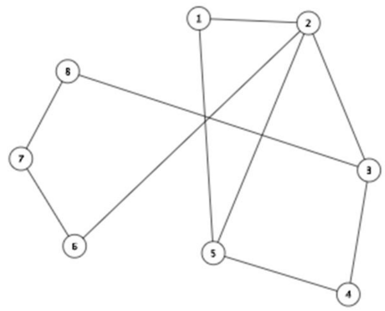
- **Initialisation :** Si $n = 0$, $\pi_0 T^0 = \pi_0 I_k = \pi_0$, d'autre part $T^0 = I_k$, donc $t_{i,j}^{(0)} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Par ailleurs $P\left(\{X_0 = i\} \cap \{X_0 = j\}\right) = \begin{cases} P(X_0 = i) \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, par conséquent $P_{\{X_0=i\}}(X_0 = j) = \frac{P(\{X_0=i\}\cap\{X_0=j\})}{P(X_0=i)} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, finalement, on a bien $t_{i,j}^{(0)} = P_{\{X_0=i\}}(X_0 = j)$. La proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  $\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc $\pi_n = \pi_0 T^n$ et pour tous les états $i$ et $j$, $t_{i,j}^{(n)} = P_{\{X_0=i\}}(X_n = j)$.
  $\pi_{n+1} = \pi_n T = (\pi_0 T^n)T = \pi_0(T^n T) = \pi_0 T^{n+1}$. D'autre part :
  $T^{n+1} = T^n T$, donc $t_{i,j}^{(n+1)} = \sum\limits_{l=1}^{k} t_{i,l}^{(n)} t_{l,j}$. D'après l'hypothèse de récurrence $t_{i,l}^{(n)} = P_{\{X_0=i\}}(X_n = l)$ et d'après le **théorème 8.3** $t_{l,j} = P_{\{X_n=l\}}(X_{n+1} = j)$, par conséquent
  $$t_{i,j}^{(n+1)} = \sum_{l=1}^{k} P_{\{X_0=i\}}(X_n = l) P_{\{X_n=l\}}(X_{n+1} = j)$$
  Par définition une chaîne de Markov est sans mémoire donc on a en particulier
  $$P_{\{X_n=l\}}(X_{n+1} = j) = P_{\{X_n=l\}\cap\{X_0=i\}}(X_{n+1} = j)$$
  $t_{i,j}^{(n+1)}$ devient :
  $$t_{i,j}^{(n+1)} = \sum_{l=1}^{k} P_{\{X_0=i\}}(X_n = l) P_{\{X_n=l\}\cap\{X_0=i\}}(X_{n+1} = j)$$
  $(\{X_n = l\})_{1 \leqslant l \leqslant k}$ est un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales,
  $$t_{i,j}^{(n+1)} = P_{\{X_0=i\}}(X_{n+1} = j)$$
  La proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion :** La proposition $\mathcal{P}$ est vraie au rang 0 et se transmet héréditairement, donc on a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n$ et tous les états $i$ et $j$, $\pi_n = \pi_0 T^n$ et $t_{i,j}^{(n)} = P_{\{X_0=i\}}(X_n = j)$. ▲

# Approfondissements, algorithmes

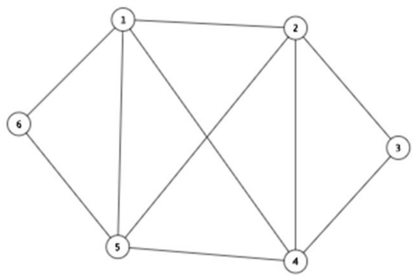
## Graphes eulériens

**Définition :** *Considérons un graphe non orienté.*

- *On appelle* **chaîne eulérienne** *une chaîne composée de toutes les arêtes, chacune d'elle étant prise une fois et une seule.*
- *Un* **cycle eulérien** *est un cycle présentant les mêmes propriétés qu'une chaîne eulérienne.*
- *Un graphe possédant un cycle eulérien est un* **graphe eulérien**.




Ce graphe admet une chaîne eulérienne comme 3-8-7-6-2-1-5-4-3-2-5, mais n'est pas eulérien




Ce graphe possède deux cycles eulériens : 1-2-3-4-2-5-6-1-5-4-1 et 1-4-2-5-1-6-5-4-3-2-1 c'est un graphe eulérien

**Proposition 8.7.—** Soit $\mathscr{G}$ un graphe dont tous les sommets sont de degré pair. Alors $\mathscr{G}$ peut être divisé en cycles, contenant toutes les arêtes de $\mathscr{G}$, deux quelconques d'entre eux n'ayant aucune arête en commun.

**Démonstration** ▽

Soit $\mathscr{G}$ un graphe dont tous les sommets sont de degré pair. Un premier cycle de $\mathscr{G}$ est obtenu en partant d'un sommet $i$ et en parcourant différentes arêtes sans les retraverser. Chaque sommet étant de degré pair, il est possible, lorsqu'on entre dans un sommet *via* une arête, de le quitter par l'intermédiaire d'une autre arête. Puisque $\mathscr{G}$ contient un nombre fini $n$ d'arêtes, nous devons nécessairement rencontrer une arête $v$ qui a déjà été traversée. Les arêtes du chemin obtenu entre les deux occurrences de $v$ forment un premier cycle $C_1$. Supprimons alors de $\mathscr{G}$ les arêtes de $C_1$. On obtient alors un graphe $\mathscr{H}$, éventuellement non connexe, constitué de sommets de degré pair. Si $\mathscr{H}$ contient des arêtes (c'est-à-dire si $\mathscr{G}$ et $C_1$ sont distincts), on peut reproduire avec $\mathscr{H}$ la démarche précédente pour obtenir un cycle $C_2$ n'ayant aucune arête commune avec $C_1$.

Il suffit de continuer ainsi jusqu'à ce qu'il ne reste plus d'arête. Les cycles obtenus contiennent chaque arête de $\mathscr{G}$ et deux quelconques d'entre eux n'ont aucune arête en commun. ▲

**Théorème 8.8.—** Un graphe non orienté, connexe, possède un cycle eulérien si, et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair.

**Démonstration** ▽

Soit $\mathscr{G}$ un graphe non orienté, connexe.

- Si $\mathscr{G}$ admet un cycle eulérien, alors chaque arête passant par un sommet $i$ ajoute 2 au degré de $i$. Puisque chaque arête est traversée une seule fois, le degré de chaque sommet est une somme de 2, c'est-à-dire un nombre pair.

- Réciproquement, supposons que tous les sommets de $\mathscr{G}$ soient pairs, montrons que $\mathscr{G}$ admet un cycle eulérien.

  D'après la propriété démontrée précédemment, $\mathscr{G}$ peut être divisé en cycles, contenant toutes les arêtes de $\mathscr{G}$, deux quelconques d'entre eux n'ayant aucune arête en commun.

  Considérons l'un de ces cycles $C_1$. Si $C_1$ contient toutes les arêtes de $\mathscr{G}$, $C_1$ est le cycle eulérien de $\mathscr{G}$.

  Sinon, partant d'un sommet quelconque, on parcourt $C_1$ jusqu'à rencontrer un sommet appartenant à un second cycle $C_2$ (ce sommet existe puisque $\mathscr{G}$ est supposé connexe). $C_2$ est parcouru, puis $C_1$. Si cette chaîne contient toutes les arêtes de $\mathscr{G}$, on obtient le cycle eulérien de $\mathscr{G}$.

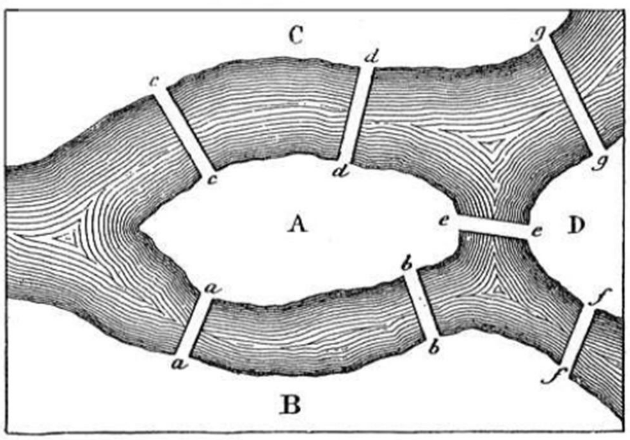
  Sinon, on parcourt cette chaîne jusqu'à rencontrer un sommet d'un cycle $C_3$. Puisque $\mathscr{G}$ est connexe, ce cycle existe. En procédant ainsi jusqu'à ce que tous les cycles de $\mathscr{G}$ aient été parcourus, on obtient une chaîne dont les deux extrémités sont confondues et telle que chaque arête a été visitée une fois et une seule, ce qui montre que $\mathscr{G}$ admet un cycle eulérien. ▲

### Un exemple célèbre

La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad, en Russie) était au dix-huitième une ville de Prusse. La ville est traversée par un fleuve, Pregolia, qui se sépare en deux branches et sur lequel il y a une île, au cœur de la ville. La ville est donc constituée de quatre régions, délimitées par les diverses branches du fleuve et connectées entre elles, à l'époque, par sept ponts. La légende raconte qu'en 1736, les citoyens essayaient depuis longtemps de trouver un itinéraire qui leur ferait parcourir la ville en traversant chaque pont une fois chacun et si possible en revenant à leur point de départ. C'est là le problème des ponts de Königsberg.

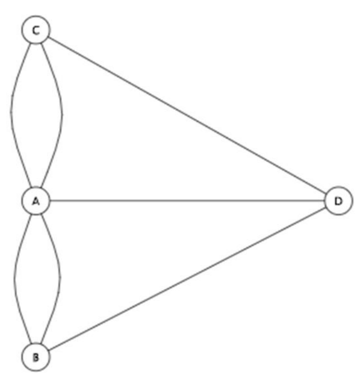
Leonhard Euler était un mathématicien bien connu et il fut informé de ce problème par un ami mathématicien habitant Danzig, une autre ville de Prusse située à environ 125 km à l'ouest de Königsberg (la ville de Danzig s'appelle aujourd'hui Gdansk ; elle est maintenant située en Pologne). Sans mettre les pieds à Königsberg, en travaillant à partir d'une carte de la ville, Euler fournit une solution générale très élégante à ce problème, une solution qui contenait des idées originales qui sont aujourd'hui considérées comme étant à la base de la théorie des graphes et de la topologie, deux disciplines ayant connu un développement important au vingtième siècle.

Fig. 1.




Les ponts de Kœnigsberg en 1759.

La situation est modélisée par le graphe $\mathscr{G}$ ci-contre : les sommets sont les terres, et les arêtes, les ponts. Il s'agit d'un graphe connexe ayant au moins un sommet de degré impair (en fait tous les sommets sont de degré impair), donc d'après le **théorème 8.8**, $\mathscr{G}$ n'admet pas de cycle eulérien. Par conséquent il est impossible de passer par tous les ponts une fois et une seule.



# Méthodes

## Graphes et matrices d'adjacence

**Méthode 8.1.— Comment construire une matrice d'adjacence**

On considère un graphe, orienté ou non.

$\boxed{1}$ On repère les sommets par des nombres 1, 2, ... ou des lettres A, B, ...

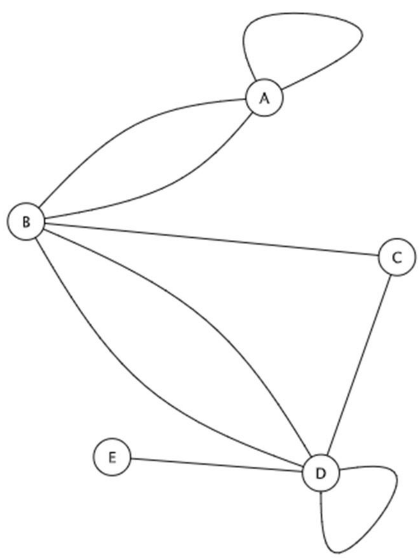
$\boxed{2}$ On forme un tableau à double entrée avec autant de lignes et de colonnes qu'il y a de sommets.

- **Graphe non orienté :** dans la case située au croisement de la ligne X et de la colonne Y, et inversement, on écrit le nombre de segments reliant les sommets X et Y. Le tableau est donc symétrique.
- **Graphe orienté :** ici le sens est important, au croisement de la ligne X et de la colonne Y, on écrit le nombre d'arcs reliant X à Y dans ce sens.

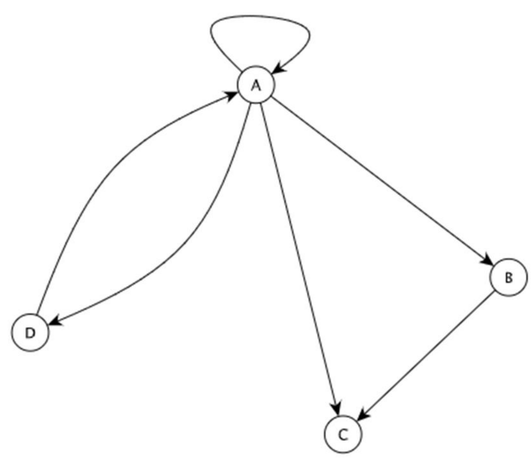
$\boxed{3}$ On escamote ce tableau pour faire place à la matrice d'adjacence.

**Exemple :** construisons la matrice d'adjacence des deux graphes ci-dessous.

Graphe $\mathscr{G}$




Graphe $\mathscr{H}$




**Graphe $\mathscr{G}$**

$\boxed{2}$ Construisons le tableau des relations.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| **B** | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| **C** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **D** | 0 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| **E** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

$\boxed{3}$ La matrice d'adjacence de $\mathscr{G}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Graphe $\mathscr{H}$**

$\boxed{2}$ Construisons le tableau des relations.

| $\Rsh$ | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **B** | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **C** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **D** | 1 | 0 | 0 | 0 |

$\boxed{3}$ La matrice d'adjacence de $\mathscr{G}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Remarque :** cette méthode permet d'associer, par une lecture inverse, le graphe à une matrice carrée d'entiers naturels dont elle est la matrice d'adjacence.

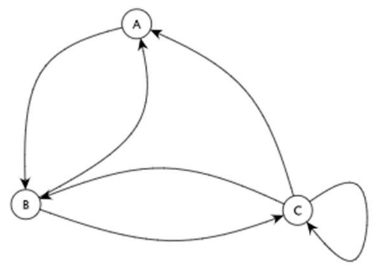
**Exemple :** traçons un graphe dont la matrice d'adjacence est donnée par la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme la matrice $M$ n'est pas symétrique, il ne peut s'agir que de la matrice d'adjacence d'un graphe orienté. Partant de la troisième étape, procédons à rebours :

$\boxed{2}$ Le tableau des relations entre sommets est le suivant :

| $\Rsh$ | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **A** | 0 | 1 | 0 |
| **B** | 1 | 0 | 1 |
| **C** | 1 | 1 | 1 |

$\boxed{1}$ Nous obtenons le graphe orienté ci-dessous.




**Mise en œuvre : exercice 8.3, exercice 8.4.**

> **❑ Méthode 8.2.— Comment calculer le nombre de chaînes de longueur $q$ de $i$ à $j$**
> Soit $\mathscr{G}$ un graphe de matrice d'adjacence $M$. Soit $i$ et $j$ deux sommets de $\mathscr{G}$, on veut calculer le nombre de chaînes, ou de chemins, de longueur $q$ ($q \in \mathbb{N}^\star$) reliant $i$ et $j$.
> $\boxed{1}$ On numérote les sommets pour les identifier.
> $\boxed{2}$ On calcule, avec une calculatrice par exemple, $M^q$.
> $\boxed{3}$ Le nombre cherché est le coefficient de $M^q$ situé à la $i$-ème ligne et à la $j$-ième colonne.

**Exemple :** reprenons le graphe orienté précédent de matrice d'adjacence $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 reliant le sommet A au sommet C ?

$\boxed{2}$ $M^5 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 11 & 10 & 11 \\ 16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ Les sommets A et C sont repérés respectivement par la ligne n°1 et la colonne n°3. $m_{1,3}^{(5)} = 5$, donc il y a exactement 5 chemins de longueur 5 reliant dans cet ordre A à C.

**Remarque :** toujours avec la matrice $M^5$, on trouve par exemple $m_{2,1}^{(5)} = 11$, donc il y a 11 chemins reliant le sommet B au sommet A.

**Mise en œuvre : exercice 8.4.**

## ■ Graphes probabilistes, chaînes de Markov

### Graphes probabilistes

> **❑ Méthode 8.3.— Comment construire un graphe probabiliste**
>
> Il s'agit avant tout d'organiser les informations contenues dans l'énoncé de façon synthétique.
>
> $\boxed{1}$ On relève en les désignant par une lettre, ou un nombre, les différents états du système. Supposons qu'il y ait $k$ états possibles.
>
> $\boxed{2}$ Chaque état constitue un sommet du graphe $\mathscr{G}$.
>
> $\boxed{3}$ Soit $p_{i,j}$ la probabilité de voir se réaliser l'état $j$ sachant l'état $i$ réalisé, on trace l'arc reliant le sommet $i$ au sommet $j$ et on l'affecte du coefficient $p_{i,j}$. De ce fait, la somme des probabilités des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

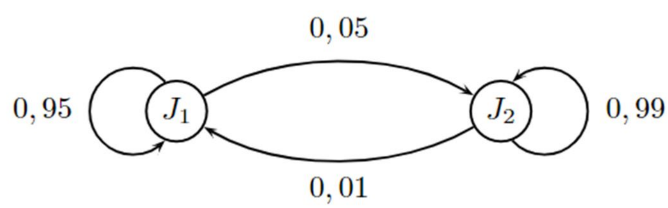
**Remarque :** si deux sommets $i$ et $j$ ne sont pas reliés par un arc, c'est que la probabilité de voir se réaliser un état $i$ ou $j$ sachant l'autre réalisé est nulle. Par ailleurs, comme il est dit à l'étape $\boxed{3}$, $p_{ij}$ est une probabilité conditionnelle que l'on notera momentanément $P(i \to j)$.

**Exemple :** une petite ville vend deux journaux locaux rivaux $J_1$ et $J_2$. Chaque habitant adulte achète l'un des deux journaux et seulement un. En 2015, 92 % des habitants adultes achètent le journal $J_1$.
Chaque année, 5 % des acheteurs de $J_1$ décident de changer en achetant $J_2$. De même, 1 % des acheteurs de $J_2$ décident de changer en achetant $J_1$.

$\boxed{1}$ L'énoncé décrit sur une année l'évolution des achats de deux journaux notés $J_1$ et $J_2$.

$\boxed{2}$ Les sommets du graphe $\mathscr{G}$ sont $J_1$ et $J_2$.

$\boxed{3}$ $P(J_1 \to J_1) = 0,95$, $P(J_1 \to J_2) = 0,05$, $P(J_2 \to J_2) = 0,99$ et $P(J_2 \to J_1) = 0,01$. Le graphe $\mathscr{G}$ est donné ci-dessous.




**Mise en œuvre : exercice 8.6, exercice 8.7, exercice 8.8, exercice 8.9** et **exercice 8.12**.

> **❑ Méthode 8.4.— Comment écrire la matrice de transition d'un graphe probabiliste**
>
> Étant donné un graphe probabiliste $\mathscr{G}$, d'ordre $k$ (c'est-à-dire ayant $k$ sommets).
>
> $\boxed{1}$ On numérote chaque sommet afin de les identifier.
>
> $\boxed{2}$ On note $t_{i,j}$ la probabilité affichée sur l'arc reliant, dans ce sens, le sommet numéro $i$ au sommet numéro $j$.
>
> $\boxed{3}$ $T = (t_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant k}}$ est la matrice de transition de $\mathscr{G}$. Il résulte de la **méthode 8.3**, que la somme des coefficients de $T$ se trouvant sur une même ligne est égale à 1.

**Exemple :** reprenons l'exemple précédent avec son graphe.

$\boxed{2}$ Soit $i,\ j \in \{1\ ;\ 2\}$, $t_{ij} = P(J_i \to J_j)$ par conséquent $t_{1,1} = 0,95$, $t_{1,2} = 0,05$, $t_{2,1} = 0,01$ et $t_{2,2} = 0,99$.

$\boxed{3}$ La matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$.

**Mise en œuvre : exercice 8.5**, **exercice 8.7**, **exercice 8.8**, **exercice 8.9** et **exercice 8.12**.

### Les chaînes de Markov

On considère $k$ états numérotés 1, 2, ..., $k$. À chaque instant $n$ ($n \in \mathbb{N}$), on note $X_n$ la variable aléatoire qui prend pour valeurs possibles les $i$, et $U_n$ la matrice ligne dont les coefficients sont les probabilités $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, ..., $P(X_n = k)$. Ainsi, $U_n$ représente l'état probabiliste à l'instant $n$.
D'après la **formule des probabilités totales** on a pour tout $j \in [\![1\ ;\ k]\!]$

$$P(X_n = j) = \sum_{l=1}^{k} P(X_{n-1} = l)\ P_{\{X_{n-1}=l\}}(X_n = j) \tag{8.1}$$

On suppose que la probabilité conditionnelle d'être à l'état n°$j$ à l'instant $n$ sachant qu'on était à l'état n°$i$ à l'instant précédent est indépendante de l'entier $n$. Cette probabilité conditionnelle est appelée la **probabilité de passage de l'état n°$i$ à l'état n°$j$**. Elle est notée (sans référence à l'instant $n$)

$$t_{i,j} = P(i \to j)$$

> ❑ **Méthode 8.5.— Comment obtenir l'égalité $\pi_n = \pi_0 T^n$ dans le cadre d'une chaîne de Markov**
>
> $\boxed{1}$ Identifier les $k$ différents états du système, et les numéroter, ainsi que les probabilités d'interactions entre ces états. Ces probabilités doivent être constantes.
>
> $\boxed{2}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, $X_n$ est la variable aléatoire désignant l'état du système à l'instant $n$. Soit $j \in [\![1\ ;\ k]\!]$, $P(X_n = j)$ est la probabilité que le système se trouve dans l'état n°$j$ à l'instant $n$.
>
> $\boxed{3}$ Chaque état, avec son numéro, est le sommet d'un graphe $\mathscr{G}$. Les sommets sont éventuellement reliés par des arcs portant les probabilités mentionnées précédemment.
>
> $\boxed{4}$ D'après le texte introductif, la matrice de transition est la matrice $T = (t_{i,j})$, où
> $$t_{i,j} = P(i \to j) = P_{\{X_n=i\}}(X_{n+1} = j).$$
>
> $\boxed{5}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la loi de probabilité (identifiée à une matrice ligne) à l'instant $n$, $\pi_n = \big(P(X_n = 1) \quad P(X_n = 1) \quad \ldots \quad P(X_n = k)\big)$.
>
> $\boxed{6}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi_{n+1} = \pi_n T$ et $\pi_n = \pi_0 T^n$.

**Remarque :** le graphe associé à une chaîne de Markov, modélise les relations probabilistes de causes à effets entre états. Ces relations vont se répéter de manière identique toute la durée de l'évolution du système.

**Remarque :** à l'étape $\boxed{6}$, on vérifie qu'une chaîne de Markov est entièrement déterminée par sa loi initiale $\pi_0$ et sa matrice de transition $T$.

**Exemple :** une entreprise de location de véhicules propose de louer des voitures à la journée (on supposera que la flotte de véhicules à louer est d'effectif constant). Cette entreprise possède deux agences A et B dans lesquelles un client peut indifféremment déposer le véhicule loué à la fin de la journée.
On constate que 70 % des voitures qui ont été louées à l'agence A un matin donné sont restituées dans la même agence A à la fin de la journée, les 30 % restants étant restitués à l'agence B. De même 85 % des voitures louées à l'agence B sont déposées à la même agence B en fin de journée et 15 % sont déposées à l'agence A.
On choisit un véhicule au hasard dans cette flotte et on suit ses déplacements au cours du temps. pour tout $n \in \mathbb{N}$ on notera $X_n$ la variable aléatoire donnant l'état de ce véhicule à la fin de la $n$-ième journée (l'état A étant « le véhicule est situé dans l'agence A » et l'état B étant « le véhicule est situé dans l'agence B »).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on représente par la matrice $\pi_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire $X_n$. La loi de probabilité initiale (c'est-à-dire celle de la variable $X_0$ soit la répartition initiale des véhicules entre les deux agences) est donnée par $\pi_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix}$.

**1.** La suite $(X_n)$ est-elle une chaîne de Markov ?

**2.** Décrire par un graphe les mouvements journaliers des véhicules entre les agences A et B.

**3.** Établir la matrice de transition $T$ d'un état à un autre.

**4.** On suppose qu'initialement, 75 % des véhicules de l'entreprise se trouvent dans l'agence A, quelle est la proportion de véhicules dans cette même agence 10 jours plus tard ?

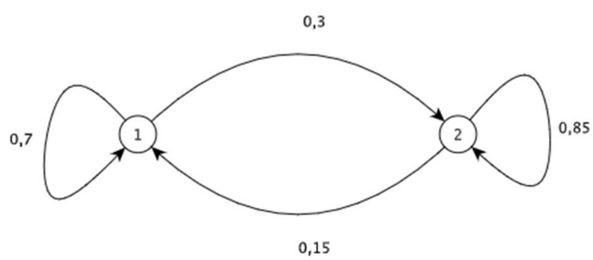
**1.**

$\boxed{1}$ Les états A et B sont numérotés respectivement 1 et 2. $P(1 \to 1) = 0,7$, $P(1 \to 2) = 0,3$, $P(2 \to 1) = 0,15$ et $P(2 \to 2) = 0,85$.

$\boxed{2}$ Tout d'abord $(X_n)$ est une suite de variables aléatoires. De plus, les probabilités conditionnelles $P_{\{X_n=i\}}(X_{n+1} = j)$, où $i,\ j \in \{1\ ;\ 2\}$, sont indépendantes de $n$ (ce sont des constantes). Finalement $(X_n)$ est bien une chaîne de Markov.

**2.**

$\boxed{3}$ Nous obtenons le graphe probabiliste ci-dessous.




**3.**

$\boxed{4}$ Avec l'étape $\boxed{1}$, on peut compléter le tableau ci-dessous.

| ↱ | **1** | **2** |
|---|---|---|
| **1** | $0,7$ | $0,3$ |
| **2** | $0,15$ | $0,85$ |

La matrice de transition associée à cette chaîne de Markov est $T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

**4.**

$\boxed{5}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, la loi suivie par $X_n$ est $\pi_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) \end{pmatrix}$. Par ailleurs, d'après l'énoncé, $P(X_0 = 1) = 0,75$ et donc $P(X_0 = 2) = 1 - 0,75 = 0,25$, par conséquent

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$$

$\boxed{6}$ Pour tout entier naturel $n$, $\pi_n = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}^n$, donc en particulier

$\pi_{10} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}^{10} \approx \begin{pmatrix} 0,3343887 & 0,6656113 \end{pmatrix}$ d'où $P(X_{10} = 1) \approx 0,3343887$.
Conclusion, après 10 jours l'agence A possédera environ 33,4 % des véhicules de l'entreprise.

**Mise en œuvre : exercice 8.7**, **exercice 8.8**, **exercice 8.10**, **exercice 8.11** et **exercice 8.12**.

**❑ Méthode 8.6.— Comment trouver l'état stable**

On considère une chaîne de Markov, de matrice de transition $T$.
L'ensemble de ses lois stationnaires, si elles existent, est l'ensemble des matrices stochastiques $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \end{pmatrix}$ solutions du système de $k + 1$ équations linéaires à $k$ inconnues :

$$\begin{cases} XT = X \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 1 \end{cases}$$

**Remarque :** un état stable, s'il existe, est indépendant de la loi initiale.

**Exemple :** reprenons l'exemple précédent et recherchons les éventuelles lois stationnaires de cette chaîne de Markov.
Soit $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} XT = X \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,7x + 0,15(1-x) = x \\ 0,3x + 0,85(1-x) = 1 - x \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,55x + 0,15 = x \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} XT = X \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{0,15}{0,45} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Cette chaîne admet une unique loi stationnaire : $\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

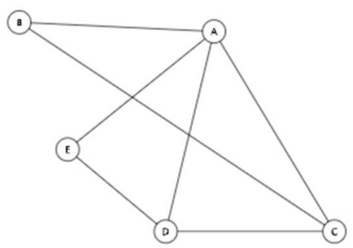
**Remarques :**

- La méthode choisie pour la résolution de ce système est la **substitution**.
- On peut aussi retrouver cet état stable comme limite des états probabilistes (**théorème 8.5**).

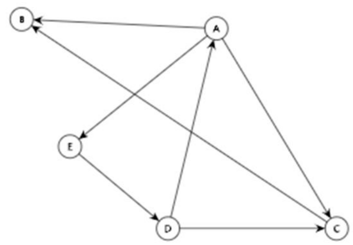
**Mise en œuvre : exercice 8.6**, **exercice 8.7**, **exercice 8.9**, **exercice 8.10** et **exercice 8.12**.

# Vrai/Faux

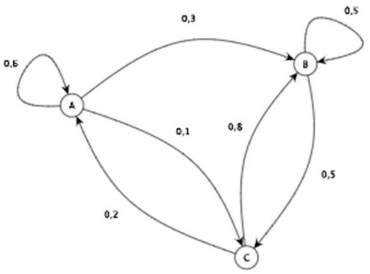
On utilisera ci-dessous les graphes suivants.




Graphe $\mathscr{F}$




Graphe $\mathscr{G}$




Graphe $\mathscr{H}$

**Vrai** **Faux**

**1.** La matrice d'adjacence d'un graphe est symétrique par rapport à sa diagonale principale. ☐ ☐

**2.** La matrice de transition d'une chaîne de Markov à $k$ états est une matrice carrée d'ordre $k$. ☐ ☐

**3.** Le graphe $\mathscr{F}$ est complet ou connexe. ☐ ☐

**4.** Le graphe $\mathscr{F}$ possède un cycle d'extrémité B de longueur 5. ☐ ☐

**5.** Il existe un chemin de $\mathscr{G}$ de longueur 3 partant de B. ☐ ☐

**6.** $\mathscr{G}$ admet un cycle de longueur 4. ☐ ☐

**7.** La matrice de transition de $\mathscr{H}$ est $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$. ☐ ☐

**8.** Toute chaîne de Markov admet une unique loi stationnaire. ☐ ☐

**9.** Si $A$ est une matrice carrée stochastique, il en est de même de $A^n$, où $n \in \mathbb{N}$. ☐ ☐

**10.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 1 \\ 0,5 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition d'un graphe probabiliste. ☐ ☐

**11.** La matrice de transition d'une chaîne de Markov est toujours inversible. ☐ ☐

**12.** Soit $\pi_n$ la loi associée à un graphe probabiliste d'ordre 2, alors $(\pi_n)$ converge vers l'état stable du graphe. ☐ ☐

# ■■ Énoncé des exercices

## ■ Généralités sur les graphes

**Exercice 8.1 :**

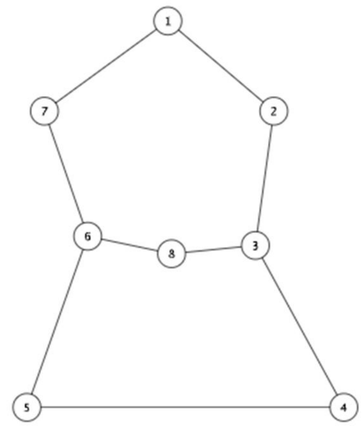
Le graphe ci-contre est une représentation schématique de la constellation d'Orion.

**1.** Quel est l'ordre de ce graphe ?

**2.** Ce graphe est-il complet ? connexe ?

**3.** Quels sont les sommets de plus haut degré ?

**4.** Citer une chaîne de longueur 6 d'extrémités 1 et 8.



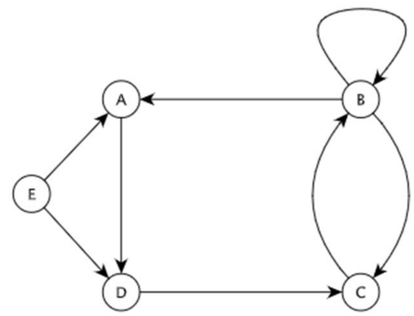

**Exercice 8.2 :**

**1.** Trouver, si possible, un chemin reliant les sommets A et C dans cet ordre.

**2.** Même question pour les sommets A et E.

**3.** Trouver, si possible, un circuit d'extrémité A.

**4.** Même question pour un circuit d'extrémité E.




**Exercice 8.3* :** Dans la ville de GRAPHE, on s'intéresse aux principales rues permettant de relier différents lieux ouverts au public, à savoir la mairie (M), le centre commercial (C), la bibliothèque (B), la piscine (P) et le lycée (L). Chacun de ces lieux est désigné par son initiale. Le tableau ci-contre donne les rues existant entre ces lieux.

| | **B** | **C** | **L** | **M** | **P** |
|---|---|---|---|---|---|
| **B** | | × | | × | × |
| **C** | × | | × | × | |
| **L** | | × | | × | |
| **M** | × | × | × | | × |
| **P** | × | | | × | |

**1.** Dessiner le graphe représentant cette situation.

**2.** Trouver un trajet empruntant une fois et une seule toutes les rues de ce plan.

**3.** Est-il possible d'avoir un trajet partant et arrivant du même lieu et passant une fois et une seule par toutes les rues ?

*D'après Baccalauréat, Asie, juin 2003*

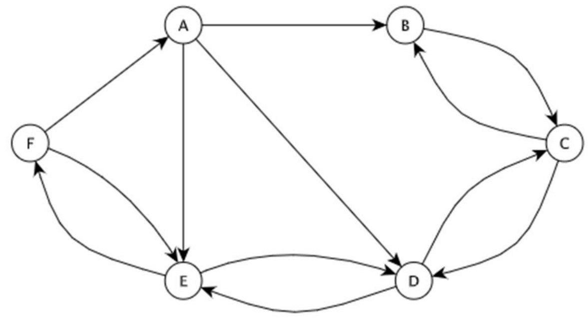
**Exercice 8.4 :** Considérons le graphe $\mathscr{G}$ ci-après.

**1.** Écrire la matrice d'adjacence $M$ de ce graphe.

**2.** Calculer $M^5$.

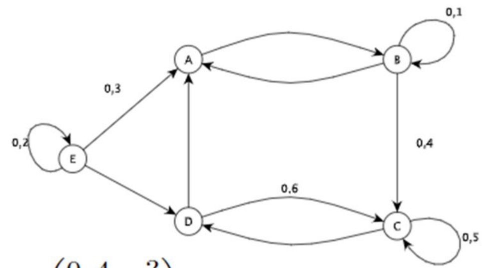
**3.** En déduire :

**a.** Le nombre de chemins de longueur 5 de A vers D.
**b.** Les sommets qui ne sont à l'origine d'aucun circuit de longueur 5.
**c.** Le nombre de circuits de longueur 5 et d'origine A et les écrire.
**d.** Des sommets entre lesquels il n'existe aucun chemin de longueur 5.
**e.** Les sommets entre lesquels il y a le plus de chemins.




**Exercice 8.5 :**

Compléter le graphe suivant pour qu'il soit probabiliste, puis écrire sa matrice de transition.

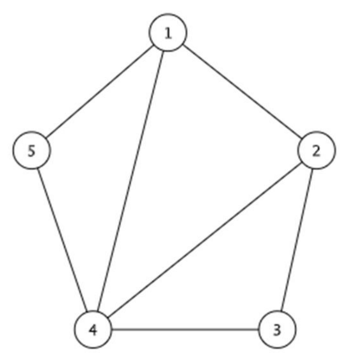



## Les chaînes de Markov

**Exercice 8.6 :** Considérons la matrice carrée d'ordre 2 : $M = \begin{pmatrix} 0,4 & ? \\ 0,5 & ? \end{pmatrix}$.

**1.** Compléter la matrice $M$ de façon qu'elle soit une matrice de transition de graphe probabiliste.
**2.** Dessiner un graphe correspondant à cette matrice.
**3.** Rechercher l'état stable de ce graphe.

**Exercice 8.7 :** Le graphe ci-dessous est formé de cinq sommets. On considère la chaîne de Markov suivante : à partir d'un sommet, on emprunte de manière équiprobable une des arêtes le reliant à un autre sommet.




**1.** Modifier et compléter ce graphe probabiliste et écrire sa matrice de transition $T$.
**2.** À l'aide d'une calculatrice, calculer les termes d'indices 10 et 20 des matrices lignes états de la chaîne de Markov lorsqu'on part du sommet n°1. Cette suite semble-t-elle converger ? Conjecturer un état limite (après un temps long) pour cette suite.
**3.** On note $A$ le nombre d'arêtes du graphe non orienté et, pour chaque sommet $S_i$, on appelle degré de $S_i$ et on note $\deg(S_i)$ le nombre d'arêtes issues de ce sommet.

**a.** Montrer qu'un état stable de cette chaîne de Markov est la matrice ligne $X$ dont le coefficient de la colonne $i$ est $\frac{\deg(S_i)}{2A}$.

**b.** Comparer ce résultat avec la conjecture émise à la question **2.**

**Exercice 8.8 :** Des randonneurs en montagne se répartissent en trois groupes suivant la difficulté des randonnées proposées : douces, moyennes et grandes (que l'on désignera par leurs initiales D, M et G). On constate que d'une semaine à l'autre, des randonneurs changent de groupe :

- 10 % des « D » passent au groupe « M » et 2 % des mêmes « D » passent au groupe « G » ;
- 20 % des « M » passent au groupe « D » et 10 % des mêmes « M » passent au groupe « G » ;
- 5 % des « G » passent au groupe « M » et 15 % des mêmes « G » passent au groupe « D ».

Il n'y a pas d'autres groupes que ces trois-là. Tous les randonneurs appartiennent à un et un seul de ces trois groupes.

**1.** Dessiner un graphe probabiliste traduisant ces mouvements inter-groupes.

**2.** Écrire la matrice de transition de ce graphe.

**3.** La première semaine, pour les premières randonnées, les participants se répartissent de la façon suivante : 15 dans le groupe « D », 30 dans le groupe « M » et 40 dans le groupe « G ». Quelle sera la répartition la quatrième semaine, si les pourcentages indiqués ci-dessus restent stables ? (arrondir les résultats à l'unité si nécessaire).

**Exercice 8.9 :** Deux constructeurs d'automobiles lancent simultanément deux modèles de voitures, A et B. Afin de promouvoir leurs produits, ils font appel à des sociétés de publicité qui procèdent à des sondages. La campagne publicitaire dure plusieurs mois. Chaque mois on interroge les mêmes personnes. On note $p_n$ la probabilité que la personne interrogée soit favorable au modèle « A » au $n^{\text{ème}}$ mois et $q_n$ la probabilité que la personne interrogée soit favorable au modèle « B » au $n^{\text{ème}}$ mois.

**1.** On suppose qu'un individu interrogé est obligé de se déterminer soit pour le modèle A, soit pour le modèle B. En déduire une relation entre $p_n$ et $q_n$.

**2.** On constate qu'une personne favorable au modèle « A » à un moment donné garde une fois sur deux le même avis le mois suivant alors qu'un individu favorable au modèle « B » garde le même avis sept fois sur dix le mois suivant.

- **a.** Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
- **b.** Écrire sa matrice de transition.
- **c.** Déterminer l'état stable du graphe. Si la proportion de choix d'un des modèles converge, que peut-on dire de l'évolution à long terme des choix des deux modèles A et B ?

**Exercice 8.10 :** On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires. On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du $n^{\text{ème}}$ tirage.

**1.**

- **a.** Traduire par une phrase la probabilité $P_{\{X_n=1\}}(X_{n+1}=1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{\{X_n=0\}}(X_{n+1}=1), P_{\{X_n=1\}}(X_{n+1}=1) \text{ et } P_{\{X_n=2\}}(X_{n+1}=1).$$

- **b.** Exprimer $P(X_{n+1}=1)$ en fonction de $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.

**2.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $R_n$ la matrice ligne définie par :

$$R_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) & P(X_n=1) & P(X_n=2) \end{pmatrix}$$

et on considère $M$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note $R_0$ la matrice ligne $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On admettra par la suite que, pour tout entier naturel $n$, $R_{n+1} = R_n \times M$.

- **a.** Déterminer $R_1$ et justifier que, pour tout entier naturel $n$, $R_n = R_0 \times M^n$.
- **b.** On admet que $M = P \times D \times P^{-1}$ avec :

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Établir que, pour tout entier naturel $n$, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

On admettra que, pour tout entier naturel $n$, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**3.**

**a.** Calculer $D^n \times P^{-1}$ en fonction de $n$.

**b.** Sachant que $R_0 P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de $R_n$ en fonction de $n$.

**4.**

**a.** Déterminer $\ell_0 = \lim_{n \to +\infty} P(X_n = 0)$, $\ell_1 = \lim_{n \to +\infty} P(X_n = 1)$ et $\ell_2 = \lim_{n \to +\infty} P(X_n = 2)$. Interpréter ces résultats. Interpréter ces égalités.

**b.** Vérifier que la loi $\Pi = \begin{pmatrix} \ell_0 & \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix}$ est un état stable de la chaîne de Markov $(X_n)$.

*D'après Baccalauréat S, Amérique du Nord, juin 2016*

**Exercice 8.11 :**

- Quand Aline a la balle, elle l'envoie à Benjamin avec une probabilité de $0,75$ et à Chloé avec une probabilité de 0,25.
- Quand Benjamin a la balle, il l'envoie à Aline avec une probabilité de 0,75 et à Chloé sinon.
- Chloé envoie toujours la balle à Benjamin.

Au début du jeu, Aline a la balle.

- On note $A$ l'état : « Aline a la balle ».
- On note $B$ l'état : « Benjamin a la balle ».
- On note $C$ l'état : « Chloé a la balle ».

**1.** En considérant les états $A, B$ et $C$ dans cet ordre, écrire la matrice de transition $T$ de cette marche aléatoire.

**2.** Quelle est la probabilité qu'Aline ait la balle au bout du cinquième lancer ?

**3.** On pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -9 \\ 1 & -4 & 12 \end{pmatrix}$. Déterminer $P^{-1}$ puis $P^{-1}TP$.

**4.** Exprimer $T^n$ pour $n$ entier naturel non nul.

**5.** En déduire, en fonction de $n$, la probabilité qu'Aline ait la balle au bout du $n$-ième lancer. On donnera un arrondi à $10^{-2}$ près.

**Exercice 8.12 :** Céline travaille dans une société spécialisée dans la vente par téléphone. Chaque jour, elle doit appeler une liste de clients pour leur proposer un produit particulier. Après avoir observé un grand nombre d'appels de Céline, on peut faire l'hypothèse suivante :

— si un client contacté répond favorablement (situation A), cela donne de l'assurance à Mademoiselle Z et elle arrive à convaincre le client suivant une fois sur deux ;

— si le client contacté ne répond pas favorablement (situation B), Céline se décourage et n'arrive à convaincre le client suivant qu'une fois sur cinq.

**1.**

**a.** Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.

**b.** Écrire la matrice de transition $M$ de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

**2.** Ce lundi, Céline est en forme et elle a convaincu le premier client d'acheter le produit proposé. La matrice ligne décrivant l'état initial au premier appel est donc $P_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.
Donner la matrice ligne $P_1$ exprimant l'état probabiliste au deuxième appel.

**3.** On donne la matrice $M^5 = \begin{pmatrix}0,28745 & 0,71255\\ 0,28502 & 0,71498\end{pmatrix}$.

**a.** Calculer le produit $P_0M^5$. En déduire la probabilité que Céline convainque son sixième client ce lundi.

**b.** Quelle aurait été la probabilité que Céline convainque son sixième client si elle n'avait pas convaincu le premier ?

**4.** Déterminer l'état stable du système. Comment peut-on l'interpréter ?

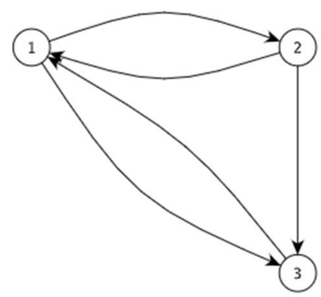
*D'après Baccalauréat ES, Métropole, septembre 2005*

### Exercice 8.13 : PageRank, l'algorithme de recherche de Google

L'algorithme de PageRank, breveté en 1998 et utilisé par Google, attribue à chaque page Web une valeur, appelée **indice de pertinence**, proportionnelle à la probabilité qu'un surfeur, parcourant le Web en cliquant aléatoirement sur l'un des liens apparaissant sur chaque page, passe par cette page, au bout d'un très grand nombre de clics.

#### Partie A — Une première approche

Considérons trois pages Web, numérotées 1, 2 et 3, reliées entre elles par des liens hypertexte de la façon schématisée ci-contre. Initialement, un surfeur choisit au hasard, de manière équiprobable, l'une des trois pages. Puis à chaque étape, il choisit de façon équiprobable une page parmi celles vers lesquelles pointe la page où il se trouve.




Ainsi, lorsque le surfeur est sur la page 1, la probabilité qu'il choisisse la page 2 est $\frac{1}{2}$ ; lorsqu'il est sur la page 3, la probabilité qu'il choisisse la page 1 est 1 ; lorsqu'il est sur la page 2, la probabilité qu'il choisisse la page 1 est $\frac{1}{2}$. Pour tout entier naturel $n$, on note $X_n$ la variable aléatoire donnant le numéro de la page sur laquelle se trouve le surfeur après $n$ étapes, et $U_n$ sa loi de probabilité.

**1.** Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

**2.** Déterminer la matrice $A$, telle que pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = U_n \times A$, ainsi que la loi initiale $U_0$.

#### Partie B — Amélioration du modèle, la solution de Page et Brin

Malheureusement, les pages Web ne sont pas toutes reliées par au moins un chemin, certaines sont simplement descriptives sans lien hypertexte... La démarche précédente n'est donc pas complètement satisfaisante pour définir l'indice de pertinence. Afin de surmonter ces problèmes, Page et Brin ont eu l'idée d'imaginer un surfeur qui peut à chaque étape :

— soit aller de façon équiprobable sur n'importe quelle page du graphe (y compris celle d'où il vient) ;

— soit choisir de façon équiprobable une page parmi celles vers laquelle pointe la page où il se trouve ;

— on admet enfin que le premier comportement survient avec une probabilité $p$ fixée ($0 < p < 1$), et le second avec la probabilité $1 - p$.

On choisit $p = 0,15$ et on reprend l'exemple et les notations de la partie **A**.

**1.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ :

$$P(X_{n+1} = 1) = 0,85\,(0,5P(X_n = 2) + P(X_n = 3)) + 0,05$$

On admettra que pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = 0,85U_n \times A + B$ où $B = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,05 & 0,05 \end{pmatrix}$.

**2.** Montrer l'équivalence suivante, $C$ étant une matrice ligne a trois colonnes :

$$C = 0,85C \times A + B \Leftrightarrow C \times (I_3 - 0,85A) = B$$

Montrer, à l'aide d'une calculatrice, l'existence de la matrice $C$.

**3.** Justifier que pour tout entier naturel $n$ : $U_{n+1} - C = 0,85(U_n - C) \times A$, puis que

$$U_n = C + 0,85^n (U_0 - C) \times A^n$$

**4.** À l'aide d'une calculatrice, calculer la loi $U_{10}$ et arrondir les résultats à $10^{-5}$ près. Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite $(U_n)$ lorsque l'entier naturel $n$ devient grand ? Comparer avec la matrice ligne $C$. Quelle est la page d'indice de pertinence le plus grand ? Le plus petit ?

# Indications

## Ex. 8.1

*Il s'agit d'appliquer les premières définitions relatives aux graphes non orientés.*

## Ex. 8.2

*Il s'agit d'utiliser les définitions qui s'appliquent à un graphe orienté.*

## Ex. 8.3

**1.** *On pourra effectuer une lecture inversée de la* **méthode 8.1**.

**3.** *Il s'agit ici d'appliquer le* **théorème 8.8** *de la partie* **Approfondissement, algorithmes**.

## Ex. 8.4

**1.** *On applique la* **méthode 8.1**.

**2.** *On applique la* **méthode 8.2**.

## Ex. 8.5

*On utilisera la* **méthode 8.3** *et la* **méthode 8.4**.

## Ex. 8.6

**3.** *Voir la* **méthode 8.6**.

## Ex. 8.7

**2.** *Rappelons que si $n \in \mathbb{N}$ et $X_n$ la variable aléatoire ayant pour états 1, 2, 3, 4 ou 5 à l'étape n°$n$, alors $X_n$ suit la loi $\pi_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) & P(X_n = 4) & P(X_n = 5) \end{pmatrix}$. D'après l'énoncé $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On utilisera la* **méthode 8.5**.

## Ex. 8.9

**2. c.** *Voir la* **méthode 8.6**.

## Ex. 8.10

**1. b.** *Penser à la formule des probabilités totales.*

**4. b.** *Voir la définition d'un état stable et le* **théorème 8.5**.

## Ex. 8.12

*On pourra introduire une suite de variables aléatoires $(X_n)$ que l'on définira.*

**4.** *Voir le* **théorème 8.6**.

# Corrigé des vrai/faux

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | V | V | V | F | F | F | F | V | F | F | F |

**1.** Si le graphe n'est pas orienté la propriété est vraie, elle est fausse s'il est orienté.
**2.** Vraie par définition d'une matrice de transition qui met en relation tous les sommets avec eux-mêmes.
**3.** Le graphe $\mathscr{F}$ est connexe, mais pas complet puisque les sommets B et E ne sont pas adjacents. L'une des propositions de l'affirmation est vraie, cela suffit à cause du « ou », donc elle est vraie.
**4.** Le cycle B-C-D-E-A-B convient.
**5.** Partant de B, on ne peut joindre aucun autre sommet.
**6.** Après avoir testé tous les cycles possibles, aucun n'est de longueur 4.
**7.** L'arc reliant C à A porte le poids 0,2, or $a_{3,1} = 0,8 \neq 0,2$.
**8.** Considérons un graphe probabiliste de matrice de transition $I_2$, alors $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} I_2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$, donc toute matrice stochastique ligne est un état stable, donc, dans ce cas, il y a une infinité de lois stationnaires.
**9.** C'est une conséquence du **théorème 8.4**.
**10.** Cette matrice n'est pas stochastique, en effet $0,3 + 0,2 + 1 \neq 1$.
**11.** Contre-exemple : $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$ est stochastique et correspond bien à un graphe probabiliste, mais $T$ n'est pas inversible puisque $0,8 \times 0,2 - 0,8 \times 0,2 = 0$.
**12.** Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on montrerait par récurrence que pour tout entier naturel $n$,
$M^n = \begin{cases} I_2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ M \text{ sinon} \end{cases}$. Notons $\pi_0 = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ une matrice stochastique avec $a \neq b$, alors
$\pi_n = \pi_0 M^n = \begin{cases} \pi_0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \begin{pmatrix} b & a \end{pmatrix} \text{ sinon} \end{cases}$. Comme $\pi_0 \neq \begin{pmatrix} b & a \end{pmatrix}$, la suite $(\pi_n)$ ne converge pas.

**❑ Erreurs classiques**

- Une matrice d'adjacence n'est pas une matrice de transition.
- Pour une matrice de transition d'un graphe probabiliste, c'est la somme des coefficients d'une même ligne qui est égale à 1, pas la somme des coefficients d'une même colonne.
- Avec une chaîne de Markov, la probabilité de passage d'un état à un autre, entre deux moments consécutifs, est constante.

# Corrigé des exercices

## Exercice 8.1

**1.** L'ordre de ce graphe est 8.
**2.** Les sommets 1 et 6 ne sont pas adjacents, donc le graphe n'est pas complet.
**3.** Les sommets 3 et 6 sont de plus haut degré.
**4.** Une chaîne d'extrémités 1 et 8, et de longueur 6 est 1-2-3-4-5-6-8. ▲

*Par définition, l'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets.*

## Exercice 8.2

**1.** Un chemin reliant A à C est A-D-C.
**2.** Aucun arc n'abouti à E, donc il n'existe pas de chemins reliant A et E.
**3.** A-D-C-B-A est un circuit d'extrémité A.
**4.** Puisqu'il n'existe pas d'arc aboutissant à E, il n'existe pas de circuit d'extrémité E. ▲

*Le graphe étant orienté, A-B-C n'est pas un de ses chemins.*

## Exercice 8.3

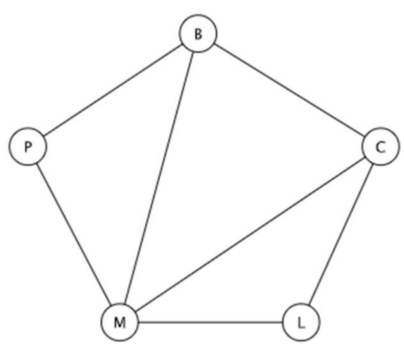
**1.** Réécrivons le tableau comme dans la **méthode 8.1** :

| | B | C | L | M | P |
|---|---|---|---|---|---|
| **B** | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| **C** | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| **L** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **M** | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| **P** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

On déduit de ce tableau la matrice d'adjacence $M$ de ce graphe.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M$ est symétrique par rapport à sa diagonale principale, donc nous avons la confirmation que le graphe n'est pas orienté. Voici le graphe représentant la ville, à ne pas confondre avec son plan.




**2.** Voici un trajet empruntant une fois et une seule toutes les rues de ce plan : B-M-C-B-P-M-L-C.

Corrigé

**3.** Un trajet commençant et finissant par un même sommet et passant une fois et une seule par toutes les arêtes est un cycle eulérien, le graphe est alors eulérien. Le sommet B est de degré impair, donc d'après le **théorème 8.8**, de la partie **Approfondissements, algorithmes**, le graphe n'est pas eulérien, par conséquent le trajet proposé dans cette question n'existe pas. ▲

## Exercice 8.4

**1.** Appliquons la **méthode 8.1**, et dans ce cadre voici le tableau des relations entre sommets :

| ↱ | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| **B** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **C** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| **D** | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **E** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| **F** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Il en résulte la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**2.** À l'aide d'une calculatrice on obtient : $M^5 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 11 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 10 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 11 & 1 & 10 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 14 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 11 & 5 & 11 & 3 \end{pmatrix}$.

**3.** La matrice $M^5$ donne le nombre de chemins reliant deux sommets suivant le tableau ci-dessous.

| ↱ | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 2 | 6 | 6 | 11 | 7 | 5 |
| **B** | 1 | 0 | 5 | 0 | 4 | 0 |
| **C** | 0 | 6 | 0 | 10 | 1 | 4 |
| **D** | 3 | 0 | 11 | 1 | 10 | 1 |
| **E** | 1 | 8 | 1 | 14 | 4 | 6 |
| **F** | 3 | 2 | 11 | 5 | 11 | 3 |

La suite des questions résulte d'une simple lecture de ce tableau, sachant que chaque case donne le nombre de chemins reliant, dans ce sens, le sommet repérant la ligne contenant la case, à celui de sa colonne.

**a.** Le nombre de chemins de longueur 5 reliant A à D est 11.

**b.** Les sommets qui ne sont à l'origine d'aucun circuit de longueur 5 sont B et C.

✎ *Un circuit est un chemin dont les extrémités sont identiques, par conséquent les nombres de circuits de longueur 5 se trouvent sur la diagonale de $M^5$.*

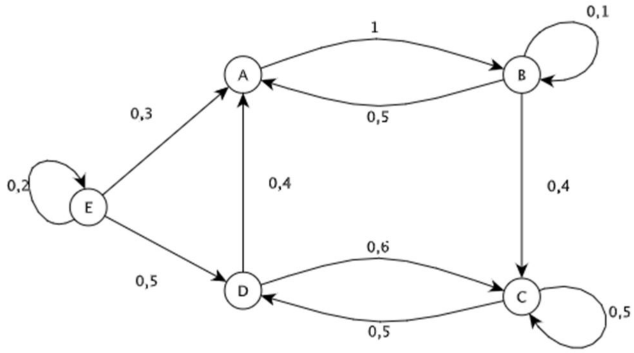
**c.** Il y a deux circuits de longueur 5 et d'origine A : A-E-D-E-F-A et A-E-F-E-F-A.

**d.** Il n'existe aucun chemin de B vers B, de B vers D, de B vers F, de C vers A, C vers C, et enfin de D vers B.

**e.** Le maximum de chemins de longueur 5 est atteint pour aller de E vers D. ▲

## Exercice 8.5

La **méthode 8.3** nous permet de compléter ce graphe.




La **méthode 8.4** nous permet d'établir sa matrice de transition $T$. Tout d'abord disposons les probabilités $P(i \to j)$ dans un tableau à double entrée.

| ↱ | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **B** | 0,5 | 0,1 | 0,4 | 0 | 0 |
| **C** | 0 | 0 | 0,5 | 0,5 | 0 |
| **D** | 0,4 | 0 | 0,6 | 0 | 0 |
| **E** | 0,3 | 0 | 0 | 0,5 | 0,2 |

En résulte la matrice de transition $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$. ▲

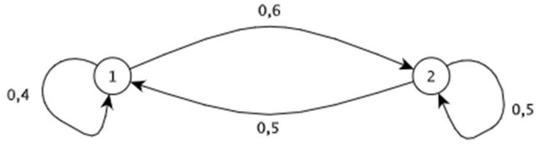
## Exercice 8.6

**1.** $M$ étant la matrice de transition d'un graphe probabiliste, tous les coefficients positifs et la somme des coefficients d'une même ligne est égale à 1, par conséquent $M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

**2.** Utilisons la **méthode 8.3**. $M$ est une matrice carrée d'ordre 2, donc le système décrit par cette matrice a deux états que nous noterons **1** et **2**. La répartition des probabilités suivant les différents états est donnée par le tableau ci-dessous.

| ↱ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| **1** | 0,4 | 0,6 |
| **2** | 0,5 | 0,5 |

Il en résulte le graphe suivant.




**3.** Ici on utilise la **méthode 8.6**. Soit $\Pi \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ un état stable, s'il existe, associé à ce graphe, alors il est solution du système suivant que nous résolvons.

$$\begin{cases} \Pi M = \Pi \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,4x+0,5y=x \\ 0,6x+0,5y=y \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ 0,4x+0,5(1-x)=x \\ 0,6x+0,5(1-x)=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ 0,4x+0,5-0,5x=x \\ 0,6x+0,5-0,5x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ 0,5-0,1x=x \\ 0,5+0,1x=y \end{cases}$$

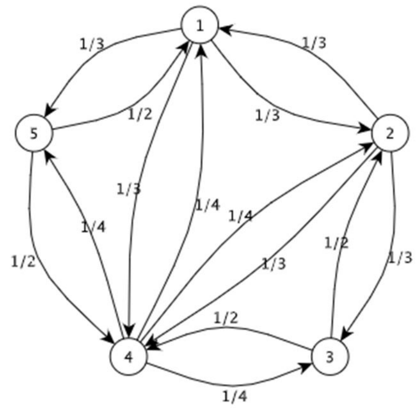
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ 0,5=1,1x \\ 0,5+0,1x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x=\frac{0,5}{1,1}=\frac{5}{11} \\ 0,5+0,1x=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{11} \\ y=1-\frac{5}{11}=\frac{6}{11} \\ 0,5+0,1\frac{5}{11}=y \end{cases}$$

Finalement $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{5}{11}\ ;\ \frac{6}{11}\right)\right\}$ et il existe un unique état stable $\Pi=\begin{pmatrix}\frac{5}{11} & \frac{6}{11}\end{pmatrix}$.
▲

## Exercice 8.7

**1.** D'après l'énoncé, le graphe est le suivant :




La **méthode 8.4** nous permet d'établir sa matrice de transition $T$.

Tout d'abord, disposons les probabilités $P(i \to j)$ dans un tableau à double entrée.

| ↱ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| **2** | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 |
| **3** | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| **4** | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| **5** | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 |

Il en résulte la matrice de transition

$$T=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

**2.** D'après la **méthode 8.5**, pour tout entier naturel $n$, $\pi_n=\pi_0 T^n$ où :
- $\pi_n=\begin{pmatrix}P(X_n=1) & P(X_n=2) & P(X_n=3) & P(X_n=4) & P(X_n=5)\end{pmatrix}$
- $\pi_0=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

De ce fait $\begin{cases} \pi_{10}\approx\begin{pmatrix}0,2166 & 0,2119 & 0,1442 & 0,2857 & 0,1416\end{pmatrix} \\ \pi_{20}\approx\begin{pmatrix}0,2143 & 0,2143 & 0,1429 & 0,2857 & 0,1428\end{pmatrix} \end{cases}$.

La suite des matrices $(\pi_n)$ semble converger vers la matrice

$$\Pi \approx \begin{pmatrix} 0,21 & 0,21 & 0,14 & 0,29 & 0,14 \end{pmatrix}$$

**3.** Sur les indications de l'énoncé, $A = 7$ et on pose $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{3}{14} & \frac{2}{14} & \frac{4}{14} & \frac{2}{14} \end{pmatrix}$.

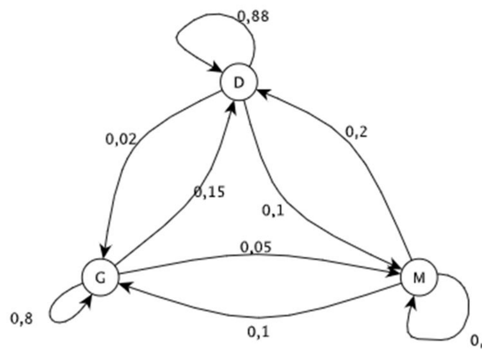
**a.** On vérifie avec une calculatrice que $XT = X$, donc $X$ est un état stable de la chaîne de Markov $(X_n)$.

**b.** Toujours à l'aide d'une calculatrice, on constate que $\Pi \approx X$. ▲

## Exercice 8.8

**1.** Voici le graphe probabiliste décrivant les évolutions possibles du système des randonneurs.

*Rappelons avec la* **méthode 8.3**, *que la somme des probabilités se trouvant sur les arcs issus d'un même sommet est égale à 1.*




**2.** Pour l'écriture de la matrice de transition, utilisons la **méthode 8.4**.

Tout d'abord, disposons les différentes probabilités dans un tableau à double entrée.

| ↱ | **D** | **M** | **G** |
|---|---|---|---|
| **D** | 0,88 | 0,1 | 0,02 |
| **M** | 0,2 | 0,7 | 0,1 |
| **G** | 0,15 | 0,05 | 0,8 |

Il en résulte la matrice de transition

$$T = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,1 & 0,02 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,15 & 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}$$

**3.** Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $X_n$ la variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{\mathsf{D}\ ;\ \mathsf{M}\ ;\ \mathsf{G}\}$ la semaine n°$n$. Les pourcentages donnés en introduction restant stables, la suite $(X_n)$ est une chaîne de Markov. Notons $\pi_n$ la loi suivie par $X_n$ la semaine n°$n$, d'après la **méthode 8.5** et en l'adaptant à l'indice de départ $n = 1$, on a l'égalité $\pi_n = \pi_1 T^{n-1}$ où $\pi_1 = \begin{pmatrix} \frac{15}{85} & \frac{30}{85} & \frac{40}{85} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{17} & \frac{6}{17} & \frac{8}{17} \end{pmatrix}$. En particulier :

*Le nombre total de randonneurs est 85.*

$$\pi_4 = \pi_1 T^3 \approx \begin{pmatrix} 0,4406 & 0,2330 & 0,3264 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, après quatre semaines de randonnées :

- le groupe D compte $85 \times 0,4406 \approx 37$ personnes ;
- le groupe M compte $85 \times 0,233 \approx 20$ personnes ;
- le groupe G compte $85 \times 0,3264 \approx 28$ personnes. ▲

*Par exemple* $P(X_4 = D) = \dfrac{\text{nb de personnes dans D}}{85} \approx 0,4406$*, d'où le produit ci-contre.*

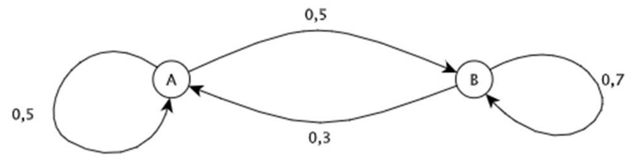
## Exercice 8.9

**1.** Étant donné que le choix du modèle de voiture se fait exclusivement sur les modèles A et B sur toute la période choisie, alors le $n$-ième mois, on a $p_n + q_n = 1$.

Corrigé

**2.**

**a.** D'après l'énoncé, la situation est modélisée par le graphe probabiliste ci-dessous.




**b.**

Regroupons au sein d'un tableau les évolutions entre les deux choix.

| ↱ | **A** | **B** |
|---|---|---|
| **A** | 0,5 | 0,5 |
| **B** | 0,3 | 0,7 |

Il en résulte la matrice de transition

$$T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

**c.** Soit $\Pi = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ un état stable du graphe, s'il existe, alors d'après la **méthode 8.6** :

*La méthode choisie pour la résolution de ce système est la substitution.*

$$\begin{cases} \Pi T = \Pi \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5x + 0,3y = x \\ 0,5x + 0,7y = y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 0,5x + 0,3(1 - x) = x \\ 0,5x + 0,7(1 - x) = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 0,5x + 0,3 - 0,3x = x \\ 0,5x + 0,7 - 0,7x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 0,2x - x = -0,3 \\ -0,2x + 0,7 = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ -0,8x = -0,3 \\ -0,2x + 0,7 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x = \frac{-0,3}{-0,8} = \frac{3}{8} \\ -0,2x + 0,7 = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{8} \\ y = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \\ y = -0,2\frac{3}{8} + 0,7 = \frac{-0,6+5,6}{8} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pi T = \Pi \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{3}{8} \ ; \ \frac{5}{8} \right) \right\}$$

Le graphe admet un unique état stable : $\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$.
Dans le cadre de l'énoncé, les probabilités de choix des deux modèles convergent.

*On applique ici le* **théorème 8.5**.

Par conséquent, au fur et à mesure que le temps passe, la répartition des choix converge vers $\frac{3}{8} = 37,5$ % pour le modèle A et $62,5$ % pour le modèle B. ▲

## Exercice 8.10

**1.**

**a.** Soit $n \in \mathbb{N}$, $P_{\{X_n=1\}}(X_{n+1} = 1)$ est la probabilité pour l'urne U de contenir une seule boule blanche après le $(n+1)^{\text{ème}}$, alors qu'elle en contenait déjà une seule après le précédent tirage.

- $P_{\{X_n=0\}}(X_{n+1} = 1) = 1$ : au $n^{\text{ème}}$ tirage, l'urne U ne contient pas de boules blanches, donc l'urne V ne contient que des boules blanches, par conséquent au prochain tirage U en contiendra une seule.

- $P_{\{X_n=1\}}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$ : l'événement $\{X_n = 1\}$ est réalisé : la situation est donc la suivante, les urnes U et V contiennent chacune exactement une boule blanche et une noire. Notons $B_1$ et $N_1$ les boules de l'urne U et $B_2$ et $N_2$

celles de l'urne V. Au tirage suivant $(n+1)$, les paires de boules éventuellement présentes dans l'urne U sont : $B_1B_2$, $B_1N_2$, $B_2N_1$ et $N_2N_1$. Seules deux de ces quatre paires réalisent l'événement $\{X_{n+1}=1\}$, donc la probabilité cherchée est $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

• $P_{\{X_n=0\}}(X_{n+1}=1)=1$ : au $n^{\text{ème}}$ tirage, il n'y a aucune boule blanche dans l'urne U, donc au tirage suivant, il y en aura exactement une.

**b.** Soit $n \in \mathbb{N}$, $(\{X_n=0\}\ ;\ \{X_n=1\}\ ;\ \{X_n=2\})$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=1)=P(X_n=0)P_{\{X_n=0\}}(X_{n+1}=1)+P(X_n=1)P_{\{X_n=1\}}(X_{n+1}=1)\\+P(X_n=2)P_{\{X_n=2\}}(X_{n+1}=1)\end{aligned}$$

$$P(X_{n+1}=1)=P(X_n=0)+0,5P(X_n=1)+P(X_n=2)$$

**2.**

**a.** $R_1=R_0\times M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $R_n=R_0\times M^n$. Pour tout entier naturel $n$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ : « $R_n=R_0\times M^n$ ».

• **Initialisation :** $R_0\times M^0=R_0\times I_3=R_0$ donc la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** Soit $n\geqslant 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
$\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc $R_n=R_0\times M^n$, par conséquent :

$$R_{n+1}=R_n\times M=(R_0\times M^n)\times M=R_0\times(M^n\times M)=R_0\times M^{n+1}$$

La proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion :** Par récurrence, on a montré que pour tout entier naturel $n$, $R_n=R_0\times M$.

**b.** Admettons que $M=P\times D\times P^{-1}$ et montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $M^n=P\times D^n\times P^{-1}$. Pour tout entier naturel $n$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ : « $M^n=P\times D^n\times P^{-1}$ ».

• **Initialisation :** $M^0=I_3$ et $P\times D^0\times P^{-1}=P\times I_3\times P^{-1}=P\times P^{-1}=I_3$ ainsi $M^0=P\times D^0\times P^{-1}$. La proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** Soit $n\geqslant 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
$\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc $M^n=P\times D^n\times P^{-1}$.

$$\begin{aligned}M^{n+1}&=M^n\times M\\&=\left(P\times D^n\times P^{-1}\right)\times\left(P\times D\times P^{-1}\right)\\&=P\times D^n\times\left(P^{-1}\times P\right)\times D\times P^{-1}\\&=P\times D^n\times I_3\times D\times P^{-1}\\M^{n+1}&=P\times D^{n+1}\times P^{-1}\end{aligned}$$

La proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion :** la proposition $\mathcal{P}$ est vraie au rang 0 et se transmet héréditairement donc on a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $M^n=P\times D^n\times P^{-1}$.

**3.**

**a.** Soit $n\in\mathbb{N}$, $D^n\times P^{-1}=\begin{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$



Corrigé

**b.** Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} R_n & = & R_0 \times M^n \\ & = & R_0 \times \left(P \times D^n \times P^{-1}\right) \\ & = & (R_0 \times P) \times \left(D^n \times P^{-1}\right) \\ & = & \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ R_n & = & \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} & -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} \end{pmatrix} \end{array}$$

**4.**

**a.** Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente $P(X_n = 0) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}$, $P(X_n = 1) = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$ et $P(X_n = 2) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}$.
$-1 < -\frac{1}{2} < 1$ donc la suite géométrique $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ converge vers 0.
$\ell_0 = \lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0) = \frac{1}{6}$, $\ell_1 = \lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 1) = \frac{2}{3}$ et
$\ell_2 = \lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 2) = \frac{1}{6}$.
Plus il y a de tirages, plus la probabilité que l'urne U ne contienne pas de boule blanche tend vers $\frac{1}{6}$, la probabilité qu'elle n'en contienne qu'une seule tend vers $\frac{2}{3}$, et la probabilité qu'elle en contienne deux tend vers $\frac{1}{6}$.

**b.** Posons $\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, on vérifie, avec une calculatrice par exemple, que $\Pi \times M = \Pi$, donc $\Pi$ est un état stable pour la chaîne de Markov $(X_n)$.▲

## Exercice 8.11

**1.** On cherche une matrice stochastique.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0,75 & 0,25 \\ 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**2.** Soit $P_n$ l'état probabiliste au bout de $n$ lancers. $P_0$ est l'état probabiliste initial, donc : $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a : $P_n = P_0 T^n$.

$$\begin{array}{rcl} P_5 = P_0 T^5 & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0,75 & 0,25 \\ 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^5 \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,257\,81 & 0,541\,99 & 0,200\,20 \\ 0,495\,12 & 0,304\,69 & 0,200\,20 \\ 0,140\,63 & 0,660\,16 & 0,199\,22 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 0,257\,81 & 0,541\,99 & 0,2002 \end{pmatrix} \end{array}$$

Conclusion : Aline a la balle au bout du cinquième lancer avec une probabilité d'environ $0,26$.

**3.** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -9 \\ 1 & -4 & 12 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -9 \\ 1 & -4 & 12 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{12}{35} & \frac{16}{35} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
P^{-1}TP &= \begin{pmatrix} \frac{12}{35} & \frac{16}{35} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0,75 & 0,25 \\ 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -9 \\ 1 & -4 & 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0 & -0,75 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

**4.** Soit $D = P^{-1}TP$. On a $T = PDP^{-1}$, et par suite : $T^n = PD^nP^{-1}$

$$
\begin{aligned}
T^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -9 \\ 1 & -4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-0,75)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{12}{35} & \frac{16}{35} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & (-0,25)^n & 0 \\ 1 & -4(-0,25)^n & 0 \\ 1 & 0 & (-0,75)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{12}{35} & \frac{16}{35} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{12}{35} + \frac{3}{10}(-0,25)^n & \frac{16}{35} - \frac{1}{10}(-0,25)^n & \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(-0,25)^n \\ \frac{12}{35} - \frac{6}{5}(-0,25)^n & \frac{16}{35} + \frac{2}{5}(-0,25)^n & \frac{1}{5} + \frac{4}{5}(-0,25)^n \\ \frac{12}{35} + \frac{1}{14}(-0,75)^n & \frac{16}{35} - \frac{1}{14}(-0,75)^n & \frac{1}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

**5.**

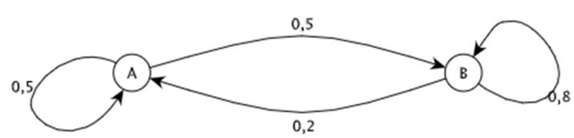
$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{12}{35} + \frac{3}{10}(-0,25)^n & \frac{16}{35} - \dfrac{1}{10}(-0,25)^n & \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(-0,25)^n \\ \frac{12}{35} - \frac{6}{5}(-0,25)^n & \frac{16}{35} + \frac{2}{5}(-0,25)^n & \frac{1}{5} + \frac{4}{5}(-0,25)^n \\ \frac{12}{35} + \frac{1}{14}(-0,75)^n & \frac{16}{35} - \frac{1}{14}(-0,75)^n & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{12}{35} + \frac{3}{10}(-0,25)^n & \frac{16}{35} - \frac{1}{10}(-0,25)^n & \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(-0,25)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Conclusion : la probabilité qu'Aline ait la balle au bout de $n$ lancers est $\dfrac{12}{35} + \dfrac{3}{10}(-0,25)^n$. ▲

## Exercice 8.12

**1.**

**a.** La situation peut être modélisée par le graphe probabiliste ci-dessous. $\frac{1}{5} = 0,2$




**b.**

Traduisons ceci sous forme de tableau.

| ↱ | **A** | **B** |
|---|---|---|
| **A** | 0,5 | 0,5 |
| **B** | 0,2 | 0,8 |

On en déduit la matrice de transition

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

**2.** $P_1 = P_0M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

**3.**

**a.** $P_5 = P_0M^5 = \begin{pmatrix} 0,28745 & 0,71255 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la variable aléatoire $X_n$ qui renvoie l'état de la situation

✎ *Par définition, une variable aléatoire renvoie un nombre réel, ou un nombre complexe, par conséquent l'égalité $X_n = A$ est un abus d'écriture.*

(A ou B) pour le $(n+1)^{\text{ème}}$ client. D'après ce qui précède, $P(X_5 = A) = 0,28745$ et $P(X_5 = B) = 0,71255$. Par conséquent Céline a une probabilité égale à 0,28745 de convaincre son sixième client ce lundi.

**b.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} M^5 = \begin{pmatrix} 0,28502 & 0,71498 \end{pmatrix}$, donc la probabilité que Céline convainque son sixième client ce lundi est 0,28502, dans le cas où elle n'aurait pas convaincu le premier.

**4.** $M$ est une matrice d'ordre 2 sans 0, donc d'après le **théorème 8.6**, la chaîne de Markov $(X_n)$ admet un unique état stable $\Pi = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$.

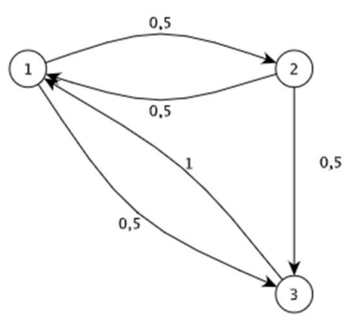
$$\begin{cases} \Pi M = \Pi \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5x + 0,2y = x \\ 0,5x + 0,8y = y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 0,5x + 0,2(1-x) = x \\ 0,5x + 0,8(1-x) = 1 - x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 0,3x + 0,2 = x \\ -0,3x + 0,8 = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 0,7x = 0,2 \\ 0,7x = 0,2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Pi M = \Pi \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ y = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \end{cases}$$

L'état stable de $(X_n)$ est $\Pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$. Par conséquent, toujours d'après le **théorème 8.6**, que Céline ait convaincu ou non son premier client, la probabilité qu'elle convainque le $n^{\text{ème}}$ client tend vers $\frac{2}{7}$, et qu'elle ne le convainque pas tend vers $\frac{5}{7}$. ▲

## Exercice 8.13

### Partie A

**1.** Voici le graphe probabiliste obtenu à partir de l'énoncé.



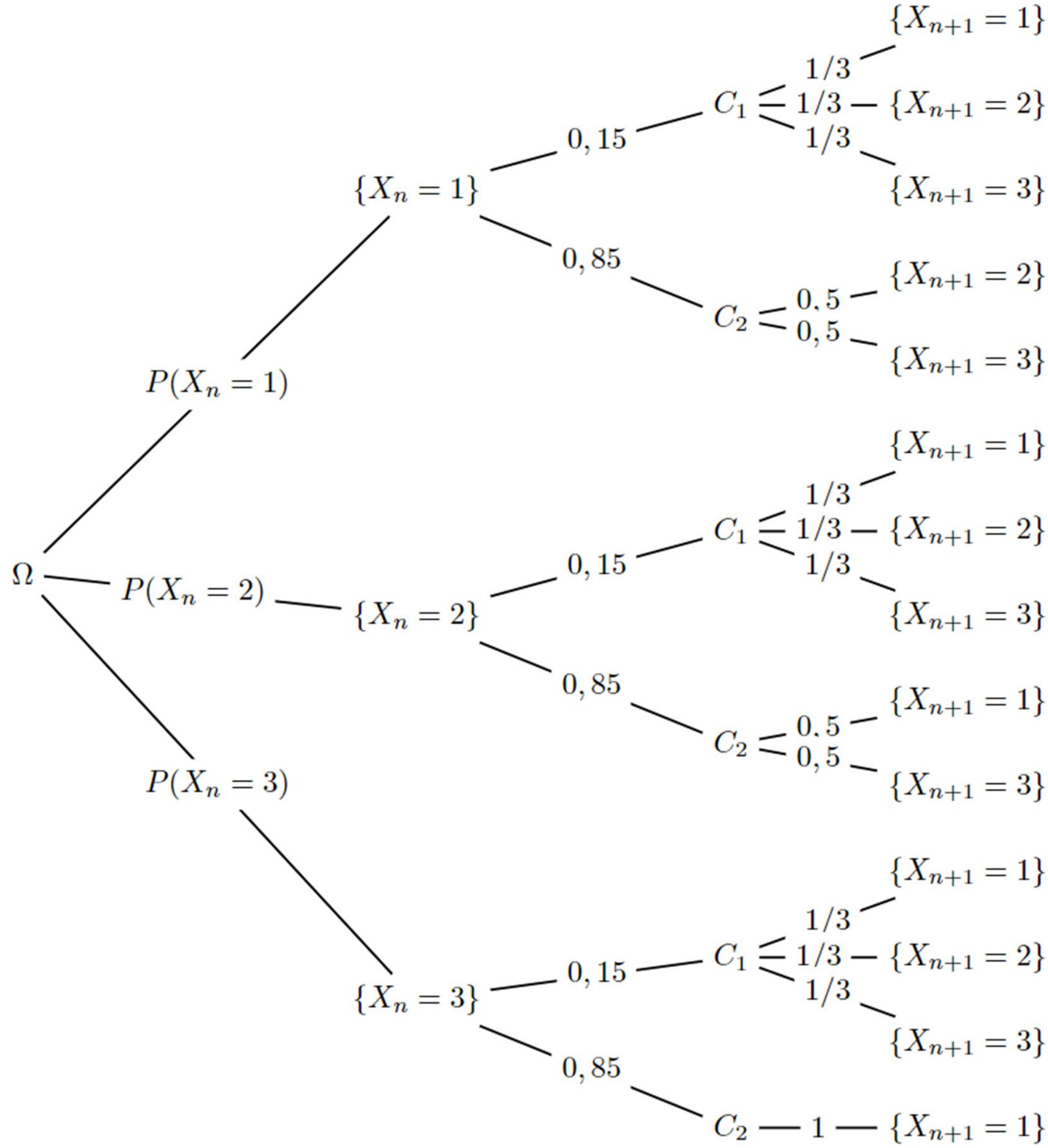

**2.** $A$ est la matrice de transition associée à ce graphe. Pour établir, on construit le tableau à doubles entrées permettant une relecture de ce graphe.

| ↱ | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 0,5 | 0,5 |
| **2** | 0,5 | 0 | 0,5 |
| **3** | 1 | 0 | 0 |

En résulte la matrice de transition $A = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En introduction, il est dit qu'initialement un surfeur choisit au hasard, de manière équiprobable, une des trois pages, donc $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

**Partie B**

**1.** Notons $C_1$ et $C_2$ les comportements dans l'ordre d'apparition dans la liste donnée dans l'énoncé. Soit $n \in \mathbb{N}$, construisons un arbre pondéré afin de décrire la situation.




$$\begin{aligned}\{X_{n+1} = 1\} = {} & (\{X_n = 1\} \cap C_1 \cap \{X_{n+1} = 1\}) \cup (\{X_n = 2\} \cap C_1 \cap \{X_{n+1} = 1\}) \\ & \cup (\{X_n = 2\} \cap C_2 \cap \{X_{n+1} = 1\}) \cup (\{X_n = 3\} \cap C_1 \cap \{X_{n+1} = 1\}) \\ & \cup (\{X_n = 3\} \cap C_2 \cap \{X_{n+1} = 1\})\end{aligned}$$

D'après l'énoncé $C_1$ et $C_2$ sont indépendants des événements $\{X_n = k\}$ et $\{X_{n+1} = k\}$ où $k \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}P(X_{n+1} = 1) = {} & P(X_n = 1)P_{\{X_n=1\}}(C_1)P_{\{X_n=1\}\cap C_1}(X_{n+1} = 1) \\ & + P(X_n = 2)P_{\{X_n=2\}}(C_1)P_{\{X_n=2\}\cap C_1}(X_{n+1} = 1) \\ & + P(X_n = 2)P_{\{X_n=2\}}(C_2)P_{\{X_n=2\}\cap C_2}(X_{n+1} = 1) \\ & + P(X_n = 3)P_{\{X_n=3\}}(C_1)P_{\{X_n=3\}\cap C_1}(X_{n+1} = 1) \\ & + P(X_n = 3)P_{\{X_n=3\}}(C_2)P_{\{X_n=3\}\cap C_2}(X_{n+1} = 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=1) &= 0,15\frac{1}{3}P(X_n=1)+0,15\frac{1}{3}P(X_n=2)\\ &\quad +0,85\times 0,5P(X_n=2)+0,15\frac{1}{3}P(X_n=3)+0,85P(X_n=3)\\ &= 0,05\left(P(X_n=1)+P(X_n=2)+P(X_n=3)\right)\\ &\quad +0,85\left(0,5P(X_n=2)+P(X_n=3)\right)\end{aligned}$$

Finalement

$$P(X_{n+1}=1)=0,85\left(0,5P(X_n=2)+P(X_n=3)\right)+0,05$$

On admettra que pour tout entier naturel $n$ :

$$U_{n+1}=0,85U_n\times A+B \text{ où } B=\begin{pmatrix}0,05 & 0,05 & 0,05\end{pmatrix}.$$

**2.** Soit $C$ une matrice à trois colonnes.

$$\begin{aligned}C=0,85C\times A+B &\Leftrightarrow C-0,85C\times A=B\\ &\Leftrightarrow C\times I_3-C\times(0,85A)=B\\ C=0,85C\times\times A+B &\Leftrightarrow C\left(I_3-0,85A\right)=B\end{aligned}$$

*La vérification se fait simplement, on entre les coefficients de la matrice $I_3-0,85A$ dans la calculatrice et on lui demande de trouver son inverse. Le calcul de la matrice inverse étant fait, nous sommes assuré de son existence et nous avons son expression.*

À l'aide de la calculatrice, on vérifie que la matrice

$$I_3-0,85A=\begin{pmatrix}1 & -0,425 & -0,425\\ -0,425 & 1 & -0,425\\ -0,85 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

est inversible et que

$$(I_3-0,85A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{32000}{9747} & \frac{13600}{9747} & \frac{340}{171}\\ \frac{25160}{9747} & \frac{20440}{9747} & \frac{340}{171}\\ \frac{27200}{9747} & \frac{11560}{9747} & \frac{460}{171}\end{pmatrix}$$

La matrice $I_3-0,85A$ étant inversible, on l'équivalence :

$$C\times(I_3-0,85A)=B\Leftrightarrow C=B\times(I_3-0,85A)^{-1}$$

Par conséquent la matrice $C$ existe et est unique, de plus son expression est $C=\begin{pmatrix}\frac{74}{171} & \frac{40}{171} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

**3.** Soit $n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases}U_{n+1}=0,85U_n\times A+B\\ C=0,85C\times A+B\end{cases}$. Effectuons la différence membre à membre de ces deux égalités, nous obtenons alors :

*Rappelons que le produit matriciel n'est pas commutatif (en général $AB\neq BA$ même si les deux produits existent). Par conséquent, on écrit bien $(U_n-C)\times A$ et non $A\times(U_n-C)$ qui de plus n'existe pas. $A$ étant à droite dans chaque produit, on le factorise à droite.*

$$\begin{aligned}U_{n+1}-C &= 0,85U_n\times A-0,85C\times A\\ &= 0,85(U_n\times A-C\times A)\\ U_{n+1}-C &= 0,85(U_n-C)\times A\end{aligned}$$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$,

$$U_n=C+0,85^n(U_0-C)\times A^n.$$

Pour tout entier naturel $n$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ : « $U_n=C+0,85^n(U_0-C)\times A^n$ ».

• **Initialisation :** Si $n=0$,
$C+0,85^0(U_0-C)\times A^0=C+(U_0-C)\times I_3=C+U_0-C=U_0$, la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** Soit $n\geqslant 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
$\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc $U_n=C+0,85^n(U_0-C)\times A^n$.

$$
\begin{aligned}
U_{n+1} &= 0,85U_n \times A + B \\
&= 0,85\big(C + 0,85^n(U_0 - C) \times A^n\big) \times A + B \\
&= \big(0,85C + 0,85^{n+1}(U_0 - C) \times A^n\big) \times A + B \\
U_{n+1} &= 0,85C \times A + 0,85^{n+1}(U_0 - C) \times A^{n+1} + B
\end{aligned}
$$

D'après la définition de la matrice $C$ donnée à la question **2.**, $0,85C \times A = C - B$, donc :

$$
\begin{aligned}
U_{n+1} &= C - B + 0,85^{n+1}(U_0 - C) \times A^{n+1} + B \\
&= C + 0,85^{n+1}(U_0 - C) \times A^{n+1}
\end{aligned}
$$

Ainsi la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion :** La proposition $\mathcal{P}$ est vraie au rang 0 et se transmet héréditairement, donc on a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n$,

$$U_n = C + 0,85^n(U_0 - C) \times A^n$$

**4.** Rappelons que $C = \begin{pmatrix} \frac{74}{171} & \frac{40}{171} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et

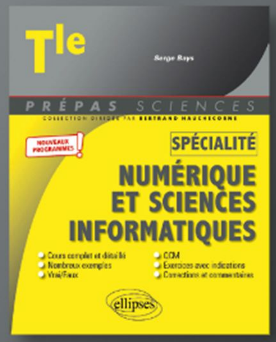
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

À l'aide de la calculatrice, on trouve en arrondissant les coefficients à $10^{-5}$ près : $U_{10} \approx \begin{pmatrix} 0,43273 & 0,23394 & 0,33333 \end{pmatrix} \approx C$. On peut conjecturer que $U_n$ tend vers $C$ quand $n$ devient grand. L'indice de pertinence est obtenu après un grand nombre de clics, donc on se place dans le cas où $n$ est grand et d'après la conjecture faite précédemment, $P(X_n = 1) \approx \frac{74}{171}$, $P(X_n = 2) \approx \frac{40}{171}$ et $P(X_n = 3) \approx \frac{1}{3}$, par conséquent la page d'indice de pertinence le plus grand est la 1, et celle de plus petit indice la 2. ▲

Corrigé

# INDEX

Dans la même collection



# PRÉPAS SCIENCES

Cet ouvrage est destiné aux élèves de **Terminale** qui ont choisi l'option **Mathématiques expertes**, c'est-à-dire ceux qui souhaitent **acquérir un très bon niveau** dans l'optique d'aborder dans les meilleures conditions les études supérieures dans une formation ayant une composante mathématique importante.

Tout en suivant strictement le programme de l'option **Mathématiques expertes** proposée aux élèves à la **rentrée 2020**, cet ouvrage l'appréhende différemment, en particulier, il aide à **comprendre les méthodes de raisonnement et de résolution** qui sont la clé de la réussite dans les études supérieures scientifiques.

Dans chaque chapitre, vous trouverez :

- **Le résumé de cours**
  Il vous permettra d'accéder à une connaissance synthétique des notions.
- **Les démonstrations**
  Elles vous initieront au raisonnement mathématique et développeront votre esprit logique.
- **Les méthodes**
  Elles vous inculqueront les techniques usuelles qu'il faut savoir mettre en place.
- **Le vrai/faux**
  Il testera votre compréhension du cours et vous évitera de tomber dans les erreurs classiques.
- **Les exercices, avec indications**
  Ils vous entraîneront tout au long de l'année pour aborder les devoirs en classe avec profit.
- **Les corrigés détaillés et commentés**
  Toujours rédigés avec soin, ils vous aideront à progresser dans la résolution des exercices.

Ainsi ce livre complètera celui utilisé en cours. Il permettra d'aborder avec aisance les interrogations, les devoirs surveillés et, pourquoi pas, de briller au grand oral du **baccalauréat**. Surtout, il offrira les meilleures conditions **pour réussir son entrée dans des études supérieures scientifiques**.

www.editions-ellipses.fr
9 782340 038462