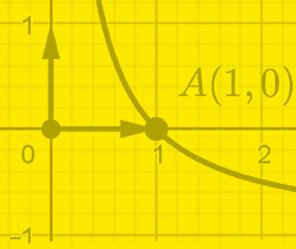


$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

$$1 - \sqrt{2ab}$$



MATHÉMATIQUES

2^{de}



Jean Wacksmann

Pour aller plus loin
en démontrant et en s'entraînant

2^e édition

**NOUVEAUX
PROGRAMMES**

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{2}} \geq \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

ellipses

2^{de}

Mathématiques

Pour aller plus loin
en démontrant et en s'entraînant

**NOUVEAUX
PROGRAMMES** !

2^e édition

Jean Wacksmann

Professeur agrégé honoraire de mathématiques au lycée Louis-le-Grand



Du même auteur chez le même éditeur

Spécialité Mathématiques - Première - Pour aller plus loin en démontrant et en s'entraînant - Nouveaux programmes, 672 pages, 2020.

Spécialité Mathématiques - Terminale - Pour aller plus loin en démontrant et en s'entraînant - Nouveaux programmes, 912 pages, 2021.

ISBN 9782340-056558

©Ellipses Édition Marketing S.A., 2021

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

La seconde édition de ce manuel s'inspire dans ses grandes lignes d'un cours de Seconde proposé ces dernières années à des élèves du lycée Louis-le-Grand à Paris, tout en étant conforme au nouveau programme de mathématiques de la classe de Seconde qui est appliqué depuis la rentrée de septembre 2018.

Dans un souci de partage et d'équité, ce manuel permet à tout(e) élève de Seconde, de disposer, et d'un cours, et d'exercices permettant d'améliorer et d'approfondir la compréhension des concepts mathématiques proposés à ce niveau. Ainsi elle ou il pourra acquérir les bases solides qui sont nécessaires à la poursuite d'études scientifiques.

Ce livre abrite un choix pédagogique : en effet il ne s'agit plus de s'en tenir à illustrer par des exemples de nombreuses propriétés, notamment algébriques, communément admises au collège et parfois même au lycée, mais d'en faire la démonstration.

Ainsi, certains développements, tout en restant conformes au programme, se situent nécessairement à sa marge.

Citons pour exemples :

- l'étude complète de la fonction valeur absolue. Cette dernière est évoquée dans le programme de Seconde et curieusement absente des programmes des classes suivantes. C'est pourquoi répartir l'assimilation de cette notion cruciale entre la Seconde et la Première semble pertinent ;

- l'arithmétique des entiers en présentant la notion de divisibilité dans l'ensemble des entiers naturels. Ce chapitre permet de préciser les quelques notions vues au collège à ce sujet et d'apporter un éclairage nouveau à l'aide d'algorithmes classiques comme par exemple le calcul du pgcd de deux entiers ou le test de primalité d'un entier.

Mentionnons aussi la géométrie :

- un chapitre rassemble quelques problèmes classiques dans le triangle. Les pré-requis pour les étudier reposent sur les connaissances de base en géométrie des classes de Quatrième et Troisième. Ce sont de "beaux" problèmes qu'un(e) élève intéressé(e) par les mathématiques va sans doute apprécier ;

- une introduction du calcul vectoriel dans le plan, suivie d'un cours de géométrie plane repérée, est proposée dans la perspective des mathématiques enseignées par la suite en filière scientifique.

En annexe, nous exposons une introduction au langage ensembliste et aux calculs des propositions pour éclairer et comprendre les quelques méthodes de raisonnement que nous rencontrons dans ce cours : par l'absurde, par contre-exemple, par contraposition, par disjonction . . .

Au dernier paragraphe de chaque chapitre, intitulé "Exercices corrigés", on trouve de nombreux exercices et problèmes d'approfondissement, exigeants certes, originaux pour certains, mais toujours accessibles à ce niveau. Il y en a en tout 176, accompagnés de corrigés très détaillés.

De plus chaque résultat démontré dans ce cours est complété par un ou plusieurs exemples.

L'accent est également mis sur la programmation en Python qui illustre de façon significative de nombreux résultats proposés dans ce livre.

Nous souhaitons que nos futur(e)s jeunes lectrices et lecteurs trouvent une satisfaction intellectuelle à approfondir les mathématiques qui leur sont enseignées depuis le collège. De plus ce manuel peut également assurer une transition solide avec le choix de la spécialité mathématiques de la classe de Première.

Pour terminer, je remercie chaleureusement Elisabeth, mon épouse, pour son aide précieuse lors de la relecture de ce livre.

Table des matières

Chapitre 1. Calcul dans \mathbb{R}	1
Chapitre 2. Inégalités dans \mathbb{R}	47
Chapitre 3. Arithmétique dans \mathbb{N}	89
Chapitre 4. La géométrie du collège	127
Chapitre 5. Fonctions numériques	157
Chapitre 6. Étude de quelques fonctions	217
Chapitre 7. Calcul vectoriel	297
Chapitre 8. Géométrie analytique	361
Chapitre 9. Droite et géométrie analytique	415
Chapitre 10. Trigonométrie	465
Chapitre 11. Probabilités	527
Chapitre 12. Annexe : Ensembles - Logique	563

CHAPITRE 1

Calcul dans \mathbb{R}

Dans ce chapitre nous proposons tout d'abord une classification des nombres dont certains sont connus depuis le Primaire.

Nous donnons ensuite une axiomatique simple autorisant des calculs basiques dans l'ensemble des nombres réels.

Enfin nous démontrons quelques théorèmes utilisés au collège mais rarement prouvés à ce niveau. Ces derniers vont vous permettre d'acquérir une meilleure compréhension de l'algèbre qui structure les calculs dans \mathbb{R} effectués en Seconde et dans les classes suivantes.

1.1 Classification des ensembles de nombres

1.1.1 Les entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels est noté \mathbb{N} . Enfant, vous avez commencé à compter avec des entiers naturels. Ce sont donc des nombres qui vous sont familiers depuis longtemps. Cependant la non finitude de l'ensemble des entiers naturels est plus complexe à appréhender.

Dans le langage mathématique, on note

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots; n \dots\}$$

Remarques. Nous en faisons cinq.

- Les \dots entre n et $\}$ traduisent que \mathbb{N} est infini.
- Pour traduire qu'un nombre n appartient à \mathbb{N} , nous utilisons le symbole d'appartenance \in . On note : $n \in \mathbb{N}$.
- \mathbb{N} privé de 0 est noté $\mathbb{N}^* = \{1; 2; \dots; n \dots\}$.

- Tout entier naturel n admet un successeur $n + 1 \in \mathbb{N}$.
- Tout entier naturel non nul n admet un précédent $n - 1 \in \mathbb{N}$.

1.1.2 Les entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs, noté \mathbb{Z} , est tel que

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

Remarques. Nous en donnons trois.

- \mathbb{Z} privé de 0 est noté \mathbb{Z}^* .
- Tout entier naturel est un entier relatif. On dit que \mathbb{N} est inclus dans \mathbb{Z} .

On note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

- La réciproque est fautive. Un contre-exemple est $-2 \in \mathbb{Z}$ et $-2 \notin \mathbb{N}$.

1.1.3 Les nombres décimaux

Exemples. Nous proposons trois exemples introductifs.

$$\triangleright 2,1 = \frac{21}{10} \text{ est un nombre décimal,}$$

$$\triangleright -5,64 = -\frac{564}{100} \text{ est un nombre décimal,}$$

$\triangleright 6, \underbrace{00 \dots 0}_{n-1 \text{ zeros}} 1 = \frac{6 \overbrace{00 \dots 0}^{n-1 \text{ zeros}} 1}{10^n}$, avec n entier naturel non nul, est un nombre décimal.

Définition. L'ensemble des nombres décimaux, noté \mathbb{D} , est l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

En notation ensembliste, nous pouvons écrire

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Remarques. Nous en avons deux.

- Tout entier naturel ou relatif est un nombre décimal.
- En effet, pour tout $a \in \mathbb{N}$ ou $a \in \mathbb{Z}$, nous avons $a = \frac{a}{10^0}$.
- Nous retiendrons que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

1.1.4 Les nombres rationnels

Définition. L'ensemble des nombres rationnels, noté \mathbb{Q} , est l'ensemble des nombres (des fractions) de la forme $\frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

En notation ensembliste, nous pouvons écrire

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Remarques. Nous en proposons cinq.

- Nous pouvons définir un rationnel $\frac{a}{b}$, en restreignant $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
- Tout nombre décimal de la forme $\frac{a}{10^n}$ est un nombre rationnel $\frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b = 10^n$.

- Nous retiendrons que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
- La réciproque est fautive. Nous prenons comme contre-exemple $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

- Un nombre rationnel a une partie décimale illimitée périodique.

Par exemple, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &\approx 0, \underbrace{333333333333333333333333 \dots}_{\text{partie décimale illimitée de période 1}} \\ \frac{7}{11} &\approx 0, \underbrace{6363636363636363636363 \dots}_{\text{partie décimale illimitée de période 2}} \\ \frac{17}{13} &\approx 1, \underbrace{307692307692307692307692 \dots}_{\text{partie décimale illimitée de période 6}} \end{aligned}$$

1.1.5 Les nombres irrationnels

Définition. L'ensemble de nombres irrationnels est l'ensemble des nombres qui ne sont pas rationnels.

Par exemple $\sqrt{2}$, π , $\sqrt{5} + \sqrt{13}$, $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ sont des nombres irrationnels.

Remarque. Un nombre irrationnel a une partie décimale illimitée non périodique.

Par exemple, nous avons

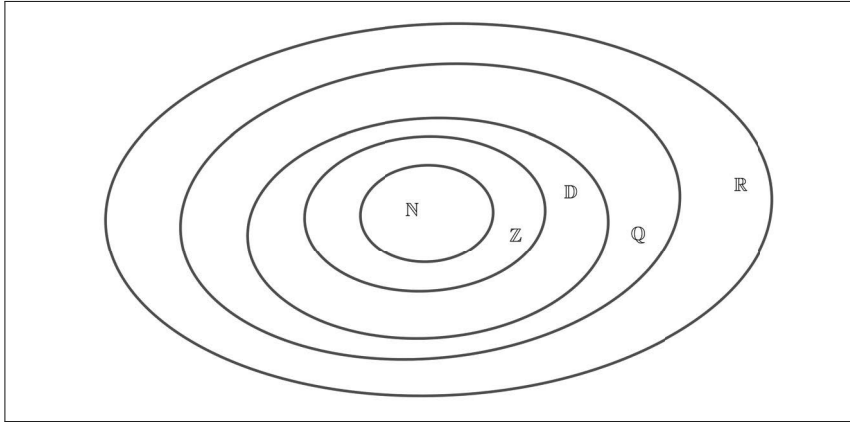
$$\begin{aligned} \sqrt{2} &\approx 1, \underbrace{4142135623730950488016887 \dots}_{\text{partie décimale illimitée non périodique}} \\ \pi &\approx 3, \underbrace{1415926535897932384626433 \dots}_{\text{partie décimale illimitée non périodique}} \end{aligned}$$

1.1.6 Les nombres réels

Définition. L'ensemble des nombres réels, noté \mathbb{R} est la réunion de l'ensemble des nombres rationnels avec l'ensemble des nombres irrationnels.

Remarques. Nous en proposons deux.

- On peut noter $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels.
- Nous retiendrons que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Exemple (le nombre d'or). Le nombre d'or, noté ϕ , est tel que $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Nous montrons que ϕ est irrationnel.

Nous raisonnons par l'absurde¹ en supposant que ϕ est rationnel.

Posons $\phi = \frac{p}{q}$, avec p et q entiers naturels non nuls puisque $\phi > 0$.

Nous avons $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{p}{q}$. Nous en déduisons

$$\sqrt{5} = \frac{2p}{q} - 1 = \frac{2p - q}{q}.$$

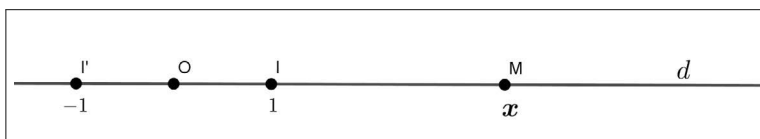
Nous savons que $2p - q \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Il en résulte que $\frac{2p - q}{q} \in \mathbb{Q}$, ce qui est contradictoire avec le fait que $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel.

Nous en concluons que le nombre d'or ϕ est irrationnel.

1.1.7 Représentation géométrique d'un nombre réel

Soit d une droite graduée par un repère $(O; I)$. À chaque point M de cette droite, nous associons un réel x unique qui est l'abscisse du point M relativement au repère $(O; I)$.



1. Annexe § 5.1

1.1.8 Réels positifs - Réels négatifs

À chaque point M de la demi-droite $[O; I)$ est associé un réel positif ou nul.

On note \mathbb{R}^+ l'ensemble des réels positifs ou nuls.

En notation ensembliste, nous pouvons écrire $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$.

Soit I' le point de d d'abscisse -1 .

À chaque point M de la demi-droite $(I'; O]$ est associé un réel négatif ou nul.

On note \mathbb{R}^- l'ensemble des réels négatifs ou nuls.

En notation ensembliste, nous pouvons écrire $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$.

À chaque point M de la demi-droite ouverte $]O; I)$ est associé un réel positif strictement.

On note \mathbb{R}^{+*} l'ensemble des réels strictement positifs.

En notation ensembliste, nous pouvons écrire $\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$.

À chaque point M de la demi-droite ouverte $(I'; O[$ est associé un réel négatif strictement.

On note \mathbb{R}^{-*} l'ensemble des réels strictement négatifs.

En notation ensembliste, nous pouvons écrire $\mathbb{R}^{-*} = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$.

1.2 Addition dans \mathbb{R}

1.2.1 Axiomatique de l'addition dans l'ensemble des nombres réels

Axiome. Pour tous les réels a, b et c , nous disposons pour structurer l'addition dans \mathbb{R} des axiomes suivants :

1. $a + b \in \mathbb{R}$.
2. $a + b = b + a$. On dit que $+$ est commutative.
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$. On dit que $+$ est associative.
4. $a + 0 = 0 + a = a$. On dit que 0 est neutre pour $+$ dans \mathbb{R} .
5. Chaque réel a admet un unique opposé $-a$ tel que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Remarques. Nous en faisons trois.

• \mathbb{R} muni de son addition $+$, noté $(\mathbb{R}, +)$ et satisfaisant aux propriétés (1) à (5) est un groupe commutatif.

- $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe commutatif car la propriété (5) est en défaut.
- Disposant de cette axiomatique de l'addition des réels, nous pouvons commencer à démontrer les règles de calcul usuelles que vous avez utilisées au collège.

La proposition qui suit en est une première illustration.

Proposition. *Pour tout réel a , on a : $-(-a) = a$.*

Démonstration. Dans l'axiome 5, nous remplaçons a par $-a$.

Nous obtenons $(-a) + (-(-a)) = (-(-a)) + (-a) = 0$.

Or, le réel a étant donné, par unicité de l'opposé $-a$, nous obtenons

$$-(-a) = a.$$

1.2.2 Soustraction dans \mathbb{R}

Définition. *Soient a et b deux réels. Par définition, nous avons*

$$a - b = a + (-b).$$

Remarque. La soustraction est ni commutative, ni associative.

1.2.3 Égalité dans \mathbb{R}

Définition. *Soient a et b deux réels. Nous disposons de la définition*

$$a = b \text{ si et seulement si } a - b = 0.$$

Exemple (à nouveau le nombre d'or). Nous savons que $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Nous vérifions que

$$\phi^2 = \phi + 1.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \phi^2 - \phi - 1 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1, \\ &= \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi justifié que : $\phi^2 = \phi + 1$.

Remarque. Pour prouver une égalité dans \mathbb{R} , nous pouvons choisir une des méthodes suivantes :

▷ Partir du membre de gauche pour obtenir après calculs le membre de droite.

▷ Partir du membre de droite pour obtenir après calculs le membre de gauche.

▷ Calculer la différence des deux membres pour obtenir après calculs la valeur 0.

Proposition. Soient a , b et c trois réels. Nous disposons des propriétés suivantes :

- $a = b$, alors $b = a$. On dit que la relation $=$ est symétrique.
- si $a = b$ et $b = c$, alors $a = c$. On dit que la relation $=$ est transitive.
- $a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$. On dit que la relation $=$ est compatible avec l'addition.

Démonstration. • Si $a = b$, alors $a - b = 0$ donc $b - a = 0$, ce qui justifie

$$b = a.$$

• Si $a = b$ et $b = c$, alors on a $a - b = 0$ et $b - c = 0$, donc $a - b + b - c = 0$, ce qui donne

$$a - c = 0, \text{ soit } a = c.$$

• Si $a + c = b + c$, alors $a + c - (b + c) = 0$, soit $a - b = 0$, donc

$$a = b.$$

Réciproquement, supposons que $a = b$.

Nous avons $a + c - (b + c) = a - b = 0$, ce qui prouve que

$$a + c = b + c$$

Proposition. Soient a et b deux réels donnés. L'équation $x + a = b$ admet pour unique solution $x = b - a$.

Démonstration. L'égalité $x + a = b$ équivaut à $x + a + (-a) = b + (-a)$, ce qui est équivalent à

$$x = b - a.$$

1.3 Multiplication dans \mathbb{R}

1.3.1 Axiomatique de la multiplication dans l'ensemble des nombres réels

Axiome. Pour tous les réels a , b et c , nous disposons pour structurer la multiplication dans \mathbb{R} des axiomes suivants :

1. $ab \in \mathbb{R}$.
2. $ab = ba$. On dit que \times est commutative.
3. $(ab)c = a(bc)$. On dit que \times est associative.
4. $a \times 1 = 1 \times a = a$. On dit que 1 est neutre pour \times dans \mathbb{R} .
5. Chaque réel $a \neq 0$ admet un unique inverse $\frac{1}{a}$ tel que : $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$.

Définition (du quotient de deux réels). Pour tous les réels a et $b \neq 0$, le quotient de a par b est défini par

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

1.3.2 Axiome de la distributivité de la multiplication sur l'addition

Axiome. Pour tous les réels a , b et c , nous disposons de l'égalité

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Remarques. Nous en faisons deux.

- Si nous utilisons l'égalité ci-dessus de la gauche vers la droite, alors nous développons.
- Si nous utilisons l'égalité ci-dessus de la droite vers la gauche, alors nous factorisons.

Proposition (identités carrés). Pour tous les réels a et b , nous avons

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Démonstration. Ces trois identités remarquables sont connues depuis le collège. Cependant, nous en donnons une preuve puisque cette dernière résulte essentiellement de l'axiome de distributivité.

Soient a et b deux réels.

- Nous avons

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2,$$

ce qui donne

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

- Il en résulte

$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

- Nous avons

$$(a - b)(a + b) = (a - b)a + (a - b)b = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Proposition (identités cubes). *Pour tous les réels a et b , nous disposons des quatre identités suivantes :*

- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$,
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Démonstration. Soient a et b deux réels.

- Nous avons

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3,$$

ce qui donne

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

- Il en résulte

$$(a - b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

- Pour factoriser $a^3 - b^3$, nous partons du développement de $(a - b)^3$.

Il vient

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a - b)^3 + 3a^2b - 3ab^2 = (a - b)^3 + 3ab(a - b), \\ &= (a - b)((a - b)^2 + 3ab), \\ &= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab), \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

- Pour la dernière factorisation, nous obtenons

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= a^3 - (-b)^3, \\ &= (a - (-b))(a^2 + a(-b) + (-b)^2), \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

1.3.3 Produit nul

Proposition (multiplication par 0). *Pour tout réel a , on a : $a \times 0 = 0$.*

Démonstration. Considérons deux réels a et b quelconques.

Nous avons

$$ab = a(b + 0) = ab + a0.$$

Nous en déduisons

$$0 = ab - ab = a0.$$

Proposition (nullité d'un produit). *Soient a et b deux réels. Nous disposons de la propriété suivante*

$$ab = 0 \text{ si et seulement si } a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Démonstration. Si $a = 0$ ou $b = 0$, de la proposition précédente, il résulte que $ab = 0$.

Réciproquement, supposons par l'absurde² que $ab = 0$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

D'une part, nous avons

$$\frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a} \times 0 = 0.$$

D'autre part, il vient

$$\frac{1}{a}(ab) = \left(\frac{1}{a} \times a\right)b = 1b = b.$$

Nous en déduisons que $b = 0$, ce qui est contradictoire avec $b \neq 0$.

Par conséquent, si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Proposition (trois propriétés de la multiplication). *Soient a , b et c trois réels. Nous disposons des trois propriétés suivantes :*

1. $(-a)(-b) = ab$.
2. $a(-b) = (-a)b = -ab$.
3. $a(b - c) = ab - ac$.

2. Annexe § 5.1

Démonstration. Soient a , b et c trois réels.

1. Nous avons

$$ab - (-a)(-b) = ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a \times 0 = 0.$$

Il en résulte que $(-a)(-b) = ab$.

2. De la même façon, nous avons

$$a(-b) - (-ab) = a(-b) + ab = a((-b) + b) = a \times 0 = 0.$$

Il en résulte que $a(-b) = -ab$.

Nous prouvons de même que $(-a)b = -ab$.

3. Pour cette dernière proposition, il vient

$$a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab - ac.$$

Proposition (compatibilité de la multiplication avec l'égalité). Soient a , b et $c \neq 0$ trois réels. Nous avons

$$ac = bc \text{ si et seulement si } a = b.$$

Démonstration. Si $ac = bc$, alors $ac - bc = 0$, soit $(a - b)c = 0$.

Puisque $c \neq 0$, nous en déduisons que $a - b = 0$ donc $a = b$.

Réciproquement, nous supposons $a = b$.

Il vient, $ac - bc = (a - b)c = 0 \times c = 0$, ce qui prouve que $ac = bc$.

Remarque. La réciproque est vraie lorsque $c = 0$.

Proposition (équation $ax = b$). Soient a et b deux réels et S l'ensemble des solutions de l'équation

$$ax = b.$$

- Si $a \neq 0$, alors l'équation $ax = b$ admet une unique solution

$$x = \frac{b}{a}, \text{ c'est-à-dire } S = \left\{ \frac{b}{a} \right\}.$$

- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors l'équation $ax = b$ n'a pas de solution, c'est-à-dire

$$S = \emptyset.$$

- Si $a = 0$ et $b = 0$, alors l'équation $ax = b$ a une infinité de solutions, c'est-à-dire $S = \mathbb{R}$.

Démonstration. Soient a et b deux réels.

1^{er} cas : $a \neq 0$.

L'équation

$$ax = b \text{ équivaut à } \frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a} \times b,$$

ce qui est équivalent à

$$\left(\frac{1}{a} \times a\right)x = \frac{b}{a}, \text{ c'est-à-dire } 1x = \frac{b}{a}, \text{ soit } x = \frac{b}{a}.$$

2^e cas : $a = 0$ et $b \neq 0$.

L'équation

$$ax = b \text{ équivaut à } 0x = b,$$

ce qui est impossible car $b \neq 0$.

3^e cas : $a = 0$ et $b = 0$.

L'équation

$$ax = b \text{ équivaut à } 0x = 0,$$

ce qui justifie que tout réel x est solution de cette équation.

Exemple (une équation avec un paramètre). Soit a un réel donné.

Selon les valeurs de a , nous résolvons dans \mathbb{R} l'équation $ax - 1 = 2x$.

Nous désignons par (E) cette équation.

Nous avons

$$(E) \Leftrightarrow (a - 2)x = 1.$$

Nous procédons par disjonction³, en distinguant deux cas.

1^e cas : $a - 2 \neq 0$, soit $a \neq 2$.

Nous obtenons dans ce cas, $x = \frac{1}{a - 2}$.

En désignant par S l'ensemble des solutions de (E) , nous en concluons

$$S = \left\{ \frac{1}{a - 2} \right\}.$$

2^e cas : $a - 2 = 0$, soit $a = 2$.

Nous avons $(E) \Leftrightarrow 0x = 1$.

Dans ce cas, nous en concluons

$$S = \emptyset.$$

3. Annexe § 5.4

1.4 Puissances d'un nombre réel

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Nous avons

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}} \text{ et } a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Remarques. Nous en faisons quatre.

- Pour tout réel a non nul, nous avons $a^1 = a$ et $a^{-1} = \frac{1}{a}$.
- Pour tout réel a non nul, nous posons par convention $a^0 = 1$.
- Si $a = 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0^n = 0$ mais 0^0 n'est pas défini.
- Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ termes}} = n \times a.$$

1.5 Propriétés de calcul sur les exposants

Proposition. Pour tous les réels a et b non nuls et pour tous les entiers relatifs m et n , nous disposons des propriétés suivantes :

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$.
2. $(a^m)^n = a^{m \times n}$.
3. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$.
4. $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$.
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Démonstration. Si m et n sont deux entiers naturels, les propriétés 1, 2, 3 et 4 se démontrent par récurrence.

Puisque le principe de récurrence est enseigné en Terminale (et parfois en Première), il dépasse le cadre de ce livre. Nous admettons donc ces quatre propriétés.

Par contre, ces dernières étant admises, nous pouvons justifier les propriétés 5 et 6.

Nous donnons ci-dessous quelques-unes des preuves annoncées selon la nature des entiers m et n . Les autres cas sont à faire en exercice.

- Preuve de 5, lorsque $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = a^m \times a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}.$$

- Preuve de 5, avec $m < 0$ et $n \geq 0$.

Posons $p = -m$. Ainsi, on a $p > 0$.

Il en résulte

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{-p}}{a^n} = \frac{1}{a^p} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{p+n}} = a^{-p-n} = a^{m-n}.$$

- Preuve de 6, lorsque $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(a \times \frac{1}{b}\right)^n = a^n \times \left(\frac{1}{b}\right)^n = a^n \times \frac{1}{b^n} = \frac{a^n}{b^n}.$$

- Preuve de 6, avec $n < 0$.

Posons $p = -n$. Ainsi, on a $p > 0$. Nous en déduisons

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \frac{1}{\frac{a^p}{b^p}} = \frac{b^p}{a^p} = \frac{b^{-n}}{a^{-n}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Proposition (puissance de l'opposé). *Soient a un réel non nul et n un entier naturel. Nous avons*

$$(-a)^2 = a^2.$$

et plus généralement

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -a^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Démonstration. Soit a un réel non nul.

▷ Nous avons

$$(-a)^2 = (-a)(-a) = a \times a = a^2.$$

▷ Soit n entier naturel. Nous distinguons deux cas selon la parité de n .

1^{er} cas : n est pair, c'est-à-dire $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Il vient

$$(-a)^n = (-a)^{2k} = ((-a)^2)^k = (a^2)^k = a^{2k} = a^n.$$

2^e cas : n est impair, c'est-à-dire $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Il vient

$$(-a)^n = (-a)^{2k+1} = a^{2k} \times (-a) = -a^{2k+1} = -a^n.$$

Remarque. En particulier, pour $a = 1$, il vient

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

1.6 Racine carrée d'un réel positif

Définition. Soit a un réel positif. La racine carrée de a , notée \sqrt{a} est l'unique réel positif tel que $(\sqrt{a})^2 = a$.

Remarques. Nous en donnons quatre.

- $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$.
- En général, nous avons $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Un contre-exemple est $a = 2$ et $b = 14$.
- Le réel \sqrt{a} est défini si et seulement si $a \geq 0$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, on a $(-\sqrt{a})^2 = a$.

1.6.1 Égalité de deux réels strictement positifs

Proposition. Soient u et v deux réels strictement positifs. Nous disposons de l'équivalence suivante

$$u = v \Leftrightarrow u^2 = v^2.$$

Démonstration. Soient deux réels $u > 0$ et $v > 0$.

Si $u = v$, alors nous avons

$$u^2 - v^2 = (u - v)(u + v) = 0 \times (u + v) = 0,$$

ce qui implique $u^2 = v^2$.

Réciproquement, si $u^2 = v^2$, alors nous avons

$$u^2 - v^2 = 0, \text{ soit } (u - v)(u + v) = 0,$$

ce qui entraîne, puisque $u + v > 0$,

$$u - v = 0, \text{ c'est-à-dire } u = v.$$

Remarques. Nous en faisons deux.

- Cette proposition fournit une méthode pour justifier l'égalité de deux réels positifs.

- Cette proposition reste vraie lorsque $u \geq 0$ et $v \geq 0$.

Exemples. Nous en proposons deux.

1^{er} exemple. Nous montrons que

$$3 + \sqrt{2} = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}.$$

Nous avons

$$(3 + \sqrt{2})^2 = 9 + 6\sqrt{2} + 2 = 11 + 6\sqrt{2} = (\sqrt{11 + 6\sqrt{2}})^2.$$

Puisque $3 + \sqrt{2} > 0$ et $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} > 0$, nous en concluons

$$3 + \sqrt{2} = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}.$$

2^e exemple. Nous justifions l'égalité

$$\sqrt{5 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{10 + 2\sqrt{17}}.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}\right)^2 &= 5 - 2\sqrt{2} + 2\left(\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}\right) \\ &\quad + 5 + 2\sqrt{2}, \\ &= 10 + 2\sqrt{25 - (2\sqrt{2})^2}, \\ &= 10 + 2\sqrt{17}, \end{aligned}$$

ce qui prouve, puisque $\sqrt{5 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{2}} > 0$ et $\sqrt{10 + 2\sqrt{17}} > 0$,

$$\sqrt{5 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{10 + 2\sqrt{17}}.$$

1.6.2 Propriétés de calcul sur les racines carrées

Proposition. Soient a et b deux réels positifs et n un entier naturel. Nous disposons des propriétés suivantes :

1. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
2. $\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$, avec $b > 0$.
3. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, avec $b > 0$.
4. $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$.

Démonstration. Soient $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

1. Posons $\alpha = \sqrt{ab}$, $\beta = \sqrt{a}$ et $\gamma = \sqrt{b}$.

Nous avons

$$\alpha^2 = ab, \beta^2 = a \text{ et } \gamma^2 = b.$$

Nous en déduisons

$$\alpha^2 = \beta^2 \gamma^2 = (\beta\gamma)^2.$$

Or nous savons que $\alpha \geq 0$ et $\beta\gamma \geq 0$.

De la proposition précédente, il résulte que

$$\alpha = \beta\gamma.$$

L'égalité $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est ainsi justifiée.

2. Soit $b > 0$. Nous avons

$$\sqrt{b} \times \sqrt{\frac{1}{b}} = \sqrt{b \times \frac{1}{b}} = \sqrt{1} = 1.$$

Nous en déduisons

$$\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}.$$

3. Pour tous les réels $a \geq 0$ et $b > 0$, nous avons

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \times \frac{1}{b}} = \sqrt{a} \times \sqrt{\frac{1}{b}} = \sqrt{a} \times \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

4. Cette preuve appelle un raisonnement par récurrence. Nous admettons que cette propriété est vraie, pour tout entier naturel n . Le cas particulier $n = 2$ est justifié dans la proposition qui suit.

Proposition (valeur absolue d'un nombre réel). *Soit a un réel quelconque. Nous avons*

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}.$$

Démonstration. **1^{er} cas :** $a \geq 0$. Il vient

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a.$$

2^e cas : $a < 0$. Dans ce cas, nous avons $-a > 0$ et nous savons que

$$(-a)^2 = a^2.$$

Il en résulte que

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = (\sqrt{-a})^2 = -a.$$

Définition (de la valeur absolue). Soit a un réel. La valeur absolue de a , notée $|a|$, est le réel positif défini par

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

Ainsi nous retiendrons que, pour tout réel a ,

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Exemple. Nous simplifions $\sqrt{(2 - \pi)^2}$, en remarquant que

$$2 - \pi < 0.$$

Il en résulte

$$\sqrt{(2 - \pi)^2} = |2 - \pi| = -(2 - \pi) = \pi - 2.$$

1.6.3 Équation du second degré $x^2 = a$

Proposition. Soit a un réel donné. Dans \mathbb{R} , l'équation $x^2 = a$ admet

- si $a > 0$, deux solutions distinctes $x = -\sqrt{a}$ ou $x = \sqrt{a}$,
- si $a = 0$, une solution $x = 0$,
- si $a < 0$, aucune solution.

Démonstration. 1^{er} cas : $a > 0$. Nous avons

$$x^2 = a \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{a} = 0 \text{ ou } x - \sqrt{a} = 0.$$

Nous en concluons que cette équation admet deux solutions distinctes

$$x = -\sqrt{a} \text{ ou } x = \sqrt{a}.$$

2^e cas : $a = 0$.

L'équation $x^2 = 0$ équivaut à $x = 0$.

3^e cas : $a < 0$.

Nous savons que, pour tout réel x , $x^2 \geq 0$. Il en résulte que dans ce cas l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.

Remarques. Nous en faisons cinq.

- En désignant par S l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = a$, nous disposons du tableau suivant :

$x^2 = a$	ensemble des solutions
$a > 0$	$S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \emptyset$

- Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ admet dans \mathbb{R}^+ une unique solution $x = \sqrt{a}$.
- Soient $a \neq 0$ et b deux réels donnés. La résolution de l'équation du second degré $ax^2 + b = 0$ se ramène à la précédente puisque cette dernière est équivalente à $x^2 = -\frac{b}{a}$.
- Soient $a \neq 0$ et b deux réels donnés. L'équation du second degré $ax^2 + bx = 0$ est connue depuis le collège puisque cette dernière est équivalente à $x(ax + b) = 0$ et a donc pour solutions $x = 0$ ou $x = -\frac{b}{a}$.
- Le cas général de la résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \neq 0$, b et c sont trois réels donnés, sera traité dans la suite du livre à partir d'exemples. Nous abordons une méthode de résolution de cette équation dans les exemples qui suivent (équation 5).

Exemples. Nous résolvons dans \mathbb{R} les cinq équations du second degré qui suivent.

- (1) $2x^2 = 3$,
- (2) $x^2 + 1 = 0$,
- (3) $x^3 - 3x = 0$,
- (4) $(2x - 1)^2 = 16$,
- (5) $x^2 - 2x - 4 = 0$.

Pour résoudre chacune de ces équations, nous utilisons le symbole \Leftrightarrow d'équivalence⁴.

▷ Équation (1).

$$(1) \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2},$$

$$(1) \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } x = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Conclusion. $S_{(1)} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right\} = \left\{-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$.

4. Annexe § 3.7

▷ Équation (2).

$$(2) \Leftrightarrow x^2 = -1.$$

Conclusion. $S_{(2)} = \emptyset$.

▷ Équation (3).

$$(3) \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0,$$

$$(3) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 - 3 = 0,$$

$$(3) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}.$$

Conclusion. $S_{(3)} = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$.

▷ Équation (4).

Pour résoudre cette équation, nous pourrions factoriser une différence de deux carrés comme en classe de Troisième. Nous optons pour une autre méthode (plus rapide) qui utilise la résolution proposée dans la proposition précédente.

Nous avons

$$(4) \Leftrightarrow 2x - 1 = 4 \text{ ou } 2x - 1 = -4,$$

$$(4) \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}.$$

Conclusion. $S_{(4)} = \{-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$.

▷ Équation (5).

Pour résoudre l'équation (5), nous transformons son membre de gauche $x^2 - 2x - 4$ sous la forme d'une addition ou d'une soustraction de deux carrés.

On dit dans ce cas que le trinôme $x^2 - 2x - 4$ est mis sous sa *forme canonique*.

Pour cela, nous observons que $x^2 - 2x$ est constitué des deux premiers termes du développement $(x - 1)^2$.

Nous obtenons

$$x^2 - 2x - 4 = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 4 = (x - 1)^2 - 5.$$

Nous en déduisons

$$(5) \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 5,$$

$$(5) \Leftrightarrow x - 1 = -\sqrt{5} \text{ ou } x - 1 = \sqrt{5},$$

$$(5) \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{5} \text{ ou } x = 1 + \sqrt{5}.$$

Conclusion. $S_{(5)} = \{1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\}$.

1.7 Propriétés de calcul sur les quotients

Proposition (quotient nul). *Soient a et b deux réels avec $b \neq 0$. Nous disposons de l'équivalence*

$$\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Démonstration. Si $\frac{a}{b} = 0$, alors $a \times \frac{1}{b} = 0$.

Puisque $\frac{1}{b} \neq 0$, nous en déduisons que $a = 0$.

Réciproquement, si $a = 0$, alors $\frac{a}{b} = 0 \times \frac{1}{b} = 0$.

Exemple. Nous résolvons l'équation $\frac{x^3 - x}{x - 1} = 0$.

Nous observons que le quotient $\frac{x^3 - x}{x - 1}$ est défini si et seulement si $x - 1 \neq 0$, soit pour $x \neq 1$.

Ainsi pour $x \neq 1$, nous avons

$$\frac{x^3 - x}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 1.$$

Or nous savons que $x \neq 1$.

Il en résulte que seuls les réels $x = 0$ ou $x = -1$ sont solutions de cette équation.

Proposition (produit en croix). *Soient a , b , c et d quatre réels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$. Nous disposons de l'équivalence*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

Démonstration. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = 0$, ce qui donne

$$\frac{ad - bc}{bd} = 0.$$

Nous en déduisons que $ad - bc = 0$, c'est-à-dire $ad = bc$.

Réciproquement, si $ad = bc$, alors nous obtenons

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}.$$

Exemple. Nous résolvons l'équation

$$\frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nous observons que cette équation est définie pour $x \neq -1$.

Elle est équivalente à

$$2(2x - 1) = \sqrt{2}(x + 1) \Leftrightarrow 4x - x\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow (4 - \sqrt{2})x = \sqrt{2} + 2.$$

Finalement l'équation $\frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a pour unique solution

$$x = \frac{\sqrt{2} + 2}{4 - \sqrt{2}}.$$

Nous pouvons rendre rationnel le numérateur de cette solution.

Nous obtenons

$$x = \frac{(\sqrt{2} + 2)(4 + \sqrt{2})}{(4 - \sqrt{2})(4 + \sqrt{2})} = \frac{5 + 3\sqrt{2}}{7}.$$

Conclusion. $S = \left\{ \frac{5 + 3\sqrt{2}}{7} \right\}$.

Proposition (addition et multiplication de deux quotients). *Soient a, b, c, d et k cinq réels tels que b, d et k non nuls. Nous disposons des propriétés suivantes :*

1. $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$.
2. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$ et $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.
3. $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$.
4. $k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$ et $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Démonstration. 1. Soient a, b et k trois réels tels que $b \neq 0$ et $k \neq 0$.

Considérons l'équation $(kb)x = ka$.

D'une part, puisque $kb \neq 0$, nous obtenons $x = \frac{ka}{kb}$.

D'autre part, puisque $k \neq 0$, l'équation $(kb)x = ka$ est équivalente à $bx = a$.

Ceci donne $x = \frac{a}{b}$.

Par unicité de la solution de cette équation, nous en concluons :

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}.$$

2. Soient a, b, c et d quatre réels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

▷ Nous avons

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = a \times \frac{1}{b} + c \times \frac{1}{b} = \frac{1}{b}(a + c) = \frac{a + c}{b}.$$

▷ De plus, en appliquant les deux propriétés précédentes, nous obtenons

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

3. Soient deux réels $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Nous avons

$$\left(\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}\right) \times ab = \frac{1}{a} \times \left(\frac{1}{b} \times ab\right) = \frac{1}{a} \times \frac{ab}{b} = \frac{1}{a} \times a = 1.$$

Nous en déduisons

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}.$$

4. Soient k, a, b, c et d cinq réels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

▷ Nous avons

$$\frac{ka}{b} = (ka) \times \frac{1}{b} = k \times \left(a \times \frac{1}{b}\right) = k \times \frac{a}{b}.$$

▷ En appliquant la propriété 3, il vient

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = a \times \frac{1}{b} \times c \times \frac{1}{d} = ac \times \frac{1}{bd} = \frac{ac}{bd}.$$

Proposition (inverse d'un quotient et quotient de deux quotients). *Soient a, b, c et d quatre réels non nuls. Nous avons*

$$1. \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}.$$

$$2. \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Démonstration. 1. Pour tous les réels a et b non nuls, nous avons $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$.

Il en résulte que

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}}.$$

2. Pour tous réels a, b, c, d non nuls, nous avons

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Proposition (opposé d'un quotient et quotient de deux opposés). Soient a et b deux réels tels que $b \neq 0$. Nous disposons des deux propriétés suivantes :

1. $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.
2. $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.

Démonstration. 1. Pour tous les réels a et $b \neq 0$, nous savons que

$$(-a)(-b) = ab.$$

En appliquant la propriété du produit en croix, il vient

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

De plus, nous avons

$$\frac{-a}{b} + \frac{a}{b} = \frac{1}{b}((-a) + a) = \frac{1}{b} \times 0 = 0.$$

Cela justifie

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}.$$

2. Pour tous les réels a et $b \neq 0$, nous savons que $(-a)b = a(-b)$.

En appliquant à nouveau la propriété du produit en croix, il vient

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}.$$

1.8 Exercices corrigés

Exercice 1. Pavage d'un rectangle

Lorsqu'un rectangle de longueur L et de largeur l peut être recouvert exactement par des carrés de même côté c , on dit que ce rectangle est pavé par des carrés.

1. On suppose que L et l sont des entiers multiples de c . Justifier que dans ce cas, il est possible de paver ce rectangle.

2. On suppose que $L = \sqrt{2}$ et $l = 1$. Peut-on paver ce rectangle ?

3. Montrer que ce rectangle peut être pavé par des carrés de côté c si et seulement si $\frac{L}{l} \in \mathbb{Q}$.

Solution

1. Puisque L et l sont des multiples de c , il existe deux entiers naturels k et k' non nuls tels que $L = k \times c$ et $l = k' \times c$.

Nous en déduisons qu'en plaçant k carrés sur la longueur et k' carrés sur la largeur, le rectangle est pavé.

2. Supposons par l'absurde que ce rectangle est pavé.

Dans ce cas, il existe deux entiers p et q non nuls tels que $\sqrt{2} = p \times c$ et $1 = q \times c$.

Nous en déduisons que $\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{pc}{qc}$, ce qui donne $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Or nous savons que $\sqrt{2}$ est irrationnel, ce qui est contradictoire.

Nous en concluons qu'un rectangle de longueur $\sqrt{2}$ et de largeur 1, ne peut pas être pavé par des carrés de même côté.

3. Nous supposons que le rectangle puisse être pavé par des carrés de côté c . Dans ce cas, il existe deux entiers non nuls p et q tels que $L = p \times c$ et $l = q \times c$.

Nous en déduisons que $\frac{L}{l} = \frac{p \times c}{q \times c} = \frac{p}{q}$, ce qui justifie que $\frac{L}{l} \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, supposons que $\frac{L}{l} \in \mathbb{Q}$.

Nous en déduisons qu'il existe deux entiers non nuls p et q tels que $\frac{L}{l} = \frac{p}{q}$, ce qui implique

$$\frac{L}{p} = \frac{l}{q}.$$

Posons $c = \frac{L}{p} = \frac{l}{q}$.

Nous obtenons

$$L = p \times c \text{ et } L = q \times c.$$

Par suite, il est possible de paver ce rectangle avec des carrés de côté c .

Exercice 2. Sans calculatrice

Sans l'aide de votre calculatrice calculer les réels suivants :

1. $A = 95975579380^2 - 95975579379 \times 95975579381$.

2. $B = 123456789^2 - 123456788^2$.

3. $C = \sqrt{6666666^2 - 4444444^2 - 2222222^2}$

4. $D = \sqrt{111111111 \times 1000000005 + 1}$.

Solution

1. Posons $x = 95975579380$.

Nous observons que

$$A = x^2 - (x-1)(x+1) = x^2 - (x^2 - 1) = 1.$$

2. Posons $x = 123456789$.

Nous avons

$$B = x^2 - (x-1)^2 = (x - (x-1))(x + (x-1)) = 2x - 1.$$

Il en résulte

$$B = 2 \times 123456789 - 1 = 246913577.$$

3. Posons $x = 1111111$.

Sachant que $x > 0$, nous obtenons

$$C = \sqrt{(6x)^2 - (4x)^2 - (2x)^2} = \sqrt{16x^2} = 4x.$$

Nous en concluons $C = 4444444$.

4. Nous observons que

$$D = \sqrt{111111111 \times (9 \times 111111111 + 6) + 1}.$$

Nous posons $x = 111111111$.

Il vient

$$D = \sqrt{x(9x + 6) + 1} = \sqrt{9x^2 + 6x + 1} = \sqrt{(3x + 1)^2},$$

ce qui donne, puisque $3x + 1 > 0$,

$$D = 3x + 1 = 3 \times 111111111 + 1 = 333333334.$$

Exercice 3. Concours Kangourou

Soient a , b et c trois réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Que vaut $a^4 + (ab + c)^2 + (ac - b)^2$?

Solution

Nous avons

$$\begin{aligned} a^4 + (ab + c)^2 + (ac - b)^2 &= a^4 + a^2b^2 + 2abc + c^2 + a^2c^2 - 2abc + b^2, \\ &= a^4 + a^2b^2 + c^2 + a^2c^2 + b^2, \\ &= a^2(a^2 + b^2 + c^2) + b^2 + c^2, \end{aligned}$$

ce qui donne, puisque $a^2 + b^2 + c^2 = 1$,

$$a^4 + (ab + c)^2 + (ac - b)^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Exercice 4. Concours Kangourou

Soient x et y deux réels tels que $x^2 + y^2 = 6xy$.

Nous supposons de plus que $x > y > 0$.

Combien vaut $\frac{x+y}{x-y}$?

Solution

Nous avons

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2 + y^2 - 2xy}.$$

Or nous savons que $x^2 + y^2 = 6xy$.

Il en résulte

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = \frac{8xy}{4xy} = 2.$$

Puisque $x > y > 0$, nous en déduisons que $\frac{x+y}{x-y} > 0$.

Nous concluons

$$\frac{x+y}{x-y} = \sqrt{2}.$$

Exercice 5. D'après le Tournoi mathématique du Limousin

1. Vérifier que : $\frac{7^3 + 5^3}{7^3 + 2^3} = \frac{7+5}{7+2}$.

2. Soient a , b et c trois entiers naturels non nuls tels que $b \neq c$.

Montrer que, si $\frac{a^3 + b^3}{a^3 + c^3} = \frac{a+b}{a+c}$, alors $a = b+c$.

3. Étudier la réciproque.

Solution

1. Vérification immédiate.

2. Soient a , b et c trois entiers naturels non nuls tels que $b \neq c$.

Nous supposons que

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + c^3} = \frac{a+b}{a+c},$$

ce qui donne

$$(a^3 + b^3)(a+c) = (a^3 + c^3)(a+b).$$

En utilisant l'identité factorisant $a^3 + b^3$ et $a^3 + c^3$, nous obtenons

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2)(a+c) = (a+c)(a^2 - ac + c^2)(a+b).$$

Après simplification par $(a+b)(a+c) \neq 0$, il vient

$$b^2 - ab = c^2 - ac, \text{ soit } b^2 - c^2 = ab - ac.$$

Nous en déduisons

$$(b - c)(b + c) = a(b - c).$$

Ainsi, après simplification par $b - c \neq 0$, nous obtenons $a = b + c$.

3. Réciproquement, nous supposons que $a = b + c$.

Pour savoir si $\frac{a^3 + b^3}{a^3 + c^3} = \frac{a + b}{a + c}$, nous calculons la différence

$$D = (a^3 + b^3)(a + c) - (a^3 + c^3)(a + b).$$

En utilisant les calculs développés dans la question 2, nous obtenons

$$\begin{aligned} D &= (a + b)(a + c)(a^2 - ab + b^2) - (a + b)(a + c)(a^2 - ac + c^2), \\ &= (a + b)(a + c)(-ab + b^2 + ac - c^2), \\ &= (a + b)(a + c)(b^2 - c^2 - a(b - c)), \\ &= (a + b)(a + c)(b - c)(b + c - a). \end{aligned}$$

Puisque $a = b + c$, nous en déduisons que $D = 0$, ce qui implique

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + c^3} = \frac{a + b}{a + c}.$$

Exercice 6. Carré de la somme de trois nombres

1. Soient x , y et z trois réels. Justifier l'identité

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx.$$

En déduire les développements de $(x + y - z)^2$, $(x - y - z)^2$, $(2x + y - 1)^2$.

2. Soient a , b et c trois réels non nuls.

Montrer que si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, alors $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

3. Étudier la réciproque.

Solution

1. Pour tous les réels x , y et z , nous avons

$$\begin{aligned} (x + y + z)^2 &= ((x + y) + z)^2, \\ &= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2, \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2, \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx. \end{aligned}$$

▷ En remplaçant z par $-z$, nous obtenons

$$\begin{aligned}(x + y - z)^2 &= x^2 + y^2 + (-z)^2 + 2xy + 2y(-z) + 2(-z)x, \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx.\end{aligned}$$

▷ En remplaçant y par $-y$ et z par $-z$, il vient

$$\begin{aligned}(x - y - z)^2 &= x^2 + (-y)^2 + (-z)^2 + 2x(-y) + 2(-y)(-z) + 2(-z)x, \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx.\end{aligned}$$

▷ Le remplacement de x par $2x$ et z par -1 donne

$$\begin{aligned}(2x + y - 1)^2 &= (2x)^2 + y^2 + (-1)^2 + 2(2x)y + 2y(-1) + 2(-1)(2x), \\ &= 4x^2 + y^2 + 1 + 4xy - 2y - 4x.\end{aligned}$$

2. Soient a , b et c trois réels non nuls. Nous supposons

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

Nous en déduisons

$$\frac{bc + ac + ab}{abc} = 0, \text{ ce qui implique } ab + bc + ca = 0.$$

Nous avons ainsi justifié que si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, alors

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2.$$

3. Réciproquement, étant donné trois réels non nuls a , b et c , nous supposons

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

De l'égalité $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$, nous déduisons

$$ab + bc + ca = 0,$$

ce qui donne, en divisant par $abc \neq 0$,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

Ainsi la réciproque est vraie.

Exercice 7. Second degré

1. Pour tout réel x , factoriser l'expression $x^2 + 2x + 1$.
2. a. En déduire une factorisation du réel $p(x) = x^2 + 2x - 3$.
b. En déduire l'ensemble des solutions, dans \mathbb{R} , de l'équation $p(x) = 0$.
3. Traiter les mêmes questions que dans 2. dans les cas suivants :
 - $q(x) = x^2 + 2x - 5$.
 - $f(x) = x^2 + 2x + c$, où $c < 1$ est un réel donné.
 - $g(x) = x^2 + 3x - 1$.
 - $h(x) = x^4 + 2x^2 - 8$.
4. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x^6 = 1$.

Solution

1. Pour tout réel x , nous avons $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.
2. a. Le principe est de mettre le trinôme $p(x)$ sous sa forme canonique.
Pour cela, nous observons que

$$p(x) = (x^2 + 2x + 1) - 1 - 3 = (x + 1)^2 - 4.$$

Cette dernière expression est la forme canonique du trinôme du second degré $p(x)$.

Nous en déduisons que, pour tout réel x ,

$$p(x) = (x + 1 - 2)(x + 1 + 2) = (x - 1)(x + 3).$$

2. b. Nous avons

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -3.$$

Nous en concluons que $S = \{-3; 1\}$.

Remarque

Nous pouvions aussi résoudre cette équation en observant qu'elle est équivalente à

$$(x + 1)^2 = 4,$$

ce qui donne

$$x + 1 = 2 \text{ ou } x + 1 = -2,$$

c'est-à-dire

$$x = 1 \text{ ou } x = -3.$$

Dans la suite, nous privilégierons cette méthode.

3. Soit x un réel quelconque.

- Déterminons la forme canonique de $q(x)$.

Il vient

$$q(x) = (x^2 + 2x + 1) - 1 - 5 = (x + 1)^2 - 6.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} q(x) = 0 &\Leftrightarrow (x + 1)^2 = 6 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{6} \text{ ou } x + 1 = -\sqrt{6}, \\ q(x) = 0 &\Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{6} \text{ ou } x = -1 + \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Nous en concluons $S = \{-1 - \sqrt{6}; -1 + \sqrt{6}\}$.

- Déterminons la forme canonique de $f(x)$.

Il vient

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1) - 1 + c = (x + 1)^2 - 1 + c.$$

Il en résulte que

$$f(x) = 0 \text{ équivaut à } (x + 1)^2 = 1 - c.$$

Puisque $c < 1$, nous avons $1 - c > 0$. Nous obtenons

$$x + 1 = \sqrt{1 - c} \text{ ou } x + 1 = -\sqrt{1 - c}.$$

Les solutions de cette équation sont

$$x = -1 - \sqrt{1 - c} \text{ ou } x = -1 + \sqrt{1 - c},$$

c'est-à-dire $S = \{-1 - \sqrt{1 - c}; -1 + \sqrt{1 - c}\}$.

Nous pouvons remarquer que

si $c = 1$, alors $S = \{-1\}$,

si $c > 1$, alors $S = \emptyset$.

- Déterminons la forme canonique de $g(x)$.

Pour déterminer ici la forme canonique de ce trinôme, nous observons que $3x$ n'est pas un double produit. Pour faire apparaître un double produit, nous utilisons une méthode des "parenthèses vides à compléter".

Pour cela, posons

$$g(x) = x^2 + 2 \times (\cdot)x + (\cdot)^2 - (\cdot)^2 - 1.$$

Il est clair que pour retrouver l'expression $x^2 + 3x - 1$, il suffit de compléter les "parenthèses vides" par $\frac{3}{2}$.

Nous obtenons ainsi

$$g(x) = x^2 + 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}.$$

Remarque

Cette méthode est, avec un peu d'habitude, très pratique pour déterminer la forme canonique d'un trinôme quelconque du second degré.

Nous en déduisons

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \Leftrightarrow x + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ ou } x + \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{13}}{2}$$

Les solutions de cette équation sont

$$x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

L'ensemble des solutions est $S = \left\{-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}; -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right\}$.

- Déterminons la forme canonique de $h(x)$.

Nous avons

$$h(x) = (x^4 + 2x^2 + 1) - 1 - 8 = (x^2 + 1)^2 - 9.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + 1 = -3 \text{ ou } x^2 + 1 = 3, \\ h(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 = -4 \text{ ou } x^2 = 2. \end{aligned}$$

L'équation $x^2 = -4$ n'a pas de solution puisqu'un carré est toujours positif ou nul.

L'équation $x^2 = 2$ a pour solutions $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$.

Nous en concluons que $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

4. L'équation $x^6 = 1$ équivaut à $x^6 - 1 = 0$, ce qui donne

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0.$$

En utilisant les factorisations "cube", nous obtenons

$$(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0,$$

ce qui est équivalent à :

$$x - 1 = 0 \text{ ou } x^2 + x + 1 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \text{ ou } x^2 - x + 1 = 0.$$

Les réels $x = 1$ ou $x = -1$ sont solutions.

Nous pouvons nous en rendre compte immédiatement car $1^6 = (-1)^6 = 1$.

Mais il reste à résoudre les deux équations

$$x^2 + x + 1 = 0, \text{ notée (1) et } x^2 - x + 1 = 0, \text{ notée (2).}$$

Nous avons, en déterminant dans les deux cas la forme canonique du membre de gauche,

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}.$$

Un carré est toujours positif ou nul donc l'équation (1) n'a pas de solution.

De la même façon nous avons

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}.$$

Un carré est toujours positif ou nul donc l'équation (2) n'a pas de solution.

Nous en concluons que $S = \{-1; 1\}$.

Exercice 8. Compétitions américaines de mathématiques (AMC)

Soient a , b et c trois réels tels que

$$\begin{cases} a^2 + 2b = 7 \\ b^2 + 4c = -7 \\ c^2 + 6a = -14 \end{cases}.$$

Déterminer $a^2 + b^2 + c^2$.

Solution

Nous additionnons membres à membres ces trois égalités.

Nous obtenons

$$a^2 + 6a + b^2 + 2b + c^2 + 4c = -14.$$

Mettons sous leur forme canonique chaque trinôme en a ou b ou c qui compose la somme obtenue ci-dessus. Il vient

$$a^2 + 6a = a^2 + 2(3)a + 3^2 - 3^2 = (a + 3)^2 - 9,$$

$$b^2 + 2b = b^2 + 2(1)b + 1 - 1 = (b + 1)^2 - 1,$$

$$c^2 + 4c = c^2 + 2(2)c + 4^2 - 4^2 = (c + 2)^2 - 4.$$

Nous en déduisons :

$$(a + 3)^2 - 9 + (b + 1)^2 - 1 + (c + 2)^2 - 4 = -14,$$

ce qui donne

$$(a + 3)^2 + (b + 1)^2 + (c + 2)^2 = 0.$$

Par suite, il vient

$$a + 3 = b + 1 = c + 2 = 0, \text{ soit } a = -3, b = -1 \text{ et } c = -2.$$

Finalement, nous obtenons

$$a^2 + b^2 + c^2 = (-3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 14.$$

Exercice 9. Équations avec deux paramètres

Selon les valeurs des réels a et b résoudre, dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- $\frac{x}{a} + \frac{a}{b} = \frac{x}{b} + \frac{b}{a}.$
- $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{x}{b} + \frac{b}{x}.$

Solution

- Désignons par (1) l'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{a}{b} = \frac{x}{b} + \frac{b}{a}.$$

Nous pouvons résoudre cette équation sous réserve que $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Cette restriction étant acquise, nous avons les équivalences suivantes :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x}{a} - \frac{x}{b} = \frac{b}{a} - \frac{a}{b},$$

$$(1) \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{b^2 - a^2}{ab},$$

$$(1) \Leftrightarrow x\left(\frac{b-a}{ab}\right) = \frac{b^2 - a^2}{ab}.$$

Puisque $ab \neq 0$, nous obtenons

$$(1) \Leftrightarrow x(b-a) = b^2 - a^2.$$

1^{er} cas : $a = b$. L'équation (1) est équivalente à $0x = 0$.

Nous avons dans ce cas $S_{(1)} = \mathbb{R}$.

2^e cas : $a \neq b$.

Puisque $b - a \neq 0$, nous obtenons

$$x = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = b + a.$$

Dans ce cas, nous concluons par $S_{(1)} = \{b + a\}$.

- Désignons par (2) l'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{x}{b} + \frac{b}{x}.$$

Cette fois, en plus de la condition $a \neq 0$ et $b \neq 0$, nous imposons que $x = 0$ ne peut pas être solution de (2).

On dit que l'ensemble de définition de cette équation est \mathbb{R}^* .

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^*$, nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \frac{x^2 + a^2}{ax} = \frac{x^2 + b^2}{bx}, \\ (2) &\Leftrightarrow bx(x^2 + a^2) = ax(x^2 + b^2), \\ (2) &\Leftrightarrow bx^3 + a^2bx - ax^3 - ab^2x = 0, \\ (2) &\Leftrightarrow x^3(b - a) - abx(b - a) = 0, \\ (2) &\Leftrightarrow x(b - a)(x^2 - ab) = 0. \end{aligned}$$

Puisque $x \neq 0$, nous obtenons

$$(2) \Leftrightarrow (b - a)(x^2 - ab) = 0.$$

1^{er} cas : $b = a$.

Dans ce cas, tout réel non nul peut être solution, ce qui donne $S_{(2)} = \mathbb{R}^*$.

2^e cas : $b \neq a$.

L'équation (2) est équivalente à $x^2 = ab$.

1^{er} sous-cas : $ab > 0$, (2) admet pour solutions $x = -\sqrt{ab}$ ou $x = \sqrt{ab}$, ce qui donne $S_{(2)} = \{-\sqrt{ab}, \sqrt{ab}\}$.

2^e sous-cas : $ab < 0$, nous obtenons $S_{(2)} = \emptyset$.

Exercice 10. D'après AMC

Soient a et b deux réels strictement positifs distincts satisfaisant à

$$\frac{a}{b} + \frac{a + 10b}{b + 10a} = 2.$$

Trouver $\frac{a}{b}$.

Solution

Nous remarquons d'abord que $b \neq 0$ et $b + 10a \neq 0$ car $a > 0$ et $b > 0$.

L'égalité $\frac{a}{b} + \frac{a + 10b}{b + 10a} = 2$ est successivement équivalente à

$$\begin{aligned} \frac{a(b + 10a) + b(a + 10b)}{b(b + 10a)} &= 2, \\ 2ab + 10a^2 + 10b^2 &= 2b^2 + 20ab, \\ 5a^2 + 4b^2 - 9ab &= 0. \end{aligned}$$

Nous remarquons que

$$5a^2 = 4a^2 + a^2 \text{ et } -9ab = -8ab - ab.$$

Nous en déduisons :

$$a^2 + 4a^2 + 4b^2 - 8ab - ab = 0.$$

Ceci est successivement équivalent à

$$a(a - b) + 4(a^2 - 2ab + b^2) = 0,$$

$$a(a - b) + 4(a - b)^2 = 0,$$

$$(a - b)(a + 4(a - b)) = 0,$$

$$(a - b)(5a - 4b) = 0.$$

Nous savons que $a \neq b$. Nous en concluons

$$5a - 4b = 0, \text{ soit } \frac{a}{b} = \frac{4}{5}.$$

Exercice 11. Calculs de sommes avec ...

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a. Développer $(k + 1)^2$ en remplaçant successivement k par

$$1; 2 \dots; n - 1; n.$$

1. b. En déduire

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

1. c. Simplifier le nombre suivant

$$A = 2021^2 - 2020^2 + 2019^2 - 2018^2 + \dots + 2^2 - 1^2.$$

2. a. Développer $(k + 1)^3$.

2. b. En déduire que :

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

3. Calculer en fonction de l'entier n la somme

$$S = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n - 1) \times n.$$

Solution

1. a. $(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$. Nous avons

$$\text{pour } k = 1, 2^2 = 1^2 + 2 \times 1 + 1,$$

$$\text{pour } k = 2, 3^2 = 2^2 + 2 \times 2 + 1,$$

$$\text{pour } k = 3, 4^2 = 3^2 + 2 \times 3 + 1,$$

$$\vdots$$

$$\text{pour } k = n - 1, n^2 = (n - 1)^2 + 2 \times (n - 1) + 1,$$

$$\text{pour } k = n, (n + 1)^2 = n^2 + 2 \times n + 1.$$

1. b. En additionnant membres à membres ces n égalités et après simplifications, il vient

$$(n+1)^2 = 1^2 + 2(1+2+3+\dots+n) + \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{n \text{ termes égaux à } 1}.$$

Nous obtenons

$$(n+1)^2 = 1 + 2S_1 + n.$$

Nous en déduisons

$$2S_1 = (n+1)^2 - (n+1) = (n+1)(n+1-1) = n(n+1),$$

ce qui permet de conclure par

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. c. Nous observons que

$$A = (2021-2020)(2021+2020) + (2019-2018)(2019+2018) + \dots + (2-1)(2+1),$$

ce qui donne

$$A = 2021 + 2020 + 2019 + 2018 + \dots + 2 + 1 = \frac{2020 \times 2021}{2} = 2041210.$$

$$2. \text{ a. } (k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1.$$

2. b. En remplaçant successivement k par $1, 2, \dots, n-1, n$ dans cette égalité, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\text{pour } k = 1, \quad 2^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1, \\ &\text{pour } k = 2, \quad 3^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1, \\ &\text{pour } k = 3, \quad 4^3 = 3^3 + 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1, \\ &\quad \quad \quad \vdots \\ &\text{pour } k = n-1, \quad n^3 = (n-1)^3 + 3 \times (n-1)^2 + 3 \times (n-1) + 1, \\ &\text{pour } k = n, \quad (n+1)^3 = n^3 + 3 \times n^2 + 3 \times n + 1. \end{aligned}$$

Par addition membres à membres de ces n égalités et après simplifications, il vient

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3S_2 + 3S_1 + n,$$

ce qui donne :

$$3S_2 = (n+1)^3 - 3S_1 - (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1).$$

Il en résulte

$$6S_2 = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) = (n+1)[2(n+1)^2 - 3n - 2],$$

$$6S_2 = (n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2) = (n+1)(2n^2 + n) = n(n+1)(2n+1).$$

Nous en concluons

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Nous avons

$$S = 1 \times (1+1) + 2 \times (2+1) + \dots + (n-1) \times ((n-1)+1),$$

$$S = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2) + (1+2+3+\dots+(n-1)),$$

$$S = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2},$$

$$S = \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{2n-1}{3} + 1 \right),$$

$$S = \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{2n-2}{3} = \frac{2n(n-1)(n+1)}{6}.$$

Finalement, nous obtenons

$$S = \frac{n(n^2-1)}{3}.$$

Exercice 12. Deux sommes avec \dots - D'après AMC

ALGO

Deux réels a et b sont définis par

$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \dots + \frac{1010^2}{2019},$$

$$b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \dots + \frac{1010^2}{2021}.$$

1. Nous donnons un algorithme qui restitue le calcul du réel a .

```

a ← 0
Pour k allant de 1 à 1010
    a ← a +  $\frac{k^2}{2 * k - 1}$ 
Fin Pour
    
```

Compléter cet algorithme afin de restituer les calculs de b et $a - b$.

En implémentant en Python, quel est l'entier le plus proche de $a - b$?

2. Prouver ce résultat.

Solution

1. En observant que $2021 = 1010 \times 2 + 1$ nous complétons l'algorithme proposé.

```
a ← 0
b ← 0
Pour k allant de 1 à 1010
    a ← a +  $\frac{k^2}{2 * k - 1}$ 
    b ← b +  $\frac{k^2}{2 * k + 1}$ 
    d ← a - b
Fin Pour
```

L'implémentation en Python donne

```
from math import*
a=0
b=0
for k in range(1,1011):
    a=a+k**2/(2*k-1)
    b=b+k**2/(2*k+1)
    d=a-b
print("a=", a)
print("b=", b)
print("d=", d)
```

En exécutant ce programme, nous obtenons

```
>>>
```

```
a = 255531.11015195982,
```

```
b = 255025.860275661,
```

```
d = 505.24987629882526.
```

Ainsi l'entier le plus proche de $a - b$ est 505.

2. En exploitant l'algorithme précédent, plus généralement, pour tout entier naturel n non nul, nous posons

$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \cdots + \frac{n^2}{2n-1},$$
$$b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \cdots + \frac{n^2}{2n+1}.$$

Nous calculons $a - b$ en soustrayant du premier terme de a , le dernier terme de b et en additionnant les différences de carrés qui ont le même dénominateur, c'est-à-dire

$$a - b = \left(\frac{1^2}{1} - \frac{n^2}{2n+1} \right) + \left(\frac{2^2}{3} - \frac{1^2}{3} \right) + \left(\frac{3^2}{5} - \frac{2^2}{5} \right) + \left(\frac{4^2}{7} - \frac{1^2}{7} \right) \\ + \dots + \left(\frac{n^2}{2n-1} - \frac{(n-1)^2}{2n-1} \right).$$

Nous remarquons

$$\frac{2^2}{3} - \frac{1^2}{3} = \frac{(2-1)(2+1)}{3} = 1, \\ \frac{3^2}{5} - \frac{2^2}{5} = \frac{(3-2)(3+2)}{5} = 1, \\ \vdots \\ \frac{n^2}{2n-1} - \frac{(n-1)^2}{2n-1} = \frac{(n-n+1)(n+n-1)}{2n-1} = 1.$$

Nous en déduisons

$$a - b = 1 - \frac{n^2}{2n+1} + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n-1 \text{ termes} = 1}, \\ = 1 - \frac{n^2}{2n+1} + n - 1, \\ = n - \frac{n^2}{2n+1}, \\ = \frac{n(n+1)}{2n+1}.$$

Ainsi, pour $n = 1010$, en arrondissant à l'entier le plus proche, nous vérifions que

$$a - b = \frac{1010 \times 1011}{2 \times 1010 + 1} \approx 505.$$

Exercice 13. Légende du jeu d'échec ALGO

On raconte que l'inventeur du jeu d'échec demanda pour récompense qu'on lui donne quelques grains de blé. Un grain pour la première case de l'échiquier, deux grains pour la deuxième case, quatre grains pour la troisième, et ainsi de suite en doublant à chaque case le nombre de grains jusqu'à la 64^e case.

1. Quel est le nombre de grains offerts pour la 64^e case ?
2. Proposer un algorithme qui restitue le nombre total de grains de blé que représente la récompense.

En implémentant en Python, donner un ordre de grandeur de cette récompense.

3. Pour tout entier naturel n , on pose

$$S(n) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n.$$

En observant que $S(n) = 2S(n) - S(n)$, justifier que

$$S(n) = 2^{n+1} - 1.$$

Vérifier l'ordre de grandeur de la récompense, obtenu à la question précédente.

Solution

1. Nous avons

$$\begin{aligned} & 1 \text{ grain de blé sur la } 1^{\text{er}} \text{ case,} \\ & 2 \text{ grains de blé sur la } 2^{\text{e}} \text{ case,} \\ & 2 \times 2 = 2^2 \text{ grains de blé sur la } 3^{\text{e}} \text{ case,} \\ & 2 \times 2^2 = 2^3 \text{ grains de blé sur la } 4^{\text{e}} \text{ case,} \\ & \quad \vdots \\ & 2 \times 2^{62} = 2^{63} \text{ grains de blé sur la } 64^{\text{e}} \text{ case.} \end{aligned}$$

2. Le nombre total de grains de blé est donné par la somme

$$s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}.$$

Pour restituer cette somme, nous proposons l'algorithme qui suit.

```

s ← 0
Pour k allant de 0 à 63
    s ← s + 2 ** k
Fin Pour

```

L'implémentation en Python donne

```

from math import *
s=0
for k in range(0,64):
    s=s+2**k
print("s=",s)

```

En exécutant ce programme, nous obtenons

>>>

$s = 18446744073709551615$.

Un ordre de grandeur de la récompense est 10^{19} grains de blé.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} S(n) &= 2S(n) - S(n), \\ &= 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + 2^{n+1} - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n), \\ &= 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Avec une calculatrice, nous vérifions

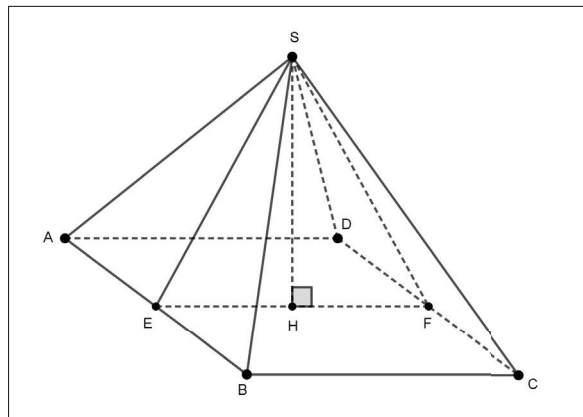
$$S(63) = 2^{64} - 1 \approx 1,8 \times 10^{19},$$

ce qui représente environ 18 milliards de milliards de grains de blé.

Un ordre de grandeur est à nouveau de 10^{19} grains de blé.

Exercice 14. Pyramide de Khéops et nombre d'or

On considère la pyramide ci-dessous dont la base est carrée et dont les faces latérales sont des triangles isocèles en S .



Les points E et F sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[DC]$, H est le pied de la hauteur issue de S dans le triangle ESF .

On pose $AB = 2a$ et $SE = b$, avec $0 < a < b$.

1. Calculer SH en fonction de b et a .

2. D'après l'historien grec Hérodote (484-420 avant J-C), la pyramide de Khéops, modélisée ci-dessus, possède la propriété suivante : "chaque face latérale a une aire égale à celle du carré construit sur la hauteur de la pyramide".

En déduire, selon Hérodote, que a et b sont liés par la relation :

$$b^2 - ab - a^2 = 0.$$

3. On pose $\phi = \frac{ES}{EH}$.

Montrer que $\phi^2 - \phi - 1 = 0$.

En déduire que $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.

4. En résolvant dans \mathbb{R} l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, justifier que $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (ϕ est le nombre d'or).

5. À l'origine, selon les spécialistes, les dimensions de la pyramide de Khéops étaient :

- côté du carré : 440 coudées royales,
- hauteur de la pyramide : 280 coudées royales.

Une coudée royale est voisine de 0,52 m. L'affirmation d'Hérodote est-elle justifiée ?

Solution

1. Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle EHS rectangle en H . Il vient

$$SE^2 = EH^2 + SH^2.$$

Nous savons que $SE = b$.

De plus le triangle ESF est isocèle en S donc H est aussi le milieu du segment $[EF]$. Comme $ABCD$ est un carré, nous obtenons

$$EH = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}AB = a.$$

Nous en déduisons

$$SH^2 = SE^2 - EH^2 = b^2 - a^2.$$

Puisque $0 < a < b$, nous avons $b^2 - a^2 > 0$.

Nous en concluons

$$SH = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

2. L'aire du carré de côté SH est égale à SH^2 .

En traduisant l'affirmation d'Hérodote, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \times AB \times SE = SH^2,$$

ce qui donne :

$$ab = b^2 - a^2.$$

Nous en déduisons l'égalité attendue

$$b^2 - ab - a^2 = 0.$$

3. Divisons les deux membres de l'égalité ci-dessus par $a^2 > 0$.

Nous obtenons

$$\frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0.$$

Puisque $\phi = \frac{ES}{EH} = \frac{b}{a}$, il vient

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Nous en déduisons

$$\phi^2 = \phi + 1.$$

En divisant par $\phi > 0$ les deux membres de cette égalité, il vient

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}.$$

4. Nous résolvons cette équation du second degré, notée (E) , en mettant sous sa forme canonique le trinôme $x^2 - x - 1$, ce qui donne

$$(E) \Leftrightarrow x^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4},$$

$$(E) \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi les solutions de (E) sont

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Nous savons que $\phi > 0$ est une solution de l'équation (E) .

Puisque $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} > 0$ et $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < 0$, nous en concluons

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

5. Nous évaluons le rapport $\frac{ES}{EH}$.

Il vient :

$$\frac{ES}{EH} = \frac{\sqrt{EH^2 + SH^2}}{EH} = \sqrt{1 + \left(\frac{SH}{EH}\right)^2}.$$

Il en résulte

$$\frac{ES}{EH} \approx \sqrt{1 + \left(\frac{280 \times 0,52}{220 \times 0,52}\right)^2} \approx \sqrt{1 + \left(\frac{14}{11}\right)^2} \approx 1,618.$$

Puisque $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$, arrondi à 10^{-3} près, nous en concluons que l'affirmation d'Hérodote est justifiée.

Inégalités dans \mathbb{R}

Dans ce chapitre nous donnons tout d'abord les définitions des quatre relations de comparaison. Nous étudions ensuite le comportement de ces relations vis-à-vis de l'addition et de la multiplication dans l'ensemble des nombres réels, ce qui nous permet en particulier de justifier mathématiquement la règle des signes. Nous en déduisons les règles de comparaison des carrés, inverses et racines carrées. Ces dernières seront à mettre en perspective dans le chapitre 5 avec l'étude du sens de variations des fonctions de références.

Comme dans le chapitre 1, nous prouvons l'ensemble des résultats énoncés.

2.1 Les définitions

Définition. Soient a et b deux réels.

- On dit que a est inférieur ou égal à b , et on note $a \leq b$ si et seulement si $a - b \in \mathbb{R}^-$.

En d'autres termes, nous retenons que

$$a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0.$$

- On dit que a est supérieur ou égal à b , et on note $a \geq b$ si et seulement si $a - b \in \mathbb{R}^+$.

En d'autres termes, nous retenons que

$$a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0.$$

- On dit que a est inférieur strictement à b , et on note $a < b$ si et seulement si $a - b \in \mathbb{R}^{-*}$.

En d'autres termes, nous retenons que :

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0.$$

• On dit que a est supérieur strictement à b , et on note $a > b$ si et seulement si $a - b \in \mathbb{R}^{+*}$.

En d'autres termes, nous retenons que

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0.$$

Remarques. Nous en faisons deux.

• Dans la suite de ce cours, nous utilisons la relation \leq .

Sauf mention contraire, les propriétés établies pour cette dernière sont aussi vraies pour les trois autres relations de comparaison.

• Pour comparer deux réels A et B , nous utiliserons fréquemment **la méthode de la différence** qui consiste à calculer $A - B$ ou $B - A$, puis en déduire le signe de cette différence.

Ci-dessous, un premier exemple illustre cette méthode.

Exemple. \triangleright Soient a et b deux réels strictement positifs.

Nous comparons le réel $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ avec 2.

Il vient

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a - b)^2}{ab}.$$

Puisque $(a - b)^2 \geq 0$ et $ab > 0$, nous obtenons $\frac{(a - b)^2}{ab} \geq 0$.

Nous en déduisons que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0$, ce qui prouve que, pour tous les réels $a > 0$ et $b > 0$,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

\triangleright L'inégalité obtenue est-elle encore exacte lorsque $a < 0$ et $b < 0$?

Si $a < 0$ et $b < 0$, alors nous avons $ab > 0$.

Il en résulte, en reprenant les calculs ci-dessus, que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Ainsi cette inégalité demeure vraie lorsque $a < 0$ et $b < 0$.

\triangleright Par contre, si a et b sont non nuls et de signes contraires, alors nous avons $ab < 0$, ce qui justifie dans ce cas que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq 2.$$

\triangleright Nous remarquons que, dans tous les cas, l'égalité est atteinte si et seulement si $a = b$.

2.2 Compatibilité de \leq avec l'addition dans \mathbb{R}

Proposition. *Soient a, b et c trois réels.*

Nous disposons de la propriété suivante

$$a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c.$$

Démonstration. Supposons que $a \leq b$. Nous avons

$$a + c - (b + c) = a - b \leq 0.$$

Nous en déduisons

$$a + c \leq b + c.$$

.

Réciproquement, supposons que $a + c \leq b + c$. Il en résulte que

$$a + c - (b + c) \leq 0,$$

c'est-à-dire $a \leq b$.

Corollaire. *La relation \leq est compatible avec la soustraction dans \mathbb{R} .*

Pour tous les réels a, b , et c , nous avons

$$a \leq b \Leftrightarrow a - c \leq b - c.$$

Démonstration. Nous appliquons l'équivalence ci-dessus en remplaçant c par $-c$.

Corollaire. *Soit a un réel. a et $-a$ sont de signes contraires.*

Démonstration. Si $a \geq 0$, alors par compatibilité avec l'addition, nous obtenons

$$a + (-a) \geq 0 + (-a),$$

ce qui justifie que $-a \leq 0$.

Si $a \leq 0$, alors par compatibilité avec l'addition, on obtient

$$a + (-a) \leq 0 + (-a),$$

ce qui justifie que $-a \geq 0$.

Corollaire. Soient a et b deux réels donnés.

L'inéquation $x + a \leq b$ équivaut à $x \leq b - a$.

Démonstration. Nous avons

$$x + a \leq b \Leftrightarrow x + a + (-a) \leq b + (-a) \Leftrightarrow x \leq b - a.$$

Remarque. Cette proposition et ses corollaires restent vrais avec les inégalités \geq , $<$ et $>$.

Corollaire (règles des signes : addition de deux réels de même signe). Soient a et b deux réels. Nous disposons des règles suivantes :

- Si $a \leq 0$ et $b \leq 0$, alors $a + b \leq 0$.
- Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, alors $a + b \geq 0$.
- Si $a \leq 0$ et $b < 0$, alors $a + b < 0$.
- Si $a \geq 0$ et $b > 0$, alors $a + b > 0$.

Démonstration. Nous démontrons la première implication. Les trois autres se justifient de la même façon.

Si $a \leq 0$, alors par compatibilité avec l'addition, il vient

$$a + b \leq b \leq 0.$$

Corollaire (règles des signes : addition de deux réels de signes contraires). Soient deux réels tels que $a \geq 0$ et $b \leq 0$.

- Si $a \geq -b$, alors $a + b \geq 0$.
- Si $a \leq -b$, alors $a + b \leq 0$.

Démonstration. Soient $a \geq 0$ et $b \leq 0$. Nous observons que $-b \geq 0$.

- Si $a \geq -b$, alors par compatibilité avec l'addition, nous obtenons

$$a + b \geq (-b) + b.$$

Nous en déduisons que $a + b \geq 0$.

- Si $a \leq -b$, alors par compatibilité avec l'addition, nous obtenons

$$a + b \leq (-b) + b.$$

Nous en déduisons que $a + b \leq 0$.

Remarque. Lorsque a et b sont de signes contraires, ce corollaire fonctionne avec des inégalités larges ou strictes. Vous pouvez, en exercice, refaire la preuve ci-dessus dans les cas suivants : $a \geq 0$ et $b < 0$ ou $a > 0$ et $b < 0$.

2.3 La relation d'ordre \leq

Proposition. La relation \leq est une relation d'ordre dans \mathbb{R} , ce qui signifie :

- Pour tout réel a , $a \leq a$. On dit que la relation \leq est réflexive.
- Pour tous les réels a et b , si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$.
On dit que la relation \leq est antisymétrique.
- Pour tous les réels a , b et c , si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.
On dit que la relation \leq est transitive.

Démonstration. • Soit a un réel. Nous avons $a - a \leq 0$, donc $a \leq a$.

- Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$ et $b \leq a$.

Nous avons $a - b \leq 0$ et $b - a \leq 0$.

Puisque $a - b = -(b - a)$, en appliquant le corollaire sur le signe de l'opposé nous obtenons

$$a - b = 0, \text{ donc } a = b.$$

- Soient a , b et c trois réels tels que $a \leq b$ et $b \leq c$.

Nous avons $a - b \leq 0$ et $b - c \leq 0$. D'après le corollaire sur la règle des signes de l'addition, il vient

$$(a - b) + (b - c) \leq 0, \text{ ce qui donne } a - c \leq 0.$$

Ceci prouve que $a \leq c$.

Remarques. Nous en donnons trois.

- La relation \geq est aussi une relation d'ordre.
- En ce qui concerne les inégalités strictes, seule la transitivité demeure acquise.

C'est d'ailleurs la propriété que nous utiliserons le plus souvent.

- L'ordre dans \mathbb{R} est total. Cela signifie que deux réels a et b sont toujours comparables, c'est-à-dire $a \leq b$ ou $a \geq b$.

2.4 Inégalités et multiplication dans \mathbb{R}

Dans ce paragraphe nous commençons par énoncer l'axiome suivant :

Axiome. La multiplication de deux réels positifs restitue un réel positif.

En d'autres termes, pour tous les réels $x \geq 0$ et $y \geq 0$, nous avons $x \times y \geq 0$.

Proposition (règles des signes et multiplication de deux réels). *Soient x et y deux réels. Nous disposons des propriétés suivantes :*

- Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$, alors $xy \leq 0$.
- Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, alors $xy \geq 0$.

Démonstration. • Soient $x \geq 0$ et $y \leq 0$.

Dans ce cas, nous savons que $-y \geq 0$. Or nous avons $xy = -(x(-y))$.

En appliquant l'axiome ci-dessus, il vient $x(-y) \geq 0$. Nous en déduisons que $xy \leq 0$.

- Soient $x \leq 0$ et $y \leq 0$.

Dans ce cas, nous savons que $-x \geq 0$ et $-y \geq 0$.

Or nous avons $xy = (-x)(-y)$.

Puisque $(-x)(-y) \geq 0$, nous en déduisons que $xy \geq 0$.

Remarque. L'axiome de stabilité de \mathbb{R}^+ pour la multiplication et la preuve de cette proposition justifient la règle multiplicative des signes que vous connaissez.

La règle des signes peut aussi être énoncée lorsque une des deux inégalités est stricte. En effet nous verrons dans la suite du cours qu'une inégalité au sens strict entraîne une inégalité au sens large.

Proposition (multiplication par un réel non nul des deux membres d'une inégalité). *Soient a , b et c trois réels avec $c \neq 0$.*

- **1^{er} cas** : $c > 0$. Nous disposons de l'implication

$$a \leq b \Rightarrow ac \leq bc.$$

- **2^e cas** : $c < 0$. Nous disposons de l'implication

$$a \leq b \Rightarrow ac \geq bc.$$

Démonstration. • **1^{er} cas** : nous supposons que $c > 0$ et $a \leq b$.

Nous avons $ac - bc = (a - b)c$.

Puisque $a - b \leq 0$ et $c > 0$, nous en déduisons que $(a - b)c \leq 0$, ce qui prouve que $ac - bc \leq 0$, c'est-à-dire $ac \leq bc$.

- **2^e cas** : nous supposons que $c < 0$ et $a \leq b$.

Nous avons toujours $ac - bc = (a - b)c$.

Puisque $a - b \leq 0$ et $c < 0$, nous en déduisons que $(a - b)c \geq 0$, ce qui prouve que $ac - bc \geq 0$, c'est-à-dire $ac \geq bc$.

Corollaire (signe de l'inverse). *Soit a un réel non nul.*

Les réels a et $\frac{1}{a}$ sont de même signe.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}^*$, nous considérons deux cas.

- **1^{er} cas** : $a > 0$.

Par l'absurde, supposons que $\frac{1}{a} \leq 0$.

Puisque $a > 0$, il vient $a \times \frac{1}{a} \leq a \times 0$.

Ainsi $1 \leq 0$, ce qui est absurde.

Nous en concluons que si $a > 0$, alors $\frac{1}{a} > 0$.

- **2^e cas** : $a < 0$.

De la même façon, nous prouvons par l'absurde que $a < 0$ implique $\frac{1}{a} < 0$.

Proposition (multiplication par un réel non nul des deux membres d'une inégalité : version forte). Soient a, b et c trois réels avec $c \neq 0$.

- **1^{er} cas** : $c > 0$. Nous disposons de l'équivalence

$$a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc.$$

- **2^e cas** : $c < 0$. Nous disposons de l'équivalence

$$a \leq b \Leftrightarrow ac \geq bc.$$

Démonstration. • **1^{er} cas** : $c > 0$. L'implication $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$ est prouvée lors de la proposition précédente.

Réciproquement, supposons que $c > 0$ et $ac \leq bc$.

En multipliant les deux membres de cette dernière inégalité par $\frac{1}{c} > 0$, nous obtenons $(ac)\frac{1}{c} \leq (bc)\frac{1}{c}$, ce qui donne $a \leq b$.

• **2^e cas** : $c < 0$. L'implication $a \leq b \Rightarrow ac \geq bc$ est prouvée lors de la proposition précédente.

Réciproquement, supposons que $c < 0$ et $ac \geq bc$.

En multipliant les deux membres de cette dernière inégalité par $\frac{1}{c} < 0$, nous obtenons $(ac)\frac{1}{c} \leq (bc)\frac{1}{c}$, soit $a \leq b$.

Remarques. Nous en donnons deux.

- Multiplication par -1 . Pour tous les réels a et b , nous avons

$$a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b.$$

En particulier pour $b = 0$, nous en déduisons une seconde justification de la proposition

$$a \leq 0 \Leftrightarrow -a \geq 0.$$

- Les résultats précédents restent vrais avec les quatre inégalités.

Corollaire (équation $ax \leq b$). Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

- Si $a > 0$, l'inéquation $ax \leq b$ équivaut à $x \leq \frac{b}{a}$.
- Si $a < 0$, l'inéquation $ax \leq b$ équivaut à $x \geq \frac{b}{a}$.

Démonstration. • Si $a > 0$, en multipliant par $\frac{1}{a} > 0$ les deux membres de l'équation $ax \leq b$, nous obtenons $x \leq \frac{b}{a}$.

Avec la notion d'intervalle, en désignant par S l'ensemble des solutions de cette inéquation, nous avons $S = \left] -\infty; \frac{b}{a} \right]$.

• Si $a < 0$, en multipliant par $\frac{1}{a} < 0$ les deux membres de l'équation $ax \leq b$, nous obtenons $x \geq \frac{b}{a}$, ce qui donne $S = \left[\frac{b}{a}, +\infty \right[$.

Exemple. Inéquation avec un paramètre.

Selon les valeurs du réel m , nous résolvons l'inéquation $mx - 2 > x + m$.

Cette équation équivaut à $(m - 1)x > m + 2$.

Par disjonction, nous distinguons trois cas.

1^{er} cas : $m - 1 < 0$, soit $m < 1$. Nous obtenons

$$x < \frac{m + 2}{m - 1},$$

c'est-à-dire

$$S = \left] -\infty; \frac{m + 2}{m - 1} \right[.$$

2^e cas : $m - 1 = 0$, soit $m = 1$. Il vient

$$0x > 3,$$

ce qui donne

$$S = \emptyset.$$

3^e cas : $m - 1 > 0$, soit $m > 1$. Nous obtenons

$$x > \frac{m + 2}{m - 1},$$

soit

$$S = \left] \frac{m + 2}{m - 1}; +\infty \right[.$$

2.5 Addition, multiplication membres à membres

Théorème. Soient a, b, c et d quatre réels.

- Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.
- Si $0 < a \leq b$ et $0 < c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

Démonstration. • Nous supposons que $a \leq b$ et $c \leq d$.

Ajoutons c aux deux membres de $a \leq b$ et b aux deux membres de $c \leq d$.

Nous obtenons $a + c \leq b + c$ et $b + c \leq b + d$.

La transitivité de la relation \leq implique que $a + c \leq b + d$.

- Nous supposons que $0 < a \leq b$ et $0 < c \leq d$.

Multiplions par $c > 0$ les deux membres de la double inégalité $0 < a \leq b$ et par $b > 0$ les deux membres de $0 < c \leq d$.

Il vient $0 < ac \leq bc$ et $0 < bc \leq bd$.

La transitivité de la relation \leq implique que $ac \leq bd$.

Remarques. Nous en donnons deux.

- Les réciproques sont fausses. Contre-exemples¹ :
 $6 \leq 10$, soit $5 + 1 \leq 4 + 6$, avec $5 \geq 4$ et $1 \leq 6$.
 $15 \leq 20$, soit $3 \times 5 \leq 2 \times 10$, avec $3 \geq 2$ et $5 \leq 10$.
- Il n'y a pas de règles générales pour comparer $a - c$ avec $b - d$,
ni $\frac{a}{c}$ avec $\frac{b}{d}$.

Exemples. Soient deux réels a et b tels que $1 \leq a \leq 2$ et $3 \leq b \leq 5$.

Nous encadrons les réels ci-dessous.

$$a + b, a - b, ab, 2a - 3b \text{ et } 1 - \sqrt{2}ab.$$

Successivement, nous avons

$$\triangleright 4 \leq a + b \leq 7.$$

$\triangleright -5 \leq -b \leq -3$, puisque $a - b = a + (-b)$, nous obtenons

$$-4 \leq a - b \leq -1.$$

$$\triangleright 3 \leq ab \leq 10.$$

$\triangleright 2 \leq 2a \leq 4$ et $-15 \leq -3b \leq -9$, donc

$$-13 \leq 2a - 3b \leq -5.$$

$\triangleright -10 \leq -ab \leq -3$, donc $-10\sqrt{2} \leq -\sqrt{2}ab \leq -3\sqrt{2}$, ce qui donne

$$1 - 10\sqrt{2} \leq 1 - \sqrt{2}ab \leq 1 - 3\sqrt{2}.$$

1. annexe § 5.3

2.6 Comparaison de deux carrés

Proposition. Soient a et b deux réels. Nous disposons des deux propriétés suivantes :

$$0 \leq a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2.$$

$$a \leq b \leq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq b^2.$$

Démonstration. 1^{er} cas : nous supposons que $0 \leq a \leq b$.

- Si $a = 0$ et $b \geq 0$, nous avons $0^2 \leq b^2$. Dans ce cas particulier, l'inégalité attendue est ainsi justifiée.

- On suppose que $0 < a \leq b$.

En multipliant par $a > 0$ les deux membres de l'inégalité $a \leq b$, il vient $a^2 \leq ab$.

En multipliant par $b > 0$ les deux membres de l'inégalité $a \leq b$, il vient $ab \leq b^2$.

Par transitivité de la relation \leq , nous en déduisons que $a^2 \leq b^2$.

Réciproquement, nous supposons que a et b sont deux réels positifs tels que $a^2 \leq b^2$.

Nous en déduisons que $a^2 - b^2 \leq 0$, soit $(a - b)(a + b) \leq 0$.

Or nous savons que $a + b \geq 0$.

Il en résulte que $a - b \leq 0$, c'est-à-dire $a \leq b$.

2^e cas : nous supposons que $a \leq b \leq 0$.

- Si $b = 0$ et $a \leq 0$, nous avons $a^2 \geq 0^2$. L'inégalité attendue est ainsi justifiée.

- On suppose que $a \leq b < 0$.

En multipliant par $a < 0$ les deux membres de l'inégalité $a \leq b$, il vient $a^2 \geq ab$.

En multipliant par $b < 0$ les deux membres de l'inégalité $a \leq b$, il vient $ab \geq b^2$.

Par transitivité de la relation \geq , nous en déduisons que $a^2 \geq b^2$.

Réciproquement, supposons que a et b sont deux réels négatifs tels que $a^2 \geq b^2$.

Nous en déduisons que $a^2 - b^2 \geq 0$, soit $(a - b)(a + b) \geq 0$.

Or nous savons que $a + b \leq 0$. Il en résulte que $a - b \leq 0$, c'est-à-dire $a \leq b$.

Remarques. Nous en proposons trois.

- Cette règle de comparaison de deux carrés est également vraie en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.
- Les implications

$$0 \leq a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$$

et

$$a \leq b \leq 0 \Rightarrow a^2 \geq b^2$$

sont à mettre en perspective avec le chapitre 5 sur les fonctions. Elles signifient respectivement que la fonction carré $x \mapsto x^2$ est croissante sur \mathbb{R}^+ et décroissante sur \mathbb{R}^- .

- L'équivalence de cette proposition justifie que comparer deux nombres positifs équivaut à comparer leurs carrés.

Nous disposons ainsi d'une nouvelle méthode de comparaison illustrée par l'exemple qui suit.

Exemple. Soient a et b deux réels positifs.

Nous comparons les réels

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \text{ et } \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}.$$

Ces deux réels sont positifs ou nuls. Nous pouvons comparer leurs carrés.

Il vient

$$\frac{a+b}{2} - \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2 = \frac{a+b}{2} - \frac{a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}}{4} = \frac{a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{4}.$$

Nous en déduisons

$$\frac{a+b}{2} - \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Il en résulte que

$$\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2 \geq \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2.$$

Nous en concluons

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}.$$

2.7 Comparaison de deux racines carrées

Proposition. Soient a et b deux réels positifs. Nous avons

$$a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}.$$

Démonstration. Nous supposons que $0 \leq a \leq b$.

1^{er} cas : $a = 0$ et $b \geq 0$. Nous avons $\sqrt{b} \geq 0$, soit $\sqrt{0} \leq \sqrt{b}$.

2^e cas : $0 < a \leq b$. Dans ce cas, nous calculons $\sqrt{b} - \sqrt{a}$. Il vient

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{a - b}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}.$$

Puisque $a - b \leq 0$ et $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$, nous en déduisons que $\sqrt{b} - \sqrt{a} \leq 0$.

L'inégalité $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ est ainsi justifiée.

Réciproquement, nous supposons que $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Puisque $0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, nous appliquons sur \mathbb{R}^+ la règle de comparaison des carrés.

Nous obtenons $(\sqrt{a})^2 \leq (\sqrt{b})^2$, soit $a \leq b$.

Remarques. Nous en faisons deux.

- Cette proposition reste vraie en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

- L'implication

$$0 \leq a \leq b \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

est à mettre en perspective avec le chapitre 5 sur les fonctions.

Elle signifie que la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur \mathbb{R}^+ .

Exemple. Sans calculatrice, nous comparons $\sqrt{47}$ et 7.

En effet nous avons $47 < 49$, ce qui implique que $\sqrt{47} < 7$.

2.8 Comparaison de deux inverses

Proposition. Soient a et b deux réels non nuls et de même signe. Nous disposons de l'équivalence

$$a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}.$$

Démonstration. Nous supposons que a et b sont deux réels non nuls et de même signe tels que $a \leq b$.

Multiplions les deux membres de cette inégalité par $\frac{1}{ab} > 0$. Il vient

$$a \times \frac{1}{ab} \leq b \times \frac{1}{ab}, \text{ soit } \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}.$$

Réciproquement, nous supposons que $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$, où a et b sont deux réels non nuls et de même signe.

En multipliant les deux membres de cette inégalité par $ab > 0$, nous obtenons

$$\frac{ab}{b} \leq \frac{ab}{a}, \text{ c'est-à-dire } a \leq b.$$

Remarques. Nous en faisons trois.

- Cette proposition peut également être prouvée, en étudiant le signe de $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, sachant que a et b sont deux réels non nuls et de même signe.

- Cette proposition reste vraie en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

- Les deux implications

$$\begin{aligned} 0 < a \leq b &\Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \\ &\text{et} \\ a \leq b < 0 &\Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \end{aligned}$$

sont à mettre en perspective avec le chapitre 5 sur les fonctions. Elles signifient que la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur \mathbb{R}^{+*} et sur \mathbb{R}^{-*} .

Exemple. Soient deux réels x et y tels que $0 < x \leq y$.

Nous comparons $\frac{1}{x^2 + 2\sqrt{x}}$ et $\frac{1}{y^2 + 2\sqrt{y}}$.

La méthode de la différence induit des calculs compliqués.

Ainsi nous privilégions les règles de comparaison.

Si x et y sont deux réels tels que $0 < x \leq y$, alors par comparaison des carrés et des racines carrées, il vient

$$x^2 \leq y^2 \text{ et } 2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{y}.$$

Par addition membres à membres de ces deux inégalités, nous obtenons

$$x^2 + 2\sqrt{x} \leq y^2 + 2\sqrt{y}.$$

De plus, nous observons que $x^2 + 2\sqrt{x} > 0$.

Par comparaison des inverses strictement positifs, nous en concluons que

$$\frac{1}{x^2 + 2\sqrt{x}} \geq \frac{1}{y^2 + 2\sqrt{y}}.$$

2.9 Comparaison d'un nombre positif avec son carré et son cube

Proposition. Soit $a \in \mathbb{R}^+$, nous avons

- $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow a^3 \leq a^2 \leq a$.
- $a \geq 1 \Rightarrow a \leq a^2 \leq a^3$.

Démonstration. • Supposons que $0 \leq a \leq 1$.

Si $a = 0$, alors la double inégalité attendue est vérifiée.

Si $0 < a \leq 1$, alors en multipliant par $a > 0$ cette double inégalité, nous en déduisons que $a^2 \leq a$.

En multipliant à nouveau par $a > 0$ cette dernière inégalité, il vient $a^3 \leq a^2$.

Finalement

$$0 \leq a \leq 1 \text{ implique, } a^3 \leq a^2 \leq a.$$

- Supposons que $a \geq 1$.

En multipliant par $a > 0$ les deux membres de l'inégalité $a \geq 1$, nous obtenons $a^2 \geq a$.

À nouveau, en multipliant par $a > 0$, il vient $a^3 \geq a^2$.

Par conséquent, nous en déduisons que

$$\text{si } a \geq 1, \text{ alors } a \leq a^2 \leq a^3.$$

Remarques. Nous en faisons cinq.

- Cette proposition reste vraie avec des inégalités strictes.
- Les réciproques sont vraies.
- Les égalités sont atteintes si et seulement si $a = 0$ ou $a = 1$.
- Si $a < 0$, alors on montre facilement que

$$\begin{aligned} -1 \leq a < 0 &\Rightarrow a \leq a^3 \leq a^2. \\ a \leq -1 &\Rightarrow a^3 \leq a \leq a^2. \end{aligned}$$

- Cette proposition signifie que "un cube ne surpasse pas toujours un carré" et "un nombre peut être plus grand que son carré et son cube".

2.10 Intervalles de \mathbb{R}

2.10.1 Intervalle fermé

Définition. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

L'intervalle fermé $[a, b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$.

En d'autres termes, nous avons

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}.$$

Remarque. Si $a = b$, alors nous avons $[a, a] = \{a\}$.

2.10.2 Les différents types d'intervalles

Les intervalles dont nous disposons dans \mathbb{R} sont définis par le tableau ci-dessous

L'intervalle	est l'ensemble des réels x tels que
$[a, b]$, fermé	$a \leq x \leq b$
$]a, b[$, ouvert	$a < x < b$
$[a, b[$	$a \leq x < b$
$]a, b]$	$a < x \leq b$
$[a, +\infty[$	$x \geq a$
$]a, +\infty[$	$x > a$
$] - \infty, b]$	$x \leq b$
$] - \infty, b[$	$x < b$

Remarques. Nous en donnons trois.

- Nous pouvons dire d'une façon imagée qu'un nombre appartient à un intervalle si ce nombre "peut aller d'une position à une autre dans cet intervalle sans en sortir".

- En particulier, nous avons

$$] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

$$[0, +\infty[= \mathbb{R}^+.$$

$$] - \infty, 0] = \mathbb{R}^-.$$

$$]0, +\infty[= \mathbb{R}^{+*}.$$

$$] - \infty, 0[= \mathbb{R}^{-*}.$$

- Tout intervalle ouvert est inclus dans le fermé ou le semi-fermé du même type.

Par exemple, nous avons $]a, b[\subset [a, b]$, ou $]a, +\infty[\subset [a, +\infty[$, ou $] - \infty, b[\subset] - \infty, b]$.

Ceci signifie que :

Si $a < x < b$, alors $a \leq x \leq b$.

Si $x > a$, alors $x \geq a$.

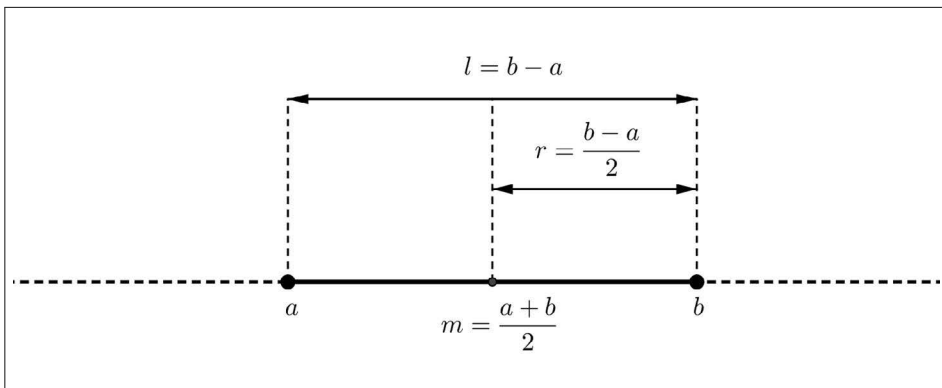
Si $x < b$, alors $x \leq b$.

Ainsi nous retiendrons **qu'une inégalité stricte implique une inégalité large**.

Nous remarquons que la réciproque est fausse.

Définition (intervalle centré). Soit un intervalle I d'extrémités a et b avec $a < b$.

- Le réel $m = \frac{a+b}{2}$ est le centre de I .
- Le réel $b - a > 0$ est la longueur de I .
- Le réel $r = \frac{b-a}{2} > 0$ est le rayon de I .
- L'intervalle $[a, b] = [m - r, m + r]$, (respectivement $]a, b[=]m - r, m + r[$) est un intervalle centré fermé (respectivement centré ouvert).



2.10.3 Intersection, réunion de deux intervalles

Définition. Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} .

- L'intersection de ces deux intervalles, notée $I \cap J$, est l'ensemble des réels x tels que $x \in I$ et $x \in J$.

- La réunion de ces deux intervalles, notée $I \cup J$, est l'ensemble des réels x tels que $x \in I$ ou $x \in J$.

Remarques. Nous en faisons quatre.

- Si les intervalles I et J n'ont pas de réels en commun, on dit que ces deux intervalles sont disjoints et on note $I \cap J = \emptyset$.
- Nous admettons à ce niveau que $I \cap J$ est toujours un intervalle.
- Par contre $I \cup J$ n'est pas en général un intervalle. Un contre-exemple est $] - \infty, -4] \cup]0, +\infty[$ qui n'est pas un intervalle en tenant compte de la remarque "imagée" proposée au paragraphe précédent.
- Nous retiendrons que

$$\text{si } I \subset J, \text{ alors } I \cap J = I \text{ et } I \cup J = J.$$

2.11 Signe d'une fonction affine

Proposition. Soient a un réel non nul et b un réel quelconque. Le signe du réel $ax + b$ est, selon le signe de a , donné par les deux tableaux de signes.

1^{er} cas : $a > 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
<i>signe de $ax + b$</i>	-	0	+
	<i>signe contraire de a</i>		<i>signe de a</i>

2^e cas : $a < 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
<i>signe de $ax + b$</i>	+	0	-
	<i>signe contraire de a</i>		<i>signe de a</i>

Démonstration. Soient a et b réels avec $a \neq 0$. Étudier le signe du réel $ax + b$ revient à déterminer les deux sous-ensembles I et J de \mathbb{R} tels que

$$I = \{x \in \mathbb{R} / ax + b \geq 0\} \text{ et } J = \{x \in \mathbb{R} / ax + b \leq 0\}.$$

Nous avons :

$$x \in I \Leftrightarrow ax \geq -b \quad \text{et} \quad x \in J \Leftrightarrow ax \leq -b.$$

1^{er} cas : $a > 0$.

$$x \in I \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x \in J \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}.$$

$$I = \left[-\frac{b}{a}, +\infty[\quad \text{et} \quad J = \left] -\infty, -\frac{b}{a}\right].$$

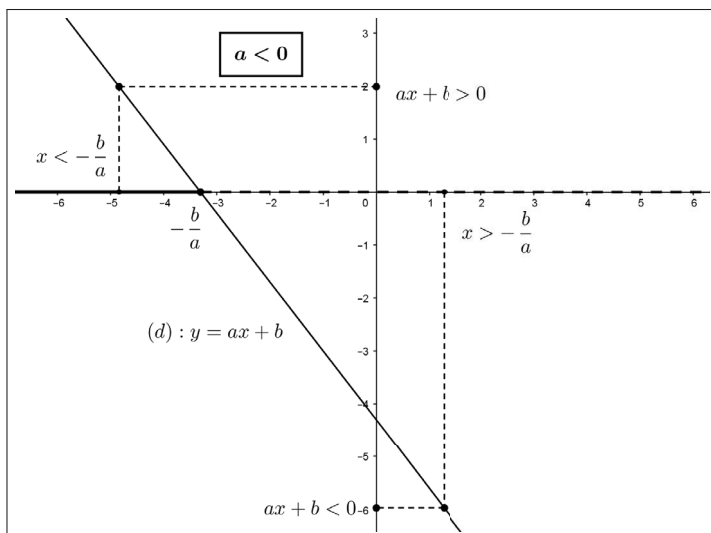
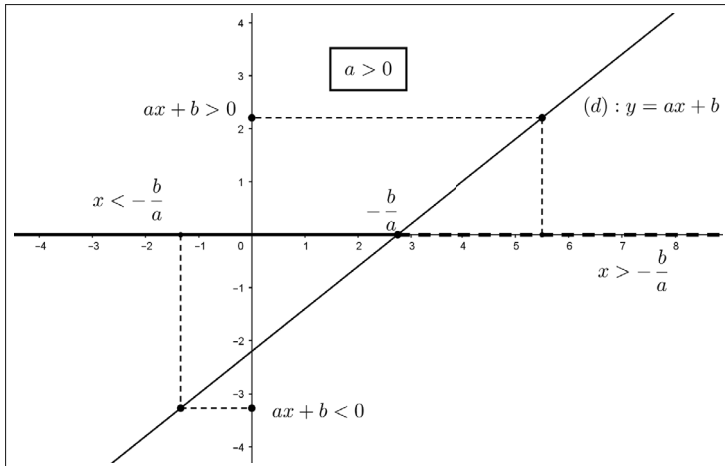
2^e cas : $a < 0$.

$$x \in I \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x \in J \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}.$$

$$I = \left] -\infty, -\frac{b}{a}\right] \quad \text{et} \quad J = \left[-\frac{b}{a}, +\infty[.$$

Remarque. Considérons la droite (d) d'équation $y = ax + b$ qui est la représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto ax + b$.

Nous illustrons graphiquement l'étude du signe du réel $ax + b$.



2.12 Signe d'un produit-d'un quotient

La règle multiplicative des signes permet d'obtenir le signe du produit ab et le signe du quotient $\frac{a}{b}$, avec $b \neq 0$, connaissant les signes des réels a et b .

Exemples. Nous illustrons cette remarque préliminaire par deux exemples.

1^{er} exemple : signe d'un produit.

Pour tout réel x , nous posons $P(x) = (1 - \frac{x}{4})(x + 1)$.

▷ Nous déterminons le signe du réel $P(x)$ en formant le tableau de signes qui suit.

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
signe de $1 - \frac{x}{4}$		+	+ 0 -	
signe de $x + 1$	-	0	+ +	
signe de $P(x)$	-	0	+ 0 -	

▷ Nous en déduisons les solutions des inéquations

$$P(x) < 0, P(x) > 0, P(x) \leq 0 \text{ et } P(x) \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[,$$

$$P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 4[,$$

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[,$$

$$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 4].$$

▷ Comme application, nous en déduisons l'ensemble des réels x pour lesquels le réel $\sqrt{P(x)}$ est défini.

En effet ce réel est défini si et seulement si $P(x) \geq 0$, c'est-à-dire pour $x \in [-1; 4]$.

2^e exemple : signe d'un quotient.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous résolvons, dans $\mathbb{R} - \{n\}$, l'inéquation $\frac{1}{x-n} \geq x-n$.

Pour $x \neq n$, désignons par (E) cette inéquation. Il vient

$$(E) \Leftrightarrow \frac{1}{x-n} - (x-n) \geq 0,$$

$$(E) \Leftrightarrow \frac{1 - (x-n)^2}{x-n} \geq 0,$$

$$(E) \Leftrightarrow \frac{(x-n)^2 - 1}{x-n} \leq 0,$$

$$(E) \Leftrightarrow \frac{((x-(n+1))(x-(n-1)))}{x-n} \leq 0.$$

Pour $x \neq n$, nous déterminons le tableau de signes du réel

$$Q(x) = \frac{((x - (n + 1))(x - (n - 1)))}{x - n}.$$

x	$-\infty$	$n - 1$	n	$n + 1$	$+\infty$		
signe de $x - (n - 1)$	-	0	+	+	+		
signe de $x - (n + 1)$	-	-	-	0	+		
signe de $x - n$	-	-	0	+	+		
signe de $Q(x)$	-	0	+		-	0	+

Puisque

$$(E) \Leftrightarrow Q(x) \leq 0,$$

nous en concluons que

$$S_{(E)} =] - \infty, n - 1] \cup]n, n + 1].$$

2.13 Inéquations du second degré

2.13.1 Inéquations $x^2 \leq a$, $x^2 < a$, $x^2 \geq a$, $x^2 > a$

Proposition. Soient a un réel donné et S l'ensemble des solutions dans \mathbb{R} de l'une de ces quatre inéquations. Nous disposons des deux tableaux suivants :

	$x^2 \leq a$	$x^2 < a$
$a > 0$	$S = [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$	$S =] - \sqrt{a}, \sqrt{a}[$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \emptyset$
$a < 0$	$S = \emptyset$	$S = \emptyset$

	$x^2 \geq a$	$x^2 > a$
$a > 0$	$S =] - \infty, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, +\infty[$	$S =] - \infty, -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}, +\infty[$
$a = 0$	$S = \mathbb{R}$	$S = \mathbb{R}^*$
$a < 0$	$S = \mathbb{R}$	$S = \mathbb{R}$

Démonstration. 1^{er} cas : $a > 0$.

Pour tout réel x , nous étudions le signe de $x^2 - a = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$.

Le tableau de signes de ce réel est :

x	$-\infty$	$-\sqrt{a}$	\sqrt{a}	$+\infty$	
signe de $x - \sqrt{a}$		-	0	+	+
signe de $x + \sqrt{a}$	-		-	0	+
signe de $x^2 - a$	+	0	-	0	+

La première ligne de chacun des deux tableaux proposés en résulte.

2^e et 3^e cas : $a \leq 0$.

Les deux dernières lignes de chacun des deux tableaux sont obtenues en analysant chaque cas.

Exemples. Nous résolvons les six inéquations suivantes :

(1) $x^2 < -2$.

(2) $x^2 \geq -1$.

(3) $(2x - 1)^2 \leq 2$.

(4) $x^2 - 2x - 2 > 0$.

(5) $x^2 - 4x + 5 \leq 0$.

(6) $x^2 + 8x - a > 0$, (discuter selon les valeurs du paramètre a).

▷ Résolution de (1).

Un carré est positif ou nul donc $S_{(1)} = \emptyset$.

▷ Résolution de (2).

Pour la même raison $S_{(2)} = \mathbb{R}$.

▷ Résolution de (3).

En appliquant la première ligne du 1^{er} tableau, nous obtenons

$$(3) \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq 2x - 1 \leq \sqrt{2},$$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Nous en concluons que $S_{(3)} = \left[\frac{1 - \sqrt{2}}{2}, \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right]$.

Remarque. Cette méthode est plus rapide que celle qui consiste à ramener la comparaison à 0, à factoriser et pour finir à faire un tableau de signes. Pour étudier le signe d'un trinôme du second degré, nous privilégierons la méthode exposée ci-dessus.

▷ Résolution de (4). Pour cette question et les deux suivantes nous commençons par mettre chaque trinôme du second degré sous sa forme canonique. Il vient :

$$(4) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 - 2 > 0,$$

$$(4) \Leftrightarrow (x - 1)^2 > 3.$$

En appliquant la deuxième ligne du 2^e tableau, nous obtenons

$$(4) \Leftrightarrow x - 1 > \sqrt{3} \text{ ou } x - 1 < -\sqrt{3},$$

$$(4) \Leftrightarrow x > 1 + \sqrt{3} \text{ ou } x < 1 - \sqrt{3}.$$

Nous en concluons

$$S_{(4)} =] - \infty, 1 - \sqrt{3}[\cup] 1 + \sqrt{3}, +\infty[.$$

▷ Résolution de (5).

Nous avons

$$(5) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 + 5 \leq 0,$$

$$(5) \Leftrightarrow (x - 2)^2 \leq -1.$$

Nous pouvons en conclure que $S_{(5)} = \emptyset$.

▷ Résolution de (6). Nous avons

$$(6) \Leftrightarrow x^2 + 2(4)x + 4^2 - 4^2 - a > 0,$$

$$(6) \Leftrightarrow (x + 4)^2 > 16 + a.$$

En observant le signe de $16 + a$, nous faisons une disjonction selon trois cas.

- 1^{er} cas : $16 + a > 0$, soit $a > -16$.

$$(6) \Leftrightarrow x + 4 < -\sqrt{a + 16} \text{ ou } x + 4 > \sqrt{a + 16},$$

$$(6) \Leftrightarrow x < -4 - \sqrt{a + 16} \text{ ou } x > -4 + \sqrt{a + 16}.$$

Dans ce cas, nous obtenons

$$S_{(6)} =] - \infty, -4 - \sqrt{a + 16}[\cup] -4 + \sqrt{a + 16}, +\infty[.$$

- 2^e cas : $16 + a = 0$, soit $a = -16$.

Dans ce cas, nous avons

$$(6) \Leftrightarrow (x + 4)^2 > 0.$$

c'est-à-dire

$$S_{(6)} = \mathbb{R} - \{-4\}.$$

- 3^e cas : $16 + a < 0$, soit $a < -16$.

Nous obtenons immédiatement $S_{(6)} = \mathbb{R}$.

2.14 Exercices corrigés

Exercice 1. Sans calculatrice

La calculatrice permet-elle de comparer ces deux nombres $x = \frac{123456789}{123456790}$
et $y = \frac{123456790}{123456791}$?

Si non, comment peut-on procéder ?

Solution

L'affichage de la calculatrice restitue une même approximation de ces deux fractions.

Ainsi nous ne pouvons pas conclure.

Nous procédons de la façon suivante :

en posant $p = 123456790$ et $q = 123456791$, nous observons que

$$0 < p < q, x = \frac{p-1}{p} \text{ et } y = \frac{q-1}{q}.$$

Nous avons

$$y - x = \frac{q-1}{q} - \frac{p-1}{p} = \frac{p(q-1) - q(p-1)}{pq} = \frac{q-p}{pq}.$$

Puisque $pq > 0$ et $q - p > 0$, nous en déduisons que $y - x > 0$, ce qui permet d'affirmer que $x < y$.

Exercice 2. Une condition nécessaire et suffisante

Soient a et b deux réels strictement positifs.

Montrer que $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ si et seulement si $a \geq b + 2$.

Sans calcul, comparer les nombres

$$\frac{\sqrt{2024} - \sqrt{2021}}{\sqrt{2}} \text{ et } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2024} + \sqrt{2021}}.$$

Solution

Si $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, alors $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \geq 0$.

Ceci donne

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - 2}{\sqrt{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \geq 0,$$

soit,

$$\frac{a - b - 2}{\sqrt{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \geq 0.$$

Puisque $\sqrt{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) > 0$, nous en déduisons

$$a - b - 2 \geq 0, \text{ c'est-à-dire } a \geq b + 2.$$

Réciproquement, nous supposons que $a \geq b + 2$.

En reprenant les calculs développés à la page précédente, nous obtenons

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - (b + 2)}{\sqrt{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \geq 0.$$

Il en résulte que

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

En prenant $a = 2024$ et $b = 2021$, nous avons $a \geq b + 2$, ce qui justifie

$$\frac{\sqrt{2024} - \sqrt{2021}}{\sqrt{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2024} + \sqrt{2021}}.$$

Exercice 3. Deux inégalités

1. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{ab}{a + b} \leq \frac{a + b}{4}.$$

Dans quel cas l'égalité est-elle réalisée ?

2. En déduire que, pour tous les réels $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$,

$$\frac{ab}{a + b} + \frac{bc}{b + c} + \frac{ca}{c + a} \leq \frac{a + b + c}{2}.$$

Solution

1. Pour tous $a > 0$ et $b > 0$, nous avons

$$\frac{a + b}{4} - \frac{ab}{a + b} = \frac{(a + b)^2 - 4ab}{4(a + b)} = \frac{(a - b)^2}{4(a + b)}.$$

Puisque $(a - b)^2 \geq 0$ et $4(a + b) > 0$, nous obtenons

$$\frac{(a - b)^2}{4(a + b)} \geq 0, \text{ soit } \frac{a + b}{4} - \frac{ab}{a + b} \geq 0.$$

Nous avons ainsi justifié que, pour tous les réels $a > 0$ et $b > 0$,

$$\frac{ab}{a + b} \leq \frac{a + b}{4}.$$

L'égalité est atteinte si et seulement si $a = b$.

2. Soient $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. Nous appliquons l'inégalité obtenue en 1, successivement en a et b , en b et c , puis en c et a . Il vient

$$\begin{aligned}\frac{ab}{a+b} &\leq \frac{a+b}{4}, \\ \frac{bc}{b+c} &\leq \frac{b+c}{4}, \\ \frac{ca}{c+a} &\leq \frac{c+a}{4}.\end{aligned}$$

Par addition membres à membres de ces trois inégalités, nous obtenons

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4} + \frac{c+a}{4}.$$

Nous en concluons que, pour tous les réels $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$,

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

Exercice 4. Une double inégalité

Soient a et b deux réels appartenant à l'intervalle $[0; 1]$. Montrer que

$$\frac{a+b}{1+ab} \in [0; 1].$$

Solution

Puisque $a \in [0; 1]$ et $b \in [0; 1]$, nous avons $a+b \geq 0$ et $1+ab > 0$.

Il en résulte que

$$\frac{a+b}{1+ab} \geq 0.$$

De plus, nous avons

$$1 - \frac{a+b}{1+ab} = \frac{1+ab-a-b}{1+ab} = \frac{1-b-a(1-b)}{1+ab} = \frac{(1-b)(1-a)}{1+ab}.$$

Comme $a \in [0; 1]$ et $b \in [0; 1]$, nous avons $1-a \geq 0$ et $1-b \geq 0$.

Nous en déduisons que

$$1 - \frac{a+b}{1+ab} \geq 0,$$

ce qui donne

$$\frac{a+b}{1+ab} \leq 1.$$

Nous en concluons que, pour tous $a \in [0; 1]$ et $b \in [0; 1]$,

$$\frac{a+b}{1+ab} \in [0; 1].$$

Exercice 5. Comparaison de deux nombres

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

Comparer les nombres $a = \frac{n^{p-1} + 1}{n^p + 1}$ et $b = \frac{n^p + 1}{n^{p+1} + 1}$.

Quel est le plus grand des deux nombres $\frac{10^{2020} + 1}{10^{2021} + 1}$ et $\frac{10^{2021} + 1}{10^{2022} + 1}$?

Solution

Nous avons

$$a - b = \frac{n^{p-1} + 1}{n^p + 1} - \frac{n^p + 1}{n^{p+1} + 1} = \frac{(n^{p-1} + 1)(n^{p+1} + 1) - (n^p + 1)^2}{(n^p + 1)(n^{p+1} + 1)},$$
$$a - b = \frac{n^{p+1} - 2n^p + n^{p-1}}{(n^p + 1)(n^{p+1} + 1)} = \frac{n^{p-1}(n - 1)^2}{(n^p + 1)(n^{p+1} + 1)}.$$

Puisque $n^{p-1}(n - 1)^2 \geq 0$ et $(n^p + 1)(n^{p+1} + 1) > 0$, nous en déduisons que $a - b \geq 0$, ce qui prouve que

$$a \geq b.$$

Il suffit de se placer dans le cas particulier $n = 10$ et $p = 2021$ pour obtenir immédiatement

$$\frac{10^{2020} + 1}{10^{2021} + 1} \geq \frac{10^{2021} + 1}{10^{2022} + 1}.$$

Exercice 6. Minoration d'une somme de deux carrés

Soient x et y deux réels tels que $x + y = \sqrt{2}$. Montrer que $x^2 + y^2 \geq 1$.

Pour quelles valeurs des réels x et y l'égalité est-elle réalisée ?

Solution

Sachant que $y = x - \sqrt{2}$, nous obtenons

$$x^2 + y^2 - 1 = x^2 + (x - \sqrt{2})^2 - 1 = 2x^2 - 2x\sqrt{2} + 1 = 2\left(x^2 - x\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

Il en résulte

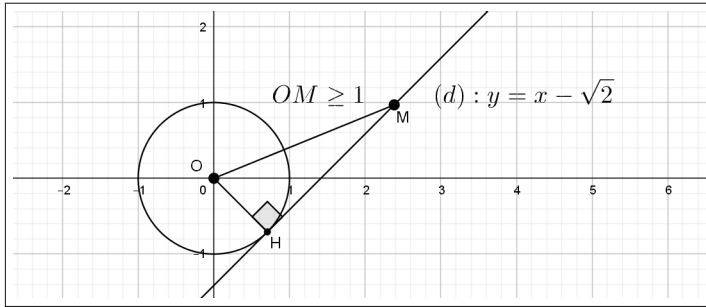
$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0.$$

Nous en concluons que, pour tous les réels x et y ,

$$x + y = \sqrt{2} \text{ implique } x^2 + y^2 \geq 1.$$

L'égalité est atteinte si et seulement si $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque. Avec quelques connaissances en géométrie analytique (chapitre 8), l'équation $x^2 + y^2 = 1$ est celle du cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormal d'origine O . Nous pouvons observer que la droite (d) d'équation $y = x - \sqrt{2}$ est tangente à ce cercle au point H de coordonnées $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. L'inégalité obtenue signifie que tout point de la droite (d) est plus "éloigné" de l'origine O que tout point du cercle unité.



Exercice 7. Comparaison de deux cubes

Montrer que, quels que soient les réels a et b , $a \leq b$ équivaut à $a^3 \leq b^3$.

Solution

Soient deux réels a et b tels que $a \leq b$. Nous étudions le signe de $a^3 - b^3$.

Nous savons que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Déterminons le signe de $a^2 + ab + b^2$. Nous observons que

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2a\left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}.$$

Ainsi $a^2 + ab + b^2 \geq 0$, et puisque $a - b \leq 0$, nous en déduisons que $a^3 - b^3 \leq 0$, ce qui prouve

$$a \leq b \text{ implique } a^3 \leq b^3.$$

Réciproquement, supposons que $a^3 \leq b^3$. D'après la première partie, nous savons que

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Comme $a^3 - b^3 \leq 0$ et $a^2 + ab + b^2 \geq 0$, nous en déduisons

$$a \leq b.$$

Remarque. L'implication, $a \leq b \Rightarrow a^3 \leq b^3$, signifie, comme nous le verrons au chapitre 5, que la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante sur \mathbb{R} .

Exercice 8. Caractérisation d'un triangle équilatéral

1. Soient a , b et c trois réels.

En développant $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$, montrer que l'on dispose de l'inégalité

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

2. On suppose que $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$ sont les longueurs des côtés d'un triangle tels que $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Prouver que ce triangle est équilatéral.

Étudier la réciproque.

Solution

1. Nous avons

$$\begin{aligned}(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2(ab + bc + ca), \\ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 &= 2((a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)).\end{aligned}$$

Puisque $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$, il en résulte que

$$(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) \geq 0.$$

L'inégalité $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ est ainsi prouvée.

2. \triangleright Nous utilisons l'identité développée à la question 1.

Si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, alors $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$,

ce qui implique que chaque carré de cette somme est nul.

Nous en déduisons

$$a = b = c.$$

Par conséquent, le triangle concerné est équilatéral.

\triangleright Réciproquement si $a = b = c$, alors nous avons

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0.$$

Il en résulte que

$$2((a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)) = 0,$$

ce qui prouve

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Exercice 9. Somme des n premiers entiers

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

1. En remarquant que $S(n) = n + (n - 1) + \dots + 3 + 2 + 1$, montrer que

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous considérons les deux nombres entiers

$$a = n(1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)) \text{ et } b = (n - 1)(1 + 2 + 3 + \dots + n).$$

Proposer un algorithme et son implémentation en Python qui compare les deux entiers a et b lorsque n est choisi en entrée.

Prouver cette comparaison.

Solution

1. Soit n un entier naturel non nul. Nous pouvons écrire simultanément

$$\begin{cases} S(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n, \\ S(n) = n + (n - 1) + \dots + 3 + 2 + 1. \end{cases}$$

Par addition membres à membres, il vient

$$2S(n) = \underbrace{(n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1)}_{n \text{ termes}} = n(n + 1).$$

Ainsi nous obtenons

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. \triangleright Pour restituer les entiers a et b , nous proposons l'algorithme qui suit.

```

s ← 0
r ← 0
Pour k allant de 1 à n - 1
    s ← s + k
    a ← n * s
Fin Pour
Pour k allant de 1 à n
    s ← s + k
    b ← (n - 1) * s
Fin Pour

```

L'implémentation en Python donne

```
n=int(input("n=" ,))
s=0
r=0
for k in range(1,n):
    s=s+k
    a=n*s
for k in range(1,n+1):
    r=r+k
    b=(n-1)*r
print("a=" ,a)
print("b=" ,b)
```

En exécutant ce programme pour $n = 2$ puis $n = 99$ par exemple, nous obtenons

```
>>>
```

```
n = 2
```

```
a = 2
```

```
b = 3
```

```
>>>
```

```
n = 99
```

```
a = 480249
```

```
b = 485100
```

Nous conjecturons que $b \geq a$.

▷ Nous prouvons cette inégalité en calculant $b - a$.

Nous avons

$$b - a = (n - 1)S(n) - nS(n - 1) = (n - 1)\frac{n(n + 1)}{2} - n\frac{(n - 1)n}{2} = \frac{(n - 1)n}{2}.$$

Or pour $n \geq 1$, nous avons

$$\frac{(n - 1)n}{2} \geq 0,$$

ce qui démontre que $b \geq a$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous obtenons

$$n((1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1))) \leq (n - 1)(1 + 2 + 3 + \dots + n).$$

Exercice 10. Minoration d'une somme avec ...

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}.$$

1. Calculer $u(1)$, $u(2)$, $u(3)$, $u(4)$.
2. Montrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u(n) \geq \frac{1}{2}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer de $u(n+1) - u(n)$.

En déduire un algorithme qui restitue la valeur du réel $u(n)$, l'entier n étant choisi par l'utilisateur.

Solution

1. Nous avons

$$\begin{aligned} u(1) &= \frac{1}{2}. \\ u(2) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}. \\ u(3) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}. \\ u(4) &= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{533}{840}. \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < n+1 \leq 2n, \\ 0 < n+2 \leq 2n, \\ \quad \quad \quad \vdots \\ 0 < 2n \leq 2n. \end{array} \right.$$

En appliquant la propriété de comparaison des inverses strictement positifs, il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}, \\ \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{2n}, \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}. \end{array} \right.$$

En additionnant membres à membres ces n inégalités, nous obtenons

$$u(n) \geq n \times \frac{1}{2n}.$$

Nous en concluons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u(n) \geq \frac{1}{2}.$$

3. ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$u(n+1) - u(n) = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right).$$

Après simplifications ("télescopage" des termes opposés), il reste

$$u(n+1) - u(n) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)}.$$

▷ L'algorithme demandé repose sur l'égalité

$$u(n+1) = u(n) + \frac{1}{2(2n+1)(n+1)}, \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ainsi nous obtenons

```

u ← 0,5
Pour k allant de 1 à n
    u ← u + 1/(2 * (k + 1) * (2 * k + 1))
Fin Pour
    
```

L'implémentation en Python donne

```

n=int(input("n="))
u=0.5
for k in range(1,n):
    u=u+1/(2*(k+1)*(2*k+1))
print("n=",n,"u=",u)
    
```

Nous vérifions les calculs de la première question.

```

>>>
n = 2 u = 0.5833333333333334,
>>>
n = 3 u = 0.6166666666666667,
>>>
n = 4 u = 0.6345238095238096,
>>>
n = 100 u = 0.6906534304818241.
    
```

Exercice 11. Plan de vol

Un avion assure un aller-retour entre deux villes A et B , la ville B est située à l'est de A .

En l'absence de vent, la vitesse de l'avion est constante et égale à V .

En présence de vent ouest-est de vitesse $v < V$, la vitesse de l'avion est :

- à l'aller $V + v$,
- au retour $V - v$.

1. Soit d la distance AB . Exprimer en l'absence de vent, la durée t du vol aller-retour en fonction de d et V .

2. En présence de vent, déterminer la durée T du vol aller-retour en fonction de d , V et v .

3. L'effet du vent est-il favorable ?

Solution

1. Nous avons immédiatement

$$t = \frac{d}{V} + \frac{d}{V} = \frac{2d}{V}.$$

2. En présence de vent ouest-est de vitesse $v < V$, nous avons tout aussi immédiatement

$$T = \frac{d}{V + v} + \frac{d}{V - v}.$$

3. Pour répondre à cette question, nous calculons $T - t$. Il vient

$$\begin{aligned} T - t &= \frac{d}{V + v} + \frac{d}{V - v} - \frac{2d}{V}, \\ T - t &= d \left(\frac{V(V - v) + V(v + v) - 2(V + v)(V - v)}{V(V + v)(V - v)} \right), \\ T - t &= \frac{2dv^2}{V(V + v)(V - v)}. \end{aligned}$$

Puisque $V > v$, nous en déduisons que $T - t > 0$, c'est-à-dire $T > t$.

Nous pouvons en conclure que, quelle que soit la vitesse du vent, son effet est toujours défavorable à la durée d'un vol aller-retour.

Exercice 12. Résolutions d'inéquations

Résoudre les inéquations suivantes :

(1) $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 < 0$.

(2) $x^2 < (2x + 1)^2 \leq 4x^2$.

(3) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) + (x - 2)(x - 3)(x - 4) + (x - 3)(x - 4)(2x - 5) > 0$.

(4) $-2 \leq \frac{x + 2}{x - 2} \leq 2$.

Solution

▷ Résolution de (1).

$$(1) \Leftrightarrow x^2(x+2) - 5(x+2) < 0,$$

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 - 5)(x+2) < 0.$$

Tableau de signes du réel $p(x) = (x^2 - 5)(x+2)$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	-2	$\sqrt{5}$	$+\infty$
signe de $x+2$		-	0	+	+
signe de $x+\sqrt{5}$	-	0	+	+	+
signe de $x-\sqrt{5}$	-	-	-	0	+
signe de $p(x)$	-	0	+	0	+

Nous en déduisons

$$S_1 =]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]-2, \sqrt{5}[.$$

▷ Résolution de (2).

$$(2) \Leftrightarrow (2x+1)^2 - x^2 > 0 \text{ et } (2x+1)^2 - 4x^2 \leq 0,$$

$$(2) \Leftrightarrow ((2x+1)-x)((2x+1)+x) > 0 \text{ et } ((2x+1)-2x)((2x+1)+2x) \leq 0,$$

$$(2) \Leftrightarrow (x+1)(3x+1) > 0 \text{ et } 4x+1 \leq 0,$$

$$(2) \Leftrightarrow (x+1)(3x+1) > 0 \text{ et } x \leq -\frac{1}{4}.$$

Tableau de signes du réel $p(x) = (x+1)(3x+1)$.

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
signe de $x+1$		-	0	+
signe de $3x+1$	-	-	0	+
signe de $p(x)$	+	0	-	0

Nous en déduisons

$$S_2 = (]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{3}, +\infty[) \cap]-\infty, -\frac{1}{4}] =]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}].$$

▷ Résolution de (3).

$$(3) \Leftrightarrow (x-2)(x-3)(x-1+x-4) + (x-3)(x-4)(2x-5) > 0,$$

$$(3) \Leftrightarrow (x-2)(x-3)(2x-5) + (x-3)(x-4)(2x-5) > 0,$$

$$(3) \Leftrightarrow (x-3)(2x-5)(x-2+x-4) + > 0,$$

$$(3) \Leftrightarrow (x-3)(2x-5)(2x-6) > 0,$$

$$(3) \Leftrightarrow 2(x-3)^2(2x-5) > 0,$$

$$(3) \Leftrightarrow x \neq 3 \text{ et } x > \frac{5}{2}.$$

Nous en concluons que

$$S_3 =]\frac{5}{2}, 3[\cup]3, +\infty[.$$

▷ Résolution de (4).

Pour $x \neq 2$, nous avons

$$(4) \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-2} \geq -2 \text{ et } \frac{x+2}{x-2} \leq 2.$$

★ Résolution de $\frac{x+2}{x-2} \geq -2$, notée (a).

$$(a) \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-2} + 2 \geq 0,$$

$$(a) \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x-2} \geq 0.$$

Tableau de signe du réel $q(x) = \frac{3x-2}{x-2}$.

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$	
signe de $3x-2$	-	0	+	+	
signe de $x-2$	-	-	0	+	
signe de $q(x)$	+	0	-		+

Nous en déduisons

$$S_a =]-\infty, \frac{2}{3}] \cup]2, +\infty[.$$

★ Résolution de $\frac{x+2}{x-2} \leq 2$, notée (b).

$$(b) \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-2} - 2 \leq 0,$$

$$(b) \Leftrightarrow \frac{6-x}{x-2} \leq 0.$$

Tableau de signe du réel $q(x) = \frac{6-x}{x-2}$.

x	$-\infty$	2	6	$+\infty$
signe de $x - 2$	$-$	0	$+$	$+$
signe de $6 - x$	$+$	$+$	0	$-$
signe de $q(x)$	$-$	$ $	$+$	0

Nous en déduisons

$$S_b =] - \infty, 2[\cup [6, +\infty[.$$

Finalement, nous en concluons que

$$S_4 = S_a \cap S_b =] - \infty, \frac{2}{3}] \cup [6, +\infty[.$$

Exercice 13. Un produit avec ... ALGO

1. Soit k un entier naturel non nul.

Prouver l'inégalité

$$\sqrt{2k-1} \times \sqrt{2k+1} < 2k,$$

en déduire

$$\frac{2k-1}{2k} < \frac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1}}.$$

2. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, nous posons

$$v(n) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}$$

Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $v(n) < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Résoudre dans \mathbb{N}^* l'inéquation $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < 0,1$.

En déduire un entier naturel N à partir duquel $v(n) \leq 0,1$.

3. Que fait le script qui suit ?

```

from math import*
p=int(input("p="))
n=1
while 1/(2*n+1)**(0.5)>=10**(-p):
    n=n+1
print("n=",n)

```

Solution

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

▷ Puisque

$$(4k^2 - 1) - 4k^2 = -1 < 0,$$

nous en déduisons

$$(4k^2 - 1) < 4k^2.$$

Les réels $4k^2 - 1$ et $4k^2$ sont strictement positifs ; la racine carrée conservant l'ordre, il en résulte

$$\sqrt{4k^2 - 1} < \sqrt{4k^2}, \text{ c'est-à-dire } \sqrt{(2k - 1)(2k + 1)} < 2k.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons $2k - 1 > 0$ et $2k + 1 > 0$, ce qui implique

$$\sqrt{2k - 1} \times \sqrt{2k + 1} < 2k.$$

▷ À nouveau pour $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\sqrt{2k - 1} > 0$, $\sqrt{2k + 1} > 0$ et $2k > 0$, donc nous pouvons appliquer la propriété de comparaison des inverses de même signe, ce qui donne

$$\frac{1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k - 1} \times \sqrt{2k + 1}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2k} < \frac{\sqrt{2k - 1}}{(2k - 1) \times \sqrt{2k + 1}}.$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par $2k - 1 > 0$, nous obtenons en conclusion

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{2k - 1}{2k} < \frac{\sqrt{2k - 1}}{\sqrt{2k + 1}}.$$

2. ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

En remplaçant dans cette inégalité l'entier k , successivement par

$$1, 2, \dots, n,$$

il vient :

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}, \\
0 &< \frac{3}{4} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \\
&\vdots \\
0 &< \frac{2n-1}{2n} < \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}.
\end{aligned}$$

En multipliant membres à membres ces $2n - 1$ inégalités strictement positives, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \cdots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \times \cdots \times \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}},$$

ce qui donne, après simplification du second membre,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v(n) < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

▷ Résolution, dans \mathbb{N}^* , de l'inéquation

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < 0,1$$

En appliquant les propriétés de comparaison des inverses de même signe puis de comparaison des carrés, nous obtenons les équivalences

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < 10^{-1} \Leftrightarrow \sqrt{2n+1} > 10 \Leftrightarrow 2n+1 > 100 \Leftrightarrow n > \frac{99}{2}.$$

Puisque $n \in \mathbb{N}^*$, nous en déduisons que l'ensemble des solutions de cette inéquation est

$$\left] \frac{99}{2}, +\infty[\cap \mathbb{N}^* = \{50, 51, \dots\}.$$

▷ Nous en déduisons

$$n \geq 50 \text{ implique } v(n) < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < 0,1,$$

ce qui signifie qu'une condition **suffisante**² pour que $v(n) \leq 0,1$ est $n \geq 50$.

Ainsi $N = 50$ convient.

3. Ce programme restitue un rang N à partir duquel $v(n) < 10^{-p}$.

Nous l'exécutons successivement pour $p = 2$ et $p = 3$.

>>>

$n = 5000$,

>>>

$n = 500000$.

2. Annexe : § 3.5

Exercice 14. Comparaison des moyennes arithmétique et quadratique

1. Soit a un réel. Justifier l'inégalité

$$a \leq |a|.$$

2. Soient x et y deux nombres réels. Montrer

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}.$$

En déduire

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Plus généralement, soient un entier naturel $n \geq 2$ et a_1, a_2, \dots, a_n , n réels.

• La moyenne arithmétique de ces n réels est le réel noté \bar{a} défini par

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

• La moyenne quadratique de ces n réels est le réel positif q défini par

$$q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

3. En posant

$$s = (a_1 - \bar{a}) + (a_2 - \bar{a}) + \dots + (a_n - \bar{a}),$$

justifier que $s = 0$.

Exprimer en fonction de n , q et \bar{a} le réel positif

$$S = (a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2.$$

En déduire l'inégalité

$$\bar{a} \leq q.$$

Solution

1. Soit un réel a .

En utilisant la définition de la valeur absolue du réel a , il vient :

$$|a| - a = \begin{cases} a - a & \text{si } a \geq 0 \\ -a - a & \text{si } a < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \geq 0 \\ -2a > 0 & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

Nous en déduisons

$$|a| - a \geq 0,$$

ce qui justifie, pour tout réel a , l'inégalité

$$a \leq |a|.$$

2. Soient x et y deux réels.

▷ Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{2} - \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 &= \frac{2(x^2 + y^2) - (x + y)^2}{4}, \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{4}, \\ &= \frac{(x - y)^2}{4} \geq 0. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\frac{x^2 + y^2}{2} - \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \geq 0,$$

ce qui prouve, pour tous les réels x et y ,

$$\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

▷ Puisque

$$\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ et } \frac{x^2 + y^2}{2} \geq 0,$$

en utilisant la propriété de comparaison des racines carrées, nous en déduisons

$$\sqrt{\left(\frac{x + y}{2}\right)^2} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}},$$

ce qui donne

$$\left|\frac{x + y}{2}\right| \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}.$$

En appliquant l'inégalité obtenue à la question 1, nous avons

$$\frac{x + y}{2} \leq \left|\frac{x + y}{2}\right|.$$

Par transitivité de la relation \leq , quels que soient les réels x et y , nous en concluons

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

3. Soient n réels a_1, a_2, \dots, a_n , avec $n \geq 2$.

▷ En observant que

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n \times \bar{a},$$

nous obtenons

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n - \underbrace{(\bar{a} + \bar{a} + \dots + \bar{a})}_{n \text{ termes}} = n \times \bar{a} - n \times \bar{a} = 0.$$

▷ Nous exprimons S en fonction n , q et \bar{a} .

En développant chaque carré et en remarquant que

$$n \times q^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2,$$

il vient

$$\begin{aligned} S &= (a_1^2 - 2a_1\bar{a} + \bar{a}^2) + (a_2^2 - 2a_2\bar{a} + \bar{a}^2) + \dots + (a_n^2 - 2a_n\bar{a} + \bar{a}^2), \\ &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - 2\bar{a}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \underbrace{(\bar{a}^2 + \bar{a}^2 + \dots + \bar{a}^2)}_{n \text{ termes}}, \\ &= n \times q^2 - 2\bar{a} \times n\bar{a} + n \times \bar{a}^2, \\ &= nq^2 - n\bar{a}^2, \\ &= n(q^2 - \bar{a}^2). \end{aligned}$$

▷ Puisque $S \geq 0$ et $n \geq 2$, nous en déduisons

$$q^2 - \bar{a}^2 \geq 0, \text{ soit } \bar{a}^2 \leq q^2.$$

Il en résulte, par comparaison des racines carrées,

$$\sqrt{\bar{a}^2} \leq \sqrt{q^2},$$

ce qui implique, car $q \geq 0$,

$$|\bar{a}| \leq q.$$

Or nous savons que

$$\bar{a} \leq |\bar{a}|.$$

Par transitivité de la relation \leq , nous en concluons

$$\bar{a} \leq q.$$

Arithmétique dans \mathbb{N}

Au primaire et au collège, vous avez abordé la divisibilité par la pratique de nombreux exercices concrets. Dans ce chapitre nous proposons d'approfondir ces connaissances par une introduction rigoureuse de la théorie de la divisibilité dans l'ensemble des entiers naturels.

C'est le fondement d'une branche des mathématiques qui est appelée arithmétique. Cette dernière est très féconde et ouverte puisque de nombreuses questions de formulation simple, notamment sur les nombres premiers, ne sont pas actuellement résolues. Un exemple en est la conjecture de Goldbach (1690-1764) "*tout nombre pair plus grand que 2 est la somme de deux nombres premiers*". Personne, jusqu'à aujourd'hui, n'est parvenu à établir si cette proposition est vraie ou fausse. Les questions traitant de l'arithmétique sont anciennes mais cette science connaît actuellement un essor important dû notamment à l'étude de la cryptographie (les codes secrets) et aux développements algorithmiques à ce sujet en informatique.

Nous proposons d'ailleurs dans ce chapitre plusieurs programmes Python qui vous seront certainement utiles par la suite comme ceux qui renvoient :

- pour un entier donné, à la liste de ces diviseurs, un test de primalité ou sa décomposition en un produit de facteurs premiers,
- pour deux entiers donnés, à leur division euclidienne ainsi que leur pgcd.

3.1 La relation divise dans \mathbb{N}

Définition. Soient a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$.

On dit que b divise a (ou que b est un diviseur de a) si et seulement si il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $a = b \times q$.

On note $b|a$ lorsque b divise a .

Nous retiendrons que

$$b|a \Leftrightarrow \text{il existe } q \in \mathbb{N} \text{ tel que } a = b \times q.$$

Remarques. Nous en faisons cinq.

- Lorsque b divise a , on dit aussi que a est divisible par b ou bien que a est un multiple de b .

- Pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, $b|0$ car $0 = b \times 0$.

- $0|0$ car $0 = 0 \times 0$.

- Mais 0 ne divise aucun entier naturel non nul.

En effet, par l'absurde¹, s'il existe $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $0|a$, alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $a = 0 \times q = 0$, ce qui est contradictoire avec $a \neq 0$.

- On désigne par $Div(a)$ l'ensemble des diviseurs de a .

Exemple. Étant donné un entier naturel N , nous proposons de déterminer ses diviseurs avec un algorithme qui teste sa divisibilité par tous les entiers compris entre 1 et N . C'est un peu brutal car nous ne tenons pas compte de critères de divisibilité mais c'est adapté à un traitement informatique.

Pour k allant de 1 à N Si $k N$ alors Afficher k Fin Pour	<pre>from math import * n=int(input("n=")) L=[] for k in range(1,n+1): if n%k==0: L.append(k) print(L)</pre>
--	--

L'implémentation en Python nécessite deux précisions.

▷ $L=[]$ est une liste vide dans laquelle les diviseurs vont être stockés par l'instruction $L.append(k)$.

1. Annexe § 5.1

$\triangleright n \% k == 0$ traduit que k divise n puisque cette instruction signifie que le reste de la division de n par k est nulle.

Après exécution de ce programme, nous obtenons par exemple les diviseurs de :

```
>>> n = 2021
[1, 43, 47, 2021].
>>> n = 12064
[1, 2, 4, 8, 13, 16, 26, 29, 32, 52, 58, 104, 116, 208, 232, 377, 416, 464, 754,
928, 1508, 3016, 6032, 12064].
>>> n = 11131
[1, 11131], ce qui justifie que 11131 est un nombre premier.
```

Proposition. *La relation $|$ est une relation d'ordre dans \mathbb{N} , ce qui signifie*

- Pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a|a$.

La relation divise est réflexive.

- Pour tous les entiers $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$, si $a|b$ et $b|a$, alors $a = b$.

La relation divise est antisymétrique.

- Pour tous les entiers $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{N}$, si $a|b$ et $b|c$, alors $a|c$.

La relation divise est transitive.

Démonstration. • Réflexivité.

Soit $a \in \mathbb{N}$. Nous avons $a = a \times 1$, donc $a|a$.

- Antisymétrie.

Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a|b$ et $b|a$. Il existe q et q' entiers naturels tels que $b = aq$ et $a = bq'$.

Nous en déduisons que $a = (aq)q' = a(qq')$. Puisque $a \neq 0$, il vient $qq' = 1$.

Or nous savons que q et q' sont des entiers naturels. Il en résulte que $q = q' = 1$, ce qui justifie que $a = b$.

- Transitivité.

Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{N}$ tels que $a|b$ et $b|c$.

Il existe q et q' entiers naturels tels que $b = aq$ et $c = bq'$.

Nous en déduisons que $c = (aq)q' = a(qq')$, avec $qq' \in \mathbb{N}$.

Nous avons ainsi prouvé que $a|c$.

Remarques. Nous en donnons deux.

• La relation $|$ est une relation d'ordre *partiel* car deux entiers naturels ne sont pas toujours comparables pour $|$, par opposition à la relation \leq qui est d'ordre *total* dans \mathbb{R} .

Un contre-exemple est obtenu en prenant $a = 7$ et $b = 10$.

• Pour tout $a \in \mathbb{N}$, $1|a$ et $a|a$.

En effet nous avons $a = 1 \times a$.

Nous en déduisons que $\{1, a\} \subset \text{Div}(a)$.

Proposition (Lien entre $|$ et \leq). *Soient a et b deux entiers naturels non nuls.*

$$\text{Si } b|a, \text{ alors } b \leq a.$$

Démonstration. Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Si $b|a$, alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq$.

Puisque $a \in \mathbb{N}^*$, nous avons $q \geq 1$.

Comme $b > 0$, nous en déduisons que $bq \geq b$, ce qui justifie que $a \geq b$.

Remarque. La réciproque est évidemment fautive. Un contre-exemple² est $a = 12$ et $b = 7$.

En effet nous avons $7 \leq 12$ mais 7 ne divise pas 12.

3.2 La division euclidienne dans \mathbb{N}

Soient a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$. Lorsque $a|b$, nous avons effectué la division de a par b . Cette dernière fournit un quotient $q \in \mathbb{N}$ et un reste égal à 0.

Nous savons que la pratique de la division des nombres entiers fournit en général un quotient $q \in \mathbb{N}$ et un reste qui est un entier $r \geq 0$. C'est ce que nous précisons et démontrons dans la proposition suivante.

Proposition. *Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.*

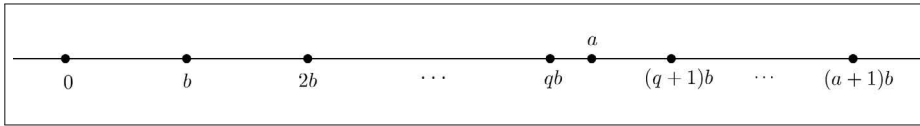
Il existe un unique $q \in \mathbb{N}$ et un unique $r \in \mathbb{N}$ tels que

$$a = b \times q + r, \text{ avec } 0 \leq r < b.$$

Démonstration. • Existence du couple (q, r) .

Nous représentons sur la droite numérique les multiples de $b > 0$, rangés par ordre croissant, de 0 jusqu'à $(a + 1)b$.

2. Annexe § 5.3



Nous avons $b \geq 1$. Puisque $a + 1 > 0$, nous en déduisons

$$(a + 1)b \geq a + 1 > a.$$

Par conséquent, $a \in [0, (a + 1)b[$.

Il en résulte que a peut être rangé entre deux multiples consécutifs de b .

Plus précisément, nous obtenons qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$a \in [bq, b(q + 1)[.$$

Posons $r = a - bq$. Nous avons

$$a = bq + r.$$

De plus, puisque $bq \leq a < b(q + 1)$, nous en déduisons

$$0 \leq a - bq < b, \text{ soit } 0 \leq r < b.$$

Ainsi nous avons prouvé qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que

$$a = b \times q + r, \text{ avec } 0 \leq r < b.$$

- Unicité du couple (q, r) .

Supposons qu'il existe deux couples (q, r) et (q', r') d'entiers naturels tels que

$$a = bq + r, \text{ avec } 0 \leq r < b$$

et

$$a = bq' + r', \text{ avec } 0 \leq r' < b.$$

Nous en déduisons que $bq + r = bq' + r'$, soit $b(q - q') = r' - r$.

Puisque $0 \leq r < b$, nous avons $-b < -r \leq 0$.

En additionnant membres à membres les deux doubles inégalités

$$\begin{cases} 0 \leq r' < b, \\ -b < -r \leq 0. \end{cases},$$

nous obtenons :

$$-b < r' - r < b, \text{ c'est-à-dire, } -b < b(q - q') < b.$$

Puisque que $b \neq 0$, nous en déduisons

$$-1 < q - q' < 1.$$

Or $q - q'$ est un entier, donc $q - q' = 0$, ce qui prouve que $q = q'$ et par suite $r = r'$.

Exemple. La division euclidienne d'un entier naturel n par 2 donne 0 ou 1 pour reste, ce qui permet d'obtenir par disjonction

un entier naturel n *pair* de la forme $n = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}$,

ou

un entier naturel n *impair* de la forme $n = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Algorithme (de la division euclidienne). Dans cet algorithme $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ désigne la partie entière de la fraction $\frac{a}{b}$, qui est par définition l'unique entier relatif satisfaisant à

$$\lfloor \frac{a}{b} \rfloor \leq \frac{a}{b} < \lfloor \frac{a}{b} \rfloor + 1.$$

$q \leftarrow \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ $r \leftarrow a - bq$	<pre> from math import * a=int (input ("a=")) b=int (input ("b=")) q=floor (a/b) r=a-q*b print ("q=", q) print ("r=", r) </pre>
--	--

Par exemple, la division euclidienne de 5673 par 14 donne

```

>>>
q = 405,
r = 3.

```

Lemme (d'Euclide). Soit r le reste de la division euclidienne de $a \in \mathbb{N}$ par $b \in \mathbb{N}^*$.

Si $d \geq 1$ est un diviseur de a et b , alors d est un diviseur de b et r .

En particulier nous retiendrons que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$.

Démonstration. Nous avons $a = bq + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < b$.

Puisque $d|a$ et $d|b$, il existe k et k' entiers naturels tels que $a = kd$ et $b = k'd$.

Il en résulte que

$$r = a - bq = kd - (k'd)q = (k - k'q)d.$$

Comme $r \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}^*$, nous avons $k - k'q \in \mathbb{N}$.

Nous en déduisons que $d|r$, donc d est un diviseur de b et r .

Ainsi, en particulier, si $d = \text{pgcd}(a, b)$, alors $d = \text{pgcd}(b, r)$.

Algorithme (algorithme d'Euclide). Avec les notations ci-dessus, le principe de cet algorithme est basé sur le lemme précédent et sur la propriété, admise à notre niveau, que le $\text{pgcd}(a, b)$ est le dernier reste non nul dans l'itération du lemme d'Euclide.

Nous obtenons

<pre> Tant Que $b \neq 0$ $q \leftarrow \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ $r \leftarrow a - bq$ $b \leftarrow a$ $a \leftarrow r$ Fin Tant Que Afficher a </pre>	<pre> from math import * a=int(input("a=")) b=int(input("b=")) while b!=0: r=a%b a=b b=r print("pgcd(a,b)=", a) </pre>
---	--

Par exemple, nous obtenons, pour

$$a = 4116 \text{ et } b = 720$$

>>>

$$\text{pgcd}(a,b) = 12.$$

$$a = 22231 \text{ et } b = 574$$

>>>

$$\text{pgcd}(a,b) = 1.$$

Remarque. Dans ce dernier exemple, on dit que les entiers $a = 22231$ et $b = 574$ sont premiers entre eux.

Ce point sera précisé au paragraphe 3.5.

Une version plus synthétique est acquise en définissant la fonction Python appelée $\text{pgcd}(a, b)$ qui suit.

```
from math import *
def pgcd(a, b):
    while b != 0:
        r = a % b
        a = b
        b = r
    return a
```

Ainsi, cette fonction python restitue par exemple
`>>> pgcd(15330,350)`
70.

3.3 Nombres premiers

Définition. *Un entier naturel $p > 1$ est premier si et seulement si il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.*

En d'autres termes, $p > 1$ est premier si et seulement si $\text{Div}(p) = \{1, p\}$.

Remarques. Nous en faisons trois.

- 0 et 1 ne sont pas premiers car $\text{Div}(0) = \mathbb{N}$ et $\text{Div}(1) = \{1\}$.
- 2 est le seul nombre premier pair.
- Un entier naturel non premier est dit composé.

Proposition. *Tout entier naturel $n > 1$ admet au moins un diviseur premier.*

Démonstration. Si n est premier, alors n admet un diviseur premier : lui-même.

Si n n'est pas premier, alors n admet d'autres diviseurs que 1 et n .

Considérons le plus petit diviseur p de n distinct de 1 et de n .

Supposons par l'absurde³ que p est non premier.

Dans ce cas, p admet un diviseur d tel que $1 < d < p$ et $d|p$.

Mais nous savons que $p|n$.

Par transitivité de la relation divise, $d|p$ et $p|n$ implique $d|n$, avec $1 < d < p$.

Ceci est contradictoire avec p qui est le plus petit diviseur de n .

3. Annexe § 5.1

Par l'absurde, nous avons prouvé que p est premier. La proposition est ainsi démontrée.

Remarque. Nous retiendrons de cette démonstration que si p est le plus petit diviseur de n , distinct de 1 et n , alors p est premier.

Proposition. *Il existe une infinité de nombres premiers.*

Démonstration. Nous raisonnons à nouveau par l'absurde.

Supposons que l'ensemble \mathbb{P} des nombres premiers est fini.

Posons $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, \dots, p\}$, avec $2 < 3 < 5 < 7 < \dots < p$.

Considérons l'entier naturel $N = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1$.

Puisque $N > 1$, en appliquant la proposition précédente, N admet un diviseur premier p' .

Or l'égalité $N = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1$ signifie que la division euclidienne de N par un nombre premier situé entre 2 et p donne 1 pour reste. Par conséquent aucun élément de \mathbb{P} est un diviseur de N .

Il en résulte que $p' \notin \mathbb{P}$, c'est-à-dire $p' > p$.

C'est contradictoire avec \mathbb{P} fini et majoré par p .

Par l'absurde, nous avons démontré que l'ensemble de nombres premiers est infini.

Proposition (test de primalité). *Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.*

Si n n'est pas premier alors il admet un diviseur premier p tel que $p^2 \leq n$.

Démonstration. Puisque $n > 1$ n'est pas premier, cet entier admet un diviseur premier distinct de 1 et n .

Désignons par p le plus petit des diviseurs de n .

Par conséquent il existe un entier naturel d tel que $n = p \times d$

Nous savons d'après la proposition du diviseur premier que p est premier donc $p \geq 2$.

Par ailleurs, justifions que $d \geq 2$. En effet, par l'absurde, supposons que $d < 2$.

Si $d = 0$, alors $n = 0$, ce qui contredit $n \geq 2$.

Si $d = 1$, alors $n = p$, ce qui est impossible car p distinct de 1 et n .

Ces deux contradictions justifient que $d \geq 2$.

Ainsi nous avons $2 \leq p \leq d$.

En multipliant par $p > 0$ les deux membres de cette inégalité, nous en déduisons :

$$p^2 \leq p \times d, \text{ soit } p^2 \leq n.$$

Nous avons démontré que si n n'est pas premier, alors il admet un diviseur premier p tel que $p^2 \leq n$.

Algorithme (test de primalité). La forme contraposée⁴ de cette proposition est

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Si n n'admet aucun diviseur premier p tel que $p^2 \leq n$, alors n est premier.

Cette version du test de primalité permet de proposer un algorithme pour reconnaître si un nombre est premier.

```

d prend la valeur 3
Tant Que  $d^2 \leq N$  et  $d$  ne divise pas  $N$ 
     $d \leftarrow d + 2$ 
Fin Tant Que
Si  $d^2 > N$  et  $N > 1$ 
    Afficher " $N$  est premier",  $N$ 
Sinon
    Afficher " $N$  non premier",  $N$ 
    Afficher " $d$  est le plus petit diviseur",  $d$ 
Fin de Si
    
```

L'implémentation en Python donne

```

from math import *
n=int(input("n="))
d=3
while d**2<=n and n%d!=0:
    d=d+2
if d*d>n and n>1:
    print("n=",n," est _premier ")
else :
    print("n=",n," non_premier ")
    print("d=",d," est _le _plus _petit _diviseur ")
    
```

4. Annexe § 5.2

Par exemple, nous obtenons

>>>

$n = 853661$ non premier,

$d = 41$ est le plus petit diviseur.

>>>

$n = 131071$ est premier.

Remarque. La ligne " d prend la valeur $d + 2$ " précise que ce programme ne teste que des nombres impairs à partir de $d = 3$. En effet un nombre premier supérieur strictement à 2 est impair. Cette incrémentation de deux unités permet de rendre plus rapide l'exécution de cet algorithme.

3.4 Produit de facteurs premiers

Théorème (de factorisation - admis). *Tout entier naturel $n \geq 2$ admet une décomposition unique en un produit de facteurs premiers.*

Méthode pour factoriser un entier

Une méthode pratique consiste à diviser l'entier à factoriser par son plus petit diviseur premier, puis à réitérer le processus avec le quotient obtenu jusqu'à l'obtention d'un quotient égal à 1.

Par exemple, pour factoriser 4116, nous utilisons la disposition suivante

4116		2
2058		2
1029		3
343		7
49		7
7		7
1		

ce qui restitue la factorisation

$$4116 = 2^2 \times 3 \times 7^3.$$

Algorithme (de décomposition en facteurs premiers). Cet algorithme est basé sur la méthode pratique exposée précédemment.

```

d prend la valeur 2
Tant Que  $N \neq 1$ 
    Tant Que  $d$  divise  $N$ 
        Afficher  $d$ 
         $N$  prend la valeur  $\frac{N}{d}$ 
    Fin Tant Que
     $d$  prend la valeur  $d + 1$ 
Fin Tant Que

```

Son implémentation en Python restitue les facteurs premiers en utilisant la notion de Liste.

```

from math import *
n=int(input("n="))
d=2
L=[]
while n!=1:
    while n%d==0:
        n=n/d
        L.append(d)
    d=d+1
print(L)

```

En exécutant, nous obtenons par exemple :

pour $n = 5632$,

```
>>>
```

[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 11], ce qui donne $5632 = 2^9 \times 11$,

pour $n = 978587$,

```
>>>
```

[47, 47, 443], ce qui donne $978587 = 47^2 \times 443$.

Exemple. Nous proposons différentes applications numériques du théorème de factorisation.

Soient deux entiers $a = 4116$ et $b = 5632$.

▷ Nous savons que

$$a = 4116 = 2^2 \times 3 \times 7^3,$$

$$b = 5632 = 2^9 \times 11.$$

▷ Nous simplifions \sqrt{a} et \sqrt{b} .

$$\begin{aligned}\sqrt{a} &= \sqrt{2^2 \times 3 \times 7^3} = 14\sqrt{21}, \\ \sqrt{b} &= \sqrt{2^9 \times 11} = 2^4\sqrt{2 \times 11} = 16\sqrt{22}.\end{aligned}$$

▷ Le $\text{pgcd}(a, b)$ est obtenu en effectuant le produit des facteurs communs à a et b , chaque facteur étant affecté du plus petit exposant.

Nous obtenons

$$\text{pgcd}(a, b) = 2^2 = 4.$$

▷ Nous en déduisons la simplification de la fraction $\frac{a}{b}$ sous sa forme irréductible.

$$\frac{a}{b} = \frac{1029 \times 4}{1408 \times 4} = \frac{1029}{1408}.$$

▷ Nous observons que a n'est pas un carré parfait, c'est-à-dire le carré d'un entier naturel.

En effet, dans la factorisation de a , les exposants des facteurs 3 et 7 sont impairs donc a n'est pas un carré parfait

▷ Quel est le plus petit carré qui est un multiple b ?

Nous obtenons

$$22b = 2 \times 11 \times 2^9 \times 11 = 2^{10} \times 11^2 = (2^5 \times 11)^2 = 352^2.$$

3.5 Nombres premiers entre eux

Définition. Deux entiers naturels non nuls n et p sont premiers entre eux si et seulement si leur seul diviseur commun est 1.

En d'autres termes :

- n et p sont premiers entre eux si et seulement si $\text{Div}(n) \cap \text{Div}(p) = \{1\}$.
- n et p sont premiers entre eux si et seulement si $\text{pgcd}(n, p) = 1$.

Remarques. Nous en faisons deux.

- Ne pas confondre "premier" avec "premiers entre eux".
- La fraction $\frac{a}{b}$, avec a et b entiers naturels non nuls, est irréductible si et seulement si a et b sont premiers entre eux.

Proposition. Si p un est nombre premier et n un entier naturel non nul et non multiple de p , alors n et p sont premiers entre eux.

Démonstration. Puisque p est premier, nous avons $Div(p) = \{1, p\}$.

De plus, p ne divise pas n donc $p \notin Div(n)$.

Ceci justifie que $Div(n) \cap Div(p) = \{1\}$.

Exemple (fraction irréductible). Pour tout entier naturel n , nous considérons la fraction

$$\frac{2n + 3}{2n + 1}.$$

Le programme Python qui suit permet d'expliciter le $\text{pgcd}(2n + 3, 2n + 1)$ pour les $N + 1$ premières valeurs de l'entier n .

```
from math import *

def pgcd(a, b):
    while b != 0:
        r = a % b
        a = b
        b = r
    return a

def fracirrec(n):
    L = []
    for k in range(0, n):
        d = pgcd(2 * k + 3, 2 * k + 1)
        L.append(d)
    return L
```

En l'exécutant, par exemple pour $N = 20$, nous obtenons

```
>>> fracirrec(20)
```

```
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
```

ce qui nous autorise à imaginer que cette fraction est irréductible, quel que soit l'entier naturel n .

Nous en donnerons la preuve dans l'exercice corrigé 2 de ce chapitre.

3.6 Exercices corrigés

Exercice 1. Vrai ou Faux ?

1. Le carré d'un entier naturel impair est impair.
2. Si le carré d'un nombre entier est pair alors ce nombre est pair.
3. Il existe un entier naturel n tel que $n^2 + 1$ est divisible par 3.
4. La somme de tout entier naturel $n \geq 2$ et de son produit avec les deux entiers qui l'encadrent est le carré d'un entier naturel (c'est-à-dire un carré parfait).

Solution

1. VRAI

Si n est un entier naturel impair, alors $n = 2p + 1$, avec $p \in \mathbb{N}$.

Nous en déduisons

$$n^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1.$$

En posant $k = 2p^2 + 2p$, nous obtenons que $n^2 = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Ainsi la proposition "le carré d'un nombre impair est impair" est vraie.

2. VRAI

La contraposée⁵ de cette proposition est "si n est un entier naturel impair, alors son carré est impair".

Cette proposition est vraie d'après la question 1.

Il en résulte que la proposition énoncée est vraie.

3. FAUX

Soit n un entier naturel quelconque. En effectuant sa division euclidienne par 3, nous obtenons 3 cas par disjonction :

$$n = \begin{cases} 3q, \\ 3q + 1, \\ 3q + 2. \end{cases}$$

Il en résulte que

$$n^2 + 1 = \begin{cases} (3q)^2 + 1 = 3 \times 3q^2 + 1, \\ (3q + 1)^2 + 1 = 3 \times (3q^2 + 2q) + 2, \\ (3q + 2)^2 + 1 = 3 \times (3q^2 + 4q + 1) + 2. \end{cases}$$

5. Annexe § 5.2

Par conséquent, dans la division de $n^2 + 1$ par 3, les restes sont égaux à 1 ou 2. Nous en concluons que, pour tout entier naturel n , $n^2 + 1$ n'est pas divisible par 3.

4. FAUX

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

Nous avons

$$n + (n - 1)n(n + 1) = n^3.$$

Ceci justifie que la somme de tout entier naturel non nul et de son produit avec les deux entiers qui l'encadrent est le cube d'un entier naturel (c'est-à-dire un cube parfait).

Nous pouvons aussi exhiber le contre-exemple : $n = 2$. Nous obtenons

$$2 + 1 \times 2 \times 3 = 8 \neq 2^2.$$

Exercice 2. La relation divise - addition et soustraction

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On désigne par x un multiple non nul de a et par y un multiple non nul de b .

1. Montrer que si $d \in \mathbb{N}^*$ est un diviseur de a et b , alors d divise :

- $a + b$,
- $a - b$, en supposant que $a > b$.

En déduire que d divise x et y , ainsi que $x + y$ et $x - y$, en supposant que $x > y$.

2. Pour tout entier naturel $n > 1$, montrer que les fractions suivantes sont irréductibles :

$$\frac{n}{n+1}, \frac{n}{2n+1}, \frac{n-1}{n}, \frac{2n+1}{3n+1}, \frac{3n}{6n+1}, \frac{2n+3}{2n+1}.$$

Solution

1. Puisque $d|a$ et $d|b$, il existe deux entiers naturels q et q' tels que $a = d \times q$ et $b = d \times q'$. Il en résulte que :

- $a + b = d \times (q + q')$, avec $q + q' \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que $d|a + b$.
- $a - b = d \times (q - q')$, avec $q - q' \in \mathbb{N}$ puisque $d \geq 1$ et $a - b > 0$, ce qui justifie que $d|a - b$.

▷ De plus, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = ka$ et il existe $k' \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = k'b$.

Nous en déduisons :

$$x = k(dq) = d(kq) \text{ et } y = k'(dq') = d(k'q').$$

Puisque $kq \in \mathbb{N}$ et $k'q' \in \mathbb{N}$, nous en concluons

$$d|x \text{ et } d|y.$$

▷ En appliquant les deux résultats obtenus ci-dessus, nous en déduisons également

$$d|x + y \text{ et } d|x - y,$$

c'est-à-dire

$$x|ka + k'b \text{ et } x|ka - k'b.$$

2. Pour tout entier $n > 1$, désignons par $d \geq 1$ le pgcd du numérateur et du dénominateur de chacune des fractions proposées.

• Pour la fraction $\frac{n}{n+1}$, si $d|n$ et $d|n+1$, alors $d|n+1-n$, soit $d|1$, donc $d=1$.

La fraction $\frac{n}{n+1}$ est irréductible.

• Pour la fraction $\frac{n}{2n+1}$, si $d|n$ et $d|2n+1$, alors $d|2n+1-2n$, soit $d|1$, donc $d=1$.

La fraction $\frac{n}{2n+1}$ est irréductible.

• Pour la fraction $\frac{n-1}{n}$, si $d|n-1$ et $d|n$, alors $d|n-(n-1)$, soit $d|1$, donc $d=1$.

La fraction $\frac{n-1}{n}$ est irréductible.

• Pour la fraction $\frac{2n+1}{3n+1}$, si $d|2n+1$ et $d|3n+1$, alors $d|3(2n+1)-2(3n+1)$, soit $d|1$, donc $d=1$.

La fraction $\frac{2n+1}{3n+1}$ est irréductible.

• Pour la fraction $\frac{3n}{6n+1}$, si $d|3n$ et $d|6n+1$, alors $d|6n+1-2 \times 3n$, soit $d|1$, donc $d=1$. La fraction $\frac{3n}{6n+1}$ est ainsi irréductible.

• Pour la fraction $\frac{2n+3}{2n+1}$, si $d|2n+3$ et $d|2n+1$, alors $d|2n+3-(2n+1)$, soit $d|2$.

Il en résulte que $d=1$ ou $d=2$.

Puisque les entiers $2n+3$ et $2n+1$ sont impairs, 2 ne peut pas les diviser.

Nous en déduisons que $d=1$,

Quel que soit l'entier naturel n , la fraction $\frac{2n+3}{2n+1}$ est irréductible.

Exercice 3. Multiples

Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$(n+1)^2 - n^2 - 1 \text{ est un multiple de } 2,$$

$$(n+1)^3 - n^3 - 1 \text{ est un multiple de } 3.$$

Pour tout entier naturel n , $(n+1)^4 - n^4 - 1$ est-il un multiple de 4 ?

Solution

Soit n un entier naturel.

▷ Nous avons

$$(n+1)^2 - n^2 - 1 = 2n,$$

ce qui justifie que $(n+1)^2 - n^2 - 1$ est un multiple de 2.

▷ De même, nous avons

$$(n+1)^3 - n^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 - 1 = 3(n^2 + n), \text{ avec } n^2 + n \in \mathbb{N}.$$

Nous en concluons que $(n+1)^3 - n^3 - 1$ est un multiple de 3.

▷ Nous obtenons

$$\begin{aligned} (n+1)^4 - n^4 - 1 &= (n+1)^3(n+1) - n^4 - 1, \\ &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)(n+1) - n^4 - 1, \\ &= n^4 + 3n^3 + 3n^2 + n + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^4 - 1, \\ &= 4n^3 + 6n^2 + 4n. \end{aligned}$$

En particulier pour $n = 1$, nous avons

$$2^4 - 1^4 - 1 = 14 \text{ et } 14 \text{ n'est pas un multiple de } 4,$$

ce qui est un contre-exemple⁶ qui justifie que $(n+1)^4 - n^4 - 1$ n'est pas toujours un multiple de 4.

Remarque. Nous pouvons vérifier que $(n+1)^4 - n^4 - 1$ est un multiple de 4 lorsque n est pair car en posant $n = 2q$, avec $q \in \mathbb{N}$, 4 peut être mis en facteur.

6. Annexe § 5.3

Exercice 4. Division euclidienne

Déterminer les entiers naturels n qui, divisés par 3 restituent un quotient égal au double du reste.

Solution

En effectuant la division euclidienne de n par 3, nous obtenons

$$n = 3(2r) + r = 7r, \text{ avec } 0 \leq r < 3, \text{ c'est-à-dire } r \in \{0, 1, 2\}.$$

Il vient

$$\text{si } r = 0, \text{ alors } n = 0,$$

$$\text{si } r = 1, \text{ alors } n = 7,$$

$$\text{si } r = 2, \text{ alors } n = 14.$$

Réciproquement, nous vérifions que les entiers $n = 0$ ou $n = 7$ ou $n = 14$ conviennent puisque

$$0 = 3 \times 0 + 0 \text{ et } q = 0 = 2 \times 0 = 2 \times r,$$

$$7 = 3 \times 2 + 1 \text{ et } q = 2 = 2 \times 1 = 2 \times r,$$

$$14 = 3 \times 4 + 2 \text{ et } q = 4 = 2 \times 2 = 2 \times r.$$

Exercice 5. Une équation diophantienne

Déterminer les entiers naturels non nuls x et y tels que $xy + x + 2y = 20$.

Solution

Désignons par (E) l'équation $xy + x + 2y = 20$.

Nous avons

$$(E) \Leftrightarrow xy + x + 2y + 2 - 2 = 20 \Leftrightarrow y(x+2) + x+2 = 22 \Leftrightarrow (x+2)(y+1) = 22.$$

Nous en déduisons que $x+2$ et $y+1$ divise 22.

Puisque $Div(22) = \{1, 2, 11, 22\}$, nous obtenons par disjonction

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2 = 1 \\ y+12 = 22 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x+2 = 2 \\ y+1 = 11 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x+2 = 11 \\ y+1 = 2 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x+2 = 22 \\ y+1 = 1 \end{array} \right. .$$

Comme $x > 0$ et $y > 0$, le seul couple (x, y) qui convient est $(9, 1)$.

Réciproquement, nous vérifions que $(9+2)(1+1) = 22$.

Nous pouvons en conclure que l'ensemble de solutions est

$$S_{(E)} = \{(9, 1)\}.$$

Exercice 6. Fractions entières

1. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $\frac{n+6}{n+1} \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $\frac{n^2+2n+5}{n+2} \in \mathbb{N}$.

Solution

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\frac{n+6}{n+1} = \frac{n+1+5}{n+1} = 1 + \frac{5}{n+1}.$$

Il en résulte que si $\frac{n+6}{n+1} \in \mathbb{N}$, alors $n+1|5$, ce qui implique que $n+1 = 5$ ou $n+1 = 1$.

Nous en déduisons que $n = 0$ ou $n = 4$.

Réciproquement, si $n = 0$ ou $n = 4$, nous vérifions que

$$\frac{0+6}{0+1} = 6 \in \mathbb{N} \text{ ou } \frac{4+6}{4+1} = 5 \in \mathbb{N}.$$

Remarque

En utilisant l'exercice 2 et la réflexivité de la relation divise, nous proposons une seconde méthode exposée ci-dessous.

Si $\frac{n+6}{n+1} \in \mathbb{N}$, alors $n+1|n+6$.

De plus nous savons que $n+1|n+1$ donc, par soustraction, nous obtenons

$$n+1|n+6 - (n+1), \text{ c'est-à-dire } n+1|5.$$

2. Nous remarquons que, pour tout entier naturel n , on a

$$\frac{n^2+2n+5}{n+2} = \frac{n(n+2)+5}{n+2} = n + \frac{5}{n+2}.$$

Par conséquent pour que $\frac{n^2+2n+5}{n+2} \in \mathbb{N}$, il faut que $n+2|5$, ce qui implique que $n+2 = 5$ ou $n+2 = 1$.

Puisque $n \in \mathbb{N}$, la solution $n = -1$ est rejetée. Nous obtenons ainsi $n = 3$.

Réciproquement, nous vérifions que

$$\frac{3^2+2 \times 3+5}{3+2} = 4 \in \mathbb{N}.$$

Remarque

En utilisant à nouveau l'exercice 2, une autre méthode consiste à écrire

$n+2|n^2+2n+5$ et $n+2|n+2$ donc $n+2|n^2+2n+5 - n(n+2)$, soit $n+2|5$.

Exercice 7. D'après le rallye de la fête des maths-Lyon

1. Pour tout entier naturel k , on pose $S(k) = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^k$.

En calculant $10 \times S(k) - S(k)$, justifier que $S(k) = \frac{10^{k+1} - 1}{9}$.

2. Soit a un entier naturel tel que $a = \underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ chiffres } 1}$, avec $n \geq 1$.

Montrer que $a = \frac{10^n - 1}{9}$.

3. On donne l'entier $b = 1 \underbrace{000 \dots 0}_{(n-1) \text{ zéros}} 5$.

Montrer que, quel que soit l'entier $n \geq 1$, $a \times b + 1$ est le carré d'un entier à préciser.

Solution

1. Soit k un entier naturel. Nous avons

$$\begin{cases} 10 \times S(k) = 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^k + 10^{k+1}, \\ S(k) = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^k. \end{cases}$$

Nous en déduisons par soustraction et après simplifications que

$$9 \times S(k) = 10^{k+1} - 1.$$

Nous en concluons que $S(k) = \frac{10^{k+1} - 1}{9}$.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, nous avons

$$a = \underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ chiffres } 1} = 10^{n-1} + \dots + 1 = S(n-1).$$

Il en résulte que

$$a = \frac{10^{(n-1)+1} - 1}{9} = \frac{10^n - 1}{9}.$$

3. Nous remarquons d'abord que

$$b = 1 \underbrace{000 \dots 0}_{(n-1) \text{ zéros}} 5 = 10^n + 5.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} a \times b + 1 &= \frac{10^n - 1}{9} \times (10^n + 5) + 1 = \frac{(10^n - 1)(10^n + 5) + 9}{9}, \\ a \times b + 1 &= \frac{10^{2n} + 4 \times 10^n + 4}{9} = \left(\frac{10^n + 2}{3} \right)^2. \end{aligned}$$

Il reste à justifier que, pour tout $n \geq 1$, 3 divise $10^n + 2$. En utilisant le critère de divisibilité par 3, la somme des chiffres de $10^n + 2 = 1 \underbrace{000 \cdots 0}_{(n-1) \text{ zéros}} 2$ est égale à 3, ce qui justifie que $3 \mid 10^n + 2$.

Nous pouvons en conclure que $\frac{10^n + 2}{3}$ est un entier, et ainsi $a \times b + 1$ est un carré parfait.

Remarque

Une justification plus rigoureuse demanderait une preuve de ce critère ou une démonstration par récurrence, ce qui dépasse un peu le cadre de ce livre.

Exercice 8. Vrai ou Faux sur les nombres premiers

1. Le produit de deux nombres premiers est premier.
2. La somme de deux nombres premiers est impaire.
3. La somme de cinq entiers naturels consécutifs est un nombre premier.
4. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $6n + 5$ est un nombre premier.
5. Si p est un nombre premier, alors p^5 admet exactement 6 diviseurs.
6. Si p et q sont deux nombres premiers distincts, alors p et q sont premiers entre eux.
7. Pour tout entier naturel n non nul, l'entier $n^2 + 4n + 3$ est composé.
8. 57 divise $18^{2021} + 18^{2022}$.

Solution

1. Faux

Contre exemple : $3 \times 5 = 15$.

2. Faux

Contre-exemple : $3 + 5 = 8$.

3. Faux

Contre-exemple : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

4. Faux

Contre exemple : pour $n = 5$, nous obtenons $6 \times 5 + 5 = 35$.

5. Vrai

Si p est premier, alors les diviseurs de p^5 sont $1, p, p^2, p^3, p^4, p^5$.

Nous dénombrons 6 diviseurs.

6. Vrai

$Div(p) \cap Div(q) = \{1; p\} \cap \{1; q\} = \{1\}$, car $p \neq q$.

7. Vrai

Pour tout $n \geq 1$, nous avons :

$$n^2 + 4n + 3 = n^2 + 4n + 4 - 4 + 3 = (n + 2)^2 - 1 = (n + 1)(n + 3).$$

Nous en déduisons que $n + 1$ divise $n^2 + 4n + 3$ tel que $n + 1 \neq 1$ et $n + 1 \neq n^2 + 4n + 3$.

Nous pouvons affirmer que $n^2 + 4n + 3$ est composé.

8. Vrai

Nous factorisons cet entier.

$$18^{2021} + 18^{2022} = 18^{2021}(1 + 18) = (2 \times 3^2)^{2021} \times 19 = 2^{2021} \times 3^{4042} \times 19,$$

ce qui justifie que $3 \times 19 = 57$ est un diviseur de $18^{2021} + 18^{2022}$.

Exercice 9. Produit de facteurs premiers **ALGO**

1. On pose $N = 2 \times 6 \times 10 \times 14 \times 18 \times 22$.

a. Déterminer la décomposition de l'entier N en un produit de facteurs premiers.

b. En déduire la factorisation N^{2021} en un produit de facteurs premiers.

2. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$p(n) = 2 \times 6 \times 10 \times \cdots \times (4n - 2) \times (4n + 2).$$

Ainsi nous avons $p(5) = N$.

a. Décomposer $p(6)$ en un produit de facteurs premiers.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{p(n+1)}{p(n)}$ est un entier naturel.

3. L'entier n étant choisi, en utilisant l'algorithme de factorisation obtenu au paragraphe 3.4, proposer un script Python qui restitue l'entier $p(n)$ puis sa factorisation.

Solution

1. a. Nous avons

$$N = 2 \times (2 \times 3) \times (2 \times 5) \times (2 \times 7) \times (2 \times 3^2) \times (2 \times 11) = 2^6 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11.$$

1. b. Nous déduisons de la question précédente

$$N^{2021} = (2^6 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11)^{2021} = 2^{6 \times 2021} \times 3^{3 \times 2021} \times 5^{2021} \times 7^{2021} \times 11^{2021},$$

ce qui donne

$$N^{2021} = 2^{12126} \times 3^{6063} \times 5^{2021} \times 7^{2021} \times 11^{20218}.$$

2. a. Nous obtenons :

$$p(6) = p(5) \times 26 = (2^6 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11) \times 2 \times 13 = 2^7 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13.$$

2. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$p(n+1) = 2 \times 6 \times 10 \times \cdots \times (4(n+1) - 2) \times (4(n+1) + 2) = p(n)(4n+6).$$

En observant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p(n) \neq 0$, nous obtenons

$$\frac{p(n+1)}{p(n)} = 4n+6 \in \mathbb{N}.$$

3. De l'égalité

$$p(n+1) = (4n+6)p(n),$$

validée pour chaque entier naturel n , nous déduisons la procédure Python qui restitue $p(n)$ ainsi que sa factorisation.

```

from math import *
n=int(input("n="))
p=2
for k in range(0, n):
    p=p*(4*k+6)
print(p)
d=2
L=[]
while p!=1:
    while p%d==0:
        p=p/d
        L.append(d)
    d=d+1
print(L)

```

Par exemple, nous obtenons pour :

```
>>> n = 5,
```

```
665280,
```

```
[2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 7, 11], ce qui donne 665280 = 26 × 33 × 5 × 7 × 11,
```

```
>>> n = 10,
```

```
28158588057600,
```

```
[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 11, 13, 17, 19],
```

c'est-à-dire, $p(10) = 28158588057600 = 2^{11} \times 3^5 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$.

Exercice 10. Un problème de Sophie Germain⁷

1. Soit n un entier naturel.

En développant $(n^2 + 2)^2$, en déduire une factorisation de $n^4 + 4$.

2. Justifier que le nombre $2021^4 + 4$ n'est pas premier.

3. Déduire de la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 83525.

4. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, le nombre $n^4 + 4$ est composé.

Solution

1. Pour tout entier naturel, nous avons

$$(n^2 + 2)^2 = n^4 + 4n^2 + 4.$$

Il en résulte

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n) = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2).$$

2. De cette factorisation, nous déduisons

$$2021^4 + 4 = (2021^2 - 2 \times 2021 + 2)(2021^2 + 2 \times 2021 + 2) = 4080401 \times 4088485.$$

Nous en concluons que $2021^4 + 4$ est composé.

3. Nous observons que

$$83525 = 83521 + 4 = 17^4 + 4 = (17^2 + 2 \times 17 + 2)(17^2 - 2 \times 17 + 2) = 325 \times 257.$$

À la "main" ou en utilisant les algorithmes du cours, nous obtenons que

$$257 \text{ est premier et } 325 = 5^2 \times 13.$$

Ainsi la factorisation attendue est

$$83525 = 5^2 \times 13 \times 257.$$

4. Pour prouver que si $n \geq 2$, alors $n^4 + 4$ n'est pas premier, il suffit de justifier que, quel que soit l'entier $n \geq 2$, $n^2 - 2n + 2 \neq 1$ et $n^2 + 2n + 2 \neq 1$.

Nous raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que

$$n^2 - 2n + 2 = 1 \text{ ou } n^2 + 2n + 2 = 1,$$

7. Mathématicienne française : 1776-1831

ce qui implique que $(n - 1)^2 = 0$ ou $(n + 1)^2 = 0$.

Puisque $n \geq 2$, ces deux conditions sont contradictoires.

Ainsi nous en concluons que $n^2 - 2n + 2 \neq 1$ et $n^2 + 2n + 2 \neq 1$, ce qui prouve que $n^4 + 4$ est composé.

Exercice 11. Le chiffre des unités de $11^{2021} - 1$

Soient p un nombre premier et n un entier naturel non nul.

1. Donner la liste des diviseurs de p^n .
2. On désigne par S la somme des diviseurs de p^n .
 - a. Justifier que $p \times S - S = p^{n+1} - 1$.
 - b. En déduire que $p - 1$ est un diviseur de $p^{n+1} - 1$.
3. Quel est le chiffre des unités de $11^{2021} - 1$?
4. Le nombre $7^{2021} - 1$ est-il divisible par 6 ?

Solution

1. Puisque p est premier et $n \in \mathbb{N}^*$, les diviseurs de p^n sont

$$1, p, p^2, p^3, \dots, p^{n-1}, p^n.$$

2. a. Nous avons

$$\begin{cases} p \times S = p + p^2 + p^3 + \dots + p^n + p^{n+1}, \\ S = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^n. \end{cases}$$

Nous en déduisons par soustraction et après simplifications que

$$p \times S - S = p^{n+1} - 1.$$

2. b. Du calcul précédent, il résulte que

$$(p - 1)S = p^{n+1} - 1.$$

Puisque $p - 1 \in \mathbb{N}^*$, car $p \geq 2$ et $S \in \mathbb{N}$, nous en concluons que l'entier $p - 1$ est un diviseur de $p^{n+1} - 1$.

3. En particulier, pour $p = 11$ et $n = 2020$, nous pouvons affirmer que $p - 1 = 10$ est un diviseur de $11^{2020+1} - 1 = 11^{2021} - 1$.

En utilisant le critère de divisibilité par 10, nous en concluons que le chiffre des unités de $11^{2021} - 1$ est 0.

4. En particulier, pour $p = 7$, l'entier $p - 1 = 6$ est un diviseur de

$$7^{2020+1} - 1 = 7^{2021} - 1.$$

Exercice 12. Nombres parfaits ALGO

Un entier naturel est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même.

1. Vérifier que 6, 28, 496 et 8128 sont des nombres parfaits.

Soit un entier naturel $n \geq 2$ tel que $2^n - 1$ soit un nombre **premier**.

On considère l'entier naturel $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$.

Nous proposons de montrer que N est un nombre parfait.

2. Pour quel entier n , obtient-on respectivement

$$N = 6, N = 28, N = 496, N = 8128 ?$$

3. a. Quelle est la décomposition de N en facteurs premiers ?

3. b. En déduire la liste des diviseurs de N .

4. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$.

En calculant $2 \times S - S$, justifier que $S = 2^n - 1$.

5. En déduire que la somme de tous les diviseurs de N est égale à $2N$.

Conclure.

6. Implémenter en Python l'algorithme suivant qui restitue les nombres parfaits qui sont compris entre 1 et N , N étant choisi en entrée.

```
Pour n allant de 1 à N
    s ← 0
    Pour k allant de 1 à n - 1
        Si k divise n alors
            s ← s + k
        Si s = n alors
            Afficher "n est parfait"
    Fin Pour
Fin Pour
```

Solution

1. Nous décomposons chaque nombre proposé en produit de facteurs premiers.

- $6 = 2 \times 3$. Les diviseurs de 6 sont : 1, 2, 3 et 6.

Nous vérifions que $1 + 2 + 3 = 6$.

Ainsi 6 est un nombre parfait.

- $28 = 2^2 \times 7$. Les diviseurs de 28 sont : 1, 2, 4, 7, 14, 28 .

Nous vérifions que $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

Le nombre 28 est parfait.

- $496 = 2^4 \times 31$. Les diviseurs de 496 sont :

$$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 31, 31 \times 2, 31 \times 2^2, 31 \times 2^3, 31 \times 2^4.$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 31 + 31 \times 2 + 31 \times 2^2 + 31 \times 2^3 \\ &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 31 \times (1 + 2 + 2^2 + 2^3) = 31 + 31 \times 15 = 496. \end{aligned}$$

Le nombre 496 est parfait.

- $8128 = 2^6 \times 127$.

Les diviseurs de 8128 sont :

$$\begin{aligned} & 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, \\ & 127, 127 \times 2, 127 \times 2^2, 127 \times 2^3, 127 \times 2^4, 127 \times 2^5, 127 \times 2^6. \end{aligned}$$

La somme s des diviseurs de 8128, autres que lui-même, est

$$\begin{aligned} s &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 \\ & \quad + 127 + 127 \times 2 + 127 \times 2^2 + 127 \times 2^3 + 127 \times 2^4 + 127 \times 2^5, \\ &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 127 \times (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5), \\ &= 127 + 127 \times 63, \\ &= 8128. \end{aligned}$$

Nous en concluons que le nombre 8128 est parfait.

2. Nous avons

$$\triangleright 6 = 2^{2-1}(2^2 - 1), \text{ ce qui donne } n = 2.$$

$$\triangleright 28 = 2^{3-1}(2^3 - 1), \text{ ce qui donne } n = 3.$$

$$\triangleright 496 = 2^{5-1}(2^5 - 1), \text{ ce qui donne } n = 5.$$

$$\triangleright 8128 = 2^{7-1}(2^7 - 1), \text{ ce qui donne } n = 7.$$

3. a. Pour tout entier $n \geq 2$, nous avons $2^n - 1 \neq 2$. Puisque 2 est premier, ainsi que $2^n - 1$, la décomposition de N en facteurs premiers est

$$N = 2^{n-1}(2^n - 1).$$

3. b. De la question 3. a, il résulte que la liste des diviseurs de N est

$$1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}, 2^n - 1, 2(2^n - 1), 2^2(2^n - 1), \dots, 2^{n-1}(2^n - 1).$$

4. Nous avons

$$\begin{cases} 2 \times S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n, \\ S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}. \end{cases}$$

Nous en déduisons par soustraction et après simplifications que

$$2 \times S - S = 2^n - 1.$$

Nous en concluons que $S = 2^n - 1$.

5. Soit S' la somme de tous les diviseurs de N . Nous avons

$$S' = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + (2^n - 1) + 2(2^n - 1) + \dots + 2^{n-1}(2^n - 1).$$

Nous en déduisons

$$S' = S + (2^n - 1)S = 2^n \times S = 2 \times 2^{n-1}(2^n - 1) = 2N.$$

La somme des diviseurs de N autres que lui-même est donc $2N - N = N$.

Nous avons ainsi prouvé que $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ est un nombre entier parfait.

6. Nous obtenons

```
p=int(input("nbre="))
for n in range(1,p):
    s=0
    for i in range(1,n):
        if n%i==0:
            s=s+i
    if s==n:
        print("parfait",n)
```

Pour "nbre"=10000, nous retrouvons les quatre nombres parfaits proposés à la question 1.

```
>>>
parfait 6,
parfait 28,
parfait 496,
parfait 8128.
```

En prenant ensuite "nbre"=100000, avec un peu de patience, nous observons qu'il n'y a pas de nombre parfait compris entre 10000 et 100000.

En fait le cinquième nombre parfait est 33 550 336, ce qui indique une raréfaction conséquente des nombres parfaits.

Exercice 13. Irrationalité de $\sqrt{2}$

1. Soit n un entier naturel. Justifier que si n est :

▷ pair, alors son carré est pair,

▷ impair, alors son carré est impair.

Réciproquement, en déduire

$$n^2 \text{ pair implique } n \text{ pair.}$$

2. Pour prouver que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, nous supposons, par l'absurde, que ce nombre est rationnel, en posant

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux.}$$

Justifier que a^2 est pair. Quelle est la parité de a ?

En déduire la parité de b .

Conclure.

Solution

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

▷ Si n est pair, alors

$$n = 2k, \text{ avec } k \in \mathbb{N}.$$

Il en résulte

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2q, \text{ en posant } q = 2k^2 \in \mathbb{N},$$

ce qui justifie que n^2 est pair.

▷ Si n est impair, alors

$$n = 2k + 1, \text{ avec } k \in \mathbb{N}.$$

Il en résulte

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2q + 1, \\ \text{ en posant } q = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N},$$

ce qui justifie que n^2 est impair.

Réciproquement, la contraposée⁸ de l'implication

$$n \text{ impair implique } n^2 \text{ impair,}$$

8. Annexe § 5.2

est

n^2 pair implique n pair,

ce qui prouve que cette implication réciproque est vraie.

2. Nous supposons

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, où a et b sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.

▷ Nous en déduisons

$$a^2 = 2b^2 = 2q \text{ avec } q = b^2 \in \mathbb{N},$$

ce qui justifie que a^2 est un entier pair.

La première question montre que a est également pair.

▷ Puisque a est pair, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$a = 2k,$$

ce qui induit

$$2b^2 = (2k)^2, \text{ soit } b^2 = 2k^2 = 2q, \text{ en posant } q = k^2 \in \mathbb{N}.$$

Par suite, l'entier b^2 est pair donc il en est de même pour b .

Nous avons établi que les entiers a et b sont pairs.

C'est en contradiction avec a et b entiers naturels non nuls premiers entre eux.

Par l'absurde, nous en concluons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 14. Irrationalité de $\sqrt{3}$

1. Soit n un entier naturel. Établir l'équivalence

$$3 \text{ divise } n \text{ si et seulement si } 3 \text{ divise } n^2.$$

2. En s'inspirant de l'exercice précédent, prouver que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Solution

1. Soit n un entier naturel.

▷ Nous commençons par montrer que

$$\text{si } n \text{ est divisible par } 3, \text{ alors il en est de même de } n^2.$$

Si n divise 3, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$n = 3k.$$

Il en résulte

$$n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2) = 3q, \text{ avec } q = 3k^2 \in \mathbb{N},$$

ce qui montre que 3 divise n^2 .

▷ Réciproquement, nous prouvons que

si 3 divise n^2 alors 3 divise n .

Nous procédons par contraposition.

En effet, supposons que 3 ne divise pas n .

En effectuant la division euclidienne de n par 3, nous obtenons par disjonction

$$n = 3k + 1 \text{ ou } n = 3k + 2, \text{ avec } k \in \mathbb{N}.$$

★ Si $n = 3k + 1$, alors il vient

$$n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3q + 1, \\ \text{avec } q = 3k^2 + 2k \in \mathbb{N},$$

ce qui prouve, dans ce cas, que 3 ne divise pas n^2 .

★ Si $n = 3k + 2$, alors il vient

$$n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3q + 1, \\ \text{avec } q = 3k^2 + 4k + 1 \in \mathbb{N},$$

ce qui prouve, dans ce second cas, que 3 ne divise pas n^2 .

Nous avons ainsi établi l'implication

si 3 ne divise pas n alors 3 ne divise pas n^2 .

Par contraposition, la réciproque est démontrée.

si 3 divise n^2 alors 3 divise n .

Nous en concluons

3 divise n si et seulement si 3 divise n^2 .

2. Comme dans l'exercice précédent, nous supposons par l'absurde

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.}$$

▷ Nous en déduisons :

$$a^2 = 3b^2 = 3q \text{ avec } q = b^2 \in \mathbb{N},$$

ce qui justifie que a^2 est divisible par 3.

La première question montre que a est également divisible par 3.

▷ Puisque 3 divise a , il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$a = 3k,$$

ce qui induit

$$3b^2 = (3k)^2 = 9k^2, \text{ soit } b^2 = 3k^2 = 3q, \text{ en posant } q = k^2 \in \mathbb{N}.$$

Par suite, l'entier b^2 est divisible par 3 donc il en est de même b .

Nous avons ainsi établi que les entiers a et b sont des multiples de 3.

C'est en contradiction avec a et b entiers naturels non nuls premiers entre eux.

Par l'absurde, nous en concluons que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Remarque. Nous pourrions généraliser cette méthode pour démontrer l'irrationalité de $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$...

Mais cela devient vite fastidieux car il y a 4 types d'entiers naturels qui ne sont pas des multiples de 5, 6 types d'entiers naturels qui ne sont pas des multiples de 7 etc...

En classe de Terminale - Expert, vous verrez comment démontrer que \sqrt{n} est irrationnel lorsque n n'est pas un carré avec des "outils adaptés" comme le théorème de Gauss⁹.

Exercice 15. Triplets pythagoriens **ALGO**

Soient x , y et z trois entiers naturels non nuls satisfaisant à l'équation,

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ces entiers sont les longueurs d'un triangle rectangle. C'est la raison pour laquelle un triplet (x, y, z) , solution de cette équation, est nommé triplet pythagorien.

1. Vérifier que le triplet $(3, 4, 5)$ est pythagorien.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si (x, y, z) est pythagorien, alors il en est de même du triplet (px, py, pz) .

En déduire les triplets pythagoriens $(60, y, z)$, $(x, 60, z)$ et $(x, y, 60)$

9. Mathématicien-astronome-physicien : 1777-1855

2. Prouver que si (x, y, z) est pythagorien, alors un au moins de ces trois entiers est un nombre pair.

3. Soient m et n deux entiers tels que $m > n$.

Montrer que le triplet $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ est pythagorien.

En déduire un programme Python qui restitue un triplet pythagorien, les entiers m et n étant choisis en entrée.

4. Nous supposons que $m = n + 1$. Justifier que dans ce cas le triplet pythagorien est constitué, dans cet ordre, d'un entier impair et de deux entiers naturels consécutifs.

Proposer un programme Python qui restitue les p premiers triplets pythagoriens de cette forme, l'entier $p \geq 1$ étant choisi par l'utilisateur.

Solution

1.▷ Nous avons

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

ce qui justifie que le triplet $(3, 4, 5)$ est pythagorien.

▷ Puisque $x^2 + y^2 = z^2$, nous obtenons

$$(px)^2 + (py)^2 = p^2(x^2 + y^2) = p^2z^2 = (pz)^2,$$

ce qui montre que le triplet (px, py, pz) est pythagorien.

▷ Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $(3p, 4p, 5p)$ est pythagorien.

★ $3p = 60$ implique $p = 20$ et par suite le triplet

$$(60, 80, 100) \text{ est pythagorien.}$$

★ $4p = 60$ implique $p = 15$ et par suite le triplet

$$(45, 60, 75) \text{ est pythagorien.}$$

★ $5p = 60$ implique $p = 12$ et par suite le triplet

$$(36, 48, 60) \text{ est pythagorien.}$$

2. Soit (x, y, z) un triplet pythagorien. Pour fixer les idées, nous supposons que les entiers x et y sont impairs, c'est-à-dire

$$x = 2p + 1 \text{ avec } p \in \mathbb{N}^*,$$

$$y = 2q + 1 \text{ avec } q \in \mathbb{N}^*.$$

Il en résulte :

$$x^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1,$$

ce qui donne, en posant $P = 2p^2 + 2p \in \mathbb{N}^*$,

$$x^2 = 2P + 1$$

ce qui justifie que x^2 est impair.

De la même façon, en posant $Q = 2q^2 + 2q \in \mathbb{N}^*$, nous obtenons

$$y^2 = 2Q + 1,$$

ainsi y^2 est impair.

Nous en déduisons

$$z^2 = x^2 + y^2 = 2P + 1 + 2Q + 1 = 2(P + Q + 1), \text{ avec } P + Q + 1 \in \mathbb{N}^*,$$

ce qui montre que z^2 est pair.

Lors de la seconde question de l'exercice corrigé 2 ou dans la première question de l'exercice corrigé 14 de ce même chapitre, nous avons montré que

$$z^2 \text{ pair implique } z \text{ pair,}$$

ce qui établit la conclusion attendue.

3.▷ Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m > n$. nous avons

$$\begin{aligned} (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 &= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2, \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4, \\ &= (m^2 + n^2)^2, \end{aligned}$$

ce qui montre que le triplet $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ est pythagorien.

▷ Nous proposons la fonction Python suivante

```
def TPytha(m, n):
    if n >= m:
        return "recommencer_car_n_est_plus_grand_que_m"
    else:
        a = m**2 - n**2
        b = 2*m*n
        c = m**2 + n**2
        return [a, b, c]
```

Par exemple, nous obtenons

```
>>> TPytha(2,1)
[3, 4, 5]
>>> TPytha(91,52)
[5577, 9464, 10985]
>>> TPytha(2021,2020)
[4041, 8164840, 8164841]
```

4. ▷ Nous supposons que $m = n + 1$. Il vient

$$\begin{aligned}m^2 - n^2 &= (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1, \\2mn &= 2(n + 1)n = 2n^2 + 2n, \\m^2 + n^2 &= (n + 1)^2 + n^2 = 2n^2 + 2n + 1.\end{aligned}$$

Nous en concluons que le triplet pythagorien

$$(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$$

convient, puisqu'il est constitué dans cet ordre d'un entier impair et de deux entiers naturels consécutifs.

▷ Pour ce script, nous considérons une fonction Python nommée "ListeTP(p)" qui utilise celle proposée à la question 3, ce qui donne

```
def TPytha(m, n):
    if n >= m:
        return "recommencer_car_n_est_plus_grand_que_m"
    else:
        a=m**2-n**2
        b=2*m*n
        c=m**2+n**2
        return [a, b, c]
def ListeTP(p):
    L=[]
    for i in range(1, p+1):
        L.append(TPytha(i+1, i))
    return L
```

Nous obtenons par exemple :

>>> ListeTP(5)

[[3, 4, 5], [5, 12, 13], [7, 24, 25], [9, 40, 41], [11, 60, 61]].

>>> ListeTP(30)

[[3, 4, 5], [5, 12, 13], [7, 24, 25], [9, 40, 41], [11, 60, 61], [13, 84, 85], [15, 112, 113], [17, 144, 145], [19, 180, 181], [21, 220, 221], [23, 264, 265], [25, 312, 313], [27, 364, 365], [29, 420, 421], [31, 480, 481], [33, 544, 545], [35, 612, 613], [37, 684, 685], [39, 760, 761], [41, 840, 841], [43, 924, 925], [45, 1012, 1013], [47, 1104, 1105], [49, 1200, 1201], [51, 1300, 1301], [53, 1404, 1405], [55, 1512, 1513], [57, 1624, 1625], [59, 1740, 1741], [61, 1860, 1861]]

La géométrie du collège

Dans ce chapitre, nous consolidons par une étude plus approfondie les acquis de la géométrie enseignée au collège, c'est-à-dire les théorèmes de Thalès, de Pythagore et la trigonométrie dans le triangle rectangle. Pour cela, nous proposons différents exercices et problèmes dont les thèmes principaux sont :

- une preuve du théorème de Pythagore et de celui Thalès par des considérations d'aires,
- des propriétés remarquables dans le triangle,
- des compléments de trigonométrie dans un triangle acutangle, c'est-à-dire possédant trois angles aigus,
- une propriété de la bissectrice intérieure dans un triangle,
- des relations métriques dans un triangle.

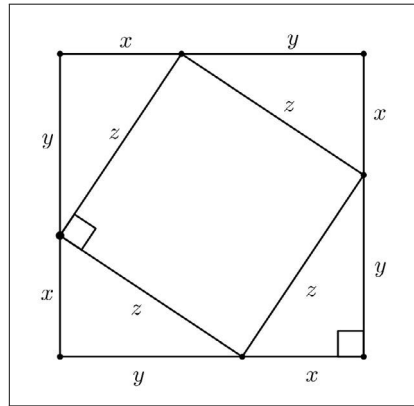
Les pré-requis sont ceux du collège avec notamment la formule donnant l'aire d'un triangle, la trigonométrie dans un triangle rectangle, la notion d'angle inscrit dans un cercle et en particulier le cas d'un angle droit inscrit dans un cercle.

Ce chapitre est évoqué dans le programme de Seconde. Cependant les questions qui y sont abordées font partie du patrimoine de la géométrie qui a été enseignée aux générations qui nous précèdent. L'élégance et l'aspect formateur des preuves que nous proposons devraient permettre à un(e) élève motivé(e) de satisfaire sa curiosité intellectuelle. Ce chapitre devrait aussi contribuer au fait que cette géométrie, dans des configurations, ne tombe pas dans un oubli qui me semble préjudiciable pour les générations à venir.

4.1 Une preuve du théorème de Pythagore

Exercice 1. Une preuve par les aires de triangles

Avec les données de la figure, montrer que $z^2 = x^2 + y^2$.



Solution

L'aire du carré de côté $x + y$ est égale à la somme de l'aire du carré de côté z et de l'aire des quatre triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont x et y , ce qui donne

$$(x + y)^2 = z^2 + 4 \times \frac{xy}{2}.$$

En développant, nous obtenons

$$x^2 + y^2 + 2xy = z^2 + 2xy.$$

Nous en concluons que $z^2 = x^2 + y^2$.

4.2 Une preuve de la propriété de Thalès

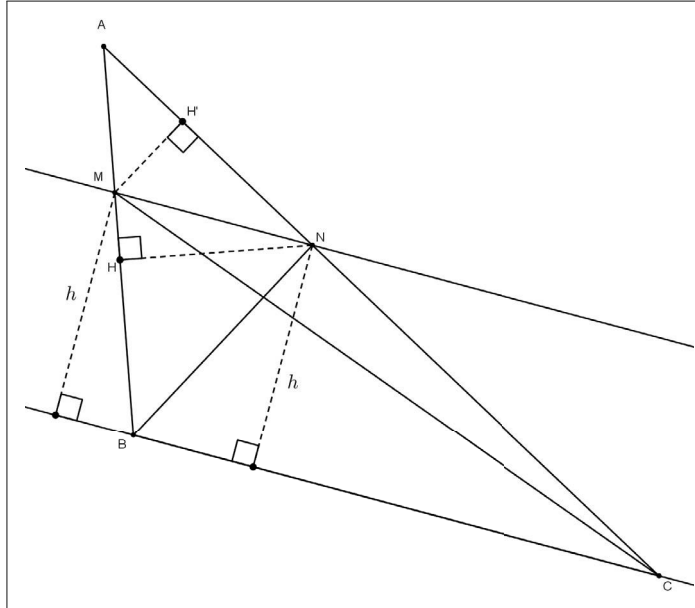
Exercice 2. Une preuve par les aires de triangles

ABC est un triangle quelconque, M un point du segment $[AB]$ et N un point de $[AC]$.

On suppose que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

1. Montrer que $\frac{\text{aire}(AMN)}{\text{aire}(ABN)} = \frac{AM}{AB}$.
2. De même, prouver que $\frac{\text{aire}(AMN)}{\text{aire}(ACM)} = \frac{AN}{AC}$.
3. Justifier que les triangles MBC et NBC ont la même aire.
4. En déduire que $\text{aire}(ABN) = \text{aire}(ACM)$.
5. En déduire que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Solution



1. Avec les notations de la figure, nous avons

$$\text{aire}(AMN) = \frac{NH \times AM}{2} \text{ et } \text{aire}(ABN) = \frac{NH \times AB}{2}.$$

Après simplifications, nous en déduisons

$$\frac{\text{aire}(AMN)}{\text{aire}(ABN)} = \frac{AM}{AB}.$$

2. De la même façon, nous avons

$$\text{aire}(AMN) = \frac{MH' \times AN}{2} \text{ et } \text{aire}(ACM) = \frac{MH' \times AC}{2}.$$

Nous en déduisons

$$\frac{\text{aire}(AMN)}{\text{aire}(ACM)} = \frac{AN}{AC}.$$

3. Désignons par h la longueur commune des hauteurs issues de M et N respectivement dans les triangles MBC et NBC .

Nous avons

$$\text{aire}(MBC) = \frac{h \times BC}{2} \text{ et } \text{aire}(NBC) = \frac{h \times BC}{2},$$

ce qui justifie :

$$\text{aire}(MBC) = \text{aire}(NBC).$$

4. Puisque

$$\text{aire}(ABN) = \text{aire}(ABC) - \text{aire}(NBC)$$

et

$$\text{aire}(ACM) = \text{aire}(ABC) - \text{aire}(MBC),$$

nous en déduisons

$$\text{aire}(ABN) = \text{aire}(ACM).$$

5. Il en résulte

$$\frac{\text{aire}(AMN)}{\text{aire}(ABN)} = \frac{\text{aire}(AMN)}{\text{aire}(ACM)}.$$

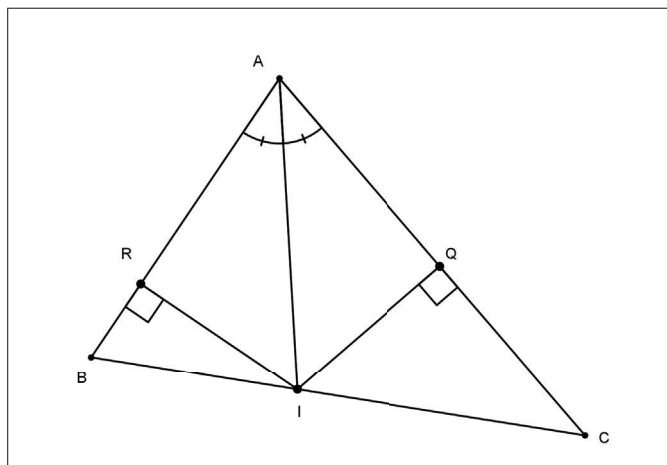
Nous avons ainsi prouvé

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

4.3 Propriété du pied de la bissectrice

Exercice 3. Une preuve par les aires de triangles

Soit ABC un triangle quelconque. La bissectrice de l'angle \hat{A} coupe le segment $[BC]$ en un point I . On désigne par R et Q les projetés orthogonaux du point I sur les droites (AB) et (AC) respectivement.



1. Justifier que $IQ = IR$.
2. En exprimant de deux façons les aires des triangles ABI et ACI , montrer que $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$.

Solution

1. Dans le triangle ARI , rectangle en R , nous avons

$$\frac{IR}{IA} = \sin \frac{\widehat{A}}{2}.$$

De même dans le triangle AQI , rectangle en Q , on a

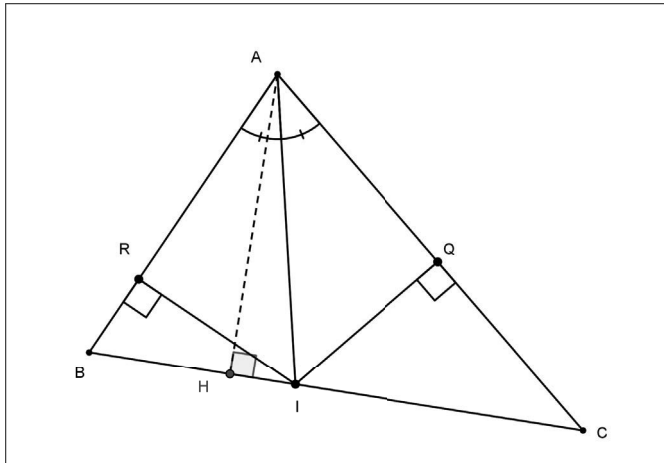
$$\frac{IQ}{IA} = \sin \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Il en résulte que

$$\frac{IR}{IA} = \frac{IQ}{IA}.$$

Nous en déduisons que $IQ = IR$.

2. Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .



Nous avons

$$\text{aire}(ABI) = \frac{IR \times AB}{2} = \frac{AH \times BI}{2}.$$

Nous en déduisons

$$IR \times AB = AH \times BI, \text{ ce qui donne}$$

$$AH = \frac{IR \times AB}{BI}.$$

De même, nous avons

$$\text{aire}(ACI) = \frac{IQ \times AC}{2} = \frac{AH \times IC}{2}.$$

Nous en déduisons

$$IQ \times AC = AH \times IC, \text{ ce qui implique}$$

$$AH = \frac{IQ \times AC}{IC}.$$

Puisque $IQ = IR$, les deux expressions de AH permettent d'obtenir l'égalité

$$\frac{AB}{BI} = \frac{AC}{CI}.$$

Il en résulte

$$AB \times CI = AC \times BI.$$

Nous en concluons

$$\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}.$$

Remarque

Nous avons démontré la propriété suivante que vous pouvez retenir.

Soient ABC un triangle et I le pied de la bissectrice, sur le segment $[BC]$, de l'angle \widehat{A} .

Nous disposons de la relation métrique

$$\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}.$$

4.4 Loi des sinus

Exercice 4. Formule des sinus dans un triangle acutangle

ABC est un triangle acutangle, c'est-à-dire ayant trois angles aigus.

On désigne par :

- *H et K les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets C et B du triangle.*
 - *\widehat{A} , \widehat{B} et \widehat{C} les trois angles aigus du triangle.*
 - *a , b et c les longueurs respectives BC , AC et AB des côtés du triangle.*
1. a. *En calculant CH de deux façons, montrer que $b \sin \widehat{A} = a \sin \widehat{B}$.*
 - b. *De même, prouver que $c \sin \widehat{A} = a \sin \widehat{C}$.*
 - c. *En déduire la formule de sinus*

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}.$$

2. Soit S l'aire du triangle ABC .

a. Montrer que $2S = ac \sin \widehat{B}$.

b. En déduire que $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S}$.

3. Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC .

On désigne par O son centre et par R son rayon.

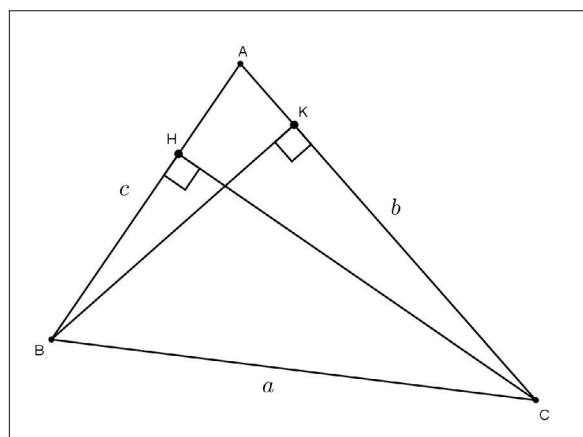
a. Le point D étant diamétralement opposé à B ,

montrer que $\sin \widehat{BDC} = \frac{a}{2R}$.

b. En déduire que $S = \frac{abc}{4R}$.

Solution

1.



a. D'une part, dans le triangle AHC rectangle en H , nous avons

$$\frac{CH}{AC} = \sin \widehat{A}.$$

D'autre part, dans le triangle BHC rectangle en H , nous avons

$$\frac{CH}{BC} = \sin \widehat{B}.$$

Nous en déduisons

$$CH = AC \sin \widehat{A} = BC \sin \widehat{B}.$$

Nous en concluons

$$b \sin \widehat{A} = a \sin \widehat{B}.$$

b. De même, nous calculons BK de deux façons. Dans le triangle ABK rectangle en K , nous obtenons :

$$BK = AB \sin \widehat{A} = c \sin \widehat{A}.$$

Dans le triangle CBK rectangle en K , nous obtenons

$$BK = BC \sin \widehat{C} = a \sin \widehat{C}.$$

Il vient

$$c \sin \widehat{A} = a \sin \widehat{C}.$$

c. Nous pouvons d'abord remarquer que $\sin \widehat{A} \neq 0$, $\sin \widehat{B} \neq 0$ et $\sin \widehat{C} \neq 0$, puisque les points A , B et C ne sont pas alignés.

De l'égalité obtenue en 1. a, il résulte

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}}.$$

De l'égalité obtenue en 1. b, nous déduisons

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}.$$

La "formule des sinus" est ainsi démontrée, c'est-à-dire

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}.$$

2. a. Nous avons

$$S = \frac{CH \times AB}{2}.$$

Nous savons que $CH = BC \sin \widehat{B}$. Il en résulte

$$2S = BC \times \sin \widehat{B} \times AB, \text{ ce qui donne}$$

$$2S = ac \sin \widehat{B}.$$

2. b. L'égalité précédente implique

$$\frac{2S}{ac} = \sin \widehat{B}.$$

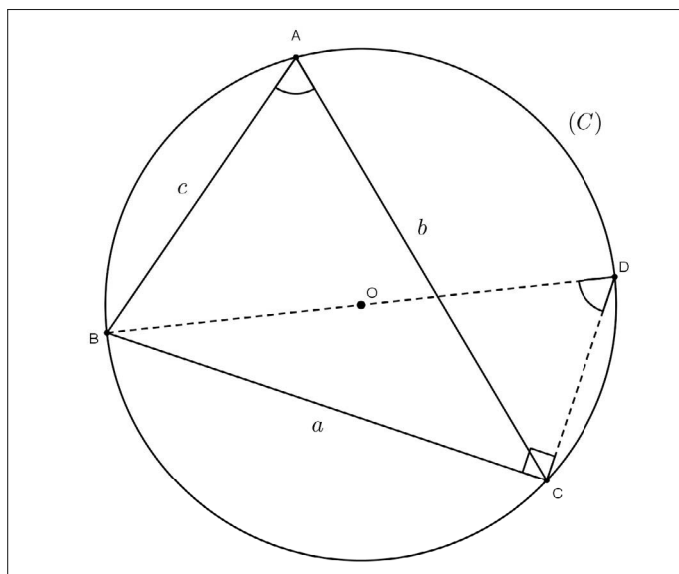
Nous en déduisons

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \widehat{B}}{b}, \text{ soit } \frac{abc}{2S} = \frac{b}{\sin \widehat{B}}.$$

La loi des sinus permet de conclure :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S}.$$

3.



a. Le triangle BDC est inscrit dans le cercle (C) et son côté $[BD]$ est un diamètre de ce cercle.

Il en résulte que ce triangle est rectangle en C . Par suite, nous obtenons

$$\sin \widehat{BDC} = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}.$$

b. Les angles \widehat{BDC} et \widehat{BAC} sont inscrits dans le cercle (C) et interceptent un même arc.

Ceci donne

$$\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = \widehat{A}.$$

La question précédente induit

$$\sin \widehat{A} = \frac{a}{2R}, \text{ c'est-à-dire } \frac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R.$$

De plus, nous savons que

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{abc}{2S}.$$

Nous en déduisons

$$\frac{abc}{2S} = 2R.$$

Nous en concluons

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Remarque

Vous pouvez retenir la "formule des sinus". Cette dernière est vraie dans un triangle quelconque. Cette généralisation peut être prouvée après l'étude du chapitre 10 de trigonométrie.

4.5 Une application de la formule des sinus

Exercice 5. Caractérisation d'un triangle rectangle

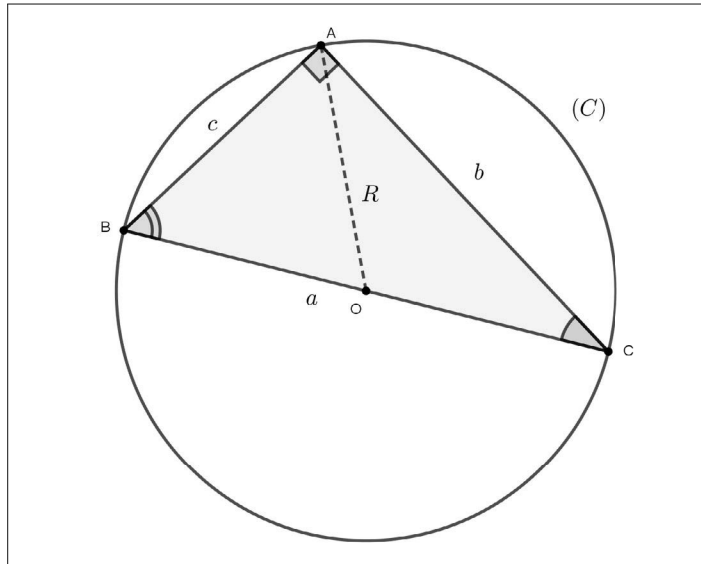
Les données sont celles de l'exercice 4 ci-dessus.

Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) le triangle BAC est rectangle en A .

(ii) $\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}$.

Solution



Montrons d'abord que (i) implique (ii).

Si le triangle BAC est rectangle en A , alors

$$\sin \widehat{A} = \sin 90^\circ = 1.$$

De plus, dans ce triangle rectangle, nous avons :

$$\sin \widehat{B} = \frac{b}{a} \text{ et } \sin \widehat{C} = \frac{c}{a}.$$

Nous en déduisons

$$\sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2}.$$

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle BAC rectangle en A , il vient

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Il en résulte

$$\sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C} = 1, \text{ soit } \sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}.$$

Réciproquement, montrons que (ii) implique (i) .

Supposons que

$$\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}.$$

La formule des sinus appliquée au triangle BAC , inscrit dans un cercle de rayon R , donne

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R.$$

Nous en déduisons

$$\sin \widehat{A} = \frac{a}{2R}, \sin \widehat{B} = \frac{b}{2R} \text{ et } \sin \widehat{C} = \frac{c}{2R},$$

ce qui implique

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2.$$

Après simplification, nous obtenons

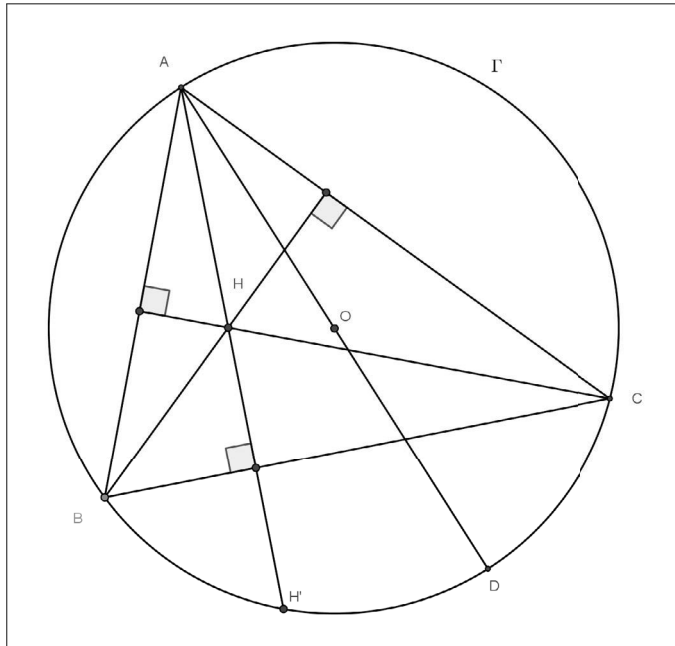
$$b^2 + c^2 = a^2.$$

La réciproque du théorème de Pythagore permet de conclure que le triangle BAC est rectangle en A .

4.6 Une propriété de l'orthocentre d'un triangle

Exercice 6. Symétrique de l'orthocentre d'un triangle par rapport à un de ses côtés

Soient ABC un triangle quelconque, O le centre du cercle Γ circonscrit à ce triangle, H son orthocentre et D le symétrique de A par rapport à O .



1. Montrer que les droites (BH) et (CD) sont parallèles. Prouver qu'il en est de même des droites (BD) et (CH) .
2. En déduire que les segments $[BC]$ et $[HD]$ ont le même milieu.
3. Soit H' le symétrique de H par rapport à la droite (BC) . Justifier que le triangle $HH'D$ est rectangle en H' . En déduire que $H' \in \Gamma$.
4. Ce résultat persiste-t-il lorsque le triangle ABC est rectangle en B ?
5. Conclusion.

Solution

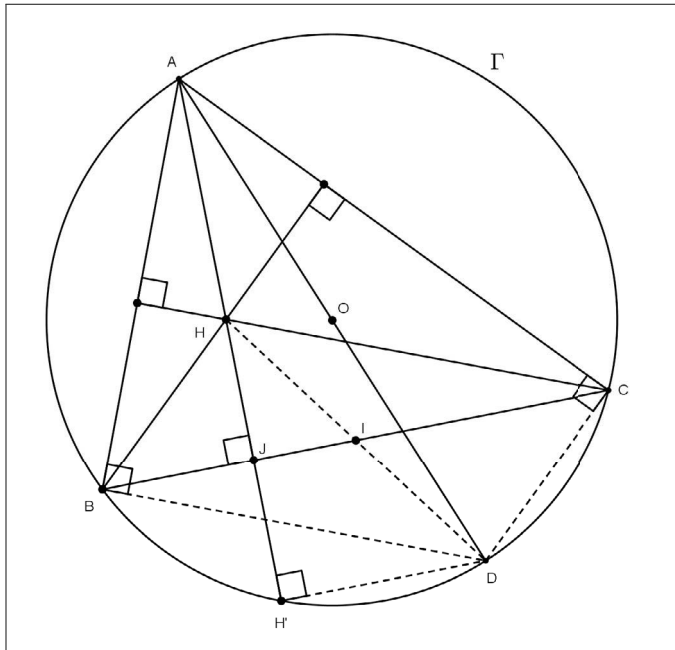
1. Le triangle ACD est inscrit dans le cercle Γ dont $[AD]$ est un diamètre. Ce triangle est donc rectangle en C , ce qui prouve que la droite (DC) est perpendiculaire en C à la droite (AC) .

La droite (BH) est une hauteur du triangle ABC , donc cette droite est orthogonale à (AC) .

Puisque deux droites orthogonales à une même droite sont parallèles entre elles, nous pouvons en conclure que les droites (BH) et (CD) sont parallèles.

De la même façon le triangle ABD est inscrit dans le cercle Γ , il est donc rectangle en B . De plus (CH) est une hauteur du triangle ABC .

Par conséquent les droites (BD) et (CH) sont orthogonales à (AB) , donc parallèles entre elles.



2. Le quadrilatère $HBDC$ est tel que $(BH) \parallel (DC)$ et $(CH) \parallel (BD)$.

Ce dernier est donc un parallélogramme dont les diagonales $[HD]$ et $[BC]$ ont le même milieu noté I .

3. Désignons par J le milieu du segment $[HH']$.

Dans le triangle $HH'D$, le théorème des milieux justifie que les droites (IJ) et $(H'D)$ sont parallèles.

De plus la droite (HH') est perpendiculaire en J à la droite $(BC) = (IJ)$.

Or nous savons que si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Par conséquent, la droite (HH') est perpendiculaire à $(H'D)$ en H' .

Nous avons ainsi prouvé que le triangle $HH'D$ est rectangle en H' .

Les points A , H et H' sont alignés, donc le triangle $AH'D$ est rectangle en H' .

Puisque $[AD]$ est un diamètre du cercle Γ , ce triangle est inscrit dans ce cercle, ce qui justifie que $H' \in \Gamma$.

4. Lorsque le triangle ABC est rectangle en B , les points H , B et H' sont confondus. Dans ce cas, nous avons également $H' \in \Gamma$.

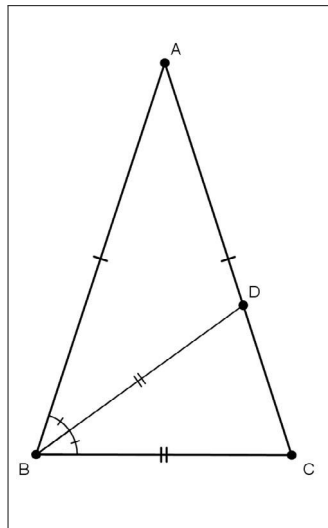
5. De la même façon, nous prouvons que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux deux autres côtés du triangle ABC appartiennent au cercle Γ . Nous avons ainsi démontré le résultat suivant :

Le symétrique de l'orthocentre d'un triangle quelconque par rapport à l'un de ses côtés appartient au cercle circonscrit à ce triangle.

4.7 Une application de la loi des sinus

Exercice 7. Triangle d'or

Soit ABC un triangle isocèle en A . La bissectrice issue du sommet B coupe le segment $[AC]$ en un point D tel que le triangle BCD soit lui-même isocèle en B .



1. Montrer qu'une mesure en degré de l'angle \widehat{BAC} est égale à 36° .
2. Prouver que $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$.
3. On suppose que $BC = 1$. Le réel $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or. Justifier que $AB = \phi$.
4. En déduire que $\cos 36^\circ = \frac{\phi}{2}$.

Solution

1. Les triangles ABC et BCD sont isocèles respectivement en A et B .
Il en résulte

$$\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDB}.$$

De plus la droite (BD) est la bissectrice de l'angle \widehat{ABC} donc

$$\widehat{CBD} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}.$$

Dans le triangle BCD , nous avons

$$\widehat{CBD} + \widehat{BCD} + \widehat{CDB} = 180^\circ.$$

Nous en déduisons

$$\frac{1}{2}\widehat{ABC} + 2\widehat{ABC} = 180^\circ, \text{ soit } \frac{5}{2}\widehat{ABC} = 180^\circ,$$

ce qui donne

$$\widehat{ABC} = 72^\circ.$$

Puisque

$$\widehat{BAC} = 180^\circ - 2\widehat{ABC},$$

nous obtenons finalement

$$\widehat{BAC} = 36^\circ.$$

Remarque

Nous avons $\widehat{ABD} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 36^\circ$, ce qui permet d'observer que le triangle ADB est également isocèle en D .

Nous en déduisons aussi que $\widehat{BDC} = 72^\circ$.

2. La loi des sinus, appliquée au triangle ABC , donne

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}}, \text{ soit } \frac{BC}{\sin 36^\circ} = \frac{AB}{\sin 72^\circ}.$$

Nous en déduisons

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ}.$$

De même dans le triangle BCD , nous obtenons :

$$\frac{BC}{\sin 72^\circ} = \frac{CD}{\sin 36^\circ},$$

c'est-à-dire

$$\frac{BC}{CD} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ}.$$

Nous en concluons

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}.$$

3. Les triangles CBD et ADB sont isocèles respectivement en B et D , donc

$$1 = BC = BD = AD.$$

Il en résulte

$$CD = AC - AD = AB - 1.$$

L'égalité obtenue à la question précédente devient

$$\frac{AB}{1} = \frac{1}{AB - 1}.$$

Cette équation, dont l'inconnue est AB , est équivalente à

$$AB(AB - 1) = 1 \Leftrightarrow AB^2 - AB - 1 = 0.$$

Nous reconnaissons une équation du second degré. Pour la résoudre, nous mettons sous sa forme canonique le trinôme $AB^2 - AB - 1$.

Il vient

$$AB^2 - 2 \times \frac{1}{2}AB + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(AB - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Nous en déduisons

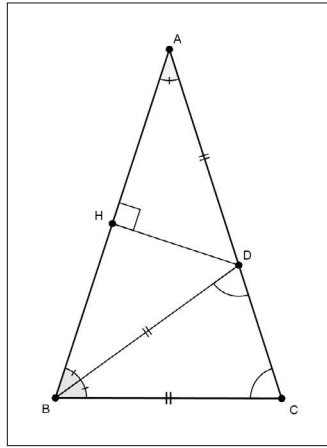
$$AB - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } AB - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow AB = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } AB = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Puisque $AB > 0$, nous en concluons

$$AB = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

4. Soit H le pied de la hauteur issue de D dans le triangle ADB isocèle en D .

Dans ce cas le point H est aussi le milieu du segment $[AB]$.



Dans le triangle AHD rectangle en H , nous avons

$$\cos \widehat{A} = \cos 36^\circ = \frac{AH}{AD} = \frac{\frac{1}{2}AB}{1} = \frac{AB}{2}.$$

Nous savons que $AB = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \phi$.

Nous en concluons

$$\cos 36^\circ = \frac{\phi}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

4.8 Comparaison de moyennes

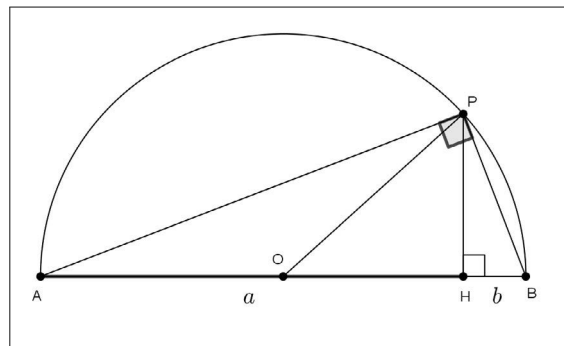
Exercice 8. Preuves géométriques

1. Soient a et b deux réels positifs.

- La moyenne arithmétique des réels a et b est le réel positif $\frac{a+b}{2}$.
- La moyenne géométrique des réels positifs a et b est le réel \sqrt{ab} .

Montrer l'inégalité $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, notée [1].

2. Une preuve géométrique de l'inégalité [1].



Le triangle APB est inscrit dans le demi-cercle de diamètre $[AB]$, centré en O . Le point H est le projeté orthogonal de P sur la droite (AB) .

On pose $HA = a$ et $HB = b$.

a. Justifier que $\widehat{HPB} = \widehat{HAP}$.

b. Montrer que $PH = \sqrt{ab}$.

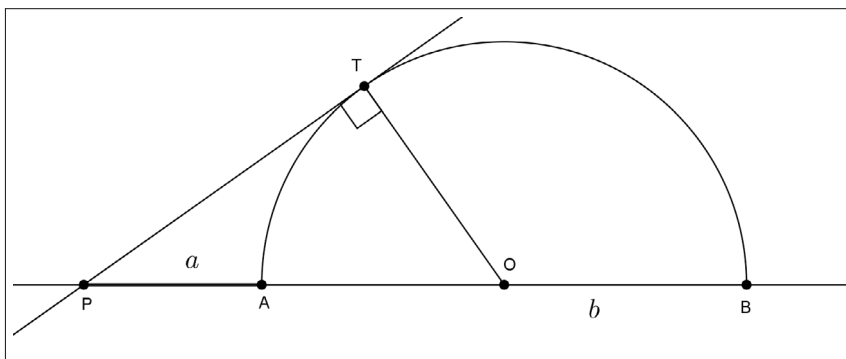
c. Montrer que $OP = \frac{a+b}{2}$.

d. En déduire l'inégalité [1].

e. Interpréter géométriquement le cas où l'égalité est atteinte.

3. Une autre preuve géométrique de [1].

On considère le demi-cercle de la question précédente. Soient P un point de la droite (AB) tel que $P \notin [AB]$ et (PT) la tangente en T à ce demi-cercle. On pose $PA = a$ et $PB = b$.



a. Exprimer PO et PT en fonction de a et b .

b. En déduire l'inégalité [1].

c. Justifier que, dans cette configuration, l'inégalité est stricte.

Solution

1. Soient a et b deux réels positifs. Nous avons

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Il en résulte que

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0.$$

Cela prouve que, pour tous $a \geq 0$ et $b \geq 0$, nous disposons de l'inégalité

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. [1]$$

2.

a. Les angles \widehat{HPB} et \widehat{HAP} ont le même angle complémentaire \widehat{B} dans les triangles PHB et APB respectivement rectangles en H et en P .

Nous en déduisons

$$\widehat{HPB} = \widehat{HAP}.$$

b. Dans le triangle PHB rectangle en H , nous avons

$$\tan \widehat{HPB} = \frac{HB}{HP}.$$

De même, dans le triangle PHA rectangle en H , nous avons

$$\tan \widehat{HAP} = \frac{HP}{HA}.$$

Or $\widehat{HPB} = \widehat{HAP}$, ce qui implique

$$\tan \widehat{HPB} = \tan \widehat{HAP}.$$

Nous en déduisons

$$\frac{HB}{HP} = \frac{HP}{HA},$$

ce qui donne

$$HP^2 = HA \times HB = ab.$$

Comme $HP > 0$, nous en concluons

$$HP = \sqrt{ab}.$$

c. Le triangle AOP est isocèle en O . Par suite, nous avons

$$OP = OA = \frac{AB}{2}.$$

Puisque $H \in [AB]$, nous obtenons

$$AB = HA + HB = a + b.$$

Nous en concluons

$$OP = \frac{a + b}{2}.$$

d. Dans le triangle OHP , rectangle en H , en appliquant le théorème de Pythagore, nous obtenons :

$$OP^2 = OH^2 + HP^2 \geq HP^2.$$

De la règle de comparaison des racines carrées, nous en déduisons

$$\sqrt{OP^2} \geq \sqrt{HP^2}.$$

Puisque $OP > 0$ et $HP > 0$, il vient

$$OP \geq HP.$$

Nous avons ainsi démontré, pour tous les réels $a > 0$ et $b > 0$, l'inégalité [1], c'est-à-dire

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Remarque

On suppose que $P \neq A$ et $P \neq B$ car sinon le triangle APB est réduit au segment $[AB]$.

e. L'égalité est atteinte si et seulement si $H = O$, soit $a = b$.

3. a. On suppose, comme sur la figure, puisque $P \notin [AB]$, que $b > a > 0$.

▷ D'une part, nous avons

$$PO = PA + AO = PA + \frac{AB}{2} = PA + \frac{PB - PA}{2} = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

▷ D'autre part, nous appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle OTP rectangle en T , ce qui donne

$$PT^2 = PO^2 - OT^2.$$

Puisque $OT = OA = \frac{b-a}{2}$ et $PO = \frac{a+b}{2}$, nous obtenons

$$PT^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

$$PT^2 = \left[\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right)\right] \left[\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(\frac{b-a}{2}\right)\right] = ab.$$

Comme $PT > 0$, nous en concluons

$$PT = \sqrt{ab}.$$

b. De la même façon que dans la question 2. d, nous avons $PT < PO$, ce qui justifie l'inégalité [1] au sens strict.

c. L'inégalité est stricte car si l'égalité est atteinte dans [1], on aurait $a = b$, ce qui est impossible car $P \notin [AB]$.

Remarque

Nous raisonnons de la même façon si $0 < b < a$.

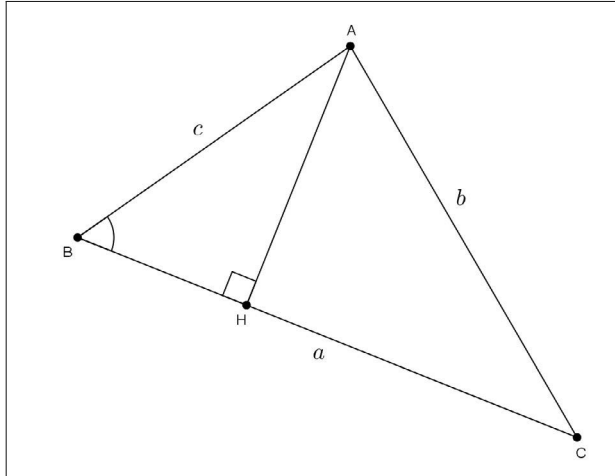
4.9 Relations métriques dans un triangle

Exercice 9. Formules d'Al Kashi¹ et de Héron²

ABC est un triangle acutangle, c'est-à-dire ayant trois angles aigus.

On désigne par

- H le pied de la hauteur issue du sommet A du triangle.
- \widehat{A} , \widehat{B} et \widehat{C} les trois angles aigus du triangle.
- a , b et c les longueurs respectives BC , AC et AB des côtés du triangle.



1. Formules d'Al Kashi.

a. En appliquant le théorème de Pythagore aux triangles AHB et AHC , montrer que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}.$$

b. Sans justification, donner de même

- c^2 en fonction de a^2 , b^2 et \widehat{C} .
- a^2 en fonction de b^2 , c^2 et \widehat{A} .

2. La formule de Héron.

On pose $AH = h$ et $2p = a + b + c$, ($2p$ est le périmètre du triangle ABC).

Il s'agit dans cette question d'exprimer l'aire S du triangle ABC en fonction de a , b , c et p .

a. Justifier que $BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$.

1. Mathématicien et astronome perse : XIII^e-XIV^e siècle

2. Mathématicien grec : I^e-II^e siècle

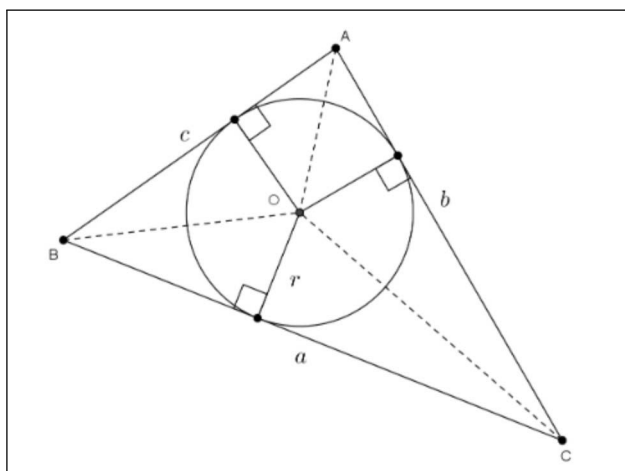
b. Montrer que $h^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4a^2}$.

c. En déduire que $h = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

d. En déduire la formule de Héron : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

3. Calcul du rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC en fonction de a , b , c et p .

Soient O le centre et r le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC .



a. Justifier que $S = pr$.

b. En déduire que $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

Solution

1. a. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle AHB rectangle en H assure que

$$AH^2 = AB^2 - BH^2.$$

De même, dans le triangle AHC rectangle en H , nous avons

$$AH^2 = AC^2 - CH^2.$$

Nous en déduisons

$$AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2,$$

soit,

$$AC^2 = AB^2 + CH^2 - BH^2,$$

ce qui donne :

$$b^2 = c^2 + (CH - BH)(CH + BH).$$

Puisque $H \in [BC]$, nous avons

$$CH + BH = BC = a.$$

De plus, comme $CH = a - BH$, nous obtenons

$$CH - BH = a - 2BH.$$

Il en résulte

$$b^2 = c^2 + a(a - 2BH) = c^2 + a^2 - 2a \times BH.$$

Dans le triangle AHB rectangle en H , nous avons

$$\frac{BH}{AB} = \cos \widehat{B}.$$

Nous obtenons ainsi

$$BH = BA \cos \widehat{B} = c \cos \widehat{B}.$$

Nous en concluons que la première formule d'Al Kashi est

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}.$$

b. De la même façon, étant donné la symétrie de l'égalité ci-dessus, nous disposons sans justification des deux autres formules d'Al Kashi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} \text{ et } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}.$$

Remarque

Nous justifierons lors du chapitre 10 de trigonométrie que les formules d'Al Kashi sont encore vraies lorsqu'un des angles du triangle est obtus.

2. a. Nous savons d'après la question 1. a, que

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2a \times BH.$$

Sachant que $a > 0$, nous en déduisons

$$BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

b. Nous savons également que $AH^2 = AB^2 - BH^2$, ce qui donne successivement

$$\begin{aligned}
 h^2 &= c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2, \\
 &= \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}, \\
 &= \frac{(2ac + (a^2 + c^2 - b^2))(2ac - (a^2 + c^2 - b^2))}{4a^2}, \\
 &= \frac{((a^2 + c^2 + 2ac) - b^2)(b^2 - (a^2 - 2ac + c^2))}{4a^2}, \\
 &= \frac{((a + c)^2 - b^2)(b^2 - (a - c)^2)}{4a^2}, \\
 &= \frac{(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)}{4a^2}, \\
 &= \frac{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}{4a^2}.
 \end{aligned}$$

c. Puisque $2p = a + b + c$, nous avons

$$\begin{aligned}
 2p - 2a &= b + c - a, \\
 2p - 2b &= a + c - b, \\
 2p - 2c &= a + b - c.
 \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$h^2 = \frac{2p(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)}{4a^2},$$

c'est-à-dire

$$h^2 = \frac{16p(p - a)(p - b)(p - c)}{4a^2} = \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{a^2}.$$

Puisque $h > 0$, il vient

$$h = \sqrt{\frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{a^2}} = \frac{2}{a} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Remarque

Nous observons que les égalités obtenues en b. et c. sont validées grâce aux inégalités triangulaires dans le triangle ABC , c'est-à-dire

$$b + c \geq a, a + c \geq b \text{ et } a + b \geq c.$$

d. Nous avons :

$$S = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{a}{2} \times h = \frac{a}{2} \times \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

La formule de Héron en résulte

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

3. a. En additionnant les aires des triangles AOB , BOC et COA , nous obtenons

$$S = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \frac{1}{2}(a+b+c)r = pr.$$

b. De la formule de Héron, il résulte que

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr.$$

Nous en déduisons

$$r = \frac{1}{p} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}}.$$

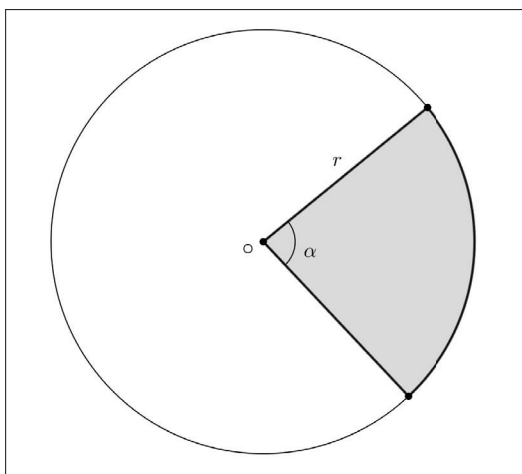
Nous en concluons

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

4.10 Aire d'un secteur angulaire

Exercice 10. Aire d'une ogive

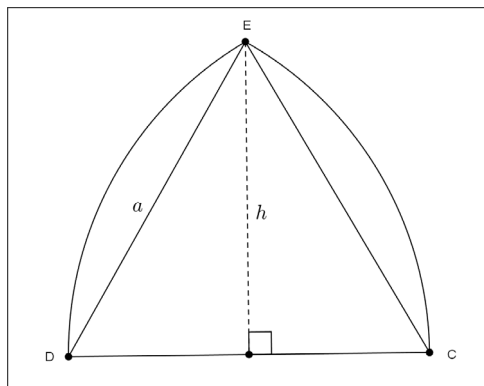
1. Sur la figure ci-dessous, on considère un disque de centre O , de rayon r et un secteur angulaire de ce même disque correspondant à un angle au centre de mesure α (en degrés).



On désigne par \mathcal{A} l'aire de ce secteur angulaire. Sachant que l'aire du disque et l'aire du secteur angulaire sont proportionnelles aux mesures de leur angle au centre respectif, justifier que

$$\mathcal{A} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}.$$

2. Sur la figure ci-dessous, le triangle DCE est équilatéral de côté a .



L'arc \widehat{CE} est un arc du cercle de centre D .

L'arc \widehat{DE} est un arc du cercle de centre C .

Calculer l'aire de l'ogive DCE .

Solution

1. D'après les considérations de proportionnalité de l'énoncé, nous obtenons

$$\frac{\pi r^2}{360} = \frac{\mathcal{A}}{\alpha}.$$

Nous en déduisons,

$$\mathcal{A} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}.$$

Remarque préalable

Nous rappelons tout d'abord que dans un triangle équilatéral de côté a , une hauteur de longueur h est telle que

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Il est conseillé de connaître par cœur ce résultat qui est très utile, notamment en trigonométrie.

2. L'aire \mathcal{A}_1 correspondant à l'arc \widehat{DE} est :

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\pi a^2 \times 60}{360} = \frac{\pi a^2}{6}.$$

Par symétrie, l'aire du secteur angulaire qui correspond à l'arc \widehat{CE} est aussi égale à \mathcal{A}_1 .

L'aire \mathcal{A}_2 du triangle équilatéral DEC est

$$\mathcal{A}_2 = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Nous en déduisons que l'aire \mathcal{A} de l'ogive est

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 + 2(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2) = 2\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 = 2 \times \frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

4.11 Formule des sinus et une inégalité

Exercice 11. Aires de triangles et inégalité

1. Montrer que, pour tout réel $t \in \mathbb{R}$,

$$t(1-t) \leq \frac{1}{4}.$$

En déduire que, pour tous les réels $x \in]0, 1[$, $y \in]0, 1[$ et $z \in]0, 1[$, nous disposons de l'inégalité

$$xyz(1-x)(1-y)(1-z) \leq \frac{1}{64}.$$

2. Soit ABC un triangle acutangle (trois angles aigus).

Nous désignons par

- a , b et c les longueurs respectives BC , AC et AB de ses côtés.
- S son aire.

Justifier que

$$S = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2}ac \sin \widehat{B} = \frac{1}{2}ab \sin \widehat{C}.$$

3. Nous considérons les points P , Q et R appartenant respectivement aux segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ tels que

$$BP = ax, \text{ avec } x \in]0, 1[,$$

$$CQ = by, \text{ avec } y \in]0, 1[,$$

$$AR = cz, \text{ avec } z \in]0, 1[.$$

Calculer, en fonction de S , les aires des triangles AQR , BPR et CQP .

L'affirmation qui suit est-elle vraie ?

L'une au moins des aires calculées ci-dessus est inférieure ou égale à $\frac{S}{4}$.

Solution

1.

▷ Soit t un réel. Nous avons

$$\frac{1}{4} - t(1-t) = \frac{1}{4} - t + t^2 = \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \geq 0,$$

ce qui prouve, pour tout réel t ,

$$t(1-t) \leq \frac{1}{4}.$$

▷ Nous appliquons l'inégalité précédente aux trois réels x , y et z appartenant à l'intervalle $]0, 1[$, nous en déduisons

Nous obtenons

$$0 < x(1-x) \leq \frac{1}{4}, \quad 0 < y(1-y) \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad 0 < z(1-z) \leq \frac{1}{4}.$$

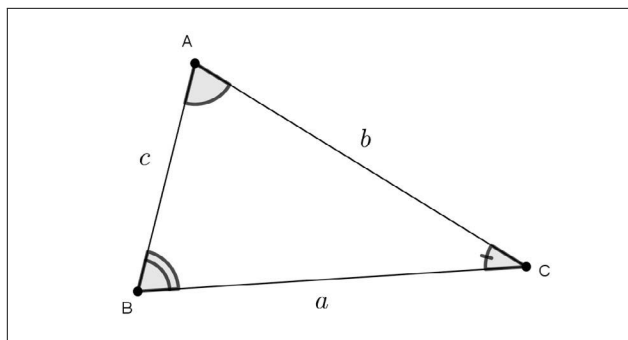
En multipliant membres à membres ces trois inégalités qui sont validées dans \mathbb{R}^{+*} , il vient

$$xyz(1-x)(1-y)(1-z) \leq \frac{1}{4^3}.$$

Nous en concluons, pour tous les réels $x \in]0, 1[$, $y \in]0, 1[$ et $z \in]0, 1[$, que nous disposons de l'inégalité

$$xyz(1-x)(1-y)(1-z) \leq \frac{1}{64}.$$

2.



Avec les notations de la figure, en reprenant l'exercice 4, nous appliquons la loi des sinus dans ce triangle, ce qui donne

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S}.$$

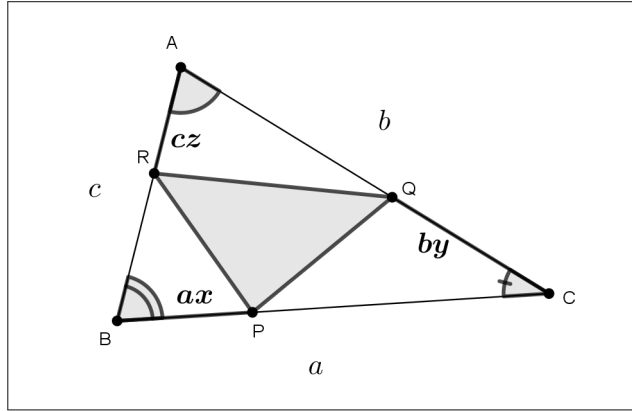
Nous en déduisons

$$2S \times a = abc \sin \widehat{A}, \text{ soit } S = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A}.$$

De la même façon, nous justifions que

$$S = \frac{1}{2}ac \sin \widehat{B} = \frac{1}{2}ab \sin \widehat{C}.$$

3. \triangleright Nous disposons de la figure qui suit.



Nous appliquons les égalités précédentes dans le triangle AQR .

Il vient

$$\begin{aligned} \text{aire}(AQR) &= \frac{1}{2} \times AR \times AQ \times \sin \widehat{A}, \\ &= \frac{1}{2} cz(b - by) \sin \widehat{A}, \\ &= z(1 - y) \times \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}, \\ &= z(1 - y)S. \end{aligned}$$

De la même façon, nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{aire}(BPR) &= x(1 - z) \times \frac{1}{2} ac \sin \widehat{B} = x(1 - z)S, \\ \text{aire}(CQP) &= y(1 - x) \times \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C} = y(1 - x)S. \end{aligned}$$

\triangleright Nous supposons par l'absurde³ que

$$\text{aire}(AQR) > \frac{S}{4} \text{ et } \text{aire}(BPR) > \frac{S}{4} \text{ et } \text{aire}(CQP) > \frac{S}{4}.$$

3. Annexe § 5.1

Ces trois inégalités sont strictement positives donc nous pouvons les multiplier membres à membres, ce qui donne

$$\text{aire}(AQR) \times \text{aire}(BPR) \times \text{aire}(CQP) > \left(\frac{S}{4}\right)^3,$$

c'est-à-dire

$$xyz(1-x)(1-y)(1-z)S^3 > \frac{S^3}{64}.$$

Après simplification par $S^3 > 0$, nous en déduisons

$$xyz(1-x)(1-y)(1-z) > \frac{1}{64}.$$

Cette inégalité est contradictoire avec celle obtenue à la première question.

Nous en concluons que l'affirmation proposée est vraie : l'une au moins des aires des triangle AQP , BPR , CQP est inférieure ou égale à $\frac{S}{4}$.

Fonctions numériques

La notion de fonction est relativement récente puisqu'elle a été introduite par Leibniz à la fin du XVII^e siècle. Il s'agit d'un concept très fécond qui autorise la mise en relation d'objets mathématiques de natures diverses. À notre niveau, nous nous intéressons aux fonctions numériques d'une variable réelle, c'est-à-dire la mise en relation selon un processus précis d'un nombre réel (la variable) avec un autre réel dépendant de cette variable. Dans ce chapitre, nous donnons les connaissances de base conformes au programme de Seconde tout en insistant sur le lien étroit qui existe entre fonction, équation et inéquation. Comme approfondissements, nous proposons une introduction à la notion de *bijection*, des exercices qui introduisent la pratique de la *composition* de deux fonctions et d'autres à propos de la fonction *partie entière*.

5.1 Les définitions

5.1.1 Définition d'une fonction numérique

Définition. Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de \mathbb{R} . Une fonction numérique f définie sur D , associe à chaque réel x appartenant à D un unique réel noté $f(x)$. Ce réel $f(x)$ est l'image de x par la fonction f .

Remarques. Nous en faisons cinq.

- Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons, pour simplifier, le terme fonction en omettant l'adjectif numérique.
- Une fonction est déterminée par la donnée de D (ensemble de départ de la fonction) et du procédé f qui à chaque $x \in D$ associe le réel $f(x)$.

- Pour considérer une fonction, on utilisera indifféremment l'une ou l'autre des formulations suivantes :

▷ soit f la fonction définie sur D par $f(x) = \text{expression en fonction de } x$.

▷ soit $f : x \mapsto f(x)$, avec $x \in D$.

- La variable x est *muette*, ce qui signifie que nous pouvons écrire indifféremment

$$f : x \mapsto f(x) \text{ ou } f : t \mapsto f(t) \text{ ou } f : a \mapsto f(a) \dots$$

- Une fonction f définie sur $D \subset \mathbb{R}$ est également appelée *application* f de D dans \mathbb{R} .

Exemples. Nous en proposons deux.

- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 2$.

L'image par f de 0 est $f(0) = -2$.

L'image par f de $\sqrt{2}$ est $f(\sqrt{2}) = 0$.

L'image par f de -1 est $f(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$.

Pour tout réel x , l'image de $-x$ par f est

$$f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x).$$

- Soit r la fonction racine carrée définie sur $[0, +\infty[$ par $r(x) = \sqrt{x}$.

L'image par r de 3 est $r(3) = \sqrt{3}$.

Le réel -1 n'a pas d'image par r car $-1 \notin [0, +\infty[$.

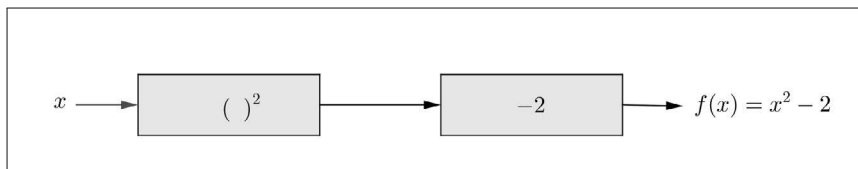
Pour tout réel x , l'image de x^2 par r est

$$r(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

La valeur absolue d'un réel est définie au chapitre 1.

Remarques. Nous en faisons deux.

- Une fonction peut-être interprétée comme une succession de « filtres » ainsi que le suggère le schéma suivant



- Le langage Python est très bien adapté aux calculs d'images par une fonction.

L'exemple précédent est restitué par le script qui suit.

```

def f(x):
    y=x**2-2
    return y

```

5.1.2 Ensemble de définition

Définition. L'ensemble de définition d'une fonction f , noté D_f , est l'ensemble des réels x tels que le nombre $f(x)$ existe.

Remarque. Lorsque l'on considère une fonction f définie sur une partie D de \mathbb{R} , nous avons, selon le contexte, $D = D_f$ ou $D \subset D_f$.

Par exemple, la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ est définie sur \mathbb{R} , mais si f est l'aire d'un carré de côté $x > 0$, alors f est définie sur $]0, +\infty[$.

Proposition. Le tableau qui suit restitue l'ensemble de définition de chacune des fonctions de référence de la classe de Seconde.

fonction f	D_f
affine $x \mapsto ax + b$	\mathbb{R}
carré $x \mapsto x^2$	\mathbb{R}
racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$
inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{+*} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
valeur absolue $x \mapsto x $	\mathbb{R}

Démonstration. Chaque ensemble de définition résulte de la définition de la fonction de référence considérée.

Exemples (Recherche d'ensembles de définition). Nous en proposons quatre.

- La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est définie si et seulement si $x - 1 \neq 0$, soit $x \neq 1$.

Conclusion. $D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

- La fonction $g : x \mapsto \sqrt{x-1}$ est définie si et seulement si $x - 1 \geq 0$, soit $x \geq 1$.

Conclusion. $D_g = [1, +\infty[$.

- La fonction $h : x \mapsto \sqrt{x^2 - x}$ est définie si et seulement si :

$$x^2 - x = x(x - 1) \geq 0.$$

Ainsi nous formons le tableau de signes du produit $x(x - 1)$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
signe de x		$-$	0	$+$
signe de $x - 1$	$-$		$-$	0
signe de $x(x - 1)$	$+$	0	$-$	0

Conclusion. $D_h =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.

- La fonction $k : x \mapsto \sqrt{x}\sqrt{x-1}$ est définie si et seulement si

$$x \geq 0 \text{ et } x - 1 \geq 0, \text{ soit } x \geq 0 \text{ et } x \geq 1.$$

Conclusion. $D_k = [0, +\infty[\cap [1, +\infty[= [1, +\infty[$.

5.1.3 Antécédents d'un réel par une fonction

Définition. Soit f une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$. Étant donné un réel b , on dit que $a \in D$ est un antécédent de b par f si et seulement si $f(a) = b$.

Proposition (caractérisation d'un antécédent). Soit f une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes

- (i) $a \in D$ est un antécédent de b par f .
- (ii) a est une solution dans D de l'équation $f(x) = b$.

Démonstration. (i) implique (ii).

En effet si $a \in D$ est un antécédent de b par f , alors $f(a) = b$, ce qui prouve que a est une solution dans D de l'équation $f(x) = b$.

(ii) implique (i).

Si a est une solution dans D de l'équation $f(x) = b$, alors $f(a) = b$, ce qui justifie que $a \in D$ est un antécédent de b par f .

Exemples. Nous étudions deux exemples.

1^{er} exemple. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 2$.

Nous déterminons les antécédents par f des réels $3, -2, -3$.

▷ Pour déterminer les antécédents de 3 , nous résolvons l'équation $f(x) = 3$, qui est équivalente à :

$$x^2 = 5 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \text{ ou } x = \sqrt{5}.$$

Nous en concluons que le réel 3 admet par f deux antécédents

$$-\sqrt{5} \text{ ou } \sqrt{5}.$$

▷ Nous résolvons à présent l'équation $f(x) = -2$ qui est équivalente à $x^2 = 0$, soit $x = 0$.

Par conséquent -2 admet pour un unique antécédent par f le réel 0.

▷ Pour finir, nous résolvons l'équation $f(x) = -3$, qui équivaut à $x^2 = -1$.

Cette équation n'a pas de solution, donc le réel -3 n'a pas d'antécédent par la fonction f .

▷ Selon les valeurs du réel m , nous déterminons le nombre d'antécédents de m par la fonction f .

Nous résolvons l'équation $f(x) = m$.

Nous obtenons $x^2 = m + 2$.

Nous distinguons trois cas par disjonction.

1^{er} cas : $m + 2 > 0$, soit $m > -2$.

Le réel m admet dans ce cas deux antécédents qui sont égaux à

$$-\sqrt{m+2} \text{ ou } \sqrt{m+2}.$$

2^e cas : $m + 2 = 0$, soit $m = -2$.

Le réel -2 admet dans ce cas un seul antécédent qui est égal à 0.

3^e cas : $m + 2 < 0$, soit $m < -2$. Dans ce cas, m n'admet pas d'antécédent puisqu'un carré est positif ou nul.

2^e exemple. Nous considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 + 2x - 2.$$

Avec cette fonction nous déterminons à nouveau les antécédents des réels 3, -2 , -3 .

▷ Résolution de l'équation $f(x) = 3$.

Nous avons les équivalences suivantes :

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0,$$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 - 5 = 0,$$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 6,$$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow x + 1 = -\sqrt{6} \text{ ou } x + 1 = \sqrt{6},$$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{6} \text{ ou } x = -1 + \sqrt{6}.$$

Ces deux solutions sont les antécédents de 3 par la fonction f .

▷ Résolution de l'équation $f(x) = -2$.

Cette équation est successivement équivalente à :

$$\begin{aligned}x^2 + 2x &= 0, \\x(x + 2) &= 0, \\x = 0 \text{ ou } x + 2 &= 0, \\x = 0 \text{ ou } x &= -2.\end{aligned}$$

Par suite -2 admet deux antécédents par f qui sont égaux à 0 ou -2 .

▷ Résolution de l'équation $f(x) = -3$.

Cette équation est successivement équivalente à

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 1 &= 0, \\(x + 1)^2 &= 0, \\x + 1 &= 0, \\x &= -1.\end{aligned}$$

Il en résulte que -3 a pour unique antécédent -1 par la fonction f .

▷ Pour terminer, nous résolvons, selon les valeurs du réel m , l'équation $f(x) = m$.

Cette équation est équivalente à

$$x^2 + 2x + 1 - 1 - 2 = m \Leftrightarrow (x + 1)^2 = m + 3.$$

Nous distinguons trois cas par disjonction.

1^{er} cas : $m + 3 > 0$, soit $m > -3$.

Le réel m admet dans ce cas deux antécédents qui sont égaux à

$$-1 - \sqrt{m + 3} \text{ ou } -1 + \sqrt{m + 3}.$$

2^e cas : $m + 3 = 0$, soit $m = -3$.

Le réel -3 admet dans ce cas un seul antécédent qui est égal à -1 .

3^e cas : $m + 3 < 0$, soit $m < -3$.

Dans ce cas, m n'admet pas d'antécédent car un carré est positif ou nul.

5.1.4 Notion sur les bijections

Définition (d'une bijection). Soit f une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$.

Si tout réel b admet par f un unique antécédent, on dit que f est une bijection de D sur \mathbb{R} .

Remarque. Puisqu'un réel peut ne pas avoir d'antécédent par une fonction f , nous désignons par F l'ensemble des réels $f(x)$ quand $x \in D$.

Ce sous-ensemble de \mathbb{R} est appelé *ensemble image* de D par f . Nous pouvons ainsi donner une définition plus générale d'une bijection qui est la suivante :

Si tout $b \in F$ admet par f un unique antécédent, on dit que f est une bijection de D sur F .

Exemples. Nous en donnons deux.

▷ Nous montrons que $f : x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est une bijection de $\mathbb{R} - \{1\}$ sur \mathbb{R}^* .
Soit $y \in \mathbb{R}^*$. L'équation $f(x) = y$

$$\frac{1}{x-1} = y \Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{y}.$$

Nous en déduisons que, pour tout $y \neq 0$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution.

En d'autres termes, tout réel $y \neq 0$ admet un unique antécédent

$$x = 1 + \frac{1}{y} \in \mathbb{R} - \{1\} \text{ par la fonction } f,$$

ce qui prouve que f est une bijection de $\mathbb{R} - \{1\}$ sur \mathbb{R}^* .

▷ Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

La fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

En effet, pour tout réel y , puisque $a \neq 0$, l'équation $f(x) = y$ a pour unique solution

$$x = \frac{y-b}{a},$$

ce qui prouve que tout réel y admet un unique antécédent par f .

Nous observons que si $a = 0$, alors f est la fonction constante $x \mapsto b$.

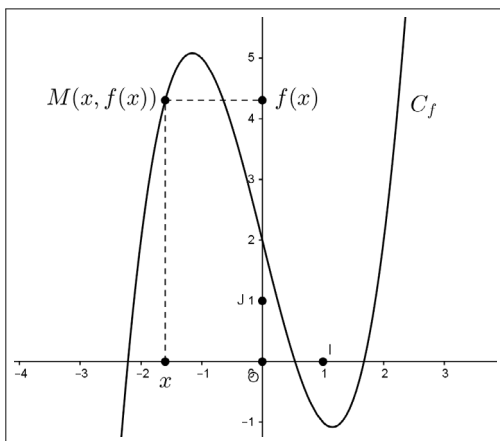
Ainsi le réel b admet une infinité d'antécédents par f . Par conséquent, cette fonction n'est pas une bijection.

5.2 Représentation graphique d'une fonction

Dans ce paragraphe, $(O; I, J)$ est un repère orthogonal du plan.

5.2.1 Les définitions

Définition (de la représentation graphique d'une fonction). Soit f une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$. La représentation graphique de f est l'ensemble C_f des points $M(x, f(x))$ avec $x \in D$.



Remarques. Nous en faisons trois.

- C_f est également appelée courbe représentative de la fonction f .
- En termes ensemblistes, nous avons

$$C_f = \{M(x, y) / y = f(x), x \in D\}.$$

- Nous retiendrons

$$M(x, y) \in C_f \Leftrightarrow y = f(x) \text{ et } x \in D.$$

Définition (équation d'une courbe représentative). Soit f une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$. L'équation à deux inconnues

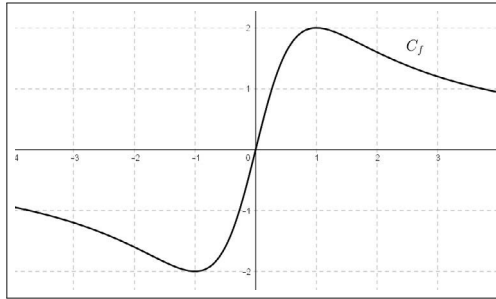
$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in D \end{cases}$$

est appelée *équation cartésienne de la courbe C_f* .

Remarques. Nous en donnons deux.

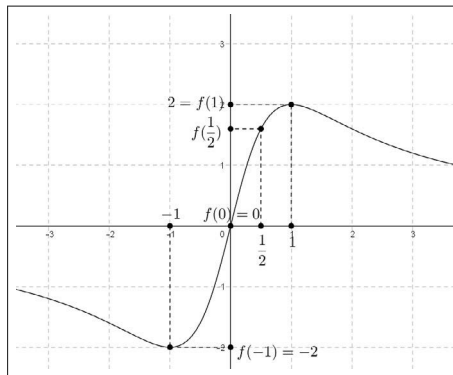
- Une équation de la courbe C_f dépend du repère choisi.
- Lorsque $M(x, y) \in C_f$, on dit que les coordonnées du point M vérifient l'équation de C_f et réciproquement.

Exemple. Nous considérons une fonction f définie sur $[-4, 4]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



▷ Par une lecture graphique, nous déterminons les images des réels -1 , 0 et 1 par f .

Les images sont lues sur la droite des ordonnées comme indiquées sur la figure qui suit.



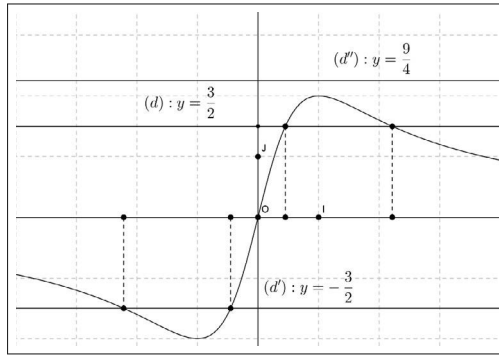
▷ Nous ne pouvons pas lire exactement la valeur de $f(\frac{1}{2})$ mais nous observons

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \in [1, 2].$$

▷ Nous plaçons les réels $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$ et $\frac{7}{2}$ sur la droite des ordonnées.

Les antécédents de chacun de ces nombres sont les abscisses des points communs à la courbe C_f et aux droites d'équations $(d) : y = \frac{3}{2}$, $(d') : y = -\frac{3}{2}$ et $(d'') : y = \frac{7}{2}$.

Ils sont comptés sur la droite des abscisses dans la figure ci-après :



Nous en concluons que par la fonction f

- $-\frac{3}{2}$ a deux antécédents.
- $\frac{3}{2}$ a deux antécédents.
- $\frac{9}{4}$ n'a pas antécédent.

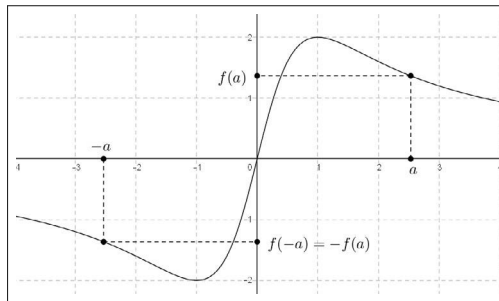
▷ Par une lecture graphique, nous observons que

$$\text{si } x \in [-4; 4], \text{ alors } f(x) \in [-2; 2].$$

▷ Par une lecture graphique, nous observons que

$$\text{si } a \in [-4; 4], \text{ alors } f(-a) = -f(a).$$

Dans ce cas, on dit que la fonction f est *impaire*.



Remarque. La fonction proposée dans cet exemple est définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}.$$

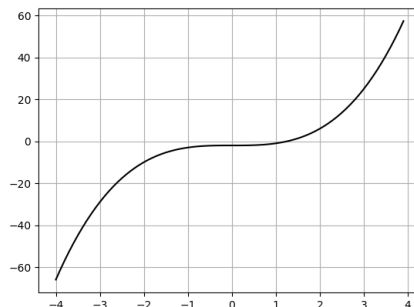
Dans l'exercice corrigé 9 de ce chapitre, nous justifierons algébriquement les observations précédentes.

5.2.2 Représentation graphique et Python

Le langage Python permet d'obtenir la représentation graphique d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$. Le script que nous proposons nécessite le module `matplotlib` et l'utilisation de Listes qui restituent les abscisses et les ordonnées d'un point de \mathcal{C}_f . À partir du réel a , chaque abscisse est incrémentée d'un pas choisi en entrée suffisamment petit pour obtenir un tracé continu de la courbe attendue.

```
from math import *
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
    return x**3-2
a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
h=float(input("pas="))
X=[]
Y=[]
while a<b:
    X.append(a)
    Y.append(f(a))
    a=a+h
plt.plot(X,Y,"k-")
plt.grid()
plt.show()
```

En prenant $f : x \mapsto x^3 - 2$ sur l'intervalle $[-4, 4]$ avec un `pas= 10^{-1}` , nous obtenons



5.2.3 Représentations graphiques des fonctions de référence

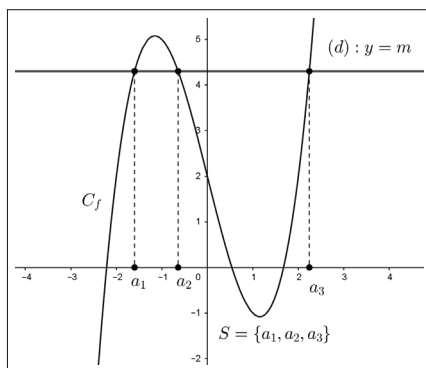
fonction f	\mathcal{C}_f
carré $x \mapsto x^2$, définie sur \mathbb{R}	<p>C_f est une parabole axe de symétrie (Oy) $C_f: y = x^2$ sommet O</p>
racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur \mathbb{R}^+	<p>$C_f: y = \sqrt{x}$</p>
inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur \mathbb{R}^*	<p>C_f est une hyperbole $C_f: y = \frac{1}{x}$ Les axes du repère sont les asymptotes O est un centre de symétrie</p>
affine $x \mapsto ax + b$, définie sur \mathbb{R}	<p>$C_f: y = ax + b$ $b = 0$ $a = 0$</p>
cube $x \mapsto x^3$, définie sur \mathbb{R}	<p>$C_f: y = x^3$ O est un centre de symétrie</p>

5.3 Résolutions graphiques

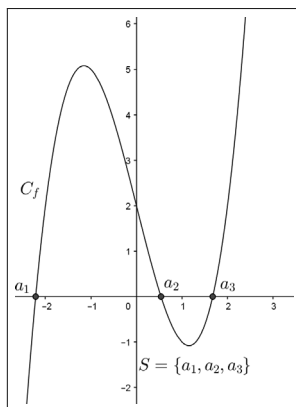
Soit f une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$

5.3.1 Résolution graphique d'une équation du type $f(x) = m$

Soit m un réel donné. Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite (d) d'équation $y = m$.



En particulier les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite des abscisses (OI) , d'équation $y = 0$.



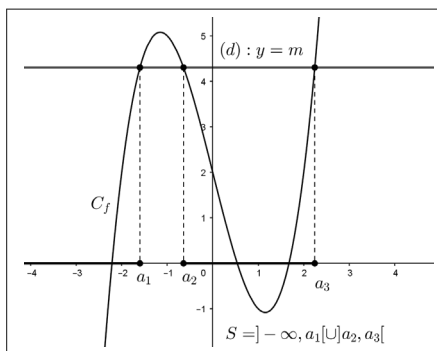
Remarque. Cette méthode graphique ne fournit pas en général une résolution exacte. Par contre elle permet de conjecturer l'existence (ou la non existence) de solutions, de compter le nombre de solutions, éventuellement de donner le signe des solutions et un encadrement de ces solutions.

5.3.2 Résolution graphique d'une inéquation du type $f(x) < m$

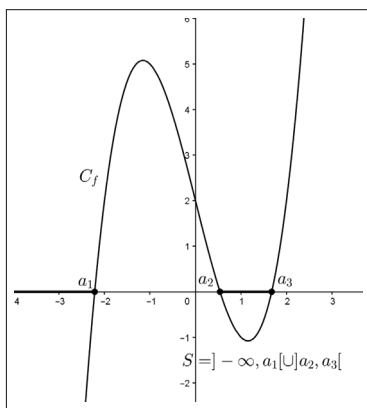
Soit m un réel donné. Les solutions de l'inéquation $f(x) < m$ sont les abscisses des points de C_f dont les ordonnées sont inférieures strictement à m .

En d'autres termes, les solutions de l'inéquation $f(x) < m$ sont les abscisses des points communs à la courbe C_f et au demi-plan ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y < m$.

On dit que ce demi-plan est ouvert, de frontière la droite (d) d'équation $y = m$.



En particulier les solutions de l'équation $f(x) < 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec le demi-plan ouvert de frontière la droite des abscisses (OI) tel que $y < 0$.

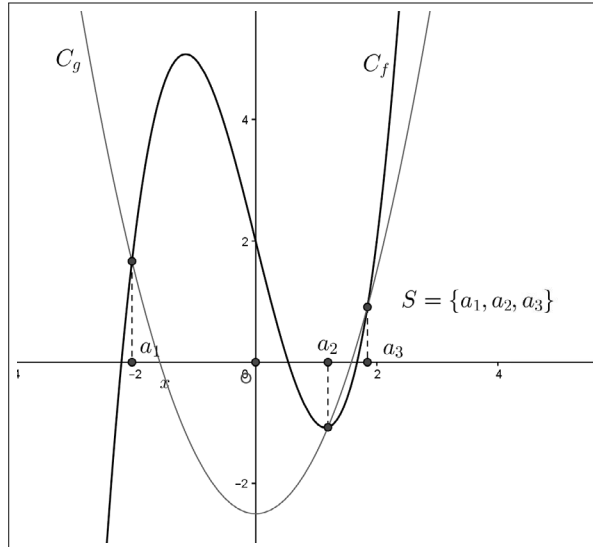


Remarque. On interprète de la même façon les inéquations de la forme

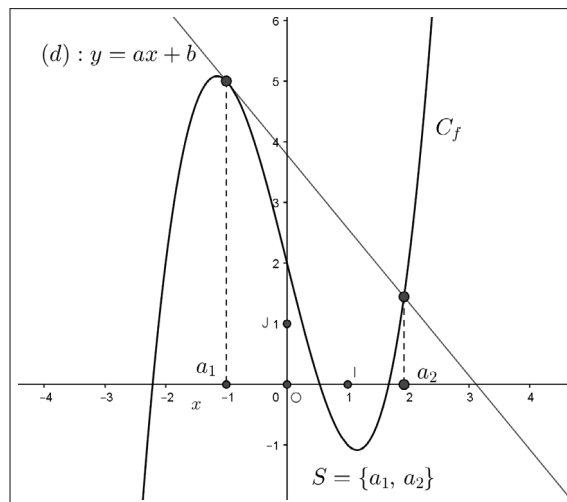
$$f(x) > m, f(x) \leq m \text{ et } f(x) \geq m.$$

5.3.3 Résolution graphique d'une équation du type $f(x) = g(x)$

Soient f et g deux fonctions définies sur une partie D de \mathbb{R} . Les solutions dans D de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g .



En particulier lorsque g est une fonction affine $x \mapsto ax + b$, les solutions de l'équation $f(x) = ax + b$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f et de la droite (d) d'équation $y = ax + b$.



5.4 Propriétés qualitatives d'une fonction

5.4.1 Egalité de deux fonctions

Définition. Soient f et g deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$.

On dit que $f = g$ si et seulement si, $\forall x \in D, f(x) = g(x)$.

Remarques. Nous en faisons deux.

- La relation $f = g$ définit une nouvelle égalité : l'égalité entre fonctions ou égalité fonctionnelle.

- Souvent nous avons $D = D_f \cap D_g$.

Exemples. Nous en donnons deux.

- Sur \mathbb{R} , les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \sqrt{x^2}$ sont égales.
- Sur $\mathbb{R} - \{2\}$, les fonctions $f : x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ et $g : x \mapsto x + 2$ sont égales.

5.4.2 Parité d'une fonction

Définition. Soit f une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$.

On suppose que : $\forall x \in D, -x \in D$.

On dit que f est

- paire si et seulement si

$$\forall x \in D, f(-x) = f(x),$$

- impaire si et seulement si

$$\forall x \in D, f(-x) = -f(x).$$

Remarque. La condition, $\forall x \in D, -x \in D$, signifie que D est "centrée" en 0.

En d'autres termes, soit $D = \mathbb{R}$, soit $D = \mathbb{R}^*$, soit, pour tout réel $a > 0$, D est de la forme $D =] - a, a[$ ou $D = [-a, a]$ ou $] - \infty, -a[\cup] a, +\infty[$ ou $] - \infty, -a[\cup] - a, a[\cup] a, +\infty[$ ou $] - \infty, -a[\cup] a, +\infty[$.

Exemples. Nous en donnons trois ainsi qu'un contre-exemple.

▷ La fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$ est définie sur \mathbb{R} qui est symétrique par rapport à 0. Pour tout réel x , nous avons

$$f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x),$$

ainsi f est paire.

▷ La fonction $g : x \mapsto \frac{2x}{x^2 - 1}$ est définie à condition que $x^2 \neq 1$, soit $x \neq -1$ et $x \neq 1$.

Il en résulte que $D_g =] - \infty, -1[\cup] 1, +\infty[$.

Nous avons, pour tout $x \in D_g$, $-x \in D_g$ et

$$g(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{2x}{x^2 - 1} = -g(x).$$

La fonction g est donc impaire.

▷ La fonction $h : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ est définie à condition que $1 - x^2 \geq 0$, soit $x^2 \leq 1$, c'est-à-dire $x \in [-1, 1]$.

Par conséquent, nous obtenons que $D_h = [-1, 1]$.

De plus, nous avons, pour tout $x \in D_h$, $-x \in D_h$ et

$$h(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} = h(x).$$

La fonction h est donc paire.

▷ La fonction $k : x \mapsto x^3 - x^2$ est définie sur \mathbb{R} .

Nous observons que

$$k(1) = 0 \text{ et } k(-1) = -2.$$

Par conséquent nous obtenons

$$k(-1) \neq k(1) \text{ et } k(-1) \neq -k(1).$$

Ce contre-exemple justifie que k n'est ni paire, ni impaire.

Proposition (caractérisation géométrique de la parité). $(O; I, J,)$ est un repère orthogonal du plan. Soit f une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ telle que D soit "centrée" en 0.

• f est paire si et seulement si la droite des ordonnées (OJ) est un axe de symétrie pour la courbe C_f .

• f est impaire si et seulement si l'origine O du repère est un centre de symétrie pour la courbe C_f .

Démonstration. À lire après l'étude du chapitre 8 de géométrie analytique.

• Nous supposons que f est paire.

Les points $M(x, f(x))$ et $M'(-x, f(-x))$ avec $x \in D$ appartiennent à la courbe C_f .

Considérons le milieu H du segment $[MM']$.

Nous avons $H\left(\frac{x + (-x)}{2}, \frac{f(x) + f(-x)}{2}\right)$.

Puisque f est paire, nous obtenons

$$H(0, f(x)).$$

Nous en déduisons que $H \in (OJ)$.

De plus, nous avons $\overrightarrow{MM'}((-x) - x, f(-x) - f(x))$.

Puisque f est paire, nous obtenons que $\overrightarrow{MM'}(-2x, 0)$, ce qui prouve que la droite (MM') est parallèle à (OI) donc orthogonale à (OJ) .

Nous avons ainsi justifié que si f est paire, alors la droite (OJ) est un axe de symétrie pour la courbe C_f .

Réciproquement, supposons que la droite (OJ) soit un axe de symétrie pour la courbe C_f . Nous observons que si $M(x, y)$ et $M(x', y')$ sont symétriques par

rapport à la droite (OJ) , alors
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} .$$

Puisque (OJ) est une axe de symétrie pour la courbe C_f ,

$$\text{si } M(x, f(x)) \in C_f, \text{ alors } M'(x', f(x')) \in C_f.$$

Nous en déduisons que

$$\begin{cases} x' = -x \\ f(x') = f(x) \end{cases} ,$$

ce qui implique

$$f(-x) = f(x).$$

Par conséquent la fonction f est paire.

• Nous supposons que f est impaire.

Les points $M(x, f(x))$ et $M'(-x, f(-x))$ avec $x \in D$ appartiennent à la courbe C_f .

Le milieu du segment $[MM']$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x + (-x)}{2}, \frac{f(x) + f(-x)}{2}\right).$$

Puisque f est impaire, ce milieu a pour coordonnées $(0, 0)$, ce qui prouve que le milieu du segment $[MM']$ est l'origine O du repère.

Ainsi les points M et M' sont symétriques relativement à O .

Par conséquent, nous avons montré que l'origine O du repère est un centre de symétrie pour la courbe C_f .

Réciproquement, supposons que l'origine O du repère soit un centre de symétrie pour la courbe C_f . Nous observons que si $M(x, y)$ et $M(x', y')$ sont symétriques par rapport l'origine O du repère, alors $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$.

Puisque O est un centre de symétrie pour la courbe C_f ,

$$\text{si } M(x, f(x)) \in C_f, \text{ alors } M'(x', f(x')) \in C_f.$$

Nous en déduisons que

$$\begin{cases} x' = -x \\ f(x') = -f(x) \end{cases},$$

ce qui implique que $f(-x) = -f(x)$.

Par suite, la fonction f est impaire.

Proposition (Fonctions de référence et parité). *Nous disposons du tableau suivant :*

<i>La fonction</i>	<i>est</i>
<i>carré $x \mapsto x^2$, définie sur \mathbb{R}</i>	<i>paire</i>
<i>racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur \mathbb{R}^+</i>	<i>ni paire, ni impaire</i>
<i>inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur \mathbb{R}^*</i>	<i>impaire</i>
<i>affine $x \mapsto ax + b$, définie sur \mathbb{R}</i>	<i>si $a = 0$, paire si $b = 0$, impaire si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ ni paire, ni impaire</i>
<i>cube $x \mapsto x^3$, définie sur \mathbb{R}</i>	<i>impaire</i>

Démonstration. Elle résulte des définitions de la parité.

5.4.3 Variations d'une fonction

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I inclus dans D_f . Soient a et b deux réels appartenant à I . La fonction f est

- croissante sur I si et seulement si $a < b$ implique $f(a) \leq f(b)$,
- décroissante sur I si et seulement si $a < b$ implique $f(a) \geq f(b)$.

Remarques. Nous en proposons six.

- Une fonction monotone sur I est soit croissante, soit décroissante sur I .
- Étudier le sens de variations d'une fonction, c'est déterminer sur quels intervalles f est croissante ou bien décroissante.

- Dans les deux définitions ci-dessus on peut remplacer $a < b$ par $a \leq b$.
- Si dans les deux définitions ci-dessus les inégalités sont strictes, on dit que f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur l'intervalle I .

- Une fonction à la fois croissante et décroissante sur I est constante sur cet intervalle, ce qui signifie,

quels que soient a et b appartenant à I , $a < b$ implique $f(a) = f(b)$.

- La monotonie stricte sur I entraîne la monotonie large sur cet intervalle. La réciproque est fausse.

Proposition (Variations des fonctions de référence). Nous disposons du tableau suivant :

<i>La fonction</i>	<i>est</i>
<i>carré $x \mapsto x^2$</i>	<i>croissante sur $[0, +\infty[$ décroissante sur $] - \infty, 0]$</i>
<i>racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$</i>	<i>croissante sur $[0, +\infty[$</i>
<i>inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$</i>	<i>décroissante sur $] - \infty, 0[$ décroissante sur $]0, +\infty[$</i>
<i>affine $x \mapsto ax + b$</i>	<i>si $a > 0$, croissante sur \mathbb{R} si $a < 0$, décroissante sur \mathbb{R} si $a = 0$, constante sur \mathbb{R}</i>
<i>cube $x \mapsto x^3$</i>	<i>croissante sur \mathbb{R}</i>

Démonstration. Elle résulte des règles de comparaison établies au chapitre 2 "Inégalités".

Exemple (Variations d'une fonction et fonctions de référence). En utilisant les variations des fonctions de référence, nous étudions le sens de variations sur $[0, +\infty[$, puis sur $] - \infty, 0]$ de la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{2} - 2x^2.$$

▷ Sens de variations de f sur $[0, +\infty[$.

Soient a et b deux réels appartenant à $[0, +\infty[$ tels que $a < b$.

La fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$, donc

$$a^2 \leq b^2.$$

En multipliant par -2 , nous en déduisons

$$-2a^2 \geq -2b^2,$$

ce qui donne

$$\sqrt{2} - 2a^2 \geq \sqrt{2} - 2b^2, \text{ c'est-à-dire } f(a) \geq f(b).$$

Nous en concluons que la fonction f est décroissante sur $[0, +\infty[$.

▷ Sens de variations de f sur $] - \infty, 0]$.

De la même façon, soient a et b deux réels appartenant à $] - \infty, 0]$ tels que $a < b$.

La fonction carré est décroissante sur $] - \infty, 0]$, donc

$$a^2 \geq b^2.$$

En multipliant par -2 , nous en déduisons

$$-2a^2 \leq -2b^2,$$

ce qui donne

$$\sqrt{2} - 2a^2 \leq \sqrt{2} - 2b^2, \text{ soit } f(a) \leq f(b).$$

Nous en concluons que la fonction f est croissante sur $] - \infty, 0]$.

Pour résumer, nous formons le tableau de variations de la fonction f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de f	\nearrow 0 \searrow		

Remarque. Pour de nombreuses fonctions, nous pouvons utiliser la proposition précédente pour déterminer leur sens de variations.

Cependant les règles de comparaison ne sont pas toujours facilement utilisables. Dans ce cas et à notre niveau, nous comparons les réels $f(a)$ et $f(b)$ en calculant $f(a) - f(b)$ (ou $f(b) - f(a)$) avec a et b appartenant à un intervalle I tels que $a < b$.

L'exercice corrigé 9 de ce chapitre en fournit un exemple.

5.4.4 Extremum d'une fonction

Définition. Soient f une fonction définie sur un intervalle I , m et M deux réels. La fonction f admet sur I

- le réel m pour minimum si et seulement si,

$$\forall x \in I, f(x) \geq m, \text{ et, } \exists a \in I, f(a) = m,$$

- le réel M pour maximum si et seulement si,

$$\forall x \in I, f(x) \leq M, \text{ et, } \exists a \in I, f(a) = M.$$

Remarques. Nous en faisons sept.

- Un minimum ou un maximum est aussi appelé un extremum de la fonction.

- La condition, $\exists a \in I, f(a) = m$, (respectivement, $\exists a \in I, f(a) = M$) signifie que f atteint un extremum en $a \in I$.

- La condition, $\forall x \in I, f(x) \geq m$, signifie que m est un *minorant* de la fonction f .

La condition , $\forall x \in I, f(x) \leq M$, signifie que M est un *majorant* de la fonction f .

- Si f admet un minimum sur I alors, f est minorée sur cet intervalle.

De même si f admet un maximum sur I alors, f est majorée sur cet intervalle.

- La réciproque est fautive comme le montre le contre-exemple qui suit.

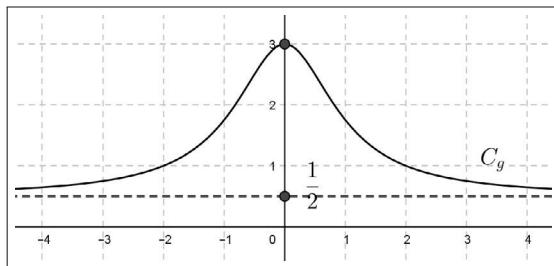
Sur $]0, +\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est minorée par 0 mais

$$\forall x \in]0, +\infty[, \frac{1}{x} \neq 0.$$

- Si f est minorée et majorée sur I , on dit que f est *bornée* sur cet intervalle.

- Sur \mathbb{R} , les fonctions de référence, carré, racine carrée, inverse, affine et cube ne sont pas bornées.

Exemple. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{x^2 + 6}{2(x^2 + 1)}$, dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



▷ Graphiquement, nous observons que $g(0) = 3$ est un maximum pour la fonction g .

▷ Montrons-le en calculant, pour tout réel x , le réel $g(0) - g(x)$.

Il vient

$$g(0) - g(x) = 3 - \frac{x^2 + 6}{2(x^2 + 1)} = \frac{5x^2}{2(x^2 + 1)} \geq 0.$$

Nous en déduisons que pour tout réel x ,

$$g(x) \leq 3.$$

Nous avons ainsi prouvé que 3 est un maximum pour la fonction g qui est atteint en $x = 0$.

▷ Graphiquement, nous pouvons conjecturer que $\frac{1}{2}$ est un minorant pour la fonction g .

Nous le prouvons en calculant, pour tout réel x , $g(x) - \frac{1}{2}$.

Nous obtenons

$$g(x) - \frac{1}{2} = \frac{x^2 + 6}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2(x^2 + 1)} > 0.$$

Il en résulte que, pour tout réel x ,

$$g(x) > \frac{1}{2},$$

ce qui prouve que $\frac{1}{2}$ est un minorant pour g .

Ce dernier calcul montre aussi que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \neq \frac{1}{2}.$$

Par conséquent le réel $\frac{1}{2}$ n'est pas un minimum pour la fonction g .
 Nous en concluons que, pour tout réel x ,

$$\frac{1}{2} < g(x) \leq 3,$$

ce qui permet d'affirmer que la fonction g est bornée sur \mathbb{R} .

5.5 Algorithme de résolution approchée d'une équation

Nous développons ici le principe qui régit l'algorithme de dichotomie qui permet d'encadrer une solution α d'une équation de la forme $f(x) = 0$, lorsqu'une résolution algébrique n'est pas applicable.

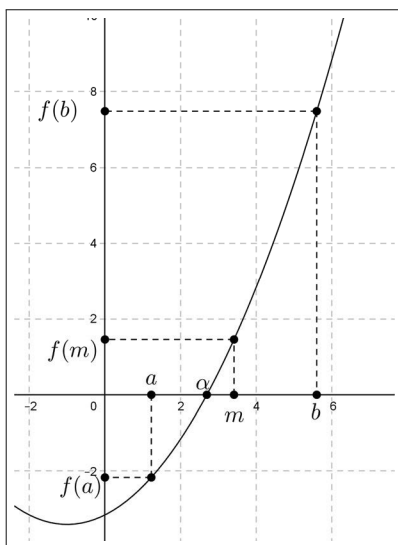
Nous supposons que la fonction f est monotone sur un intervalle $[a, b]$ telle que $\alpha \in [a, b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, ce qui signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

Pour fixer les idées nous supposons que f est croissante sur $[a, b]$.

On considère le centre $m = \frac{a+b}{2}$ de l'intervalle $[a, b]$.

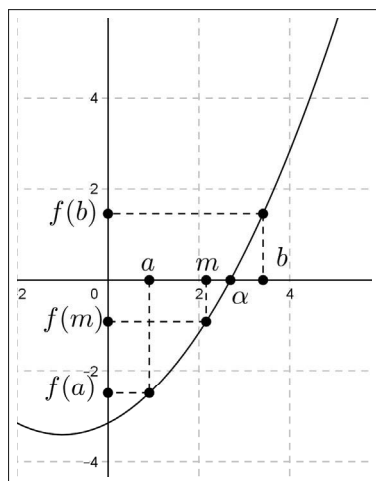
En calculant $f(m)$, nous obtenons deux cas qui sont résumés ci-après.

1^{er} cas : $f(a) \times f(m) < 0$.



Dans ce cas, $\alpha \in [a, m]$. On réitère ce processus dans $[a, m]$ en affectant à b la valeur m .

2^e cas : $f(a) \times f(m) > 0$.



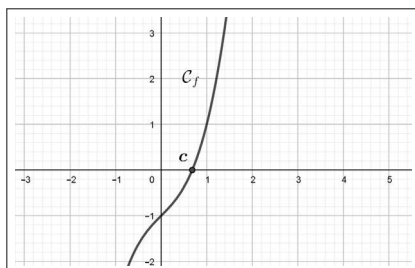
Dans ce cas, $\alpha \in [m, b]$. On réitère ce processus dans $[m, b]$ en affectant à a la valeur m .

La fonction f , les réels a et b ainsi que l'entier p étant choisis en entrée, l'algorithme qui suit restitue une valeur approchée de la solution α à 10^{-p} près.

```

Tant que  $b - a > 10^{-p}$ 
     $m \leftarrow \frac{a + b}{2}$ 
    Si  $f(a) * f(m) < 0$ 
        Alors
             $b \leftarrow m$ 
        Sinon
             $a \leftarrow m$ 
    Fin Si
Fin Tant que
Afficher  $b$ 
    
```

Exemple. Nous considérons la représentation graphique de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto x^3 + x - 1$.



Graphiquement, nous observons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $c \in [0, 1]$.

Un script de l'implémentation en Python avec cette fonction est

```
def f(x) :
    return x**3+x-1
a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
p=int(input("p="))
while b-a>10**(-p):
    m=(a+b)/2
    if f(a)*f(m)<0:
        b=m
    else:
        a=m
print(b)
```

Pour $a = 0$, $b = 1$ et $p = 1, 2, 3, 4$ nous obtenons les affichages

```
>>>
```

```
0.6875,
```

```
>>>
```

```
0.6875,
```

```
>>>
```

```
0.6826171875,
```

```
>>>
```

```
0.682373046875, ce qui donne  $c \approx 0,682$  au millième près.
```

Remarque. Nous supposons de plus que f est une fonction *continue* sur l'intervalle $[a, b]$. Cette notion dépasse le cadre de cet ouvrage et sera étudiée en classe de Terminale. Cependant la continuité de f peut se comprendre en imaginant que C_f est tracée sans "lever le crayon".

Pour envisager des exemples de fonctions non continues sur un intervalle, vous pouvez étudier ci-après les exercices corrigés 11 et 12.

5.6 Exercices corrigés

Exercice 1. Ensembles de définition

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x - x^2, \quad g : x \mapsto \frac{1}{f(x)}, \quad h : x \mapsto \sqrt{f(x)}, \quad k : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{f(x)}}.$$

Solution

▷ La fonction f est définie sur \mathbb{R} en tant que trinôme du second degré.

▷ La fonction g est définie si et seulement si $f(x) \neq 0$.

Or nous avons

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Nous en concluons que $D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

▷ La fonction h est définie si et seulement si $f(x) \geq 0$.

Pour déterminer D_h , nous formons le tableau de signes du réel $f(x)$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
signe de x		-	+	+
signe de $1 - x$	+	+	0	-
signe de $f(x)$		-	0	+

Il en résulte que $D_h = [0, 1]$.

▷ La fonction k est définie si et seulement si $f(x) > 0$.

Du tableau de signes ci-dessus, nous déduisons que $D_k =]0, 1[$.

Exercice 2. Produit nul de deux fonctions non nulles

1. Représenter graphiquement la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

2. Existe-t-il deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} , distinctes de la fonction $x \mapsto 0$, (fonction nulle) telles que

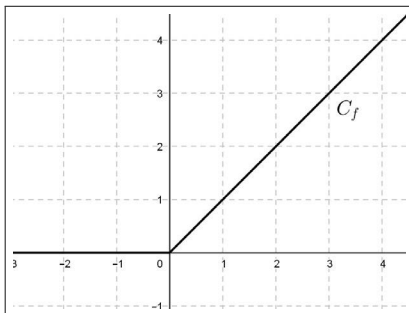
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \times g(x) = 0 ?$$

Solution

1. La courbe C_f représentative de la fonction f a pour équation

$$y = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Nous en déduisons la courbe suivante :



2. Nous prenons la fonction f définie à la question 1 et nous considérons la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pour tout réel x , nous avons $f(x) \times g(x) = 0$, bien que f et g soient distinctes de la fonction nulle.

Remarque

Dans l'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{R} muni de l'opération de multiplication de deux fonctions, nous pouvons obtenir un produit nul de deux éléments non nuls. Cela n'est pas envisageable avec la multiplication dans \mathbb{R} .

Exercice 3. Parité

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} .

1. Quelle est la parité de la fonction $g : x \mapsto f(x^2)$?
2. Si, de plus, f est une fonction impaire, quelle est la parité de la fonction $h : x \mapsto (f(x))^2$? et celle de la fonction $k : x \mapsto f(f(x))$?
3. Quelle est la parité des fonctions

$$p : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad ?$$

4. En déduire que toute fonction définie sur \mathbb{R} est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Solution

1. Pour tout réel x , nous avons

$$g(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = g(x).$$

Ainsi, la fonction g est paire.

2. Nous supposons que f est impaire.

▷ Parité de h .

il vient

$$h(-x) = (f(-x))^2 = (-f(x))^2 = (f(x))^2 = h(x).$$

Nous en concluons que la fonction h est paire.

▷ Parité de k .

Nous avons

$$k(-x) = f(f(-x)) = f(-f(x)) = -f(f(x)) = -k(x),$$

ce qui justifie que la fonction k est impaire.

3. Soit x un réel quelconque.

▷ Il vient

$$p(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = p(x).$$

La fonction p est paire.

▷ De même, nous avons

$$i(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -i(x).$$

La fonction i est impaire.

4. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} .

Pour tout réel x , nous observons que

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = p(x) + i(x).$$

Nous concluons par l'égalité fonctionnelle

$$f = p + i, \text{ avec } p \text{ paire et } i \text{ impaire.}$$

Exercice 4. Résolution d'équations et composition de fonctions

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$.

1. Déterminer les antécédents du réel -1 par la fonction $x \mapsto f(f(x))$.

Contrôler graphiquement.

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(f(x)) = x$.

Contrôler graphiquement.

Solution

1. Pour déterminer les antécédents de -1 par la fonction $x \mapsto f(f(x))$, nous résolvons l'équation

$$f(f(x)) = -1,$$

ce qui donne les équivalences suivantes :

$$f(f(x)) = -1 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - 1 = -1,$$

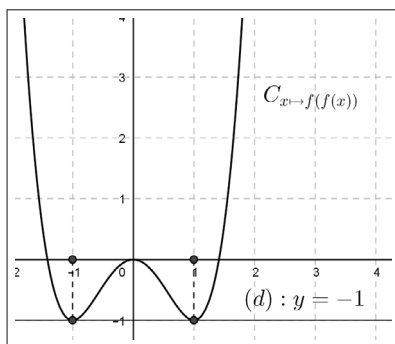
$$f(f(x)) = -1 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = 0,$$

$$f(f(x)) = -1 \Leftrightarrow x^2 = 1,$$

$$f(f(x)) = -1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1.$$

Nous en concluons que les antécédents de -1 par la fonction $x \mapsto f(f(x))$ sont les réels -1 ou 1 .

Avec GeoGebra, nous contrôlons graphiquement en observant les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(f(x))$ avec la droite (d) d'équation $y = -1$.



2. Pour résoudre l'équation $f(f(x)) = x$, nous avons les équivalences suivantes :

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - 1 = x,$$

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - (1 + x) = 0,$$

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 1)^2 - (x + 1) = 0,$$

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow (x + 1)[(x - 1)^2(x + 1) - 1] = 0,$$

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow (x + 1)[(x - 1)(x^2 - 1) - 1] = 0,$$

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow (x + 1)x(x^2 - x - 1) = 0.$$

Nous en déduisons que $x = -1$ ou $x = 0$ sont deux solutions de cette équation.

Il reste à résoudre l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, notée (e). Nous avons

$$(e) \Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0,$$

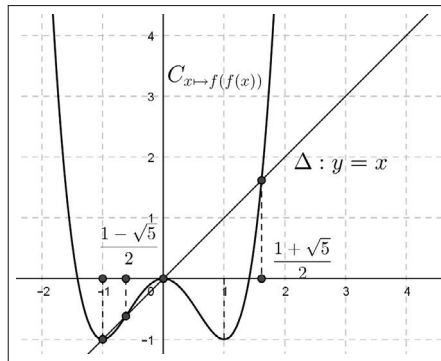
$$(e) \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4},$$

$$(e) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Finalement, S désignant l'ensemble des solutions de l'équation $f(f(x)) = x$, nous obtenons

$$S = \left\{-1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Avec GeoGebra, nous contrôlons graphiquement en observant les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(f(x))$ avec la droite (Δ) d'équation $y = x$.



Exercice 5. Sens de variations : parité et composition

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} .

1. Montrer que si f est paire et croissante sur \mathbb{R}^+ , alors f est décroissante sur \mathbb{R}^- .

2. Étudier le cas où f impaire et décroissante sur \mathbb{R}^+ .

3. On considère la fonction $g : x \mapsto f(f(x))$.

a. On suppose que f est croissante sur \mathbb{R} . Quel est le sens de variations de la fonction g ?

b. Même question si f est décroissante sur \mathbb{R} ?

Solution

1. Soient a et b dans \mathbb{R}^- tels que $a < b$.

Nous avons $-a \in \mathbb{R}^+$ et $-b \in \mathbb{R}^+$ tels que $-a > -b$.

Puisque la fonction f est croissante sur \mathbb{R}^+ , nous en déduisons

$$f(-a) \geq f(-b).$$

Puisque la fonction f est paire, nous en déduisons

$$f(a) \geq f(b),$$

ce qui justifie que f est décroissante sur \mathbb{R}^- .

2. Soient a et b dans \mathbb{R}^- tels que $a < b$.

Nous avons $-a \in \mathbb{R}^+$ et $-b \in \mathbb{R}^+$ tels que $-a > -b$.

Puisque la fonction f est décroissante sur \mathbb{R}^+ , nous en déduisons

$$f(-a) \leq f(-b).$$

Puisque la fonction f est impaire, nous en déduisons

$$-f(a) \leq -f(b), \text{ soit } f(a) \geq f(b).$$

Ainsi la fonction f est décroissante sur \mathbb{R}^- .

3. a. On suppose que f est croissante sur \mathbb{R} .

Par conséquent, pour tous les réels a et b tels que $a < b$, on a

$$f(a) \leq f(b).$$

En appliquant à nouveau la croissance de f sur \mathbb{R} , nous obtenons

$$f(f(a)) \leq f(f(b)), \text{ soit } g(a) \leq g(b).$$

Nous en concluons que la fonction $g : x \mapsto f(f(x))$ est croissante sur \mathbb{R} .

b. On suppose que f est décroissante sur \mathbb{R} .

Par conséquent, pour tous les réels a et b tels que $a < b$, on a

$$f(a) \geq f(b).$$

En appliquant à nouveau la décroissance de f sur \mathbb{R} , nous obtenons

$$f(f(a)) \leq f(f(b)), \text{ soit } g(a) \leq g(b).$$

Nous en concluons que la fonction $g : x \mapsto f(f(x))$ est croissante sur \mathbb{R} .

Exercice 6. Égalité de deux fonctions

Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ et $g : x \mapsto (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ sont égales sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

Solution

Pour tout réel $x \neq 1$, nous avons

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1},$$

$$f(x) = x^2 + x + 1,$$

$$f(x) = x^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times x + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + 1,$$

$$f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4},$$

$$f(x) = g(x),$$

ce qui justifie

$$f = g \text{ sur } \mathbb{R} - \{1\}.$$

Exercice 7. Parité en 2021

Soient a et b deux réels non nuls.

On désigne par f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^{2021} + bx^7 + 10$.

Sachant que $f(-2021) = 20$, calculer $f(2021)$.

Solution

Pour tout réel x , posons

$$g(x) = f(x) - 10 = ax^{2021} + bx^7.$$

Nous avons

$$g(-x) = a(-x)^{2021} + b(-x)^7 = -(ax^{2021} + bx^7) = -g(x).$$

La fonction g est donc impaire. Il en résulte que

$$g(-2021) = -g(2021), \text{ soit } f(-2021) - 10 = -(f(2021) - 10).$$

Puisque $f(-2021) = 20$, nous en concluons

$$f(2021) = 20 - f(-2021) = 20 - 20 = 0.$$

Exercice 8. Étude d'une fonction - Une bijection

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$.

1. Représenter graphiquement la fonction f . Conjecturer la parité, le sens de variations et l'existence d'un extremum pour f . Prouver vos observations.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f avec la droite (T) dont une équation est $y = -2x + 4$.

Quelle est la position de (T) relativement C_f pour $x \geq 0$?

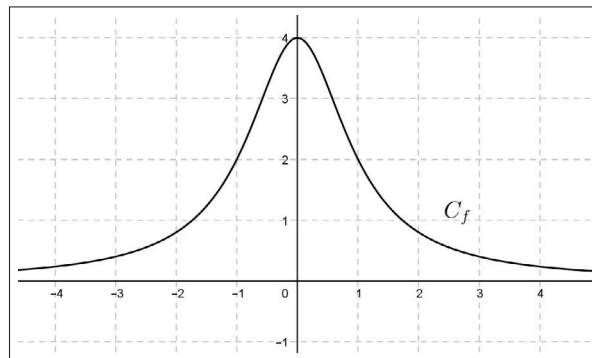
Contrôler graphiquement.

3. Soit m un réel donné. Selon les valeurs du réel m , donner graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

4. Démontrer que f est une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur l'intervalle $]0; 4]$.

Solution

1.



Nous conjecturons que f est paire, croissante sur \mathbb{R}^- , décroissante sur \mathbb{R}^+ et que le réel $4 = f(0)$ est un maximum.

Justifications des conjectures.

▷ La fonction f est paire car, pour tout réel x , on a

$$f(-x) = \frac{4}{(-x)^2 + 1} = \frac{4}{x^2 + 1} = f(x).$$

▷ La fonction f est croissante sur \mathbb{R}^- .

En effet, pour tous réels les a et b tels que $a < b \leq 0$, nous avons puisque la fonction carré est décroissante sur \mathbb{R}^-

$$a^2 > b^2.$$

Il en résulte :

$$a^2 + 1 > b^2 + 1 > 0.$$

Puisque la fonction inverse est décroissante sur \mathbb{R}^{+*} , il vient

$$\frac{1}{a^2 + 1} < \frac{1}{b^2 + 1},$$

ce qui implique

$$\frac{4}{a^2 + 1} < \frac{4}{b^2 + 1}, \text{ soit } f(a) < f(b).$$

▷ La fonction f est décroissante sur \mathbb{R}^+ car f est paire.

▷ Le réel $4 = f(0)$ est un maximum. En effet, pour tout réel x , nous avons

$$f(0) - f(x) = 4 - \frac{4}{x^2 + 1} = \frac{4x^2}{x^2 + 1} \geq 0.$$

Il en résulte que, pour tout réel x , $f(x) \leq 4$.

Ceci justifie que 4 est un maximum pour la fonction f qui est atteint en $x = 0$.

2. ▷ Nous résolvons le système

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = -2x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x^2 + 1} = -2x + 4 \\ y = -2x + 4 \end{cases}.$$

Nous résolvons ensuite l'équation aux "abscisses", notée (a) . Nous obtenons

$$(a) \Leftrightarrow 4 = (x^2 + 1)(-2x + 4),$$

$$(a) \Leftrightarrow -2x(x - 1)^2 = 0,$$

$$(a) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Les coordonnées des points communs à la droite (T) et à la courbe C_f ont pour coordonnées $(0, 4)$ et $(1, 2)$.

▷ Pour positionner la droite (T) par rapport à la courbe C_f , nous calculons, pour $x \geq 0$, la différence $\delta(x) = f(x) - (-2x + 4)$. Il vient

$$\delta(x) = \frac{4}{x^2 + 1} + 2x - 4 = \frac{2x(x - 1)^2}{x^2 + 1} \geq 0.$$

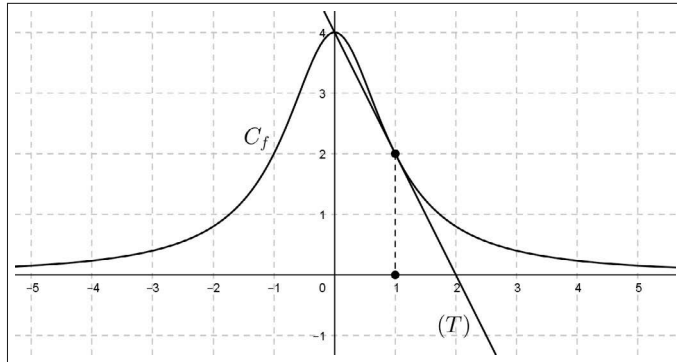
Il en résulte que pour tout réel $x \geq 0$, nous avons

$$f(x) \geq -2x + 4,$$

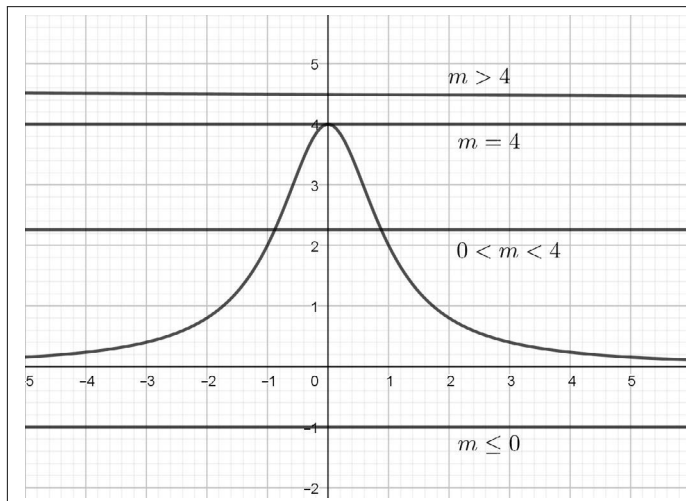
ce qui prouve que la courbe C_f est au-dessus de la droite (T) pour $x \geq 0$.

De plus $\delta(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$. On dit que la droite (T) est tangente à la courbe C_f au point de coordonnées $(1, 2)$.

▷ Contrôle graphique avec GeoGebra.



3. Nous dénombrons le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ en comptant le nombre de points d'intersection de la courbe C_f avec la droite d_m d'équation $y = m$.



Nous en concluons que :

- si $m > 4$ ou $m \leq 0$, alors l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution,
- si $m = 4$, alors l'équation $f(x) = m$ a une unique solution qui est $x = 0$,
- si $0 < m < 4$, alors l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions distinctes qui sont symétriques par rapport à la droite des ordonnées.

4. Soit $m \in]0; 4]$.

Nous résolvons, dans \mathbb{R}^+ , l'équation $f(x) = m$. Nous avons

$$\frac{4}{x^2 + 1} = m \Leftrightarrow x^2 + 1 = \frac{4}{m} \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{m} - 1.$$

Puisque $0 < m \leq 4$, nous obtenons :

$$\frac{1}{m} \geq \frac{1}{4}, \text{ soit } \frac{4}{m} - 1 \geq 0.$$

Nous pouvons en conclure que l'équation $x^2 = \frac{4}{m} - 1$ admet une solution unique dans \mathbb{R}^+ qui est $x = \sqrt{\frac{4}{m} - 1}$.

Ceci démontre que f est une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur l'intervalle $]0; 4]$.

Exercice 9. Étude d'une fonction - Dichotomie ALGO

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$.

1. Quelle est la parité de f ?
2. Quels sont les antécédents par f du réel $\frac{3}{2}$? du réel $-\frac{3}{2}$? du réel $\frac{9}{4}$?
3. Prouver que, pour tout réel x ,

$$-2 \leq f(x) \leq 2.$$

4. Soient a et b deux réels distincts. Montrer que

$$f(a) - f(b) = \frac{4(b-a)(ab-1)}{(a^2+1)(b^2+1)}.$$

En déduire le sens de variations de cette fonction sur l'intervalle $[0, 1]$, sur $[1, +\infty[$.

Donner le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

5. Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = x - 2$ admet une unique solution $c \in [3, 4]$.

En utilisant l'algorithme de dichotomie, déterminer une valeur approchée du réel c .

Solution

1. Parité de la fonction f .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous observons que $-x \in \mathbb{R}$.

De plus, nous avons

$$f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2 + 1} = -f(x),$$

ce qui justifie que f est une fonction impaire.

2. \triangleright Antécédents par f du réel $\frac{3}{2}$. Nous résolvons l'équation

$$f(x) = \frac{3}{2},$$

ce qui induit successivement

$$f(x) = \frac{3}{2} \iff \frac{4x}{x^2 + 1} = \frac{3}{2},$$

$$f(x) = \frac{3}{2} \iff 8x = 3x^2 + 3,$$

$$f(x) = \frac{3}{2} \iff 3x^2 - 8x + 3 = 0,$$

$$f(x) = \frac{3}{2} \iff x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = 0,$$

$$f(x) = \frac{3}{2} \iff x^2 - 2 \times \frac{4}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1 = 0,$$

$$f(x) = \frac{3}{2} \iff \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{7}{9},$$

$$f(x) = \frac{3}{2} \iff x = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3} \text{ ou } x = \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Nous en concluons que $\frac{3}{2}$ admet, par la fonction f , deux antécédents qui sont les réels $\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}$ ou $\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}$.

▷ Antécédents par f du réel $-\frac{3}{2}$.

Pour résoudre l'équation $f(x) = -\frac{3}{2}$, nous pouvons utiliser la méthode ci-dessus. Mais nous pouvons aussi exploiter la parité de la fonction f . En effet nous avons

$$f(x) = -\frac{3}{2} \iff -f(x) = f(-x) = \frac{3}{2},$$

ce qui équivaut à

$$-x = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3} \text{ ou } -x = \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3},$$

soit

$$x = -\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} \text{ ou } x = -\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Nous pouvons en conclure que $-\frac{3}{2}$ admet, par la fonction f , deux antécédents qui sont les réels $-\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}$ ou $-\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}$.

▷ Antécédents par f du réel $\frac{9}{4}$.

Pour résoudre l'équation $f(x) = \frac{9}{4}$, il vient

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{9}{4} &\iff 9x^2 - 16x + 9 = 0, \\f(x) = \frac{9}{4} &\iff x^2 - \frac{16}{9}x + 1 = 0, \\f(x) = \frac{9}{4} &\iff x^2 - 2 \times \frac{8}{9}x + \left(\frac{8}{9}\right)^2 - \left(\frac{8}{9}\right)^2 + 1 = 0, \\f(x) = \frac{9}{4} &\iff \left(x - \frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{81} - 1 = -\frac{17}{81} < 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, cette équation n'a pas de solution, ce qui justifie que $\frac{9}{4}$ n'a pas d'antécédent par f .

3. Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-2 \leq f(x) \leq 2$.

Pour cela nous calculons, pour tout réel x , $f(x) + 2$ et $2 - f(x)$.

Nous obtenons d'une part

$$f(x) + 2 = \frac{4x}{x^2 + 1} + 2 = \frac{4x + 2x^2 + 2}{x^2 + 1} = \frac{2(x + 1)^2}{x^2 + 1} \geq 0.$$

Il en résulte que $-2 \leq f(x)$.

D'autre part, de la même façon, nous avons

$$2 - f(x) = 2 - \frac{4x}{x^2 + 1} = \frac{2(x - 1)^2}{x^2 + 1} \geq 0,$$

ce qui prouve que $f(x) \leq 2$.

Nous en concluons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, -2 \leq f(x) \leq 2.$$

4. \triangleright Soient a et b deux réels, nous avons

$$f(a) - f(b) = \frac{4a}{a^2 + 1} - \frac{4b}{b^2 + 1} = 4 \frac{a(b^2 + 1) - b(a^2 + 1)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)},$$

ce qui donne

$$f(a) - f(b) = 4 \frac{ab(b - a) - (b - a)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} = \frac{4(b - a)(ab - 1)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}.$$

\triangleright Variations sur l'intervalle $[0, 1]$.

Soient $a \in [0, 1]$ et $b \in [0, 1]$, tels que $a < b$. Nous avons

$$b - a > 0, (a^2 + 1)(b^2 + 1) > 0 \text{ et } ab - 1 \leq 0.$$

Il en résulte

$$f(a) - f(b) \leq 0, \text{ soit } f(a) \leq f(b),$$

ce qui prouve que la fonction f est croissante sur $[0, 1]$.

▷ Variations sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

Soient $a \in [1, +\infty[$ et $b \in [1, +\infty[$ tels que $a < b$.

De la même façon, nous obtenons

$$b - a > 0, (a^2 + 1)(b^2 + 1) > 0 \text{ et } ab - 1 \geq 0.$$

Il en résulte

$$f(a) - f(b) \geq 0, \text{ soit } f(a) \geq f(b),$$

ce qui établit que la fonction f est décroissante sur $[1, +\infty[$.

▷ Puisque f est impaire, nous en déduisons, en utilisant l'exercice 5, que f est

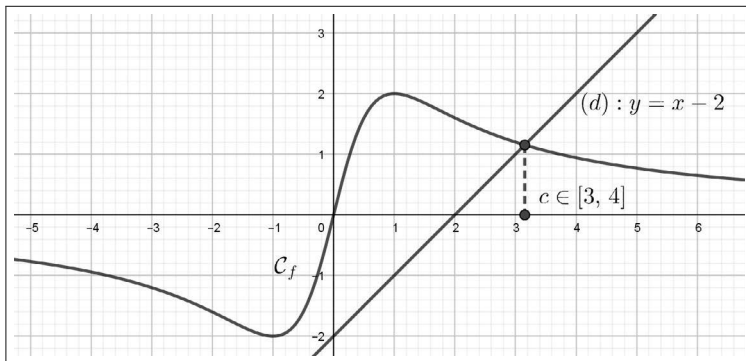
★ croissante sur $[-1, 0]$,

★ décroissante sur $] -\infty, -1]$.

Le tableau de variations sur \mathbb{R} de f en résulte.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
variations de f		\searrow	-2	\nearrow	0	\nearrow	2	\searrow

5.▷ Graphiquement, avec GeoGebra, nous représentons la courbe \mathcal{C}_f et la droite (d) d'équation $y = x - 2$.



Nous observons que la courbe \mathcal{C}_f et la droite (d) se coupent en un seul point dont l'abscisse $c \in [3, 4]$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x - 2$.

▷ Pour utiliser l'algorithme de dichotomie, nous transformons l'équation proposée comme suit.

$$\begin{aligned}
 f(x) = x - 2 &\Leftrightarrow \frac{4x}{x^2 + 1} = x - 2, \\
 &\Leftrightarrow 4x = (x^2 + 1)(x - 2), \\
 &\Leftrightarrow 4x = x^3 - 2x^2 + x - 2, \\
 &\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 3x - 2 = 0
 \end{aligned}$$

Ainsi dans le script en Python, nous considérons la fonction

$$f : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 3x - 2.$$

Nous proposons une variante du script donné au paragraphe 5.5 en définissant la fonction Python

def dichotomie(f,a,b,p).

```

def f(x) :
    return x**3-2*x**2-3*x-2
def dichotomie(f, a, b, p):
    while b-a>10**(-p):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return(b)

```

Nous obtenons, avec $p = 3$

```
>>> dichotomie(f,3,4,3)
3.1533203125.
```

Nous en concluons que $c \approx 3.153$ à 10^{-3} près.

Nous pouvons contrôler que ce résultat est cohérent avec l'observation graphique du réel c .

Exercice 10. Min-Max

Soient a et b deux réels. On pose

$$\text{Max}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ b & \text{si } a \leq b \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{Min}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } a \geq b \end{cases}.$$

Représenter graphiquement avec GeoGebra :

- les fonctions u , v et s définies sur \mathbb{R} par

$$u : x \mapsto \text{Max}(2x + 1, 0), \quad v : x \mapsto \text{Min}(2x + 1, 0) \quad \text{et} \quad s : x \mapsto u(x) + v(x).$$

- les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f : x \mapsto \text{Max}(x, 2x) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \text{Min}(x, x^2).$$

- la fonction h définie sur \mathbb{R}^* par

$$h : x \mapsto \text{Max}\left(x, \frac{1}{x}\right).$$

Solution

▷ Représentation graphique de la fonction u .

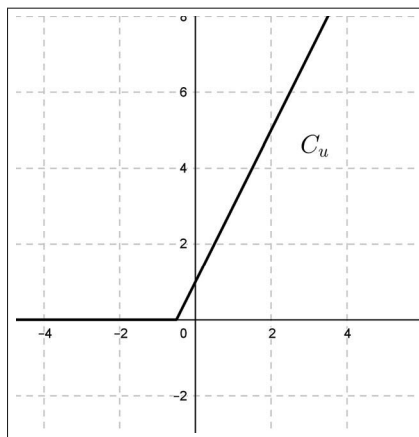
Pour tout réel x , nous avons

$$u(x) = \text{Max}(2x + 1, 0) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } 2x + 1 \geq 0 \\ 0 & \text{si } 2x + 1 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \geq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Il en résulte que la courbe C_u a pour équation

$$y = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \geq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

La représentation graphique de la fonction u est donc



▷ Représentation graphique de la fonction v .

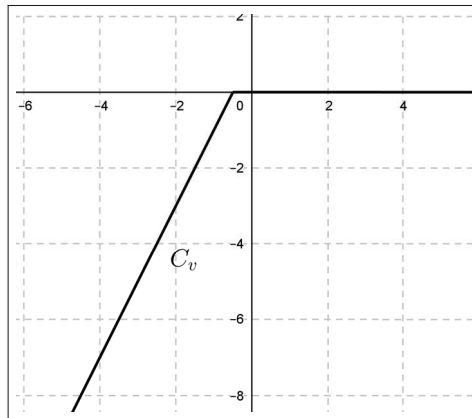
Pour tout réel x , nous avons

$$v(x) = \text{Min}(2x + 1, 0) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } 2x + 1 \leq 0 \\ 0 & \text{si } 2x + 1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Il en résulte que la courbe C_v a pour équation

$$y = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

La représentation graphique de la fonction v est



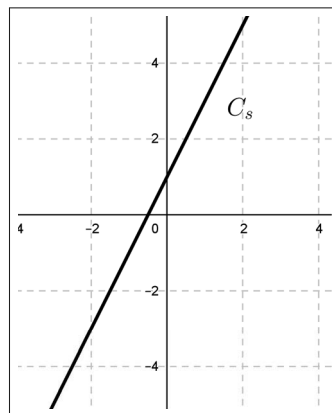
▷ Représentation graphique de la fonction s .

Pour tout réel x , nous avons

$$s(x) = u(x) + v(x) = \begin{cases} 0 + 2x + 1 & \text{si } 2x + 1 \leq 0 \\ 2x + 1 + 0 & \text{si } 2x + 1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Il en résulte que la courbe C_s a pour équation $y = 2x + 1$.

La représentation graphique de la fonction s est



▷ Représentation graphique de la fonction f .

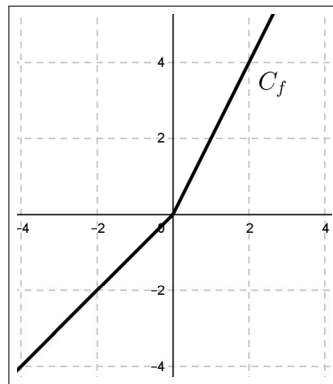
Pour tout réel x , nous avons

$$f(x) = \text{Max}(x, 2x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 2x \\ 2x & \text{si } x \leq 2x \end{cases} = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

Il en résulte que la courbe C_f a pour équation

$$y = \text{Max}(x, 2x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

La représentation graphique de la fonction f est



▷ Représentation graphique de la fonction g .

Pour tout réel x , nous avons

$$g(x) = \text{Min}(x, x^2) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq x^2 \\ x^2 & \text{si } x^2 \leq x \end{cases} = \begin{cases} x & \text{si } x^2 - x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x^2 - x \leq 0 \end{cases} .$$

Nous étudions le signe de $x^2 - x$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
signe de x	-	0	+	+	
signe de $x - 1$	-	-	0	+	
signe de $x^2 - x$	+	0	-	0	+

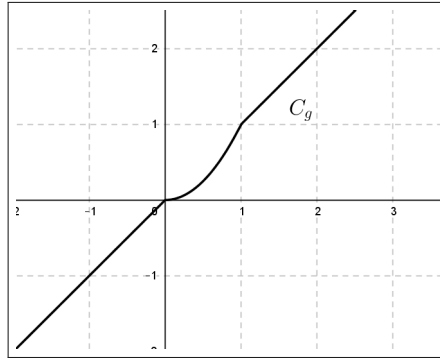
Il en résulte que

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Une équation de la courbe C_g est :

$$y = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

La représentation graphique de la fonction g est donc



▷ Représentation graphique de la fonction h .

Pour tout réel $x \neq 0$, nous avons

$$h(x) = \text{Max}\left(x, \frac{1}{x}\right) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \leq \frac{1}{x} \end{cases} = \begin{cases} x & \text{si } \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } \frac{x^2 - 1}{x} \leq 0 \end{cases}.$$

Étude du signe de $\frac{x^2 - 1}{x}$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$x - 1$		-	-	-	+			
$x + 1$		-	0	+	+			
x		-	-	0	+			
signe de $\frac{x^2 - 1}{x}$		-	0	+		-	0	+

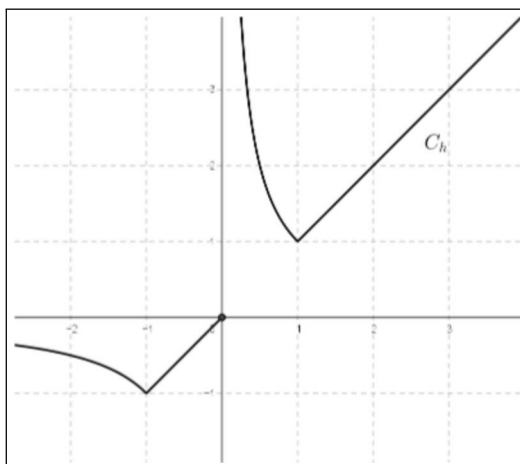
Nous en déduisons que

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-1, 0[\cup [1, +\infty[\\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup]0, 1] \end{cases}.$$

Ainsi une équation de la courbe C_h est

$$y = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-1, 0[\cup [1, +\infty[\\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup]0, 1] \end{cases}.$$

La représentation graphique de la fonction h est donc



Exercice 11. Fonction partie entière

Nous donnons la définition.

Soit x un réel. La *partie entière* de ce réel, notée $\lfloor x \rfloor$ est définie par

- $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$.
- $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

La fonction partie entière est définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Nous retiendrons que pour tout réel x , nous disposons de l'équivalence

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z} \text{ et } n \leq x < n + 1.$$

Ainsi la partie entière d'un réel x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .

1. Donner $\lfloor 2,8 \rfloor$, $\lfloor \pi \rfloor$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor$, $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor$, $\lfloor 4 \rfloor$.

2. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$(1) \lfloor x \rfloor = 3, (2) \lfloor x \rfloor = -2, (3) \lfloor x \rfloor = 0,$$

$$(4) \lfloor 2x \rfloor = 3, (5) \lfloor \frac{x}{5} \rfloor = -1, (6) \lfloor 3x - 2 \rfloor = 4.$$

3. Déterminer $\lfloor x \rfloor$, pour $x \in [-3; 4]$.

En déduire avec GeoGebra la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sur l'intervalle $[-3; 4]$.

4. Montrer que, pour tout réel x et tout entier relatif p ,

$$\lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p.$$

Solution

1. En appliquant la définition de la partie entière, nous obtenons

$$\lfloor 2,8 \rfloor = 2, \lfloor \pi \rfloor = 3, \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1, \lfloor -\sqrt{2} \rfloor = -2, \lfloor 4 \rfloor = 4.$$

2. Pour résoudre les équations proposées, nous appliquons à nouveau la définition de la partie entière. Il vient

$$(1) \Leftrightarrow x \in [3; 4[.$$

$$(2) \Leftrightarrow x \in [-2; -1[.$$

$$(3) \Leftrightarrow x \in [0; 1[.$$

$$(4) \Leftrightarrow 2x \in [3; 4[\Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right[.$$

$$(5) \Leftrightarrow \frac{x}{5} \in [-1; 0[\Leftrightarrow x \in [-5; 0[.$$

$$(6) \Leftrightarrow 3x - 2 \in [4; 5[\Leftrightarrow x \in \left[2; \frac{7}{3}\right[.$$

3. Soit $x \in [-3; 4]$. Nous avons

si $x \in [-3; -2[$, alors $\lfloor x \rfloor = -3$,

si $x \in [-2; -1[$, alors $\lfloor x \rfloor = -2$,

si $x \in [-1; 0[$, alors $\lfloor x \rfloor = -1$,

si $x \in [0; 1[$, alors $\lfloor x \rfloor = 0$,

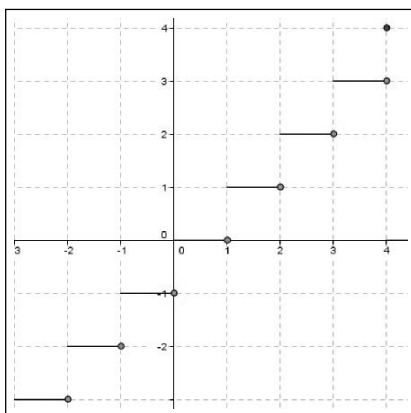
si $x \in [1; 2[$, alors $\lfloor x \rfloor = 1$,

si $x \in [2; 3[$, alors $\lfloor x \rfloor = 2$,

si $x \in [3; 4[$, alors $\lfloor x \rfloor = 3$,

si $x = 4$, alors $\lfloor x \rfloor = 4$.

Nous en déduisons ci-après la représentation graphique "en escalier" de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sur $[-3; 4]$, et par extension sur tout \mathbb{R} .



4. Soient x un réel et p un entier relatif.

Par définition, nous avons $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, ce qui implique

$$\lfloor x \rfloor + p \leq x + p < \lfloor x \rfloor + p + 1.$$

Les entiers $\lfloor x \rfloor + p$ et $\lfloor x \rfloor + p + 1$ sont consécutifs. Nous en concluons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p.$$

Exercice 12. Fonction partie décimale

Soit d la fonction définie sur \mathbb{R} par $d(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

1. Calculer les images par d des réels $5,2$; $1,5$; 8 ; $-6,3$.
2. Montrer que, pour tout réel x , $0 \leq d(x) < 1$.
3. Montrer que la fonction d est périodique, de période 1, ce qui signifie que, pour tout réel x , $d(x+1) = d(x)$.
4. Représenter graphiquement la fonction d sur l'intervalle $[0; 1[$.
En déduire la représentation graphique de d sur \mathbb{R} .
5. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor} d(x)$.
Montrer que f est périodique, de période 2.
En déduire la représentation graphique de la fonction f .

Solution

1. Nous avons

$$d(5,2) = 5,2 - \lfloor 5,2 \rfloor = 5,2 - 5 = 0,2.$$

$$d(1,5) = 1,5 - \lfloor 1,5 \rfloor = 1,5 - 1 = 0,5.$$

$$d(8) = 8 - \lfloor 8 \rfloor = 8 - 8 = 0.$$

$$d(-6,3) = -6,3 - \lfloor -6,3 \rfloor = -6,3 + 7 = 0,7.$$

2. Pour tout réel x , nous avons $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Il en résulte

$$0 \leq x - \lfloor x \rfloor < \lfloor x \rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor.$$

Nous en concluons

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq d(x) < 1.$$

3. Pour tout réel x , nous savons que :

$$\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1.$$

Il en résulte

$$d(x + 1) = (x + 1) - \lfloor x + 1 \rfloor = (x + 1) - \lfloor x \rfloor + 1 = x - \lfloor x \rfloor = d(x).$$

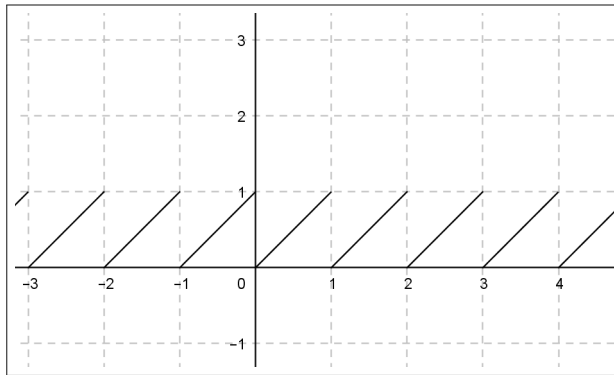
Nous avons ainsi prouvé que la fonction d est 1-périodique.

4. Pour tout $x \in [0, 1[$, nous avons $d(x) = x$.

Désignons par C_1 la partie de C_d correspondant à $x \in [0, 1[$.

C_1 est un segment de droite. La courbe C_d se déduit de C_1 en faisant agir sur ce dernier la translation de vecteur \vec{OI} pour $x \geq 0$ et la translation de vecteur $-\vec{OI}$ pour $x \leq 0$, puis en réitérant ce procédé sur chaque segment ainsi obtenu.

La représentation graphique de d sur \mathbb{R} est



5.

▷ Pour tout réel x , nous savons que $\lfloor x + 2 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 2$.

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} f(x + 2) &= (-1)^{\lfloor x+2 \rfloor} d(x + 2), \\ &= (-1)^{\lfloor x \rfloor + 2} (x + 2 - \lfloor x \rfloor - 2), \\ &= (-1)^{\lfloor x \rfloor} \times (-1)^2 (x - \lfloor x \rfloor), \\ &= (-1)^{\lfloor x \rfloor} d(x), \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Ceci prouve que la fonction f est périodique, de période 2.

▷ Pour tout $x \in [0, 1[$, on a $f(x) = x$.

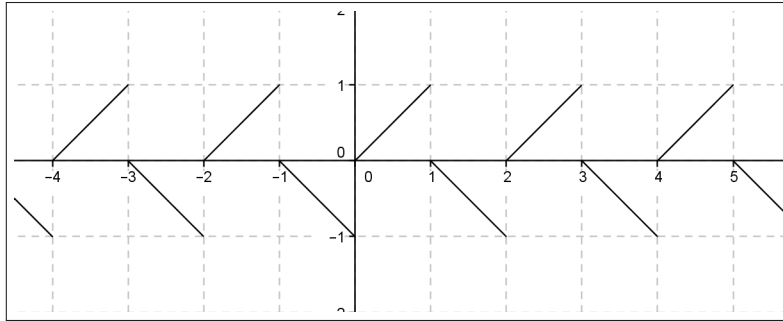
Pour tout $x \in [1, 2[$, on a $f(x) = -(x - 1)$, car dans ce cas, $\lfloor x \rfloor = 1$.

Désignons par C_1 la partie de C_f correspondant à $x \in [0; 1[\cup [1; 2[$.

C_1 est une union (disjointe) de 2 segments de droite.

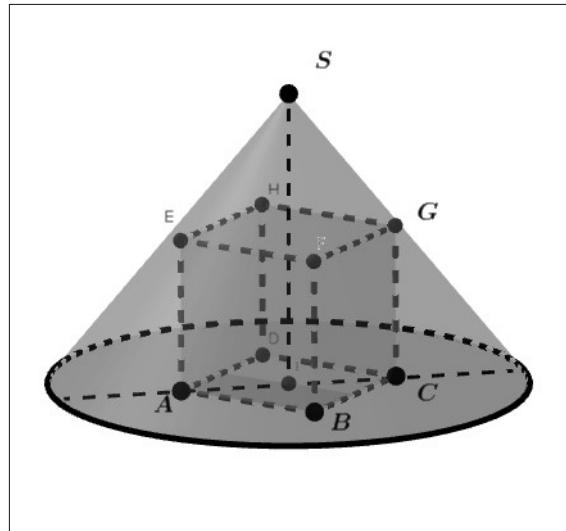
La courbe C_f se déduit de C_1 en faisant agir sur cette dernière la translation de vecteur $2\vec{OI}$ pour $x \geq 0$ et la translation de vecteur $-2\vec{OI}$ pour $x \leq 0$, puis en répétant ce procédé sur chaque segment ainsi obtenu.

La représentation graphique de f sur \mathbb{R} est donnée ci-dessous



Exercice 13. Cube inscrit dans un cône

Nous souhaitons inscrire un cube $ABCDEFGH$ d'arête $\sqrt{2}$ dans un cône de volume minimum comme illustré sur la figure qui suit.



Nous désignons par :

- r le rayon de la base du cône,
- h sa hauteur.

1. Justifier que $r > 1$.
2. En considérant que ce cône et ce cube sont coupés par le plan passant par les points A , C et G , montrer que :
$$h = \frac{r\sqrt{2}}{r-1}.$$

Nous rappelons que le volume V d'un cône est calculé par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

3. Exprimer en fonction de r , le volume $V(r)$.

Représenter graphiquement la fonction $r \mapsto V(r)$ définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$. On utilisera au choix, une calculatrice graphique, ou le logiciel *Geogebra*, ou le script *Python* proposé au paragraphe 5. 2. 2.

4. Pour quelle valeur du réel $r > 1$ la fonction $r \mapsto V(r)$ semble atteindre un minimum ? Expliciter ce minimum.

Prouver cette observation. On pourra utiliser un logiciel de calcul formel comme *Xcas* pour finaliser cette preuve.

Quelle est dans ce cas la hauteur du cône ?

Solution

1. Le segment $[AC]$ est une diagonale du carré $ABCD$ de côté $\sqrt{2}$.

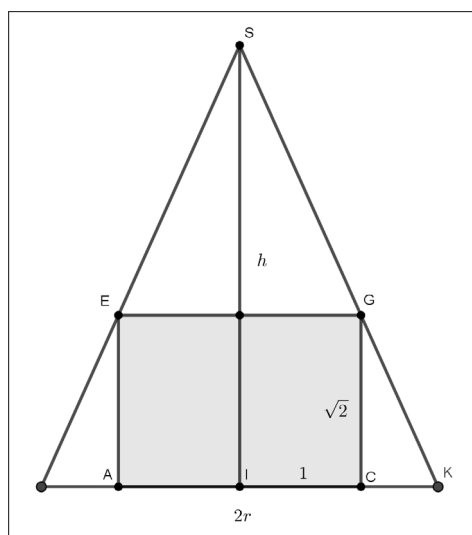
Nous en déduisons que

$$AC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2.$$

Il en résulte, dans la configuration cube inscrit dans un cône, que

$$2r > AC, \text{ soit } r > 1.$$

2. Nous considérons la section de la configuration de l'énoncé par le plan passant par les points A , C et G , ce qui restitue la figure ci-après.



Le théorème de Thalès appliqué dans le triangle SIK relativement aux parallèles (SI) et (GC) induit l'égalité

$$\frac{r-1}{r} = \frac{\sqrt{2}}{h},$$

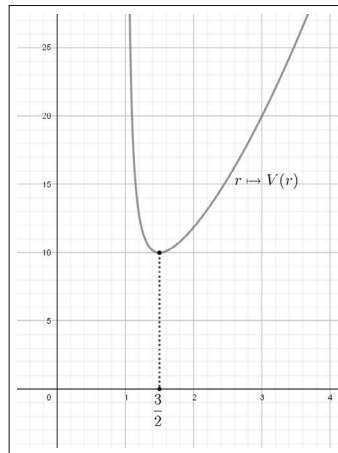
ce qui implique

$$h = \frac{r\sqrt{2}}{r-1}.$$

3. \triangleright Pour $r > 1$, nous avons

$$V(r) = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times \frac{r\sqrt{2}}{r-1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{3} \times \frac{r^3}{r-1}.$$

\triangleright En choisissant un repère orthogonal adapté, avec Geogebra par exemple, nous obtenons ci-dessous la représentation graphique de la fonction $r \mapsto V(r)$ définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$.



4. \triangleright Nous observons graphiquement que la fonction $r \mapsto V(r)$ semble atteindre un minimum lorsque $r = \frac{3}{2}$.

Ce candidat minimum est obtenu en calculant

$$V\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \frac{1}{\frac{3}{2}-1} = \frac{9\pi\sqrt{2}}{4}.$$

\triangleright Pour prouver cette conjecture, nous calculons la différence

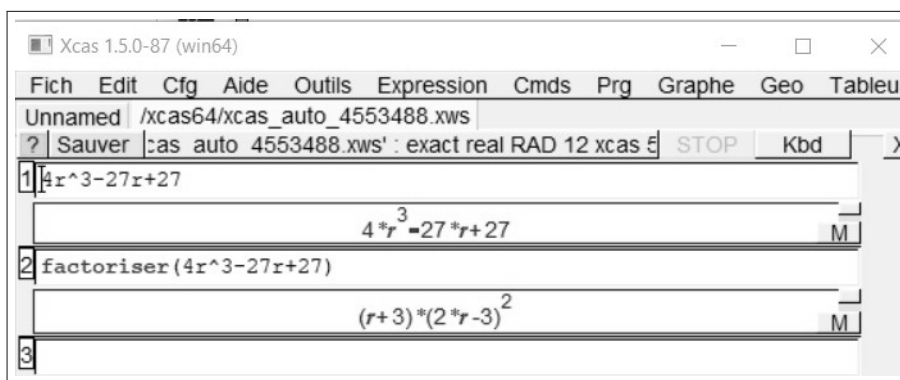
$$V(r) - \frac{9\pi\sqrt{2}}{4},$$

afin d'en déterminer son signe lorsque $r > 1$.

Il vient

$$\begin{aligned} V(r) - \frac{9\pi\sqrt{2}}{4} &= \frac{\pi\sqrt{2}}{3} \times \frac{r^3}{r-1} - \frac{9\pi\sqrt{2}}{4}, \\ &= \pi\sqrt{2} \left(\frac{r^3}{3(r-1)} - \frac{9}{4} \right), \\ &= \pi\sqrt{2} \left(\frac{4r^3 - 27(r-1)}{12(r-1)} \right), \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{12} \times \frac{4r^3 - 27r + 27}{r-1}. \end{aligned}$$

Le logiciel Xcas nous fournit gracieusement une factorisation du polynôme $r^3 - 27r + 27$.



Il en résulte, pour tout réel $r > 1$,

$$V(r) - \frac{9\pi\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{12} \times \frac{(r+3)(2r-3)^2}{r-1} \geq 0.$$

Nous en concluons que la fonction $r \mapsto V(r)$ admet sur $]1, +\infty[$, un minimum $V\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9\pi\sqrt{2}}{4}$ qui est atteint pour un rayon du cône $r = \frac{3}{2}$.

▷ Pour $r = \frac{3}{2}$, la hauteur de ce cône est

$$h = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}}{\frac{3}{2} - 1} = 3\sqrt{2}.$$

Exercice 14. Algorithme de Héron d'Alexandrie¹ **ALGO**

Soit un entier naturel a non nul. Nous considérons la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right).$$

1. Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation $f(x) = x$.

À l'aide de votre calculatrice, ou de GeoGebra, contrôler graphiquement, en prenant par exemple $a = 2$ et en désignant par (δ) la droite d'équation $y = x$.

2. Graphiquement, conjecturer l'existence d'un minimum pour cette fonction.

Prouver cette observation.

3. Graphiquement, quel semble être le sens de variations de f sur $]0, +\infty[$? Justifier vos affirmations.

4. L'entier $a > 0$ étant choisi, nous posons

$$a_0 = a, a_1 = f(a_0), a_2 = f(a_1), a_3 = f(a_2) \dots$$

En utilisant la droite (δ) , représenter sur la droite des abscisses, les réels a_0, a_1, a_2, a_3 .

Graphiquement, en réitérant ce procédé, nous observons que cette suite de nombres se rapproche d'un réel fixé : Lequel ?

5. Les entiers non nuls a et n étant choisis, que restitue l'algorithme qui suit ?

```
u ← a
Pour k allant de 1 à n
    u ← 0.5 ( u + a/u )
Fin Pour
Afficher u
```

Implémenter cet algorithme en Python.

6. L'entier non nul a étant choisi, proposer un algorithme et son script Python qui restitue un rang n à partir duquel l'itération décrite à la question 4 fournit une valeur approchée de \sqrt{a} à 10^{-p} près, l'entier p étant choisi par l'utilisateur.

1. Mathématicien grec : 1^{er}siècle avant J-C

Solution

1. ▷ Nous désignons par (1) l'équation $f(x) = x$, avec $x > 0$.

Il vient

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) = x \Leftrightarrow \frac{x^2 + a}{2x} = x \Leftrightarrow x^2 + a = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = a.$$

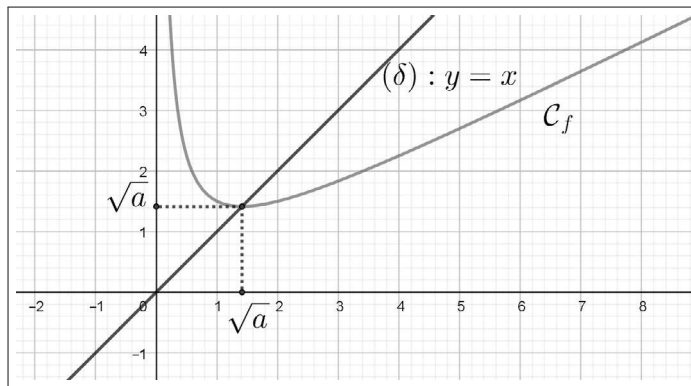
Puisque $a > 0$ et $x > 0$, nous en déduisons

$$f(x) = x \Leftrightarrow x = \sqrt{a}.$$

Nous en concluons que cette équation a pour unique solution dans $]0, +\infty[$ le réel $x = \sqrt{a}$.

▷ Graphiquement, l'unique solution \sqrt{a} de cette équation est l'abscisse du point d'intersection de la droite (δ) avec la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f .

Nous contrôlons ci-après avec GeoGebra en prenant $a = 2$.



2.▷ Graphiquement, nous conjecturons que $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ est un minimum sur l'intervalle $]0, +\infty[$ pour la fonction f qui est atteint en $x = \sqrt{a}$.

▷ Pour le prouver, nous calculons, pour tout réel $x > 0$, la différence $f(x) - f(\sqrt{a})$. Il vient

$$f(x) - f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) - \sqrt{a} = \frac{x^2 + a - 2x\sqrt{a}}{2x} = \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2x} \geq 0.$$

Il en résulte que, pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) \geq f(\sqrt{a}),$$

ce qui justifie que $f(\sqrt{a})$ est un minimum pour la fonction f , sur l'intervalle $]0, +\infty[$, qui est atteint en $x = \sqrt{a}$.

3. ▷ Graphiquement, nous observons que f semble décroissante sur l'intervalle $]0, \sqrt{a}]$ et croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$.

▷ Nous justifions les variations cette fonction.

Soient deux réels $u > 0$ et $v > 0$. Nous commençons par calculer $f(u) - f(v)$.

Nous avons

$$\begin{aligned} f(u) - f(v) &= \frac{1}{2} \left(u + \frac{a}{u} \right) - \frac{1}{2} \left(v + \frac{a}{v} \right), \\ &= \frac{1}{2} \left[(u - v) - \left(\frac{a}{v} - \frac{a}{u} \right) \right], \\ &= \frac{1}{2} \left[(u - v) - a \frac{(u - v)}{uv} \right], \\ &= \frac{1}{2} (u - v) \left(1 - \frac{a}{uv} \right), \\ &= \frac{(u - v)(uv - a)}{2uv}. \end{aligned}$$

★ Nous montrons que f est décroissante sur l'intervalle $]0, \sqrt{a}]$, en supposant que

$$u \text{ et } v \text{ appartiennent à }]0, \sqrt{a}] \text{ tels que } u < v.$$

Nous en déduisons que

$$0 < u \leq \sqrt{a} \text{ et } 0 < v \leq \sqrt{a} \text{ implique } 0 < uv \leq a, \text{ soit } uv - a \leq 0,$$

ce qui donne, puisque $u - v < 0$ et $uv > 0$,

$$f(u) - f(v) \geq 0, \text{ c'est-à-dire } f(u) \geq f(v).$$

ce qui permet de conclure par la décroissance de f sur $]0, \sqrt{a}]$.

★ Nous prouvons que f est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{a}, +\infty[$, en supposant que

$$u \text{ et } v \text{ appartiennent à } [\sqrt{a}, +\infty[, \text{ avec } u < v.$$

De la même façon, nous obtenons

$$uv - a \geq 0, \text{ } u - v < 0 \text{ et } uv > 0,$$

ce qui donne

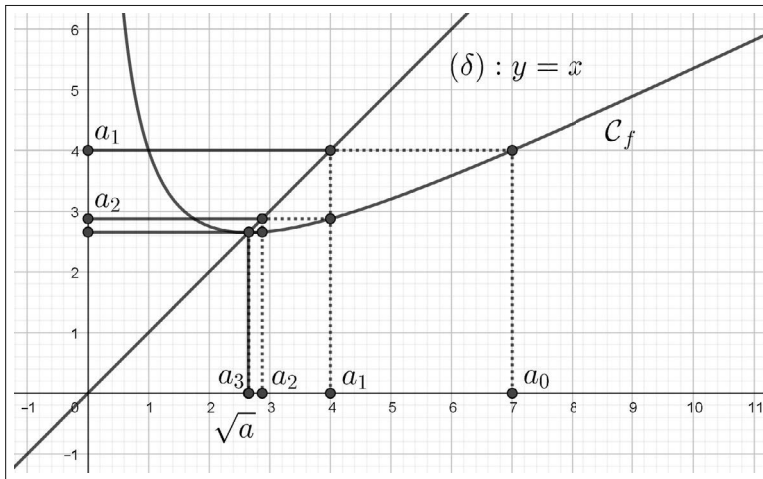
$$f(u) - f(v) \leq 0, \text{ c'est-à-dire } f(u) \leq f(v).$$

Nous en concluons que f est croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$.

Le tableau de variations qui suit résume les questions 2 et 3.

x	0	\sqrt{a}	$+\infty$
variations de f		\searrow	\nearrow

4. \triangleright Nous disposons de la figure suivante en prenant par exemple $a = 7$.



Nous observons que $a_1 = f(a_0)$ lu sur la droite des ordonnées est placé immédiatement sur la droite des abscisses grâce à la droite (δ) d'équation $y = x$.

Nous procédons de la même manière pour placer les réels $a_2 = f(a_1)$ et $a_3 = f(a_2)$ sur la droite des abscisses.

\triangleright En réitérant ce procédé, nous observons graphiquement que cette suite de nombres se rapproche du réel \sqrt{a} .

Nous remarquons que l'approche de cette suite de nombres vers \sqrt{a} est rapide car sur la figure ci-dessus a_3 est presque confondu avec \sqrt{a} .

5. L'entier $a > 0$ et l'entier naturel $n \geq 1$ étant choisis, cet algorithme restitue, après n itérations, un réel a_n qui est une valeur approchée de \sqrt{a} .

L'implémentation en Python de cet algorithme donne

```
a=int(input("a="))
n=int(input("n="))
u=a
for k in range(1,n+1):
    u=0.5*(u+a/u)
print("u=",u)
```

Par exemple, pour $a = 2$ et $n = 5$, nous obtenons

```
>>>
```

```
u = 1.414213562373095.
```

Nous proposons aussi un script qui utilise la fonction Python qui suit.

```
def heron(a, n):  
    u=a  
    for k in range(1, n+1):  
        u=0.5*(u+a/u)  
    return u
```

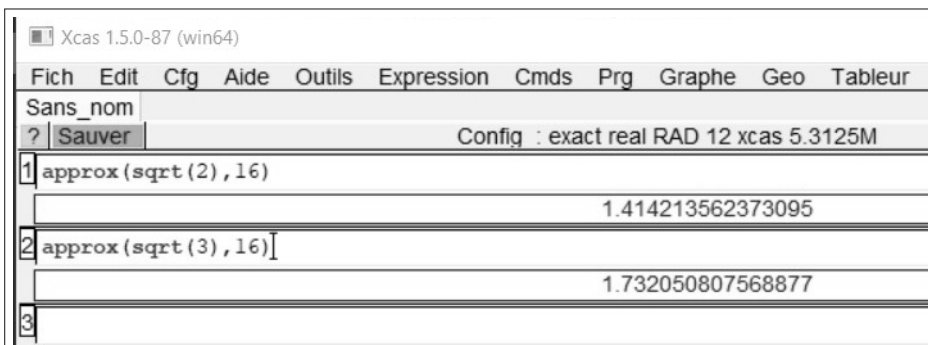
ce qui donne par exemple

```
>>> heron(3,5)
```

```
1.7320508075688772.
```

Ces résultats sont remarquables puisque qu'ils fournissent une approximation de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ avec 15 décimales exactes.

Le logiciel *Xcas* nous permet de le vérifier.



6. Les entiers non nuls a et p étant choisis, nous proposons un algorithme qui évalue un rang n à partir duquel l'itération décrite à la question 4 fournit une valeur approchée de \sqrt{a} à 10^{-p} près,

```
u ← a  
n ← 0  
Tant que  $u - \sqrt{a} > 10^{-p}$   
     $u \leftarrow 0.5 \left( u + \frac{a}{u} \right)$   
     $n \leftarrow n + 1$   
Fin Pour  
Afficher n  
Afficher u
```

Nous en déduisons le programme Python suivant

```
from math import *
a=int(input("a="))
p=int(input("p="))
u=a
n=0
while u-a**0.5>10**(-p):
    u=0.5*(u+a/u)
    n=n+1
print("n=",n)
print("u=",u)
```

Par exemple, pour $a = 3$ et $p = 4$, nous obtenons

```
>>>
n = 3,
u = 1.7321428571428572.
```

Ceci signifie, qu'après trois itérations, une valeur approchée de $\sqrt{3}$ est obtenue à 10^{-4} près.

Étude de quelques fonctions

Nous proposons dans ce chapitre une étude plus approfondie des fonctions affines, des fonctions trinômes du second degré et des fonctions homographiques, ce qui est conforme au programme de Seconde.

Nous ajoutons une étude de la fonction valeur absolue qui est actuellement évoquée dans le programme de Seconde. Pour éviter d'éventuelles lacunes à ce sujet en classes de Première et de Terminale, nous exposons dès à présent, dans le cadre d'un approfondissement, l'étude de cette fonction.

6.1 Fonction affine

Définition. Soient a et b deux réels.

La fonction $f : x \mapsto ax + b$, définie sur \mathbb{R} , est une fonction affine .

Remarques. Nous indiquons deux cas particuliers de fonctions affines.

- Si $a = 0$, alors $f : x \mapsto b$ est une fonction constante.
- Si $b = 0$, alors $f : x \mapsto ax$ est une fonction linéaire.

Proposition. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un réel a tel que, pour tous réels les x et x' distincts,

$$\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = a.$$

(ii) f est affine.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii)

Nous supposons (i).

En particulier pour $x' = 0$ et $x \neq 0$, nous en déduisons qu'il existe un réel a tel que, pour tout réel $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = a.$$

Par suite, pour $x \neq 0$, nous obtenons

$$f(x) = ax + f(0).$$

Puisque cette dernière égalité reste vraie pour $x = 0$, nous en concluons

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + f(0),$$

ce qui prouve la proposition (ii) en posant $b = f(0)$.

(ii) \Rightarrow (i)

Nous supposons que la fonction f est affine.

Il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x , $f(x) = ax + b$.

Pour tous les réels x et x' distincts, nous en déduisons

$$\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = \frac{ax + b - (ax' + b)}{x - x'} = a.$$

La proposition (i) est ainsi justifiée.

Remarques. Nous en faisons cinq.

- Une fonction affine f est déterminée par la donnée de a et de $f(0)$.

En effet nous savons d'après la preuve ci-dessus que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + f(0).$$

- C_f est une droite

- \triangleright de coefficient directeur a ,
- \triangleright d'ordonnée à l'origine $f(0)$,
- \triangleright d'équation : $y = ax + f(0)$.

• Cette proposition signifie qu'une fonction f est affine si et seulement si, pour tous les réels x et x' distincts, l'accroissement $f(x) - f(x')$ des images est proportionnel à l'accroissement $x - x'$ des antécédents.

- Le rapport $\frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$ est parfois noté $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

C'est le taux d'accroissement de f entre les valeurs x et x' .

Par conséquent f est affine si et seulement si $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est une constante.

- f est linéaire si et seulement si il existe un réel a tel que, pour tout réel $x \neq 0$, $\frac{f(x)}{x} = a$.

En d'autres termes f est linéaire si et seulement si les images par f sont proportionnelles à leurs antécédents.

Exemple. Nous montrons qu'il existe une unique fonction affine f dont la représentation graphique est la droite de coefficient directeur a passant par le point $A(\alpha, \beta)$.

Pour tout réel x , nous savons que

$$f(x) = ax + f(0).$$

De plus, nous avons

$$\beta = f(\alpha) = a\alpha + f(0).$$

Par soustraction, pour tout réel x , nous en déduisons

$$f(x) - \beta = a(x - \alpha), \text{ soit } f(x) = a(x - \alpha) + \beta.$$

Les réels a , α et β sont donnés, ce qui assure l'unicité de la fonction affine répondant à la question.

6.2 Fonction polynôme du second degré

Définition. Soient a , b et c trois réels avec $a \neq 0$.

La fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, définie sur \mathbb{R} , est une fonction polynôme de second degré.

Remarques. Nous en donnons deux.

- Une fonction polynôme de second degré est aussi appelée fonction trinôme de second degré et plus simplement trinôme du second degré (par abus de langage en confondant la fonction f et son image $f(x)$).

- Si $a = 0$, alors $f : x \mapsto bx + c$ est affine.

Exemple. Soit f la fonction $x \mapsto x^2 - 2x - 3$.

▷ Pour tout réel x , nous déterminons la forme canonique du trinôme f .

Il vient

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = (x - 1)^2 - 4.$$

▷ Il en résulte que, pour tout réel x ,

$$f(x) + 4 = (x - 1)^2 \geq 0.$$

De plus, $f(x) = -4$ équivaut à $x = 1$.

Cela justifie que f admet un minimum égal à -4 atteint en $x = 1$, ce qui nous suggère d'étudier les variations de f sur $[1, +\infty[$, puis sur $] -\infty, 1]$.

▷ Variation sur $[1, +\infty[$.

Soient a et b deux réels appartenant à $[1, +\infty[$ tels que $a < b$.

Nous avons $1 \leq a < b$ donc $0 \leq a - 1 < b - 1$.

Puisque la fonction carré est croissante sur \mathbb{R}^+ , nous en déduisons

$$(a - 1)^2 < (b - 1)^2,$$

ce qui donne

$$(a - 1)^2 - 4 < (b - 1)^2 - 4, \text{ c'est-à-dire } f(a) < f(b).$$

Nous en concluons que la fonction f est croissante (strictement) sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

▷ Variation sur $] -\infty, 1]$.

Soient a et b deux réels appartenant à $] -\infty, 1]$ tels que $a < b$.

Nous avons $a < b \leq 1$ donc $a - 1 < b - 1 \leq 0$.

La fonction carré est décroissante sur \mathbb{R}^- . Nous en déduisons

$$(a - 1)^2 > (b - 1)^2.$$

Par suite, il vient

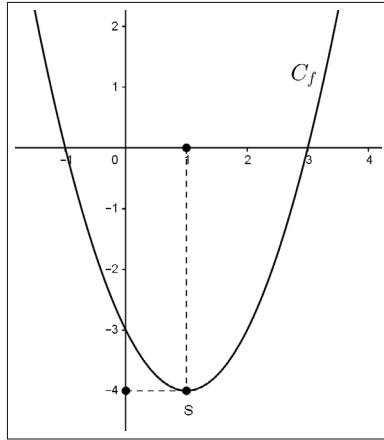
$$(a - 1)^2 - 4 > (b - 1)^2 - 4, \text{ c'est-à-dire } f(a) > f(b).$$

Nous en concluons que la fonction f est décroissante (strictement) sur l'intervalle $] -\infty, 1]$.

Pour résumer, nous donnons le tableau de variations de la fonction f .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
variations de f		\searrow -4 \nearrow	

Contrôle graphique avec GeoGebra.



Proposition (forme canonique d'un trinôme). Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme de second degré, avec $a \neq 0$.

Il existe un réel α et un réel β tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Démonstration. Pour tout réel x et puisque $a \neq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right), \\ f(x) &= a\left(x^2 + 2 \times \left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right), \\ f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right], \\ f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right], \\ f(x) &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

En posant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, nous obtenons en conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Proposition (extremum d'un trinôme). Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme de second degré, avec $a \neq 0$.

La fonction f atteint en $\alpha = -\frac{b}{2a}$ un extremum $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Si $a > 0$, alors cet extremum est un minimum.

Si $a < 0$, alors cet extremum est un maximum.

Démonstration. Nous savons que, pour tout réel x , $f(x) - \beta = a(x - \alpha)^2$.

Si $a > 0$, nous en déduisons

$$f(x) - \beta \geq 0, \text{ soit } f(x) \geq \beta.$$

De plus,

$$f(x) - \beta = 0 \text{ équivaut à } x = \alpha = -\frac{b}{2a}$$

Nous en concluons que f admet dans ce cas un minimum $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ qui est atteint en $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

Si $a < 0$, de la même façon, nous justifions que f admet un maximum $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ qui est atteint en $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

Définition. $(O; I, J)$ est un repère orthonormal du plan.

La courbe C_f représentative d'un trinôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ est une parabole. Le point $S(\alpha, \beta)$, soit

$$S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right),$$

est le sommet de cette parabole.

Remarques. Nous en donnons deux.

- Pour déterminer les coordonnées du sommet S , on peut retenir par cœur les formules qui restituent α et β en fonction de a , b et c . On peut aussi retrouver les valeurs de α et β en mettant le trinôme f sous sa forme canonique.

- Pour justifier que la représentation graphique C_f d'un trinôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est une parabole, nous pouvons démontrer que par un changement de repère adéquat, une équation de C_f relativement à ce nouveau repère est de la forme $Y = X^2$.

À ce sujet, nous aborderons quelques exemples de changements de repères dans le chapitre 8.

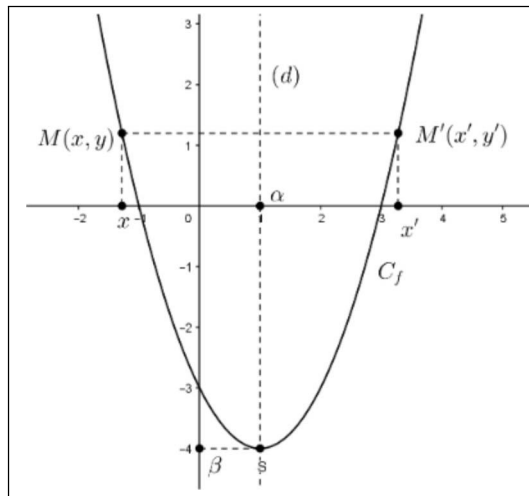
Proposition (axe de symétrie). Avec les notations ci-dessus, la courbe C_f représentative d'un trinôme du second degré admet la droite (d) d'équation $x = \alpha$ pour axe de symétrie.

Démonstration (qui peut être abordée après l'étude du chapitre 8). Nous considérons un point $M(x, y)$ et son symétrique $M'(x', y')$ par rapport à la droite (d) .

Nous avons

$$\begin{cases} \frac{x + x'}{2} = \alpha \\ y' = y \end{cases}, \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} x' = 2\alpha - x \\ y' = y \end{cases}.$$

On suppose à présent que $M \in C_f$, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Les coordonnées (x, y) vérifient une équation de C_f , c'est-à-dire

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

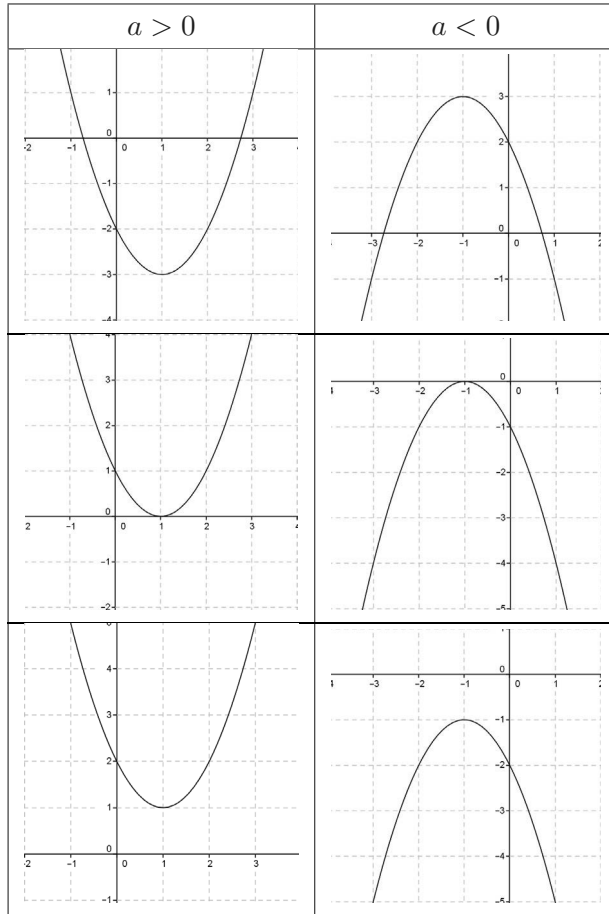
Nous en déduisons que les coordonnées (x', y') du point M' satisfont à

$$y' = a(2\alpha - x' - \alpha)^2 + \beta = a(\alpha - x')^2 + \beta = a(x' - \alpha)^2 + \beta.$$

Ceci prouve que $M' \in C_f$.

Par conséquent, nous avons justifié que la droite (d) d'équation $x = \alpha$ est un axe de symétrie pour la courbe C_f .

Remarque. Dans le tableau qui suit nous illustrons les six cas qui positionnent une parabole dans le plan suivant le signe de a et son intersection avec la droite (OI) des abscisses.



Exemple (trinôme du second degré avec un paramètre). Soient b un réel donné et $f : x \mapsto x^2 + bx - 2$ un trinôme du second degré.

▷ Nous déterminons la forme canonique du trinôme f .

Pour tout réel x , nous obtenons

$$f(x) = x^2 + 2 \times \left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2,$$

$$f(x) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2.$$

▷ Nous en déduisons que le sommet $S(\alpha, \beta)$ de la parabole C_b est tel que

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{b}{2} \\ \beta = -\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2 \end{cases}, \text{ avec } b \in \mathbb{R},$$

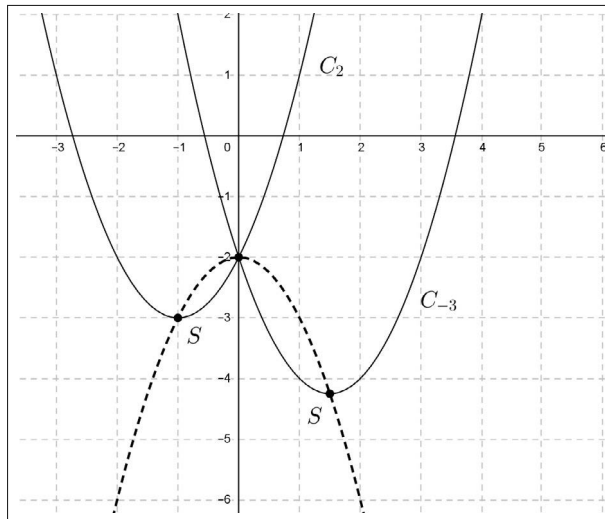
ce qui implique :

$$\beta = -(-\alpha)^2 - 2 = -\alpha^2 - 2.$$

Nous avons ainsi prouvé que, lorsque b décrit \mathbb{R} , le sommet S de C_b décrit la parabole d'équation

$$y = -x^2 - 2.$$

Cette parabole est représentée graphiquement en pointillés sur la figure ci-dessous.



Proposition (sens de variations d'un trinôme). Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme de second degré, avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, alors f est décroissante sur $] -\infty, -\frac{b}{2a}]$ et croissante sur $[-\frac{b}{2a}, +\infty[$.

- Si $a < 0$, alors f est croissante sur $] -\infty, -\frac{b}{2a}]$ et décroissante sur $[-\frac{b}{2a}, +\infty[$.

Démonstration. • Supposons $a > 0$ et soient deux réels u et v appartenant à l'intervalle $] -\infty, -\frac{b}{2a}]$ tels que $u < v$.

Nous avons donc $u < v \leq -\frac{b}{2a}$. Il en résulte

$$u + \frac{b}{2a} < v + \frac{b}{2a} \leq 0.$$

La fonction carré est décroissante sur \mathbb{R}^- , donc :

$$\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2 > \left(v + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Puisque $a > 0$ et en ajoutant $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ aux deux membres de cette dernière inégalité, nous obtenons

$$a\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2 + \beta > a\left(v + \frac{b}{2a}\right)^2 + \beta,$$

ce qui justifie que $f(u) > f(v)$.

Nous en concluons que la fonction f est décroissante sur $] -\infty, -\frac{b}{2a}]$.

Nous montrons de la même façon que si $a > 0$, alors f est croissante sur $[-\frac{b}{2a}, +\infty[$.

• Supposons $a < 0$ et soient deux réels u et v appartenant à l'intervalle $] -\infty, -\frac{b}{2a}]$ tels que $u < v$.

Nous avons donc $u < v \leq -\frac{b}{2a}$. Il en résulte que

$$u + \frac{b}{2a} < v + \frac{b}{2a} \leq 0.$$

Puisque la fonction carré est décroissante sur \mathbb{R}^- , il vient

$$\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2 > \left(v + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Puisque $a < 0$ et en ajoutant $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ aux deux membres de cette dernière inégalité, nous obtenons

$$a\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2 + \beta < a\left(v + \frac{b}{2a}\right)^2 + \beta,$$

ce qui prouve que $f(u) < f(v)$.

Nous en concluons que la fonction f est croissante sur $] -\infty, -\frac{b}{2a}]$.

Nous montrons de la même façon que si $a < 0$, alors f est décroissante sur $[-\frac{b}{2a}, +\infty[$.

Remarque. Nous disposons des deux tableaux de variations suivants :

$a > 0$	x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
	variations de f		$\searrow \quad f(\alpha) = \beta \quad \nearrow$	
$a < 0$	x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
	variations de f		$\nearrow \quad f(\alpha) = \beta \quad \searrow$	

6.3 Fonction homographique

Définition. Soient a, b, c et d quatre réels tels que $c \neq 0$ et $bc - ad \neq 0$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$, définie pour $x \neq -\frac{d}{c}$, est une fonction homographique.

Remarques. Nous en faisons trois.

- Lorsque $a = d = 0$ et $b = c = 1$, la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est homographique.

- Si $c = 0$, alors la fonction $f : x \mapsto \frac{ax + b}{d}$ est affine, sous réserve que $d \neq 0$.

- Si $bc - ad = 0$ et $c \neq 0$, la proposition qui suit justifie que la fonction f est la fonction constante $x \mapsto \frac{a}{c}$.

Exemple. Représentation graphique d'une fonction homographique.

Soit f la fonction homographique définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}.$$

▷ Nous commençons par montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \neq 2$,

$$f(x) = a + \frac{b}{x - 2}.$$

Pour cela, plusieurs méthodes sont possibles. Nous en exposons ici deux.

Méthode 1.

Pour $x \neq 2$, nous observons que

$$f(x) = \frac{3x - 6 + 6 + 1}{x - 2} = \frac{3(x - 2) + 7}{x - 2} = 3 + \frac{7}{x - 2}.$$

Par conséquent $a = 3$ et $b = 7$ conviennent.

Méthode 2. Par analyse-synthèse.

Analyse

Considérons le problème résolu, c'est-à-dire supposons qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $x \neq 2$

$$f(x) = a + \frac{b}{x - 2}.$$

En particulier pour $x = 0$ puis $x = 1$, nous obtenons le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} a - \frac{b}{2} = -\frac{1}{2} \\ a - b = -4 \end{array} \right., \text{ ce qui équivaut à } \left\{ \begin{array}{l} 2a - b = -1 \\ a - b = -4 \end{array} \right.,$$

ce qui donne $a = 3$ et $b = 7$.

Synthèse

Nous vérifions immédiatement que $3 + \frac{7}{x-2} = f(x)$.

Il existe d'autres méthodes comme l'identification ou la division polynomiale. Ces dernières seront développées en Première.

▷ Nous justifions que, pour $x > 2$, $f(x) > 3$.

Soit un réel $x > 2$. En utilisant la "forme canonique" de f obtenue ci-dessus, nous obtenons

$$f(x) - 3 = \frac{7}{x-2} > 0,$$

ce qui prouve que

$$\forall x > 2, f(x) > 3.$$

▷ Nous montrons que si $x > 2 + 7 \times 10^5$, alors $f(x) - 3 < 10^{-5}$.

Si $x > 2 + 7 \times 10^5$, alors $x - 2 > 7 \times 10^5 > 0$.

Puisque la fonction inverse est décroissante strictement sur $]0, +\infty[$, il vient

$$\frac{1}{x-2} < \frac{1}{7 \times 10^5}, \text{ ce qui implique } 7 \times \frac{1}{x-2} < 10^{-5}.$$

Nous en concluons que

$$\text{si } x > 2 + 7 \times 10^5, \text{ alors } f(x) - 3 < 10^{-5}.$$

Cela signifie que si x est assez grand, alors $f(x)$ est proche de 3.

Graphiquement, nous observons que les points de C_f d'abscisses suffisamment grandes se rapprochent de la droite d'équation $y = 3$.

On dit que cette droite est une *asymptote horizontale* pour x voisin de $+\infty$.

▷ Nous prouvons que si $2 < x < 2 + 10^{-5}$, alors $f(x) > 10^5$.

Si $2 < x < 2 + 10^{-5}$, alors $0 < x - 2 < 10^{-5}$.

Par décroissance stricte de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, nous obtenons

$$\frac{1}{x-2} > 10^5, \text{ soit } \frac{7}{x-2} > 7 \times 10^5.$$

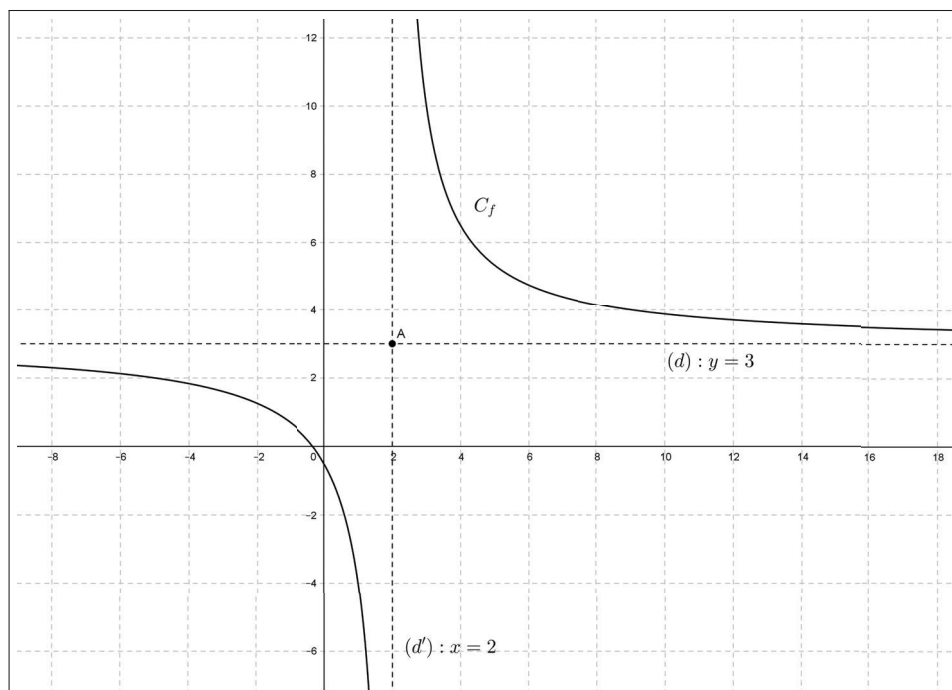
Nous en déduisons

$$f(x) > 3 + 7 \times 10^5 > 10^5.$$

Ainsi, si x est proche de 2 par la droite, alors $f(x)$ est grand.

Graphiquement, cela signifie que les points de C_f d'abscisses proches de 2 en restant strictement supérieures à 2 se rapprochent de la droite d'équation $x = 2$.

On dit que cette droite est une *asymptote verticale* pour x voisin de 2 tel que $x > 2$.



Sur la représentation graphique de la fonction f , nous pouvons conjecturer que le point $A(2, 3)$ est un centre de symétrie pour la courbe C_f .

Par symétrie, nous en déduisons que :

- la droite (d) d'équation $y = 3$ est une *asymptote horizontale* pour x voisin de $-\infty$,

- la droite (d') d'équation $x = 2$ est une *asymptote verticale* pour x voisin de 2, en restant à gauche de 2.

Proposition (forme canonique d'une fonction homographique). Soient a , b , c et d quatre réels tels que $c \neq 0$ et $bc - ad \neq 0$. On considère la fonction homographique $f : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$, définie pour $x \neq -\frac{d}{c}$.

Pour tout réel $x \neq -\frac{d}{c}$, on a : $f(x) = \frac{a}{c} + \frac{1}{c} \frac{bc - ad}{cx + d}$.

Démonstration. Pour tout $x \neq -\frac{d}{c}$, nous avons

$$f(x) = \frac{a(x + \frac{b}{a})}{c(x + \frac{d}{c})} = \frac{a}{c} \frac{x + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} + \frac{b}{a}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \left(1 + \frac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{x + \frac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c} + \frac{1}{c} \frac{bc - ad}{cx + d}.$$

Définition. $(O; I, J)$ est un repère orthonormal du plan.

Soient a, b, c et d quatre réels tels que $c \neq 0$ et $bc - ad \neq 0$.

La courbe C_f représentative d'une fonction homographique $f : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$ est une hyperbole dont les asymptotes horizontale et verticale ont respectivement pour équation $y = \frac{a}{c}$ et $x = -\frac{d}{c}$.

Proposition. Avec les notations ci-dessus, le point $A(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ d'intersection des deux asymptotes est un centre de symétrie pour l'hyperbole C_f .

Démonstration (qui peut être abordée après l'étude du chapitre 8). Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points symétriques par rapport au point A .

Puisque A est le milieu du segment $[MM']$, nous en déduisons

$$\begin{cases} \frac{x + x'}{2} = -\frac{d}{c} \\ \frac{y + y'}{2} = \frac{a}{c} \end{cases}, \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} x' = -x - \frac{2d}{c} \\ y' = -y + \frac{2a}{c} \end{cases}.$$

Soit $M(x, y) \in C_f$. Il vient

$$y = \frac{a}{c} + \frac{1}{c} \frac{bc - ad}{cx + d}.$$

Nous en déduisons que les coordonnées (x', y') du point M' satisfont à

$$-y' + \frac{2a}{c} = \frac{a}{c} + \frac{1}{c} \frac{bc - ad}{c(-x' - \frac{2d}{c}) + d}.$$

Après simplification, il vient

$$y' = \frac{a}{c} + \frac{1}{c} \frac{bc - ad}{cx' + d},$$

ce qui justifie que $M'(x', y')$ appartient à l'hyperbole C_f .

Nous en concluons que le point $A(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ est un centre de symétrie pour l'hyperbole C_f .

Remarque. Pour justifier que la représentative graphique C_f d'une fonction homographique est une hyperbole, nous pourrions démontrer que par un changement de repère adéquat, une équation de C_f relativement à ce nouveau repère est de la forme $Y = \frac{1}{X}$. Nous aborderons à ce sujet quelques exemples de changements de repères dans le chapitre 8.

6.4 Fonction valeur absolue

6.4.1 Définition - Premières propriétés

Nous rappelons la définition de la valeur absolue d'un réel, donnée au chapitre 1.

Définition. Soit x un réel. La valeur absolue de x est le réel positif, notée $|x|$, définie par

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

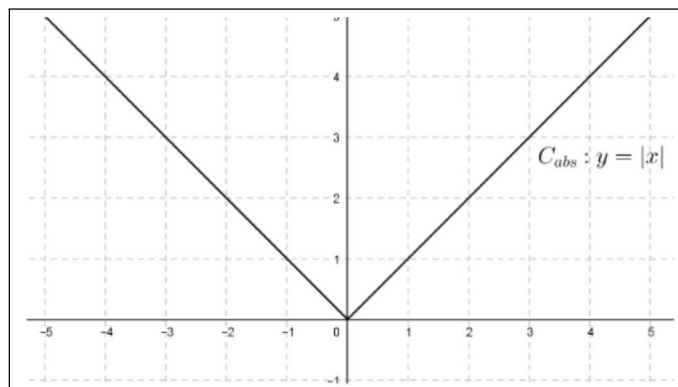
Nous disposons ainsi d'une fonction définie sur \mathbb{R} , $x \mapsto |x|$, notée *abs*.

Représentation graphique de la fonction $abs : x \mapsto |x|$

$(O; I, J)$ est un repère orthonormal du plan.

Une équation de la courbe C_{abs} est $y = |x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} .$

Cette courbe est donc la réunion de deux demi-droites représentées ci-après.



Nous observons que la fonction *abs* est affine par intervalles.

Proposition (premières propriétés de la fonction valeur absolue). *Nous disposons des propriétés suivantes :*

- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, |-x| = |x|$ (la fonction abs est paire).
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| = |y - x|$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, |x|^2 = |x^2| = x^2$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq |x|$.

Démonstration. Soient x et y deux réels. Nous avons successivement :

- $|x| = \sqrt{x^2} \geq 0$.
- $|x| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $|-x| = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|$.
- Puisque $x - y = -(y - x)$, l'égalité $|x - y| = |y - x|$ en résulte d'après la propriété précédente.
- D'une part,

$$|x|^2 = (\sqrt{x^2})^2 = x^2.$$

D'autre part,

$$|x^2| = x^2 \text{ car } x^2 \geq 0.$$

Nous en concluons

$$|x|^2 = |x^2| = x^2.$$

- Puisque $|x| \geq 0$ et $|y| \geq 0$,

$$|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y.$$

- Nous avons

$$x - |x| = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Il en résulte que $x - |x| \leq 0$, c'est-à-dire, pour tout réel x ,

$$x \leq |x|.$$

Remarque. Ces premières propriétés sont à connaître car elles autorisent souvent des calculs sans être obligé d'effectuer une disjonction des cas.

Par exemple, on retiendra qu'une équation de la forme

$$|u(x)| = |v(x)| \text{ est équivalente à } u(x) = v(x) \text{ ou } u(x) = -v(x),$$

ce que nous mettons en œuvre dans les deux exemples qui suivent.

Exemples. Résolutions d'équations de la forme $|u(x)| = |v(x)|$.

1^{er} exemple. Résolution dans \mathbb{R} de l'équation $|2x - 1| = |x - 2|$, notée (1).

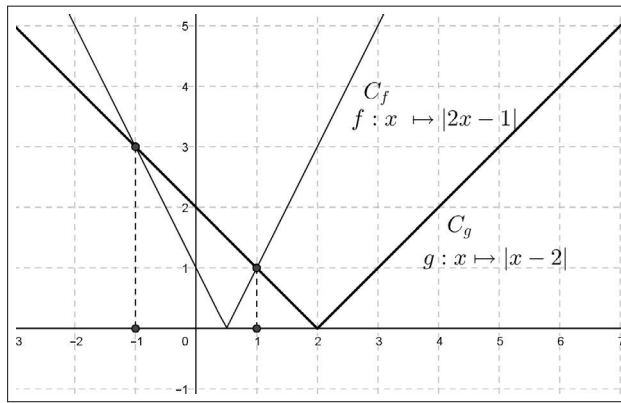
Nous avons

$$(1) \Leftrightarrow 2x - 1 = x - 2 \text{ ou } 2x - 1 = -x + 2,$$

$$(1) \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1.$$

Nous en concluons que $S_{(1)} = \{-1, 1\}$.

Contrôle graphique avec GeoGebra.



2^e exemple. Résolution dans \mathbb{R} de l'équation $|x^2 - 2x| = |x|$, notée (2).

Nous avons

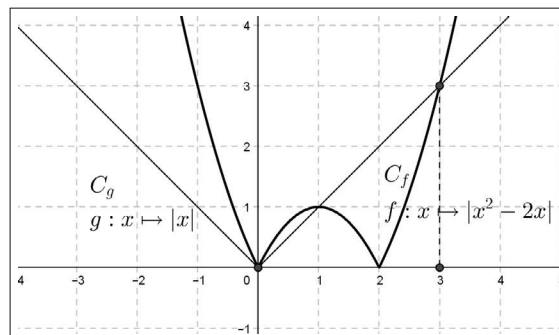
$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 2x = x \text{ ou } x^2 - 2x = -x,$$

$$(2) \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \text{ ou } x(x - 1) = 0,$$

$$(2) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } x = 1.$$

Nous en concluons que $S_{(2)} = \{0, 1, 3\}$.

Contrôle graphique avec GeoGebra.



6.4.2 Représentation graphique de $f : x \mapsto |x - a|$

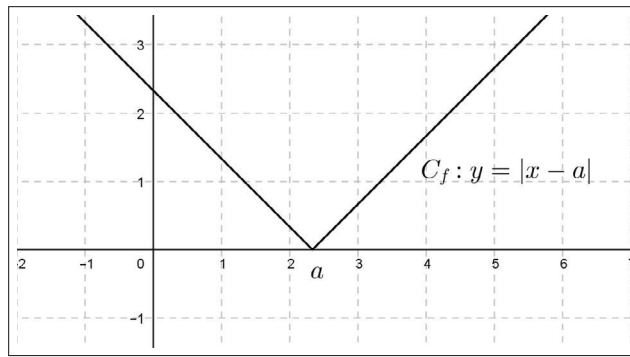
$(O; I, J)$ est un repère orthonormal du plan.

Nous procédons par disjonction des cas.

Un équation de la courbe C_f est

$$y = |x - a| = \begin{cases} x - a & \text{si } x - a \geq 0 \\ -(x - a) & \text{si } x - a < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - a & \text{si } x \geq a \\ -x + a & \text{si } x < a \end{cases} .$$

Nous en déduisons que C_f est la réunion de deux demi-droites représentées ci-dessous



Remarque. Nous pouvons aussi obtenir la représentation graphique de $f : x \mapsto |x - a|$ en considérant que C_f se déduit de C_{abs} par la translation de vecteur $a \cdot \vec{OI}$.

Ce point sera abordé dans les chapitres 7 et 8.

6.4.3 Équation $|x| = r$

Proposition (équation $|x| = r$). *Soit r un réel donné et S l'ensemble des solutions dans \mathbb{R} de l'équation $|x| = r$. Nous disposons du tableau.*

$ x = r$	ensemble des solutions
$r > 0$	$S = \{-r, r\}$
$r = 0$	$S = \{0\}$
$r < 0$	$S = \emptyset$

Démonstration. Par disjonction, nous distinguons trois cas.

Si $r > 0$, alors nous avons

$$|x| = r \Leftrightarrow |x| = |r| \Leftrightarrow x = -r \text{ ou } x = r.$$

Si $r = 0$, alors on a

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Si $r < 0$, alors cette équation n'a pas de solution car

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0.$$

Corollaire (équation $|x - a| = r$). Soient r et a deux réels donnés et S l'ensemble des solutions dans \mathbb{R} de l'équation $|x - a| = r$. Nous disposons du tableau.

$ x - a = r$	ensemble des solutions
$r > 0$	$S = \{a - r, a + r\}$
$r = 0$	$S = \{a\}$
$r < 0$	$S = \emptyset$

Démonstration. Comme précédemment, nous distinguons par disjonction trois cas.

Si $r > 0$, alors nous avons

$$|x - a| = r \Leftrightarrow |x - a| = |r| \Leftrightarrow x - a = -r \text{ ou } x - a = r \Leftrightarrow x = a - r \text{ ou } x = a + r.$$

Si $r = 0$, alors nous obtenons

$$|x - a| = 0 \Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

Si $r < 0$, alors cette équation n'a pas de solution car

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \geq 0.$$

Remarques. Nous en faisons deux.

- Plus généralement, pour résoudre une équation de la forme $|u(x)| = r$, nous procédons de la même façon :

si $r > 0$, $|u(x)| = r \Leftrightarrow u(x) = -r \text{ ou } u(x) = r$,

si $r = 0$, $|u(x)| = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0$,

si $r < 0$, cette équation n'a pas de solution car, pour tout réel x , $|u(x)| \geq 0$.

- Pour résoudre une équation de la forme $\alpha|u(x)| + \beta|v(x)| = m$ ou $\alpha|u(x)| + \beta v(x) = m$, nous procédons par disjonction des cas, contrairement aux équations de la forme $|u(x)| = |v(x)|$ ou $|u(x)| = r$ où la résolution est directe en utilisant la remarque précédente.

Exemples. Nous proposons de résoudre dans \mathbb{R} les deux équations suivantes :

$$|x^2 - 2x| = 2, \text{ notée (1),}$$

$$2|x| - |x - 2| = 2. \text{ notée (2).}$$

Puis nous contrôlons graphiquement avec GeoGebra les solutions obtenues.

▷ Résolution de (1).

Pour résoudre (1), nous observons que cette équation est du type $|u(x)| = r$.

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x = -2 \text{ ou } x^2 - 2x = 2,$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 = -2 \text{ ou } x^2 - 2x + 1 - 1 = 2,$$

$$(1) \Leftrightarrow (x - 1)^2 = -1 \text{ ou } (x - 1)^2 = 3.$$

L'équation $(x - 1)^2 = -1$ n'a pas de solution. Nous en déduisons

$$(1) \Leftrightarrow x - 1 = -\sqrt{3} \text{ ou } x - 1 = \sqrt{3},$$

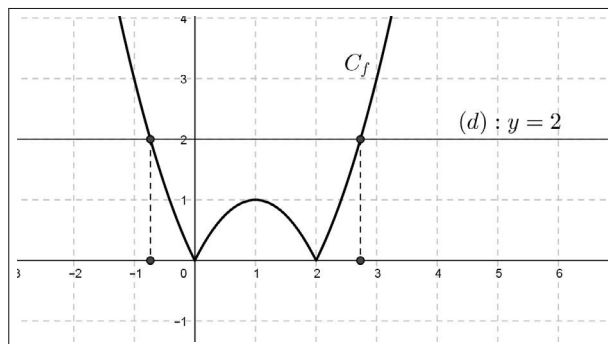
$$(1) \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3} \text{ ou } x = 1 + \sqrt{3}.$$

Nous en concluons que $S_{(1)} = \{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$.

Contrôle graphique.

Nous affichons la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto |x^2 - 2x|$.

Les solutions de (1) sont, comme nous le savons, les abscisses des points d'intersection de C_f avec la droite (d) d'équation $y = 2$.



▷ Résolution de (2).

Pour résoudre cette équation, en observant les valeurs absolues figurant dans (2), nous devons faire une disjonction des cas suivants :

$$x < 0 \text{ ou } 0 \leq x < 2 \text{ ou } x \geq 2.$$

Nous présentons cette disjonction sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$ x $	$-x$	0	x		x
$ x - 2 $	$-x + 2$		$-x + 2$	0	$x - 2$
$2 x - x - 2 $	$-x - 2$	-2	$3x - 2$	4	$x + 2$

Nous obtenons

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2 = 2 \\ \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3x - 2 = 2 \\ \text{si } 0 \leq x < 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + 2 = 2 \\ \text{si } x \geq 2 \end{cases},$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ \text{si } 0 \leq x < 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

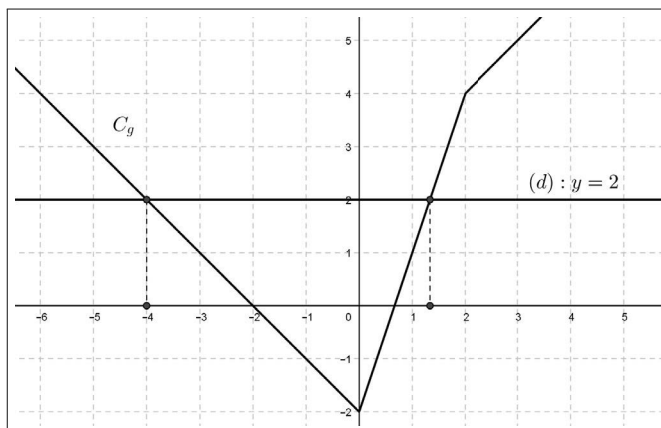
Seules les deux premières solutions conviennent, donc $S_{(2)} = \left\{-4, \frac{4}{3}\right\}$.

Contrôle graphique.

Nous observons grâce au tableau ci-dessus que la fonction $g : x \mapsto 2|x| - |x - 2|$ est affine par intervalles et est définie par

$$g(x) = \begin{cases} -x - 2 \\ \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ ou } g(x) = \begin{cases} 3x - 2 \\ \text{si } 0 \leq x < 2 \end{cases} \text{ ou } g(x) = \begin{cases} x + 2 \\ \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

Les solutions de (2) sont les abscisses des points d'intersection de C_g avec la droite (d) d'équation $y = 2$.



6.4.4 Inéquations $|x| \leq r$, $|x| < r$, $|x| \geq r$, $|x| > r$

Proposition. Soient r un réel donné et S l'ensemble des solutions de l'une des inéquations proposées ci-dessus. Nous disposons des deux tableaux suivants :

Inéquations	$ x \leq r$	$ x < r$
$r > 0$	$S = [-r, r]$	$S =]-r, r[$
$r = 0$	$S = \{0\}$	\emptyset
$r < 0$	\emptyset	\emptyset

Inéquations	$ x \geq r$	$ x > r$
$r > 0$	$S =]-\infty, -r] \cup [r, +\infty[$	$S =]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[$
$r = 0$	\mathbb{R}	\mathbb{R}^*
$r < 0$	\mathbb{R}	\mathbb{R}

Démonstration. Pour les deux dernières lignes des deux tableaux, nous réfléchissons dans chaque cas sachant que, pour tout réel x , $|x| \geq 0$.

Pour la première ligne de chacun des deux tableaux, nous élevons au carré les deux membres positifs de chacune des quatre inéquations. En utilisant l'égalité $|x|^2 = x^2$, nous obtenons :

- $|x| \leq r \Leftrightarrow x^2 \leq r^2 \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$.
- $|x| < r \Leftrightarrow x^2 < r^2 \Leftrightarrow -r < x < r$.
- $|x| \geq r \Leftrightarrow x^2 \geq r^2 \Leftrightarrow x \leq -r$ ou $x \geq r$.
- $|x| > r \Leftrightarrow x^2 > r^2 \Leftrightarrow x < -r$ ou $x > r$.

Corollaire (inéquations $|x-a| \leq r$, $|x-a| < r$, $|x-a| \geq r$, $|x-a| > r$). Soient r et a deux réels donnés et S l'ensemble des solutions de l'une des inéquations proposées ci-dessus. Nous disposons des trois tableaux suivants :

Inéquations	$ x-a \leq r$	$ x-a < r$
$r > 0$	$S = [a-r, a+r]$	$S =]a-r, a+r[$
$r = 0$	$S = \{a\}$	\emptyset
$r < 0$	\emptyset	\emptyset

Inéquations	$ x-a \geq r$
$r > 0$	$S =]-\infty, a-r] \cup [a+r, +\infty[$
$r = 0$	\mathbb{R}
$r < 0$	\mathbb{R}

Inéquations	$ x - a > r$
$r > 0$	$S =] - \infty, a - r[\cup] a + r, +\infty[$
$r = 0$	$\mathbb{R} - \{a\}$
$r < 0$	\mathbb{R}

Démonstration. Pour les deux dernières lignes de ces trois tableaux, nous réfléchissons dans chaque cas sachant que, pour tout réel x , $|x - a| \geq 0$.

Pour la première ligne de chacun des deux tableaux, nous utilisons la proposition précédente en remplaçant x par $x - a$. Les quatre ensembles de solutions en résultent immédiatement.

Exemples. Nous résolvons dans \mathbb{R} les trois inéquations suivantes :

$$(1) |x + 2| > 2.$$

$$(2) |2x - 1| \leq \sqrt{2}.$$

$$(3) |x^2 - 2| < 2.$$

▷ Résolution de (1).

Nous appliquons le corollaire ci-dessus avec $a = -2$ et $r = 2$. Nous obtenons

$$S_{(1)} =] - \infty, -4[\cup] 0, +\infty[.$$

▷ Résolution de (2).

On reconnaît une inéquation de la forme $|x| \leq \sqrt{2}$ où x est remplacé par $2x - 1$, ce qui donne

$$(2) \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq 2x - 1 \leq \sqrt{2},$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{2} + 1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2} + 1}{2}.$$

Nous obtenons

$$S_{(2)} = \left[\frac{-\sqrt{2} + 1}{2}, \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \right].$$

▷ Résolution de (3).

Nous utilisons la même méthode que dans (2). Il vient

$$(3) \Leftrightarrow -2 < x^2 - 2 < 2,$$

$$(3) \Leftrightarrow 0 < x^2 < 4,$$

$$(3) \Leftrightarrow -2 < x < 2 \text{ et } x \neq 0.$$

Nous en concluons que

$$S_{(3)} =] - 2; 0[\cup] 0; 2[.$$

6.4.5 Action de la valeur absolue sur la multiplication, sur l'inverse et sur le quotient

Proposition (action de la valeur absolue sur la multiplication). *Pour tous les réels x et y , nous avons*

$$|xy| = |x||y|.$$

Démonstration. Soient x et y deux réels. Il vient

$$|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 = (|x||y|)^2.$$

Puisque $|xy| \geq 0$ et $|x||y| \geq 0$, nous en déduisons $|xy| = |x||y|$.

Remarques. Nous en donnons trois.

- En particulier pour $x = y$, nous obtenons à nouveau que,

$$\text{pour tout réel } x, |x^2| = |x|^2.$$

- Plus généralement, nous pouvons démontrer par récurrence que, pour tout réel x non nul et tout entier naturel n , nous disposons de l'égalité $|x^n| = |x|^n$.

- Action sur une fonction affine.

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$. Pour tout réel x , nous avons

$$|ax + b| = |a(x + \frac{b}{a})| = |a||x + \frac{b}{a}|.$$

Proposition (action de la valeur absolue sur l'inverse, sur le quotient). *Soient x et y deux réels tels que $y \neq 0$. Nous disposons des deux propriétés suivantes :*

- $|\frac{1}{y}| = \frac{1}{|y|}$.
- $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.

Démonstration. • Soit y un réel non nul. Nous savons que $y \times \frac{1}{y} = 1$.

Il en résulte que $|y \times \frac{1}{y}| = |1| = 1$.

Nous en déduisons que $|y| \times |\frac{1}{y}| = 1$, ce qui donne $|\frac{1}{y}| = \frac{1}{|y|}$.

- Soient x et y deux réels tels que $y \neq 0$. Nous avons

$$|\frac{x}{y}| = |x \times \frac{1}{y}| = |x| \times |\frac{1}{y}| = |x| \times \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}.$$

Exemple. Nous résolvons dans $\mathbb{R} - \{1\}$ l'équation

$$\frac{|x|}{|x-1|} = \frac{1}{2}.$$

Notons (e) cette équation. Nous proposons deux méthodes qui n'utilisent pas une disjonction des cas.

Méthode 1. Pour tout réel $x \neq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} (e) &\Leftrightarrow 2|x| = |x-1|, \\ (e) &\Leftrightarrow |2x| = |x-1|, \\ (e) &\Leftrightarrow 2x = -(x-1) \text{ ou } 2x = x-1, \\ (e) &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

Nous en concluons que $S_{(e)} = \{-1, \frac{1}{3}\}$.

Méthode 2.

Pour tout réel $x \neq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} (e) &\Leftrightarrow \left| \frac{x}{x-1} \right| = \frac{1}{2}, \\ (e) &\Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = -\frac{1}{2} \text{ ou } \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}, \\ (e) &\Leftrightarrow 2x = -(x-1) \text{ ou } 2x = x-1. \end{aligned}$$

Nous en déduisons ensuite la même conclusion qu'avec la méthode 1.

6.4.6 Action de la valeur absolue sur l'addition - Inégalité triangulaire

Soient $a = 2$ et $b = -5$. Nous observons que

$$|a+b| = |-3| = 3 \text{ et } |a| + |b| = 2 + |-5| = 7.$$

C'est un contre-exemple qui prouve que, en général, $|a+b| \neq |a| + |b|$.

Proposition (inégalité triangulaire). *Soient x et y deux réels quelconques. Nous disposons de l'inégalité*

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Démonstration. Soient x et y deux réels. Pour comparer les réels positifs $|x+y|$ et $|x| + |y|$ nous étudions le signe du réel

$$D = |x+y|^2 - (|x| + |y|)^2.$$

En développant, nous obtenons

$$D = (x+y)^2 - (|x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|) = x^2 + y^2 + 2xy - (x^2 + y^2 + 2|xy|) = 2(xy - |xy|).$$

Puisque $xy \leq |xy|$, en vertu du dernier point de la proposition établie au paragraphe 6.4.1, nous en déduisons que

$$D \leq 0,$$

ce qui donne

$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2.$$

Puisque $|x + y| \in \mathbb{R}^+$ et $|x| + |y| \in \mathbb{R}^+$, l'inégalité attendue en résulte, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Remarques. Nous en faisons trois.

- L'égalité est atteinte si et seulement si $D = 0$. Ceci équivaut à $xy = |xy|$, donc si et seulement si les réels x et y sont de même signe.

- En remplaçant y par $-y$, nous obtenons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq |x| + |y|.$$

- Pour tous réels x et y , l'exercice corrigé 25 justifie que $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Nous disposons ainsi de la double inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$

6.5 Exercices corrigés

6.5.1 Fonction affine

Exercice 1. Égalité de deux fonctions affines

1. Soient a et b deux réels et $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

(ii) $a = b = 0$.

2. Soient $f : x \mapsto ax + b$ et $g : x \mapsto a'x + b'$ deux fonctions affines.

Justifier que

$$f = g \text{ si et seulement si } a = a' \text{ et } b = b'.$$

Solution

1. Montrons que (i) \Rightarrow (ii).

Nous supposons que, pour tout réel x , $f(x) = 0$, soit $ax + b = 0$.

En particulier, pour $x = 0$, nous obtenons $a = 0$.

En particulier, pour $x = 1$, nous obtenons $a + b = 0$.

Le système

$$\begin{cases} a = 0 \\ a + b = 0 \end{cases},$$

admet pour solution $a = b = 0$, ce qui justifie la proposition (ii).

Montrons que (ii) \Rightarrow (i).

Si $a = b = 0$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0x + 0 = 0$.

La proposition (i) est ainsi justifiée.

2. Nous disposons des équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f = g &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x), \\ f = g &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ax + b = a'x + b', \\ f = g &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (a - a')x + b - b' = 0. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la question 1, nous obtenons

$$f = g \text{ si et seulement si } a = a' \text{ et } b = b'.$$

Exercice 2. Fonctions affines

Soit f une fonction affine. Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Le coefficient directeur de la droite qui représente cette fonction dans un repère est strictement compris entre 0 et 1. De plus $f(3) = 4$ et $f(1) \in \mathbb{N}$. Déterminer cette fonction.

2. On suppose que $f(1) < f(2)$, $f(3) > f(4)$ et $f(5) = 5$. Déterminer cette fonction.

3. On suppose que $f(-1) = 3$. Calculer $f(-2)$ et $f(1)$ sachant que ces deux nombres appartiennent à l'ensemble $\{0; 1; 4; 5\}$.

Solution

Pour tout réel x , posons $f(x) = ax + b$.

1. Puisque $a \in]0; 1[$, la fonction f est croissante sur \mathbb{R} , donc $f(1) < 4$.

Comme $f(1) \in \mathbb{N}$, nous en déduisons que $f(1) \in \{0; 1; 2; 3\}$.

De plus :

$f(1) = a + b$ et $4 = f(3) = 3a + b = 2a + a + b$, ce qui implique que

$$f(1) = a + b = 4 - 2a.$$

Ainsi, par disjonction, nous en déduisons les quatre cas ci-après.

- $4 - 2a = 0$, soit $a = 2$. Cette solution est exclue car $a \in]0; 1[$.
- ou
- $4 - 2a = 1$, soit $a = \frac{3}{2}$. Cette solution est exclue car $a \in]0; 1[$.
- ou
- $4 - 2a = 2$, soit $a = 1$. Cette solution est exclue car $a \in]0; 1[$.
- ou
- $4 - 2a = 3$ soit $a = \frac{1}{2}$. Cette solution convient.

Par conséquent, pour tout réel x , nous obtenons

$$f(x) = \frac{1}{2}x + b = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Réciproquement, nous vérifions que $f(3) = 4$ et $f(1) = 3 \in \mathbb{N}$.

2. Les conditions $f(1) < f(2)$, $f(3) > f(4)$ signifient que f est simultanément croissante et décroissante sur \mathbb{R} .

Il en résulte que f est constante.

Puisque $f(5) = 5$, nous pouvons en conclure que $f : x \mapsto 5$.

3. Puisque $f(-1) = 3$, nous avons $3 = -a + b$, soit $b = 3 + a$, ce qui donne

$$f(-2) = -2a + b = -a + 3 \text{ et } f(1) = a + b = 2a + 3.$$

Comme $f(-2) \in \{0; 1; 4; 5\}$, nous en déduisons :

- $-a + 3 = 0$, soit $a = 3$,
- ou
- $-a + 3 = 1$, soit $a = 2$,
- ou
- $-a + 3 = 4$, soit $a = -1$,
- ou
- $-a + 3 = 5$, soit $a = -2$.

De plus $f(1) \in \{0; 1; 4; 5\}$, ce qui donne :

- $2a + 3 = 0$, soit $a = -\frac{3}{2}$,
- ou
- $2a + 3 = 1$, soit $a = -1$,
- ou :

- $2a + 3 = 4$, soit $a = \frac{1}{2}$,
ou
- $2a + 3 = 5$, soit $a = 1$.

Seule la valeur $a = -1$ est compatible avec les deux conditions

$$f(-2) \in \{0; 1; 4; 5\} \text{ et } f(1) \in \{0; 1; 4; 5\}.$$

Puisque $f(-1) = 3$, nous en déduisons que, pour tout réel x ,

$$f(x) = -x + b = -x + 2.$$

Réciproquement, nous vérifions que $f(-1) = 3$, $f(-2) = 4$ et $f(1) = 1$.

Exercice 3. Composition d'une fonction affine avec elle-même

Déterminer les fonctions affines f telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = 2x - 3.$$

Solution

Pour tout réel x , posons $f(x) = ax + b$.

Nous obtenons

$$f(f(x)) = af(x) + b = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b.$$

Pour tout réel x , nous en déduisons

$$f(f(x)) = 2x - 3 \text{ équivaut à } a^2x + (a + 1)b = 2x - 3.$$

En particulier pour $x = 0$, nous obtenons $(a + 1)b = -3$.

En particulier pour $x = 1$, il vient $a^2 + b(a + 1) = -1$, soit $a^2 = 2$.

Le système

$$\begin{cases} a^2 = 2 \\ b(a + 1) = -3 \end{cases}$$

a pour solutions

$$\begin{cases} a = -\sqrt{2} \\ b = \frac{-3}{-\sqrt{2} + 1} = 3(1 + \sqrt{2}) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = \frac{-3}{\sqrt{2} + 1} = 3(1 - \sqrt{2}) \end{cases}.$$

Nécessairement, nous obtenons les deux fonctions affines suivantes :

$$x \mapsto -\sqrt{2}x + 3(1 + \sqrt{2}) \text{ ou } x \mapsto \sqrt{2}x + 3(1 - \sqrt{2}).$$

Réciproquement, nous avons,

si, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\sqrt{2}x + 3(1 + \sqrt{2})$, alors

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= -\sqrt{2}(-\sqrt{2}x + 3(1 + \sqrt{2})) + 3(1 + \sqrt{2}), \\ f(f(x)) &= 2x - 3\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) + 3(1 + \sqrt{2}) = 2x - 3. \end{aligned}$$

si, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2}x + 3(1 - \sqrt{2})$, alors

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= \sqrt{2}(\sqrt{2}x + 3(1 - \sqrt{2})) + 3(1 - \sqrt{2}), \\ f(f(x)) &= 2x + 3\sqrt{2}(1 - \sqrt{2}) + 3(1 - \sqrt{2}) = 2x - 3. \end{aligned}$$

Nous en concluons que les deux fonctions affines qui conviennent sont

$$x \mapsto -\sqrt{2}x + 3(1 + \sqrt{2}) \text{ ou } x \mapsto \sqrt{2}x + 3(1 - \sqrt{2}).$$

Exercice 4. Une équation fonctionnelle

Trouver toutes les fonction affines f telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = f(x).$$

Solution

Pour tout réel x , posons $f(x) = ax + b$.

Nous cherchons pour quelles valeurs des réels a et b , on a, pour tout réel x ,

$$a(ax + b) + b = ax + b, \text{ soit } a^2x + ab + b = ax + b.$$

En particulier, pour $x = 0$ et pour $x = 1$, nous obtenons le système

$$\begin{cases} ab + b = b \\ a^2 + ab + b = a + b \end{cases},$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{cases} ab = 0 \\ a^2 + ab = a \end{cases},$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ 0b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 0 \\ a^2 = a \end{cases},$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases}.$$

Les fonctions affines qui en résultent sont :

$$x \mapsto b \text{ ou } x \mapsto 0 \text{ ou } x \mapsto x,$$

c'est-à-dire

$$x \mapsto x \text{ ou } x \mapsto b, \text{ avec } b \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, nous vérifions que les fonctions $x \mapsto x$ ou $x \mapsto b$, avec $b \in \mathbb{R}$, satisfont à

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = f(x).$$

Nous en concluons que les fonctions affines qui conviennent sont les fonctions

$$x \mapsto b, \text{ avec } b \in \mathbb{R} \text{ et } x \mapsto x.$$

Exercice 5. Composée de deux fonctions affines

Soient a et b deux réels.

On désigne par $f_{a,b}$ la fonction affine définie sur \mathbb{R} par $f_{a,b}(x) = ax + b$.

Soient a, b, a' et b' quatre réels. Aux fonctions affines $f_{a,b}$ et $f_{a',b'}$, on associe la fonction notée $f_{a,b} \circ f_{a',b'}$, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f_{a,b} \circ f_{a',b'})(x) = f_{a,b}(f_{a',b'}(x)).$$

1. Calculer, pour tout réel x , $(f_{-1,2} \circ f_{2,3})(x)$ puis $(f_{2,3} \circ f_{-1,2})(x)$.

Que remarquez-vous ?

2. Montrer que $f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{aa',ab'+b}$.

3. A-t-on $f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{a',b'} \circ f_{a,b}$?

4. Déterminer $f_{a,b} \circ f_{1,0}$ puis $f_{1,0} \circ f_{a,b}$.

5. Montrer que, pour tous réels les a et b tels que $a \neq 0$, il existe deux réels α et β tels que $f_{a,b} \circ f_{\alpha,\beta} = f_{1,0}$.

6. En déduire $f_{\alpha,\beta} \circ f_{a,b}$.

Solution

1. Pour tout réel x , nous avons

$$(f_{-1,2} \circ f_{2,3})(x) = f_{-1,2}(f_{2,3}(x)) = -f_{2,3}(x) + 2 = -(2x + 3) + 2 = -2x - 1.$$

De la même façon, nous obtenons

$$(f_{2,3} \circ f_{-1,2})(x) = f_{2,3}(f_{-1,2}(x)) = 2f_{-1,2}(x) + 3 = 2(-x + 2) + 3 = -2x + 7.$$

Nous remarquons que, pour tout réel x ,

$$(f_{-1,2} \circ f_{2,3})(x) \neq (f_{2,3} \circ f_{-1,2})(x).$$

2. Pour tout réel x , nous obtenons

$$\begin{aligned}(f_{a,b} \circ f_{a',b'})(x) &= f_{a,b}(f_{a',b'}(x)) = af_{a',b'}(x) + b = a(a'x + b') + b, \\ (f_{a,b} \circ f_{a',b'})(x) &= aa'x + ab' + b = f_{aa',ab'+b}(x).\end{aligned}$$

En appliquant la définition de l'égalité de deux fonctions, nous en concluons

$$f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{aa',ab'+b}.$$

3. La réponse est non. La question 2 nous fournit un contre-exemple.

Remarque

Désignons par \mathcal{A} , l'ensemble des fonctions affines. Nous énonçons que \circ est une opération interne dans \mathcal{A} , ce qui signifie que, pour toutes fonctions $f_{a,b}$ et $f_{a',b'}$ appartenant à \mathcal{A} , nous avons prouvé que $f_{a,b} \circ f_{a',b'} \in \mathcal{A}$.

Mais d'après la question 1, cette opération n'est pas commutative.

Par contre, on peut montrer que \circ est associative, en vérifiant

$$(f_{a,b} \circ f_{a',b'}) \circ f_{a'',b''} = f_{a,b} \circ (f_{a',b'} \circ f_{a'',b''}).$$

4. Pour déterminer $f_{a,b} \circ f_{1,0}$, nous utilisons la question 2, ce qui donne

$$f_{a,b} \circ f_{1,0} = f_{a \times 1, a \times 0 + b} = f_{a,b}.$$

De la même façon, nous justifions que $f_{1,0} \circ f_{a,b} = f_{a,b}$.

Remarque

La fonction $f_{1,0} : x \mapsto x$ est l'élément neutre de \mathcal{A} muni de l'opération \circ .

5. Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$. En utilisant la question 2, nous obtenons :

$$f_{a,b} \circ f_{\alpha,\beta} = f_{1,0} \Leftrightarrow f_{a\alpha, a\beta+b} = f_{1,0}.$$

En utilisant la définition de l'égalité de deux fonctions affines acquise dans l'exercice 1, nous obtenons le système

$$\begin{cases} a\alpha = 1 \\ a\beta + b = 0 \end{cases}.$$

Puisque $a \neq 0$, nous en déduisons que

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{a} \\ \beta = -\frac{b}{a} \end{cases}.$$

Réciproquement, nous vérifions

$$f_{a,b} \circ f_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}} = f_{a \times \frac{1}{a}, a \times (-\frac{b}{a}) + b} = f_{1,0}.$$

Nous en concluons que la fonction affine $f_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}$ répond à la question.

6. Nous avons, en utilisant à nouveau le résultat de la question 2,

$$f_{\alpha,\beta} \circ f_{a,b} = f_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}} \circ f_{a,b} = f_{\frac{1}{a} \times a, \frac{1}{a} \times b - \frac{b}{a}} = f_{1,0}.$$

Remarques

- Pour $a \in \mathbb{R}^*$, on dit que $f_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}$ est la fonction inverse ou réciproque de $f_{a,b}$.
- En désignant par \mathcal{A}^* l'ensemble des fonctions affines $f_{a,b}$ tel que $a \neq 0$, nous avons montré que \mathcal{A}^* est, pour l'opération de composition \circ , un groupe non commutatif.

6.5.2 Trinôme du second degré

Exercice 6. Étude d'un trinôme

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 2x + 2$.

1. Déterminer la forme canonique du trinôme $f(x)$.
2. En déduire les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $f(x) = 0$.
3. En déduire que f admet un extremum que l'on précisera.
4. En déduire le sens de variations de f .
5. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x - 1)$.
Quel est le sens de variation de g sur $[2, +\infty[$?
6. Comment déduire la représentation graphique de la fonction g à partir de celle de f ?

Solution

1. Pour tout réel x , nous avons

$$f(x) = -(x^2 - 2x - 2) = -(x^2 - 2x + 1 - 1 - 2) = -(x - 1)^2 + 3.$$

2. Nous avons

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow x - 1 = -\sqrt{3} \text{ ou } x - 1 = \sqrt{3}.$$

Nous en déduisons que les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $f(x) = 0$ sont

$$x = 1 - \sqrt{3} \text{ ou } x = 1 + \sqrt{3}.$$

3. Pour tout réel x , nous observons

$$f(x) - 3 = -(x - 1)^2.$$

Nous en déduisons

$$f(x) - 3 \leq 0, \text{ soit, pour tout réel } x, f(x) \leq 3,$$

ce qui justifie que le réel 3 est un maximum pour f .

Ce maximum est atteint en $x = 1$.

4. Étudions le sens de variation de f sur $[1, +\infty[$.

Soient a et b deux réels tels que $1 \leq a < b$.

Il vient : $0 \leq a - 1 < b - 1$.

Puisque la fonction carré est croissante sur \mathbb{R}^+ , nous obtenons

$$(a - 1)^2 < (b - 1)^2, \text{ ce qui donne,}$$

$$-(a - 1)^2 + 3 > -(b - 1)^2 + 3, \text{ soit } f(a) > f(b).$$

Nous en concluons que f est décroissante strictement sur $[1, +\infty[$.

De la même façon, la fonction f est croissante sur $] -\infty, 1]$.

5. Soient a et b deux réels appartenant à l'intervalle $[2, +\infty[$ tels que $a < b$.

Nous avons, $2 \leq a < b$.

Il en résulte que $1 \leq a - 1 < b - 1$.

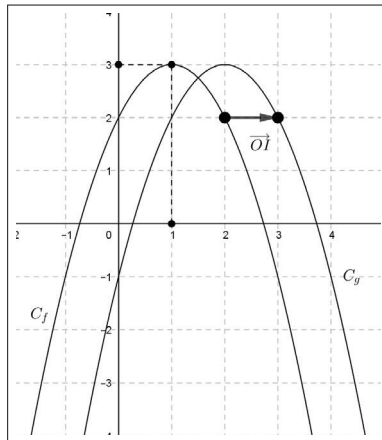
Puisque la fonction f est décroissante sur $[1, +\infty[$, nous en déduisons

$$f(a - 1) > f(b - 1), \text{ soit } g(a) > g(b).$$

Ceci prouve que la fonction g est décroissante strictement sur $[2, +\infty[$.

On démontre de même que g est croissante sur l'intervalle $] -\infty, 2]$.

6. La courbe C_g se déduit de C_f , en faisant agir sur cette dernière la translation de vecteur \vec{OI} .



Exercice 7. Fonction affine - Trinôme - Paramètre

Soit m un réel non nul.

On considère deux fonctions f et g définies, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = mx + 1 \text{ et } g(x) = mx^2 + 1.$$

1. Quel est, selon les valeurs du réel m , le sens de variation sur \mathbb{R} , de la fonction f ?
2. Quel est, selon les valeurs du réel m , le sens de variation de la fonction g sur $[0, +\infty[$?
3. En déduire, selon les valeurs du réel m , le sens de variation de g sur $] -\infty, 0]$.
4. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = g(x)$.
5. Montrer qu'il existe une unique valeur de m telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = x.$$

6. Montrer qu'il existe une unique valeur de m telle que $f(g(1)) = g(f(1))$.

Solution

1. Nous appliquons le cours sur les fonctions affines.
Si $m > 0$, alors f est croissante sur \mathbb{R} .
Si $m < 0$, alors f est décroissante sur \mathbb{R} .
2. Nous pouvons appliquer à nouveau le cours sur les fonctions trinômes.
Si $m > 0$, alors g est croissante sur $[0, +\infty[$.
Si $m < 0$, alors g est décroissante sur $[0, +\infty[$.
3. La fonction g est paire car pour tout réel x , on a

$$g(-x) = m(-x)^2 + 1 = mx^2 + 1 = g(x).$$

Il en résulte que :

si $m > 0$, alors g est décroissante sur $] -\infty, 0]$,

si $m < 0$, alors g est croissante sur $] -\infty, 0]$.

4. Désignons par [1] l'équation $f(x) = g(x)$. Nous avons

$$[1] \Leftrightarrow mx + 1 = mx^2 + 1,$$

$$[1] \Leftrightarrow m(x^2 - x) = 0.$$

Puisque $m \neq 0$, nous obtenons :

$$[1] \Leftrightarrow x(x-1) = 0,$$

$$[1] \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Nous en concluons que $S_{[1]} = \{0; 1\}$.

Remarque

Les solutions de cette équation prouvent que les courbes C_f et C_g se coupent en deux points de coordonnées $(0; 1)$ et $(1, m+1)$.

5. Pour tout réel x , nous avons

$$f(f(x)) = mf(x) + 1 = m(mx + 1) + 1 = m^2x + m + 1.$$

Nous en déduisons que si pour tout réel x ,

$$f(f(x)) = x, \text{ alors } m^2x + m + 1 = x.$$

En particulier, pour $x = 0$, nous obtenons

$$m + 1 = 0, \text{ soit } m = -1.$$

Ainsi, si f est telle que, pour tout réel x ,

$$f(f(x)) = x, \text{ alors } f(x) = -x + 1.$$

Réciproquement, si pour tout réel x , nous avons $f(x) = -x + 1$, alors

$$f(f(x)) = -f(x) + 1 = -(-x + 1) + 1 = x.$$

Nous en concluons que $m = -1$ est l'unique valeur du réel m tel que, pour tout réel x , $f(f(x)) = x$.

6. Nous avons d'une part,

$$f(g(1)) = mg(1) + 1 = m(m+1) + 1.$$

D'autre part, nous obtenons

$$g(f(1)) = m(f(1))^2 + 1 = m(m+1)^2 + 1.$$

Désignons par [2] l'équation $f(g(1)) = g(f(1))$. Il vient

$$[2] \Leftrightarrow m(m+1) = m(m+1)^2.$$

Puisque que $m \neq 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
[2] &\Leftrightarrow m + 1 = (m + 1)^2, \\
[2] &\Leftrightarrow (m + 1)(m + 1 - 1) = 0, \\
[2] &\Leftrightarrow (m + 1)m = 0.
\end{aligned}$$

À nouveau, puisque $m \neq 0$, nous obtenons $m = -1$.

Nous en concluons que $m = -1$ est aussi l'unique valeur de m telle que

$$f(g(1)) = g(f(1)).$$

Exercice 8. Intersection d'une parabole et d'une droite

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 3x - 4$.

Étudier l'intersection de la courbe représentative C_f de la fonction f avec la droite (d) d'équation $y = x - a$, où a est un réel donné.

Contrôler graphiquement.

Solution

Les coordonnées (x, y) d'un point appartenant à $C_f \cap (d)$ satisfont au système

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x - 4 \\ y = x - a \end{cases}.$$

Nous en déduisons l'équation aux abscisses, $x^2 + 3x - 4 = x - a$, notée $[a]$.

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
[a] &\Leftrightarrow x^2 + 2x + a - 4 = 0, \\
[a] &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 + a - 4 = 0, \\
[a] &\Leftrightarrow (x + 1)^2 + a - 5 = 0, \\
[a] &\Leftrightarrow (x + 1)^2 = 5 - a.
\end{aligned}$$

Nous distinguons par disjonction 3 cas.

1^{er} cas : $5 - a < 0$, soit $a > 5$.

Un carré est positif ou nul donc $S_{[a]} = \emptyset$.

Par suite, nous en concluons que $C_f \cap (d) = \emptyset$.

2^e cas : $5 - a = 0$, soit $a = 5$.

Dans ce cas, nous avons

$$[a] \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1,$$

ce qui donne $S_{[5]} = \{-1\}$.

Nous en concluons que $C_f \cap (d) = \{A\}$, avec $A(-1, -6)$.

3^e cas : $5 - a > 0$, soit $a < 5$.

$$[a] \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{5 - a} \text{ ou } x + 1 = -\sqrt{5 - a},$$

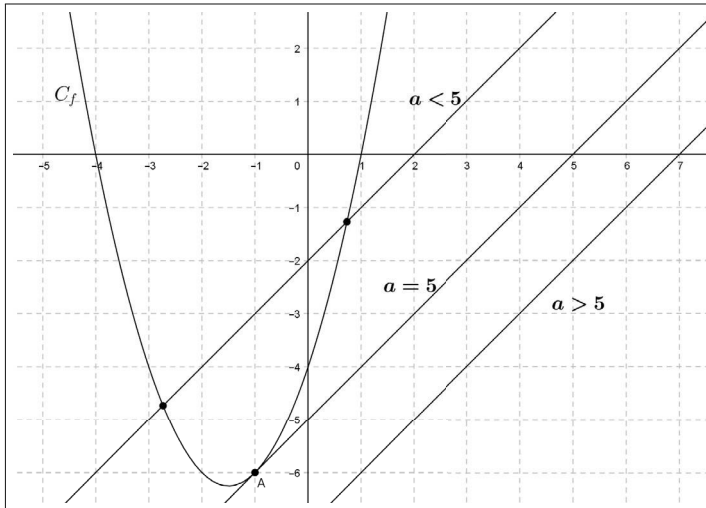
$$[a] \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{5 - a} \text{ ou } x = -1 - \sqrt{5 - a}.$$

L'équation $[a]$ admet deux solutions distinctes. Nous obtenons

$$S_{[a]} = \{-1 - \sqrt{5 - a}, -1 + \sqrt{5 - a}\}.$$

Nous en concluons que $C_f \cap (d)$ est réduit à deux points dont les abscisses sont les deux solutions obtenues ci-dessus.

Nous contrôlons graphiquement avec GeoGebra.



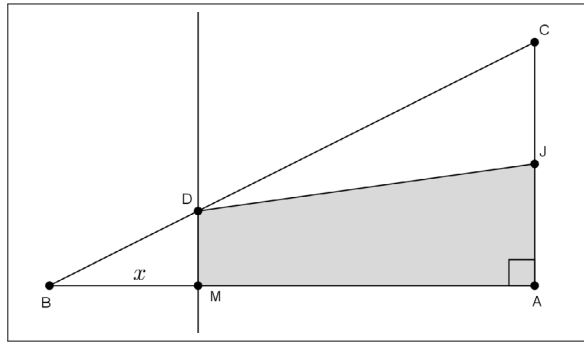
Lorsque $a = 5$, nous observons que la droite (d) est tangente en A à la parabole C_f .

Exercice 9. Optimisation

Soit $a > 0$ un réel donné. On considère le triangle BAC rectangle en A tel que $AB = 2a$ et $AC = a$.

On désigne par :

- J le milieu du segment $[AC]$.
- M un point quelconque du segment $[AB]$ tel que $BM = x$.
- D le point d'intersection de la parallèle à (AC) passant par M avec la droite (BC) .



1. À quel intervalle I le réel x appartient-il ?
2. Calculer MD en fonction de x . Que remarquez-vous ?
3. On désigne par $s(x)$ l'aire du trapèze $AMDJ$.
Justifier que, quel que soit $x \in I$, $s(x) = \frac{1}{4}(x+a)(2a-x)$.
4. Pour quelle valeur du réel x , l'aire du trapèze $AMDJ$ est-elle maximale ?
5. Où placer le point M sur le segment $[AB]$ afin que l'aire du trapèze $AMDJ$ soit égale à la moitié de l'aire du triangle BAC ?

Solution

1. Clairement, puisque $M \in [AB]$, nous observons que $x \in I = [0, 2a]$.
2. Les droites (MD) et (AC) sont parallèles. Nous appliquons le théorème de Thalès dans le triangle BAC . Il vient

$$\frac{MD}{AC} = \frac{BM}{BA}.$$

Nous en déduisons

$$\frac{MD}{a} = \frac{x}{2a}.$$

Nous en concluons

$$MD = \frac{x}{2}.$$

Nous remarquons que la distance MD ne dépend pas du réel a .

3. Soit $x \in I$. Nous appliquons la formule bien connue $\frac{(B+b)h}{2}$ qui restitue l'aire d'un trapèze, ce qui donne

$$s(x) = \frac{(MD + AJ)MA}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{a}{2}\right)(2a - x) = \frac{1}{4}(x+a)(2a-x).$$

4. Nous commençons par développer le trinôme $s(x)$ puis nous déterminons sa forme canonique.

Pour tout réel $x \in I$, il vient :

$$s(x) = \frac{1}{4}(-x^2 + ax + 2a^2) = -\frac{1}{4}(x^2 - ax - 2a^2),$$

ce qui donne

$$s(x) = -\frac{1}{4}\left(x^2 - 2 \times \left(\frac{a}{2}\right)x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2a^2\right),$$

$$s(x) = -\frac{1}{4}\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - 2a^2\right].$$

Finalement, nous obtenons

$$\forall x \in [0, 2a], s(x) = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{9a^2}{16}.$$

Nous en déduisons que

$$s(x) - \frac{9a^2}{16} = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \leq 0.$$

Puisque $\frac{9a^2}{16} = s\left(\frac{a}{2}\right)$, nous obtenons

$$\forall x \in [0, 2a], s(x) \leq s\left(\frac{a}{2}\right).$$

Nous avons ainsi prouvé que la fonction $x \mapsto s(x)$ atteint un maximum en $x = \frac{a}{2}$.

Nous en concluons que l'aire du trapèze $AMDJ$ est maximale pour $x = \frac{a}{2}$.

5. Il s'agit de résoudre, dans l'intervalle $[0, 2a]$, l'équation notée (e) telle que

$$s(x) = \frac{1}{2} \times \frac{a \times 2a}{2}.$$

De la question précédente, il résulte que

$$(e) \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{9a^2}{16} = \frac{a^2}{2},$$

$$(e) \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{16},$$

$$(e) \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

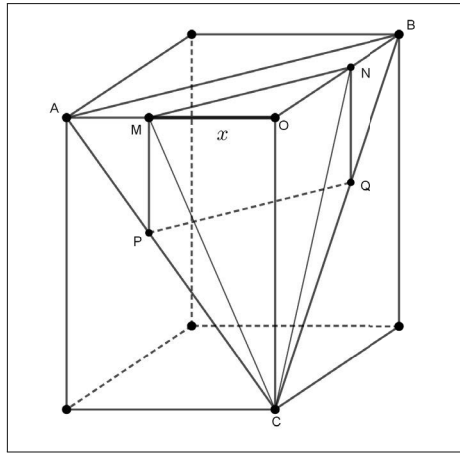
$$(e) \Leftrightarrow x - \frac{a}{2} = -\frac{a}{2} \text{ ou } x - \frac{a}{2} = \frac{a}{2},$$

$$(e) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = a.$$

Nous en concluons que l'aire du trapèze $AMDJ$ est égale à la moitié de l'aire du triangle BAC si et seulement si $M = B$ ou M est le milieu du segment $[AB]$.

Exercice 10. Optimisation dans un pavé droit

Le pavé droit ci-dessous est tel que $OA = OB = a > 0$ et $OC = b > 0$



Soit $M \in [OA]$. On désigne par

- N le point de $[OB]$ tel que $(MN) \parallel (AB)$,
- P le point de $[AC]$ tel que $(MP) \parallel (OC)$,
- Q le point de $[BC]$ tel que $(NQ) \parallel (OC)$.

Nous admettons que le quadrilatère $PMNQ$ est un rectangle.

1. On pose $OM = x$, avec $0 < x < a$. On désigne par $S(x)$ l'aire du rectangle $PMNQ$. Montrer que $S(x) = \frac{b\sqrt{2}}{a}x(a-x)$.

2. Déterminer la position du point M sur $[OA]$ pour que l'aire du rectangle $PMNQ$ soit maximale.

Calculer dans ce cas le volume du tétraèdre $MNOC$.

Solution

1. Soit $x \in]0, a[$. Nous avons

$$S(x) = MP \times MN.$$

▷ Calcul de MN .

Nous appliquons le théorème de Thalès dans le triangle OAB relativement aux droites parallèles (MN) et (AB) .

Nous obtenons

$$\frac{OM}{OA} = \frac{MN}{AB} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{MN}{a\sqrt{2}}.$$

Nous en déduisons

$$MN = x\sqrt{2}.$$

▷ Calcul de MP .

Nous appliquons le théorème de Thalès dans le triangle OAC relativement aux droites parallèles (MP) et (OC) . Nous obtenons

$$\frac{AM}{OA} = \frac{MP}{OC} \Leftrightarrow \frac{a-x}{a} = \frac{MP}{b},$$

ce qui donne

$$MP = \frac{b}{a}(a-x).$$

Nous en concluons que, pour tout réel $x \in]0, a[$

$$S(x) = \frac{b\sqrt{2}}{a}x(a-x).$$

2. ▷ Pour tout $x \in]0, a[$, nous avons

$$S(x) = -\frac{b\sqrt{2}}{a}(x^2 - ax).$$

Ainsi nous sommes en présence d'un trinôme du second degré qu'il nous reste à mettre sous sa forme canonique. Nous obtenons

$$S(x) = -\frac{b\sqrt{2}}{a}\left(x^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = -\frac{b\sqrt{2}}{a}\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right].$$

Nous en déduisons

$$S(x) = -\frac{b\sqrt{2}}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{ab\sqrt{2}}{4}.$$

Il en résulte que

$$S(x) - \frac{ab\sqrt{2}}{4} = -\frac{b\sqrt{2}}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2,$$

ce qui implique

$$S(x) - \frac{ab\sqrt{2}}{4} \leq 0,$$

soit,

$$\forall x \in]0, a[, S(x) \leq \frac{ab\sqrt{2}}{4}.$$

Nous en concluons que

- La fonction $x \mapsto S(x)$ atteint un maximum en $x = \frac{a}{2}$.
- Ce maximum est égal à $S\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{ab\sqrt{2}}{4}$.
- Le maximum de l'aire du rectangle $PMNQ$ est atteint au milieu de segment $[OA]$.

▷ Lorsque $OM = \frac{a}{2}$, le volume V du tétraèdre $MNOC$ est obtenu par les égalités

$$V = \frac{1}{3} \times OM \times ON \times OC = \frac{1}{3} \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times b = \frac{a^2b}{12}.$$

Exercice 11. Second degré - Troisième degré

ALGO

Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \text{ et } g(x) = x^3 - 3x + 2.$$

1. Calculer les images par g des réels 0 et 1.
2. Déterminer les antécédents par f du réel 1.
3. Calculer $g(f(1)) - f(g(1))$.
4. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes C_f et C_g .
Contrôler graphiquement.
5. Justifier que, pour tout réel x , $f(x) \geq -\frac{1}{4}$.
6. En remarquant que, pour tout réel x , $g(x) = g(x) - g(1)$, montrer qu'il existe un trinôme p du second degré tel que $g(x) = (x-1)p(x)$.
7. En déduire les solutions dans \mathbb{R} des équations suivantes :

$$[1] \quad g(x) = 0.$$

$$[2] \quad g(f(x)) = 0.$$

8. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(f(x)) - f(g(x)) = -9x^5 + 39x^4 - 64x^3 + 54x^2 - 24x + 4.$$

Donner une solution de l'équation

$$-9x^5 + 39x^4 - 64x^3 + 54x^2 - 24x + 4 = 0.$$

Contrôler graphiquement le nombre de solutions de cette équation.

Donner les valeurs approchées à 10^{-3} près des solutions non entières de cette équation.

Solution

1. Nous avons $g(0) = 2$ et $g(1) = 0$.
2. Nous résolvons l'équation $f(x) = 1$. Nous avons

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Puisque,

$$x^2 - 3x + 1 = x^2 - 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4},$$

nous en déduisons

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}, \\ f(x) = 1 &\Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \\ f(x) = 1 &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Il en résulte que les antécédents de 1 par f sont les réels

$$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

3. Nous avons

$$g(f(1)) - f(g(1)) = g(0) - f(0) = 2 - 2 = 0.$$

4. Les coordonnées (x, y) d'un point appartenant à $C_f \cap C_g$ satisfont au système

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = x^3 - 3x + 2 \end{cases}.$$

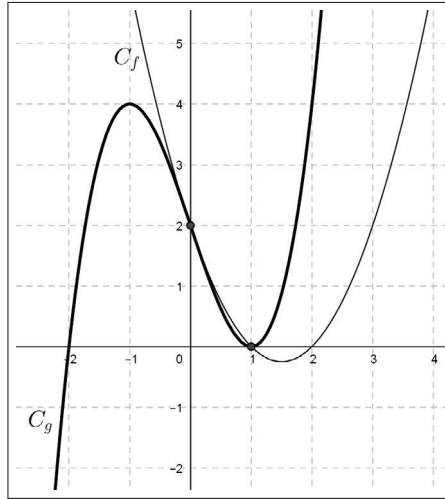
Nous en déduisons l'équation aux abscisses $x^3 - 3x + 2 = x^2 - 3x + 2$, notée $[a]$.

Nous obtenons

$$\begin{aligned} [a] &\Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0, \\ [a] &\Leftrightarrow x^2(x - 1) = 0, \\ [a] &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Nous en concluons que $C_f \cap C_g$ est réduit à deux points de coordonnées $(0, 2)$ et $(1, 0)$.

Contrôle graphique.



5. Pour tout réel x , nous avons

$$f(x) + \frac{1}{4} = x^2 - 3x + 2 + \frac{1}{4} = x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0,$$

ce qui permet de conclure,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq -\frac{1}{4}.$$

6. Pour tout réel x , on a

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x) - g(1) = x^3 - 3x + 2 - (1^3 - 3 \times 1 + 2) = x^3 - 1^3 - 3(x - 1), \\ g(x) &= (x - 1)(x^2 + x + 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x - 2). \end{aligned}$$

En posant $p(x) = x^2 + x - 2$, nous obtenons

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (x - 1)p(x).$$

7.

▷ Résolution de l'équation [1].

$$[1] \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } p(x) = 0.$$

Déterminons une factorisation de $p(x)$, en remarquant que $p(1) = 0$ et en s'inspirant de la question 5.

C'est une autre méthode pour résoudre une équation du second degré lorsque l'on observe une solution évidente.

Pour tout réel x , nous avons :

$$p(x) = p(x) - p(1) = x^2 + x - 2 - (1^2 + 1 - 2) = x^2 - 1 + (x - 1),$$

$$p(x) = (x - 1)(x + 1) + (x - 1) = (x - 1)(x + 2).$$

Nous en déduisons

$$[1] \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -2.$$

Nous en concluons que $S_{[1]} = \{-2; 1\}$.

Remarque

Pour tout réel x , nous observons que $g(x) = (x - 1)^2(x + 2)$.

▷ Résolution de l'équation [2].

En utilisant les solutions de l'équation [1], il vient

$$[2] \Leftrightarrow g(f(x)) = 0,$$

$$[2] \Leftrightarrow f(x) = 1 \text{ ou } f(x) = -2.$$

Les solutions de l'équation $f(x) = 1$ ont été obtenues à la question 2.

L'équation $f(x) = -2$ n'a pas de solution car nous savons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq -\frac{1}{4}.$$

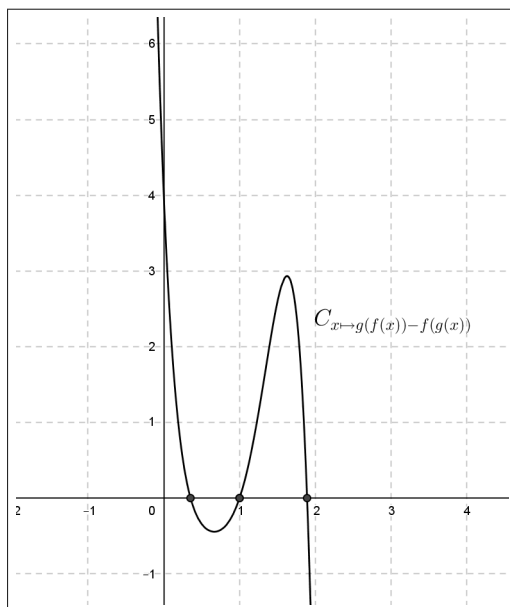
Nous en déduisons que $S_{[2]} = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right\}$.

8. ▷ D'après la question 3, $x = 1$ est une solution de l'équation

$$g(f(x)) - f(g(x)) = 0.$$

▷ Contrôle graphique.

Nous dénombrons 3 solutions distinctes.



▷ Nous utilisons la fonction Python `dicho(f,a,b,p)`.

```
def f(x) :
    return -9*x**5+39*x**4-64*x**3+54*x**2-24*x+4
def dicho(f, a, b, p):
    while b-a>10*(-p):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return(b)
```

Les localisations graphiques des deux solutions non entières donnent après exécution du programme,

```
>>> dicho(f,0,1,3)
```

0.3525390625, soit 0,353 arrondi 10^{-3} près.

```
>>> dicho(f,1,2,3)
```

1.8916015625, soit 1,892 arrondi 10^{-3} près.

Exercice 12. Une bijection

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 3x$.

1. Justifier que, pour tout réel x , $f(x) \geq -\frac{9}{4}$.

2. Montrer que f est une bijection de l'intervalle $[\frac{3}{2}, +\infty[$ sur $[-\frac{9}{4}, +\infty[$.

3. Soit g la fonction définie sur $[-\frac{9}{4}, +\infty[$ par $g(x) = \frac{3}{2} + \sqrt{x + \frac{9}{4}}$.

Calculer, pour $x \geq -\frac{9}{4}$, le réel $f(g(x))$.

Calculer, pour $x \geq \frac{3}{2}$, le réel $g(f(x))$.

Représenter graphiquement la fonction f restreinte à l'intervalle $[\frac{3}{2}, +\infty[$ et la fonction g sur une même figure. Quelle observation peut-on faire ?

Solution

1. Pour tout réel x , nous avons

$$f(x) + \frac{9}{4} = x^2 - 3x + \frac{9}{4} = (x - \frac{3}{2})^2 \geq 0,$$

ce qui justifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq -\frac{9}{4}.$$

2. Soit $b \in [-\frac{9}{4}, +\infty[$. Nous résolvons dans l'intervalle $[\frac{3}{2}, +\infty[$ l'équation $f(x) = b$, notée (e). Nous avons

$$(e) \Leftrightarrow x^2 - 3x = b,$$

$$(e) \Leftrightarrow x^2 - 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = b,$$

$$(e) \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = b + \frac{9}{4}.$$

1^e cas : $b + \frac{9}{4} = 0$, soit $b = -\frac{9}{4}$.

Dans ce cas, nous avons

$$(e) \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Le réel $b = -\frac{9}{4}$ admet donc par f un unique antécédent $\frac{3}{2} \in [\frac{3}{2}, +\infty[$.

2^e cas : $b + \frac{9}{4} > 0$, soit $b > -\frac{9}{4}$.

$$(e) \Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = -\sqrt{b + \frac{9}{4}} \text{ ou } x - \frac{3}{2} = \sqrt{b + \frac{9}{4}},$$

$$(e) \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} - \sqrt{b + \frac{9}{4}} \text{ ou } x = \frac{3}{2} + \sqrt{b + \frac{9}{4}}.$$

La solution $x = \frac{3}{2} - \sqrt{b + \frac{9}{4}} < \frac{3}{2}$ ne convient pas.

Dans ce cas, nous en concluons que le réel $b > -\frac{9}{4}$ admet par f un unique antécédent $x = \frac{3}{2} + \sqrt{b + \frac{9}{4}} > \frac{3}{2}$.

L'étude de ces deux cas permet d'affirmer que f est une bijection de l'intervalle $[\frac{3}{2}, +\infty[$ sur $[-\frac{9}{4}, +\infty[$.

3. \triangleright Soit $x \in [-\frac{9}{4}, +\infty[$. Nous avons

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (g(x))^2 - 3g(x) = g(x)(g(x) - 3), \\ f(g(x)) &= \left(\frac{3}{2} + \sqrt{x + \frac{9}{4}}\right) \left(\frac{3}{2} + \sqrt{x + \frac{9}{4}} - 3\right), \\ f(g(x)) &= \left(\sqrt{x + \frac{9}{4}} + \frac{3}{2}\right) \left(\sqrt{x + \frac{9}{4}} - \frac{3}{2}\right), \\ f(g(x)) &= \left(\sqrt{x + \frac{9}{4}}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = x. \end{aligned}$$

Nous en concluons

$$\forall x \in \left[-\frac{9}{4}, +\infty[, f(g(x)) = x.$$

▷ Soit $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty[$. Il vient

$$g(f(x)) = \frac{3}{2} + \sqrt{f(x) + \frac{9}{4}} = \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 - 3x + \frac{9}{4}} = \frac{3}{2} + \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} + \left|x - \frac{3}{2}\right|.$$

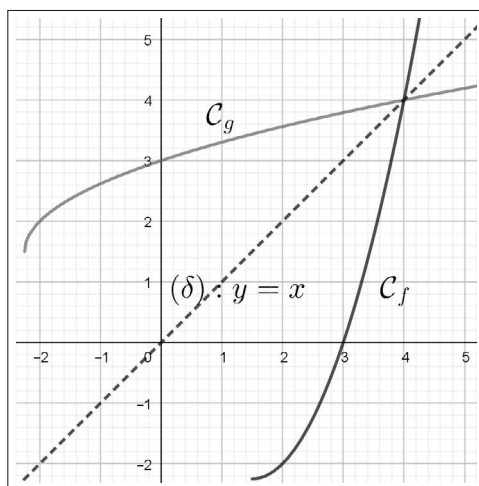
Puisque $x \geq \frac{3}{2}$, nous obtenons

$$g(f(x)) = \frac{3}{2} + x - \frac{3}{2} = x.$$

Nous en concluons

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty[, g(f(x)) = x.$$

▷ En utilisant par exemple le logiciel GeoGebra, nous observons sur la figure qui suit que les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sont symétriques relativement à la droite (δ) d'équation $y = x$.



6.5.3 Fonction homographique

Exercice 13. Étude d'une fonction homographique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 1}$.

1. Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel $x \neq 1$

$$f(x) = a + \frac{b}{x - 1}.$$

2. Déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

3. Le réel 2 admet-il des antécédents par la fonction f ?

4. Déterminer l'ensemble des réels $x \neq 1$ tels que $0 \leq f(x) < 2$.

Contrôler graphiquement.

5. Déterminer l'intersection de la courbe C_f avec la droite (d) d'équation $y = 5 - x$. Contrôler graphiquement.

6. Pour tout réel h non nul, justifier que le réel $f(1 - h) + f(1 + h)$ ne dépend pas de h . Interpréter géométriquement ce résultat.

Solution

1. Pour tout réel $x \neq 1$, nous avons

$$f(x) = \frac{2x - 2 + 2 - 1}{x - 1} = \frac{2(x - 1)}{x - 1} + \frac{1}{x - 1} = 2 + \frac{1}{x - 1}.$$

Ainsi les réels $a = 2$ et $b = 1$ conviennent.

2. Soient a et b deux réels tels que $1 < a < b$.

Nous avons $0 < a - 1 < b - 1$.

Puisque la fonction inverse est décroissante strictement sur $]0, +\infty[$, nous en déduisons

$$\frac{1}{a - 1} > \frac{1}{b - 1}.$$

Il en résulte que

$$2 + \frac{1}{a - 1} > 2 + \frac{1}{b - 1}, \text{ soit } f(a) > f(b),$$

ce qui prouve que, sur l'intervalle $]1, +\infty[$, la fonction f est décroissante strictement.

Remarque

Nous montrons de la même façon que f est décroissante strictement sur $] - \infty, 1[$.

3. Nous résolvons sur $\mathbb{R} - \{1\}$ l'équation $f(x) = 2$. Il vient

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x - 1} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x - 1} = 0.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, on a $\frac{1}{x - 1} \neq 0$.

Nous en déduisons que 2 n'a pas d'antécédent par la fonction f .

4. Nous avons

$$0 \leq f(x) < 2 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \text{ et } f(x) < 2.$$

▷ Résolution de l'inéquation $f(x) \geq 0$ notée [1].

Nous formons le tableau de signe du quotient $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
signe de $2x-1$	$-$	0	$+$	$+$
signe de $x-1$	$-$	$-$	0	$+$
signe de $f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Il en résulte $S_{[1]} =]-\infty, \frac{1}{2}] \cup]1, +\infty[$.

▷ Résolution de l'inéquation $f(x) < 2$ notée [2].

En utilisant la question 1, nous obtenons

$$f(x) < 2 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x-1} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

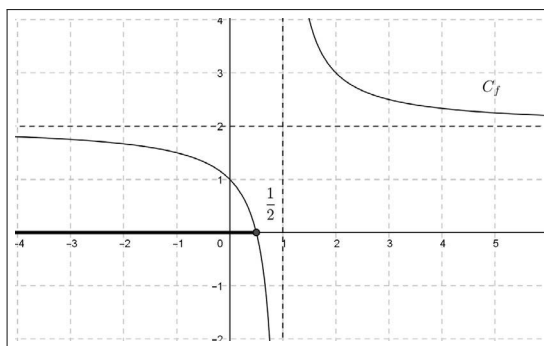
Nous en déduisons que $S_{[2]} =]-\infty, 1[$.

▷ Désignons par S l'ensemble des réels $x \neq 1$ tels que $0 \leq f(x) < 2$.

Nous avons

$$S = S_{[1]} \cap S_{[2]} = (]-\infty, \frac{1}{2}] \cup]1, +\infty[) \cap]-\infty, 1[=]-\infty, \frac{1}{2}].$$

▷ Nous contrôlons graphiquement avec GeoGebra.



5. ▷ Les coordonnées (x, y) d'un point appartenant à $C_f \cap (d)$ satisfont au système

$$\begin{cases} y = \frac{2x-1}{x-1} \\ y = 5-x \end{cases}.$$

Nous en déduisons l'équation aux abscisses :

$$\frac{2x-1}{x-1} = 5-x, \text{ notée } [a]$$

ce qui donne

$$[a] \Leftrightarrow 2x-1 = (x-1)(5-x),$$

$$[a] \Leftrightarrow 2x-1 = 6x-x^2-5,$$

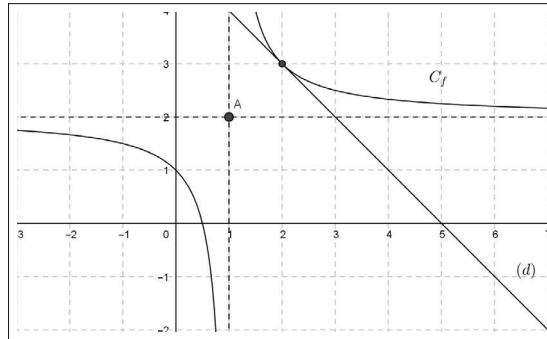
$$[a] \Leftrightarrow x^2-4x+4=0,$$

$$[a] \Leftrightarrow (x-2)^2=0,$$

$$[a] \Leftrightarrow x=2.$$

Nous en concluons que $C_f \cap (d)$ est réduit à un unique point de coordonnées $(2, 3)$.

▷ Contrôle graphique.



Remarque

La droite (d) est tangente à la courbe C_f au point de coordonnées $(2, 3)$.

6. ▷ Soit h un réel non nul.

Nous avons

$$f(1-h) + f(1+h) = 2 + \frac{1}{1-(1-h)} + 2 + \frac{1}{1-(1+h)} = 4 + \frac{1}{h} - \frac{1}{h} = 4.$$

Nous justifions ainsi que, pour tout réel $h \neq 0$, le réel $f(1-h) + f(1+h)$ ne dépend pas de h .

▷ Interprétation géométrique.

Pour $h \neq 0$, les points $M(1-h, f(1-h))$ et $M'(1+h, f(1+h))$ appartiennent à la courbe C_f .

Considérons le point $A(1, 2)$ qui est le centre de l'hyperbole C_f .

Ce point est le milieu du segment $[MM']$ car :

$$\begin{cases} \frac{1+h+1-h}{2} = 1 = x_A \\ \frac{f(1+h) + f(1-h)}{2} = 2 = y_A \end{cases} .$$

Ceci prouve que, si $f(x_A - h) + f(x_A + h) = 2y_A$, alors A est le centre de symétrie de la courbe C_f .

Réciproquement, nous prouvons que si A est le centre de symétrie de la courbe C_f , alors

$$f(x_A - h) + f(x_A + h) = 2y_A.$$

Exercice 14. Fonction homographique avec un paramètre

Soit m un réel strictement positif et g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2m\}$ par

$$g(x) = \frac{x + m}{x - 2m}.$$

On désigne par C_g la représentation graphique de la fonction g .

1. Montrer qu'il existe un point B tel que, quel que soit $m > 0$, $B \in C_g$.

En d'autres termes, montrer que la courbe passe par un point B dont les coordonnées sont indépendantes du réel m .

2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $] -\infty, 2m[$.

3. En déduire comment comparer les réels $g(0)$ et $g(g(0))$?

Solution

1. Nous remarquons que

$$g(0) = \frac{m}{-2m} = -\frac{1}{2},$$

ce qui prouve que, quel que soit $m > 0$, le point $B(0, -\frac{1}{2})$ appartient à C_g .

2. Déterminons d'abord la forme canonique de la fonction homographique g . Pour tout réel $x \neq 2m$, nous avons

$$g(x) = \frac{x - 2m + 2m + m}{x - 2m} = 1 + \frac{3m}{x - 2m}.$$

Soient deux réels a et b appartenant à $] -\infty, 2m[$ tels que $a < b$.

Nous avons donc $a < b < 2m$, soit $a - 2m < b - 2m < 0$.

Puisque la fonction inverse est décroissante strictement sur $] -\infty, 0[$, il vient

$$\frac{1}{a - 2m} > \frac{1}{b - 2m}.$$

Puisque $m > 0$, nous en déduisons que

$$1 + \frac{3m}{a - 2m} > 1 + \frac{3m}{b - 2m}, \text{ c'est-à-dire } g(a) > g(b).$$

Ainsi la fonction g est décroissante strictement sur $] - \infty, 2m[$.

3. Puisque $m > 0$, les réels 0 et $-\frac{1}{2}$ appartiennent à $] - \infty, 2m[$.

Comme $-\frac{1}{2} < 0$, nous en déduisons, par décroissance de g sur $] - \infty, 2m[$, que $g(-\frac{1}{2}) > g(0)$.

De plus nous savons que $g(0) = -\frac{1}{2}$, ce qui justifie l'inégalité

$$g(g(0)) > g(0).$$

Exercice 15. Fonction homographique - Bijection - Paramètre

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{3x - 2}{x - 2}$.

- Déterminer l'image par f du réel $\sqrt{3} + 1$.
- Quel est l'ensemble des antécédents du réel $\sqrt{3}$ par la fonction f ?
- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R} - \{2\}$ sur une partie de \mathbb{R} que l'on précisera.

Plus généralement, a est un réel donné non nul et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $g(x) = \frac{ax - 2}{x - 2}$.

- Selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}^*$, étudier le signe de $g(x)$.
- Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}^*$, a-t-on : $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, g(g(x)) = g(x)$?

Solution

1. Nous avons

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3} + 1) &= \frac{3(\sqrt{3} + 1) - 2}{\sqrt{3} + 1 - 2} = \frac{3\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(3\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}, \\ f(\sqrt{3} + 1) &= \frac{10 + 4\sqrt{3}}{2} = 5 + 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

2. Nous résolvons dans $\mathbb{R} - \{2\}$ l'équation $f(x) = \sqrt{3}$, notée [2]. Il vient

$$\begin{aligned} [2] &\Leftrightarrow 3x - 2 = \sqrt{3}(x - 2), \\ [2] &\Leftrightarrow 3x - x\sqrt{3} = 2 - 2\sqrt{3}, \\ [2] &\Leftrightarrow x(3 - \sqrt{3}) = 2(1 - \sqrt{3}), \\ [2] &\Leftrightarrow x = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{3 - \sqrt{3}} = \frac{2(1 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Nous en concluons que l'ensemble des antécédents de $\sqrt{3}$ est réduit à un seul élément qui est égal à $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. Soit b un réel donné. Nous résolvons dans $\mathbb{R} - \{2\}$ l'équation $f(x) = b$, notée [3], ce qui donne

$$[3] \Leftrightarrow 3x - 2 = b(x - 2),$$

$$[3] \Leftrightarrow 3x - bx = 2 - 2b,$$

$$[3] \Leftrightarrow x(3 - b) = 2 - 2b.$$

Nous distinguons par disjonction deux cas.

1^{er} cas : $3 - b = 0$, soit $b = 3$.

Nous obtenons dans ce cas

$$[3] \Leftrightarrow 0 \times x = -4,$$

ce qui prouve que $b = 3$ n'a pas d'antécédent par f .

2^e cas : $3 - b \neq 0$, soit $b \neq 3$.

Nous avons

$$[3] \Leftrightarrow x = \frac{2 - 2b}{3 - b}.$$

Justifions que $\frac{2 - 2b}{3 - b} \neq 2$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un réel $b \neq 3$ tel que $\frac{2(1 - b)}{3 - b} = 2$.

On a $1 - b = 3 - b$, soit $0 = 2$, ce qui est contradictoire.

Par conséquent, pour tout $b \neq 3$, on a $\frac{2 - 2b}{3 - b} \neq 2$.

Ainsi $b \neq 3$ admet par f un unique antécédent $x = \frac{2 - 2b}{3 - b}$.

Nous en concluons que f est une bijection de $\mathbb{R} - \{2\}$ sur $\mathbb{R} - \{3\}$.

Remarque

L'application $b \mapsto \frac{2 - 2b}{3 - b}$ de $\mathbb{R} - \{3\}$ sur $\mathbb{R} - \{2\}$ est la bijection réciproque de f .

Elle est notée f^{-1} .

On peut vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, f^{-1}(f(x)) = x \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} - \{3\}, f(f^{-1}(x)) = x.$$

4. Pour déterminer le tableau de signes du réel $g(x)$, nous tenons compte du signe de $a \in \mathbb{R}^*$ et de la position de $\frac{2}{a}$ par rapport à 2, ce qui induit quatre cas par disjonction.

1^{er} cas : $a < 0$.

x	$-\infty$	$\frac{2}{a}$	2	$+\infty$
signe de $ax - 2$	$+$	0	$-$	$-$
signe de $x - 2$	$-$	$-$	0	$+$
signe de $g(x)$	$-$	0	$+$	$ $ $-$

2^e cas : $a > 0$ et $\frac{2}{a} < 2$, soit $a > 1$.

x	$-\infty$	$\frac{2}{a}$	2	$+\infty$
signe de $ax - 2$	$-$	0	$+$	$+$
signe de $x - 2$	$-$	$-$	0	$+$
signe de $g(x)$	$+$	0	$-$	$ $ $+$

3^e cas : $a > 0$ et $\frac{2}{a} = 2$, soit $a = 1$.

Dans ce cas, nous avons pour tout réel $x \neq 2$, $g(x) = \frac{x-2}{x-2} = 1$.

Il en résulte que pour tout réel $x \neq 2$, $g(x) > 0$.

4^e cas : $a > 0$ et $\frac{2}{a} > 2$, soit $0 < a < 1$.

x	$-\infty$	2	$\frac{2}{a}$	$+\infty$
signe de $ax - 2$	$-$	$-$	0	$+$
signe de $x - 2$	$-$	0	$+$	$+$
signe de $g(x)$	$+$	$ $	$-$	0 $+$

5. Nous cherchons pour quelle valeur du réel a , on a

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, g(g(x)) = g(x).$$

En particulier, pour $x = 0$, il vient

$$g(g(0)) = g(0).$$

Puisque $g(0) = 1$ et $g(g(0)) = g(1) = 2 - a$, nous en déduisons

$$2 - a = 1, \text{ soit } a = 1.$$

Réciproquement, nous vérifions que si $a = 1$ alors, pour tout réel $x \neq 2$, nous obtenons

$$g(x) = 1 \text{ et } g(g(x)) = g(1) = 1 = g(x).$$

Exercice 16. Fonction homographique - Équation fonctionnelle

Soient m un réel donné distinct de 1 et g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par

$$g(x) = \frac{x - m}{x - 1}.$$

1. Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, g(x) = 1 + \frac{1 - m}{x - 1}$.
2. On suppose que $m < 1$. Étudier le sens de variation de g sur $] - \infty, 1[$.
3. Pour tout réel $x \neq 1$, calculer $g(g(x))$.

Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto g(g(x))$.

4. On suppose que $m < 1$. Résoudre dans $\mathbb{R} - \{1\}$, l'équation $g(x) = x$.
5. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par

$$h(x) = \frac{x - r}{x - 1}, \text{ avec } r \neq 1 \text{ et } r \neq m.$$

Montrer que, quel que soit le réel $x \neq 1$,

$$h(g(x)) = g(h(x)) \text{ si et seulement si } m + r = 2.$$

Solution

1. Pour tout réel $x \neq 1$, nous avons

$$g(x) = \frac{x - 1 + 1 - m}{x - 1} = 1 + \frac{1 - m}{x - 1}.$$

2. On suppose que $m < 1$. Soient deux réels a et b tels que $a < b < 1$.

Nous avons $a - 1 < b - 1 < 0$.

Puisque la fonction inverse est décroissante strictement sur $] - \infty, 0[$, nous en déduisons

$$\frac{1}{a - 1} > \frac{1}{b - 1}.$$

Comme $m - 1 < 0$, il en résulte

$$1 + \frac{m - 1}{a - 1} < 1 + \frac{m - 1}{b - 1}, \text{ soit } g(a) < g(b).$$

Nous en concluons que la fonction g est croissante strictement sur $] - \infty, 1[$.

3. Nous sommes autorisés à calculer $g(g(x))$ à condition que, pour tout réel $x \neq 1$, $g(x) \in D_g$, c'est-à-dire $g(x) \neq 1$.

Supposons par l'absurde qu'il existe un réel $x \neq 1$ tel que $g(x) = 1$.

Nous en déduisons :

$$1 + \frac{1-m}{x-1} = 1, \text{ soit } \frac{1-m}{x-1} = 0,$$

ce qui implique que $m = 1$. C'est en contradiction avec $m \neq 1$.

Par conséquent nous pouvons affirmer que

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, g(x) \neq 1.$$

En d'autres termes le réel 1 n'a pas d'antécédent par la fonction g .

Pour $x \neq 1$, nous avons

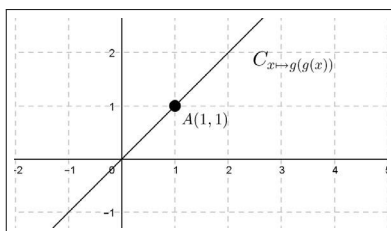
$$g(g(x)) = 1 + \frac{1-m}{g(x)-1} = 1 + \frac{1-m}{1 + \frac{1-m}{x-1} - 1} = 1 + \frac{1-m}{\frac{1-m}{x-1}} = 1 + (1-m) \frac{x-1}{1-m},$$

$$g(g(x)) = 1 + x - 1 = x.$$

La représentation graphique de la fonction $x \mapsto g(g(x))$ a pour équation

$$\begin{cases} y = x \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Cette représentation graphique est donc la première bissectrice du repère privée du point $A(1, 1)$.



4. Dans $\mathbb{R} - \{1\}$, désignons par [4] l'équation $g(x) = x$. Il vient

$$[4] \Leftrightarrow 1 + \frac{1-m}{x-1} = x,$$

$$[4] \Leftrightarrow \frac{1-m}{x-1} = x-1,$$

$$[4] \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1-m.$$

Puisque $m < 1$, on a $1-m > 0$. Il en résulte que

$$[4] \Leftrightarrow x-1 = -\sqrt{1-m} \text{ ou } x-1 = \sqrt{1-m},$$

$$[4] \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{1-m} < 1 \text{ ou } x = 1 + \sqrt{1-m} > 1.$$

Nous en concluons que

$$S_{[4]} = \{1 - \sqrt{1-m}; 1 + \sqrt{1-m}\}.$$

5. On suppose que, pour tout réel $x \neq 1$, $h(g(x)) = g(h(x))$.

En particulier pour $x = 0$, nous obtenons

$$h(g(0)) = g(h(0)), \text{ c'est-à-dire } h(m) = g(r),$$

ce qui implique

$$1 + \frac{1-r}{m-1} = 1 + \frac{1-m}{r-1}, \text{ soit } \frac{1-r}{m-1} = \frac{1-m}{r-1}.$$

Nous en déduisons successivement

$$\begin{aligned}(1-r)(r-1) &= (1-m)(m-1), \\ (r-1)^2 &= (m-1)^2, \\ (r-1+m-1)(r-1-m+1) &= 0, \\ (r+m-2)(r-m) &= 0.\end{aligned}$$

Puisque $r \neq m$, nous obtenons que

$$\text{si pour } x \neq 1, \text{ on a } h(g(x)) = g(h(x)), \text{ alors } r+m-2=0.$$

Réciproquement, supposons que $r+m-2=0$, soit $r=2-m$.

Nous avons d'une part,

$$h(g(x)) = 1 + \frac{1-r}{g(x)-1} = 1 + \frac{1-r}{\frac{1-m}{x-1}} = 1 + (m-1) \frac{x-1}{1-m} = 1 - (x-1) = 2-x.$$

D'autre part, nous obtenons

$$g(h(x)) = 1 + \frac{1-m}{h(x)-1} = 1 + \frac{1-m}{\frac{1-r}{x-1}} = 1 + (1-m) \frac{x-1}{m-1} = 1 - (x-1) = 2-x.$$

Nous en déduisons que si $r+m=2$, alors

$$\forall x \neq 1, h(g(x)) = g(h(x)).$$

La réciproque est ainsi prouvée.

Nous en concluons

$$\forall x \neq 1, h(g(x)) = g(h(x)) \text{ si et seulement si } m+r=2.$$

Exercice 17. Le nombre d'or et fonction inverse

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

1. Quel est le sens de variations de f sur $]0, +\infty[$?

2. Justifier que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) > 1$.

Montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

3. Dans l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution qui est le nombre d'or $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$: VRAI ou FAUX ?

Contrôler graphiquement.

4. Nous posons

$$u_0 = 2, u_1 = f(u_0) = 1 + \frac{1}{2}, u_2 = f(u_1) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}},$$

$$u_3 = f(u_2) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} \dots$$

En utilisant la droite (δ) d'équation $y = x$, représenter sur la droite des abscisses, les réels u_0, u_1, u_2, u_3 .

Graphiquement, en réitérant ce procédé, nous observons que cette suite de nombres se rapproche d'un réel fixé : lequel ?

5. L'entier naturel $n \geq 1$ étant choisi, proposer un algorithme qui restitue, après n itérations, un réel u_n qui est une valeur approchée de φ .

Implémenter cet algorithme en Python.

6. Proposer un algorithme et son script Python qui restitue un rang n à partir duquel l'itération décrite à la question 4 fournit une valeur approchée du nombre d'or φ à 10^{-p} près, l'entier p étant choisi par l'utilisateur.

Solution

1. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante strictement sur $]0, +\infty[$ nous obtenons

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b},$$

ce qui implique

$$1 + \frac{1}{a} > 1 + \frac{1}{b}, \text{ soit } f(a) > f(b).$$

Nous en concluons que la fonction f est décroissante strictement sur l'intervalle $]0 + \infty[$.

2. Soit un réel $x > 0$. Nous avons

$$f(x) - 1 = \frac{1}{x} > 0,$$

ce qui justifie

$$\forall x > 0, f(x) > 1.$$

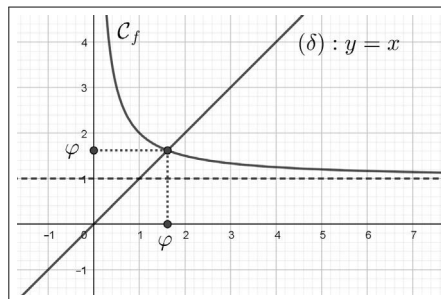
3. \triangleright Nous résolvons dans \mathbb{R}^{+*} l'équation $f(x) = x$. Il vient

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = x, \\ &\Leftrightarrow x + 1 = x^2, \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0, \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0, \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}, \\ &\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

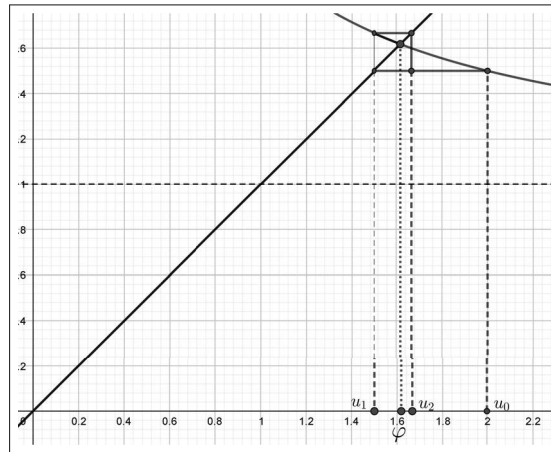
La solution $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < 0$ est à exclure.

Nous en concluons que l'assertion "l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution qui est le nombre d'or" $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est VRAIE.

\triangleright Graphiquement, l'unique solution φ de cette équation est l'abscisse du point d'intersection de la droite (δ) d'équation $y = x$ avec la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f .



4. ▷ En "zoomant" sur le point de coordonnées (φ, φ) et en utilisant la droite (δ) comme dans l'exercice 14 du chapitre 5, nous obtenons



▷ Graphiquement, en réitérant ce procédé, nous observons que cette suite de nombres se rapproche du nombre d'or φ .

5. L'entier non nul n étant choisi, nous proposons l'algorithme qui suit.

```

u ← 2
Pour k allant de 1 à n
    u ← 1 + 1/u
Fin Pour
Afficher u

```

▷ L'implémentation en Python de cet algorithme en employant la fonction Python nbreor(n) donne

```

def nbreor(n):
    u=2
    for k in range(1, n+1):
        u=1+1/u
    return u

```

Après 10 itérations, nous obtenons

```
>>> nbreor(10)
```

```
1.6180555555555556,
```

ce qui est une valeur approchée de φ à 10^{-4} près.

6. L'entier $p \geq 1$ étant choisi, nous proposons un algorithme qui évalue un rang n à partir duquel l'itération décrite à la question 4 fournit une valeur approchée de φ à 10^{-p} près.

```

u ← 2
n ← 0
Tant que  $|u - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)| > 10^{-p}$ 
    u ←  $1 + \frac{1}{u}$ 
    n ← n + 1
Fin Pour
Afficher n
Afficher u

```

Dans la boucle conditionnelle

"Tant que $|u - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)| > 10^{-p}$ ",

la présence de la valeur absolue est justifiée car les termes successifs de la suite de nombres sont alternativement inférieurs ou supérieurs à φ .

Nous en déduisons le programme Python suivant

```

from math import *
p=int(input("p="))
u=2
n=0
r=0.5*(1+5**0.5)
while abs(u-r)>10**(-p):
    u=1+1/u
    n=n+1
print("n=",n)
print("u=",u)

```

Par exemple, pour $p = 5$, nous obtenons

```

>>> n = 11
u = 1.6180257510729614.

```

Ceci signifie qu'à partir de la 11^e itération, u_{11} est une valeur approchée de φ à 10^{-5} près.

6.5.4 Fonction valeurs absolue

Exercice 18. Étude d'une fonction et équations avec ||

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x|x| - x - 2$.

1. Calculer les images par f des réels 0 , $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$ et $\sqrt{2} - 2$.
2. La fonction f est-elle paire ? impaire ?
3. Déterminer les antécédents de -2 , puis les antécédents de 0 par la fonction f .

Contrôler graphiquement.

4. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$(a) f(x) = -x, (b) f(x) = x, (c) f(x^2) = 0.$$

Contrôler graphiquement.

Solution

1. Nous avons

$$\begin{aligned} f(0) &= -2. \\ f\left(\frac{2}{3}\right) &= \frac{2}{3}\left|\frac{2}{3}\right| - \frac{2}{3} - 2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} - 2 = -\frac{20}{9}. \\ f\left(-\frac{2}{3}\right) &= -\frac{2}{3}\left|-\frac{2}{3}\right| - \frac{2}{3} + 2 = -\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} - 2 = -\frac{16}{9}. \\ f(\sqrt{2} - 2) &= (\sqrt{2} - 2)|\sqrt{2} - 2| - (\sqrt{2} - 2) - 2 = (\sqrt{2} - 2)(2 - \sqrt{2}) - \sqrt{2}, \\ f(\sqrt{2} - 2) &= -(2 - \sqrt{2})^2 - \sqrt{2} = 3(\sqrt{2} - 2). \end{aligned}$$

2. Nous savons que

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) \neq f\left(\frac{2}{3}\right)$$

et

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) \neq -f\left(\frac{2}{3}\right),$$

ce qui fournit un contre-exemple qui justifie que f n'est ni paire, ni impaire.

3. \triangleright Nous résolvons l'équation $f(x) = -2$, notée (3). Il vient

$$(3) \Leftrightarrow x|x| - x - 2 = -2,$$

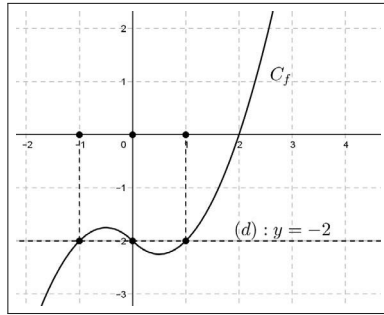
$$(3) \Leftrightarrow x(|x| - 1) = 0,$$

$$(3) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } |x| = 1,$$

$$(3) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Nous en concluons que -2 admet par f trois antécédents qui sont égaux à -1 ou 0 ou 1 .

Contrôle graphique avec GeoGebra



▷ Nous résolvons maintenant l'équation $f(x) = 0$, notée (4). Il vient

$$(4) \Leftrightarrow x|x| - x - 2 = 0.$$

Cette fois une disjonction des cas est inévitable. Ainsi, nous obtenons

$$(4) \Leftrightarrow (4') \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (4'') \begin{cases} -x^2 - x - 2 = 0 \\ x < 0 \end{cases}.$$

★ Résolution de (4').

$$(4') \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 0, \\ x \geq 0 \end{cases},$$

$$(4') \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, \\ x \geq 0 \end{cases},$$

$$(4') \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ ou } x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}, \\ x \geq 0 \end{cases},$$

$$(4') \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = -1, \\ x \geq 0 \end{cases},$$

$$(4') \Leftrightarrow x = 2.$$

★ Résolution de 4''.

$$(4'') \Leftrightarrow \begin{cases} -(x^2 + x + 2) = 0, \\ x < 0 \end{cases},$$

$$(4'') \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 2 = 0, \\ x < 0 \end{cases},$$

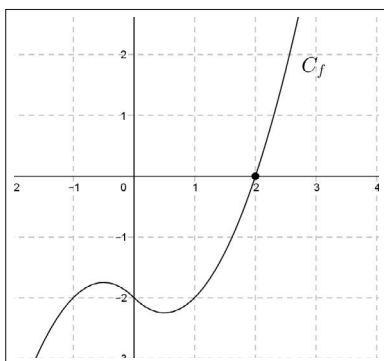
$$(4'') \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = 0, \\ x < 0 \end{cases},$$

$$(4'') \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{7}{4} \\ x < 0 \end{cases} .$$

Cette équation (4'') n'a pas de solution.

Par conséquent 0 admet par f un unique antécédent qui est égal à 2.

Contrôle graphique.



4. ▷ Résolution de l'équation (a).

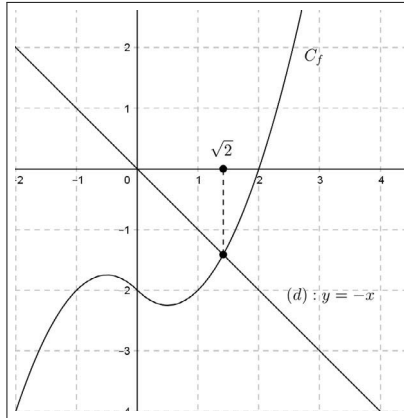
$$\begin{aligned} (a) &\Leftrightarrow x|x| - x - 2 = -x, \\ (a) &\Leftrightarrow x|x| = 2, \\ (a) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -x^2 = 2 \\ x < 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Puisque l'équation $x^2 = -2$ n'a pas de solution, il vient

$$\begin{aligned} (a) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases} , \\ (a) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2} \\ x \geq 0 \end{cases} , \\ (a) &\Leftrightarrow x = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. $S_{(a)} = \{\sqrt{2}\}$.

Contrôle graphique.



▷ Résolution de l'équation (b).

$$\begin{aligned}
 (b) &\Leftrightarrow x|x| - x - 2 = x, \\
 (b) &\Leftrightarrow x|x| - 2x - 2 = 0, \\
 (b) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -x^2 - 2x - 2 = 0 \\ x < 0 \end{cases}, \\
 (b) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 - 1 - 2 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 + 2x + 1 - 1 + 2 = 0 \\ x < 0 \end{cases}, \\
 (b) &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} (x+1)^2 = -1 \\ x < 0 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Puisque l'équation $(x+1)^2 = -1$ n'a pas de solution, il vient

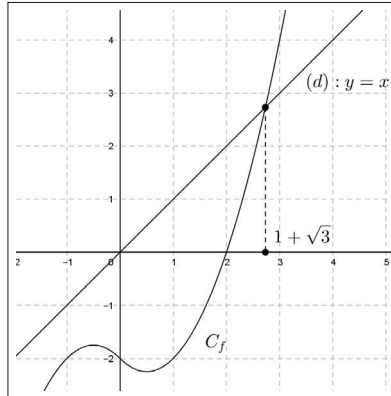
$$\begin{aligned}
 (b) &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 3 \\ x \geq 0 \end{cases}, \\
 (b) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \text{ ou } x = 1 - \sqrt{3} \\ x \geq 0 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Puisque $1 - \sqrt{3} < 0$, nous obtenons

$$(b) \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3}.$$

Conclusion. $S_{(b)} = \{1 + \sqrt{3}\}$.

Contrôle graphique.



▷ Résolution de l'équation (c).

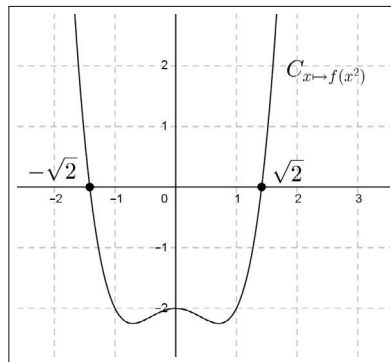
Nous savons que l'équation $f(x) = 0$ a pour solution $x = 2$. Nous en déduisons

$$(c) \Leftrightarrow x^2 = 2,$$

$$(c) \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}.$$

Conclusion. $S_{(c)} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Contrôle graphique.



Exercice 19. Étude d'une fonction - Une inégalité

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|)$.

1. Déterminer l'ensemble des antécédents du réel 0 par la fonction f .
2. Étudier la parité de la fonction f .
3. Justifier que f est affine par intervalles. En déduire la représentation graphique de cette fonction relativement à un repère orthonormal du plan.
4. Déterminer les antécédents du réel 1 par f . Contrôler graphiquement.

5. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = |x| - f(x)$.

a. Définir g par intervalles.

En déduire la représentation graphique de la fonction g dans un repère orthonormal du plan.

b. En déduire graphiquement l'inégalité suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2|x| \geq |x+1| - |x-1|.$$

c. Préciser, pour quelles valeurs du réel x , l'égalité est atteinte dans l'inégalité obtenue ci-dessus.

Solution

1. Soit S l'ensemble des antécédents de 0 par la fonction f . Nous avons

$$x \in S \Leftrightarrow f(x) = 0,$$

$$x \in S \Leftrightarrow \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|) = 0,$$

$$x \in S \Leftrightarrow |x+1| = |x-1|,$$

$$x \in S \Leftrightarrow x+1 = x-1 \text{ ou } x+1 = -(x-1),$$

$$x \in S \Leftrightarrow 0x = 2 \text{ ou } 2x = 0.$$

Puisque l'équation $0x = 2$ n'a pas de solution, nous obtenons

$$x \in S \Leftrightarrow x = 0.$$

Nous en concluons que l'ensemble des antécédents de 0 par f est réduit à $\{0\}$.

2. Pour tout réel x , nous avons $-x \in \mathbb{R}$. De plus, il vient

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{2}(|-x+1| - |-x-1|) = \frac{1}{2}(|1-x| - |-(x+1)|) \\ f(-x) &= \frac{1}{2}(|x-1| - |x+1|) = -\frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|) = -f(x), \end{aligned}$$

ce qui prouve que la fonction f est impaire.

3. Nous procédons par disjonction. Nous avons

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{si } x \leq -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}.$$

Le tableau donnant $f(x)$ sans valeur absolue en résulte ci-après :

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$ x + 1 $	$-x - 1$	0	$x + 1$		$x + 1$
$ x - 1 $	$-x + 1$		$-x + 1$	0	$x - 1$
$f(x)$	-1	-1	x	1	1

Nous en déduisons que la fonction f est affine par intervalles.

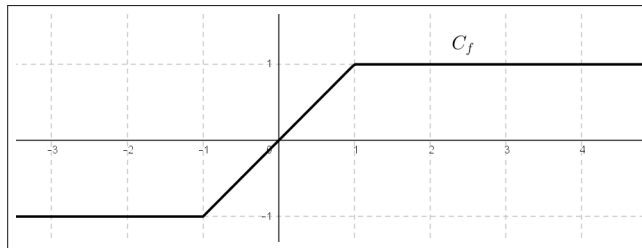
Elle est définie par

$$h(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \leq -1 \\ x, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases} .$$

La représentation graphique de cette fonction est définie par les équations

$$\begin{cases} y = -1 \\ x \leq -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x \geq 1 \end{cases} ,$$

ce qui permet, avec GeoGebra, d'obtenir la courbe C_f .



4. Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = 1$ qui est équivalente à

$$\begin{cases} 1 = -1 \\ x \leq -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 1 = x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 1 = 1 \\ x \geq 1 \end{cases} .$$

Il en résulte que l'ensemble des antécédents de 1 par f est l'intervalle $[1, +\infty[$.

Le contrôle graphique est immédiat sur la figure ci-dessus.

5. a. \triangleright Pour tout réel x , nous avons

$$g(x) = |x| - f(x) = \begin{cases} |x| + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ |x| - x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ |x| - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} .$$

Nous en déduisons :

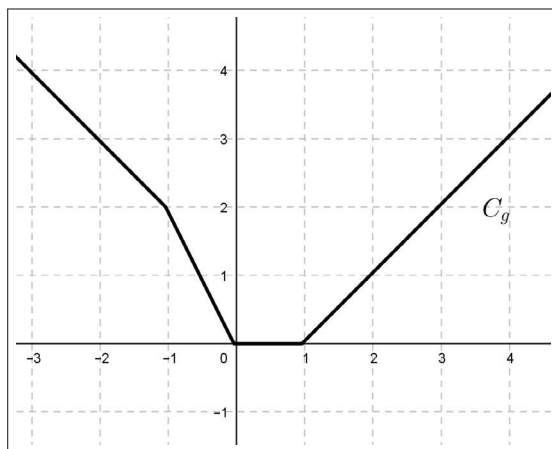
$$g(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{si } x \leq -1 \\ -2x, & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Représentation graphique de la fonction g .

▷ La courbe C_g a pour équation

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = -2x \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = x - 1 \\ x \geq 1 \end{cases},$$

ce qui permet, avec GeoGebra, d'obtenir la courbe C_g .



b. Graphiquement, nous observons que, pour tout réel x , $g(x) \geq 0$, ce qui justifie, pour tout réel x , l'inégalité

$$|x| \geq f(x),$$

c'est-à-dire

$$|x| \geq \frac{1}{2}(|x + 1| - |x - 1|).$$

Nous en concluons

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2|x| \geq |x + 1| - |x - 1|.$$

c. Graphiquement, nous observons que l'égalité est réalisée si et seulement si $x \in [0, 1]$.

Exercice 20. Une équation - Une inéquation

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $||x - 2| - 2| = 1$.
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $||x - 2| - 2| < 1$. Contrôler graphiquement.

Solution

1. Désignons par (1) l'équation $||x - 2| - 2| = 1$.

Nous obtenons

$$(1) \Leftrightarrow |x - 2| - 2 = -1 \text{ ou } |x - 2| - 2 = 1,$$

$$(1) \Leftrightarrow |x - 2| = 1 \text{ ou } |x - 2| = 3,$$

$$(1) \Leftrightarrow x - 2 = -1 \text{ ou } x - 2 = 1 \text{ ou } x - 2 = -3 \text{ ou } x - 2 = 3,$$

$$(1) \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 5.$$

Conclusion. $S_{(1)} = \{-1, 1, 3, 5\}$

2. Désignons par (2) l'inéquation $||x - 2| - 2| < 1$. Il vient

$$(2) \Leftrightarrow -1 < |x - 2| - 2 < 1,$$

$$(2) \Leftrightarrow 1 < |x - 2| < 3,$$

$$(2) \Leftrightarrow |x - 2| < 3 \text{ et } |x - 2| > 1,$$

$$(2) \Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \text{ et } (x - 2 < -1 \text{ ou } x - 2 > 1),$$

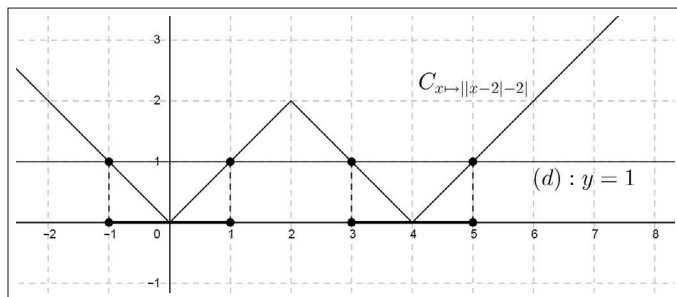
$$(2) \Leftrightarrow -1 < x < 5 \text{ et } (x < 1 \text{ ou } x > 3).$$

Ainsi nous obtenons $S_{(2)} =]-1, 5[\cap (]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[)$.

En représentant, sur la droite réelle, les intervalles solutions, nous obtenons en conclusion

$$S_{(2)} =]-1, 1[\cup]3, 5[.$$

▷ Contrôle graphique.



Exercice 21. Une inégalité - Une inclusion

Soient x et y deux réels tels que $|x| + |y| = 1$.

Montrer que $x^2 + y^2 \leq 1$. Interpréter géométriquement.

Solution

Soient deux réels x et y tels que $|x| + |y| = 1$.

Puisque $|y| = 1 - |x|$, nous obtenons

$$x^2 + y^2 - 1 = |x|^2 + |y|^2 - 1 = |x|^2 + (1 - |x|)^2 - 1 = 2|x|^2 - 2|x| = 2|x|(|x| - 1).$$

Nous en déduisons

$$x^2 + y^2 - 1 = -2|x||y| \leq 0.$$

Nous en concluons

$$\text{si } |x| + |y| = 1, \text{ alors } x^2 + y^2 \leq 1.$$

Interprétation géométrique.

On suppose le plan muni d'un repère orthonormal d'origine O .

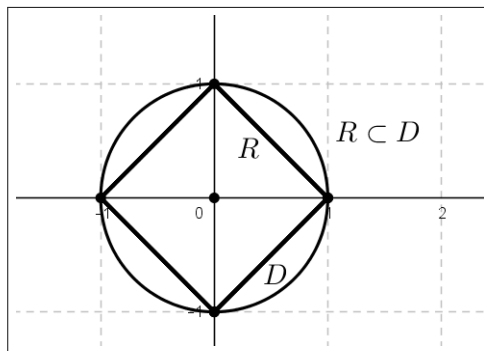
Désignons par R l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $|x| + |y| = 1$ et par D l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + y^2 \leq 1$.

L'implication ci-dessus prouve que $R \subset D$ ¹.

- R est un carré obtenu par la réunion de quatre segments définis par

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} -x + y = 1 \\ x \leq 0 \text{ et } y \geq 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x - y = 1 \\ x \geq 0 \text{ et } y \leq 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} -x - y = 1 \\ x \leq 0 \text{ et } y \leq 0 \end{array} \right. .$$

- D est le disque (fermé) de centre O et de rayon 1.



1. Annexe § 1.3

Exercice 22. Composée d'une fonction homographique avec abs

1. Quel est l'ensemble de définition D_h de la fonction $h : x \mapsto \frac{3|x| + 1}{|x| - 1}$?

Quelle est la parité de cette fonction ?

2. Montrer que si $|x| > 1$, alors $h(x) > 3$.

3. Montrer que si $|x| < 1$, alors $h(x) \leq -1$.

4. Soient a et b deux réels distincts appartenant D_h .

Montrer que $h(a) = h(b)$ si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$.

Solution

1. \triangleright La fonction h est définie si et seulement si $|x| \neq 1$.

Or nous savons que

$$|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Il en résulte

$$D_h = \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$$

\triangleright L'ensemble de définition D_h est "symétrique" par rapport à 0.

En effet nous avons, pour tout réel $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $-x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

De plus il vient

$$h(-x) = \frac{3|-x| + 1}{| -x | - 1} = \frac{3|x| + 1}{|x| - 1} = h(x).$$

Nous en concluons que h est une fonction paire.

2. Soit x un réel tel que $|x| > 1$. Nous avons

$$h(x) - 3 = \frac{3|x| + 1}{|x| - 1} - 3 = \frac{3|x| + 1 - 3(|x| - 1)}{|x| - 1} = \frac{4}{|x| - 1}.$$

Puisque $|x| - 1 > 0$, nous en déduisons que $h(x) - 3 > 0$.

Par conséquent, nous en concluons

$$|x| > 1 \text{ implique } h(x) > 3.$$

3. Soit x un réel tel que $|x| < 1$. Nous avons

$$h(x) + 1 = \frac{3|x| + 1}{|x| - 1} + 1 = \frac{3|x| + 1 + (|x| - 1)}{|x| - 1} = \frac{4|x|}{|x| - 1}.$$

Puisque $|x| - 1 < 0$ et $|x| \geq 0$, nous en déduisons que $h(x) + 1 \leq 0$.

Ceci permet de conclure que

$$\text{si } |x| < 1, \text{ alors } h(x) \leq -1.$$

Nous remarquons que l'égalité est atteinte si et seulement si $x = 0$.

4. Soient a et b deux réels distincts de 1 et -1 .

Si $a = b$ ou $a = -b$, alors $h(a) = h(b)$ ou $h(a) = h(-b)$.

Puisque h est une fonction paire, il vient, $h(a) = h(-b) = h(b)$.

Réciproquement, nous supposons que $h(a) = h(b)$. Nous avons

$$\frac{3|a| + 1}{|a| - 1} = \frac{3|b| + 1}{|b| - 1},$$

ce qui donne successivement

$$\begin{aligned}(3|a| + 1)(|b| - 1) &= (3|b| + 1)(|a| - 1), \\ 3|a||b| - 3|a| + |b| - 1 &= 3|a||b| - 3|b| + |a| - 1, \\ -3|a| + |b| &= -3|b| + |a|, \\ 4(|a| - |b|) &= 0.\end{aligned}$$

Nous en déduisons que $|a| = |b|$, ce qui implique

$$a = b \text{ ou } a = -b.$$

Nous en concluons

$$h(a) = h(b) \text{ si et seulement si } a = b \text{ ou } a = -b.$$

Exercice 23. Fonction affine et inégalité triangulaire

Soient a et b deux réels, $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine définie sur \mathbb{R} , satisfaisant à $f(0) \leq 1$ et $f(1) \leq 1$.

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 2|x| + 1.$$

Solution

Nous avons $f(0) = b$ et $f(1) = a + b$.

Nous en déduisons

$$a = f(1) - b = f(1) - f(0).$$

Par suite, pour tout réel x , nous obtenons

$$f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0).$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, il en résulte

$$|f(x)| \leq |(f(1) - f(0))x| + |f(0)|.$$

De plus, en appliquant à nouveau l'inégalité triangulaire, sachant que

$$f(0) \leq 1 \text{ et } f(1) \leq 1,$$

il vient

$$|(f(1) - f(0))x| = |f(1) - f(0)||x| \leq (|f(1)| + |f(0)|)|x| \leq 2|x|.$$

Nous en déduisons

$$|(f(1) - f(0))x| + |f(0)| \leq 2|x| + 1.$$

Par transitivité de la relation \leq , nous en concluons

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 2|x| + 1.$$

Exercice 24. Distance et fonction monotone

Soit f une fonction définie et strictement monotone sur \mathbb{R} .

Pour tous les réels a et b , nous posons $\delta(a, b) = |f(a) - f(b)|$.

1. Montrer que δ satisfait aux trois propriétés suivantes :

a. $\delta(a, b) = \delta(b, a)$

b. $\delta(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

c. Pour tout réel c , $\delta(a, b) \leq \delta(a, c) + \delta(c, b)$.

On dit que δ est une distance² sur \mathbb{R} .

2. On suppose que f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$.

a. Quelle est la parité de la fonction f ?

b. Déterminer le sens de variation de f sur \mathbb{R}^+ .

En déduire le sens de variation de f sur \mathbb{R} .

Contrôler graphiquement.

c. Pour tous les réels a et b , expliciter $\delta(a, b)$.

d. Montrer que pour tout réel a , $\delta(a, 0) \leq |a|$.

e. En déduire que, pour tout réel $h > 0$, si $a \in [-h, h]$, alors $\delta(a, 0) \leq h$.

2. Voir paragraphe 8.1.3 et exercice corrigé 2 du chapitre 8

Solution

1. Soient a et b deux réels.

a. Nous avons

$$\delta(a, b) = |f(a) - f(b)| = |-(f(a) - f(b))| = |f(b) - f(a)| = \delta(b, a).$$

b. Si $a = b$, alors $f(a) = f(b)$, ce qui implique que $\delta(a, b) = |0| = 0$.

Réciproquement supposons que $\delta(a, b) = 0$, c'est-à-dire $f(a) = f(b)$.

Par l'absurde, nous supposons que $a \neq b$, par exemple $a > b$, nous obtenons, puisque f est monotone strictement sur \mathbb{R} , $f(a) > f(b)$ ou $f(a) < f(b)$.

C'est contradictoire avec l'hypothèse $f(a) = f(b)$.

Par conséquent si $\delta(a, b) = 0$, alors $a = b$.

c. Pour tout réel c , en appliquant l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\delta(a, b) = |(f(a) - f(c)) + (f(c) - f(b))| \leq |f(a) - f(c)| + |f(c) - f(b)|, \\ \delta(a, b) \leq \delta(a, c) + \delta(c, b).$$

2. a. Soit un réel x . Nous avons $-x \in \mathbb{R}$.

De plus nous obtenons

$$f(-x) = \frac{-x}{|-x| + 1} = -\frac{x}{|x| + 1} = -f(x).$$

Nous en concluons que la fonction f est impaire.

b. Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$.

Nous avons

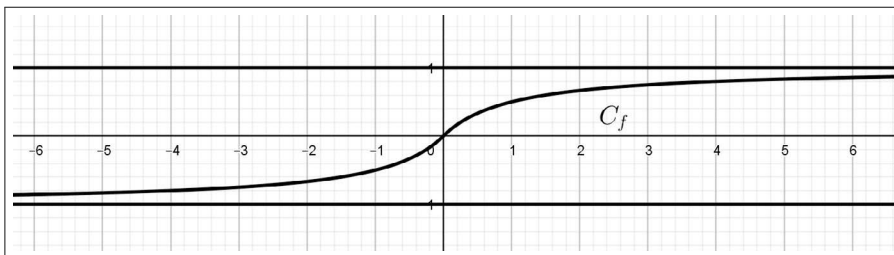
$$f(a) - f(b) = \frac{a}{a+1} - \frac{b}{b+1} = \frac{a(b+1) - b(a+1)}{(a+1)(b+1)} = \frac{a-b}{(a+1)(b+1)}.$$

Puisque $a - b < 0$ et $(a+1)(b+1) > 0$, nous en déduisons

$$f(a) - f(b) < 0, \text{ soit } f(a) < f(b).$$

Nous avons ainsi prouvé que f est croissante strictement sur \mathbb{R}^+ et comme f est impaire, nous en concluons que la fonction f est croissante strictement sur \mathbb{R} .

Nous contrôlons graphiquement le sens de variation de la fonction f .



Remarque

Pour tout réel x , nous observons

$$-1 < f(x) < 1 \Leftrightarrow |f(x)| < 1.$$

c. Soient a et b deux réels. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\delta(a, b) &= |f(a) - f(b)| = \left| \frac{a}{|a| + 1} - \frac{b}{|b| + 1} \right| = \left| \frac{a(|b| + 1) - b(|a| + 1)}{(|a| + 1)(|b| + 1)} \right|, \\ \delta(a, b) &= \frac{|(a|b| + a - b|a| - b)|}{(|a| + 1)(|b| + 1)}.\end{aligned}$$

d. Pour tout réel a , il vient

$$\delta(a, 0) = |f(a) - f(0)| = |f(a)| = \left| \frac{a}{|a| + 1} \right| = \frac{|a|}{|a| + 1}.$$

Puisque $|a| + 1 \geq 1$, il en résulte

$$\frac{1}{|a| + 1} \leq 1,$$

ce qui implique, car $|a| \geq 0$,

$$\delta(a, 0) \leq |a|.$$

e. Soient $h > 0$ et a un réel tel que $a \in [-h, h]$.

Nous avons ainsi $|a| \leq h$.

Puisque

$$\delta(a, 0) \leq |a|, \text{ nous en déduisons } \delta(a, 0) \leq h.$$

Ceci justifie l'implication attendue.

Exercice 25. Une inégalité remarquable

1. Soit x un réel, justifier que $|x| = \text{Max}(x, -x)$.

2. Prouver que, pour tous les réels x et y , on a $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Solution

1. Soit x un réel quelconque. Nous avons

$$\text{Max}(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq -x \\ -x & \text{si } x < -x \end{cases} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} = |x|.$$

2. Soient x et y deux réels quelconques. En utilisant l'inégalité triangulaire, d'une part, nous avons

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|,$$

d'autre part, sachant que $|y - x| = |x - y|$, nous obtenons

$$|y| = |(y - x) + x| \leq |x - y| + |x|.$$

Nous en déduisons que $|x| - |y| \leq |x - y|$ et $|y| - |x| \leq |x - y|$.

Puisque $|y| - |x| = -(|x| - |y|)$, il vient

$$\text{Max}(|x| - |y|, |y| - |x|) = ||x| - |y||.$$

Nous en concluons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Calcul vectoriel

L'introduction du calcul vectoriel est une étape importante car le concept de vecteurs irrigue de nombreux domaines mathématiques. Dans ce chapitre, nous commençons par mettre en place une définition adéquate de l'objet vecteur inspirée par la physique. Ensuite nous nous intéressons à la structure algébrique de l'ensemble des vecteurs du plan vis-à-vis de l'égalité et de l'addition vectorielles ainsi que de l'opération de multiplication d'un réel par un vecteur. Nous sommes alors en mesure de mettre en évidence l'efficacité du calcul vectoriel pour traiter des questions classiques de géométrie comme les notions de milieu, de centre de gravité, d'alignement et de parallélisme.

Enfin l'outil vectoriel nous permet de mettre en place, au chapitre suivant et de façon satisfaisante, le repérage d'un point et d'un vecteur sur une droite ou dans le plan.

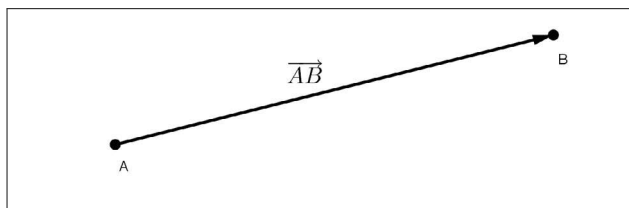
La notion de vecteur est relativement récente puisqu'elle fut développée sous sa forme actuelle par le mathématicien allemand Hermann Grassmann (1809-1877). C'est, entre autres, à partir de ses travaux que la théorie générale de l'algèbre linéaire fut élaborée à la fin du XIX^e siècle.

7.1 Vecteur du plan - Égalité vectorielle

7.1.1 Vecteur du plan

Définition. Soient A et B deux points distincts du plan. Le vecteur \overrightarrow{AB} est défini par les trois données suivantes :

- sa direction : la droite (AB) ,
- son sens : de A vers B ,
- sa longueur : AB .



Remarques. Nous en faisons quatre.

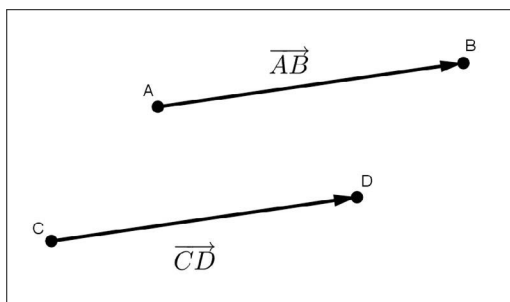
- Toute droite parallèle à (AB) est aussi la direction du vecteur \overrightarrow{AB} .
- La longueur de \overrightarrow{AB} est également appelée la *norme* du vecteur \overrightarrow{AB} . Cette norme est notée $\|\overrightarrow{AB}\|$. On retiendra que $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.
- Si $A = B$, le vecteur \overrightarrow{AA} est le vecteur nul, noté $\vec{0}$.
- Le vecteur \overrightarrow{BA} de sens contraire à \overrightarrow{AB} est le vecteur opposé de \overrightarrow{AB} .

7.1.2 Égalité vectorielle

Définition. Soient \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} deux vecteurs non nuls.

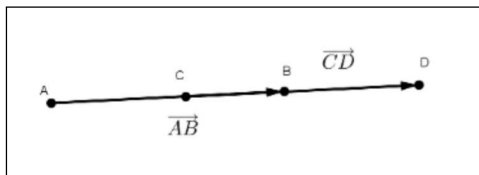
On dit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ces deux vecteurs ont :

- la même direction,
- le même sens,
- la même longueur.



Remarques. Nous en donnons trois.

- \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} ont la même direction équivaut à $(AB) \parallel (CD)$.
- Nous pouvons avoir $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ avec A, B, C et D alignés.

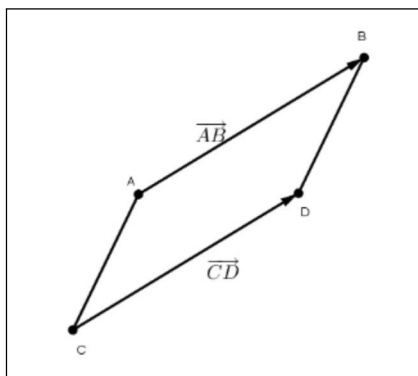


- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à D est l'image de C par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .

On note $t_{\overrightarrow{AB}}$ cette translation et $D = t_{\overrightarrow{AB}}(C)$ l'image de C par cette translation.

Proposition (caractérisation vectorielle d'un parallélogramme). *Soient A, B, C et D quatre points distincts deux à deux. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- (ii) Le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.



Démonstration. (i) \Rightarrow (ii)

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $(AB) \parallel (CD)$ et $AB = CD$.

Par conséquent, le quadrilatère $ABDC$ a deux côtés parallèles de même longueur. C'est donc un parallélogramme.

(ii) \Rightarrow (i)

Si $ABDC$ est un parallélogramme, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles et $AB = CD$.

De plus les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} ont le même sens.

Ainsi, nous obtenons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Remarques. Nous en donnons deux.

- Lorsque le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme nous disposons des égalités vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB} \text{ et } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}.$$

- Cette caractérisation vectorielle est très pratique pour justifier qu'un quadrilatère est un parallélogramme. Il est fortement conseillé de retenir ce résultat.

7.1.3 Vecteur "générique" \vec{u}

Définition. Soit \overrightarrow{AB} un vecteur non nul.

On désigne par \vec{u} l'ensemble des vecteurs \overrightarrow{XY} tels que $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB}$.

Un élément quelconque de \vec{u} est un représentant du vecteur de \vec{u} .

Par convention, si \overrightarrow{AB} est un représentant de \vec{u} , on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et on considère le vecteur \vec{u} de représentant \overrightarrow{AB} .

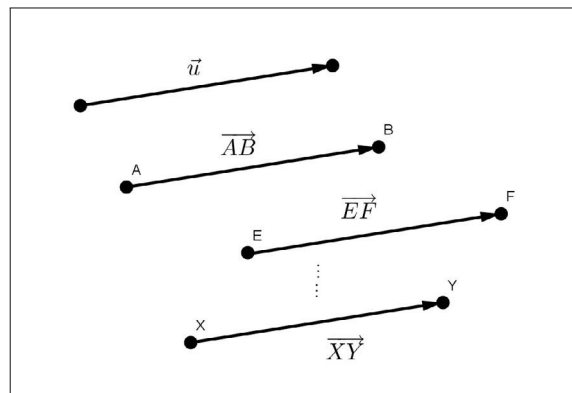
Remarques. Nous en proposons deux.

- Si $A = B$, alors le vecteur \overrightarrow{AA} (ou \overrightarrow{BB}) est un représentant du vecteur nul $\vec{0}$.

- Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors \vec{u} admet une infinité de représentants qui sont des vecteurs égaux au vecteur \overrightarrow{AB} .

Par exemple, sur la figure suivante, nous avons

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} = \dots = \overrightarrow{XY} = \dots$$



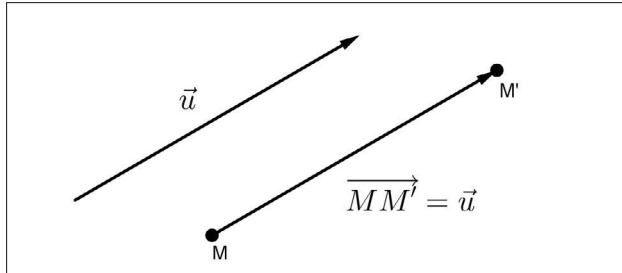
Définition (d'une translation de vecteur \vec{u}). Soit \vec{u} un vecteur tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

La translation de vecteur \vec{u} , notée $t_{\vec{u}}$ est la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$.

En d'autres termes, nous avons

$$t_{\vec{u}}(A) = B \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB}.$$

Plus généralement, à chaque point M du plan est associé par la translation $t_{\vec{u}}$ un unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



Remarques. Nous en faisons deux.

- Si $t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $t_{\vec{u}}(B) = B'$, alors on a $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{u}$.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$, nous avons

$$t_{\vec{0}}(M) = M' \Leftrightarrow M' = M.$$

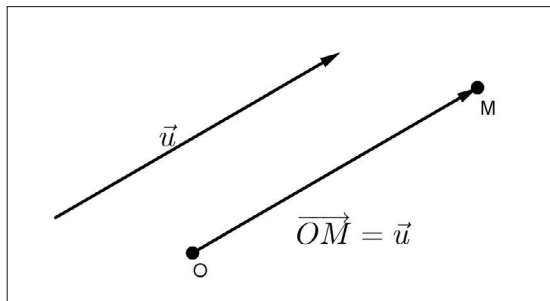
On dit que $t_{\vec{0}}$ est l'identité du plan, notée id_P .

Proposition (détermination d'un point par un vecteur). Soient O un point donné du plan et \vec{u} un vecteur donné.

Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Démonstration. Le point $M = t_{\vec{u}}(O)$ est unique et satisfait à

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u}.$$

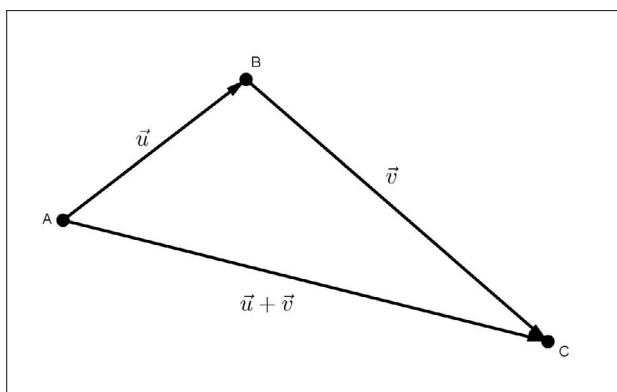


7.2 Addition vectorielle - Propriétés

7.2.1 Addition vectorielle

Définition. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs, A un point du plan, B et C deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est défini par $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

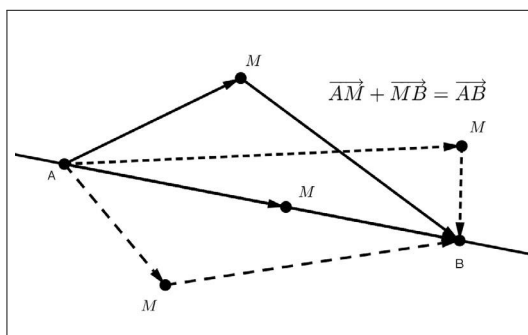


Remarques. Nous en proposons deux.

- La définition de $\vec{u} + \vec{v}$ est indépendante du choix du point A et donc des représentants des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .
- L'addition de deux vecteurs est un vecteur.

Proposition (relation de Chasles). Le vecteur \overrightarrow{AB} étant donné, quel que soit le point M du plan, nous disposons de l'égalité

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}.$$



Démonstration. Quel que soit le point M , la définition de l'addition vectorielle restitue l'égalité $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.

Remarques. Nous en faisons deux.

- En général, nous avons $AB \neq AM + MB$.

Plus précisément nous disposons de l'inégalité triangulaire

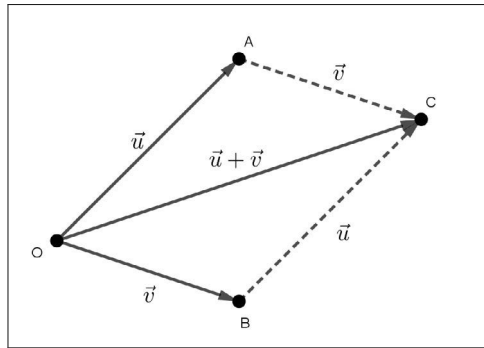
$$AB \leq AM + MB.$$

L'égalité est atteinte si et seulement si $M \in [A, B]$.

- La relation de Chasles est utilisée fréquemment ; elle fournit un "degré de liberté infini" pour décomposer un vecteur en une somme de deux vecteurs.

Proposition (règle du parallélogramme). Soient O, A, B et C quatre points du plan. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) le quadrilatère $OACB$ est un parallélogramme.
- (ii) $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$.



Démonstration. (i) \Rightarrow (ii)

En utilisant la relation de Chasles, nous obtenons

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}.$$

Puisque le quadrilatère $OACB$ est un parallélogramme, nous savons que $\vec{AC} = \vec{OB}$. Il en résulte

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}.$$

(ii) \Rightarrow (i)

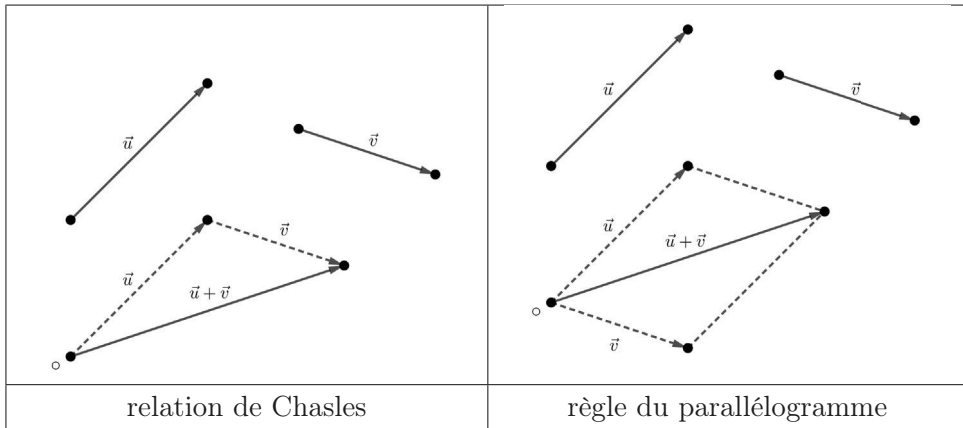
$$\text{Si } \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}, \text{ alors } \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \vec{OB}.$$

Après simplification par le vecteur \vec{OA} , nous obtenons $\vec{AC} = \vec{OB}$, ce qui prouve que le quadrilatère $OACB$ est un parallélogramme.

Remarques. Nous en donnons deux.

- La « simplification par \overrightarrow{OA} » est justifiée par la proposition de simplification, exposée à la fin de ce paragraphe.

- Un point O étant donné, la relation de Chasles et la règle du parallélogramme fournissent deux méthodes pour construire un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. Le tableau qui suit, illustre ces deux méthodes.



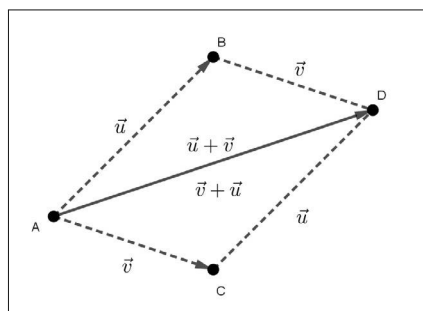
7.2.2 Propriétés de l'addition vectorielle

Proposition (commutativité de l'addition vectorielle). *Pour tous les vecteurs \vec{u} et \vec{v} , nous avons*

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

Démonstration. Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Désignons par D le point tel que le quadrilatère $ABDC$ soit un parallélogramme.



Nous avons donc $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}, \\ \vec{v} + \vec{u} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

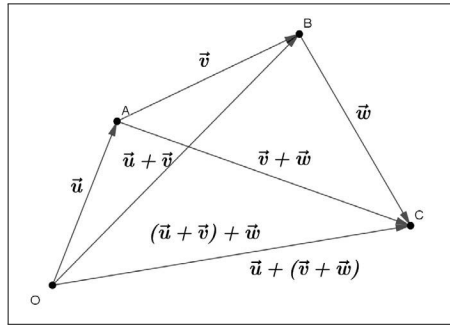
Ainsi, pour tous les vecteurs \vec{u} et \vec{v} , nous disposons de l'égalité

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

Proposition (associativité de l'addition vectorielle). *Pour tous les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , on a*

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}).$$

Démonstration. Soient O, A, B et C quatre points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$.



Nous utilisons la relation de Chasles pour montrer que, d'une part, nous avons

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}.$$

D'autre part, il vient

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}.$$

Par suite, pour tous les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , nous disposons de l'égalité

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}).$$

Définition. *Pour tout point A du plan, le vecteur nul $\vec{0}$ est défini par $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$.*

Proposition ($\vec{0}$ est neutre pour l'addition vectorielle). *Pour tout vecteur \vec{u} , nous avons*

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}.$$

Démonstration. Soient A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{0} = \overrightarrow{BB}$.

En utilisant la relation de Chasles, il vient

$$\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}.$$

De même, en posant $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$, nous obtenons

$$\vec{0} + \vec{u} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}.$$

Nous en concluons que, pour tout vecteur \vec{u} ,

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}.$$

Corollaire. Pour tous les points A et M du plan, nous disposons de l'équivalence suivante :

$$\overrightarrow{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow M = A.$$

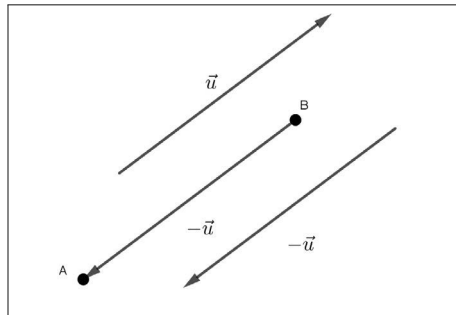
Démonstration. Si $M = A$, alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Réciproquement nous savons que si $M \neq A$, alors $\overrightarrow{AM} \neq \vec{0}$.

Par contraposition¹, nous obtenons que $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ implique que $M = A$.

Définition. Soient \vec{u} un vecteur, A et B deux points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

L'opposé de \vec{u} , noté $-\vec{u}$, est le vecteur défini par $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$.



Proposition (propriété du vecteur opposé). Pour tout vecteur \vec{u} , nous avons

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}.$$

1. Annexe § 5.2

Démonstration. Avec les notations de la définition, nous avons, d'une part

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

D'autre part, il vient

$$(-\vec{u}) + \vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}.$$

Par conséquent, pour tout vecteur \vec{u} , nous obtenons

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}.$$

Proposition (opposé d'une addition de deux vecteurs). *Pour tous les vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on a*

$$-(\vec{u} + \vec{v}) = (-\vec{u}) + (-\vec{v}).$$

Démonstration. En posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, d'une part, il vient

$$-(\vec{u} + \vec{v}) = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = -\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}.$$

D'autre part, nous avons

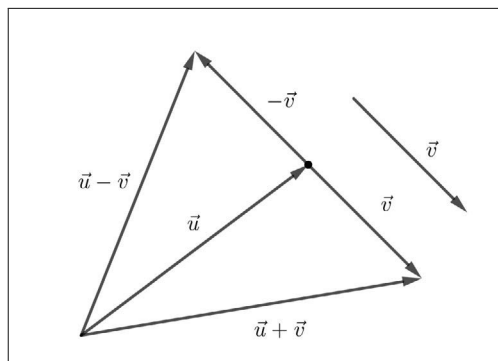
$$(-\vec{u}) + (-\vec{v}) = (-\overrightarrow{AB}) + (-\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA},$$

ce qui démontre l'égalité attendue.

7.2.3 Soustraction vectorielle

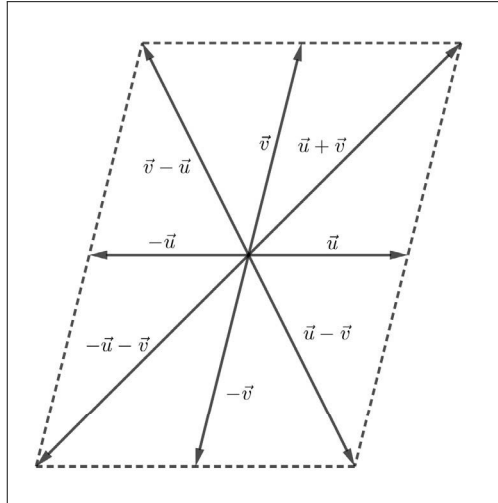
Définition. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. La soustraction de ces deux vecteurs, notée $\vec{u} - \vec{v}$, est le vecteur défini par

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$



Remarques. Nous en faisons deux.

- En général, nous avons $\vec{u} - \vec{v} \neq \vec{v} - \vec{u}$.
- \vec{u} et \vec{v} étant donnés, nous pouvons retenir la configuration "parallélogramme" ci-dessous.



Proposition (seconde relation de Chasles). *Pour tous les points O , A et B , nous avons*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Démonstration. Soient O , A et B trois points du plan. Nous obtenons

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + (-\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Proposition (opposé d'un addition de deux vecteurs : version définitive). *Pour tous les vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on a*

$$-(\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} - \vec{v}.$$

Démonstration. Nous savons que $-(\vec{u} + \vec{v}) = (-\vec{u}) + (-\vec{v})$.

Par définition de la soustraction vectorielle, nous obtenons

$$-(\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} - \vec{v}.$$

Proposition (égalité vectorielle). *Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.*

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\vec{u} = \vec{v}$.

(ii) $\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$.

Démonstration. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

$$(i) \Rightarrow (ii)$$

Si $\vec{u} = \vec{v}$, alors $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$.

$$(ii) \Rightarrow (i)$$

Si $\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$, alors $(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v} = \vec{0} + \vec{v}$, ce qui implique successivement :

$$(\vec{u} + (-\vec{v})) + \vec{v} = \vec{v},$$

$$\vec{u} + ((-\vec{v}) + \vec{v}) = \vec{v},$$

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{v},$$

$$\vec{u} = \vec{v}.$$

Proposition (simplification). Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs. Nous disposons de l'équivalence

$$\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}.$$

Démonstration. Nous utilisons l'équivalence précédente. Il vient successivement

$$\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} + \vec{w} - (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{0},$$

$$\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} + \vec{w} - \vec{v} - \vec{w} = \vec{0},$$

$$\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} - \vec{v} = \vec{0},$$

$$\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}.$$

Exemples. Nous en proposons deux qui illustrent cette propriété de simplification.

1^{er} exemple : \vec{a} et \vec{b} sont deux vecteurs donnés, nous résolvons l'équation

$$\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}.$$

En appliquant le théorème de simplification, nous obtenons

$$\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} + \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{b} + (-\vec{a}),$$

$$\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} + \vec{0} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Nous en concluons que l'équation $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}$, a pour unique solution

$$\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}.$$

2^e exemple : l'opposé d'un vecteur est unique.

Soit un vecteur \vec{u} . Supposons que ce vecteur admette deux opposés $-\vec{u}$ et \vec{u}' .

Dans ce cas nous en déduisons

$$\vec{0} = \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{u} + \vec{u}'.$$

Après simplification par \vec{u} , nous obtenons

$$-\vec{u} = \vec{u}',$$

ce qui assure l'unicité de l'opposé d'un vecteur.

Remarque. Nous terminons ce paragraphe en mettant en perspective l'analogie entre l'addition des réels et l'addition des vecteurs. Nous désignons par \vec{P} l'ensemble des vecteurs du plan.

Pour tous les réels x, y, z et pour tous les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, nous disposons du tableau suivant

Propriétés de + dans \mathbb{R}	Propriétés de + dans \vec{P}
$x + y \in \mathbb{R}$	$\vec{u} + \vec{v} \in \vec{P}$
$x + y = y + x$	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
$x + 0 = 0 + x = x$	$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
$x + (-x) = (-x) + x = 0$	$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$
$(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif	$(\vec{P}, +)$ est un groupe commutatif

7.3 Multiplication d'un réel par un vecteur

7.3.1 Définition de la multiplication d'un réel par un vecteur

Définition. Soient k un réel et \vec{u} un vecteur.

1^{er} cas : $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k \neq 0$.

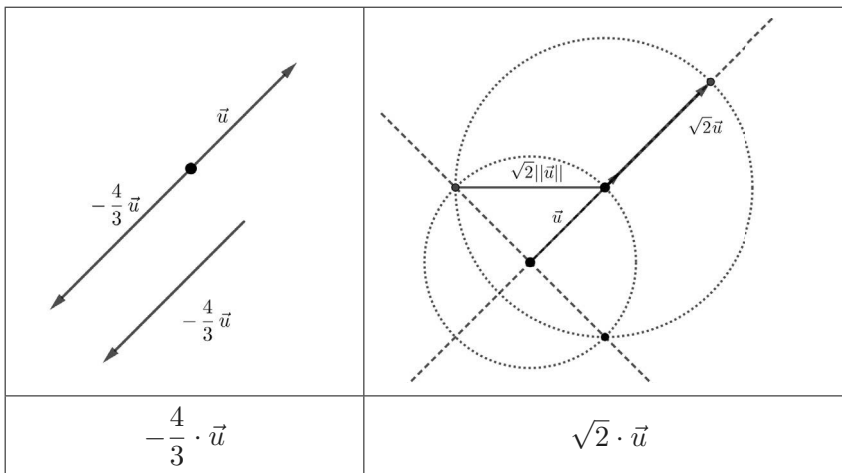
La multiplication du réel k par le vecteur \vec{u} est le vecteur, noté $k \cdot \vec{u}$, satisfaisant à :

- la direction du vecteur $k \cdot \vec{u}$ est celle de \vec{u} ,
- le sens de $k \cdot \vec{u}$ est $\begin{cases} \text{le sens de } \vec{u} \text{ si } k > 0 \\ \text{le sens contraire de } \vec{u} \text{ si } k < 0 \end{cases}$,
- la norme de $k \cdot \vec{u}$ est $\|k \cdot \vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

2^e cas : $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$.

Dans ce cas, nous avons, $k \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

Exemples. Nous en proposons deux.



Remarques. Nous en donnons quatre.

- Nous pouvons noter indifféremment $k\vec{u}$ ou $k \cdot \vec{u}$, la multiplication du réel k par le vecteur \vec{u} .

- De la définition, nous déduisons que :

si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

si $k = 0$, alors $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

- Posons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, avec $A \neq B$ et $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$.

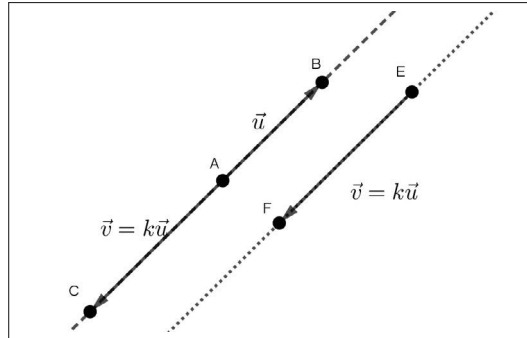
Le point A étant donné, ainsi que le vecteur \vec{v} , il existe un unique point C tel que

$$\overrightarrow{AC} = \vec{v} = k \cdot \vec{u} = k \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Nous en déduisons que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ont la même direction.

Par conséquent, les droites (AB) et (AC) sont parallèles et passent par le point A ; elles sont donc confondues.

Nous pouvons en conclure que les points A , B et C sont alignés. Nous étudierons la réciproque dans le paragraphe 6 consacré à la notion de colinéarité.



- Avec les données précédentes, soit $E \notin (AB)$.

Il existe un unique point F tel que

$$\overrightarrow{EF} = \vec{v} = k \cdot \vec{u} = k \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Par conséquent, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{EF} ont la même direction.

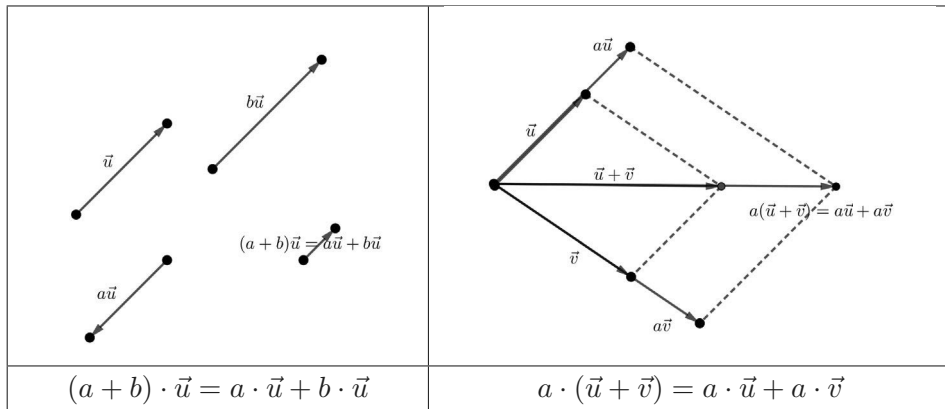
Il en résulte que les droites (AB) et (EF) sont parallèles strictement puisque $E \notin (AB)$ (voir la figure précédente).

7.3.2 Propriétés de la multiplication d'un réel par un vecteur

Proposition. Soient a et b deux réels, \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. Nous disposons des propriétés suivantes :

- $(a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$.
- $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$.
- $a \cdot (b \cdot \vec{u}) = (a \cdot b) \cdot \vec{u}$.
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Démonstration (partielle). Nous illustrons graphiquement les deux premiers points.



- Étudions le 3^e point.

Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'égalité est acquise.

Supposons à présent que $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Les vecteurs $a \cdot (b \cdot \vec{u})$ et $(a \times b) \cdot \vec{u}$ ont la même direction, celle de \vec{u} .

En ce qui concerne les normes de ces deux vecteurs, il vient

$$\|a \cdot (b \cdot \vec{u})\| = |a| \|b \cdot \vec{u}\| = |a| \times |b| \|\vec{u}\| = |a \times b| \|\vec{u}\| = \|(a \times b) \cdot \vec{u}\|.$$

En ce qui concerne le sens des vecteurs $a \cdot (b \cdot \vec{u})$ et $(a \times b) \cdot \vec{u}$, par disjonction, nous prouvons facilement que selon les signes de a et b , les deux vecteurs ont le même sens.

Les deux vecteurs $a \cdot (b \cdot \vec{u})$ et $(a \times b) \cdot \vec{u}$ ont la même direction, le même sens et la même longueur.

Nous pouvons en conclure que ces deux vecteurs sont égaux.

- Justifions l'égalité $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Ces deux vecteurs ont la même direction, le même sens et, de plus, nous avons

$$\|1 \cdot \vec{u}\| = 1 \times \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|,$$

ce qui montre que $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Corollaire. Soient a et b deux réels, \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. Nous disposons des propriétés suivantes :

- $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$.
- $(-a) \cdot \vec{u} = a \cdot (-\vec{u}) = -(a \cdot \vec{u})$.
- $(a - b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} - b \cdot \vec{u}$.
- $a \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = a \cdot \vec{u} - a \cdot \vec{v}$.

Démonstration. • Soit \vec{u} un vecteur. Nous avons

$$(-1) \cdot \vec{u} + \vec{u} = (-1) \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{u} = ((-1) + 1) \cdot \vec{u} = 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}.$$

Il en résulte que $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$.

• Soient \vec{u} un vecteur et a un réel. Nous obtenons comme ci-dessus

$$(-a) \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{u} = ((-a) + a) \cdot \vec{u} = 0 \cdot \vec{u} = \vec{0},$$

ce qui justifie que $(-a) \cdot \vec{u} = -(a \cdot \vec{u})$.

De plus, nous avons

$$a \cdot (-\vec{u}) + a \cdot \vec{u} = a \cdot (-\vec{u} + \vec{u}) = a \cdot \vec{0} = \vec{0},$$

ce qui prouve que $a \cdot (-\vec{u}) = -(a \cdot \vec{u})$.

• Soient \vec{u} un vecteur, a et b deux réels. Nous avons, en utilisant la propriété précédente,

$$(a - b) \cdot \vec{u} = (a + (-b)) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + (-b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} - b \cdot \vec{u},$$

ce qui démontre l'égalité attendue.

• Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs et a un réel. Il vient

$$a \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = a \cdot (\vec{u} + (-\vec{v})) = a \cdot \vec{u} + a \cdot (-\vec{v}) = a \cdot \vec{u} - a \cdot \vec{v},$$

ce qui justifie la dernière égalité.

Proposition (nullité du produit d'un réel par un vecteur). *Soient \vec{u} un vecteur et a un réel. Nous disposons de l'équivalence suivante :*

$$a \cdot \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}.$$

Démonstration. Si $a = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors d'après la définition de $a \cdot \vec{u}$, on sait que $a \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

Réciproquement, nous supposons que $a \cdot \vec{u} = \vec{0}$ avec $a \neq 0$.

Nous en déduisons

$$\frac{1}{a}(a \cdot \vec{u}) = \vec{0},$$

ce qui donne

$$\left(\frac{1}{a} \times a\right) \cdot \vec{u} = \vec{0}, \text{ soit } 1 \cdot \vec{u} = \vec{0},$$

par suite, nous obtenons $\vec{u} = \vec{0}$.

Nous supposons à présent que $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Si, par l'absurde, $a \neq 0$, alors nous en déduisons que $a \cdot \vec{u} \neq \vec{0}$, ce qui contredit l'hypothèse $a \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

Ainsi, nous avons montré

$$a \cdot \vec{u} = \vec{0} \text{ implique } a = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}.$$

Proposition (simplification). *Soient \vec{u} un vecteur non nul, a et b deux réels. Nous avons*

$$a \cdot \vec{u} = b \cdot \vec{u} \Leftrightarrow a = b.$$

Démonstration. Puisque $\vec{u} \neq \vec{0}$, en appliquant la proposition précédente, nous obtenons les équivalences

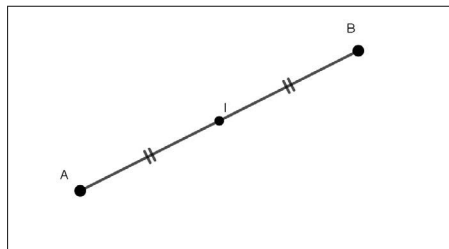
$$a \cdot \vec{u} = b \cdot \vec{u} \Leftrightarrow (a - b) \cdot \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

7.4 Milieu d'un segment - Symétrie centrale

7.4.1 Milieu d'un segment et calcul vectoriel

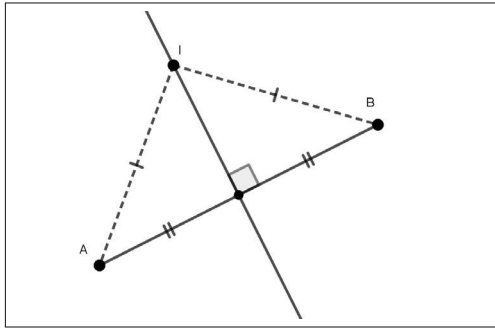
Définition (définition géométrique du milieu vue au collège). *Soient A et B deux points distincts du plan. Un point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si les deux conditions qui suivent sont réalisées.*

$$I \in [AB] \text{ et } IA = IB.$$



Remarque. Utilisée seule, la condition $IA = IB$ ne caractérise pas le milieu de $[AB]$.

Elle caractérise l'appartenance du point I à la médiatrice du segment $[AB]$.



Proposition (caractérisation vectorielle du milieu d'un segment). *Soient A et B deux points distincts du plan.*

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) *I est le milieu du segment [AB].*

(ii) $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii)

Si I est le milieu de [AB], nous pouvons affirmer que les vecteurs \vec{AI} et \vec{IB} ont :

- la même direction car $I \in [AB]$,
- le même sens car $I \in [AB]$,
- la même longueur car $IA = IB$.

Nous en déduisons

$$\vec{AI} = \vec{IB}, \text{ ce qui donne } -\vec{IA} = \vec{IB}.$$

Nous en concluons que $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

(ii) \Rightarrow (i)

Soit I un point satisfaisant à $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$, ce qui implique

$$-\vec{IA} = \vec{IB}.$$

D'une part, nous en déduisons

$$IA = \|\vec{IA}\| = \|\vec{-IB}\| = \|\vec{IB}\| = IB.$$

D'autre part, les vecteurs \vec{IA} et \vec{IB} , ont la même direction qui passe par I, donc $I \in (AB)$.

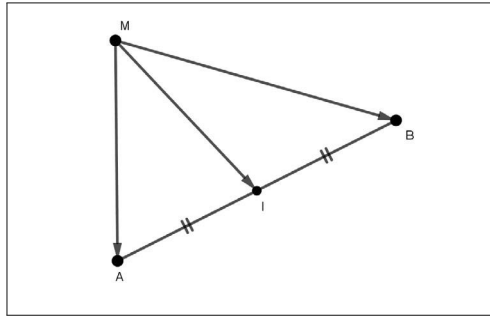
De plus les vecteurs \vec{IA} et \vec{IB} sont opposés, donc $I \in [AB]$.

Nous en concluons que le point I est le milieu du segment [AB].

Proposition (propriété vectorielle de la médiane d'un triangle). Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan, nous disposons de l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2 \cdot \overrightarrow{MI}.$$



Démonstration. Soit M un point quelconque du plan. Nous avons

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2 \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}.$$

Sachant que I est le milieu du segment $[AB]$, nous savons que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Nous en déduisons l'égalité attendue

$$\forall M \in (P), \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2 \cdot \overrightarrow{MI}.$$

Proposition (étude d'une réciproque). Soient A et B deux points distincts du plan. S'il existe un point I tel que, quel que soit le point M ,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2 \cdot \overrightarrow{MI},$$

alors I est le milieu du segment $[AB]$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un point I tel que, quel que soit le point M ,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2 \cdot \overrightarrow{MI}.$$

En particulier pour $M = I$, nous obtenons

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2 \cdot \overrightarrow{II} = 2 \cdot \vec{0} = \vec{0},$$

ce qui justifie que I est le milieu du segment $[AB]$.

Exemple. Un ensemble de points.

Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Nous considérons l'ensemble (C) des points M du plan tels que

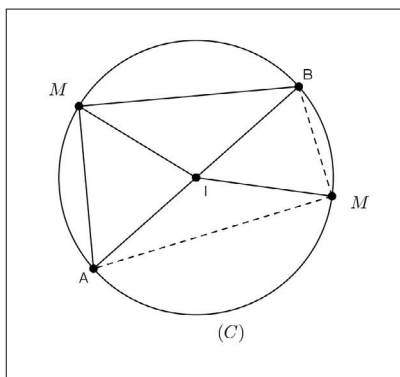
$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = AB.$$

En utilisant la propriété de la médiane pour réduire le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$, il vient

$$M \in (C) \Leftrightarrow \|2 \cdot \overrightarrow{MI}\| = AB \Leftrightarrow 2\|\overrightarrow{MI}\| = AB \Leftrightarrow IM = \frac{AB}{2},$$

ce qui prouve que (C) est le cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$.

Nous reconnaissons le cercle circonscrit au triangle ABC .



Proposition (autre caractérisation du milieu). Soient A et B deux points distincts du plan et I un point du plan. Les deux propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) I est le milieu du segment $[AB]$.
- (ii) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii)

Nous supposons que I est le milieu du segment $[AB]$.

Nous savons que, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2 \cdot \overrightarrow{MI}$.

En particulier pour $M = A$, nous obtenons

$$\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AI},$$

ce qui implique, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

(ii) \Rightarrow (i)

Nous supposons que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Il vient :

$$\overrightarrow{AB} - 2 \cdot \overrightarrow{AI} = \vec{0}, \text{ soit } \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA} - 2 \cdot \overrightarrow{AI} = \vec{0}.$$

Nous en déduisons

$$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0},$$

ce qui prouve que I est le milieu du segment $[AB]$.

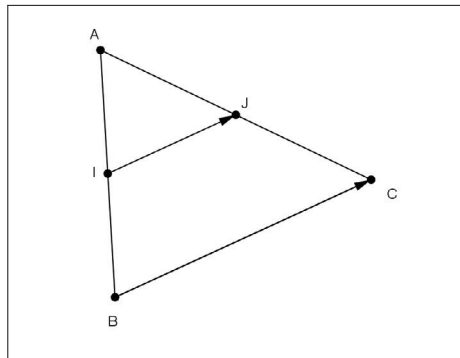
Proposition (version vectorielle de la propriété des milieux). *Soient ABC un triangle, I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AC]$. Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles et nous disposons de l'égalité*

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}.$$

Démonstration. Avec les données de l'énoncé, nous avons

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AJ} - 2 \cdot \overrightarrow{AI} = 2 \cdot (\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI}) = 2 \cdot \overrightarrow{IJ},$$

ce qui permet d'obtenir l'égalité proposée $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$.

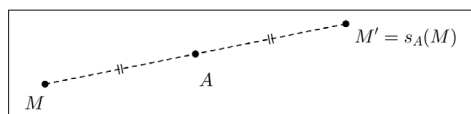


De plus nous en déduisons que les vecteurs \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{BC} ont la même direction. Par conséquent, les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

7.4.2 Symétrie centrale et calcul vectoriel

Définition (d'une symétrie centrale). *Soit A un point du plan. La symétrie de centre A , notée s_A , associe à chaque point M distinct de A , un unique point M' tel que A soit le milieu du segment $[MM']$.*

On dit que M' est l'image de M par s_A et on note $M' = s_A(M)$.



Remarque. $A = s_A(A)$. On dit que le centre A est invariant par s_A .

Proposition (caractérisation vectorielle d'une symétrie centrale). Soient A un point donné du plan, M et M' deux points distincts tels que $M \neq A$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $M' = s_A(M)$.
- (ii) $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$.

Démonstration. Soient M et M' deux points distincts tels que $M \neq A$.

(i) \Rightarrow (ii)

Si $M' = s_A(M)$, alors A est le milieu du segment $[MM']$.

Il résulte, vectoriellement, que nous avons $\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{AM} = \vec{0}$. Cela implique

$$\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}.$$

(ii) \Rightarrow (i)

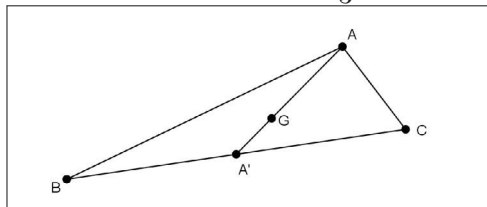
Si $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$, alors $\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{AM} = \vec{0}$, ce qui justifie que A est le milieu du segment $[MM']$.

Par conséquent, nous obtenons que $M' = s_A(M)$.

7.5 Centre de gravité d'un triangle

Définition (définition géométrique de centre de gravité d'un triangle). Soient ABC un triangle et A' le milieu du segment $[BC]$. Le centre de gravité du triangle ABC est le point G appartenant à la médiane (AA') tel que

$$G \in [AA'] \text{ et } AG = \frac{2}{3}AA'.$$



Proposition (égalités vectorielles déterminant le centre de gravité). Soit G le centre de gravité du triangle ABC et A' le milieu du segment $[BC]$. Nous disposons des deux égalités

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AA'} \text{ et } \overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}.$$

Démonstration. \triangleright Considérons les deux vecteurs \overrightarrow{AG} et $\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AA'}$. Ils ont

- la même direction car $G \in (AA')$,
- le même sens car $G \in [AA']$,
- la même longueur car $AG = \frac{2}{3}AA'$.

Nous en déduisons que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AA'}$.

\triangleright De cette dernière égalité, il résulte que $3 \cdot \overrightarrow{AG} = 2 \cdot \overrightarrow{AA'}$.

En appliquant la relation de Chasles, il vient

$$3 \cdot \overrightarrow{AG} = 2 \cdot (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA'}), \text{ soit } \overrightarrow{AG} = 2 \cdot \overrightarrow{GA'}.$$

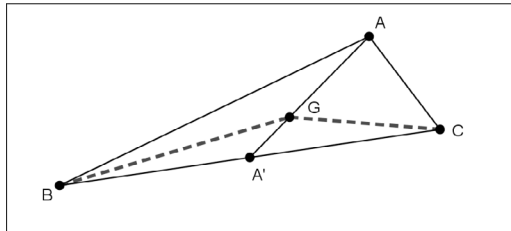
Finalement nous obtenons l'égalité

$$\overrightarrow{GA} = -2 \cdot \overrightarrow{GA'}.$$

Proposition (caractérisation du centre de gravité). *Soit ABC un triangle et G un point du plan. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- G est le centre de gravité du triangle ABC .
- G satisfait à l'égalité vectorielle $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii)



On suppose que G est le centre de gravité du triangle ABC .

Soit A' le milieu du segment $[BC]$. Le théorème de la médiane dans le triangle BGC donne

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2 \cdot \overrightarrow{GA'}.$$

En utilisant la seconde égalité de la proposition précédente, nous en déduisons

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + 2 \cdot \overrightarrow{GA'} = \vec{0}.$$

(ii) \Rightarrow (i)

Soit M un point du plan satisfaisant à :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Il vient

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Nous en déduisons

$$3 \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

En appliquant le théorème de la médiane dans le triangle BAC , nous obtenons

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AA'}.$$

Il en résulte que

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AA'}.$$

Or nous savons que le centre de gravité G du triangle ABC satisfait à

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AA'}.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG},$$

ce qui prouve que $M = G$.

Proposition (point de concours des trois médianes d'un triangle). *Soient ABC un triangle de centre de gravité G , A' , B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.*

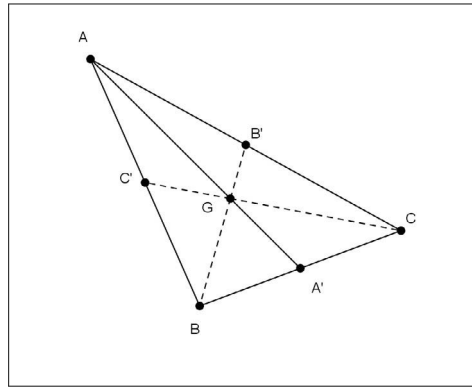
Les trois médianes de ce triangle sont concourantes en G .

Démonstration. Nous savons que le centre de gravité G du triangle ABC satisfait à

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

▷ En appliquant la propriété de la médiane dans le triangle AGC , il vient

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 2 \cdot \overrightarrow{GB'}.$$



Nous en déduisons

$$\vec{GB} + 2 \cdot \vec{GB'} = \vec{0}, \text{ c'est-à-dire } \vec{GB} = -2 \cdot \vec{GB'}.$$

▷ De la même façon, en appliquant la propriété de la médiane dans le triangle AGB , il vient

$$\vec{GA} + \vec{GB} = 2 \cdot \vec{GC'},$$

ce qui donne

$$\vec{GC} + 2 \cdot \vec{GC'} = \vec{0}, \text{ c'est-à-dire } \vec{GC} = -2 \cdot \vec{GC'}.$$

▷ Les trois égalités vectorielles

$$\vec{GA} = -2 \cdot \vec{GA'}, \vec{GB} = -2 \cdot \vec{GB'} \text{ et } \vec{GC} = -2 \cdot \vec{GC'},$$

prouvent que le centre de gravité G appartient aux trois médianes (AA') , (BB') et (CC') .

Nous avons ainsi établi que les trois médianes du triangle ABC sont sécantes en G .

Proposition (réduction du vecteur $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$). Soit ABC un triangle de centre de gravité G .

Pour tout point M du plan, nous disposons de l'égalité

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3 \cdot \vec{MG}.$$

Démonstration. M étant un point quelconque du plan, nous avons

$$\begin{aligned} \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} &= \vec{MG} + \vec{GA} + \vec{MG} + \vec{GB} + \vec{MG} + \vec{GC}, \\ \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} &= 3 \cdot \vec{MG} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}. \end{aligned}$$

Or, le point G est le centre de gravité du triangle ABC donc

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

L'égalité attendue en résulte, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \cdot \overrightarrow{MG}.$$

Proposition (étude d'une réciproque). *Soit ABC un triangle. S'il existe un point G tel que, quel que soit le point M appartenant au plan,*

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \cdot \overrightarrow{MG},$$

alors G est le centre de gravité du triangle ABC .

Démonstration. En particulier pour $M = G$ dans l'égalité donnée, il vient

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3 \cdot \overrightarrow{GG} = \vec{0},$$

ce qui prouve que G est le centre de gravité du triangle ABC .

7.6 Colinéarité de deux vecteurs

Proposition (caractérisation vectorielle de l'alignement). *Soient A , B et C trois points distincts du plan. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) A , B et C sont alignés.
- (ii) Il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.

Démonstration. Nous commençons par le plus simple, c'est-à-dire

(ii) \Rightarrow (i). Cette implication a déjà été justifiée dans la remarque du paragraphe 3.1 "multiplication d'un réel par un vecteur". Nous l'explicitons à nouveau.

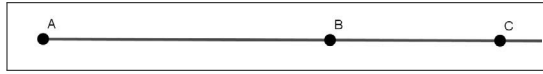
On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.

Les directions (AB) et (AC) des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont parallèles et A est commun à ces deux droites. Il en résulte que $(AB) = (AC)$, ce qui prouve l'alignement des points A , B et C .

(i) \Rightarrow (ii)

On suppose que les points A , B et C sont alignés. Relativement aux points A et B , nous distinguons par disjonction, deux cas : $C \in [AB)$ ou $C \notin [AB)$.

1^{er} cas : $C \in [AB)$.



Posons $k = \frac{AC}{AB}$.

Comme $A \neq B$, le réel k est défini.

Comme $A \neq C$, nous avons, $k > 0$.

Considérons les vecteurs \overrightarrow{AC} et $k \cdot \overrightarrow{AB}$.

Ces deux vecteurs ont

▷ la même direction car $C \in [AB)$,

▷ le même sens car $k > 0$.

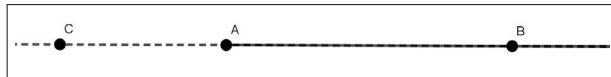
▷ De plus, nous avons

$$\|k \cdot \overrightarrow{AB}\| = k\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{AC}{AB} \times AB = AC = \|\overrightarrow{AC}\|.$$

Ces trois derniers points permettent d'affirmer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que

$$\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}.$$

2^e cas : $C \notin [AB)$.



Posons $k = -\frac{AC}{AB}$.

Comme $A \neq B$, le réel k est défini.

Comme $A \neq C$, on a, $k < 0$.

▷ Les vecteurs \overrightarrow{AC} et $k \cdot \overrightarrow{AB}$ ont la même direction car $C \in (AB)$.

▷ Puisque $k < 0$, les vecteurs \overrightarrow{AB} et $k \cdot \overrightarrow{AB}$ sont de sens contraires.

Puisque $C \notin [AB)$, les vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AB} sont aussi de sens contraires.

Il en résulte que \overrightarrow{AC} et $k \cdot \overrightarrow{AB}$ sont de même sens.

▷ De plus, nous avons

$$\|k \cdot \overrightarrow{AB}\| = -k\|\overrightarrow{AB}\| = -\left(-\frac{AC}{AB}\right) \times AB = AC = \|\overrightarrow{AC}\|.$$

Par conséquent, il existe un réel $k < 0$ tel que $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.

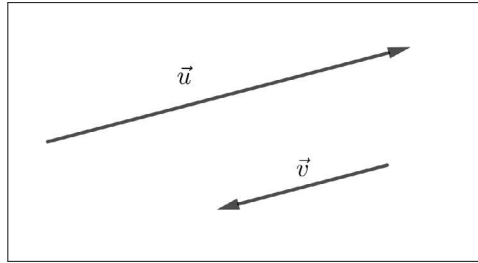
L'étude de ces deux cas, nous permet de conclure par :

$$\exists k \in \mathbb{R}^*, \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Remarque. L'alignement des points A, B et C peut être aussi caractérisé par l'existence d'un réel k non nul tel que $\overrightarrow{BC} = k \cdot \overrightarrow{BA}$ ou bien $\overrightarrow{CA} = k \cdot \overrightarrow{CB} \dots$

Définition (colinéarité de deux vecteurs). Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls.

On dit que ces deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.



Proposition (caractérisation de la colinéarité). Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.
- (ii) Il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$.

Démonstration. (ii) \Rightarrow (i)

S'il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$, alors les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont la même direction.

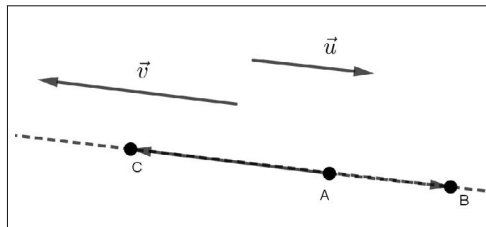
Il en résulte que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

(i) \Rightarrow (ii)

On suppose que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Soit A un point du plan.

Il existe deux points B et C distincts de A tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ont la même direction.

Par suite, les droites (AB) et (AC) sont parallèles et ont le point A en commun.

Ces deux droites sont donc confondues.

Ainsi les points A , B et C sont alignés.

En appliquant la proposition qui caractérise vectoriellement l'alignement, nous pouvons affirmer qu'il existe un réel k non nul tel que

$$\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Nous en concluons

qu'il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$.

Remarques. Nous en faisons deux.

- Si $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$, avec $k \in \mathbb{R}^*$, alors nous en déduisons que $\vec{u} = \frac{1}{k} \cdot \vec{v}$.
- Pour tout vecteur \vec{u} , nous savons que $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$.

Par extension de la notion de colinéarité, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

7.7 Alignement et parallélisme

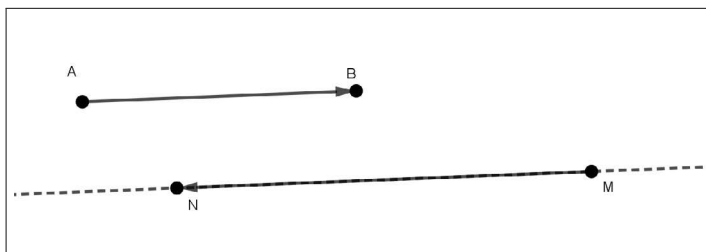
Proposition (caractérisation de l'alignement). *Soient A , B et C trois points distincts du plan. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- Les points A , B et C sont alignés.*
- Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.*

Démonstration. Il s'agit de l'énoncé de la proposition de caractérisation de l'alignement couplé avec la caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs.

Proposition (caractérisation du parallélisme de deux droites). *Soient A , B , M , N quatre points distincts. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- Les droites (AB) et (MN) sont parallèles.*
- Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{MN} sont colinéaires.*



Démonstration. (i) \Rightarrow (ii)

Si les droites (AB) et (MN) sont parallèles, alors les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{MN} ont la même direction, ce qui justifie que ces deux vecteurs sont colinéaires.

(ii) \Rightarrow (i)

Si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{MN} sont colinéaires, alors ils ont la même direction, ce qui justifie que les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

Remarque. Ne pas confondre droites parallèles et vecteurs colinéaires. En d'autres termes la locution « vecteurs parallèles » est incorrecte.

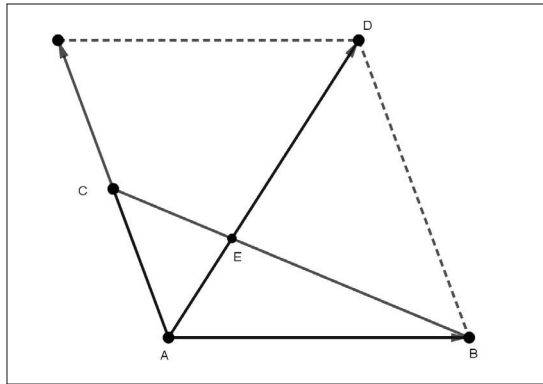
Exemples. Alignement et parallélisme dans une configuration du plan.

Soit ABC un triangle. Nous considérons les points D et E tels que

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BE} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

1^{er} exemple : Nous montrons que les points A , E et D sont alignés.

▷ Nous commençons par placer ces points sur une figure.



▷ Nous exprimons le vecteur \overrightarrow{AE} en fonction des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

Nous partons de l'égalité $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BC}$ donnée dans l'énoncé. En utilisant la relation de Chasles, il vient

$$\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}),$$

ce qui donne

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

Nous en déduisons que les vecteurs \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{AD} sont colinéaires.

Par suite, ils ont la même direction passant par A , ce qui prouve que les points A , E et D sont alignés.

Il en résulte que $E \in (AD)$.

De plus $E \in (BC)$ puisque $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Par conséquent, les droites (AD) et (BC) sont sécantes en E .

2^e exemple Nous considérons dans la même configuration un point G satisfaisant à l'égalité vectorielle

$$3 \cdot \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - 4 \cdot \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

▷ Nous montrons que les droites (CG) et (AD) sont parallèles.

Dans cette égalité, nous introduisons le point C par la relation de Chasles, afin d'exprimer le vecteur \overrightarrow{CG} en fonction des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

Nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} 3 \cdot \overrightarrow{GC} + 3 \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{CB} - 4 \cdot \overrightarrow{GC} &= \vec{0}, \\ -2\overrightarrow{GC} + 3 \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$2\overrightarrow{CG} = 3 \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

Ainsi, les vecteurs \overrightarrow{CG} et \overrightarrow{AD} sont colinéaires, ce qui prouve que les droites (CG) et (AD) sont parallèles.

▷ Nous plaçons le point G sur la figure.

Désignons par F le point tel que $\overrightarrow{AF} = 2 \cdot \overrightarrow{AC}$.

Nous remarquons que C est le milieu du segment $[AF]$.

De plus, de l'égalité $2\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AD}$, nous déduisons

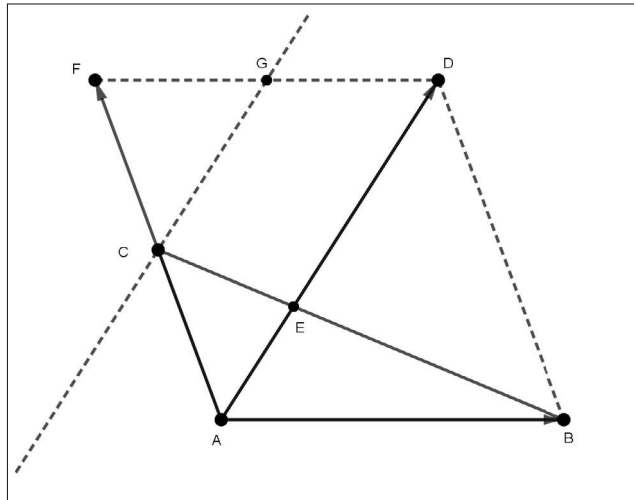
$$\begin{aligned} 2(\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{FC}) &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}, \\ 2\overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{FC}. \end{aligned}$$

Or nous avons $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CA}$, ce qui donne

$$2\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FD}.$$

Ainsi le point G est le milieu du segment $[FD]$.

Par conséquent le point G est à l'intersection de la droite (FD) avec la parallèle à la droite (AD) passant par C .



7.8 Homothétie

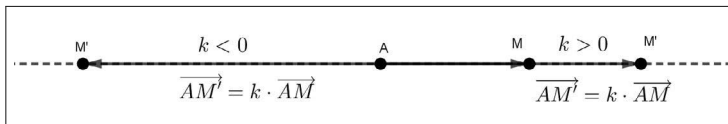
Définition. Un point A du plan et un réel $k \neq 0$ sont donnés.

L'homothétie de centre A et de rapport k , notée $h = h_{A,k}$, associe à chaque point M du plan un unique point M' tel que

$$\overrightarrow{AM'} = k \cdot \overrightarrow{AM}.$$

On dit que M' est l'image de M par l'homothétie $h = h_{A,k}$.

On note $M' = h(M)$ ou $M' = h_{A,k}(M)$.



Remarques. Nous en faisons cinq.

- Une homothétie de centre A transforme M en M' tel que les points A , M et M' soient alignés.

- Si $k = 0$, alors $h = h_{A,0}$ associe à chaque point M du plan le point A . Dans ce cas, on dit que h est une *transformation constante*.

- Si $k = 1$, alors $h = h_{A,1}$ associe à chaque point M du plan le point M . Dans ce cas, $h_{A,1}$ est l'identité du plan, notée $id_{(P)}$.

- Si $k = -1$, alors $h = h_{A,-1}$ associe à chaque point M du plan un unique point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$.

Dans ce cas $h_{A,-1}$ est la symétrie centrale de centre A .

- $h(A) = h_{A,k}(A) = A$. Le centre A est invariant par $h_{A,k}$.

Exemple (homothéties dans un triangle). Soit ABC un triangle de centre de gravité G .

En désignant par A' , B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, nous savons

$$\overrightarrow{GA} = -2 \cdot \overrightarrow{GA'}, \quad \overrightarrow{GB} = -2 \cdot \overrightarrow{GB'} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GC} = -2 \cdot \overrightarrow{GC'}.$$

▷ Ces égalités vectorielles justifient que l'homothétie h de centre G et de rapport -2 est telle que

$$h(A') = A, \quad h(B') = B \quad \text{et} \quad h(C') = C.$$

Ainsi cette homothétie $h = h_{G,-2}$ associe les milieux des côtés du triangle aux sommets de ce dernier.

▷ Des trois égalités vectorielles rappelées ci-dessus, nous déduisons

$$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{GA}, \quad \overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{GB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{GC}.$$

Considérons l'homothétie h' de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$. Nous obtenons

$$h'(A) = A', \quad h'(B) = B' \quad \text{et} \quad h'(C) = C'.$$

Nous en concluons que l'homothétie $h' = h_{G,-\frac{1}{2}}$ transforme respectivement les points A , B et C en A' , B' et C' .

Proposition (action d'une homothétie sur deux points). *Soient M et N deux points distincts d'images respectives M' et N' par une homothétie h de rapport $k \neq 0$ et de centre A . Nous disposons de l'égalité*

$$\overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}.$$

Démonstration. Puisque $h(M) = M'$ et $h(N) = N'$, nous en déduisons

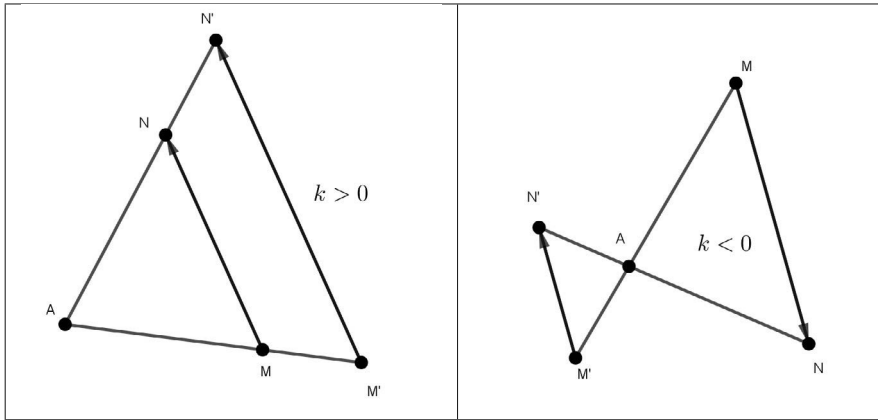
$$\overrightarrow{AM'} = k \cdot \overrightarrow{AM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN'} = k \cdot \overrightarrow{AN}.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{AN'} - \overrightarrow{AM'} = k \cdot (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) = k \cdot \overrightarrow{MN}.$$

Remarque. Avec les données de cette proposition, les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.

Nous observons que l'action d'une homothétie sur deux points est la version vectorielle d'une configuration de Thalès comme l'indique le tableau ci-après.



Par ailleurs, nous donnerons dans l'exercice 14 du paragraphe "Exercices corrigés", un preuve vectorielle du théorème de Thalès.

Corollaire. Une homothétie h de rapport $k \neq 0$ multiplie les distances par $|k|$.

Démonstration. Soient M et N deux points d'images M' et N' par l'homothétie h . Nous savons que

$$\overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}.$$

Il en résulte

$$M'N' = \|\overrightarrow{M'N'}\| = \|k \cdot \overrightarrow{MN}\| = |k| \times \|\overrightarrow{MN}\| = |k| \times MN.$$

Remarque. Agrandissement - Réduction

Si $|k| > 1$, c'est-à-dire $k < -1$ ou $k > 1$, alors k est un coefficient d'agrandissement des figures sur lesquelles agit l'homothétie.

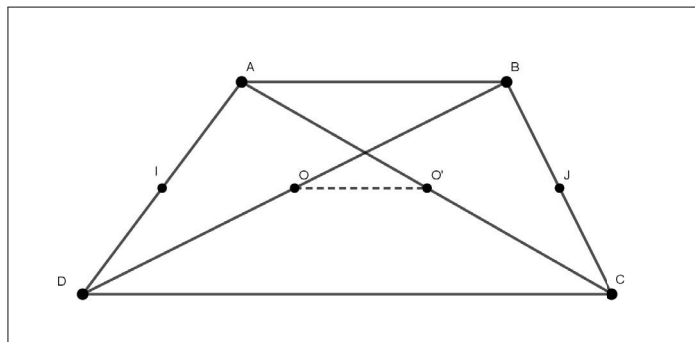
Si $|k| < 1$, c'est-à-dire $-1 < k < 1$, alors k est un coefficient de réduction des figures sur lesquelles agit l'homothétie.

Si $|k| = 1$, c'est-à-dire $k = 1$ ou $k = -1$, alors l'homothétie est l'identité du plan ou une symétrie centrale et toutes les deux conservent les distances.

7.9 Exercices corrigés

Exercice 1. Trapèze - Relation de Chasles - Milieux

Le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze tel que $(AB) \parallel (DC)$. On désigne par O le milieu du segment $[DB]$ et par O' le milieu du segment $[AC]$.



1. Montrer que : $\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC})$.
2. Établir que : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
3. Soient I le milieu du segment $[AD]$ et J le milieu du segment $[BC]$.
Prouver que

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

4. En déduire

$$\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC} \text{ et } \overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}.$$

Solution

1. Nous avons, grâce à la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} &= (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}) + (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'C}), \\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} &= 2 \cdot \overrightarrow{OO'} + (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO}) + (\overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'C}). \end{aligned}$$

Puisque O est le milieu du segment $[DB]$ et O' le milieu du segment $[AC]$, nous en déduisons

$$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'C} = \vec{0},$$

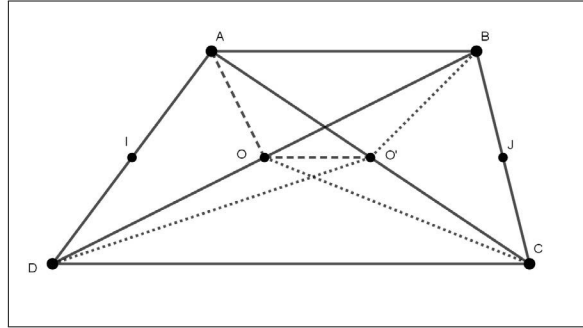
ce qui donne

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = 2 \cdot \overrightarrow{OO'}.$$

Nous en concluons :

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}).$$

2.



Nous appliquons le théorème de la médiane dans le triangle AOC . Nous obtenons

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2 \cdot \overrightarrow{OO'}.$$

De la même façon, le théorème de la médiane dans le triangle $BO'D$ donne

$$\overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'D} = 2 \cdot \overrightarrow{O'O}.$$

En additionnant ces deux égalités, il vient

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'D} = 2(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'O}) = \vec{0}.$$

3. En appliquant la relation de Chasles et puisque I est le milieu du segment $[AD]$ et J le milieu du segment $[BC]$, nous avons

$$\begin{aligned} 2 \cdot \overrightarrow{IJ} &= 2 \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}) = \overrightarrow{DA} + 2 \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}) = \overrightarrow{DA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \\ 2 \cdot \overrightarrow{IJ} &= (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}) + 2 \cdot \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

4. Des questions 1 et 3, il résulte que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{IJ} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{DC}, \\ \overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{IJ} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Exercice 2. Régionnement du plan

Soient ABC un triangle isocèle en B , I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[BC]$.

1. Déterminer l'ensemble (D) des points M tels que

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| \leq \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|.$$

2. Déterminer l'ensemble Γ des points M tels que

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| \leq \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

Solution

1. Puisque I est le milieu du segment $[AB]$, pour tout point M du plan, nous avons

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2 \cdot \overrightarrow{MI}.$$

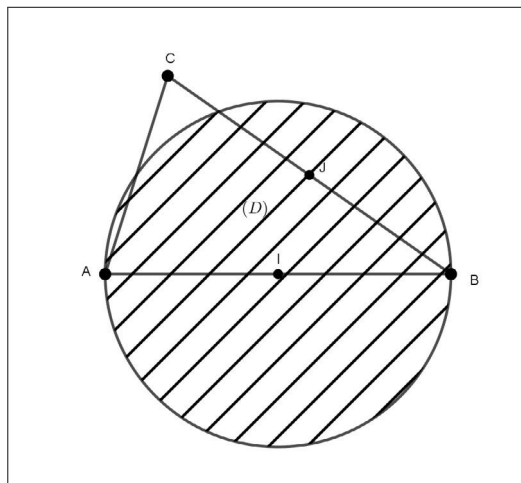
De plus nous observons que

$$\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}.$$

Puisque le triangle ABC un triangle isocèle en B , nous en déduisons

$$M \in (D) \Leftrightarrow \|2 \cdot \overrightarrow{MI}\| \leq \|\overrightarrow{CB}\| \Leftrightarrow 2IM \leq CB \Leftrightarrow 2IM \leq AB.$$

Nous en concluons que (D) est le disque de centre I et de rayon $\frac{1}{2}AB$.
Ce disque (fermé) est hachuré sur la figure ci-dessous.



2. Puisque J est le milieu du segment $[BC]$, pour tout point M du plan, nous avons

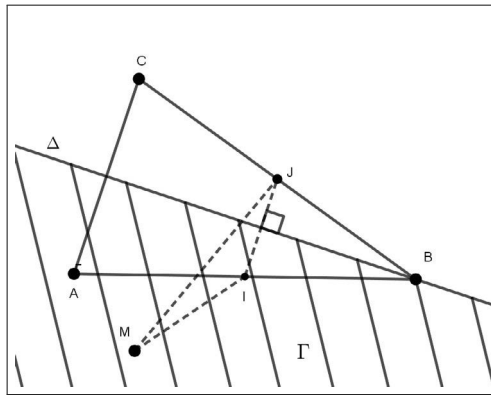
$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2 \cdot \overrightarrow{MJ}.$$

Il en résulte

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \|2 \cdot \overrightarrow{MI}\| \leq \|2 \cdot \overrightarrow{MJ}\| \Leftrightarrow MI \leq MJ.$$

Par conséquent, Γ est un demi-plan de frontière la médiatrice Δ du segment $[IJ]$.

Ce demi-plan est hachuré sur la figure ci-dessous.



Exercice 3. Quelques propriétés d'une symétrie centrale

A est un point fixé, B et C sont deux points distincts. On considère les points B' et C' tels que $B' = s_A(B)$ et $C' = s_A(C)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{B'C'} = -\overrightarrow{BC}$. Que peut-on en déduire pour les droites (BC) et $(B'C')$?

2. Justifier que s_A conserve les distances.

3. Montrer que s_A conserve les milieux, c'est-à-dire, prouver que si I est le milieu du segment $[BC]$, alors $I' = s_A(I)$ est le milieu du segment $[B'C']$.

Solution

1. Puisque $B' = s_A(B)$ et $C' = s_A(C)$, nous avons

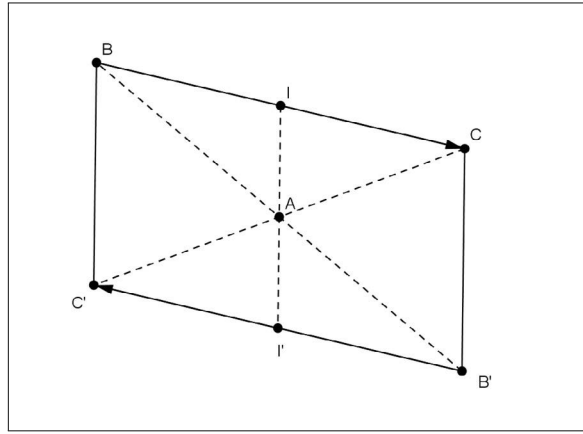
$$\overrightarrow{AB'} = -\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC'} = -\overrightarrow{AC}.$$

Nous en déduisons

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}.$$

L'égalité $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CB}$ justifie que la quadrilatère $BCB'C'$ est un parallélogramme.

Nous en déduisons que les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.



2. Nous avons

$$B'C' = \|\overrightarrow{B'C'}\| = \|\overrightarrow{-BC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = BC,$$

ce qui justifie que s_A conserve les distances.

3. Puisque I est le milieu du segment $[BC]$, nous avons $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Nous savons $B' = s_A(B)$, $C' = s_A(C)$ et $I' = s_A(I)$.

En appliquant la question 1, il en résulte

$$\overrightarrow{I'B'} = -\overrightarrow{IB} \text{ et } \overrightarrow{I'C'} = -\overrightarrow{IC}.$$

Nous en déduisons

$$\overrightarrow{I'B'} + \overrightarrow{I'C'} = -(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = -\vec{0} = \vec{0},$$

ce qui établit que le point $I' = s_A(I)$ est le milieu du segment $[B'C']$.

Exercice 4. Composée de deux symétries centrales

Soient A et B deux points distincts.

On considère les symétries centrales s_A et s_B telles que, pour tout point M du plan,

$$M_1 = s_B(M) \text{ et } M' = s_A(M_1).$$

1. En désignant par $s_A \circ s_B$ la transformation qui associe, à chaque point M , le point M' , quelle est la nature de $s_A \circ s_B$?

2. A-t-on $s_A \circ s_B = s_B \circ s_A$?

Solution

1. Soit M un point du plan.

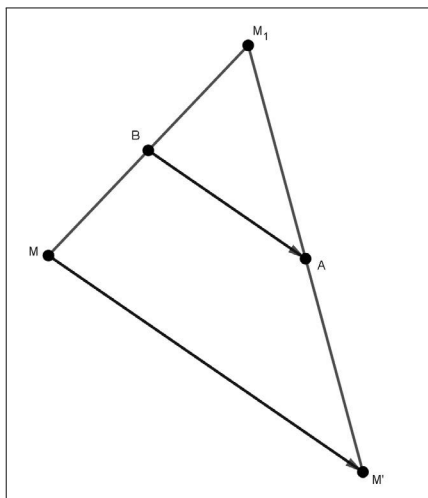
Puisque $M_1 = s_B(M)$ et $M' = s_A(M_1)$, B est le milieu de $[MM_1]$ et A le milieu de $[M_1M']$, nous obtenons,

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2 \cdot (\overrightarrow{BM_1} + \overrightarrow{M_1A}) = 2 \cdot \overrightarrow{BA}.$$

Ainsi la composée $s_A \circ s_B$ est la translation de vecteur $2 \cdot \overrightarrow{BA}$.

Remarque.

En observant la figure ci-dessous, nous pouvons aussi justifier ce résultat par le théorème des milieux dans le triangle MM_1M' .



2. En procédant de la même façon, nous obtenons que $s_B \circ s_A$ est la translation de vecteur $2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

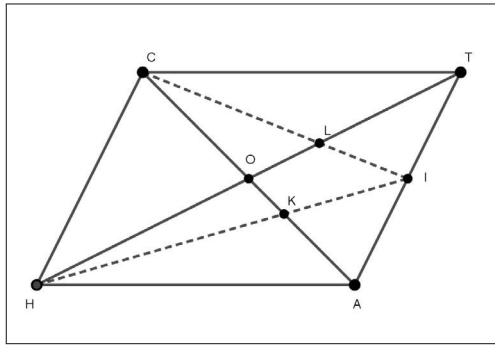
Puisque $A \neq B$, nous en concluons que $s_A \circ s_B \neq s_B \circ s_A$.

Exercice 5. Parallélogramme et centre de gravité

$CHAT$ est un parallélogramme de centre O et I est le milieu du segment $[AT]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{HT} + \overrightarrow{CA} = 4 \cdot \overrightarrow{OI}$.

2. La droite (CI) coupe la droite (OT) en L et la droite (HI) coupe (OA) en K .



Montrer que le point L est le centre de gravité du triangle CAT . Que peut-on dire du point K ?

3. En déduire que $\overrightarrow{HC} = 3 \cdot \overrightarrow{KL}$. Que peut-on dire des droites (KL) et (HC) ?

Solution

1. Puisque O est le milieu du segment $[HT]$ et du segment $[AC]$, nous en déduisons

$$\overrightarrow{HT} = 2 \cdot \overrightarrow{OT} \text{ et } \overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{OA}.$$

Par addition, nous obtenons

$$\overrightarrow{HT} + \overrightarrow{CA} = 2 \cdot (\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OA}).$$

En appliquant la propriété de la médiane dans la triangle AOT , il vient

$$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OA} = 2 \cdot \overrightarrow{OI}.$$

Nous en concluons

$$\overrightarrow{HT} + \overrightarrow{CA} = 4 \cdot \overrightarrow{OI}.$$

2. Dans le triangle CAT , le point L appartient aux deux médianes (OT) et (CI) .

Il en résulte que L est le centre de gravité du triangle CAT .

De même, dans le triangle HAT , le point K appartient aux deux médianes (HI) et (AO) , ce qui prouve que K est le centre de gravité du triangle HAT .

3. En appliquant les égalités vectorielles liées au centre de gravité, nous obtenons

$$\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IH} = 3 \cdot \overrightarrow{IL} - 3 \cdot \overrightarrow{IK} = 3 \cdot (\overrightarrow{IL} - \overrightarrow{IK}) = 3 \cdot \overrightarrow{KL}.$$

Les vecteurs \overrightarrow{HC} et \overrightarrow{KL} sont colinéaires. Ils ont donc la même direction, ce qui prouve que les droites (KL) et (HC) sont parallèles.

Exercice 6. Conservation du centre de gravité par une symétrie centrale

Soient ABC un triangle de centre de gravité G .

On désigne par B' , C' et G' les images des points B , C et G par la symétrie centrale de centre A .

Montrer que G' est le centre de gravité du triangle $AB'C'$.

Solution

En appliquant le cours, puisque $G' = s_A(G)$, $B' = s_A(B)$ et $C' = s_A(C)$, nous obtenons

$$\overrightarrow{G'A} = -\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{G'B'} = -\overrightarrow{GB} \text{ et } \overrightarrow{G'C'} = -\overrightarrow{GC}.$$

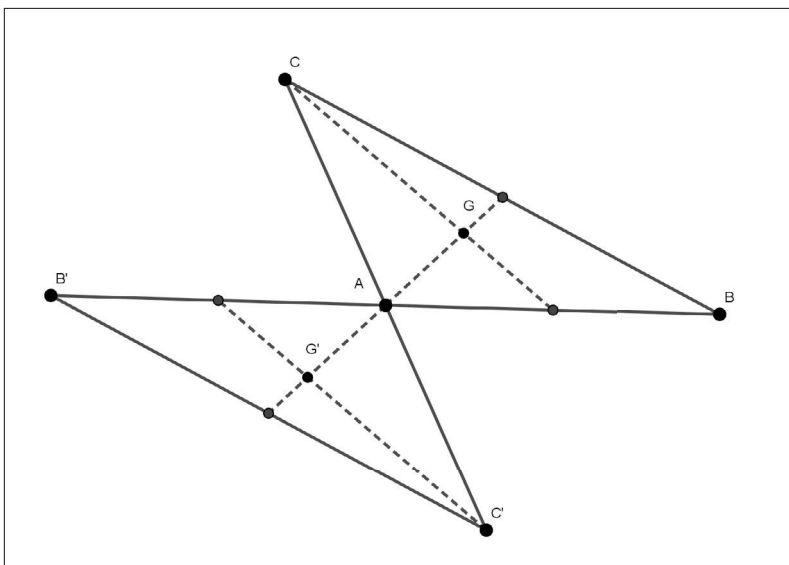
Comme G est le centre de gravité du triangle ABC , nous savons que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Nous en déduisons

$$\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}.$$

Nous en concluons que G' est le centre de gravité du triangle $AB'C'$.



Exercice 7. Ensembles de points

ABC est un triangle de centre de gravité G .

1. Déterminer l'ensemble (C) des points M tels que

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3AB.$$

2. Déterminer l'ensemble Δ des points M tels que

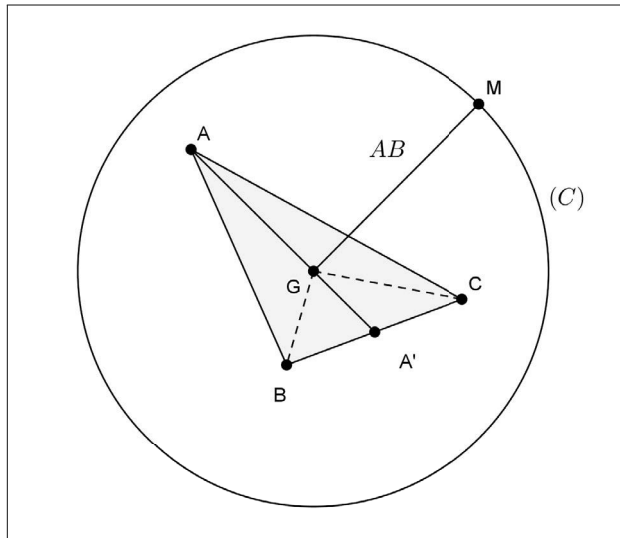
$$2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

Solution

1. Soit M un point du plan. En utilisant la propriété de réduction du centre de gravité, nous obtenons

$$M \in (C) \Leftrightarrow \|3 \cdot \overrightarrow{MG}\| = 3AB \Leftrightarrow 3\|\overrightarrow{MG}\| = 3AB \Leftrightarrow GM = AB.$$

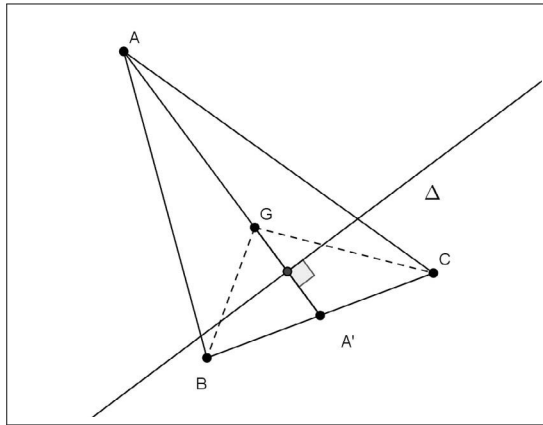
Il en résulte que (C) est le cercle de centre G et de rayon AB .



2. En utilisant les propriétés de réduction du centre de gravité G du triangle ABC et du milieu A' du segment $[BC]$, nous obtenons

$$M \in \Delta \Leftrightarrow 2\|3 \cdot \overrightarrow{MG}\| = 3\|2 \cdot \overrightarrow{MA'}\| \Leftrightarrow 6\|\overrightarrow{MG}\| = 6\|\overrightarrow{MA'}\| \Leftrightarrow MG = MA'.$$

Nous en concluons que Δ est la médiatrice du segment $[A'G]$.



Exercice 8. Quadrilatère - Points alignés - Ensemble de points

Soient $ABCD$ un quadrilatère, I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$. On considère un point O tel que

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}.$$

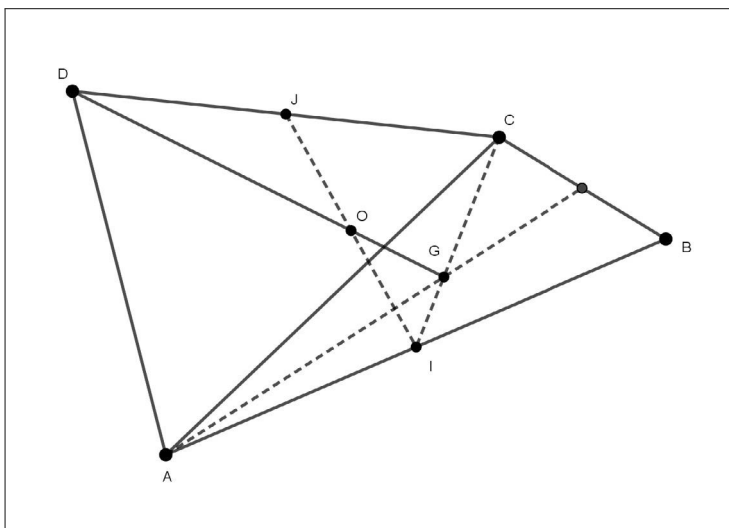
1. Montrer que O est le milieu du segment $[IJ]$.
2. Le point G étant le centre de gravité du triangle ABC , prouver que les points D , G et O sont alignés.
3. On désigne par (C) l'ensemble des points M du plan tels que

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| = 12OG.$$

Montrer que $D \in (C)$ et déterminer la nature de (C) .

Solution

Nous commençons par une figure concernant les deux premières questions.



1. La propriété de la médiane dans le triangle AOB donne

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2 \cdot \overrightarrow{OI}.$$

La propriété de la médiane dans le triangle COD donne

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2 \cdot \overrightarrow{OJ}.$$

Nous en déduisons

$$2 \cdot \overrightarrow{OI} + 2 \cdot \overrightarrow{OJ} = 2 \cdot (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) = 2 \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0}.$$

Ceci donne

$$\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}.$$

Nous avons ainsi justifié que O est le milieu du segment $[IJ]$.

2. Puisque G est le centre de gravité du triangle ABC , la propriété de réduction permet d'écrire

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3 \cdot \overrightarrow{OG}.$$

Nous en déduisons, à partir de l'égalité vectorielle définissant le point O ,

$$3 \cdot \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}, \text{ soit } \overrightarrow{OD} = -3 \cdot \overrightarrow{OG}.$$

Les vecteurs \overrightarrow{OD} et \overrightarrow{OG} ont la même direction passant par O .

Nous en concluons que les points D , G et O sont alignés.

3. Montrons que $D \in (C)$.

Par réduction, nous avons

$$\|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD}\| = \|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\| = \|3 \cdot \overrightarrow{DG}\|.$$

Nous savons que $\overrightarrow{OD} = -3 \cdot \overrightarrow{OG}$ donc

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OG} = 4 \cdot \overrightarrow{OG}.$$

Il en résulte

$$\|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\| = 3\|4 \cdot \overrightarrow{OG}\| = 12OG.$$

Ceci montre que $D \in (C)$.

Soit M un point du plan.

Nous commençons par réduire le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$, en introduisant par la relation de Chasles le point O .

Il vient :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) = 4 \cdot \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4 \cdot \overrightarrow{MO} + \vec{0} = 4 \cdot \overrightarrow{MO}.$$

Nous en déduisons

$$M \in (C) \Leftrightarrow \|4 \cdot \overrightarrow{MO}\| = 12OG \Leftrightarrow 4\|\overrightarrow{MO}\| = 12OG \Leftrightarrow OM = 3OG = OD.$$

Nous en concluons que (C) est le cercle de centre O passant par D .

Exercice 9. Barycentre de deux points

Soient A et B deux points distincts et I le milieu du segment $[AB]$. On désigne par G le point satisfaisant à

$$\overrightarrow{GA} + b \cdot \overrightarrow{GB} = \vec{0}, \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

1. Pour quelle valeur de $b > 0$, G est-il confondu avec I ?
2. Justifier que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{b+1} \cdot \overrightarrow{AB}$.
Que peut-on dire des points A , B et G ?
3. Montrer que, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + b \cdot \overrightarrow{MB} = (b+1) \cdot \overrightarrow{MG}$.

Solution

1. Le milieu I du segment $[AB]$ est caractérisé par l'égalité,

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

Par suite, $G = I$ si et seulement si $b = 1$.

2. Via la relation de Chasles, l'égalité $\overrightarrow{GA} + b \cdot \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ induit

$$\overrightarrow{GA} + b \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0},$$

ce qui donne

$$(b+1) \cdot \overrightarrow{AG} = b \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Puisque $b > 0$, nous savons que $b+1 \neq 0$. Nous en concluons

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{b+1} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AG} sont colinéaires.

Il en résulte que les points A , B et G sont alignés.

Remarque

L'alignement de ces trois points peut être obtenu immédiatement par l'égalité :

$$\overrightarrow{GA} = -b \cdot \overrightarrow{GB}.$$

3. Soit M un point quelconque du plan. À nouveau grâce à la relation de Chasles, nous obtenons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + b \cdot \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + b \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = (b+1) \cdot \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + b \cdot \overrightarrow{GB}, \\ \overrightarrow{MA} + b \cdot \overrightarrow{MB} &= (b+1) \cdot \overrightarrow{MG} + \vec{0} = (b+1) \cdot \overrightarrow{MG}. \end{aligned}$$

Remarque

Le point G satisfaisant à l'égalité vectorielle $\overrightarrow{GA} + b \cdot \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ est le *barycentre* des points A et B affectés respectivement des coefficients (ou masse) 1 et b .

On dit aussi que G est le barycentre des points *pondérés* $(A, 1)$ et (B, b) , avec $b > 0$, donc $b + 1 \neq 0$.

Exercice 10. Barycentre de trois points - Ensemble de points

Soient ABC un triangle de centre de gravité G et I le milieu du segment $[AB]$.

On considère le point H tel que

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + 2 \cdot \overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

1. Montrer que H est le milieu du segment $[CI]$. Placer H sur une figure.
2. Montrer que, quel que soit le point M du plan,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} = 4 \cdot \overrightarrow{MH}.$$

3. En déduire l'ensemble Δ des points M tels que

$$3\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC}\| = 4\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

Solution

1. Nous appliquons la propriété de la médiane dans le triangle AHB . Il vient

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = 2 \cdot \overrightarrow{HI}.$$

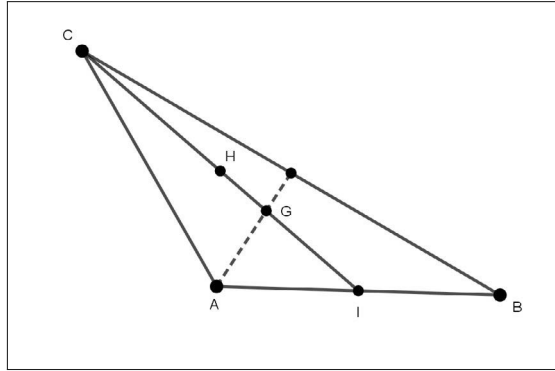
En reportant dans l'égalité vectorielle définissant le point H , nous obtenons

$$2 \cdot \overrightarrow{HI} + 2 \cdot \overrightarrow{HC} = \vec{0},$$

ce qui donne

$$\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

Nous en concluons que H est le milieu du segment $[CI]$.



2. Soit M un point quelconque du plan.

Nous réduisons le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC}$, en introduisant, par le relation de Chasles, le point H . Il vient

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}) + 2 \cdot (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC}), \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} &= 4 \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + 2 \cdot \overrightarrow{HC} = 4 \cdot \overrightarrow{MH} + \vec{0} = 4 \cdot \overrightarrow{MH}. \end{aligned}$$

3. Nous savons d'après la question précédente que

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} = 4 \cdot \overrightarrow{MH}.$$

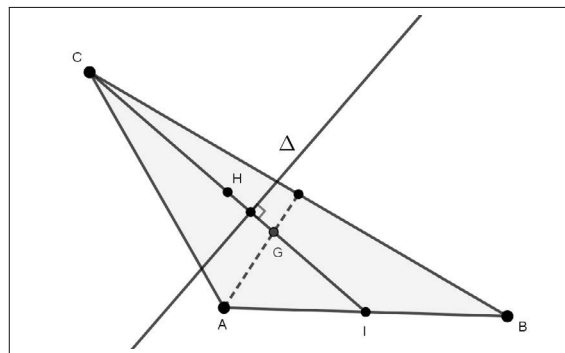
De plus G est le centre de gravité du triangle ABC . Par réduction, nous obtenons

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \cdot \overrightarrow{MG}.$$

Nous en déduisons,

$$M \in \Delta \Leftrightarrow 3\|4 \cdot \overrightarrow{MH}\| = 4\|3 \cdot \overrightarrow{MG}\| \Leftrightarrow 12\|\overrightarrow{MH}\| = 12\|\overrightarrow{MG}\| \Leftrightarrow MH = MG.$$

Nous avons ainsi prouvé que Δ est la médiatrice du segment $[HG]$.



Exercice 11. Points variables sur un parallélogramme

Soient $ABCD$ un parallélogramme et k un réel donné distinct de 0 et de 1.

On désigne par E et G les points tels que

$$\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AG} = (1 - k) \cdot \overrightarrow{AD}.$$

La parallèle à la droite (AD) passant par E coupe la droite (CD) en H .

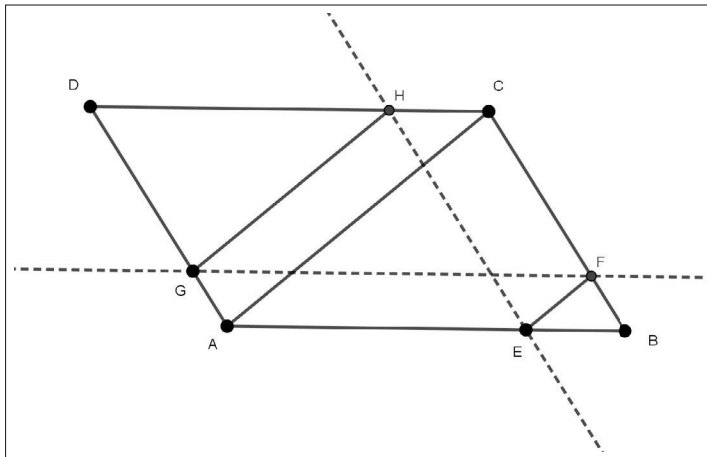
La parallèle à la droite (AB) passant par G coupe la droite (BC) en F .

1. Faire une figure pour $k = \frac{3}{4}$.

2. Montrer que, quel que soit $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$, les droites (EF) , (GH) et (AC) sont parallèles.

Solution

1.



2. Nous commençons par démontrer que les droites (EF) et (AC) sont parallèles.

Nous avons

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} - k \cdot \overrightarrow{AB} = (1 - k) \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}.$$

Nous savons que les droites (AB) et (GF) sont parallèles, ainsi que les droites (AG) et (BF) . Il en résulte que le quadrilatère $ABFG$ est un parallélogramme.

Nous en déduisons

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AG} = (1 - k) \cdot \overrightarrow{AD},$$

ce qui donne :

$$\overrightarrow{EF} = (1-k) \cdot \overrightarrow{AB} + (1-k) \cdot \overrightarrow{AD} = (1-k) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = (1-k) \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Les vecteurs \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires. Nous en concluons que les droites (EF) et (AC) sont parallèles.

Nous prouvons de la même façon que les droites (GH) et (AC) sont parallèles. On a

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} - (1-k) \cdot \overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}.$$

Le quadrilatère $AHED$ est un parallélogramme donc

$$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Il en résulte

$$\overrightarrow{GH} = k \cdot \overrightarrow{AD} + k \cdot \overrightarrow{AB} = k \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = k \cdot \overrightarrow{AC},$$

ce qui prouve que les vecteurs \overrightarrow{GH} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.

Nous en concluons que les droites (GH) et (AC) sont parallèles.

De plus $(EF) \parallel (AC)$ et $(GH) \parallel (AC)$ implique que $(GH) \parallel (EF)$.

Conclusion. Les droites (EF) , (GH) et (AC) sont parallèles.

Exercice 12. Points variables sur les côtés d'un triangle

Soit ABC un triangle. On désigne par I , J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AB]$ et $[AC]$. On considère les points E , F et G tels que :

$$\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BF} = k \cdot \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CG} = k \cdot \overrightarrow{CA}, \quad \text{avec } k \in [0; 1].$$

On désigne par A' le symétrique de A par rapport à F , B' le symétrique de B par rapport à G et C' le symétrique de C par rapport à E .

1. Faire une figure en choisissant une valeur du paramètre k .

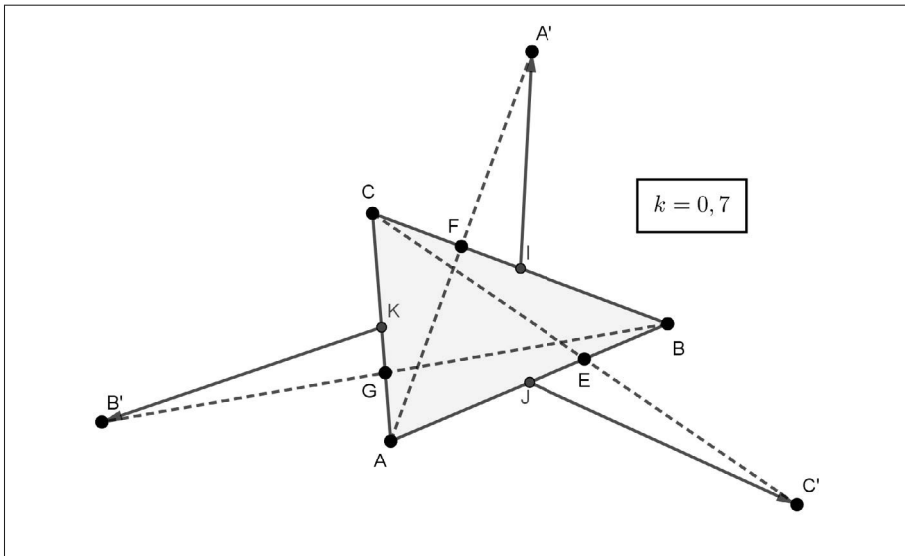
2. Montrer que $\overrightarrow{KB'} = (2k - \frac{1}{2}) \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$.

Exprimer de même les vecteurs $\overrightarrow{JC'}$ et $\overrightarrow{IA'}$.

3. En déduire le vecteur $\overrightarrow{KB'} + \overrightarrow{JC'} + \overrightarrow{IA'}$.

Solution

1. La figure est générée par GeoGebra.



2. Nous appliquons la propriété de la médiane dans le triangle $AB'C$.

Nous obtenons

$$2 \cdot \overrightarrow{B'K} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C} = (\overrightarrow{B'G} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{B'G} + \overrightarrow{GC}).$$

Puisque G est le milieu de $[BB']$ et d'après les données de l'énoncé, il vient

$$\begin{aligned} 2 \cdot \overrightarrow{B'K} &= 2 \cdot \overrightarrow{GB} + (1-k)\overrightarrow{CA} - k \cdot \overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{GB} + (1-2k)\overrightarrow{CA}, \\ 2 \cdot \overrightarrow{B'K} &= 2 \cdot (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CB}) + (1-2k)\overrightarrow{CA} = 2 \cdot (-k \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + (1-2k)\overrightarrow{CA}, \\ 2 \cdot \overrightarrow{B'K} &= (1-4k)\overrightarrow{CA} + 2 \cdot \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons le résultat attendu

$$\overrightarrow{KB'} = \left(2k - \frac{1}{2}\right) \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}.$$

De la même façon, nous obtenons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{JB'} &= \left(2k - \frac{1}{2}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}, \\ \overrightarrow{IA'} &= \left(2k - \frac{1}{2}\right) \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KB'} + \overrightarrow{JC'} + \overrightarrow{IA'} &= \left(2k - \frac{1}{2}\right) \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \left(2k - \frac{1}{2}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \left(2k - \frac{1}{2}\right) \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}, \\ \overrightarrow{KB'} + \overrightarrow{JC'} + \overrightarrow{IA'} &= \left(2k - \frac{1}{2}\right) \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}), \\ \overrightarrow{KB'} + \overrightarrow{JC'} + \overrightarrow{IA'} &= \left(2k - \frac{1}{2}\right) \cdot \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Exercice 13. Droite d'Euler²

ABC est un triangle non équilatéral et O le centre de son cercle circonscrit.

On désigne par A' , B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

On considère le point H tel que

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

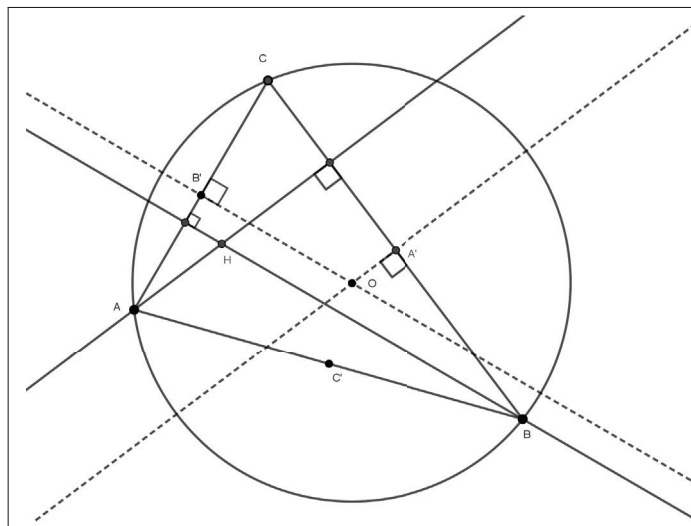
1. Justifier que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2 \cdot \overrightarrow{OA'}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{AH} = 2 \cdot \overrightarrow{OA'}$.
3. Montrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales.
4. De la même façon, prouver que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales.

Que représente le point H pour le triangle ABC ?

5. G étant le centre de gravité du triangle ABC , montrer que les points O , G et H sont alignés.

6. Étudier le cas où ABC est équilatéral.

Solution



1. En appliquant la propriété de la médiane dans la triangle BOC , nous obtenons immédiatement

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2 \cdot \overrightarrow{OA'}.$$

2. Mathématicien et physicien suisse : 1707-1783

2. En reportant dans l'égalité définissant la point H , il vient

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{OA'}.$$

Nous en déduisons,

$$\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = 2 \cdot \overrightarrow{OA'}, \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{AH} = 2 \cdot \overrightarrow{OA'}.$$

3. Les vecteurs \overrightarrow{AH} et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires donc les droites (AH) et (OA') sont parallèles. Or la droite (OA') est la médiatrice du segment $[BC]$, elle est donc orthogonale à (BC) . Puisque (AH) et (OA') sont parallèles, il en résulte que (AH) est aussi orthogonale à (BC) .

Nous avons ainsi démontré que la droite (AH) est la hauteur issue du sommet A dans le triangle ABC .

4. De la même façon, nous appliquons la propriété vectorielle de la médiane au triangle AOC . Il vient

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2 \cdot \overrightarrow{OB'}.$$

En reportant dans l'égalité $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, nous obtenons

$$\overrightarrow{BH} = 2 \cdot \overrightarrow{OB'},$$

ce qui prouve que les droites (BH) et (OB') sont parallèles.

Comme (OB') est la médiatrice du segment $[AC]$, nous avons démontré que (BH) est aussi orthogonale à (AC) . La droite (BH) est la hauteur issue du sommet B dans le triangle ABC .

Le point H est commun aux deux hauteurs (AH) et (BH) du triangle ABC . Ce point est donc l'orthocentre du triangle ABC .

5. Nous appliquons la propriété de réduction du centre de gravité G , il vient

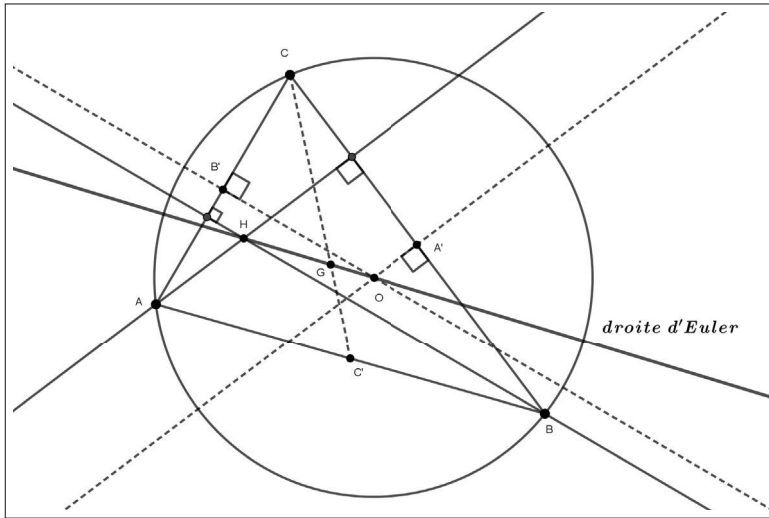
$$3 \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Nous en déduisons

$$3 \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}.$$

Les vecteurs \overrightarrow{OG} et \overrightarrow{OH} sont colinéaires non nuls (car ABC n'est pas équilatéral).

Le point O est commun aux droites (OG) et (OH) . Nous en concluons que les points O , G et H sont alignés.



6. Lorsque ABC est équilatéral les points O , G et H sont confondus.

Exercice 14. Preuve vectorielle du théorème de Thalès

Soient ABC un triangle non aplati (les points A , B et C sont non alignés), $E \in (AB)$ et $F \in (AC)$.

1. On suppose que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Montrer qu'il existe un réel k tel que

$$\vec{AE} = k \cdot \vec{AB}, \vec{AF} = k \cdot \vec{AC} \text{ et } \vec{EF} = k \cdot \vec{BC}.$$

2. Réciproquement, nous supposons qu'il existe un réel k tel que

$$\vec{AE} = k \cdot \vec{AB} \text{ et } \vec{AF} = k \cdot \vec{AC}.$$

Montrer que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Solution

1. Puisque $E \in (AB)$ et $F \in (AC)$, il existe deux réels k et k' tels que

$$\vec{AE} = k \cdot \vec{AB} \text{ et } \vec{AF} = k' \cdot \vec{AC}.$$

De plus, les droites (EF) et (BC) sont parallèles, donc il existe un réel k'' tel que :

$$\vec{EF} = k'' \cdot \vec{BC}.$$

En remarquant que

$$\vec{AE} + \vec{EF} + \vec{FA} = \vec{0},$$

nous obtenons

$$k \cdot \overrightarrow{AB} + k'' \cdot \overrightarrow{BC} + k' \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{0}.$$

Puisque $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, nous en déduisons

$$k \cdot \overrightarrow{AB} + k'' \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + k' \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{0},$$

ce qui implique

$$(k - k'') \cdot \overrightarrow{AB} + (k'' - k') \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Supposons par l'absurde que $k \neq k''$.

Dans ce cas, il vient

$$\overrightarrow{AB} = -\frac{k'' - k'}{k - k''} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Cette égalité est contradictoire car les points les points A , B et C ne sont pas alignés.

Par conséquent, nous avons

$$k = k''.$$

Nous en déduisons

$$(k'' - k') \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Puisque $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, il en résulte que $k'' - k' = 0$, soit $k'' = k'$.

Finalement, nous avons démontré

$$k = k' = k''.$$

Nous pouvons en conclure qu'il existe un réel k tel que

$$\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} = k \cdot \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{EF} = k \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Remarque. Nous avons

$$AE = \|\overrightarrow{AE}\| = \|k \cdot \overrightarrow{AB}\| = |k|AB.$$

De la même façon, nous obtenons,

$$AF = |k|AC \text{ et } EF = |k|BC.$$

Nous avons ainsi démontré le théorème de Thalès dont l'énoncé est admis au collège sous la forme suivante :

Si $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ et $(EF) \parallel (BC)$, alors

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}.$$

2. Réciproquement, nous supposons qu'il existe un réel k tel que

$$\vec{AE} = k \cdot \vec{AB} \text{ et } \vec{AF} = k \cdot \vec{AC}.$$

Nous en déduisons

$$\vec{EF} = \vec{AF} - \vec{AE} = k \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = k \cdot \vec{BC}.$$

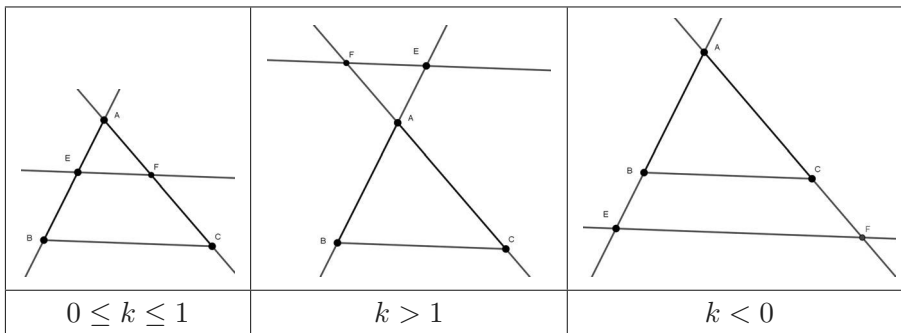
Ceci prouve que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Remarque

Il s'agit ici de la réciproque du théorème de Thalès énoncée au collège sous la forme suivante :

si $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ et $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$, alors $(EF) \parallel (BC)$.

Nous résumons les différentes configurations de Thalès par le tableau suivant.



Exercice 15. Conservation du milieu et du centre de gravité par une homothétie

Soient ABC un triangle, I le milieu du segment $[BC]$ et G son centre de gravité. On désigne par I' , B' , C' et G' les images des points I , B , C et G par l'homothétie h de centre A et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que I' est le milieu du segment $[B'C']$.
2. Montrer que G' est le centre de gravité du triangle $AB'C'$.

Solution

1. Puisque I est le milieu du segment $[BC]$, nous avons

$$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Nous savons $B' = h(B)$, $C' = h(C)$ et $I' = h(I)$. En appliquant la proposition du cours (action de h sur deux points), nous obtenons

$$\overrightarrow{I'B'} = k \cdot \overrightarrow{IB} \text{ et } \overrightarrow{I'C'} = k \cdot \overrightarrow{IC}.$$

Nous en déduisons

$$\overrightarrow{I'B'} + \overrightarrow{I'C'} = k \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = k \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Ceci démontre que $I' = h(I)$ est le milieu du segment $[B'C']$.

2. Puisque $G' = h(G)$, $B' = h(B)$ et $C' = h(C)$, en utilisant à nouveau la proposition du cours (action de h sur deux points), nous avons

$$\overrightarrow{G'A} = k \cdot \overrightarrow{GA}, \overrightarrow{G'B'} = k \cdot \overrightarrow{GB} \text{ et } \overrightarrow{G'C'} = k \cdot \overrightarrow{GC}.$$

Nous en déduisons

$$\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = k \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}).$$

Comme G est le centre de gravité du triangle ABC , nous savons que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0},$$

ce qui implique

$$\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \vec{0}.$$

Nous en concluons que $G' = h(G)$ est le centre de gravité du triangle $AB'C'$.

Exercice 16. Image d'une droite, d'un cercle par une homothétie

Soient h une homothétie de centre Ω et de rapport $k \neq 0$, (d) une droite passant par deux points distincts A et B , (C) le cercle de centre O et de rayon $r > 0$.

1. Montrer que si $M \in (d)$, alors $M' = h(M)$ appartient à une droite parallèle à (d) .

2. Montrer que si $M \in (C)$, alors $M' = h(M)$ appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Solution

1. Soit $M \in (d)$. Puisque $(d) = (AB)$, nous en déduisons qu'il existe un réel x tel que

$$\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Posons $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$. Puisque $M' = h(M)$, en appliquant le cours, nous obtenons

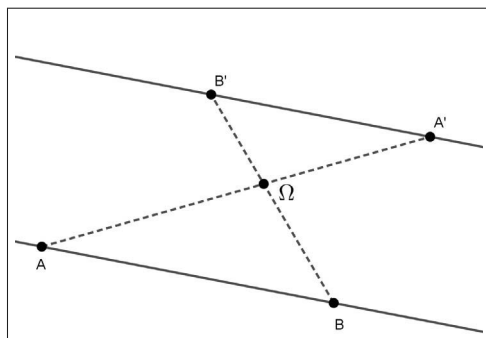
$$\overrightarrow{A'M'} = k \cdot \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Il en résulte

$$\overrightarrow{A'M'} = k \cdot (x \cdot \overrightarrow{AB}) = x \cdot (k \cdot \overrightarrow{AB}) = x \cdot \overrightarrow{A'B'},$$

ce qui prouve que $M' \in (A'B')$.

Comme les vecteurs \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires, nous en concluons que $(A'B') \parallel (AB)$.

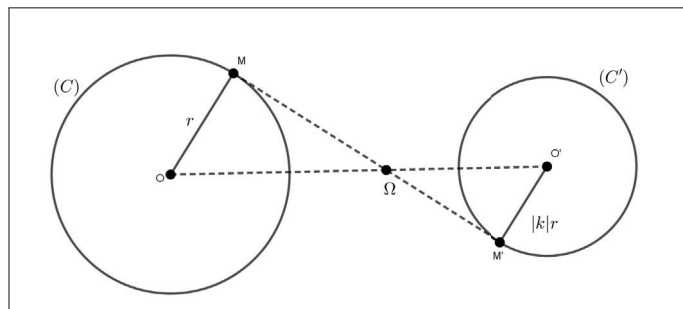


2. Soit $M \in (C)$. Nous avons $OM = r$.

Posons $O' = h(O)$. Puisque $M' = h(M)$ et en appliquant la proposition du cours (action d'une homothétie sur les distances), nous obtenons

$$O'M' = |k|OM = |k|r,$$

ce qui démontre que $M' = h(M)$ appartient au cercle (C') de centre $O' = h(O)$ et de rayon $|k|r$.



Exercice 17. Reconnaître une homothétie

1. Soit I le milieu d'un segment $[AB]$.

Quelle est la nature de la transformation f qui, à chaque point M du plan, associe un unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = 2 \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$?

Qu'en est-il de la transformation g qui, à chaque point M du plan, associe un unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = 2 \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$?

2. Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC .

Quelle est la nature de la transformation h qui, à chaque point M du plan, associe un unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$?

Solution

1.

▷ Soit M un point du plan. Puisque I est le milieu du segment $[AB]$, la propriété de la médiane dans le triangle AMB donne

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2 \cdot \overrightarrow{MI}.$$

Nous en déduisons

$$M' = f(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 4 \cdot \overrightarrow{MI} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} - \overrightarrow{IM} = 4 \cdot \overrightarrow{MI} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -3 \cdot \overrightarrow{IM}.$$

Nous en concluons que f est l'homothétie de centre I et de rapport -3 , soit $f = h_{I,-3}$.

▷ Nous remarquons que, pour tout point M du plan, on a

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}.$$

Nous en déduisons

$$M' = g(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2 \cdot \overrightarrow{BA}.$$

La transformation g est la translation de vecteur $2 \cdot \overrightarrow{BA}$.

Nous en concluons que $g = t_{2 \cdot \overrightarrow{BA}}$.

2. Soit M un point du plan. Puisque G est le centre de gravité du triangle ABC , nous savons par la propriété de réduction que

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \cdot \overrightarrow{MG}.$$

Nous en déduisons

$$M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 3 \cdot \overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} - \overrightarrow{GM} = 3 \cdot \overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = -2 \cdot \overrightarrow{GM}.$$

Par conséquent, h est l'homothétie de centre G et de rapport -2 , soit $h = h_{G,-2}$.

Exercice 18. Composée d'une homothétie avec une symétrie centrale

Soient k un réel non nul, A et B deux points distincts.

Pour tout point M du plan, nous désignons par

- M_1 l'image du point M par la symétrie centrale s_A de centre A ,
- M' l'image du point M_1 par l'homothétie h de centre B et de rapport k ,
- $f = h \circ s_A$ la transformation qui associe à chaque point M , le point M' .

1. Justifier l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{AM'} = -k \cdot \overrightarrow{AM} + (1 - k) \cdot \overrightarrow{AB}.$$

2. Que peut-on dire de f lorsque $k = 1$?

3. On suppose que $k \neq 1$ et $k \neq -1$.

Montrer que dans ce cas f admet un unique point invariant Ω , c'est-à-dire un unique point Ω satisfaisant à $f(\Omega) = \Omega$.

En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

4. Que peut-on dire de f lorsque $k = -1$?

Solution

1. Soit M un point du plan. Avec les données de l'énoncé, nous avons

$$\overrightarrow{AM_1} = -\overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{BM'} = k \cdot \overrightarrow{BM_1},$$

ce qui implique, en utilisant la seconde égalité,

$$\overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{AB} = k \cdot (\overrightarrow{AM_1} - \overrightarrow{AB}).$$

Sachant que $\overrightarrow{AM_1} = -\overrightarrow{AM}$, nous en déduisons

$$\overrightarrow{AM'} = -k \cdot \overrightarrow{AM} - k \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.$$

Pour tout point M , transformé en M' par f , nous en concluons

$$\overrightarrow{AM'} = -k \cdot \overrightarrow{AM} + (1 - k) \cdot \overrightarrow{AB}.$$

2. Si $k = 1$, alors

$$\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}.$$

Nous en déduisons que, dans ce cas, f est la symétrie centrale de centre A .

Remarque. Cette conclusion est également justifiée par le fait que, lorsque $k = 1$, h est identité du plan id_P et par suite nous avons :

$$f = s_A \circ id_P = s_A.$$

3. Nous supposons que $k \in \mathbb{R}^* - \{-1, 1\}$.

▷ Nous disposons des équivalences

$$f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} = -k \cdot \overrightarrow{A\Omega} + (1-k) \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (1+k) \cdot \overrightarrow{A\Omega} = (1-k) \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Puisque $k \neq -1$, nous obtenons

$$\overrightarrow{A\Omega} = \frac{1-k}{1+k} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Le point A et le vecteur $\frac{1-k}{1+k} \cdot \overrightarrow{AB}$ étant donnés, cette dernière égalité assure l'existence et l'unicité d'un point Ω invariant par f .

▷ Disposant du point Ω , nous avons

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM'} = -k \cdot \overrightarrow{AM} + (1-k) \cdot \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{A\Omega} = -k \cdot \overrightarrow{A\Omega} + (1-k) \cdot \overrightarrow{AB} \end{cases},$$

ce qui induit, par soustraction,

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{A\Omega} = -k \cdot \overrightarrow{AM} + k \cdot \overrightarrow{A\Omega} = -k \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{A\Omega}) = -k \cdot \overrightarrow{\Omega M}.$$

Nous en concluons que f est une homothétie de centre Ω et de rapport $-k$.

4. Nous supposons que $k = -1$.

Dans ce cas, nous déduisons de la question 1 que

$$\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2 \cdot \overrightarrow{AB},$$

ce qui prouve que f est la translation $t_{2 \cdot \overrightarrow{AB}}$.

Remarque. Lorsque $k = -1$, f est la composée de deux symétries centrales ; cette question a été étudiée dans l'exercice corrigé 4 de ce chapitre.

Géométrie analytique

La géométrie analytique permet de traiter algébriquement des situations géométriques diverses comme l'alignement, le parallélisme et l'orthogonalité. Ce concept est fondé sur la mise en relation d'un point du plan ou d'un vecteur avec des données numériques. Cette correspondance est possible en s'appuyant sur le calcul vectoriel qui permet de définir la notion de repérage d'un point ou d'un vecteur, ce qui constitue le socle de la géométrie analytique.

Nous nous intéressons d'abord au repérage sur une droite. Ensuite le repérage dans le plan nous permet de caractériser analytiquement la colinéarité de deux vecteurs puis d'aborder l'orthogonalité de deux vecteurs.

Puis nous développons, en nous appuyant sur ces deux notions, le concept d'équations cartésiennes d'une droite ou d'un cercle. D'autres configurations peuvent être étudiées par l'obtention d'une équation cartésienne, par exemple une équation de la représentation graphique d'une fonction.

Historiquement, René Descartes (1596-1650) est l'inventeur de la géométrie analytique. L'invention de cette dernière fut révolutionnaire puisqu'elle permit d'apporter un éclairage nouveau et novateur sur la géométrie dont les contenus n'avaient guère évolué depuis l'Antiquité.

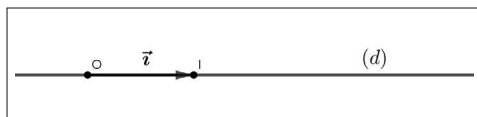
8.1 Géométrie analytique sur une droite

8.1.1 Repère d'une droite

Définition. Soit (d) une droite. Un repère de cette droite est la donnée de deux points distincts O et I de cette droite, dans cet ordre.

Le couple $(O; I)$ désigne un repère de la droite (d) .

En posant, $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, le couple $(O; \vec{i})$ désigne également un repère de la droite (d) .



Remarques. Nous en faisons quatre.

- Le point O est l'origine du repère $(O; \vec{i})$.
- Lorsqu'une droite (d) est munie d'un repère $(O; \vec{u})$ avec $\vec{u} \neq 0$, on dit que \vec{u} est un vecteur *directeur* de la droite (d) .
- Une droite munie d'un repère est *orientée*.
- Si $\|\vec{i}\| = OI = 1$, le repère est *unitaire*. On dit dans ce cas que la droite est graduée.

8.1.2 Abscisse d'un point sur une droite

Proposition (caractérisation du repérage d'un point sur une droite). Soit (d) une droite munie d'un repère $(O; \vec{i})$.

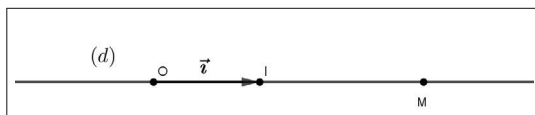
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $M \in (d)$,

(ii) il existe un réel x , unique, tel que $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii)

Nous supposons que $M \in (d)$.



▷ Existence du réel x

Nous posons $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$.

Les points O , I et M sont alignés, par suite les vecteurs \overrightarrow{OI} et \overrightarrow{OM} sont colinéaires.

Nous en déduisons qu'il existe un réel x tel que

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OI} = x \cdot \vec{i}.$$

▷ Unicité du réel x

Supposons qu'il existe deux réels distincts x et x' tels que

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} = x' \cdot \vec{i}.$$

Dans ce cas, nous avons

$$(x - x') \cdot \vec{i} = \vec{0}.$$

Puisque $\vec{i} \neq \vec{0}$, nous en déduisons que $x - x' = 0$, soit $x = x'$, ce qui assure l'unicité du réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$.

(ii) \Rightarrow (i)

Nous supposons qu'il existe un réel x , unique, tel que $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$.

Il en résulte que les vecteurs $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et \overrightarrow{OM} sont colinéaires, ce qui prouve que $M \in (d)$.

Définition (de l'abscisse d'un point). Soient (d) une droite munie d'un repère $(O; \vec{i})$ et $M \in (d)$.

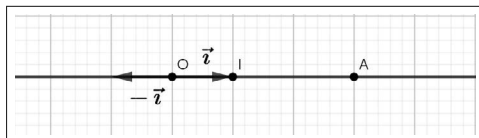
L'unique réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$, est l'abscisse du point M relativement au repère $(O; \vec{i})$.

Remarques. Nous en donnons deux.

- L'abscisse d'un point d'une droite dépend du repère choisi sur cette droite.

Par exemple, soit A un point d'abscisse 3 sur une droite munie d'un repère $(O; \vec{i})$.

Ce point a pour abscisse -3 relativement au repère $(O; -\vec{i})$.



- (d) étant une droite munie d'un repère $(O; \vec{i})$ unitaire, à chaque point $M \in (d)$ est associé un réel unique x : son abscisse relativement à ce repère.

On réalise ainsi une bijection de (d) sur \mathbb{R} ; c'est la droite numérique introduite lors du chapitre 1.

8.1.3 Mesure algébrique sur une droite

Définition. Soient (d) une droite munie d'un repère $(O; \vec{i})$, A et B deux points de (d) d'abscisses respectives x_A et x_B relativement à ce repère.

La mesure algébrique du couple (A, B) est le réel, noté \overline{AB} , défini par

$$\overline{AB} = x_B - x_A.$$

Proposition (propriétés de la mesure algébrique). Soit (d) une droite munie d'un repère $(O; \vec{i})$. Nous disposons des propriétés suivantes :

- Si M a pour abscisse x dans ce repère, alors $\overline{OM} = x$.
- Si A et B sont deux points de (d) d'abscisse respective x_A et x_B relativement au repère $(O; \vec{i})$, alors $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{i}$.
- Si $|\vec{i}| = 1$, alors $AB = |\overline{AB}| = |x_B - x_A|$.

Démonstration. • Soit M un point de (d) d'abscisse x . Nous avons

$$\overline{OM} = x - 0 = x.$$

- Avec les données de l'énoncé, il vient

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_B \cdot \vec{i} - x_A \cdot \vec{i} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i} = \overline{AB} \cdot \vec{i}.$$

- En supposant que $|\vec{i}| = 1$, nous obtenons

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = |\overline{AB} \cdot \vec{i}| = |\overline{AB}| \times |\vec{i}| = |\overline{AB}| = |x_B - x_A|.$$

Remarque. Cette dernière propriété nous permet de définir la distance entre deux réels considérés comme les abscisses de deux points sur la droite numérique.

Définition (distance entre deux réels). Pour tous les réels x et y , la distance entre ces deux réels est le réel positif, noté $d(x, y)$, définie par :

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Remarques. Nous en proposons trois.

- Pour tout réel x , nous avons $d(x, 0) = |x|$.
- Pour tous les réels x et y , on a $|x + y| = d(x, -y)$.
- Nous verrons, dans la partie Exercices corrigés (exercice 3), les principales propriétés de la distance entre deux réels.

Exemples. Nous proposons quatre exemples de géométrie analytique sur une droite (d) munie d'un repère $(O; \vec{i})$.

Nous considérons les points A et B d'abscisses respectives -1 et 4 relativement à ce repère. Nous déterminons le ou les points M de la droite (d) , d'abscisse x , tels que :

$$(1) \quad 2\overline{BM} = \overline{AM}.$$

$$(2) \quad (\overline{BM})^2 = (\overline{AM})^2.$$

$$(3) \quad \overline{BM} \geq \overline{AM}.$$

$$(4) \quad \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \sqrt{2}.$$

Ces quatre questions de géométrie sur une droite se ramènent immédiatement à la résolution dans \mathbb{R} , d'équations ou d'inéquations.

▷ Résolution de (1).

$$(1) \Leftrightarrow 2(x - 4) = x + 1 \Leftrightarrow x = 9.$$

Sur la droite (d) le point d'abscisse 9 dans le repère $(O; \vec{i})$ convient.

▷ Résolution de (2).

$$(2) \Leftrightarrow (x - 4)^2 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow (x - 4)^2 - (x + 1)^2 = 0,$$

$$(2) \Leftrightarrow -5(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Sur la droite (d) le point d'abscisse $\frac{3}{2}$ dans le repère $(O; \vec{i})$ convient.

▷ Résolution de (3).

$$(3) \Leftrightarrow x - 4 \geq x + 1 \Leftrightarrow 0 \times x \geq 5.$$

Sur la droite (d) , aucun point ne convient.

$$(4) \Leftrightarrow \frac{x + 1}{x - 4} = \sqrt{2}.$$

▷ Résolution de (4).

Pour $x \neq 4$, nous obtenons

$$(4) \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{2}(x - 4) \Leftrightarrow x(1 - \sqrt{2})x = -4\sqrt{2} - 1,$$

$$(4) \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = 9 + 5\sqrt{2}.$$

Sur la droite (d) le point d'abscisse $9 + 5\sqrt{2}$ relativement au repère $(O; \vec{i})$ convient.

8.2 Géométrie analytique dans le plan

Dans ce paragraphe, nous désignons par

- (P) l'ensemble des points du plan.
- (\vec{P}) l'ensemble des vecteurs du plan.

8.2.1 Bases-repères du plan

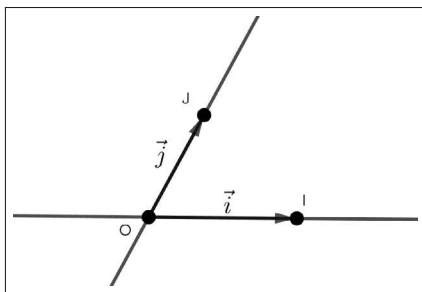
Définition. Soient \vec{i} et \vec{j} deux vecteurs non colinéaires et $O \in (P)$.

Le couple (\vec{i}, \vec{j}) est une **base** de (\vec{P}) .

Le triplet $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un **repère** du plan (P) .

Remarques. Nous en faisons deux.

- Soient I et J deux points du plan tels que $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. Les points O, I et J ne sont pas alignés. Nous retrouvons la notion de repère $(O; I, J)$ vue au collègue.



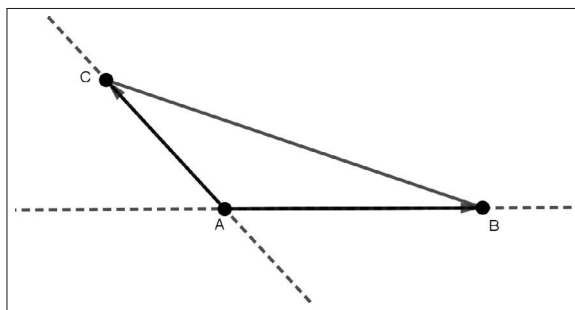
Avec les notations de la figure :

O est l'origine de ce repère,

la droite (OI) est la droite des abscisses,

la droite (OJ) est la droite des ordonnées.

- Plus généralement, tout triangle ABC non aplati définit un repère du plan, par exemple le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.



8.2.2 Repérage d'un point dans le plan

Proposition. Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan (P) .

Nous disposons de la propriété suivante.

Pour tout point M du plan, il existe un unique couple (x, y) de réels tel que

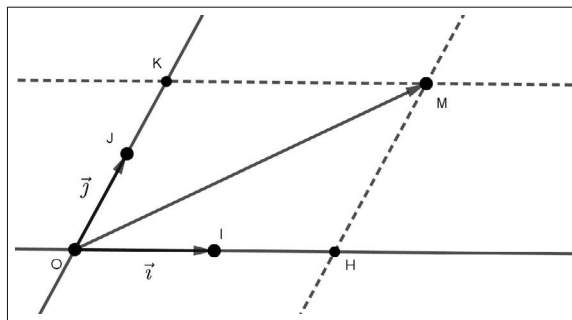
$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}.$$

Démonstration. • Existence du couple (x, y) .

Soit M un point du plan.

Soit H le point d'intersection de la droite (OI) avec la parallèle à (OJ) passant par M .

Soit K le point d'intersection de la droite (OJ) avec la parallèle à (OI) passant par M .



Le quadrilatère $OHMK$, ayant des côtés deux à deux parallèles, est un parallélogramme.

Il en résulte

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}.$$

Puisque $H \in (OI)$, il existe un réel x tel que $\overrightarrow{OH} = x \cdot \vec{i}$.

Puisque $K \in (OJ)$, il existe un réel y tel que $\overrightarrow{OK} = y \cdot \vec{j}$.

Ainsi est justifiée l'existence d'un couple (x, y) de réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}.$$

• Unicité du couple (x, y) .

Supposons qu'il existe deux couples distincts (x, y) et (a, b) de réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}.$$

Nous en déduisons

$$(x - a) \cdot \vec{i} = (b - y) \cdot \vec{j}.$$

Puisque $(x, y) \neq (a, b)$, pour fixer les idées, supposons que $x \neq a$.

Il vient

$$\vec{i} = \frac{b - y}{x - a} \cdot \vec{j}.$$

Ceci est contradictoire car les vecteurs \vec{i} et \vec{j} ne sont pas colinéaires.

Par conséquent et par l'absurde, nous obtenons $x = a$.

Il en résulte que $(b - y) \cdot \vec{j} = \vec{0}$.

Comme $\vec{j} \neq \vec{0}$, on a $y - b = 0$, soit $y = b$.

L'unicité du couple (x, y) est ainsi démontrée.

Remarques. Nous en proposons deux.

- On désigne par \mathbb{R}^2 , l'ensemble des couples de nombres réels.
- Dans \mathbb{R}^2 , l'égalité est définie par

$$(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a \text{ et } y = b.$$

Par conséquent, nous obtenons aussi¹

$$(x, y) \neq (a, b) \Leftrightarrow x \neq a \text{ ou } y \neq b.$$

Définition (coordonnées d'un point). *L'unique couple (x, y) de réels tel que*

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j},$$

est le couple de coordonnées (ou les coordonnées) du point M relativement au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On note $M(x, y)$ un point M repéré par ses coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Remarques. Nous en faisons cinq.

- Nous retiendrons

$M(x, y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ équivaut à l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}.$$

- Avec les données de la définition, x est l'abscisse de M et y l'ordonnée de M . De plus, on a :

1. Annexe § 3.8

$O(0, 0)$, $I(1, 0)$ et $J(0, 1)$.

- Nous retiendrons

$$M(x, y) \in (OI) \Leftrightarrow y = 0,$$

$$M(x, y) \in (OJ) \Leftrightarrow x = 0.$$

- L'écriture $M = (x, y)$ est incorrecte.

Par contre $M(x, y)$ est parfois notée $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$.

- Si $M(x, y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, alors $M(y, x)$ dans le repère $(O; \vec{j}, \vec{i})$.
Ainsi les coordonnées d'un point dépendent du repère choisi.

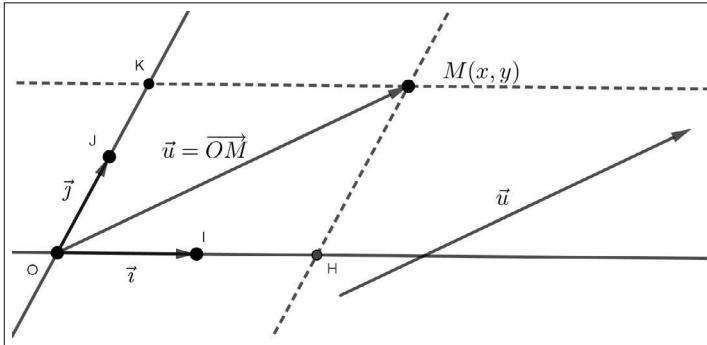
8.2.3 Repérage d'un vecteur

Proposition. Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base de (\vec{P}) .

Pour tout vecteur \vec{u} , il existe un unique couple (x, y) de réels tel que

$$\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}.$$

Démonstration. Soit $\vec{u} \in (\vec{P})$ et $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Le point O étant donné, il existe un unique point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.



Ce point M admet un unique couple (x, y) de coordonnées relativement au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}.$$

Nous en concluons l'existence d'un unique couple (x, y) de réels tel que

$$\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}.$$

Définition (coordonnées d'un vecteur). *L'unique couple (x, y) de réels tel que $\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ est le couple de coordonnées (ou les coordonnées) du vecteur \vec{u} relativement à la base (\vec{i}, \vec{j}) .*

On note $\vec{u}(x, y)$ ou bien $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ce vecteur repéré par ses coordonnées dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

Remarques. Nous en faisons trois.

- Nous retiendrons

$\vec{u}(x, y)$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) équivaut à l'égalité vectorielle $\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$.

- Dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , nous avons en particulier,

$$\vec{i}(1, 0), \vec{j}(0, 1) \text{ et } \vec{0}(0, 0).$$

- Les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie.

Par exemple si $\vec{u}(1, 2)$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , alors $\vec{u}(2, 1)$ dans la base (\vec{j}, \vec{i}) .

8.3 Règles de calculs sur les coordonnées

8.3.1 Opérations vectorielles et coordonnées

Proposition. (\vec{i}, \vec{j}) est une base de (\vec{P}) .

On donne les vecteurs $\vec{u}(x, y)$, $\vec{u}'(x', y')$ et $k \in \mathbb{R}$.

Nous disposons des propriétés suivantes :

- $\vec{u} + \vec{u}'(x + x', y + y')$,
- $k \cdot \vec{u}(kx, ky)$,
- $-\vec{u}(-x, -y)$,
- $\vec{u} - \vec{u}'(x - x', y - y')$.

Démonstration. Avec les données de la proposition

- nous avons

$$\vec{u} + \vec{u}' = (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}) + (x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j}) = (x + x') \cdot \vec{i} + (y + y') \cdot \vec{j},$$

ce qui justifie que $\vec{u} + \vec{u}'(x + x', y + y')$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

- De même, nous obtenons

$$k \cdot \vec{u} = k \cdot (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}) = (kx) \cdot \vec{i} + (ky) \cdot \vec{j},$$

ce qui prouve que $k \cdot \vec{u}(kx, ky)$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

- En particulier, pour $k = -1$, nous avons immédiatement $-\vec{u}(-x, -y)$.
- Pour terminer, nous savons que $\vec{u} - \vec{u}' = \vec{u} + (-\vec{u}')$.

Il en résulte

$$\vec{u} - \vec{u}'(x + (-x'), y + (-y')), \text{ soit } \vec{u} - \vec{u}'(x - x', y - y').$$

Remarque. Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{u}'(x', y')$ relativement à la base (\vec{i}, \vec{j}) , a et b deux réels.

Le vecteur $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}'$ est une *combinaison linéaire* de ces deux vecteurs.

Nous obtenons

$$a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}'(ax + bx', ay + by') \text{ dans la base } (\vec{i}, \vec{j}).$$

Proposition (égalité vectorielle et coordonnées). (\vec{i}, \vec{j}) est une base de (\vec{P}) .

On donne les vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{u}'(x', y')$. Nous disposons des deux équivalences suivantes :

- $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 0$ et $y = 0$.
- $\vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$.

Démonstration. • Justification de la première propriété.

Avec les données de l'énoncé, nous avons

$$\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}.$$

La décomposition du vecteur \vec{u} étant unique dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , nous en concluons

$$\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0.$$

- Justification de la seconde propriété.

Nous avons

$$\vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \vec{u} - \vec{u}' = \vec{0}.$$

Nous savons que $\vec{u} - \vec{u}'(x - x', y - y')$.

En appliquant l'équivalence ci-dessus, nous obtenons

$$\vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x - x' = 0 \\ y - y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}.$$

Remarques. La négation des deux points de cette proposition est :

- $\vec{u} \neq \vec{0} \Leftrightarrow x \neq 0$ ou $y \neq 0$.
- $\vec{u} \neq \vec{u}' \Leftrightarrow x \neq x'$ ou $y \neq y'$.

8.3.2 Coordonnées d'un vecteur - Coordonnées du milieu d'un segment

Proposition (coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB}). $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan (P) .

On donne, dans ce repère, les deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

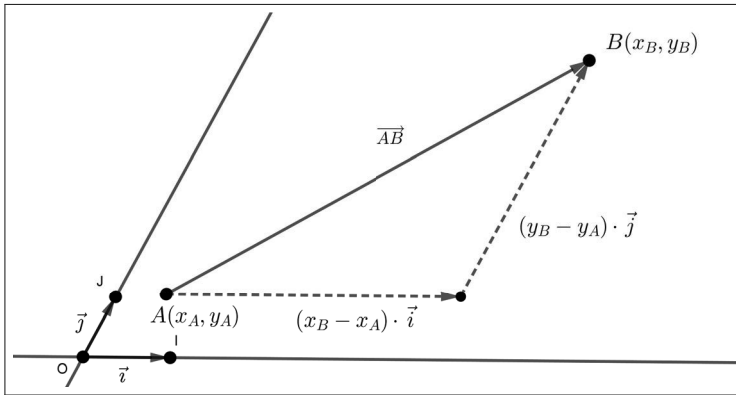
Dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , nous avons

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A).$$

Démonstration. Nous avons,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B \cdot \vec{i} + y_B \cdot \vec{j}) - (x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j}) = (x_B - x_A) \cdot \vec{i} + (y_B - y_A) \cdot \vec{j}.$$

Nous en concluons que $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$, relativement à la base (\vec{i}, \vec{j}) .



Proposition (coordonnées du milieu d'un segment). $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan (P) .

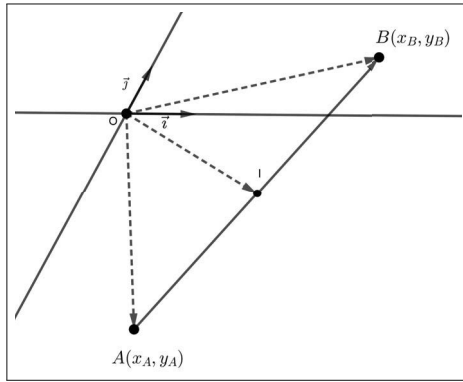
On donne, dans ce repère, les deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

Le point I étant le milieu du segment $[AB]$, nous avons

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Démonstration. La propriété de la médiane dans le triangle AOB donne

$$2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$



En posant $I(x_I, y_I)$, nous obtenons

$$\begin{cases} 2x_I = x_A + x_B \\ 2y_I = y_A + y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} .$$

Exemple. Coordonnées du centre de gravité d'un triangle.

▷ Nous donnons, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les points $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$.

En appliquant la propriété de réduction du centre de gravité G du triangle ABC , nous avons

$$3\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC},$$

ce qui donne

$$\begin{cases} 3x_G = x_A + x_B + x_C \\ 3y_G = y_A + y_B + y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} .$$

▷ Nous déterminons à présent les coordonnées du point G dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$.

Nous appliquons à nouveau la propriété de réduction.

Le point G satisfait à

$$3\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AC}.$$

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$, nous avons $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ et $C(0, 1)$.

Nous en déduisons

$$\begin{cases} 3x_G = 1 \\ 3y_G = 1 \end{cases}$$

Nous en concluons que $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ relativement au repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$.

8.4 Géométrie analytique et colinéarité

Proposition (caractérisation de la colinéarité). Soient (\vec{i}, \vec{j}) une base de (\vec{P}) , $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs non nuls.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont colinéaires.

(ii) $xy' - x'y = 0$.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii)

Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et non nuls, alors il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$.

Puisque $\vec{u}(x, y)$, nous avons

$$k \cdot \vec{u}(kx, ky).$$

Puisque $\vec{v}(x', y')$, nous obtenons

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}.$$

Nous en déduisons

$$xy' - x'y = x(ky) - (kx)y = k(xy - xy) = 0.$$

(ii) \Rightarrow (i)

Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, nous avons $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.

1^{er} cas : $x \neq 0$.

Puisque $xy' - x'y = 0$, nous obtenons

$$y' = \frac{x'}{x}y.$$

Il en résulte

$$\vec{v} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} = x' \cdot \vec{i} + \frac{x'}{x}y \cdot \vec{j} = \frac{x'}{x}(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}) = \frac{x'}{x} \cdot \vec{u}.$$

Par suite, le vecteur \vec{v} est colinéaire à \vec{u} .

2^e cas : $y \neq 0$.

De la même façon, la condition $xy' - x'y = 0$ implique

$$x' = \frac{y'}{y}x.$$

Nous en déduisons :

$$\vec{v} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} = \frac{y'}{y} x \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} = \frac{y'}{y} (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}) = \frac{y'}{y} \cdot \vec{u}.$$

Par conséquent le vecteur \vec{v} est colinéaire à \vec{u} .

Définition. Soient (\vec{i}, \vec{j}) une base de (\vec{P}) , $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs non nuls.

Le déterminant de ces deux vecteurs, noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$ est le réel, $xy' - x'y$.

La notation suivante est couramment adoptée :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

Corollaire. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls. Nous avons

- \vec{u} et \vec{v} colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
- \vec{u} et \vec{v} non colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.

Démonstration. Elle résulte immédiatement de la proposition de caractérisation de la colinéarité.

Exemple. Équations cartésiennes d'une droite.

Nous donnons deux points distincts $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

▷ Soit $M(x, y)$ un point du plan. Nous avons

$M \in (AB)$ si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires, ce qui équivaut à

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0.$$

Par conséquent, une équation cartésienne de la droite (AB) est

$$(x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0.$$

▷ Si la droite (AB) n'est pas parallèle à la droite des ordonnées, c'est-à-dire à condition que $x_B \neq x_A$, nous pouvons exprimer y en fonction de x , et ainsi obtenir une équation réduite de cette droite.

Il vient

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A).$$

En posant $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, nous en concluons

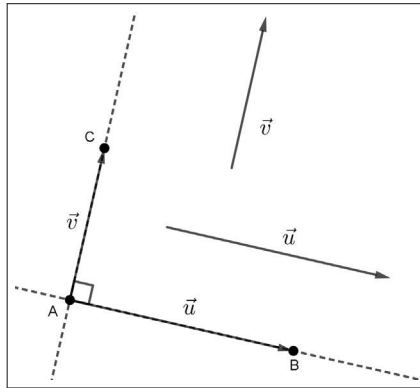
$$y = mx + p, \text{ avec } p = y_A - mx_A$$

8.5 Géométrie analytique et orthogonalité

8.5.1 Bases et repères orthonormaux - Distance de deux points

Définition (vecteurs orthogonaux). Soient A, B et C trois points non alignés, \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

On dit que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux, ce qui est noté $\vec{u} \perp \vec{v}$, si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires en A .



Définition. Soient (\vec{i}, \vec{j}) une base de (\vec{P}) et O un point donné.

- Si $\vec{i} \perp \vec{j}$, alors la base (\vec{i}, \vec{j}) est orthogonale et le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthogonal.
- Si $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1$, alors la base (\vec{i}, \vec{j}) est orthonormale et le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormal.

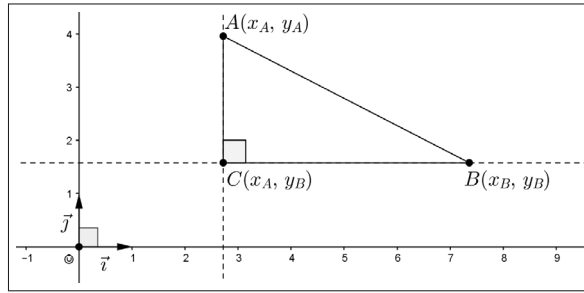
Remarque. Les termes orthonormal et orthonormé sont synonymes.

Proposition (distance de deux points dans un repère orthonormal). Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Nous disposons de l'égalité

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Démonstration. Désignons par $C(x_A, y_B)$.



Les droites (BC) et (AC) sont perpendiculaires en C car le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est en particulier orthogonal.

Il en résulte que le triangle BAC est rectangle en C .

En appliquant le théorème de Pythagore, nous avons,

$$AB^2 = CA^2 + CB^2.$$

Puisque $\overrightarrow{CA}(0, y_A - y_B)$, nous en déduisons

$$\overrightarrow{CA} = (y_A - y_B) \cdot \vec{j}.$$

Puisque $\|\vec{j}\| = 1$, nous obtenons

$$CA = \|\overrightarrow{CA}\| = \|(y_A - y_B) \cdot \vec{j}\| = |y_A - y_B| \|\vec{j}\| = |y_A - y_B|.$$

Nous en déduisons

$$CA^2 = |y_A - y_B|^2 = (y_A - y_B)^2 = (y_B - y_A)^2.$$

De la même façon, nous obtenons

$$CB^2 = (x_B - x_A)^2.$$

Il en résulte

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Puisque $AB \geq 0$, nous en concluons

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Remarques. Nous en faisons cinq.

- L'égalité $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ est symétrique, ce qui signifie,

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = BA.$$

- Pour calculer la distance AB , on commence souvent par calculer

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

- Si $M(x, y)$, alors $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

C'est la distance d'un point quelconque M à l'origine O du repère.

- La formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ n'est vraie que si le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormal.

Par exemple, si $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthogonal avec $\|\vec{i}\| = 2$ et $\|\vec{j}\| = 1$, nous obtenons

$$AB^2 = 4(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

- Si les points A et B appartiennent à la droite des abscisses, alors $A(x_A, 0)$ et $B(x_B, 0)$. Dans ce cas, nous avons

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2} = |x_A - x_B| = d(x_A, x_B).$$

De même, si A et B appartiennent à la droite des ordonnées, nous obtenons

$$AB = \sqrt{(y_A - y_B)^2} = |y_A - y_B| = d(y_A, y_B).$$

Exemple. Équation du cercle de centre O et de rayon 1.

Un point $M(x, y)$ appartient au cercle de centre O et de rayon 1 si et seulement si

$$OM = 1 \Leftrightarrow OM^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Proposition. Soit $\vec{u}(x, y)$ relativement à une base (\vec{i}, \vec{j}) orthonormale. Nous avons

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Démonstration. Soit O un point du plan.

Nous savons qu'il existe un point M unique tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Nous en déduisons que $M(x, y)$ dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

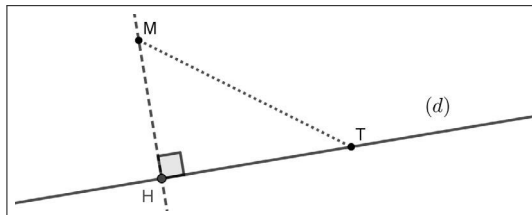
Il en résulte

$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

8.5.2 Projeté orthogonal sur une droite

Définition. Soient M un point et (d) une droite.

La perpendiculaire à (d) passant par M coupe (d) en un point H qui est le projeté orthogonal du point M sur la droite (d) .



Proposition. Soient M un point et (d) une droite. On désigne par H le projeté orthogonal de M sur cette droite.

Pour tout point $T \in (d)$, nous disposons de l'inégalité

$$MT \geq MH.$$

Démonstration. Soit M un point appartenant à la droite (d) .

Avec les notations de la figure précédente, nous appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle THM rectangle en H . Il vient

$$MT^2 = MH^2 + HT^2, \text{ ce qui implique } MT^2 \geq MH^2.$$

Puisque $MT \geq 0$, $MH \geq 0$ et sachant que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur \mathbb{R}^+ , nous en déduisons que, pour tout point $T \in (D)$,

$$MT \geq MH.$$

Remarque. Cette inégalité signifie que la distance minimum entre le point M et la droite (D) est réalisée lorsque $T = H$.

Exemple. Distance d'un point à une droite parallèle aux axes du repère.

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal, nous considérons deux droites (D) et (Δ) , parallèles aux axes du repère, d'équations respectives $x = a$ et $y = b$, où a et b sont deux réels donnés.

Pour tout point $M(x, y)$, nous désignons par

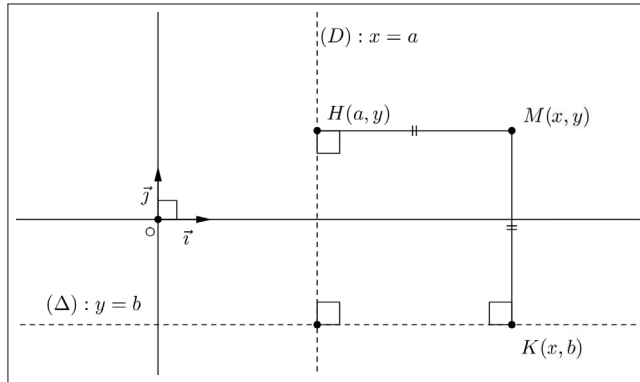
▷ $H(a, y)$ le projeté orthogonal de $M(x, y)$ sur (D) ,

▷ $K(x, b)$ le projeté orthogonal de $M(x, y)$ sur (Δ) .

Nous obtenons :

$$MH = \sqrt{(x-a)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x-a)^2} = |x-a|,$$

$$MK = \sqrt{(x-x)^2 + (y-b)^2} = \sqrt{(y-b)^2} = |y-b|.$$



8.5.3 Complément : Condition d'orthogonalité de deux vecteurs

Proposition. Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{u}'(x', y')$ relativement à une base orthonormale (\vec{i}, \vec{j}) .

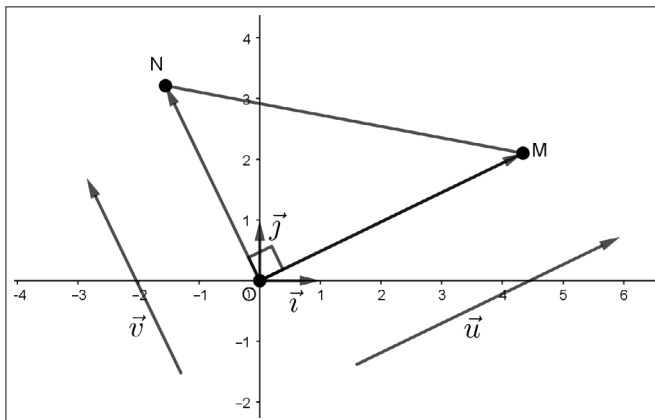
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{u}'(x', y')$ sont orthogonaux.
- (ii) $xx' + yy' = 0$.

Démonstration. Soit O un point du plan et $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal.

Il existe un unique point M et un unique point N tels que $\overline{OM} = \vec{u}$ et $\overline{ON} = \vec{v}$.

Nous en déduisons que $M(x, y)$ et $N(x', y')$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



(i) \Rightarrow (ii)

Si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux, alors le triangle MON est rectangle en O .

En appliquant le théorème de Pythagore, il vient

$$MN^2 = OM^2 + ON^2.$$

Analytiquement, nous obtenons

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2,$$

soit

$$x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2.$$

Après simplification, il vient

$$xx' + yy' = 0.$$

(i) \Rightarrow (ii)

Nous supposons que $xx' + yy' = 0$.

En reprenant les calculs ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned} MN^2 - (OM^2 + ON^2) &= (x - x')^2 + (y - y')^2 - (x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2), \\ MN^2 - (OM^2 + ON^2) &= -2(xx' + yy') = 0. \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$MN^2 = OM^2 + ON^2.$$

La réciproque du théorème de Pythagore prouve que le triangle MON est rectangle en O .

Ceci justifie que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

Remarques. • Dans une base (\vec{i}, \vec{j}) orthonormale, le réel $xx' + yy'$ est le *produit scalaire* des deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$.

Ce produit scalaire est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (lire \vec{u} scalaire \vec{v}).

• Nous retiendrons

\vec{u} et \vec{v} orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

\vec{u} et \vec{v} non orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$.

• Ne pas confondre la condition de colinéarité ($xy' - x'y = 0$) avec la condition d'orthogonalité ($xx' + yy' = 0$).

8.6 Exercices corrigés

Exercice 1. Changement de repère sur une droite ALGO

Soient (d) une droite munie d'un repère $(O; \vec{i})$ et M un point d'abscisse x relativement à ce repère. On désigne par A le point de (d) d'abscisse a par rapport à $(O; \vec{i})$.

1. Changement d'origine.

Soit x' l'abscisse du point M relativement au repère $(A; \vec{i})$.

Montrer que $x' = x - a$.

2. Changement d'origine et de vecteur.

Pour $b \in \mathbb{R}^*$, on pose $\vec{u} = b \cdot \vec{i}$ et soit x' l'abscisse du point M relativement au repère $(A; \vec{u})$.

Déterminer x' en fonction de x , a et b . En déduire x en fonction de x' , a et b .

Donner une fonction Python pour passer du repère $(O; \vec{i})$ au repère $(A; \vec{u})$.

3. Existe-t-il un point de la droite (d) dont l'abscisse est invariante dans ce changement de repère ?

Solution

1. Changement d'origine.

Avec les données de l'énoncé, d'une part, nous avons

$$\overrightarrow{AM} = x' \cdot \vec{i},$$

d'autre part, il vient

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} - a \cdot \vec{i} = (x - a) \cdot \vec{i}.$$

Il en résulte

$$x' \cdot \vec{i} = (x - a) \cdot \vec{i}.$$

Puisque $\vec{i} \neq 0$, nous obtenons

$$x' = x - a.$$

Il s'agit de la formule de passage du repère $(O; \vec{i})$ au repère $(A; \vec{i})$.

L'égalité réciproque, $x = x' + a$, traduit le passage du repère $(A; \vec{i})$ au repère $(O; \vec{i})$.

2. Changement d'origine et de vecteur.

▷ Avec les données de l'énoncé, d'une part nous avons :

$$\overrightarrow{AM} = x' \cdot \vec{u} = x' \cdot (b \cdot \vec{v}) = (x'b) \cdot \vec{v},$$

d'autre part, comme dans la question 1, il vient

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{v} - a \cdot \vec{v} = (x - a) \cdot \vec{v}.$$

Il en résulte

$$(bx') \cdot \vec{v} = (x - a) \cdot \vec{v}.$$

Puisque $\vec{v} \neq 0$, nous obtenons, $bx' = x - a$.

Puisque $b \neq 0$, nous en concluons

$$x' = \frac{1}{b}(x - a).$$

Il s'agit de la formule de passage du repère $(O; \vec{v})$ au repère $(A; \vec{u})$.

L'égalité réciproque, $x = bx' + a$, traduit le passage du repère $(A; \vec{u})$ au repère $(O; \vec{v})$.

▷ Fonction Python pour passer du repère $(O; \vec{v})$ au repère $(A; \vec{u})$.

```
def rep(a, b, x):
    y=(1/b)*(x-a)
    return y
```

3. L'abscisse x d'un point de la droite (d) est invariante par ce changement de repère si et seulement si

$$x = \frac{1}{b}(x - a) \Leftrightarrow bx = x - a \Leftrightarrow x(1 - b) = a.$$

Par disjonction, nous distinguons trois cas.

1^{er} cas : $b = 1$ et $a \neq 0$.

Dans ce cas l'équation n'a pas de solution. Aucun point de la droite a une abscisse invariante.

2^e cas : $b = 1$ et $a = 0$.

Tout réel x est solution de cette équation. Tout point de la droite a une abscisse invariante.

3^e cas : $b \neq 1$.

Dans ce dernier cas, il existe un unique point dont l'abscisse invariante est

$$x = \frac{a}{1 - b}.$$

Exercice 2. Division harmonique sur une droite

Sur une droite (d) munie d'un repère $(O; \vec{i})$, on considère quatre points distincts A , B , C et D d'abscisses respectives a , b , c , et d , avec $bcd \neq 0$. On dit que ces points forment une division harmonique de la droite (d) si et seulement si,

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

1. Montrer que $2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$.

2. I étant le milieu du segment $[AB]$, on suppose que la droite (d) est rapportée au repère $(I; \vec{i})$.

Montrer que $IA^2 = \overline{IC} \times \overline{ID}$.

3. On suppose que la droite (d) est rapporté au repère $(A; \vec{i})$.

Justifier que $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

Solution

1. L'égalité $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ est successivement équivalente à

$$\begin{aligned}\frac{a-c}{b-c} &= -\frac{a-d}{b-d}, \\ (a-c)(b-d) &= -(a-d)(b-c), \\ ab - ad - bc + dc &= -ab + ac + db - dc.\end{aligned}$$

Après simplification, nous obtenons

$$\begin{aligned}2ab + 2dc &= ac + ad + db + bc, \\ 2(ab + dc) &= a(d + c) + b(d + c).\end{aligned}$$

Nous en concluons

$$2(ab + cd) = (a + b)(c + d).$$

2. On suppose que la droite (d) est rapportée au repère $(I; \vec{i})$.

Puisque I est le milieu du segment $[AB]$, nous en déduisons

$$a = -b.$$

Il en résulte que, dans le repère $(I; \vec{i})$, nous obtenons

$$2(-a^2 + dc) = 0 \Leftrightarrow a^2 = dc \Leftrightarrow (\overline{IA})^2 = \overline{IC} \times \overline{ID}.$$

Nous en concluons :

$$IA^2 = \overline{IC} \times \overline{ID}.$$

3. Puisque la droite (d) est munie du repère $(A; \vec{i})$, nous avons $a = 0$.
Il en résulte

$$2cd = b(c + d) = bc + bd.$$

En divisant les deux membres de cette égalité par $bcd \neq 0$, nous obtenons

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{d} + \frac{1}{c},$$

ce qui justifie

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}.$$

Exercice 3. Distance entre deux réels

Pour tous les réels x et y , la distance entre x et y est le réel positif, noté $d(x, y)$, défini par $d(x, y) = |x - y|$.

Pour tous les réels x, y et z , justifier les propriétés suivantes :

1. $d(x, y) = d(y, x)$.
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Solution

1. Pour tous les réels x et y nous avons

$$d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x).$$

2. Pour tous les réels x et y nous avons les équivalences suivantes :

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

3. Pour tous les réels x, y et z , en utilisant l'inégalité triangulaire, il vient

$$d(x, y) = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|.$$

L'inégalité, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, est ainsi justifiée.

Exercice 4. Repère dans un parallélogramme

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Soient $M \in [AB]$ et $N \in [AD]$.

La parallèle à (BC) passant par M coupe (CD) en M' .

La parallèle à (AB) passant par N coupe (BC) en N' .

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Dans ce repère, on désigne par x l'abscisse de M et par y l'ordonnée de N .

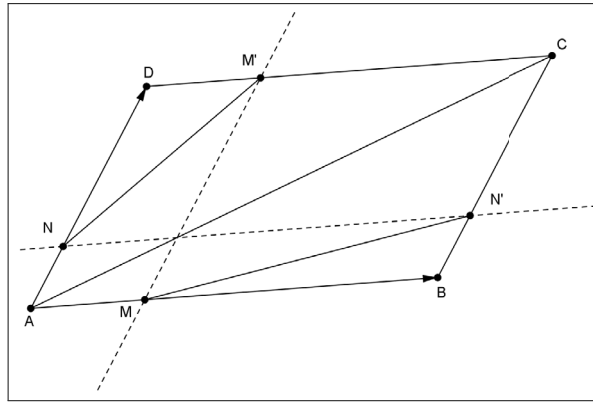
1. Faire une figure et donner les coordonnées de tous les points de cette dernière.

2. A quelle condition sur x et y , les droites (MN') et (NM') sont-elles parallèles ?

3. Montrer que dans ce cas, ces droites sont parallèles à (AC) .

Solution

1.



Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, nous obtenons

$A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$, $M(x, 0)$, $N(0, y)$, $M'(x, 1)$ et $N'(1, y)$.

2. Nous avons

$$\overrightarrow{MN'}(1-x, y) \text{ et } \overrightarrow{NM'}(x, 1-y).$$

Les droites (MN') et (NM') sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MN'}$ et $\overrightarrow{NM'}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à

$$\det(\overrightarrow{MN'}, \overrightarrow{NM'}) = \begin{vmatrix} 1-x & x \\ y & 1-y \end{vmatrix} = (1-x)(1-y) - xy = 1-x-y = 0.$$

Nous en concluons que les droites (MN') et (NM') sont parallèles si et seulement si $x+y=1$.

3. Nous avons $\overrightarrow{AC}(1, 1)$. Lorsque $x+y=1$, nous obtenons

$$\overrightarrow{MN'}(y, y) \text{ et } \overrightarrow{NM'}(x, x).$$

Il en résulte :

$$\overrightarrow{MN'} = y \cdot \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{NM'} = x \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MN'}$ et $\overrightarrow{NM'}$ sont donc colinéaires à \overrightarrow{AC} .

Ceci justifie que si $x + y = 1$, alors les droites (MN') et (NM') sont parallèles à la droite (AC) .

Exercice 5. Point variable sur la droite des abscisses

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal. On donne les points $L(-3, 2)$ et $J(0, 1)$.

Soit a un réel donné. On considère un point $H(a, 0)$ sur la droite des abscisses.

1. Déterminer a pour que les points H, J et L soient alignés. Contrôler sur une figure.

2. On suppose que $a \neq 3$. Montrer que le triangle JHL est rectangle en H si et seulement si $a^2 + 3a + 2 = 0$.

3. En déduire les valeurs de a pour lesquelles JHL est rectangle en H . Vérifier sur une figure.

Solution

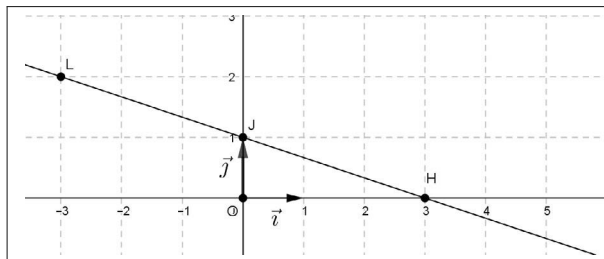
1. Les points H, J et L sont alignés si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{LJ} et \overrightarrow{LH} sont colinéaires.

Dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , nous avons $\overrightarrow{LJ}(3, -1)$ et $\overrightarrow{LH}(a+3, -2)$.

Nous en déduisons que les points H, J et L sont alignés si et seulement si

$$\det(\overrightarrow{LJ}, \overrightarrow{LH}) = \begin{vmatrix} 3 & a+3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = a - 3 = 0.$$

Il en résulte que H, J et L sont alignés si et seulement si $a = 3$.



2. Le triangle JHL est rectangle en H si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{HL}(-3-a, 2)$ et $\overrightarrow{HJ}(-a, 1)$ sont orthogonaux, ce qui équivaut à

$$(-3-a)(-a) + 2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 3a + 2 = 0.$$

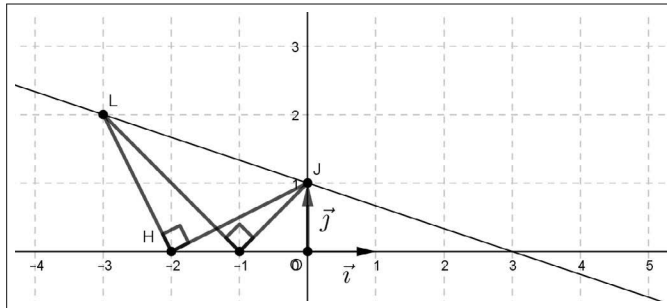
3. Pour résoudre l'équation $a^2 + 3a + 2 = 0$, nous disposons des équivalences suivantes :

$$a^2 + 2\left(\frac{3}{2}\right)a + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\Leftrightarrow a + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \text{ ou } a + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -2 \text{ ou } a = -1.$$

Nous en concluons que le triangle JHL est rectangle en H si et seulement si

$$a = -2 \text{ ou } a = -1.$$



Exercice 6. Points variables sur les axes d'un repère

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal.

On donne les points $A(a, 0)$, $B(0, b)$ et $C(2, -1)$ où a et b sont deux réels non nuls.

1. Déterminer, en fonction de a et b , les coordonnées du point M tel que

$$2 \cdot \overrightarrow{MA} + 3 \cdot \overrightarrow{MB} - 4 \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

2. Calculer AM^2 et BM^2 en fonction de a et b .

3. Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$.

Montrer que $M \in \Delta$ si et seulement si $3a^2 - 5b^2 - 16a - 8b = 0$.

4. On suppose que $a = 2b$.

Déterminer dans ce cas les coordonnées du point M tel que $M \in \Delta$.

Solution

1. L'égalité $2 \cdot \overrightarrow{MA} + 3 \cdot \overrightarrow{MB} - 4 \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ est équivalente à

$$2 \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) + 3 \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) - 4 \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}) = \vec{0},$$

ce qui donne

$$\overrightarrow{OM} = 2 \cdot \overrightarrow{OA} + 3 \cdot \overrightarrow{OB} - 4 \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Puisque $A(a, 0)$, $B(0, b)$ et $C(2, -1)$, nous obtenons

$$\overrightarrow{OM} = 2a \cdot \vec{i} + 3b \cdot \vec{j} - 4 \cdot (2 \cdot \vec{i} - \vec{j}) = (2a - 8) \cdot \vec{i} + (3b + 4) \cdot \vec{j}.$$

En posant $M(x, y)$, nous en concluons

$$\begin{cases} x = 2a - 8 \\ y = 3b + 4 \end{cases}, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ réels non nuls.}$$

2. Nous avons

$$AM^2 = (x - a)^2 + y^2 = (2a - 8 - a)^2 + (3b + 4)^2 = (a - 8)^2 + (3b + 4)^2.$$
$$BM^2 = x^2 + (y - b)^2 = (2a - 8)^2 + (3b + 4 - b)^2 = (2a - 8)^2 + (2b + 4)^2.$$

3. Nous disposons des équivalences

$$M \in \Delta \Leftrightarrow AM = BM,$$
$$M \in \Delta \Leftrightarrow AM^2 = BM^2,$$
$$M \in \Delta \Leftrightarrow (a - 8)^2 + (3b + 4)^2 = (2a - 8)^2 + (2b + 4)^2,$$
$$M \in \Delta \Leftrightarrow a^2 - 16a + 64 + 9b^2 + 24b + 16 = 4a^2 - 32a + 64 + 4b^2 + 16b + 16.$$

Après simplifications, nous en concluons

$$M \in \Delta \Leftrightarrow 3a^2 - 5b^2 - 16a - 8b = 0.$$

4. Nous supposons que $a = 2b$. Dans ce cas, nous obtenons

$$3(2b)^2 - 5b^2 - 16(2b) - 8b = 0 \Leftrightarrow 7b^2 - 40b = 0 \Leftrightarrow b(7b - 40) = 0.$$

Puisque $b \neq 0$, nous en déduisons que

$$b = \frac{40}{7}.$$

Il en résulte que les coordonnées du point M sont

$$\begin{cases} x = 2 \times \frac{80}{7} - 8 = \frac{104}{7} \\ y = 3 \times \frac{40}{7} + 4 = \frac{148}{7} \end{cases}.$$

Nous en concluons

$$M\left(\frac{104}{7}, \frac{148}{7}\right).$$

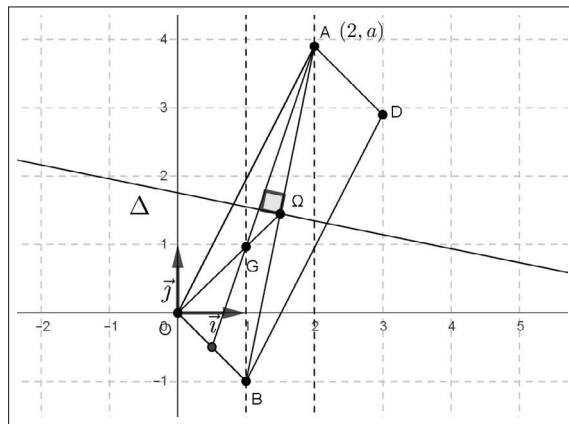
Exercice 7. Point variable sur une droite parallèle à la droite des ordonnées

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal.

On donne les points $A(2, a)$ et $B(1, -1)$, où a est un réel donné.

1. Déterminer les coordonnées du milieu Ω du segment $[AB]$.
2. Déterminer les coordonnées du point D symétrique de O par rapport à Ω .
3. a. Quelle est la nature du quadrilatère $OBDA$?
b. Pour quelle valeur de a ce quadrilatère est-il un rectangle ?
4. a. Déterminer une équation de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.
b. Pour quelle valeur de a , cette médiatrice est-elle parallèle à la droite des ordonnées ?
5. Montrer que lorsque a décrit \mathbb{R} , le centre de gravité G du triangle OAB décrit une droite dont on précisera une équation.

Solution



1. Comme Ω est le milieu du segment $[AB]$, nous avons

$$\Omega\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right), \text{ soit } \Omega\left(\frac{3}{2}, \frac{a-1}{2}\right).$$

2. Puisque le point D est le symétrique de O par rapport à Ω , nous avons

$$\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{O\Omega} = 3 \cdot \vec{i} + (a-1) \cdot \vec{j},$$

ce qui donne

$$D(3, a-1) \text{ dans le repère } (O; \vec{i}, \vec{j}).$$

3. a. Les diagonales $[OD]$ et $[AB]$ du quadrilatère $OBDA$ ont le même milieu Ω .

Il en résulte que ce quadrilatère est un parallélogramme.

b. Puisque $A(2, a)$ et $B(1, -1)$, nous avons

$$\overrightarrow{OA}(2, a) \text{ et } \overrightarrow{OB}(1, -1).$$

Par suite, il vient

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 \times 1 + a \times (-1) = 2 - a.$$

Ainsi, le parallélogramme $OBDA$ est un rectangle si et seulement si

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

4. a. Nous donnons deux méthodes.

Méthode 1.

La médiatrice Δ de $[AB]$ est une droite passant par Ω , milieu du segment $[AB]$ et perpendiculaire en ce point à la droite (BA) .

Nous en déduisons que, pour tout point $M(x, y)$, nous disposons des équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in \Delta &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{BA} = 0, \\ M \in \Delta &\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right) \times 1 + \left(y - \frac{a-1}{2}\right)(a+1) = 0, \\ M \in \Delta &\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right) + y(a+1) - \left(\frac{a-1}{2}\right)(a+1) = 0, \\ M \in \Delta &\Leftrightarrow x + y(a+1) - \frac{3 + (a^2 - 1)}{2} = 0. \end{aligned}$$

Nous en concluons qu'une équation de la droite Δ est

$$x + y(a+1) - \frac{a^2 + 2}{2} = 0.$$

Méthode 2.

Nous traduisons analytiquement l'équivalence

$$M \in \Delta \Leftrightarrow MA^2 = MB^2.$$

b. La droite Δ est parallèle à la droite des ordonnées si et seulement si $a = -1$.

Dans ce cas, une équation de Δ est $x = \frac{3}{2}$.

5. Puisque G est le centre de gravité du triangle OBA , nous avons :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{O\Omega} = \vec{i} + \frac{a-1}{3} \cdot \vec{j}.$$

En posant $G(x, y)$, nous obtenons

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{a-1}{3} \end{cases}.$$

Nous en déduisons que lorsque a décrit \mathbb{R} , le point G décrit la droite d'équation $x = 1$.

Cette droite est parallèle à la droite des ordonnées.

Exercice 8. Distance d'un point à une droite

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal.

On donne les points $A(a, 0)$ et $J(0, 1)$, où a est un réel non nul donné.

1. Montrer que la droite (AJ) a pour équation $y = -\frac{1}{a}x + 1$.
2. Déterminer, en fonction du réel a , les coordonnées du point H tel que
 - $H \in (AJ)$
 - $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AJ}$
3. Calculer la distance OH en fonction de a .
4. Montrer que, $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $OH < 1$.

Solution

1. Soit $M(x, y)$. Nous avons les équivalences

$$\begin{aligned} M \in (AJ) &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AJ}) = 0, \\ M \in (AJ) &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & -a \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ M \in (AJ) &\Leftrightarrow (x-a) - (-a)y = 0, \\ M \in (AJ) &\Leftrightarrow ay = -x + a. \end{aligned}$$

Puisque $a \neq 0$, nous en déduisons que la droite (AJ) a pour équation

$$y = -\frac{1}{a}x + 1.$$

2. Posons $H(x_H, y_H)$. Sachant que $\overrightarrow{OH}(x_H, y_H)$ et $\overrightarrow{AJ}(-a, 1)$, les deux conditions de l'énoncé sont équivalentes au système

$$\begin{cases} y_H = -\frac{1}{a}x_H + 1 \\ x_H \times (-a) + y_H = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_H = -\frac{1}{a}x_H + 1 \\ y_H = ax_H \end{cases}.$$

Puisque $a^2 + 1 \neq 0$, nous en déduisons :

$$ax_H = -\frac{1}{a}x_H + 1 \Leftrightarrow (a^2 + 1)x_H = a \Leftrightarrow x_H = \frac{a}{a^2 + 1}.$$

Nous en concluons que

$$H\left(\frac{a}{a^2 + 1}, \frac{a^2}{a^2 + 1}\right).$$

3. Nous avons

$$OH^2 = \left(\frac{a}{a^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{a^2 + 1}\right)^2 = \frac{a^2(1 + a^2)}{(a^2 + 1)^2} = \frac{a^2}{a^2 + 1}.$$

Puisque $a^2 + 1 > 0$, nous obtenons

$$OH = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + 1}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

4. Pour tout réel $a \neq 0$, nous avons

$$a^2 < a^2 + 1.$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante sur \mathbb{R}^+ , nous en déduisons que

$$\sqrt{a^2} < \sqrt{a^2 + 1}, \text{ soit } |a| < \sqrt{a^2 + 1}.$$

Puisque $\sqrt{a^2 + 1} > 0$, il vient

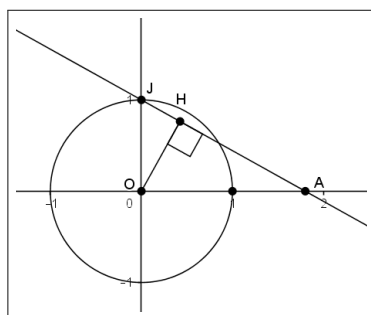
$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2 + 1}} < 1.$$

Nous en concluons

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, OH < 1.$$

Remarque

Nous avons ainsi démontré que, quel que soit le réel $a \neq 0$, le projeté orthogonal H du point O sur la droite (AJ) appartient au disque ouvert de centre O et de rayon 1.



Exercice 9. Équation normalisée d'une droite

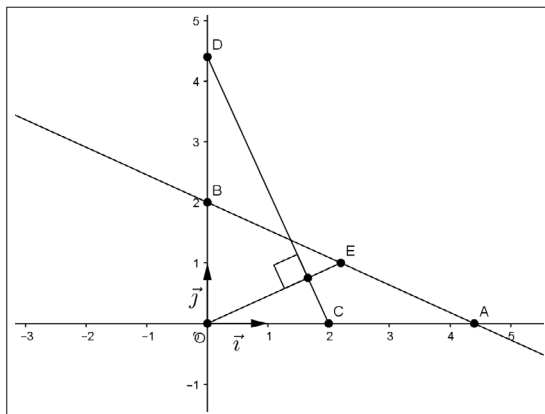
Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on donne les points $A(a, 0)$ et $B(0, b)$, avec a et b réels tels que $ab \neq 0$.

1. Montrer qu'une équation de la droite (AB) est : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

2. On donne de plus les points $C(b, 0)$ et $D(0, a)$.

Montrer que la médiane issue de O dans le triangle OAB est la hauteur issue de O dans le triangle OCD .

Solution



1. Un point $M(x, y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}(x - a, y)$ et $\overrightarrow{AB}(-a, b)$ sont colinéaires, ce qui équivaut à

$$\begin{vmatrix} x - a & -a \\ y & b \end{vmatrix} = 0.$$

Nous en déduisons

$$b(x - a) + ay = 0 \Leftrightarrow bx + ay = ab.$$

En divisant par $ab \neq 0$, nous en concluons qu'une équation de (AB) est

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

2. Soit E le milieu du segment $[AB]$. Nous avons $E(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.

Il en résulte que

$$\overrightarrow{OE}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}).$$

De plus, nous avons, $\overrightarrow{DC}(b, -a)$.

Ainsi nous obtenons :

$$\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{a}{2} \times b + \frac{b}{2} \times (-a) = 0.$$

Par suite, les vecteurs \overrightarrow{OE} et \overrightarrow{DC} sont orthogonaux.

Nous en concluons que la médiane issue de O dans le triangle OAB est la hauteur issue de O dans le triangle OCD .

Exercice 10. Cercles

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on donne les points $A(2, 0)$, $B(0, -1)$ et $C(1, -\frac{1}{2})$.

1. Montrer que, pour tout point $M(x, y)$,

$$AM^2 + BM^2 = 2 \left[(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \right] + \frac{5}{2}.$$

2. En déduire que $AM^2 + BM^2 = 2CM^2 + \frac{5}{2}$.

3. On considère l'ensemble Γ des points M du plan tels que

$$AM^2 + BM^2 = 5.$$

a. Montrer que $O \in \Gamma$.

b. Déterminer et représenter l'ensemble Γ .

4. Soit k un réel donné.

Déterminer, selon les valeurs de k , l'ensemble Γ_k des points M du plan tels que

$$AM^2 + BM^2 = k.$$

Solution

1. Soit $M(x, y)$. Nous avons

$$AM^2 + BM^2 = (x-2)^2 + y^2 + x^2 + (y+1)^2 = 2(x^2 - 2x + y^2 + \frac{y}{2}) + 5,$$

$$AM^2 + BM^2 = 2 \left[(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 2 \times \frac{y}{4} + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} \right] + 5,$$

$$AM^2 + BM^2 = 2 \left[(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \right] + \frac{5}{2}.$$

2. Puisque $CM^2 = (x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2$, nous obtenons immédiatement

$$AM^2 + BM^2 = 2CM^2 + \frac{5}{2}.$$

3. a. Nous avons

$$OA^2 + OB^2 = 2^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 = 5,$$

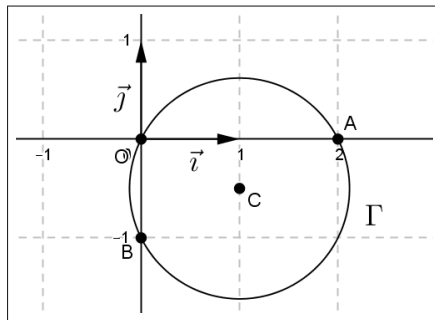
ce qui justifie que $O \in \Gamma$.

b. Nous disposons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\Leftrightarrow 2CM^2 + \frac{5}{2} = 5, \\ M \in \Gamma &\Leftrightarrow CM^2 = \frac{5}{4}, \\ M \in \Gamma &\Leftrightarrow CM = \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Nous en concluons que Γ est le cercle de centre C et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Puisque $O \in \Gamma$, ce cercle est centré en C et passe par l'origine O du repère.



4. De la même façon, nous obtenons

$$\begin{aligned} M \in \Gamma_k &\Leftrightarrow 2CM^2 + \frac{5}{2} = k, \\ M \in \Gamma_k &\Leftrightarrow CM^2 = \frac{2k - 5}{4}. \end{aligned}$$

Par disjonction, nous distinguons 3 cas.

1^{er} cas : $\frac{2k - 5}{4} > 0$, soit $k > \frac{5}{2}$.

$$M \in \Gamma_k \Leftrightarrow CM = \frac{\sqrt{2k - 5}}{2}.$$

Γ_k est le cercle de centre C et de rayon $\frac{\sqrt{2k - 5}}{2}$.

2^e cas : $\frac{2k - 5}{4} = 0$, soit $k = \frac{5}{2}$.

$$M \in \Gamma_k \Leftrightarrow CM^2 = 0 \Leftrightarrow M = C$$

Dans ce cas, $\Gamma_{\frac{5}{2}} = \{C\}$.

3^e cas : $\frac{2k - 5}{4} < 0$, soit $k < \frac{5}{2}$.

Dans ce cas, nous avons $CM^2 < 0$. Nous en concluons que

$$\Gamma_k = \emptyset.$$

Exercice 11. Construire une base orthonormale

1. Soit $\vec{U}(a, b)$ un vecteur non nul donné relativement à une base orthonormale (\vec{i}, \vec{j}) .

Déterminer un vecteur \vec{V} tel que \vec{V} soit orthogonal à \vec{U} .

2. On suppose que $\vec{U}(1, 2)$.

À partir de la donnée de ce vecteur, déterminer une base (\vec{u}, \vec{v}) orthonormale.

Solution

1. Soit $\vec{V}(x, y)$.

Ce vecteur est orthogonal à $\vec{U}(a, b)$ si et seulement si $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$, ce qui équivaut à

$$ax + by = 0.$$

Cette équation à deux inconnues admet le couple $(-b, a)$ pour solution particulière.

Nous pouvons en conclure que le vecteur $\vec{V}(-b, a)$ est orthogonal à $\vec{U}(a, b)$.

2. Soit $\vec{U}(1, 2)$. D'après la question précédente, $\vec{V}(-2, 1)$ est orthogonal à $\vec{U}(1, 2)$.

Posons

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{U}\|} \cdot \vec{U} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \vec{U} \text{ et } \vec{v} = \frac{1}{\|\vec{V}\|} \cdot \vec{V} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \vec{V}.$$

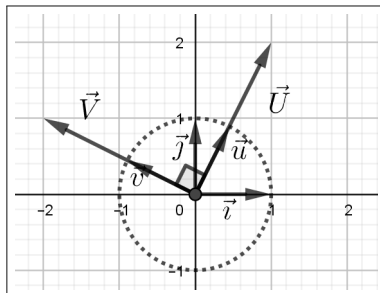
Nous en déduisons

$$\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ et } \vec{v}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Nous vérifions

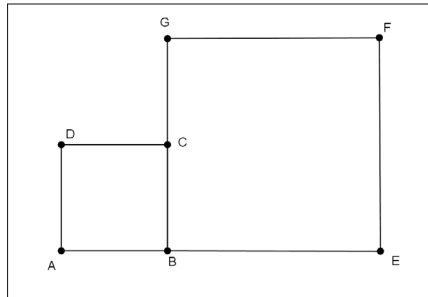
$$\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0, \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Nous avons ainsi justifié que (\vec{u}, \vec{v}) est une base orthonormale.



Exercice 12. Étude d'une configuration

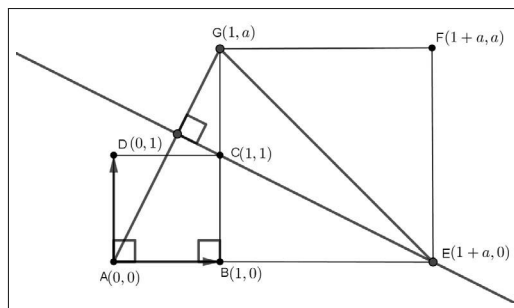
Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré de côté 1 et $BEFG$ est un carré de côté $a > 0$.



Montrer que la droite (EC) est la hauteur issue de E dans le triangle AEG .
Que peut-on dire du point C ?

Solution

Nous rapportons le plan au repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.



Dans ce repère, nous obtenons

$$A(0, 0), C(1, 1), E(1 + a, 0) \text{ et } G(1, a).$$

Il en résulte

$$\overrightarrow{AG}(1, a) \text{ et } \overrightarrow{EC}(-a, 1).$$

Par suite, nous avons

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC} = 1 \times [-a] + a \times 1 = 0,$$

ce qui prouve que les droites (EC) et (AG) sont orthogonales et par conséquent la droite (EC) est la hauteur issue de E dans le triangle AEG .

De plus la droite (GB) est perpendiculaire en B à droite (AE) . C'est donc la hauteur issue de G dans le triangle AEG .

Puisque $C \in (BG)$, nous en concluons que C est l'orthocentre du triangle AEG .

Exercice 13. Tangente et normale à une parabole

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Relativement à ce repère, on donne la parabole (p) d'équation $y = x^2$ et $A(a, a^2)$ un point de (p) tel que $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Le point $B(0, -a^2)$ étant donné, déterminer une équation de la droite (AB) .

2. Montrer qu'une équation de la droite Δ perpendiculaire à (AB) en A est

$$y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}.$$

3. La droite Δ coupe la parabole en un point C autre que A . Déterminer l'abscisse de ce point.

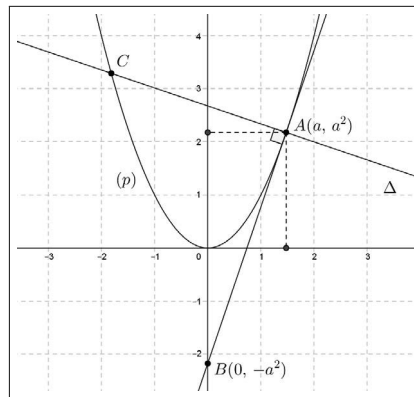
4. Pour tout réel $a \neq 0$, nous posons $f(a) = BC^2$.

Exprimer $f(a)$ fonction de a .

Quelle est la parité de la fonction f ?

Graphiquement, nous conjecturons que f atteint un minimum sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Proposer une fonction Python qui restitue une valeur approchée de ce minimum observé.

Solution



1. Soit $M(x, y)$.

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(x - a, y - a^2) \text{ et } \overrightarrow{AB}(-a, -2a^2) \text{ colinéaires.}$$

Nous en déduisons qu'une équation de la droite (AB) est

$$\begin{vmatrix} x - a & -a \\ y - a^2 & -2a^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2a^2(x - a) + a(y - a^2) = 0 \Leftrightarrow ay = 2a^2x - a^3.$$

Puisque $a \in \mathbb{R}^*$, nous en concluons qu'une équation réduite de la droite (AB) est

$$y = 2ax - a^2.$$

2. Soit $M(x, y)$.

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(x - a, y - a^2) \text{ et } \overrightarrow{AB}(-a, -2a^2) \text{ orthogonaux.}$$

Ainsi une équation de la droite Δ est

$$(x - a)(-a) + (y - a^2)(-2a^2) = 0 \Leftrightarrow 2a^2y = -ax + a^2 + 2a^4.$$

Puisque $a^2 \in \mathbb{R}^*$, nous en concluons que la droite Δ a pour équation réduite

$$y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}.$$

3. L'abscisse d'un point commun à la parabole (p) et la droite Δ est solution de l'équation, notée (E)

$$x^2 = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}.$$

Résolution de (E) .

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2a}x = a^2 + \frac{1}{2}, \\ (E) &\Leftrightarrow x^2 + 2\left(\frac{1}{4a}\right)x + \left(\frac{1}{4a}\right)^2 - \left(\frac{1}{4a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{2}, \\ (E) &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{4a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16a^2}, \\ (E) &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{4a}\right)^2 = \frac{16a^4 + 8a^2 + 1}{16a^2}, \\ (E) &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{4a}\right)^2 = \frac{(4a^2 + 1)^2}{16a^2} = \left(\frac{4a^2 + 1}{4a}\right)^2. \end{aligned}$$

Puisque $\left(\frac{4a^2 + 1}{4a}\right)^2 > 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow x + \frac{1}{4a} = \frac{4a^2 + 1}{4a} \text{ ou } x + \frac{1}{4a} = -\frac{4a^2 + 1}{4a}, \\ (E) &\Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = \frac{-4a^2 - 2}{4a}. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'abscisse du point C distinct de A où la droite Δ coupe la parabole (p) est

$$x_C = \frac{-4a^2 - 2}{4a} = -\frac{2a^2 + 1}{2a} = -a - \frac{1}{2a}.$$

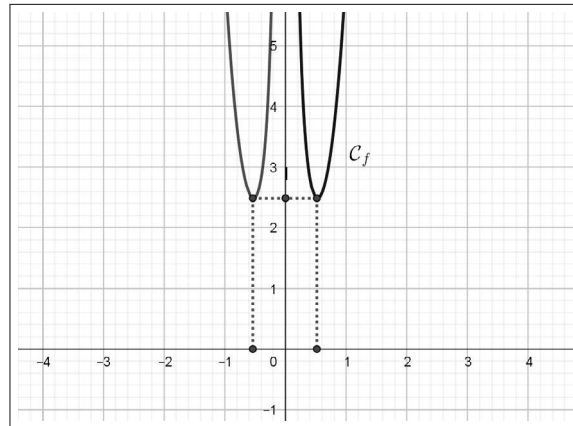
4. ▷ Pour tout réel $a \neq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} f(a) &= BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2, \\ &= \left(-a - \frac{1}{2a}\right)^2 + (a^2 - (-a^2))^2, \\ &= \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 + 4a^4, \\ &= a^2 + 1 + \frac{1}{4a^2} + 4a^4. \end{aligned}$$

▷ La fonction $f : a \mapsto a^2 + 1 + \frac{1}{4a^2} + 4a^4$ est paire car, quel que soit le réel $a \in \mathbb{R}^*$, nous avons

$$-a \in \mathbb{R}^* \text{ et } f(-a) = f(a).$$

▷ Graphiquement, nous observons que f atteint un minimum sur $]0, +\infty[$ et plus précisément sur l'intervalle $[0, 1]$. Par symétrie par rapport à la droite des ordonnées, ce minimum est atteint également sur $] -\infty, 0[$.



▷ L'intervalle $[a, b]$ et l'entier n étant choisis en entrée, nous proposons le script Python qui suit, où $h = \frac{b-a}{n}$ est le pas qui permet d'atteindre une valeur approchée du minimum observé.

```

from math import*
def f(x) :
    return 4*x**4+x**2+1+1/(4*x**2)
def min(a, b, n):
    h=(b-a)/n
    x=a
    m=f(a)
    for k in range (0, n):
        if f(x+h)<f(x):
            m=f(x+h)
            x=x+h
    return m, x

```

En exécutant ce programme, nous obtenons

```
>>> min(0.25,1,10)
```

```
(2.4949712809917357, 0.55)
```

ce qui donne un minimum $m \approx 2,49$ atteint en $x_0 \approx 0,55$.

Exercice 14. Propriété d'une hyperbole

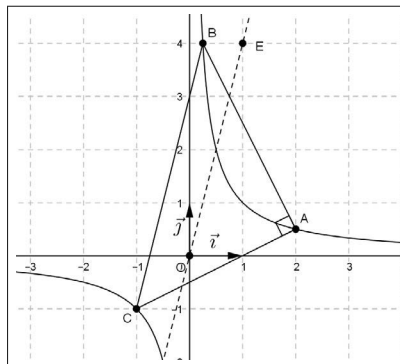
Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par (H) l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

Soient A , B et C trois points distincts de (H) , d'abscisses respectives 2 , $b > 0$ et $c < 0$.

1. Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $bc = -\frac{1}{4}$: vrai ou faux ?

2. Lorsque le triangle ABC est rectangle en A , montrer que la droite (BC) est parallèle à la droite (OE) avec $E(1, 4)$.

Solution



1. Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Nous avons

$$\overrightarrow{AB}(b-2, \frac{1}{b} - \frac{1}{2}) \text{ et } \overrightarrow{AC}(c-2, \frac{1}{c} - \frac{1}{2}).$$

Il en résulte que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si

$$\begin{aligned} (b-2)(c-2) + (\frac{1}{b} - \frac{1}{2})(\frac{1}{c} - \frac{1}{2}) = 0 &\Leftrightarrow (b-2)(c-2) + \frac{(b-2)(c-2)}{4bc} = 0 \\ &\Leftrightarrow (b-2)(c-2)(1 + \frac{1}{4bc}) = 0. \end{aligned}$$

Or nous savons que $b \neq 2$ et $c < 0$. Nous en déduisons que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si

$$1 + \frac{1}{4bc} = 0 \Leftrightarrow bc = -\frac{1}{4}.$$

Nous en concluons que l'assertion proposée est **vraie**.

2. Nous avons

$$\overrightarrow{BC}(c-b, \frac{1}{c} - \frac{1}{b}), \text{ soit } \overrightarrow{BC}(c-b, \frac{c-b}{bc}).$$

Puisque $bc = -\frac{1}{4}$, nous en déduisons

$$\overrightarrow{BC}(c-b, -4(b-c)), \text{ soit } \overrightarrow{BC}(c-b, 4(c-b)).$$

Comme $\overrightarrow{OE}(1, 4)$, nous obtenons

$$\overrightarrow{BC} = (c-b) \cdot \overrightarrow{OE}.$$

Nous avons ainsi démontré que les vecteurs \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{OE} sont colinéaires, ce qui justifie que les droites (BC) et (OE) sont parallèles.

Exercice 15. Équations d'un cercle

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer qu'une équation du cercle (C) de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $r > 0$ est

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

En déduire en particulier une équation du cercle unité, de centre O et de rayon 1.

2. Montrer que l'ensemble Γ des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

En est-il de même de l'ensemble Γ' des points $M(x, y)$ tels que

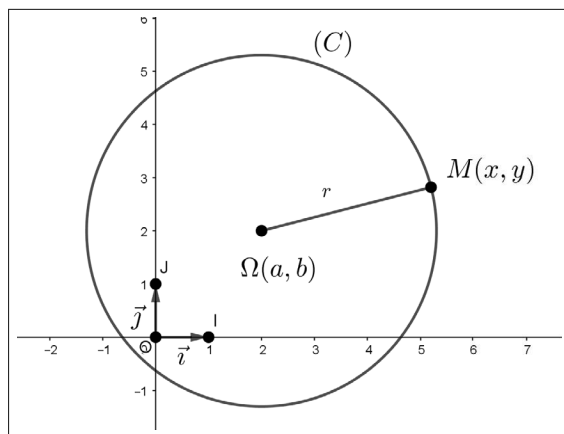
$$x^2 + y^2 - 2x + y + 2 = 0 ?$$

3. Déterminer les points d'intersection de Γ avec les axes du repère.

4. Étudier l'intersection du cercle Γ avec la droite (d) dont une équation est $y = -2x + 4$.

Que peut-on dire de cette droite ?

Solution



1. Soit $M(x, y)$. Puisque $\Omega M > 0$, nous obtenons

$$M \in (C) \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2.$$

Nous en déduisons qu'une équation du cercle (C) est

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

En particulier une équation du cercle unité est

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Remarque

En développant, une équation de ce cercle est de la forme

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Il est donc légitime d'étudier une réciproque.

C'est ce que nous illustrons dans la question qui suit.

2. Soit $M(x, y)$.

▷ En utilisant les formes canoniques de $x^2 - 2x$ et $y^2 + y$, nous obtenons

$$\begin{aligned}M \in \Gamma &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0, \\M \in \Gamma &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Considérons le point $\Omega(1, -\frac{1}{2})$. Il vient

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \Omega M = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Nous reconnaissons un cercle Γ de centre Ω et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Pour représenter ce cercle, nous observons que l'origine du repère O appartient à Γ (voir la figure à la fin du corrigé).

▷ En reprenant les calculs précédents, nous avons

$$M \in \Gamma' \Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}.$$

Nous en déduisons

$$M \in \Gamma' \Leftrightarrow \Omega M^2 = -\frac{3}{4} < 0,$$

ce qui justifie

$$\Gamma' = \emptyset.$$

Nous en concluons que l'équation $x^2 + y^2 - 2x + y + 2 = 0$ n'est pas une équation de cercle.

3.▷ Intersection de Γ avec la droite (OI) des abscisses.

Nous résolvons le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Nous en déduisons l'équation aux abscisses

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0.$$

Il en résulte

$$\Gamma \cap (OI) = \{O, A\}, \text{ avec } A(2, 0).$$

▷ Intersection de Γ avec la droite (OJ) des ordonnées.

Nous résolvons le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Nous en déduisons l'équation aux ordonnées

$$y^2 + y = 0 \Leftrightarrow y(y + 1) = 0.$$

Il en résulte

$$\Gamma \cap (OJ) = \{O, B\}, \text{ avec } B(0, -1).$$

4. Pour étudier l'intersection du cercle Γ avec la droite (d) , nous résolvons le système

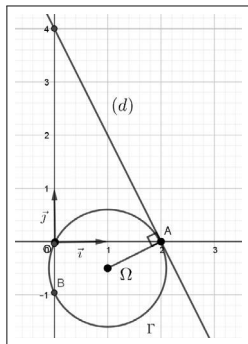
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + y = 0 \\ y = -2x + 4 \end{cases}.$$

Nous en déduisons l'équation aux abscisses

$$x^2 + (-2x + 4)^2 - 2x - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0.$$

Nous en concluons que la droite (d) coupe le cercle Γ en l'unique point $A(2, 0)$.

Nous en déduisons que (d) est tangente au cercle Γ au point A . Nous contrôlons graphiquement.



Exercice 16. Tangente au cercle unité

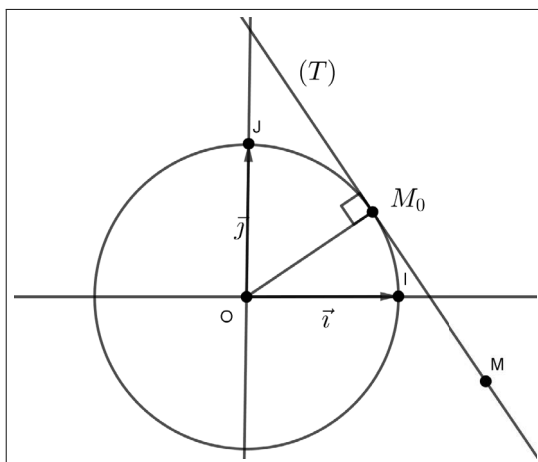
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du cercle unité (C_O) d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Montrer qu'une équation de la tangente (T) à (C_O) au point M_0 est

$$x_0x + y_0y = 1.$$

Solution



Soit $M(x, y)$ un point de la droite (T) .

Les vecteurs $\overrightarrow{OM_0}(x_0, y_0)$ et $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$ sont orthogonaux, ce qui est équivalent à

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow x_0x + y_0y = x_0^2 + y_0^2.$$

Puisque $M_0(x_0, y_0) \in (C_O)$, nous avons $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Nous en déduisons qu'une équation de la tangente (T) à (C_O) au point M_0 est

$$x_0x + y_0y = 1.$$

Exercice 17. Changement de repères et parabole

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R}_O = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le point $A(a, b)$ par rapport à ce repère et soit M un point du plan tel que $M(x, y)$ relativement au repère \mathcal{R}_O et $M(X, Y)$ dans le repère $\mathcal{R}_A = (A; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Formules de passage du repère \mathcal{R}_O au repère \mathcal{R}_A . Justifier que

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}.$$

En déduire les formules de passage de \mathcal{R}_A à \mathcal{R}_O .

2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

On désigne par C_f sa représentation graphique dans le repère \mathcal{R}_O .

Montrer qu'il existe un point S du plan tel que, dans le repère $\mathcal{R}_S = (S; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe C_f ait pour équation $Y = X^2$.

3. Plus généralement, reprendre la question 2 lorsque f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + px + q$, où p et q sont deux réels donnés.

Solution

1. Relativement à la base (\vec{i}, \vec{j}) , nous avons d'une part

$$\overrightarrow{AM}(x - a, y - b)$$

et d'autre part

$$\overrightarrow{AM}(X, Y).$$

La décomposition d'un vecteur dans une même base est unique. Nous en déduisons que les formules de passage du repère \mathcal{R}_O au repère \mathcal{R}_A sont

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}.$$

Nous obtenons immédiatement les formules de passage de \mathcal{R}_A à \mathcal{R}_O

$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}.$$

2. Une équation de C_f dans le repère \mathcal{R}_O est $y = x^2 - 4x + 5$.

Grâce à sa mise sous forme canonique, nous obtenons

$$y = x^2 - 4x + 4 - 4 + 5 = (x - 2)^2 + 1.$$

Nous en déduisons qu'une équation de C_f dans le repère \mathcal{R}_O est

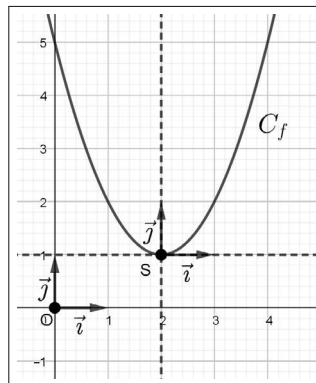
$$y - 1 = (x - 2)^2.$$

Posons $S(2, 1)$. Les formules de passage du repère \mathcal{R}_O au repère \mathcal{R}_S sont

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 1 \end{cases}.$$

Il en résulte qu'une équation de C_f dans le repère \mathcal{R}_S est $Y = X^2$.

Nous avons ainsi justifié que la courbe C_f est une parabole de sommet S et d'axe de symétrie la droite d'équation $X = 0$ dans le repère \mathcal{R}_S , c'est-à-dire d'équation $x = 2$ dans le repère \mathcal{R}_O .



3. Une équation de C_f dans le repère \mathcal{R}_O est $y = x^2 + px + q$.

Grâce à sa mise sous forme canonique, nous obtenons

$$y = x^2 + 2\left(\frac{p}{2}\right)x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4}.$$

Posons $\alpha = -\frac{p}{2}$ et $\beta = -\frac{p^2 - 4q}{4}$.

Une équation de C_f dans le repère \mathcal{R}_O est

$$y - \beta = (x - \alpha)^2.$$

Posons $S(\alpha, \beta)$. Les formules de passage du repère \mathcal{R}_O au repère \mathcal{R}_S sont

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}.$$

Il en résulte qu'une équation de C_f dans le repère \mathcal{R}_S est $Y = X^2$.

Nous avons ainsi justifié que la courbe C_f est une parabole de sommet S et d'axe de symétrie la droite d'équation $X = 0$ dans le repère \mathcal{R}_S , c'est-à-dire d'équation $x = \alpha$ dans le repère \mathcal{R}_O .

Exercice 18. Changement de repères et hyperbole

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R}_O = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 2}$.

Déterminer un repère du plan dans lequel la représentation graphique de la fonction f a une équation de la forme $Y = \frac{1}{X}$.

2. Plus généralement, soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $2a + b = 1$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $g(x) = \frac{ax + b}{x - 2}$.

Déterminer un repère du plan dans lequel la représentation graphique de la fonction g a une équation de la forme $Y = \frac{1}{X}$.

Solution

1. Une équation de C_f dans le repère \mathcal{R}_O est $y = \frac{2x - 3}{x - 2}$.

Ceci donne, en mettant cette expression homographe sous sa forme canonique,

$$y = \frac{2x - 4 + 4 - 3}{x - 2} = \frac{2(x - 2) + 1}{x - 2} = 2 + \frac{1}{x - 2}.$$

Nous en déduisons qu'une équation de C_f dans le repère \mathcal{R}_O est

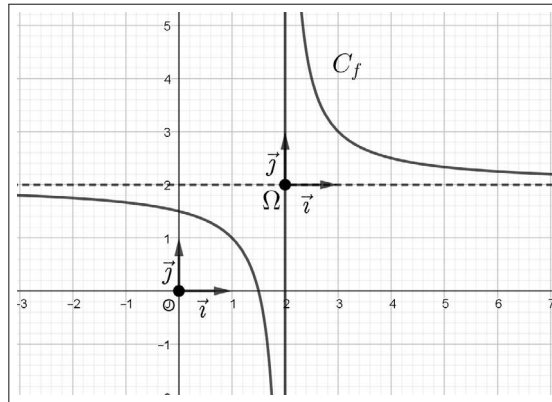
$$y - 2 = \frac{1}{x - 2}.$$

Nous posons $\Omega(2, 2)$.

Les formules de passage du repère \mathcal{R}_O au repère $\mathcal{R}_\Omega = (\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ sont

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 2 \end{cases}.$$

Il en résulte qu'une équation de C_f dans le repère \mathcal{R}_Ω est $Y = \frac{1}{X}$.



2. Une équation de C_g dans le repère \mathcal{R}_O est $y = \frac{ax + b}{x - 2}$.

En mettant cette expression homographique sous sa forme canonique, il vient

$$y = \frac{ax - 2a + 2a + b}{x - 2} = \frac{a(x - 2) + 2a + b}{x - 2} = a + \frac{2a + b}{x - 2}.$$

Sachant que $2a + b = 1$, une équation de C_g dans le repère \mathcal{R}_O est

$$y - a = \frac{1}{x - 2}.$$

En posant $\Omega(2, a)$, les formules de passage du repère \mathcal{R}_O au repère \mathcal{R}_Ω sont

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - a \end{cases}.$$

Il en résulte qu'une équation de C_g dans le repère \mathcal{R}_Ω est $Y = \frac{1}{X}$.

Exercice 19. Homothétie et coordonnées

Le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Pour tout point $M(x, y)$, nous considérons le point $M'(x', y')$ image de M par l'homothétie h de centre O et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

2. Plus généralement, nous considérons le point $M'(x', y')$ image de $M(x, y)$ par l'homothétie h de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$.

Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

3. Réciproquement k , a et b étant trois réels donnés, avec $k \in \mathbb{R}^*$, nous considérons la transformation qui associe à chaque point $M(x, y)$ un unique point $M(x', y')$ tels que

$$\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases}.$$

- Lorsque $k = 1$, quelle est la nature de cette transformation ?
- Nous supposons que $k \neq 1$.

Justifier qu'il existe un unique point Ω invariant par cette transformation.

En déduire dans ce cas la nature de cette dernière.

Examiner le cas particulier $k = -1$.

Solution

1. Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points tels que

$$M' = h(M),$$

ce qui donne vectoriellement

$$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Nous en déduisons

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}.$$

2. Nous procédons de la même façon.

Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points tels que

$$M' = h(M),$$

ce qui donne vectoriellement

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \cdot \overrightarrow{\Omega M}.$$

Nous en déduisons

$$\begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0) \\ y' - y_0 = k(y - y_0) \end{cases},$$

ce qui permet de conclure par :

$$\begin{cases} x' = kx + (1 - k)x_0 \\ y' = ky + (1 - k)y_0 \end{cases} .$$

3. • Nous supposons que $k = 1$. Dans ce cas, nous obtenons

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} .$$

En considérant le vecteur $\vec{u}(a, b)$, nous en déduisons vectoriellement

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u},$$

ce qui prouve que, lorsque $k = 1$, le point M' est l'image du point M par la translation $t_{\vec{u}}$.

• Nous supposons que $k \neq 1$.

▷ Un point $\Omega(x_0, y_0)$ est invariant si et seulement si

$$\begin{cases} x_0 = kx_0 + a \\ y_0 = ky_0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0(1 - k) = a \\ y_0(1 - k) = b \end{cases} .$$

Puisque $k \neq 1$ nous en concluons que cette transformation admet un unique point invariant

$$\Omega\left(\frac{a}{1 - k}, \frac{b}{1 - k}\right).$$

▷ Des égalités

$$\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_0 = kx_0 + a \\ y_0 = ky_0 + b \end{cases} ,$$

il résulte, par soustraction,

$$\begin{cases} x' - x_0 = kx + a - (kx_0 + a) \\ y' - y_0 = ky + b - (ky_0 + b) \end{cases} ,$$

soit

$$\begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0) \\ y' - y_0 = k(y - y_0) \end{cases} .$$

Vectoriellement, nous en déduisons

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \cdot \overrightarrow{\Omega M},$$

ce qui établit que, dans le cas où $k \neq 1$, la transformation est une homothétie de centre $\Omega \left(\frac{a}{1-k}, \frac{b}{1-k} \right)$ et de rapport k .

▷ Lorsque $k = -1$, nous obtenons :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = - \cdot \overrightarrow{\Omega M},$$

ce qui prouve que nous sommes en présence d'une symétrie centrale, de centre $\Omega \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$.

Droite et géométrie analytique

Dans ce chapitre, nous continuons à développer nos connaissances en géométrie analytique en approfondissant l'étude des équations cartésiennes d'une droite. Il s'agit tout d'abord d'obtenir une équation réduite d'une droite du plan et dans un deuxième temps de faire le lien avec son équation générale. Puis nous traitons la position relative de deux droites.

Nous résolvons ensuite des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues et observons leur interprétation graphique liée aux équations de droites. Dans le paragraphe "Exercices corrigés", nous étudions d'autres systèmes d'équations : trois équations à deux inconnues, deux équations à trois inconnues, systèmes non linéaires.

En complément, nous abordons :

- l'orthogonalité de deux droites sécantes,
- la notion de représentations paramétriques d'une droite qui fournit une approche pertinente de l'appartenance d'un point à une droite,
- la résolution des systèmes d'inéquations à deux inconnues en donnant quelques exemples de régionnement du plan.

9.1 Équations d'une droite

9.1.1 Vecteurs directeurs d'une droite

Définition. Soit (d) une droite. Tout vecteur non nul de direction (d) est un vecteur directeur de cette droite.

Remarques. Nous en faisons deux.

- Soient A et B deux points distincts de (d) . Le vecteur $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ est un vecteur directeur de $(d) = (AB)$.

- Soit $\vec{u} \neq \vec{0}$ un vecteur directeur d'une droite (d) . Tout vecteur non nul colinéaire à \vec{u} est aussi un vecteur directeur de (d) . Par conséquent, si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ sont deux vecteurs directeurs d'une même droite, alors ces deux vecteurs sont colinéaires.

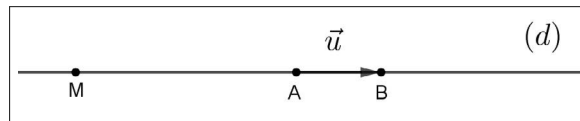
Proposition (caractérisation vectorielle d'une droite). *Soit une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $A \in (d)$.*

Pour tout point M du plan, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $M \in (d)$.

(ii) Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}$.

Démonstration. Soit $B \in (d)$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.



(i) \Rightarrow (ii)

Si $M \in (d)$ alors les points A , B et M sont alignés.

Par suite, les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires.

Il en résulte qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Nous en concluons qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}.$$

(ii) \Rightarrow (i)

Nous supposons qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u} = t \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Ainsi les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires.

Nous en concluons que $M \in (AB)$, c'est-à-dire $M \in (d)$.

Remarques. Nous en donnons cinq.

- Le couple $(A; \vec{u})$ avec $A \in (d)$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ vecteur directeur de (d) , détermine un repère de cette droite.

- Dans ce repère, le réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}$, est l'abscisse du point $M \in (d)$.

- Ce réel t est unique et chaque valeur prise par t fixe un point sur la droite (d) .

On dit aussi que t est un paramètre et l'égalité $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}$ est une représentation paramétrique (vectorielle) de la droite (d) .

- Un segment $[AB]$ est caractérisé vectoriellement par

$$M \in [AB] \Leftrightarrow \exists t \in [0, 1], \overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AB}.$$

- Une demi-droite $[AB)$ est caractérisée vectoriellement par

$$M \in [AB) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^+, \overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AB}.$$

9.1.2 Équations cartésiennes d'une droite

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan.

Proposition. Soit (d) une droite du plan. Relativement au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, nous disposons de la disjonction qui suit.

1^{er} cas : Si (d) est parallèle à la droite des ordonnées, alors (d) a une équation de la forme $x = k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

2^e cas : Si (d) n'est pas parallèle à la droite des ordonnées, alors (d) a une équation de la forme $y = mx + p$, avec $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit (d) une droite passant par un point $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b)$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Soit $M(x, y)$ un point de (d) .

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x - x_0, y - y_0)$ et $\vec{u}(a, b)$ sont colinéaires, donc

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \end{vmatrix} = 0.$$

Nous en déduisons qu'une équation de la droite (d) , notée [1] est

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

Puisque $\vec{u} \neq \vec{0}$, nous avons $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, ce qui nous conduit, par disjonction, à étudier trois cas :

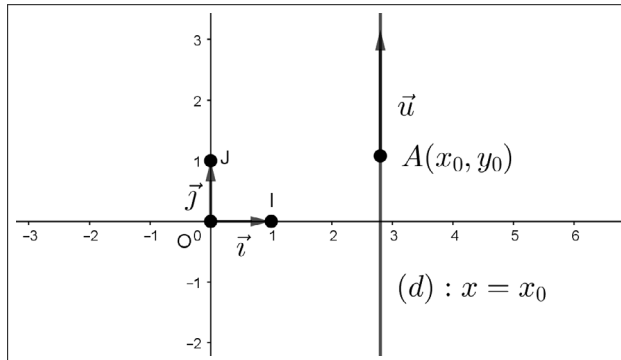
$$a = 0 \text{ et } b \neq 0 \text{ ou } a \neq 0 \text{ et } b = 0 \text{ ou } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0.$$

1^{er} cas : $a = 0$ et $b \neq 0$.

Dans ce cas nous obtenons, $\vec{u} = b \cdot \vec{j}$.

Il en résulte que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et \vec{j} sont colinéaires.

Par conséquent la droite (d) est parallèle à la droite des ordonnées.



De plus une équation de (d) est $b(x - x_0) = 0$.

Puisque $b \neq 0$, une équation de (d) est $x - x_0 = 0$.

Finalement, en posant $x_0 = k$, nous en concluons qu'une équation de la droite (d) parallèle à (OJ) est de la forme

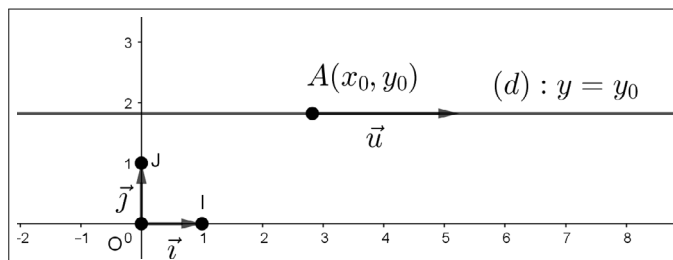
$$x = k, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

2^e cas : $a \neq 0$ et $b = 0$.

Nous obtenons $\vec{u} = a \cdot \vec{i}$.

Il en résulte que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et \vec{i} sont colinéaires.

Par conséquent la droite (d) est parallèle à la droite des (OI) des abscisses.



Nous en déduisons qu'une équation de (d) est $a(y - y_0) = 0$.

Puisque $a \neq 0$, une équation de (d) est $y - y_0 = 0$.

En posant $y_0 = p$, nous en concluons qu'une équation de la droite (d) parallèle à (OI) est de la forme :

$$y = p, \text{ avec } p \in \mathbb{R}.$$

En posant $m = 0$, nous remarquons qu'une équation de la droite (d) est de la forme

$$y = 0x + p.$$

3^e cas : $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

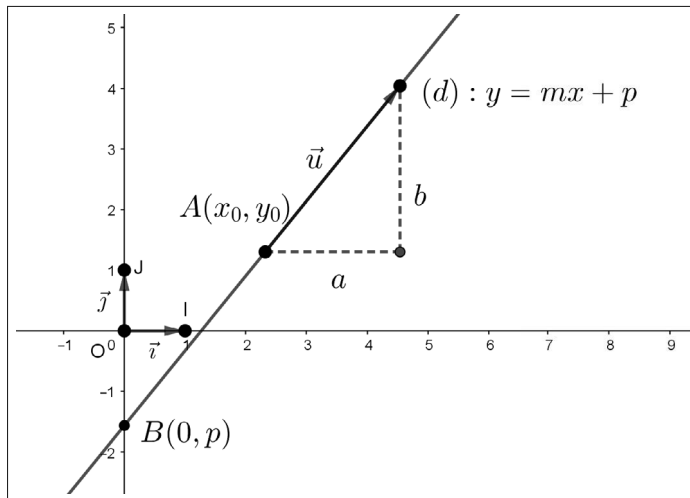
Puisque $a \neq 0$, de l'équation [1], nous déduisons successivement que

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \frac{b}{a}(x - x_0), \\ y &= \frac{b}{a}x + \left(y_0 - \frac{b}{a}x_0\right). \end{aligned}$$

Posons $m = \frac{b}{a}$ et $p = y_0 - \frac{b}{a}x_0$.

Nous en concluons qu'une équation de la droite (d) est de la forme

$$y = mx + p, \text{ avec } m \in \mathbb{R} \text{ et } p \in \mathbb{R}.$$



Définition (coefficient directeur). Soit $\vec{u}(a, b)$, avec $a \neq 0$, un vecteur directeur d'une droite (d) non parallèle à la droite des ordonnées.

Le réel $m = \frac{b}{a}$ est le coefficient directeur de cette droite.

Remarques. Nous en faisons six.

- Le réel p est l'ordonnée à l'origine de (d) non parallèle à (OJ) . C'est l'ordonnée du point de (OJ) de coordonnées $(0, p)$.

- Si le repère est orthonormal, le coefficient directeur de (d) est également appelé pente de cette droite.

- On retiendra qu'une droite parallèle à (OI) a une équation de la forme $y = p$, avec $p \in \mathbb{R}$.

- La droite des abscisses (OI) a pour équation $y = 0$.

- La droite des ordonnées (OJ) a pour équation $x = 0$.

- Une droite passant par l'origine O du repère, distincte de (OJ) , a une équation de la forme $y = mx$.

Proposition. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts tels que $x_A \neq x_B$.

La droite (AB) non parallèle à (OJ) a pour coefficient directeur

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}.$$

Démonstration. Le vecteur $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$ est directeur de la droite (AB) .

Puisque $x_A \neq x_B$, ce vecteur n'est pas colinéaire \vec{j} , donc (AB) n'est pas parallèle à la droite (OJ) des ordonnées.

De la définition précédente, il résulte que le coefficient directeur de (AB) est

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}.$$

Remarques. Nous retiendrons que pour déterminer une équation d'une droite (d) non parallèle à la droite des ordonnées, nous disposons de trois méthodes décrites ci-après :

- (d) est déterminée par la donnée d'un repère (A, \vec{u}) . Nous utilisons l'équivalence :

$$M \in (d) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0.$$

- $(d) = (AB)$. Nous avons

$$M \in (d) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0.$$

- $(d) = (AB)$ a une équation de la forme $y = mx + p$, avec

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ et } p \text{ tel que } y_A = mx_A + p.$$

9.1.3 Réciproques : reconnaître une équation de droite

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan.

Proposition. Soit $k \in \mathbb{R}$. L'ensemble (E) des points $M(x, y)$ tel que $x = k$ est une droite parallèle à la droite des ordonnées.

Démonstration. Le point $A(k, 0)$ appartient à (E) .

Soit $M(k, y)$ un point appartenant à (E) . Nous avons

$$\overrightarrow{AM}(0, y), \text{ soit } \overrightarrow{AM} = y \cdot \vec{j}.$$

De la caractérisation vectorielle d'une droite, il résulte que M appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{j} .

Ceci prouve que (d) est une droite parallèle à la droite (OJ) des ordonnées.

Proposition. Soient m et p deux réels donnés.

L'ensemble (F) des points $M(x, y)$ tel que $y = mx + p$ est la droite passant par le point $A(0, p)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, m)$.

Démonstration. Soit $M(x, y)$ un point appartenant à (F) .

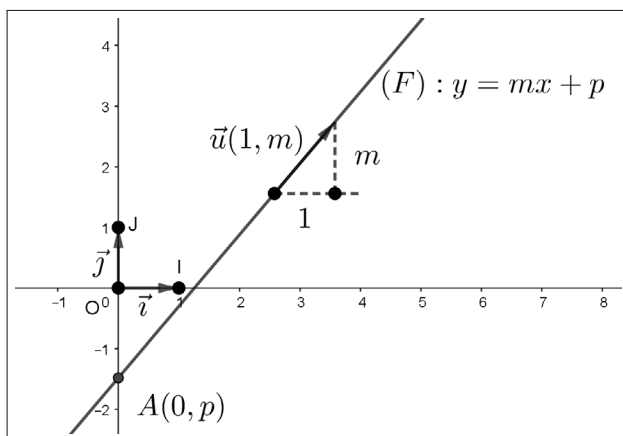
Nous avons $M(x, mx + p)$, donc $\overrightarrow{AM}(x, mx)$.

Nous en déduisons

$$\overrightarrow{AM} = x \cdot \vec{i} + mx \cdot \vec{j} = x \cdot (\vec{i} + m \cdot \vec{j}) = x \cdot \vec{u}.$$

Il en résulte que M appartient à la droite passant par $A(0, p)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, m)$.

Par conséquent, (F) est la droite de repère $(A; \vec{u})$.



Remarques. Nous en faisons quatre.

- Si $m = 0$, l'ensemble des points $M(x, y)$ tel que $y = p$ est une droite parallèle à la droite (OI) des abscisses.
- L'ensemble des points $M(x, y)$ tel que $x = 0$ est la droite (OJ) des ordonnées.
- L'ensemble des points $M(x, y)$ tel que $y = 0$ est la droite (OI) des abscisses.
- L'ensemble des points $M(x, y)$ tel que $y = mx$ est la droite passant par l'origine O du repère et de vecteur directeur $\vec{u}(1, m)$.

9.1.4 Équation générale d'une droite

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan.

Proposition. *Toute droite du plan a une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.*

Démonstration. Soit (d) une droite du plan. Par disjonction, nous distinguons deux cas.

1^{er} cas : (d) est parallèle à la droite (OJ) des ordonnées.

Nous savons que dans ce cas la droite (d) a une équation de la forme $x = k$, c'est-à-dire de la forme $1x + 0y - k = 0$.

En posant $a = 1$, $b = 0$ et $c = -k$, nous en concluons qu'une équation de (d) est de la forme

$$ax + by + c = 0, \text{ avec } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0.$$

2^e cas : (d) n'est pas parallèle à la droite (OJ) des ordonnées.

Dans ce cas nous savons que (d) a une équation de la forme $y = mx + p$, soit

$$mx - y + p = 0.$$

En posant $a = m$, $b = -1$ et $c = p$, nous en concluons qu'une équation de (d) est de la forme

$$ax + by + c = 0, \text{ avec } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0.$$

Proposition (réciproque). *L'ensemble (D) des points $M(x, y)$ satisfaisant à $ax + by + c = 0$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(b, -a)$.*

Démonstration. Soit $M(x, y)$ un point de l'ensemble (D) .

Par disjonction nous distinguons à nouveau deux cas.

1^{er} cas : $b = 0$ et $a \neq 0$.

Dans ce cas nous avons $ax + c = 0$, soit

$$x = -\frac{c}{a}.$$

En posant $k = -\frac{c}{a}$, nous obtenons $x = k$, ce qui justifie que (D) est une droite parallèle à OJ .

2^e cas : $b \neq 0$ et $a \neq 0$ ou $a = 0$.

Dans ce cas nous pouvons exprimer y en fonction de x , ce qui donne

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

En posant $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$, nous obtenons que $y = mx + p$.

Nous en déduisons que (D) est une droite non parallèle à (OJ) de vecteur directeur $\vec{v}(1, -\frac{a}{b})$.

En posant $\vec{u} = b \cdot \vec{v}$, nous en concluons que $\vec{u}(b, -a)$ est également un vecteur directeur de la droite (D) .

Remarques. Nous en donnons deux.

- Si $a = 0$ et $b = 0$, (D) est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $0x + 0y = c$.

Nous en déduisons par disjonction deux cas.

1^{er} cas : $c = 0$.

Dans ce cas (D) est l'ensemble des points du plan.

2^e cas : $c \neq 0$.

Dans ce cas $(D) = \emptyset$.

- Un vecteur directeur de (D) est aussi $-\vec{u}(-b, a)$ et plus généralement tout vecteur colinéaire à $\vec{u}(b, -a)$.

Exemple. Une famille de droites passant par un point fixe.

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan.

Soit m un réel donné.

À chaque valeur de m nous associons une droite (d_m) dont une équation est

$$(2m - 1)x - 5my + 4m + 3 = 0.$$

▷ Nous déterminons pour quelle valeur du paramètre m la droite (d_m) est parallèle à la droite (OJ) des ordonnées.

Cette droite est parallèle à la droite (OJ) si et seulement si $-5m = 0$, soit $m = 0$.

Par conséquent la droite (d_0) d'équation $x = 3$ est parallèle à (OJ) .

▷ Nous déterminons maintenant pour quelle valeur du paramètre m la droite (d_m) est parallèle à la droite (OI) des abscisses.

Cette droite est parallèle à la droite (OI) si et seulement si $2m - 1 = 0$, soit $m = \frac{1}{2}$.

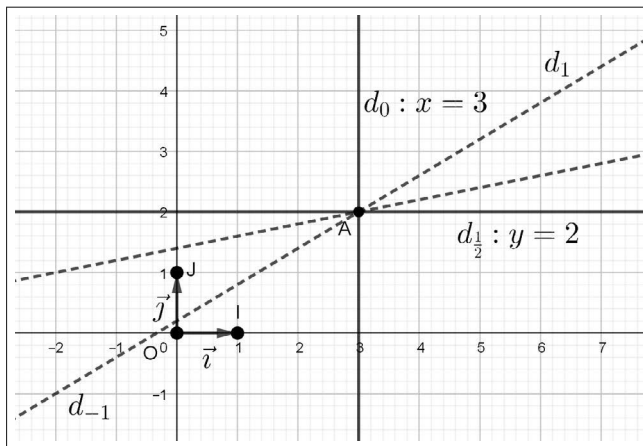
Par conséquent la droite $(d_{\frac{1}{2}})$ d'équation $y = 2$ est parallèle à (OI) .

▷ Nous montrons que toutes les droites (d_m) passent par le point $A(3, 2)$ d'intersection des droites (d_0) et $(d_{\frac{1}{2}})$.

En effet, pour tout réel m , nous avons

$$(2m - 1) \times 3 - 5m \times 2 + 4m + 3 = 6m - 3 - 10m + 4m + 3 = 0,$$

ce qui prouve que les droites (d_m) passent toutes par le point $A(3, 2)$.



9.2 Parallélisme de deux droites

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan.

9.2.1 Parallélisme de deux droites non parallèles à la droite des ordonnées

Proposition. Soient (d) et (d') deux droites non parallèles à la droite (OJ) des ordonnées d'équations respectives

$$(d) : y = mx + p, (d') : y = m'x + p'.$$

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $(d) // (d')$.

(ii) $m = m'$.

Démonstration. Les vecteurs $\vec{u}(1, m)$ et $\vec{u}'(1, m')$ sont respectivement directeurs des droites (d) et (d') .

Procédons par équivalences, nous obtenons successivement

$$(d) // (d') \Leftrightarrow \vec{u}(1, m) \text{ et } \vec{u}'(1, m') \text{ colinéaires,}$$

$$(d) // (d') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & m' \end{vmatrix} = 0,$$

$$(d) // (d') \Leftrightarrow m' - m = 0,$$

$$(d) // (d') \Leftrightarrow m = m'.$$

Remarque. Avec les notations de la proposition ci-dessus, nous retiendrons que les droites (d) et (d') sont sécantes si et seulement si $m \neq m'$.

Exemple. Droites parallèles à une droite donnée.

▷ Nous déterminons une équation de la droite (d') passant par l'origine O du repère et parallèle à la droite (d) dont une équation est $y = -2x + 1$.

La droite (d') , passant par O a une équation de la forme $y = mx$.

Puisque (d') est parallèle à (d) , nous avons $m = -2$.

Nous en concluons qu'une équation de (d') est $y = -2x$.

▷ Nous déterminons plus généralement une équation de la droite (d_A) passant par le point $A(x_A, y_A)$ et parallèle à (d) .

Cette droite a une équation de la forme $y = -2x + p$.

Puisque $A \in (d_A)$, nous avons $p = y_A + 2x_A$, ce qui établit qu'une équation de la droite (d_A) est

$$y = -2x + 2x_A + y_A, \text{ soit } y = -2(x - x_A) + y_A.$$

9.2.2 Parallélisme de deux droites quelconques

Proposition. Soient (d) et (d') deux droites quelconques d'équations respectives

$$(d) : ax + by + c = 0, \text{ avec } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0.$$

$$(d') : a'x + b'y + c' = 0, \text{ avec } a' \neq 0 \text{ ou } b' \neq 0.$$

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $(d) // (d')$.

(ii) $ab' - a'b = 0$.

Démonstration. Les vecteurs $\vec{u}(b, -a)$ et $\vec{u}'(b', -a')$ sont respectivement non nuls et directeurs des droites (d) et (d') .

Procédons par équivalences, nous obtenons successivement :

$$(d) // (d') \Leftrightarrow \vec{u}(b, -a) \text{ et } \vec{u}'(b', -a') \text{ colinéaires,}$$

$$(d) // (d') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} b & b' \\ -a & -a' \end{vmatrix} = 0,$$

$$(d) // (d') \Leftrightarrow -a'b - (-ab') = 0,$$

$$(d) // (d') \Leftrightarrow ab' - a'b = 0.$$

Remarques. Nous en proposons deux.

- En remarquant que $ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, nous obtenons

$$(d) // (d') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0.$$

- Par suite, les droites (d) et (d') sont sécantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Exemple. Nous considérons les droites (d) et (d') d'équations respectives

$$(d) : y = x\sqrt{3} + 1,$$

$$(d') : x\sqrt{6} - y\sqrt{2} - 10 = 0.$$

Une équation non réduite de la droite (d) est $x\sqrt{3} - y + 1 = 0$.

Nous en déduisons

$$\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{6} & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -\sqrt{3} \times \sqrt{2} - (-\sqrt{6}) = 0,$$

ce qui prouve que ces deux droites sont parallèles.

De plus une équation réduite de (d') est

$$y = x\sqrt{3} - 5\sqrt{2}.$$

Ces deux droites sont donc strictement parallèles.

9.3 Droites orthogonales

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère **orthonormal** du plan.

9.3.1 Orthogonalité de deux droites non parallèles à la droite des ordonnées

Proposition. Soient (d) et (d') deux droites, non parallèles à la droite (OJ) des ordonnées, d'équations réduites respectives

$$(d) : y = mx + p.$$

$$(d') : y = m'x + p'.$$

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $(d) \perp (d')$.

(ii) $mm' = -1$.

Démonstration. Les vecteurs $\vec{u}(1, m)$ et $\vec{u}'(1, m')$ sont respectivement directeurs des droites (d) et (d') .

Nous obtenons successivement :

$$(d) \perp (d') \Leftrightarrow \vec{u}(1, m) \text{ et } \vec{u}'(1, m') \text{ orthogonaux,}$$

$$(d) \perp (d') \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0,$$

$$(d) \perp (d') \Leftrightarrow 1 + m'm = 0,$$

$$(d) \perp (d') \Leftrightarrow mm' = -1.$$

Exemple. Nous déterminons une équation de la droite (δ) passant par $A(-1, 2)$ et orthogonale à la droite (d) dont une équation est : $y = -2x + \frac{5}{2}$.

La droite (δ) a une équation de la forme $y = mx + p$.

Puisque $(\delta) \perp (d)$, nous avons

$$(-2) \times m = -1, \text{ soit, } m = \frac{1}{2}.$$

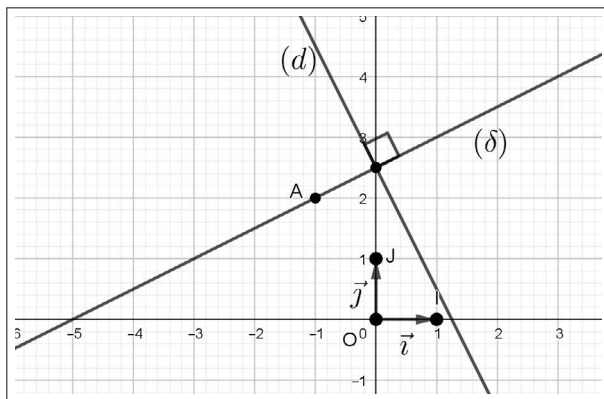
Il en résulte que $y = \frac{1}{2}x + p$.

De plus $A(-1, 2)$ appartient à (δ) donc $y_A = \frac{1}{2}x_A + p$, ce qui donne

$$p = y_A - \frac{1}{2}x_A = 2 - \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{5}{2}.$$

Nous en concluons que (δ) a pour équation

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$



9.3.2 Orthogonalité de deux droites quelconques

Proposition. Soient (d) et (d') deux droites quelconques d'équations respectives

$$(d) : ax + by + c = 0, \text{ avec } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0.$$

$$(d') : a'x + b'y + c' = 0, \text{ avec } a' \neq 0 \text{ ou } b' \neq 0.$$

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $(d) \perp (d')$.

(ii) $aa' + bb' = 0$.

Démonstration. Les vecteurs $\vec{u}(b, -a)$ et $\vec{u}'(b', -a')$ sont respectivement non nuls et directeurs des droites (d) et (d') .

Nous obtenons successivement

$$(d) \perp (d') \Leftrightarrow \vec{u}(b, -a) \text{ et } \vec{u}'(b', -a') \text{ orthogonaux,}$$

$$(d) \perp (d') \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0,$$

$$(d) \perp (d') \Leftrightarrow bb' + (-a)(-a') = 0,$$

$$(d) \perp (d') \Leftrightarrow aa' + bb' = 0.$$

9.4 Systèmes linéaires

9.4.1 L'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Définition. L'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, noté aussi \mathbb{R}^2 , est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Définition (égalité dans \mathbb{R}^2). Soient (a, b) et (a', b') deux éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Nous disposons de la définition suivante :

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'.$$

Remarques. De cette définition nous déduisons

- $(a, b) \neq (a', b') \Leftrightarrow a \neq a' \text{ ou } b \neq b'$.
- $(a, b) = (0, 0) \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$.
- $(a, b) \neq (0, 0) \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0$.

9.4.2 Système linéaires de deux équations à deux inconnues

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système noté (E)

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}.$$

Géométriquement nous considérons deux droites (d) et (d') dont les équations sont respectivement

$$\begin{aligned} (d) : ax + by = c, \text{ avec } (a, b) &\neq (0, 0). \\ (d') : a'x + b'y = c', \text{ avec } (a', b') &\neq (0, 0). \end{aligned}$$

Résoudre le système (E) équivaut à étudier $(d) \cap (d')$.

Si $(d) \cap (d') \neq \emptyset$, alors un couple (x, y) solution de (E) correspond à un point $M(x, y)$ appartenant à $(d) \cap (d')$.

Si $(d) \cap (d') = \emptyset$, alors les droites (d) et (d') sont strictement parallèles, ce qui induit pour le système (E) un ensemble vide de solutions.

Si $(d) = (d')$, alors le système (E) admet une infinité de solutions.

9.4.3 Résolution du système (E)

Proposition (existence d'une solution unique). *Le système*

$$(E) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}, \text{ avec } (a, b) \neq (0, 0) \text{ et } (a', b') \neq (0, 0),$$

admet un unique couple solution si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

Démonstration. Soient $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$.

Les droites $(d) : ax + by = c$ et $(d') : a'x + b'y = c'$ sont sécantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0,$$

ce qui justifie l'existence et l'unicité d'un unique couple (x, y) solution de (E). C'est l'unique point $M(x, y)$ commun à (d) et (d') .

Définition. Le déterminant $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est le déterminant du système (E).

Exemple. Nous résolvons dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, par différentes méthodes, le système

$$(E) \begin{cases} x + 3y = 9 \\ 2x - y = 1 \end{cases}.$$

Nous avons

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

Il en résulte que le système (E) admet un unique couple solution.

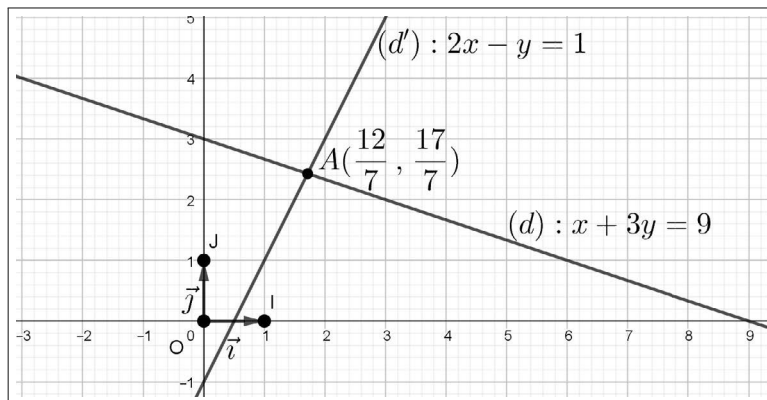
▷ **Méthode 1** : par substitution.

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3(2x - 1) = 9 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 12 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{7} \\ y = \frac{17}{7} \end{cases}.$$

Nous en concluons que

$$S_{(E)} = \left\{ \left(\frac{12}{7}, \frac{17}{7} \right) \right\}.$$

Nous contrôlons graphiquement.



▷ **Méthode 2** : par combinaisons linéaires.

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l|l|l} x + 3y = 9 & \times 1 & \times 2 \\ 2x - y = 1 & \times 3 & \times (-1) \end{array} \right.$$

Après multiplication des deux membres de chacune des deux équations par les coefficients ci-dessus, puis en additionnant membres à membres, nous obtenons

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7x = 12 \\ 7y = 17 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{12}{7} \\ y = \frac{17}{7} \end{array} \right.$$

Nous en concluons que $S_{(E)} = \left\{ \left(\frac{12}{7}, \frac{17}{7} \right) \right\}$.

▷ **Méthode 3** : pivot de Gauss¹

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x + 3y = 9 & L_1 \\ 2x - y = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{array} \right. ,$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 9 \\ -7y = -17 \end{array} \right. ,$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 9 - 3 \times \frac{17}{7} \\ y = \frac{17}{7} \end{array} \right. ,$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{12}{7} \\ y = \frac{17}{7} \end{array} \right.$$

Nous en concluons que $S_{(E)} = \left\{ \left(\frac{12}{7}, \frac{17}{7} \right) \right\}$.

1. Mathématicien et physicien allemand : 1777-1855

Proposition (déterminant nul). Si $D = 0$, alors le système

$$(E) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}, \text{ avec } (a, b) \neq (0, 0) \text{ et } (a', b') \neq (0, 0),$$

n'a pas de solution ou admet une infinité de solutions.

Démonstration. Si $D = 0$, alors les droites (d) et (d') dont les équations sont respectivement $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$, sont parallèles.

Deux cas sont à envisager.

1^{er} cas : $(d) \cap (d') = \emptyset$.

Dans ce cas (E) n'a pas de solution et ainsi $S_{(E)} = \emptyset$.

2^e cas : $(d) = (d')$.

Le système (E) admet une infinité de solutions puisque, dans ce cas, les deux équations de (E) sont équivalentes puisqu'elles représentent la même droite.

Ainsi nous obtenons que $S_{(E)} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / ax + by = c\}$.

Exemple. Un système avec un paramètre.

Soit m un réel donné. Selon les valeurs de m , nous résolvons le système

$$(E) \begin{cases} x - 2y = m \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x - y\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Nous avons

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -\sqrt{2} - (-2) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Ce système admet donc une infinité de solution ou aucune solution. Pour le déterminer, nous multiplions la seconde équation par $\frac{2}{\sqrt{2}}$. Nous obtenons

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = m \\ x - 2y = 1 \end{cases}.$$

1^{er} cas : $m \neq 1$.

Dans ce cas, nous en concluons que $S_{(E)} = \emptyset$.

2^e cas : $m = 1$.

Dans ce cas, nous avons :

$$(E) \Leftrightarrow x - 2y = 1.$$

Nous obtenons

$$S_{(E)} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x - 2y = 1\}.$$

En fixant par exemple le réel y , nous résolvons cette équation à deux inconnues. Nous en concluons

$$S_{(E)} = \{(2y + 1, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y \in \mathbb{R}\}.$$

9.4.4 Formules de résolution dans le cas $D \neq 0$

Proposition (formules de Cramer²). *Si $D \neq 0$, alors le système*

$$(E) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}, \text{ avec } (a, b) \neq (0, 0) \text{ et } (a', b') \neq (0, 0),$$

admet un unique couple solution (x, y) tel que

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ et } y = \frac{D_y}{D}, \text{ avec } D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \text{ et } D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

Démonstration. Nous procédons par combinaisons linéaires.

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c & \left| \begin{array}{l} \times b' \\ \times (-a') \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \times (-a') \\ \times a \end{array} \right. \\ a'x + b'y = c' & \left| \begin{array}{l} \times (-b) \\ \times a \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \times (-a') \\ \times a \end{array} \right. \end{cases},$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} (ab' - a'b)x = cb' - c'b \\ (ab' - a'b)y = ac' - a'c \end{cases}.$$

Puisque $D = ab' - a'b \neq 0$, nous obtenons

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \\ y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \end{cases}.$$

Avec les données de l'énoncé, nous en concluons

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases}.$$

Exemple. Nous résolvons dans \mathbb{R}^2 le système

$$(E) \begin{cases} x + \sqrt{3}y = 3 \\ 2x + \sqrt{2}y = 1 \end{cases}.$$

2. Mathématicien suisse : 1704-1752

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} - 2\sqrt{3}.$$

Puisque $D \neq 0$, ce système admet pour solution un unique couple (x, y) tel que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}}{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}},$$

ce qui donne

$$x = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} \text{ et } y = \frac{-5}{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}.$$

Nous en concluons

$$S_{(E)} = \left\{ \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}, \frac{-5}{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} \right) \right\},$$

ce qui donne par conjugaison

$$\left\{ \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} \right) \right\}.$$

Algorithme. Pour résoudre par la méthode de Cramer le système

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

nous proposons une fonction Python

def cramer($a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$)

```
def cramer(a, b, c, d, e, f):
    if a*e-b*d==0:
        return ["vide_ou_infinite_de_solutions"]
    else :
        x=(c*e-b*f)/(a*e-b*d)
        y=(a*f-c*d)/(a*e-b*d)
    return [x, y]
```

Remarque. Selon les coefficients choisis, la solution peut être exacte ou approchée.

9.4.5 Systèmes homogènes

Proposition. Si $D \neq 0$, alors le système

$$(H) \begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{cases}, \text{ avec } (a, b) \neq (0, 0) \text{ et } (a', b') \neq (0, 0),$$

admet pour unique solution le couple $(0, 0)$.

Démonstration. Le couple $(0, 0)$ est une solution évidente du système (H) .

Puisque $D \neq 0$, le couple $(0, 0)$ est l'unique solution de ce système.

Remarque. Géométriquement, les droites $(d) : ax + by = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(d') : a'x + b'y = 0$, avec $(a', b') \neq (0, 0)$ sont distinctes et sécantes en $O(0, 0)$.

Exemple. Un système homogène avec un paramètre.

Selon les valeurs du paramètre m qui est un réel donné, nous résolvons le système

$$(E) \begin{cases} mx + y = 0 \\ x + my = 0 \end{cases}.$$

Nous avons

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1.$$

Nous procédons par disjonction selon trois cas.

1^{er} cas : $D \neq 0$, soit $m \neq -1$ et $m \neq 1$.

Dans ce cas, puisque ce système est homogène et $D \neq 0$, nous obtenons

$$S = \{(0, 0)\}.$$

2^e cas : $m = -1$.

Dans ce second cas, nous avons

$$(E) \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Nous en concluons

$$S = \{(x, x)/x \in \mathbb{R}\}.$$

Géométriquement, lorsque $m = -1$, nous observons que l'ensemble des solutions est la droite d'équation $y = x$, c'est-à-dire la première bissectrice du repère choisi.

3^e cas : $m = 1$.

Dans ce troisième cas nous obtenons

$$(E) \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x.$$

Nous en concluons

$$S = \{(x, -x)/x \in \mathbb{R}\}.$$

Géométriquement, lorsque $m = 1$, nous observons que l'ensemble des solutions est la droite d'équation $y = -x$, c'est-à-dire la seconde bissectrice du repère choisi.

9.5 Représentations paramétriques d'une droite

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan.

Proposition. Soit (d) une droite de repère $(A; \vec{u})$ avec $A(x_A, y_A)$, $\vec{u}(a, b)$ et $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Pour tout point $M(x, y)$ les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $M \in (d)$.

$$(ii) \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \end{cases}.$$

Démonstration. Nous procédons directement par équivalences. Il vient

$$\begin{aligned} (i) &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}, \\ (i) &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{u}, \\ (i) &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \end{cases}. \end{aligned}$$

Définition. Le système $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (d) .

Remarques. Nous en faisons trois.

- Une droite admet une infinité de représentations paramétriques car elle a une infinité de repères du type $(A; \vec{u})$.

- Si $t \in [0, 1]$, nous obtenons une représentation paramétrique d'un segment.

- Si $t \in [0, +\infty[$, on obtient une représentation paramétrique d'une demi-droite.

Exemple. ▷ Nous déterminons une représentation paramétrique de la droite (AB) , avec $A(1, -1)$ et $B(0, 1)$.

La droite (AB) a pour repère le couple $(A; \overrightarrow{AB}(-1, 2))$.

Une représentation paramétrique de cette droite est

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

▷ Les points $C(2, -3)$ et $D(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ appartiennent-ils à la droite (AB) ?

★ Pour répondre à cette question pour le point C , nous résolvons le système

$$\begin{cases} 2 = 1 - t \\ -3 = -1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow t = -1,$$

ce qui prouve que le point $C \in (AB)$. Il est placé sur cette droite par la valeur -1 du paramètre.

★ De même, pour le point D , le système

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = 1 - t \\ \frac{1}{3} = -1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Ce système n'a pas de solution donc $D \notin (AB)$.

9.6 Régionnement du plan

Le principe

Soit (d) une droite dont une équation est $ax + by + c = 0$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Tout point $M(x, y)$ qui n'appartient pas à la droite (d) est tel que

$$ax + by + c < 0 \text{ ou } ax + by + c > 0.$$

Comment résoudre une inéquation de ce type ?

Désignons par (P_1) l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $ax + by + c < 0$ et par (P_2) l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $ax + by + c > 0$.

Ces deux sous-ensembles du plan sont des demi-plans (ouverts) de frontière la droite (d) . Ils définissent un régionnement du plan.

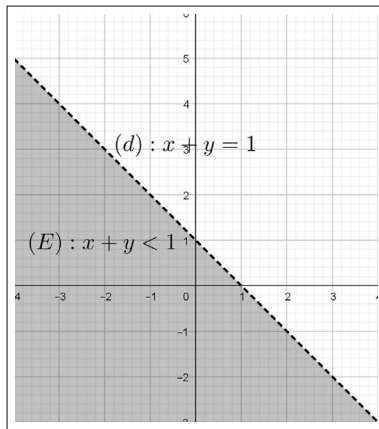
En pratique :

- si $c \neq 0$, pour chacun de ces deux demi-plans, il suffit de tester l'appartenance de l'origine O du repère à l'un des deux.
- si $c = 0$, nous testons l'appartenance d'un autre point à l'un des deux demi-plans.

Exemple. \triangleright Nous représentons l'ensemble (E) des points $M(x, y)$ tel que : $x + y < 1$.

Considérons la droite $(d) : x + y = 1$.

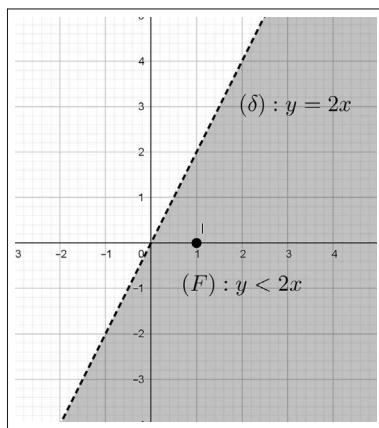
Puisque $O(0, 0) \in (E)$, l'ensemble (E) est le demi-plan de frontière (d) contenant l'origine O du repère.



\triangleright Nous représentons l'ensemble (F) des points $M(x, y)$ tel que : $y < 2x$.

Considérons la droite $(\delta) : y = 2x$.

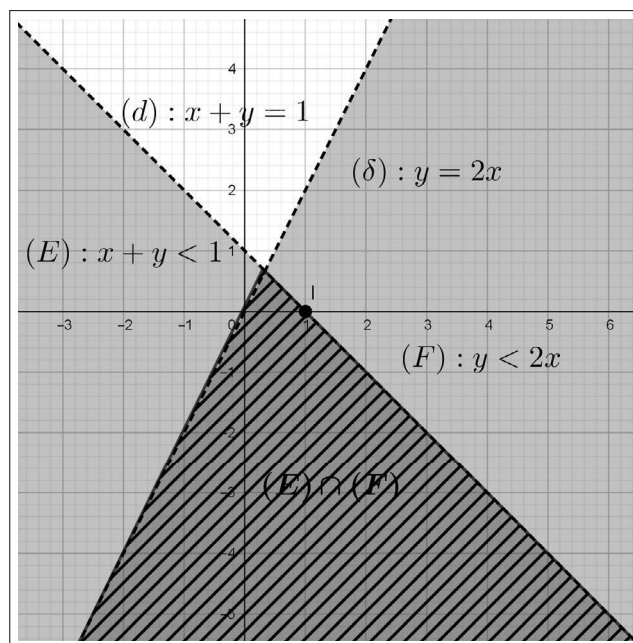
Puisque $I(1, 0) \in (F)$, l'ensemble (F) est le demi-plan de frontière (δ) contenant le point I .



▷ Nous résolvons à présent le système

$$\begin{cases} x + y < 1 \\ y < 2x \end{cases}$$

L'ensemble de ses solutions est $(E) \cap (F)$ qui est la partie du plan hachurée sur la figure ci-après.



9.7 Exercices corrigés

Sauf mention contraire, le plan est rapporté à un repère $\mathcal{R}_O = (O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal.

Exercice 1. Parallélogramme

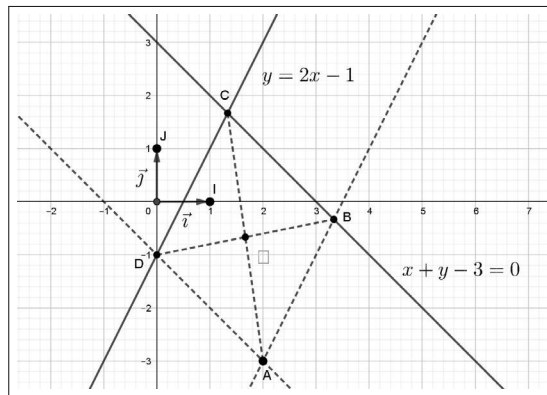
Deux côtés d'un parallélogramme ont pour équations respectives

$$y = 2x - 1 \text{ et } x + y - 3 = 0.$$

L'un des sommets est le point $A(2, -3)$.

1. Déterminer les équations des deux autres côtés.
2. Déterminer les coordonnées du centre Ω de ce parallélogramme.

Solution



1.

▷ Avec les notations de la figure, une équation de la droite (AB) parallèle à (DC) d'équation $y = 2x - 1$ est de la forme

$$y = 2x + p.$$

Sachant que $A \in (AB)$, nous avons

$$p = y_A - 2x_A = -7.$$

Nous en concluons que la droite (AB) a pour équation

$$y = 2x - 7.$$

▷ La droite (BC) a pour équation réduite $y = -x + 3$.

Une équation de la droite (AD) parallèle à (BC) est de la forme

$$y = -x + p.$$

Puisque que $A \in (AD)$, nous avons

$$p = y_A + x_A = -1.$$

Nous en concluons que la droite (AD) a pour équation

$$y = -x - 1.$$

2. Pour déterminer les coordonnées (x, y) du sommet C , nous résolvons le système

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 4 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}.$$

Nous obtenons ainsi $C(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$. Posons $\Omega(x, y)$, nous avons

$$x = \frac{1}{2}(\frac{4}{3} + 2) = \frac{5}{3} \text{ et } y = \frac{1}{2}(\frac{5}{3} - 3) = -\frac{2}{3}.$$

Nous en concluons que $\Omega(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3})$.

Exercice 2. Famille de droites

Soit m un réel donné. A chaque valeur de m on associe une droite (d_m) dont une équation est

$$(2m - 1)x - 5my + 4m + 3 = 0.$$

De plus on donne la droite (d) d'équation $3x + 2y = 6$.

Pour quelle valeur du réel m , la droite (d_m) est-elle

▷ parallèle à (d) ?

▷ orthogonale à (d) ?

Solution

▷ Un vecteur directeur de la droite (d_m) est $\vec{u}_m(5m, 2m - 1)$.

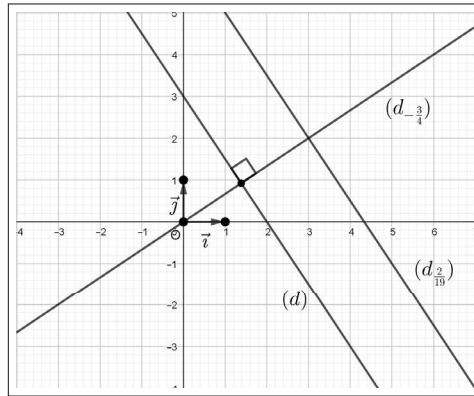
Un vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{u}(2, -3)$.

Les droites (d_m) et (d) sont parallèles si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 5m & 2 \\ 2m - 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -19m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{19}.$$

▷ Les droites (d_m) et (d) sont orthogonales si et seulement si

$$\vec{u}_m \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 10m - 3(2m - 1) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}.$$



Exercice 3. Droites concourantes

Quelle valeur faut-il donner au réel m pour que les droites (d) et (d_m) d'équations respectives $y = 2x + 5$ et $y = mx - 3$ se rencontrent sur la première bissectrice (δ) du repère ?

Solution

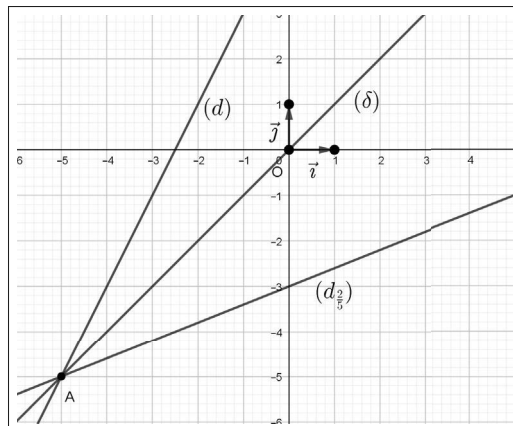
Nous observons tout d'abord que les droites (d) et (δ) sont sécantes. Déterminons les coordonnées du point A d'intersection de ces deux droites, en résolvant le système

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 5 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -5 \end{cases}.$$

Nous en concluons que ces trois droites sont concourantes en $A(-5, -5)$ si et seulement si

$$-5 = -5m - 3 \Leftrightarrow m = \frac{2}{5}.$$

Contrôle graphique.



Exercice 4. Droites orthogonales

Soit m un réel donné. On donne les droites (d) et (d') d'équations respectives

$$\begin{aligned}(d) &: mx + y - 1 = 0. \\ (d') &: (m + 2)x + y + 3 = 0.\end{aligned}$$

Pour quelle valeur du paramètre m , ces deux droites sont-elles orthogonales ? Déterminer, dans ce cas, les coordonnées de leur point d'intersection.

Solution

▷ En appliquant la proposition 9.3.2, nous obtenons

$$(d) \perp (d') \Leftrightarrow m(m + 2) + 1 = 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 = 0.$$

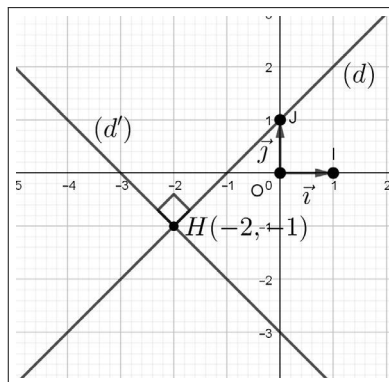
Par suite ces deux droites sont orthogonales si et seulement si $m = -1$.

▷ Pour déterminer les coordonnées (x, y) du point H commun aux droites (d) et (d') , nous sommes amenés à résoudre le système

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Nous en concluons que $H(-2, -1)$.

Contrôle graphique.



Exercice 5. Lieux du centre de gravité et de l'orthocentre d'un triangle

Dans le repère \mathcal{R}_O orthonormal, on donne les points $A(-2, 0)$ et $B(2, 0)$.

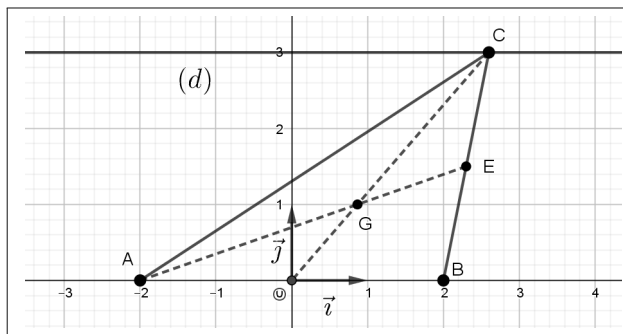
Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère un point $C(t, 3)$ décrivant la droite (d) d'équation $y = 3$.

1. Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC en fonction du réel t .

2. En déduire l'ensemble décrit par G lorsque C décrit la droite (d) .
3. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC en fonction du réel t .
4. Quel est l'ensemble décrit par H lorsque C décrit la droite (d) ?

Solution

1.



Soit $M(x, y)$ un point de la médiane (OC) .

Les vecteurs $\overrightarrow{OM}(x, y)$ et $\overrightarrow{OC}(t, 3)$ sont colinéaires, ce qui équivaut à

$$\begin{vmatrix} x & t \\ y & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous en déduisons qu'une équation de la droite (OC) est

$$3x - ty = 0.$$

Soient $E(\frac{2+t}{2}, \frac{3}{2})$ le milieu du segment $[BC]$ et $M(x, y)$ un point de la médiane (AE) .

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x+2, y)$ et $\overrightarrow{AE}(\frac{6+t}{2}, \frac{3}{2})$ sont colinéaires.

Une équation de la droite (AE) est donc

$$\begin{vmatrix} x+2 & \frac{6+t}{2} \\ y & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne $3(x+2) - y(6+t) = 0$.

Nous en concluons que la droite (AE) a pour équation $3x - (6+t)y = -6$.

Pour déterminer les coordonnées du centre de gravité $G(x, y)$ du triangle ABC , nous résolvons le système

$$\begin{cases} 3x - ty = 0 \\ 3x - (t+6)y = -6 \end{cases}.$$

Nous avons

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -t \\ 3 & -(t+6) \end{vmatrix} = -18.$$

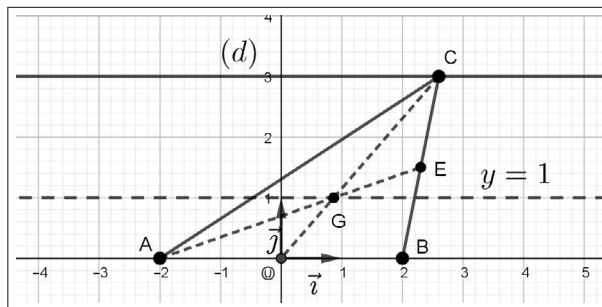
Ce système admet donc un unique couple solution (x, y) que nous pouvons déterminer en fonction de t par les formules de Cramer. Nous obtenons

$$x = -\frac{1}{18} \begin{vmatrix} 0 & -t \\ -6 & -(t+6) \end{vmatrix} = \frac{t}{3} \text{ et } y = -\frac{1}{18} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 1.$$

Nous en concluons que, $G(\frac{t}{3}, 1)$.

2. Posons $m = \frac{t}{3}$. Nous en déduisons que $G(m, 1)$.

Par conséquent quand le réel t décrit \mathbb{R} , il en est de même du réel m et ainsi l'ensemble décrit par $G(m, 1)$ est la droite d'équation $y = 1$.



3. Dans le triangle ABC , la hauteur issue du sommet C est orthogonale à la droite $(AB) = (OI)$. Une équation de cette hauteur est donc $x = t$.

Soit $M(x, y)$ un point de la hauteur issue du sommet B . Les vecteurs $\overrightarrow{BM}(x-2, y)$ et $\overrightarrow{AC}(t+2, 3)$ sont orthogonaux, ce qui équivaut à

$$(t+2)(x-2) + 3y = 0.$$

Nous en déduisons qu'une équation de cette hauteur est

$$(t+2)x + 3y - 2(t+2) = 0.$$

Pour déterminer les coordonnées de l'orthocentre $H(x, y)$ du triangle ABC , nous résolvons le système

$$\begin{cases} x = t \\ (t+2)x + 3y - 2(t+2) = 0 \end{cases}.$$

Nous en déduisons

$$t(t+2) + 3y - 2(t+2) = 0,$$

ce qui permet d'exprimer y en fonction de t par

$$y = \frac{1}{3}(-t^2 + 4).$$

Nous en concluons que

$$H\left(t, \frac{1}{3}(-t^2 + 4)\right).$$

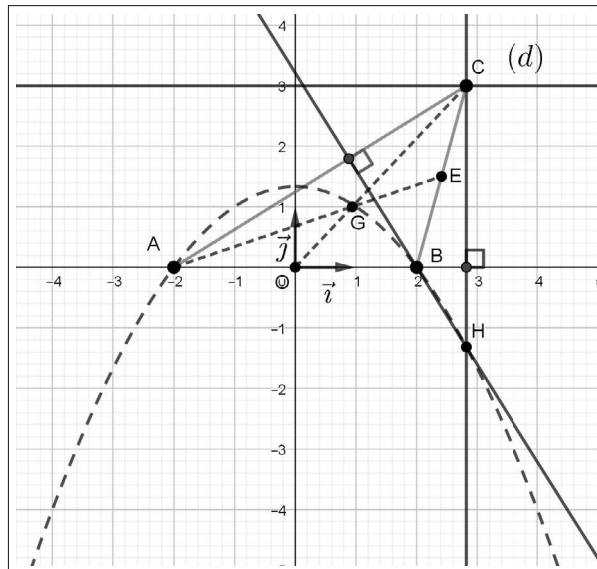
4. En fonction du réel t , les coordonnées (x, y) du point H satisfont à

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{3}(-t^2 + 4) \end{cases}.$$

Il en résulte que, indépendamment du réel t , nous obtenons l'équation

$$y = \frac{1}{3}(-x^2 + 4).$$

Nous avons prouvé que lorsque C décrit la droite (d) , l'ensemble décrit par l'orthocentre H du triangle ABC est la parabole d'équation $y = \frac{1}{3}(-x^2 + 4)$.



Exercice 6. Projection orthogonale et distance d'un point à une droite

On rappelle que repère \mathcal{R}_O est orthonormal.

On considère une droite (d) d'équation : $x - 2y + 2 = 0$.

1. Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan n'appartenant pas à la droite (d) .

On désigne par $M'(x', y')$ l'image du point M par la projection orthogonale sur la droite (d) .

Calculer x' et y' en fonction de x et y .

2. Soit $A(\alpha, \beta)$ un point qui n'appartient pas à la droite (d) .

La distance du point A à cette droite est la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur (d) .

Calculer AH en fonction de α et β .

3. En reprenant les questions 1. et 2. dans le cas général où la droite (d) a pour équation $ax + by + c = 0$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, montrer que

$$AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Solution

1. Le vecteur $\vec{u}(2, 1)$ est directeur de la droite (d) .

$M'(x', y')$ est le projeté orthogonal de $M(x, y)$ sur (d) si et seulement si

$$M' \in (d) \text{ et } \overrightarrow{MM'} \perp \vec{u},$$

ce qui est équivalent au système d'inconnue le couple (x', y')

$$\begin{cases} x' - 2y' = -2 \\ 2(x' - x) + (y' - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - 2y' = -2 \\ 2x' + y' = 2x + y \end{cases}.$$

Nous avons

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

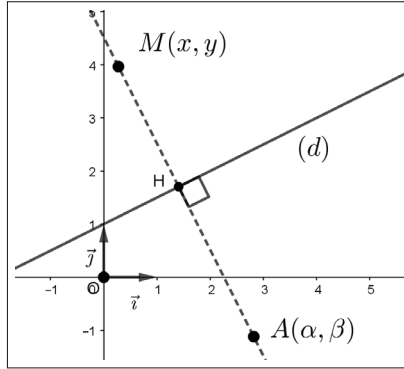
Ce système admet donc un unique couple solution (x', y') tel que

$$x' = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2x + y & 1 \end{vmatrix} \text{ et } y' = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2x + y \end{vmatrix}.$$

Nous en déduisons x' et y' en fonction de x et y , c'est-à-dire la définition analytique de la projection orthogonale sur la droite (d) .

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(4x + 2y - 2) \\ y' = \frac{1}{5}(2x + y + 4) \end{cases}.$$

2.



Pour $A(\alpha, \beta)$, nous obtenons

$$H\left(\frac{1}{5}(4\alpha + 2\beta - 2), \frac{1}{5}(2\alpha + \beta + 4)\right).$$

Il vient

$$\begin{aligned} AH^2 &= \left(\frac{1}{5}(4\alpha + 2\beta - 2) - \alpha\right)^2 + \left(\frac{1}{5}(2\alpha + \beta + 4) - \beta\right)^2, \\ &= \frac{1}{25} [(-\alpha + 2\beta - 2)^2 + (2\alpha - 4\beta + 4)^2], \\ &= \frac{1}{25} [(\alpha - 2\beta + 2)^2 + 4(\alpha - 2\beta + 2)^2], \\ &= \frac{1}{5}(\alpha - 2\beta + 2)^2. \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$AH = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{(\alpha - 2\beta + 2)^2}.$$

En se souvenant de la définition de la fonction valeur absolue, nous en concluons que la distance du point A à la droite (d) est

$$AH = \frac{1}{\sqrt{5}}|\alpha - 2\beta + 2|.$$

3. Le vecteur $\vec{u}(-b, a)$ est directeur de la droite $(d) : ax + by + c = 0$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

$M'(x', y')$ est le projeté orthogonal de $M(x, y)$ sur (d) si et seulement si :

$$M' \in (d) \text{ et } \overrightarrow{MM'} \perp \vec{u},$$

ce qui équivaut au système d'inconnue le couple (x', y')

$$\begin{cases} ax' + by' = -c \\ (-b)(x' - x) + a(y' - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax' + by' = -c \\ -bx' + ay' = -bx + ay \end{cases}.$$

Nous avons

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0.$$

Ce système admet donc un unique couple solution (x', y') tel que

$$x' = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{vmatrix} -c & b \\ -bx + ay & a \end{vmatrix} \text{ et } y' = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{vmatrix} a & -c \\ -b & -bx + ay \end{vmatrix}.$$

Nous en déduisons, dans le cas général, la définition analytique de la projection orthogonale sur la droite (d) .

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{a^2 + b^2}(b^2x - aby - ac) \\ y' = \frac{1}{a^2 + b^2}(-abx + a^2y - bc) \end{cases}$$

Pour $A(\alpha, \beta)$, nous avons

$$H \left(\frac{1}{a^2 + b^2}(b^2\alpha - ab\beta - ac), \frac{1}{a^2 + b^2}(-ab\alpha + a^2\beta - bc) \right).$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} AH^2 &= \frac{1}{a^2 + b^2} [b^2\alpha - ab\beta - ac - \alpha]^2 + \frac{1}{(a^2 + b^2)} [-ab\alpha + a^2\beta - bc - \beta]^2, \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} [b^2\alpha - ab\beta - ac - \alpha(a^2 + b^2)]^2 + \\ &\quad \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} [-ab\alpha + a^2\beta - bc - \beta(a^2 + b^2)]^2, \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} [(-ab\beta - ac - \alpha a^2)^2 + (-ab\alpha - bc - \beta b^2)^2], \\ &= \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} (b\beta + c + \alpha a)^2 + \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^2} (a\alpha + c + \beta b)^2, \\ &= \frac{(a\alpha + b\beta + c)^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Nous en concluons, que la distance du point $A(\alpha, \beta)$ à la droite (d) dont une équation est $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est donnée par la formule générale :

$$AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Remarque. Cette égalité sera à nouveau démontrée en classe de Première, avec moins de calculs, en utilisant une connaissance plus approfondie du produit scalaire.

Exercice 7. Famille de droites passant par un point donné

À tout réel m est associé une droite (d_m) dont une équation dans le repère \mathcal{R}_O est

$$2mx + (m + 1)y + 3m - 1 = 0.$$

1. Montrer que toutes les droites (d_m) passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.

2. Réciproquement, trouver les droites (d_m) passant par un point donné $B(a, b)$.

Solution

1. Nous pouvons utiliser la méthode développée dans l'exemple du paragraphe 1.4 de ce cours. Cependant nous proposons ici une autre méthode pour déterminer un point fixe d'une famille de droites et plus généralement d'une famille de courbes comme par exemple une famille de paraboles ou de cercles. On suppose qu'il existe un point $A(x_A, y_A)$ tel que

$$\forall m \in \mathbb{R}, A \in (d_m).$$

Nous en déduisons que, quel que soit le réel m , nous avons

$$2mx_A + (m + 1)y_A + 3m - 1 = 0.$$

Nous organisons cette égalité affinement en fonction de m .

Nous obtenons

$$\forall m \in \mathbb{R}, (2x_A + y_A + 3)m + y_A - 1 = 0.$$

En particulier, pour $m = -1$, puis pour $m = 0$, nous obtenons le système

$$\begin{cases} -2x_A - 4 = 0 \\ y_A - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -2 \\ y_A = 1 \end{cases}.$$

Par conséquent, nous avons nécessairement $A(-2, 1)$.

Réciproquement, nous vérifions que :

$$\forall m \in \mathbb{R}, A(-2, 1) \in (d_m).$$

2. Une droite (d_m) passe par un point $B(a, b)$ si et seulement si, il existe un réel m tel que : $2ma + (m + 1)b + 3m - 1 = 0$.

Cela équivaut à

$$(2a + b + 3)m + b - 1 = 0 \Leftrightarrow (2a + b + 3)m = 1 - b.$$

1^{er} cas : $2a + b + 3 \neq 0$.

Nous obtenons dans ce cas une unique solution $m = \frac{1 - b}{2a + b + 3}$.

Par conséquent une seule droite (d_m) passe par $B(a, b)$. C'est la droite $\left(d_{\frac{1-b}{2a+b+3}}\right)$.

2^e cas : $2a + b + 3 = 0$.

1^{er} sous-cas : $1 - b = 0$.

Dans ce sous-cas, tout réel m est solution de l'équation $(2a + b + 3)m = 1 - b$.

Par conséquent quel que soit le réel m , les droites (d_m) passent par un point fixe dont les coordonnées (a, b) sont solution du système

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

On retrouve ainsi le point fixe $A(-2, 1)$ de la question précédente.

2^e sous-cas : $1 - b \neq 0$.

Dans ce sous-cas l'équation $(2a + b + 3)m = 1 - b$ n'a pas de solution.

Par conséquent si $2a + b + 3 = 0$ et $b \neq 1$, alors aucune droite de la famille (d_m) ne passe par $B(a, b)$.

Exercice 8. Hyperbole et point fixe

Soient (H) l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et (d) la droite d'équation $x = m$, où m est un réel non nul et distinct de 1.

Nous considérons le point $A(1, 1)$, le point M d'intersection de (H) et de (d) et M_1 la symétrique de A par rapport à la droite (d) .

Montrer que la droite (MM_1) passe par un point fixe lorsque M décrit (H) privée du point A .

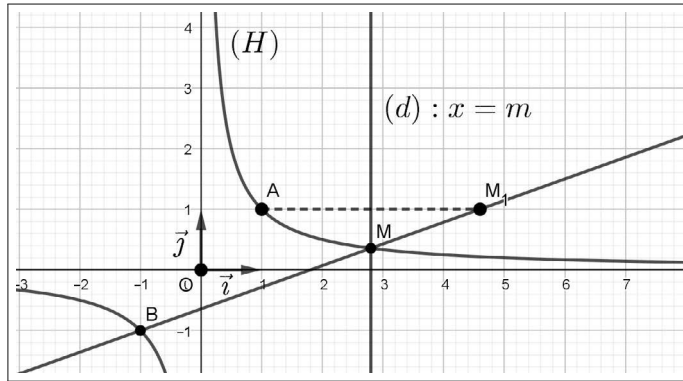
Solution

Dans le repère \mathcal{R}_O orthonormal, nous avons $M(m, \frac{1}{m})$.

Le point $M_1(x_1, y_1)$ symétrique de $A(1, 1)$ par rapport à la droite (d) est tel que

$$\frac{1 + x_1}{2} = m \text{ et } y_1 = 1.$$

Nous en déduisons que $M_1(2m - 1, 1)$.



Déterminons une équation de la droite (MM_1) .

Soit $N(x, y)$ un point de (MM_1) .

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}(x - m, y - \frac{1}{m})$ et $\overrightarrow{MM_1}(m - 1, 1 - \frac{1}{m})$ sont colinéaires.

Nous observons que $\overrightarrow{MM_1} \neq \vec{0}$ car $m \neq 1$.

Une équation de (MM_1) est

$$\begin{vmatrix} x - m & m - 1 \\ y - \frac{1}{m} & 1 - \frac{1}{m} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x - m)(1 - \frac{1}{m}) - (y - \frac{1}{m})(m - 1) = 0.$$

En multipliant les deux membres de l'équation par $m \neq 0$, puis en divisant les deux membres de l'équation obtenue par $m - 1 \neq 0$, nous en concluons qu'une équation de la droite (MM_1) est

$$x - my - (m - 1) = 0.$$

Cette droite passe par un point fixe $B(a, b)$ si et seulement si, quel que soit $m \in \mathbb{R}^* - \{1\}$,

$$a - mb - (m - 1) = 0.$$

En particulier, pour $m = -1$, puis $m = 2$, nous obtenons le système

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ a - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Nous en concluons que la droite (MM_1) passe par le point fixe $B(-1, -1)$ lorsque M décrit l'hyperbole (H) privée du point A .

Exercice 9. Un système avec un paramètre

Soit m un réel donné. Selon les valeurs de m , discuter puis résoudre le système (E) suivant :

$$\begin{cases} mx + 2y = m \\ 2x + my = m \end{cases}.$$

En déduire les positions relatives des droites (d_m) et (d'_m) d'équations respectives

$$mx + 2y - m = 0 \text{ et } 2x + my - m = 0.$$

Solution

Calculons le déterminant de ce système.

$$D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4.$$

1^{er} cas : $D \neq 0$, soit $m \neq -2$ et $m \neq 2$.

Dans ce cas le système est de Cramer. Il admet un unique couple solution (x, y) tel que

$$x = \frac{1}{m^2 - 4} \begin{vmatrix} m & 2 \\ m & m \end{vmatrix} = \frac{m^2 - 2m}{m^2 - 4} = \frac{m}{m + 2}.$$

et

$$y = \frac{1}{m^2 - 4} \begin{vmatrix} m & m \\ 2 & m \end{vmatrix} = \frac{m^2 - 2m}{m^2 - 4} = \frac{m}{m + 2}.$$

Nous en concluons

$$S_{(E)} = \left\{ \left(\frac{m}{m + 2}, \frac{m}{m + 2} \right) / m \in \mathbb{R} - \{-2, 2\} \right\}.$$

2^e cas : $D = 0$, soit $m = -2$ ou $m = 2$.

- Si $m = -2$, nous avons

$$\begin{cases} -2x + 2y = -2 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}.$$

Nous en concluons que si $m = -2$, alors $S_{(E)} = \emptyset$.

- Si $m = 2$, nous avons

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 1.$$

Par conséquent, si $m = 2$, nous obtenons

$$S_{(E)} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x + y = 1\} = \{(x, 1 - x) / x \in \mathbb{R}\}.$$

Nous en déduisons les positions relatives des droites (d_m) et (d'_m) qui sont résumées dans le tableau suivant :

$m \neq -2$ et $m \neq 2$	(d_m) et (d'_m) sont sécantes en $A\left(\frac{m}{m+2}, \frac{m}{m+2}\right)$
$m = -2$	$(d_{-2}) \cap (d'_{-2}) = \emptyset$
$m = 2$	$(d_2) = (d'_2)$

Exercice 10. Un exercice d'arithmétique

Montrer qu'il existe un unique entier naturel N qui soit un multiple de 10 d'une puissance de 10 et le quintuple d'une puissance de 20.

Solution

Nous cherchons s'il existe deux entiers naturels x et y tels que

$$10 \times 10^x = 5 \times 20^y.$$

Une solution évidente est $x = y = 1$.

Montrons que le couple $(1, 1)$ est la seule solution de l'équation proposée.

Si $10 \times 10^x = 5 \times 20^y$, alors nous avons

$$2 \times 5 \times (2 \times 5)^x = 5 \times (2^2 \times 5)^y.$$

Nous en déduisons

$$2^{x+1} \times 5^{x+1} = 2^{2y} \times 5^{y+1}.$$

En divisant les deux membres de cette dernière équation par $2^{2y} \times 5^{y+1} \neq 0$, nous obtenons

$$2^{x-2y+1} \times 5^{x-y} = 1.$$

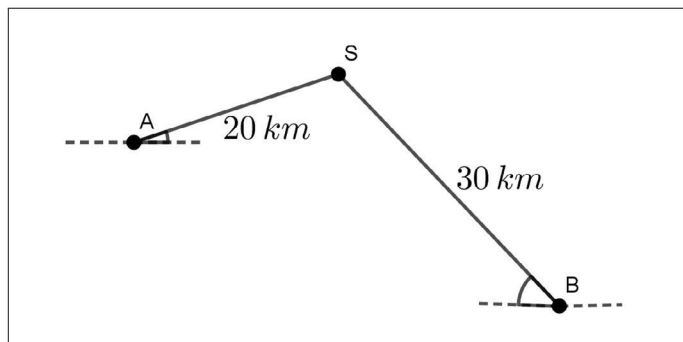
Puisque les exposants $x - 2y + 1$ et $x - y$ sont de entiers, nous résolvons le système

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Par conséquent, pour que (x, y) soit une solution, il faut que $x = y = 1$. Cette condition est suffisante car $x = y = 1$ implique $10 \times 10^1 = 5 \times 20^1$. Ainsi nous obtenons que $10 \times 10^x = 5 \times 20^y$ si et seulement si $x = y = 1$. Nous en concluons que seul l'entier $N = 100$ convient.

Exercice 11. Système non linéaire : vitesse en montée et en descente

Un cycliste effectue le trajet ASB aller et retour, en partant de A, en 5h avec 40mn de plus pour le retour que pour l'aller.



Déterminer sa vitesse en montée et en descente en supposant que chacune des deux est constante.

Solution

Soient v_1 la vitesse du cycliste en montée et v_2 sa vitesse en descente. La durée du trajet aller et retour est de 5h.

Il en résulte

$$\frac{20}{v_1} + \frac{30}{v_2} + \frac{30}{v_1} + \frac{20}{v_2} = 5.$$

Le cycliste met 40mn de plus au retour, ce qui donne

$$\frac{20}{v_1} + \frac{30}{v_2} = \frac{30}{v_1} + \frac{20}{v_2} - \frac{2}{3}.$$

Nous en déduisons le système

$$\begin{cases} \frac{50}{v_1} + \frac{50}{v_2} = 5 \\ \frac{10}{v_1} - \frac{10}{v_2} = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Posons $x = \frac{10}{v_1}$ et $y = \frac{10}{v_2}$, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} 5x + 5y = 5 \\ x - y = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}.$$

Ainsi nous avons

$$\begin{cases} \frac{10}{v_1} = \frac{5}{6} \\ \frac{10}{v_2} = \frac{1}{6} \end{cases}.$$

Nous en concluons que $v_1 = 12 \text{ km.h}^{-1}$ et $v_2 = 60 \text{ km.h}^{-1}$.

Exercice 12. Système de trois équations à trois inconnues

Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}.$$

Solution

Méthode 1. Par substitution

Il s'agit d'exprimer une des inconnues en fonction des deux autres en choisissant une des trois équations. Par substitution dans les deux autres équations, nous sommes ramenés à la résolution d'un système linéaire à deux inconnues.

Dans cet exercice, nous pouvons choisir la première équation et exprimer z en fonction de x et y , ce qui donne $z = 1 - 2x - y$.

Ainsi nous résolvons le système

$$\begin{cases} x + 2y + 1 - 2x - y = 2 \\ x + y + 2(1 - 2x - y) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Nous en déduisons

$$z = 1 - 2\left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

Réciproquement, les réels $x = -\frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{4}$ et $z = \frac{9}{4}$ vérifient les trois équations du système.

Nous en concluons :

$$S = \left\{ \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{9}{4} \right) \right\}.$$

Méthode 2. Par la méthode du pivot de Gauss

Nous numérotons les trois lignes du système proposé.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 & L_1 \\ x + 2y + z = 2 & L_2 \\ x + y + 2z = 4 & L_3 \end{cases}.$$

Nous choisissons par exemple L_1 comme ligne pivot. Ensuite par combinaisons linéaires des lignes restantes, nous réduisons à deux inconnues puis à une inconnue.

Nous obtenons dans une première étape

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 & L_1 \\ -3y - z = -3 & L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ -y - 3z = -7 & L_3 \leftarrow L_1 - 2L_3 \end{cases}.$$

Dans une seconde et dernière étape, il vient

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 & L_1 \\ -3y - z = -3 & L_2 \\ 8z = 18 & L_3 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{cases}.$$

Cela donne

$$z = \frac{9}{4}, y = \frac{1}{4} \text{ et } x = -\frac{3}{4}.$$

Comme ci-dessus, nous vérifions réciproquement que le triplet $(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{9}{4})$ est solution du système proposé.

Exercice 13. Système de trois équations à trois inconnues

Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système

$$\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = -1 \\ -3x - y + z = 1 \end{cases}.$$

Solution

Nous procédons par substitution avec $z = 3x + y + 1$, déduit de la troisième équation. Nous obtenons :

$$\begin{cases} x - y - 2(3x + y + 1) = 1 \\ 2x + 2y + 3x + y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3y = -3 \\ 5x + 3y = -2 \end{cases}.$$

Ainsi ce système n'a pas de solution, soit $S = \emptyset$.

Exercice 14. Système de deux équations à trois inconnues

1. Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ y + 3z = 17 \end{cases}.$$

2. Déterminer les solutions entières de ce système, c'est-à-dire les triplets de nombres entiers relatifs qui sont solutions de ce dernier.

Solution

1. Pour résoudre ce système de deux équations à trois inconnues, nous fixons une des inconnues, par exemple $z \in \mathbb{R}$. Nous obtenons

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ y = 17 - 3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3(17 - 3z) = 2 \\ y = 17 - 3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{53 - 9z}{2} \\ y = 17 - 3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Nous en déduisons que lorsque z décrit \mathbb{R} , ce système admet une infinité de triplets solutions, ce qui permet de conclure par

$$S = \left\{ \left(\frac{53 - 9z}{2}, 17 - 3z, z \right) / z \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Pour déterminer les solutions entières de ce système, nous supposons que $z \in \mathbb{Z}$.

Il en résulte immédiatement que dans ce cas $y = 17 - 3z \in \mathbb{Z}$.

En ce qui concerne la solution x , nous observons

$$x = \frac{53 - 9z}{2} = \frac{52 + 1 - 10z + z}{2} = 26 - 5z + \frac{z + 1}{2}.$$

Par conséquent, nous avons

$$x \in \mathbb{Z} \text{ si et seulement si } \frac{z + 1}{2} = k \in \mathbb{Z},$$

ce qui donne

$$z = 2k - 1, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Nous en déduisons :

$$y = 17 - 3(2k - 1) = 20 - 6k \text{ et } x = 26 - 5(2k - 1) + k = 31 - 9k.$$

Réciproquement, nous vérifions que les valeurs entières de x , y et z , trouvées ci-dessus, sont solutions du système proposé.

Nous en concluons

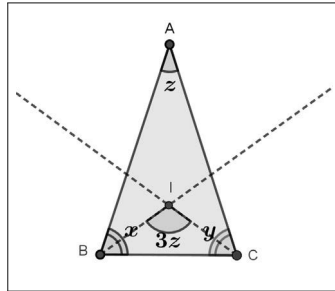
$$S \cap \mathbb{Z} = \{(31 - 9k, 20 - 6k, k)/k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice 15. D'après le concours Kangourou

Dans un triangle ABC isocèle en A , les bissectrices des angles de la base se coupent en un point I .

Sachant que l'angle \widehat{BIC} vaut le triple de l'angle \widehat{BAC} , calculer les mesures des angles du triangle ABC .

Solution



Avec les notations de la figure, sachant que la somme des trois angles d'un triangle est égale à 180° , nous obtenons le système (E) de trois équations à trois inconnues suivant

$$\begin{cases} x + y + z = 180 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 3z = 180 \\ x = y \end{cases},$$

ce qui équivaut à

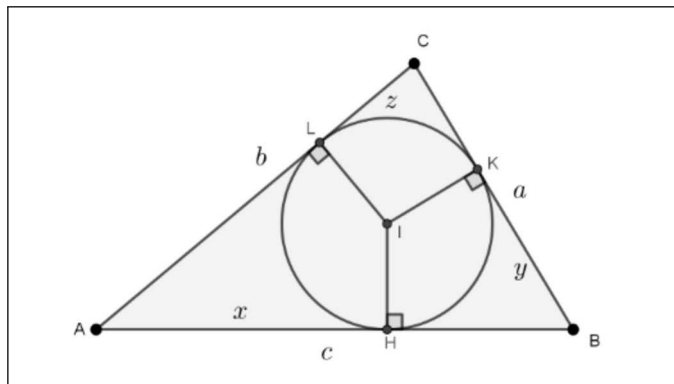
$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 180 \\ x + y + 6z = 360 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z = 180 \\ x + 3z = 180 \\ x = y \end{cases}, \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 180 - 3z \\ 2(180 - 3z) + z = 180 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 72 \\ z = 36 \\ y = 72 \end{cases}. \end{aligned}$$

Nous en concluons que l'angle en A mesure 36° et les deux angles de la base mesurent 72° .

Exercice 16. Cercle inscrit dans un triangle ALGO

Nous considérons un triangle ABC et Γ son cercle inscrit de centre I tangent respectivement en H , K et L aux côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$

On pose : $AB = c > 0$, $BC = a > 0$, $AC = b > 0$ et $2p = a + b + c$.



Avec les notations de la figure, déterminer les réels $x = AH$, $y = BK$ et $z = CL$ en fonction respectivement de p et a , p et b , p et c .

Proposer une fonction python qui restitue x , y et z , les réels positifs a , b et c étant choisis par l'utilisateur.

Solution

▷ Nous commençons par expliciter $x + y = AH + BK$.

En désignant par r le rayon du cercle Γ et en appliquant le théorème de Pythagore aux triangles BHI et BKI respectivement rectangles en H et K , nous obtenons

$$BK^2 = r^2 - BI^2 = BH^2,$$

ce qui implique

$$BK = BH.$$

Par suite, il vient

$$x + y = AH + BK = AH + BH = c.$$

▷ De la même façon, nous justifions que

$$AH = AL \text{ et } CL = CK,$$

ce qui induit :

$$\begin{aligned}x + z &= AH + CL = AL + CL = b, \\y + z &= BK + CL = BK + CK = a.\end{aligned}$$

▷ Ainsi il s'agit de résoudre le système de trois équations à trois inconnues

$$\begin{cases} x + y = c \\ x + z = b \\ y + z = a \end{cases} .$$

En additionnant membres à membres ces trois équations, il vient

$$2(x + y + z) = a + b + c = 2p, \text{ soit } x + y + z = p.$$

Nous en déduisons

$$\begin{cases} x = p - (y + z) = p - a \\ y = p - (x + z) = p - b \\ z = p - (x + y) = p - c \end{cases} .$$

▷ Réciproquement, nous avons

$$\begin{cases} x + y = p - a + p - b = c \\ x + z = p - a + p - c = b \\ y + z = p - b + p - c = a \end{cases} .$$

Nous en concluons que le triplet $(p - a, p - b, p - c)$ est l'unique solution qui convient à la question posée.

▷ Nous proposons la fonction Python `def cinscrit(a, b, c)` qui suit.

```
def cinscrit(a, b, c):
    p=(a+b+c)/2
    x=p-a
    y=p-b
    z=p-c
    return [x, y, z]
```

Par exemple, nous obtenons

```
>>> cinscrit(10,12,17)
[9.5, 7.5, 2.5]
```

Exercice 17. Deux changements de repère

Dans un repère $\mathcal{R}_O = (O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point $A(2, -1)$. On considère les vecteurs

$$\vec{I} = \vec{i} + 2\vec{j} \text{ et } \vec{J} = -\vec{i} + \vec{j}.$$

1. Justifier que le couple (\vec{I}, \vec{J}) est une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

2. Soit $M(x, y)$ un point repéré dans le repère \mathcal{R}_O .

On désigne par

$$(X, Y) \text{ les coordonnées de } M \text{ dans le repère } \mathcal{R}'_O = (O; \vec{I}, \vec{J}).$$

Déterminer X et Y en fonction des réels x et y , c'est-à-dire établir les formules de passage du repère \mathcal{R}_O au repère \mathcal{R}'_O .

3. On désigne par

$$(u, v) \text{ les coordonnées de } M \text{ dans le repère } \mathcal{R}'_A = (A; \vec{I}, \vec{J}).$$

Établir les formules de passage du repère \mathcal{R}_O au repère \mathcal{R}'_A .

Solution

1. Il s'agit de vérifier que les deux vecteurs \vec{I} et \vec{J} ne sont pas colinéaires. Nous avons

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Il en résulte que (\vec{I}, \vec{J}) est une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

2. Avec les données de l'énoncé, nous avons d'une part

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

D'autre part, nous obtenons

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J} = X(\vec{i} + 2\vec{j}) + Y(-\vec{i} + \vec{j}) = (X - Y)\vec{i} + (2X + Y)\vec{j}.$$

La décomposition du vecteur \overrightarrow{OM} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est unique.

Nous en déduisons

$$\begin{cases} X - Y = x \\ 2X + Y = y \end{cases}.$$

Nous résolvons ce système, d'inconnue, le couple (X, Y) .

Nous avons :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Ce système admet donc une solution unique (X, Y) telle que

$$X = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} x & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(x + y) \text{ et } Y = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(-2x + y).$$

Nous en concluons que les formules de passage du repère \mathcal{R}_O au repère \mathcal{R}'_O sont

$$\begin{cases} X = \frac{1}{3}(x + y) \\ Y = \frac{1}{3}(-2x + y) \end{cases}.$$

3. Nous pouvons refaire le même raisonnement que dans la question précédente. Cependant nous optons pour une autre méthode qui consiste d'abord à passer du repère \mathcal{R}'_O au repère \mathcal{R}'_A .

Déterminons les coordonnées du point A dans le repère \mathcal{R}'_O . Il vient

$$A\left(\frac{1}{3}(2 - 1), \frac{1}{3}(-2(2) - 1)\right), \text{ soit } A\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right).$$

Avec les données de l'énoncé, d'une part, nous avons,

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J}.$$

D'autre part, on a

$$\overrightarrow{AM} = u\vec{I} + v\vec{J}.$$

Il en résulte

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = u\vec{I} + v\vec{J} + \overrightarrow{OA} = u\vec{I} + v\vec{J} + \frac{1}{3}\vec{I} - \frac{5}{3}\vec{J} = \left(u + \frac{1}{3}\right)\vec{I} + \left(v - \frac{5}{3}\right)\vec{J}.$$

Par unicité de la décomposition d'un vecteur dans la base (\vec{I}, \vec{J}) , nous obtenons

$$\begin{cases} X = u + \frac{1}{3} \\ Y = v - \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = X - \frac{1}{3} \\ v = Y + \frac{5}{3} \end{cases},$$

ce qui donne les formules de passage du repère \mathcal{R}'_O au repère \mathcal{R}'_A .

Connaissant, d'après la question 2, les formules de passage du repère \mathcal{R}_O au repère \mathcal{R}'_O , nous obtenons finalement les formules de passage du repère \mathcal{R}_O au repère \mathcal{R}'_A qui sont

$$\begin{cases} u = \frac{1}{3}(x + y - 1) \\ v = \frac{1}{3}(-2x + y + 5) \end{cases}.$$

CHAPITRE 10

Trigonométrie

La trigonométrie dans un triangle rectangle est étudiée au collège.

Il s'agit de définir le cosinus et le sinus d'un angle aigu de ce triangle par les rapports de longueurs de ses côtés.

Cette trigonométrie est très pratique et permet de résoudre de nombreuses questions notamment dans un triangle équilatéral ou rectangle isocèle.

Cependant lorsque intervient un angle obtus ou un angle au centre dans un cercle, la trigonométrie dans un triangle rectangle ne fonctionne plus de façon satisfaisante.

C'est pour cette raison que, pour aller plus loin, nous développons dans ce chapitre une trigonométrie plus générale qui s'appuie essentiellement sur le repérage d'un point sur un cercle de référence, de centre l'origine d'un repère donné et de rayon 1, sur lequel un sens de parcours est choisi : c'est le fameux cercle trigonométrique.

Nous commençons par définir une nouvelle unité d'angle, le radian. Cette nouvelle unité permet entre autres de mesurer très simplement la longueur d'un arc de cercle. Elle autorise également une définition simple et satisfaisante de deux nouvelles fonctions de référence : les fonctions trigonométriques cosinus et sinus.

Nous profitons de ce chapitre pour définir aussi la fonction tangente .

En complément, nous terminons par la résolution d'équations trigonométriques de référence et par quelques notions sur les fonctions périodiques.

10.1 Le radian

10.1.1 Longueur d'un arc de cercle

Proposition. Soient (C) un cercle de centre O et de rayon $R > 0$, A et M deux points de (C) tel que l'angle au centre \widehat{AOM} ait pour mesure a en degrés avec $a \in [0, 360]$.

En désignant par L la longueur de l'arc \widehat{AM} , nous avons

$$L = \frac{a\pi R}{180}.$$

Démonstration. Nous commençons par former le tableau suivant qui détermine la longueur L de l'arc \widehat{AM} en fonction de R pour des valeurs particulières de a en degré.

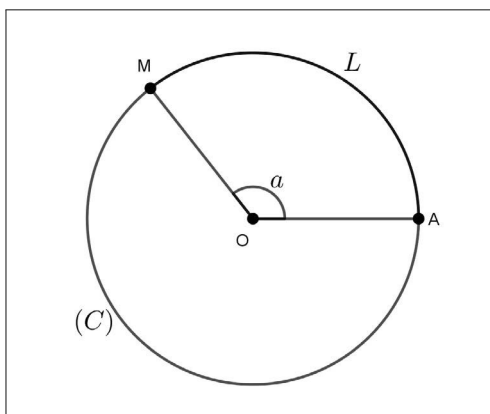
a°	180°	90°	60°	45°	30°	135°
L	πR	$\frac{\pi R}{2}$	$\frac{\pi R}{3}$	$\frac{\pi R}{4}$	$\frac{\pi R}{6}$	$\frac{3\pi R}{4}$

Nous constatons que les mesures en degré des angles au centre sont proportionnelles aux longueurs des arcs interceptés, ce qui donne

$$\frac{L}{a} = \frac{\pi R}{180}.$$

Nous en déduisons pour conclure

$$L = \frac{a\pi R}{180}.$$



Remarque. La longueur de l'arc correspondant à l'angle au centre de mesure en degré $360 - a$ est $2\pi R - \frac{a\pi R}{180}$.

Exemple. Cas particulier $R = 1$.

Nous supposons que $R = 1$, dans l'unité de longueur choisie.

▷ Nous déterminons L lorsque $a = 180^\circ$.

Si $a = 180^\circ$ et $R = 1$, alors $L = \frac{180\pi}{180} = \pi$.

▷ Nous calculons a si $L = 1$.

Nous avons $a = \frac{180L}{\pi R}$.

Si $L = 1$ et $R = 1$, alors $a = \frac{180}{\pi} \approx 57,3^\circ$.

10.1.2 Le radian

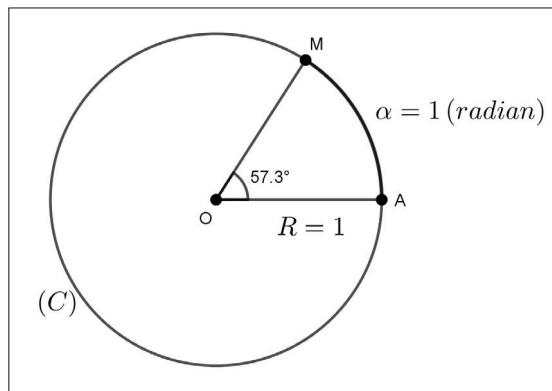
Définition. Soit (C) un cercle de centre O et de rayon 1.

Soient A et M deux points de (C) .

Le réel α mesurant la longueur de l'arc \widehat{AM} est la mesure en radian de l'angle \widehat{AOM} .

Ainsi nous retiendrons

- π radians mesure un angle plat.
- 1 radian mesure un angle de $57,3^\circ$ environ.



Proposition (conversion). Avec les notations ci-dessus, soient α et a les mesures en radians et degrés respectivement de l'angle \widehat{AOM} .

Nous disposons de l'égalité

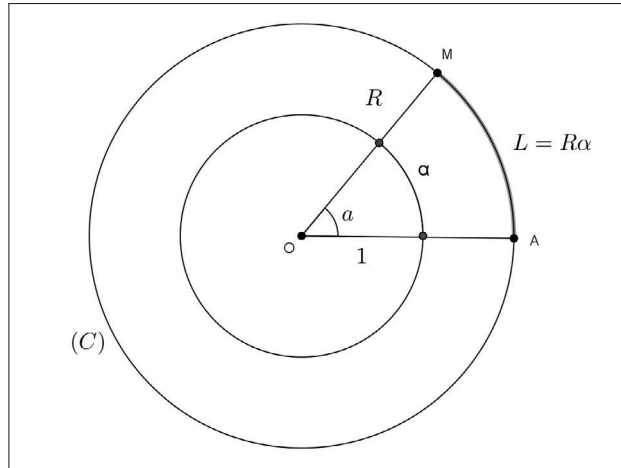
$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}.$$

Démonstration. En reprenant la proposition précédente avec en particulier $R = 1$ et $L = \alpha$, nous obtenons

$$\alpha = \frac{a\pi}{180} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}.$$

Proposition (longueur d'un arc de cercle et radian). Soit (C) un cercle de centre O et de rayon R . Soient A et M deux points de (C) tels que l'angle \widehat{AOM} ait pour mesure α radians avec $\alpha \in [0, 2\pi]$. L'arc \widehat{AM} a pour longueur

$$L = R\alpha.$$



Démonstration. Désignons par a une mesure en degrés de l'angle \widehat{AOM} .

Nous savons que $L = \frac{a\pi}{180}R$.

Puisque $\alpha = \frac{a\pi}{180}$, nous obtenons $L = R\alpha$.

Remarque. Une première justification de l'utilisation de l'unité radian réside dans la formule $L = R\alpha$ qui est plus simple que celle donnant la longueur d'un arc de cercle avec un angle au centre en degré.

Proposition. Avec les données ci-dessus on désigne par \mathcal{A} l'aire du secteur angulaire correspondant à l'arc \widehat{AM} . Nous disposons de l'égalité

$$\mathcal{A} = \frac{R^2}{2}\alpha.$$

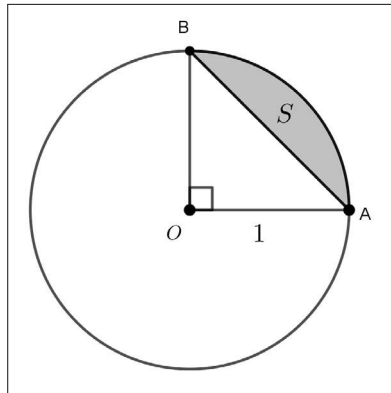
Démonstration. En considérant que les aires des secteurs angulaires sont proportionnelles aux longueurs des arcs interceptés, nous obtenons

$$\frac{\mathcal{A}}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{\alpha}{\pi}.$$

Nous en concluons que $\mathcal{A} = \frac{\alpha}{\pi} \times \frac{\pi R^2}{2} = \frac{R^2}{2}\alpha$.

Exemple. Calcul d'une aire.

Dans la figure ci-dessous, nous calculons l'aire de la partie S.



L'aire du secteur angulaire correspondant à l'arc \widehat{AB} est $\frac{1^2}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.

L'aire du triangle AOB est égale à $\frac{1}{2}$.

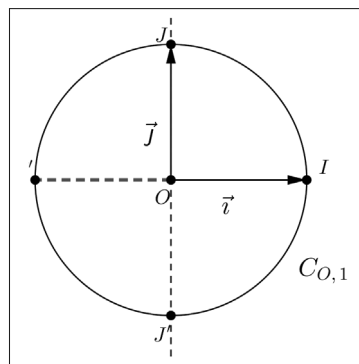
Il en résulte que l'aire de la partie S est égale à $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

10.2 Repérage sur le cercle trigonométrique

Dans ce paragraphe, $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal.

10.2.1 Le cercle trigonométrique

Définition. Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1. Ce cercle est souvent noté $C_{O,1}$.



Avec les notations de la figure, ce cercle est orienté de la façon suivante :

- le sens est direct lorsque ce cercle est décrit de I vers J ,
- le sens est indirect lorsque ce cercle est décrit de I vers J' .

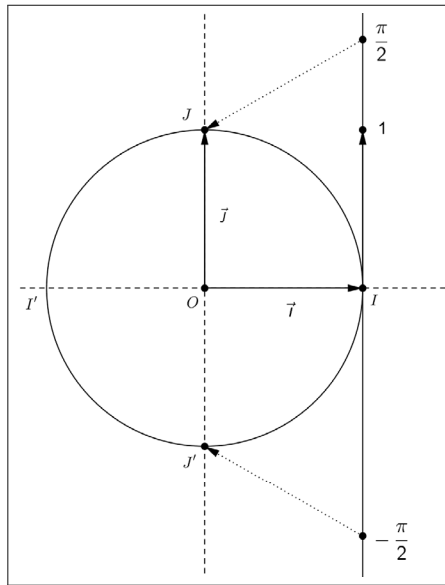
Remarques. Nous en faisons deux.

- Le sens direct est le sens contraire « des aiguilles d'une montre ».
- Le sens direct est également appelé sens trigonométrique.
- Une équation du cercle trigonométrique est $x^2 + y^2 = 1$.

10.2.2 Repérage sur ce cercle

Étude d'un exemple : le point J repéré par $\frac{\pi}{2}$

Soit (T) la droite numérique tangente à $C_{O,1}$ au point I .



Au réel $\frac{\pi}{2}$ sur la droite (T) , on associe par « enroulement » le point J tel que l'arc \widehat{IJ} a pour longueur $\frac{\pi}{2}$ ou bien tel que l'angle \widehat{IOJ} a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ radians.

Nous observons que le point J est également associé par « enroulement » aux réels $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ ou $\frac{\pi}{2} - 2\pi$ sur la droite (T) .

Plus généralement, ce même point J est associé, par « enroulement », aux réels $\frac{\pi}{2} + k(2\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

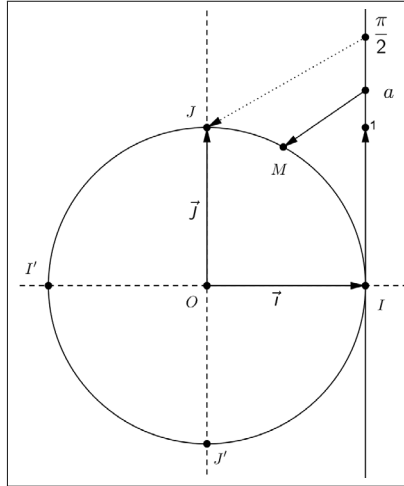
Nous en concluons que le point J est repéré sur $C_{O,1}$ par le réel $\frac{\pi}{2}$ et plus généralement par tout réel de la forme $\frac{\pi}{2} + k(2\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

De la même façon, le point J' est repéré sur $C_{O,1}$ par le réel $-\frac{\pi}{2}$ et plus généralement par tout réel de la forme $-\frac{\pi}{2} + k(2\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Définition. A tout point $M \in C_{O,1}$, est associé « par enroulement » un unique réel $a \in]-\pi, \pi]$ tel que l'arc \widehat{IM} a pour la longueur $|a|$, c'est-à-dire tel que l'angle \widehat{IOM} a pour mesure $|a|$ radians.

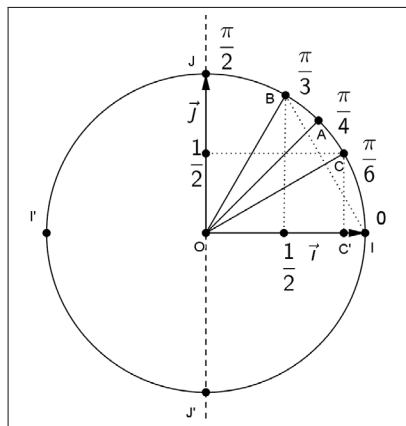
On dit que M est repéré sur le cercle trigonométrique par le réel a .

Tout réel de la forme $a + k(2\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$, repère aussi ce point M sur le cercle trigonométrique.



10.2.3 Repérage dans le premier quadrant

Proposition. Sur le cercle trigonométrique, dans le premier quadrant, nous disposons des repérages particuliers suivants :



Démonstration. Avec les notations de la figure, nous avons

- I est repéré par 0 .
- J est repéré par $\frac{\pi}{2}$.

- A est repéré par $\frac{\pi}{4}$ car la droite (OA) est la bissectrice de l'angle \widehat{IOJ} .
- B est repéré par $\frac{\pi}{3}$ car le triangle IOB est équilatéral. De plus B a pour abscisse $\frac{1}{2}$.
- C est repéré par $\frac{\pi}{6}$ car le triangle COC' est demi-équilatéral. De plus C a pour ordonnée $\frac{1}{2}$.

Remarque. Connaissant ces repérages particuliers dans le premier quadrant, nous pouvons, grâce au cercle trigonométrique et à ses éléments de symétrie, placer sur ce dernier, des points repérés par des réels appartenant à l'intervalle $] -\pi, \pi]$ ou $[0, 2\pi[$ et plus généralement à \mathbb{R} , en "tournant de 2π " dans le sens direct ou indirect.

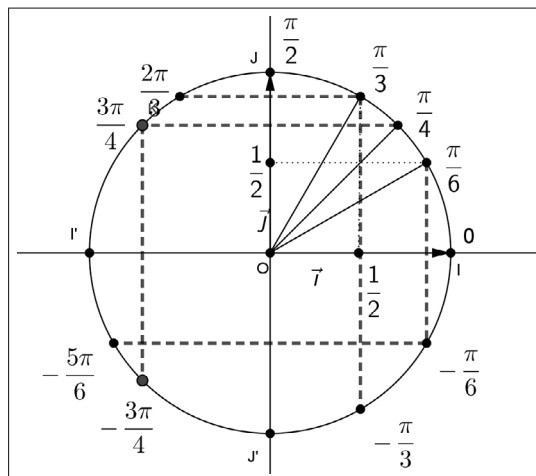
L'exemple qui suit illustre cette importante remarque.

Exemple. Placer des points repérés sur $C_{O,1}$.

▷ Nous plaçons sur le cercle trigonométrique les points repérés par les réels suivants :

$$\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{6} \text{ et } -\frac{5\pi}{6}.$$

Pour placer ces points, nous observons ci-dessous des symétries qui seront justifiées ultérieurement.



▷ Nous plaçons à présent sur le cercle trigonométrique, le point repéré par $\frac{2021\pi}{4}$.

Heureusement, nous ne tournons pas sur le cercle "2021 fois de $\frac{\pi}{4}$ " !

Nous effectuons la division euclidienne de 2021 par 4.

Ainsi nous obtenons, $2021 = 4 \times 505 + 1$.

Cela permet de déduire

$$\frac{2021\pi}{4} = (4 \times 505 + 1) \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \pi + 506\pi = -\frac{3\pi}{4} + 253(2\pi).$$

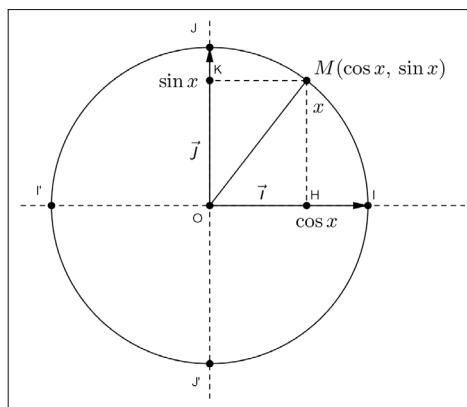
Nous en concluons que le point considéré est repéré sur le cercle trigonométrique par le réel $-\frac{3\pi}{4}$.

10.3 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Dans ce paragraphe, $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal.

10.3.1 Les définitions du cosinus et du sinus

Définition. Soit M un point du cercle trigonométrique repéré sur ce cercle par un réel x .



- Le cosinus de x , noté $\cos x$, est l'abscisse de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- Le sinus de x , noté $\sin x$, est l'ordonnée de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Ainsi, dans ce repère, nous retiendrons que

$$M(\cos x, \sin x).$$

Remarques. Nous en donnons trois.

- Avec les notations de la figure, nous avons

$$\overline{OH} = \cos x \text{ et } \overline{OK} = \sin x.$$

- La droite des abscisses est appelée aussi la droite (ou l'axe) des cosinus. La droite des ordonnées est appelée aussi la droite (ou l'axe) des sinus.

- La fonction cosinus, notée \cos , est définie sur \mathbb{R} par $\cos : x \mapsto \cos x$.

La fonction sinus, notée \sin , est définie sur \mathbb{R} par $\sin : x \mapsto \sin x$.

Proposition (détermination de $\cos x$ et $\sin x$ pour $x \in \{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$). *Nous disposons du tableau suivant*

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	0	1	0	-1
$\sin x$	-1	0	1	0

Démonstration. Avec les notations de la figure précédente, nous observons que :

▷ Le point $J'(0, -1)$ est repéré par le réel $-\frac{\pi}{2}$ donc $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$.

▷ Le point $I(1, 0)$ est repéré par le réel 0 donc $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$.

▷ Le point $J(0, 1)$ est repéré par le réel $\frac{\pi}{2}$ donc $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

▷ Le point $I'(-1, 0)$ est repéré par le réel π donc $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$.

10.3.2 Premières formules de trigonométrie

Proposition. *Pour tout réel x , nous avons*

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{ et } -1 \leq \sin x \leq 1.$$

Démonstration. Soit x un réel.

Nous utilisons à nouveau la figure de la définition.

Il vient

$$H \in [I'I] \text{ donc } x_H = \overline{OH} \in [-1, 1],$$

ce qui justifie que $-1 \leq \cos x \leq 1$.

De même, nous avons $K \in [J'J]$ donc $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Remarques. Nous en faisons deux.

- Un énoncé équivalent de cette proposition est

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\cos x| \leq 1 \text{ et } |\sin x| \leq 1.$$

- Ces deux doubles inégalités traduisent que les fonctions \cos et \sin sont bornées sur \mathbb{R} .

Proposition. Pour tout réel x , nous disposons de l'égalité

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

Démonstration. À nouveau avec les données de la définition, le point $M(\cos x, \sin x)$ appartient au cercle $(C_{O,1})$.

Nous en déduisons

$$1 = OM^2 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2.$$

Remarque. La plupart du temps on note

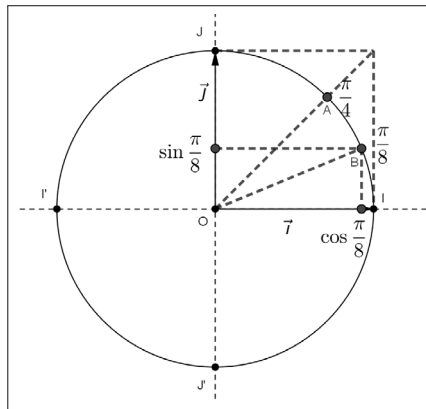
$$(\cos x)^2 = \cos^2 x \text{ et } (\sin x)^2 = \sin^2 x.$$

La proposition énoncée devient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Exemple. Un classique.

▷ Nous plaçons sur le cercle trigonométrique, à la règle et au compas, les points A et B repérés respectivement par les réels $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{8}$.



▷ Nous donnons $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ et nous calculons la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$. Il vient

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \right)^2 = 1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

Puisque $\frac{\pi}{8} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos \frac{\pi}{8} > 0$, donc nous obtenons :

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

▷ Pour terminer nous évaluons $2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$.

Nous avons

$$2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = 2 \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} = 2 \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Remarque. Nous verrons, dans la suite de ce chapitre que $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui donne

$$2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4}.$$

Nous avons ainsi vérifié un cas particulier d'une formule de trigonométrie appelée formule de duplication énoncée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

Cette égalité sera justifiée en classe de Première.

Proposition. Pour tout réel x et tout $k \in \mathbb{Z}$, nous disposons des égalités

$$\cos(x + k(2\pi)) = \cos x \text{ et } \sin(x + k(2\pi)) = \sin x.$$

Démonstration. Soient x un réel et k un entier relatif.

Les réels x et $x + k(2\pi)$ repèrent le même point sur le cercle trigonométrique.

Il en résulte que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \cos(x + k(2\pi)) = \cos x \text{ et } \sin(x + k(2\pi)) = \sin x.$$

Remarque. En particulier, pour $k = 1$, nous obtenons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin x,$$

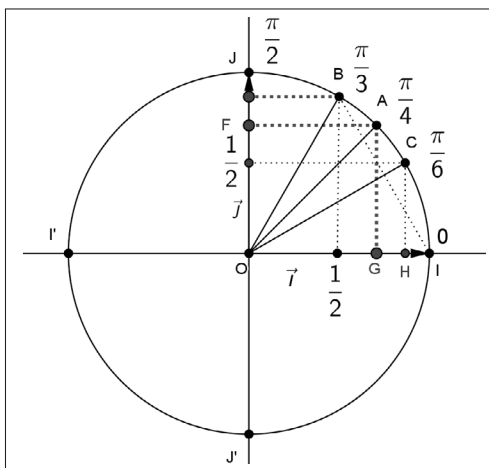
ce qui signifie que les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont *périodiques*, de période 2π .

Nous verrons dans la suite de ce chapitre les conséquences de cette période pour les représentations graphiques des fonctions \cos et \sin .

Proposition (valeurs remarquables de $\cos x$ et $\sin x$). Nous disposons du tableau suivant

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Démonstration. Nous reprenons le repérage dans le premier quadrant.



- $x = \frac{\pi}{3}$

Nous avons $B(\frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{3})$.

D'une part, nous en déduisons que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

D'autre part, $\sin \frac{\pi}{3}$ mesure la longueur de la hauteur issue du sommet B

du triangle équilatéral OBI de côté 1. Il en résulte que $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- $x = \frac{\pi}{6}$

Nous avons $C(\cos \frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$.

Nous en déduisons donc que $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

De plus, $OH = \cos \frac{\pi}{6}$ mesure la longueur de la hauteur issue du sommet O du demi-triangle équilatéral OCH de côté 1.

Il en résulte que $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- $x = \frac{\pi}{4}$

Nous avons $A(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4})$.

Le quadrilatère $OFAG$ est un carré, donc $\cos \frac{\pi}{4} = OH = OG = \sin \frac{\pi}{4}$.

Le segment $[OA]$ est une diagonale de ce carré telle que $OA = 1$.

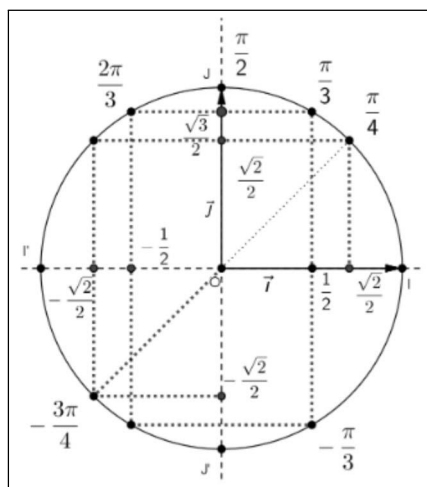
Nous en déduisons que $(\cos \frac{\pi}{4}) \sqrt{2} = 1$.

Nous obtenons $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$.

Exemple. Utiliser le cercle trigonométrique.

À l'aide du cercle trigonométrique, nous donnons les valeurs exactes des réels $\cos \frac{2\pi}{3}$ et $\sin \frac{2\pi}{3}$, puis les valeurs de $\cos(-\frac{3\pi}{4})$ et $\sin(-\frac{3\pi}{4})$.

Nous utilisons les éléments de symétrie du cercle trigonométrique.



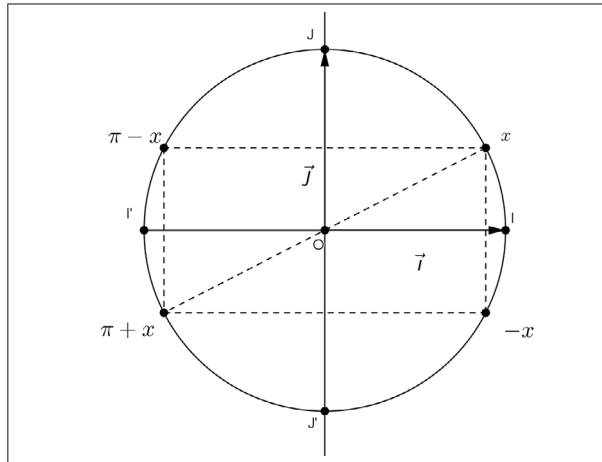
Nous en déduisons

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

10.3.3 Cosinus et sinus de réels associés à x

Soit x un réel donné. Connaissant $\cos x$ et $\sin x$, nous utilisons les symétries par rapport aux axes du repère et la symétrie par rapport à O pour déterminer $\cos y$ et $\sin y$, avec $y \in \{-x, \pi - x, \pi + x\}$, comme l'indique la figure suivante, nommée parfois configuration rectangle.



Proposition. Pour tout réel x , nous disposons des égalités suivantes :

$$\begin{array}{lll} \cos(-x) = \cos x & \text{et} & \cos(\pi - x) = -\cos x & \text{et} & \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(-x) = -\sin x & & \sin(\pi - x) = \sin x & & \sin(\pi + x) = -\sin x \end{array}$$

Démonstration. Ces égalités sont justifiées par lecture et exploitation des symétries sur le cercle trigonométrique.

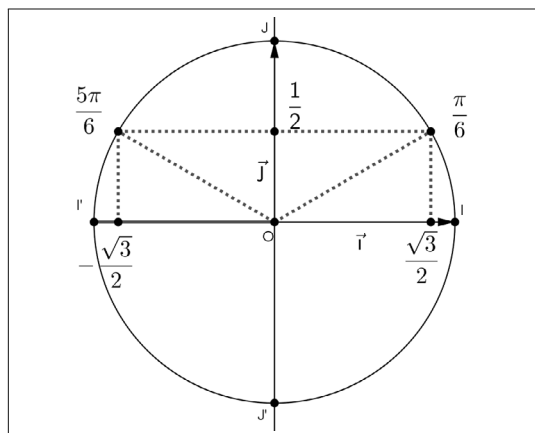
Exemple. Une application directe.

Nous calculons $\cos \frac{5\pi}{6}$ et $\sin \frac{5\pi}{6}$.

Il vient

$$\begin{aligned} \cos \frac{5\pi}{6} &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \\ \sin \frac{5\pi}{6} &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Contrôle graphique.



Proposition (égalités associées à $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$). Nous disposons des égalités suivantes :

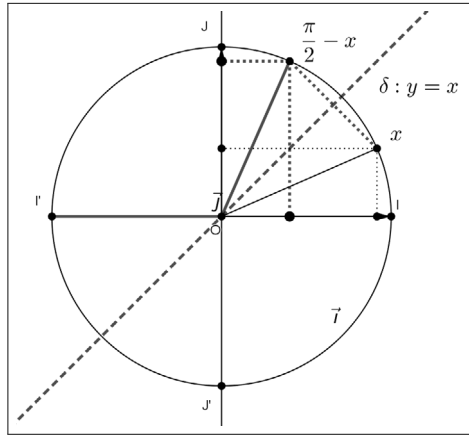
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

et

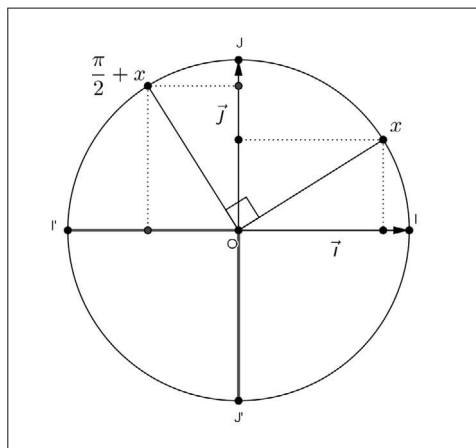
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

Démonstration. \triangleright Nous observons que le point repéré par x et le point repéré par le réel $\frac{\pi}{2} - x$ sur le cercle $C_{O,1}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice δ du repère dont une équation est $y = x$.

Nous obtenons ainsi, grâce à la figure qui suit, les deux premières égalités.



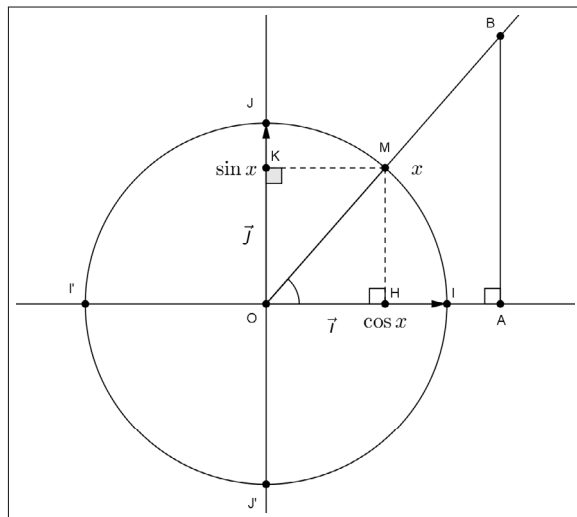
\triangleright Pour le passage de x à $\frac{\pi}{2} + x$ nous observons la figure qui suit pour obtenir les deux égalités proposées.



Remarque. Les différentes formules associées pourront être justifiées par des calculs trigonométriques qui seront proposés en classe de Première.

10.3.4 Lien avec la trigonométrie dans un triangle rectangle

Proposition. Sur la figure ci-après, le triangle OAB est rectangle en A .



Le point $M \in [OB]$ est un point du cercle trigonométrique repéré sur ce cercle par le réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Nous disposons des égalités suivantes :

$$\cos \widehat{AOB} = \cos x, \quad \sin \widehat{AOB} = \sin x, \quad \tan \widehat{AOB} = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Démonstration. \triangleright Puisque les droites (MH) et (AB) sont parallèles, nous pouvons appliquer le théorème de Thalès dans le triangle OAB .

Nous obtenons

$$\frac{OH}{OA} = \frac{OM}{OB} = \frac{MH}{AB}.$$

Nous en déduisons

$$\frac{OH}{OA} = \frac{OM}{OB}, \text{ soit } \frac{OH}{OM} = \frac{OA}{OB}.$$

Puisque $OH = \cos x$ et $OM = 1$, nous en concluons

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{OA}{OB} = \cos x.$$

\triangleright De plus, nous en déduisons aussi

$$\frac{OM}{OB} = \frac{MH}{AB}, \text{ soit, } \frac{AB}{OB} = \frac{MH}{OM}.$$

Puisque $MH = OK = \sin x$ et $OM = 1$, nous obtenons :

$$\sin \widehat{AOB} = \frac{AB}{OB} = \sin x.$$

▷ Nous avons également

$$\frac{OH}{OA} = \frac{MH}{AB},$$

ce qui implique

$$\tan \widehat{AOB} = \frac{AB}{OA} = \frac{MH}{OH} = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

10.4 Fonction tangente

Lemme. Dans \mathbb{R} , l'équation $\cos x = 0$ a pour solutions les réels de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Par une lecture attentive sur le cercle trigonométrique, nous obtenons

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k(2\pi) \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + k(2\pi) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Définition. Soit x un réel distinct de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

La tangente de x , notée $\tan x$, est définie par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Remarque. La fonction tangente, notée \tan est définie, pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, par $\tan : x \mapsto \tan x$.

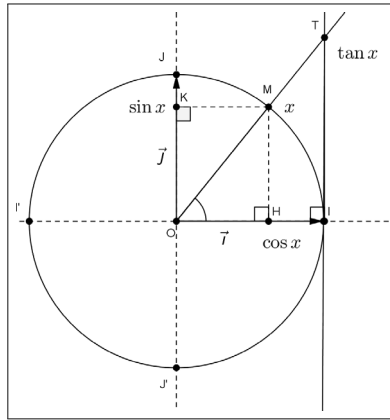
Proposition (valeurs de $\tan x$ pour $x \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$). Nous disposons du tableau suivant

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

Démonstration. Par définition de $\tan x$ pour $x \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

Lecture de $\tan x$ sur le cercle trigonométrique

- On suppose que le point M est repéré sur le cercle trigonométrique par le réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.



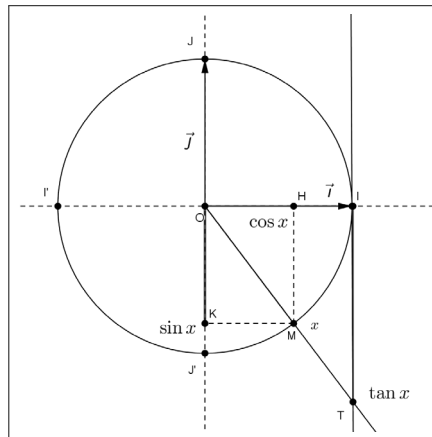
En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle OIT , nous obtenons

$$\frac{OH}{OI} = \frac{MH}{IT} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{1} = \frac{\sin x}{IT}.$$

Nous en déduisons que $IT = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$.

- Plus généralement, soit un réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. En supposant que la droite (IT) est orientée, nous posons

$$\overline{IT} = \tan x.$$



Proposition (une formule à connaître). *Pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, nous disposons de l'égalité*

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Démonstration. Soit x un réel distinct $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Nous avons

$$1 + \tan^2 x = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

10.5 Équations trigonométriques

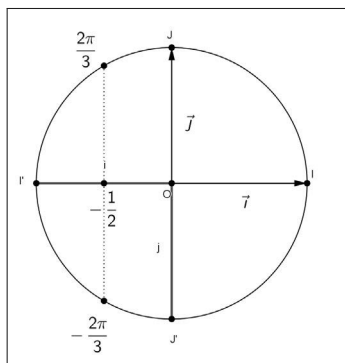
10.5.1 Équation de la forme $\cos x = a$, où a est un réel donné

Exemple. Étude d'une première équation.

Nous résolvons l'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$ dans les intervalles suivants :

$$(1) [0, \pi], (2)] - \pi, 0], (3)] - \pi, \pi], (4) \mathbb{R}.$$

Une fois de plus, nous exploitons le cercle trigonométrique.



Nous obtenons immédiatement les solutions de cette équation, dans chaque intervalle proposé.

$$(1) x = \frac{2\pi}{3}.$$

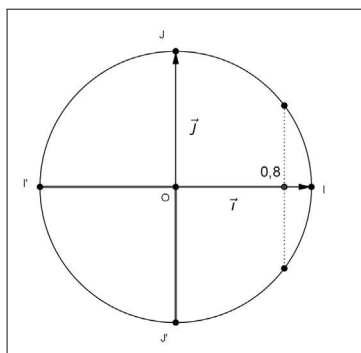
$$(2) x = -\frac{2\pi}{3}.$$

$$(3) x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3}.$$

$$(4) x = \frac{2\pi}{3} + k(2\pi) \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + k(2\pi), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple. Une résolution approchée.

Nous résolvons, à l'aide d'une calculatrice, l'équation $\cos x = 0,8$ dans les intervalles suivants : (1) $[0, \pi]$, (2) $] - \pi, 0]$.



La calculatrice est en "mode radian".

▷ si $x \in [0, \pi]$, alors $x = \cos^{-1}(0,8) \approx 0,6435$ radians.

▷ si $x \in]-\pi, 0]$, alors $x = -\cos^{-1}(0,8) \approx -0,6435$ radians.

Proposition (cas général). *Soit a un réel donné.*

1^{er} cas : $a \notin [-1, 1]$.

L'équation $\cos x = a$ n'a pas de solution.

2^e cas : $a \in [-1, 1]$.

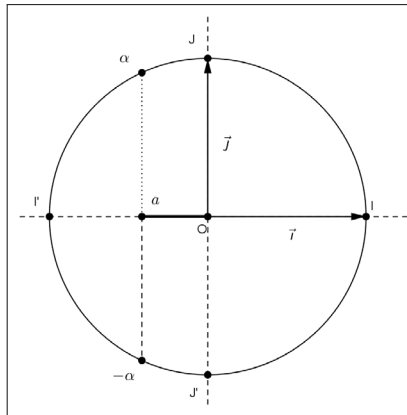
En désignant par α l'unique réel appartenant à $[0, \pi]$ tel que $\cos \alpha = a$, nous avons

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k(2\pi) \text{ ou } x = -\alpha + k(2\pi), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. 1^{er} cas : $a \notin [-1, 1]$.

Nous savons que, pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$, ce qui justifie, dans ce cas, que l'équation $\cos x = a$ n'a pas de solution.

2^e cas : $a \in [-1, 1]$.



Les réels α ou $-\alpha$ sont solutions de l'équation $\cos x = \cos \alpha$.

Nous en déduisons à l'aide du cercle trigonométrique que

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k(2\pi) \text{ ou } x = -\alpha + k(2\pi), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Proposition (cas particuliers lorsque $a \in \{-1, 0, 1\}$). *Nous disposons du tableau suivant :*

équations	$\cos x = -1$	$\cos x = 0$	$\cos x = 1$
solutions, avec $k \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + k(2\pi)$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x = k(2\pi)$

Démonstration. Pour chaque équation, nous repérons l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exemple. Nous déterminons l'ensemble de définition de chacune des fonctions trigonométriques suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{1}{2 + \cos x}, \quad g : x \mapsto \frac{1}{1 + \cos x}, \quad h : x \mapsto \frac{1}{|\cos x| - 1}.$$

▷ La fonction f est définie pour les réels x tels que $2 + \cos x \neq 0$.

Pour tout réel x , on a $-1 \leq \cos x \leq 1$, ce qui implique $1 \leq 2 + \cos x \leq 3$.

Nous en concluons que $D_f = \mathbb{R}$.

▷ La fonction g est définie pour les réels x tels que $1 + \cos x \neq 0$.

Nous avons

$$1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k(2\pi).$$

Il en résulte que $D_g = \mathbb{R} - \{(2k + 1)\pi/k \in \mathbb{Z}\}$.

▷ La fonction h est définie pour les réels x tels que $|\cos x| - 1 \neq 0$.

Nous avons

$$\begin{aligned} |\cos x| - 1 = 0 &\Leftrightarrow \cos x = -1 \text{ ou } \cos x = 1, \\ |\cos x| - 1 = 0 &\Leftrightarrow x = \pi + k(2\pi) \text{ ou } x = k(2\pi) \Leftrightarrow x = k\pi. \end{aligned}$$

Nous en concluons que $D_h = \mathbb{R} - \{k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemple. Résolution d'une équation trigonométrique.

Nous résolvons dans \mathbb{R} l'équation $2 \cos 2x = \sqrt{2}$.

Nous avons

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{4}.$$

En appliquant la proposition précédente, il vient

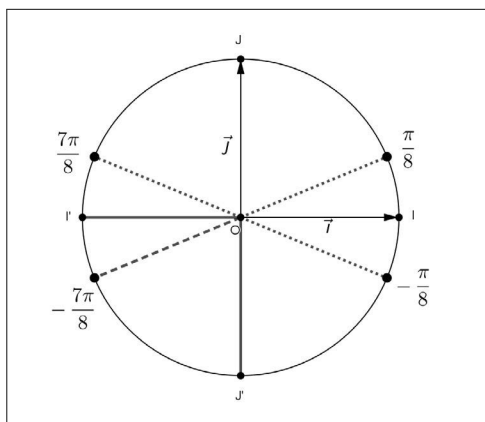
$$\left\{ \begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{4} + k(2\pi) \\ \text{ou} \\ 2x = -\frac{\pi}{4} + k(2\pi) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \end{array} \right\}.$$

Nous en concluons

$$S = \left\{ \frac{\pi}{8} + k\pi/k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{8} + k\pi/k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nous plaçons sur le cercle trigonométrique les solutions de cette équation qui appartiennent à l'intervalle $] -\pi, \pi]$, en observant que :

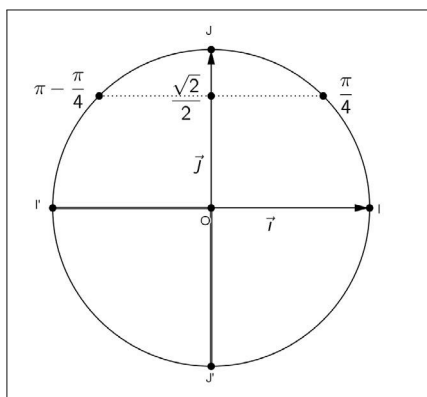
$$S \cap]-\pi, \pi] = \left\{ -\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, -\frac{\pi}{8} + \pi, \frac{\pi}{8} - \pi \right\} = \left\{ -\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, -\frac{7\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \right\}.$$



10.5.2 Équation de la forme $\sin x = a$, où a est un réel donné

Exemple. Nous résolvons l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans les intervalles suivants :

$$(1) \left[0, \frac{\pi}{2}\right], (2)]-\pi, \pi], (3) \mathbb{R}.$$



Une lecture sur le cercle trigonométrique donne

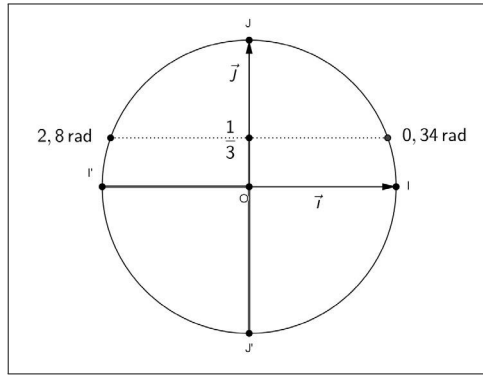
$$(1) x = \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

$$(3) x = \frac{\pi}{4} + k(2\pi) \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k(2\pi), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple. Une résolution approchée.

Nous résolvons, à l'aide d'une calculatrice, l'équation $\sin x = \frac{1}{3}$, dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.



La calculatrice en mode "radian" restitue $x = \sin^{-1} \frac{1}{3} \approx 0,34$ radians.

Puisque $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, nous obtenons $x \approx \pi - 0,34 \approx 2,8$ radians.

Proposition (cas général). Soit a un réel donné.

1^{er} cas : $a \notin [-1, 1]$.

L'équation $\sin x = a$ n'a pas de solution.

2^e cas : $a \in [-1, 1]$.

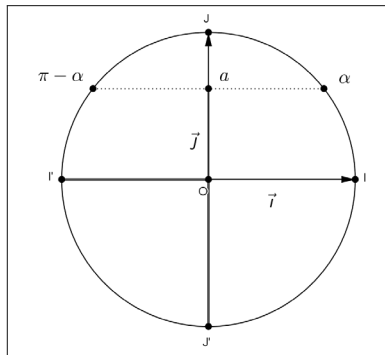
En désignant par α l'unique réel appartenant à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin \alpha = a$, nous avons

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k(2\pi) \text{ ou } x = \pi - \alpha + k(2\pi), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. 1^{er} cas : $a \notin [-1, 1]$.

Nous savons que, pour tout réel x , $-1 \leq \sin x \leq 1$, ce qui justifie, dans ce cas, que l'équation $\sin x = a$ n'a pas de solution.

2^e cas : $a \in [-1, 1]$.



Les réels α ou $\pi - \alpha$ sont solutions de l'équation $\sin x = \sin \alpha$.

Nous en déduisons à l'aide du cercle trigonométrique que

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k(2\pi) \text{ ou } x = \pi - \alpha + k(2\pi), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Proposition (cas particuliers lorsque $a \in \{-1, 0, 1\}$). Nous disposons du tableau suivant :

équations	$\sin x = -1$	$\sin x = 0$	$\sin x = 1$
solutions, avec $k \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + k(2\pi)$	$x = k\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + k(2\pi)$

Démonstration. Pour chaque équation, nous repérons ses solutions sur le cercle trigonométrique.

Exemples. Résolutions d'équations trigonométriques.

Nous résolvons dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$(1) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, (2) 4 \sin^2 x = 3, (3) 2 \sin \frac{x}{2} = \sqrt{3}.$$

▷ **Résolution de l'équation (1).**

Nous avons

$$(1) \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k(2\pi) \text{ ou } x = \pi + \frac{\pi}{3} + k(2\pi), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Nous en concluons

$$S_{(1)} = \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{4\pi}{3} + k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

▷ **Résolution de l'équation (2).**

Nous avons

$$(2) \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De (1), il résulte

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k(2\pi) \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + k(2\pi), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k(2\pi) \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{3} + k(2\pi), \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k(2\pi) \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k(2\pi), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Nous en concluons :

$$S_{(2)} = \left\{ -\frac{\pi}{3} + k(2\pi)/k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{4\pi}{3} + k(2\pi)/k \in \mathbb{Z} \right\} \\ \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + k(2\pi)/k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + k(2\pi)/k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

▷ **Résolution de l'équation (3).** Nous avons

$$(3) \Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

De (2), nous déduisons

$$(3) \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k(2\pi) \text{ ou } \frac{x}{2} = \frac{2\pi}{3} + k(2\pi), \\ (3) \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k(4\pi) \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + k(4\pi), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Nous en concluons

$$S_{(3)} = \left\{ \frac{2\pi}{3} + k(4\pi)/k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{4\pi}{3} + k(4\pi)/k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

10.6 Fonctions trigonométriques

Proposition. *Nous disposons des propriétés suivantes :*

- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont définies sur \mathbb{R} .
- La fonction $x \mapsto \cos x$ est paire.
- La fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire.

Démonstration. Ces trois propriétés sont justifiées au paragraphe 3, à l'aide du cercle trigonométrique.

Proposition. *Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont périodiques de période 2π (ou 2π -périodiques). En d'autres termes, nous avons*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

Démonstration. Cette propriété est justifiée au paragraphe 3, à l'aide du cercle trigonométrique

Proposition. *$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal du plan.*

Les représentations graphiques \mathcal{C}_{\cos} et \mathcal{C}_{\sin} sont globalement invariantes par la translation t de vecteur $2\pi \cdot \vec{i}$, ce qui signifie quel que soit le point M ,

- si $M \in \mathcal{C}_{\cos}$, alors $t(M) \in \mathcal{C}_{\cos}$,
- si $M \in \mathcal{C}_{\sin}$, alors $t(M) \in \mathcal{C}_{\sin}$.

Démonstration. Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points tels que $M' = t(M)$. Nous avons

$$\overrightarrow{MM'} = 2\pi \cdot \vec{i},$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x' - x = 2\pi \\ y' - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 2\pi \\ y' = y \end{cases}.$$

Si $M(x, y) \in \mathcal{C}_{\cos}$, alors $y = \cos x$.

Nous en déduisons que les coordonnées (x', y') du point M' satisfont à l'équation

$$y' = \cos(x' - 2\pi) = \cos x'.$$

Nous avons prouvé que $M' = t(M) \in \mathcal{C}_{\cos}$.

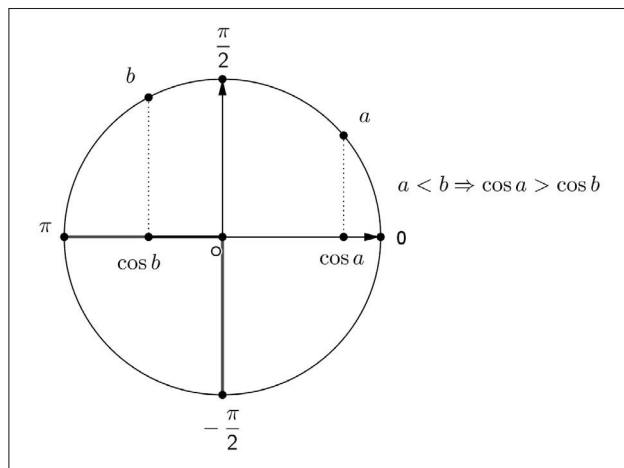
Nous montrons de la même façon que

$$\forall M \in \mathcal{C}_{\sin}, t(M) \in \mathcal{C}_{\sin}.$$

Nous en concluons que les courbes \mathcal{C}_{\cos} et \mathcal{C}_{\sin} sont globalement invariantes par la translation $t = t_{2\pi \cdot \vec{i}}$.

Proposition. La fonction $x \mapsto \cos x$ est décroissante sur $[0, \pi]$.

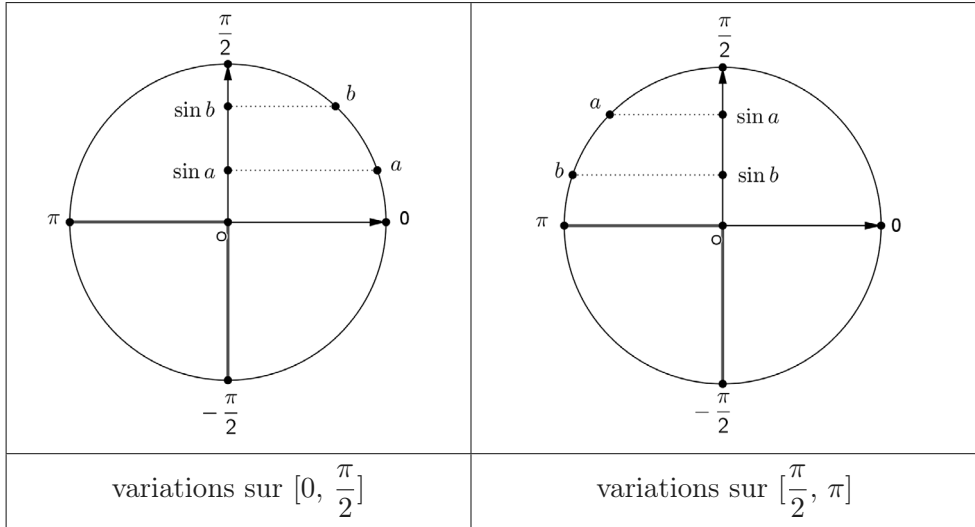
Démonstration. Une lecture sur le cercle trigonométrique permet de conclure que si les réels a et b appartiennent à l'intervalle $[0, \pi]$ tels que $a \leq b$, alors $\cos a \geq \cos b$.



Proposition. La fonction $x \mapsto \sin x$ est

- croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- décroissante sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Démonstration. De la même façon que ci-dessus, une lecture sur le cercle trigonométrique permet de conclure.

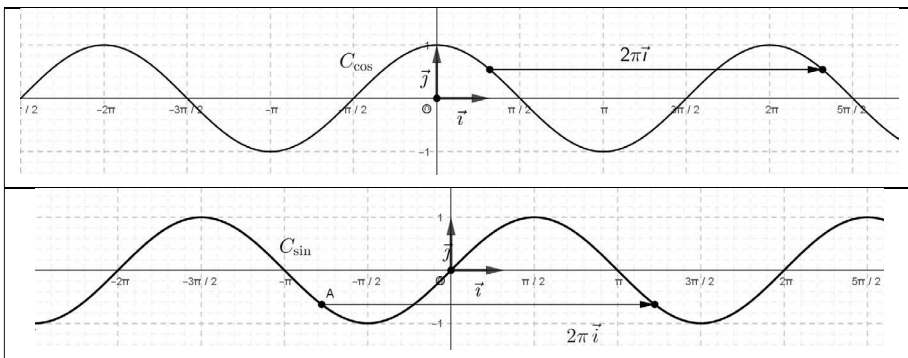


Représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$.

Connaissant les courbes C_{\cos} et C_{\sin} sur l'intervalle $[0, \pi]$, nous en déduisons :

- C_{\cos} sur $[-\pi, \pi]$ par symétrie par rapport à la droite des ordonnées car \cos est paire.
- C_{\sin} sur $[-\pi, \pi]$ par symétrie par rapport à l'origine du repère car \sin est impaire.
- C_{\cos} et C_{\sin} sur \mathbb{R} par la translation de vecteur $2\pi \cdot \vec{i}$, puisque ces deux courbes sont globalement invariantes par cette translation.

Ainsi nous obtenons



10.7 Fonctions périodiques

Définition. Soit T un réel strictement positif. Une fonction f définie sur \mathbb{R} est périodique, de période T (ou T -périodique) si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x).$$

Remarque. Si f est définie sur son ensemble de définition D_f , cette fonction est T -périodique si et seulement si

$$\begin{cases} \forall x \in D_f, x + T \in D_f \\ \forall x \in D_f, f(x + T) = f(x) \end{cases}.$$

Proposition. Si f est une fonction T -périodique, alors C_f est globalement invariante par la translation de vecteur $T \cdot \vec{i}$.

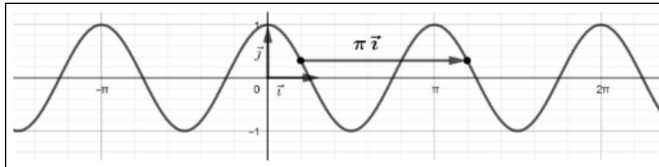
Démonstration. Nous procédons comme dans le paragraphe précédent en remplaçant le vecteur $2\pi \cdot \vec{i}$ par $T \cdot \vec{i}$.

Exemples. Deux exemples de fonctions périodiques.

1^{er} exemple.

La fonction $f : x \mapsto \cos(2x)$ est π -périodique car, pour tout réel t , nous avons

$$f(x + \pi) = \cos 2(x + \pi) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x) = f(x),$$

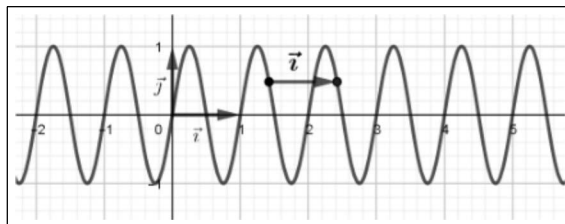


2^e exemple.

La fonction $g : t \mapsto \sin(2\pi t)$ est 1-périodique.

En effet, pour tout réel t , il vient

$$g(t + 1) = \sin 2\pi(t + 1) = \sin(2\pi t + 2\pi) = \sin(2\pi t) = g(t),$$

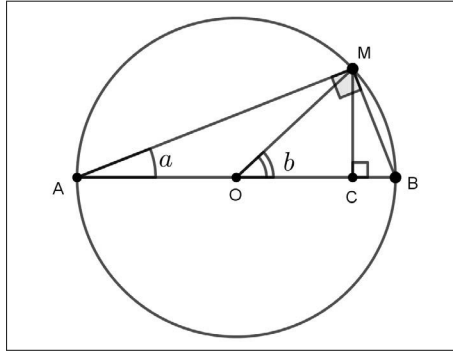


10.8 Exercices corrigés

Exercice 1. Duplication et lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$

Sur la figure ci-dessous, on considère le demi-cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 2$.

- L'angle \widehat{COM} a pour mesure en radians le réel $b \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
- L'angle \widehat{OAM} a pour mesure en radians le réel $a \in]0, \frac{\pi}{4}[$.



1. Justifier que $b = 2a$.
2. Montrer que, pour tout $a \in]0, \frac{\pi}{4}[$, $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$.
En déduire $\sin^2 a$ en fonction de $\cos 2a$.
3. Justifier que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$. En déduire $\sin \frac{\pi}{12}$.

Solution

1. L'angle $\widehat{OAM} = \widehat{BAM}$ est inscrit dans le demi-cercle et a pour angle au centre $\widehat{COM} = \widehat{BOM}$.

Il en résulte

$$\widehat{COM} = 2\widehat{OAM}, \text{ soit } b = 2a.$$

2. Dans le triangle ACM rectangle en C , nous avons d'une part

$$\cos a = \frac{AC}{AM},$$

ce qui implique

$$AM = \frac{AC}{\cos a}.$$

D'autre part, dans le triangle AMB rectangle en M , nous avons

$$\cos a = \frac{AM}{AB} = \frac{AM}{2}.$$

Il en résulte que

$$AM = 2 \cos a.$$

Nous en déduisons

$$\frac{AC}{\cos a} = 2 \cos a, \text{ soit } 2 \cos^2 a = AC.$$

De plus nous avons

$$AC = AO + OC = 1 + OC.$$

Dans le triangle OCM rectangle en C , puisque $OM = 1$, nous obtenons

$$\cos b = \frac{OC}{OM} = OC, \text{ soit } OC = \cos 2a.$$

Nous en déduisons

$$AC = 1 + \cos 2a.$$

Sachant que $2 \cos^2 a = AC$ et $AC = 1 + \cos 2a$, il vient

$$1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a.$$

Pour tout $a \in]0, \frac{\pi}{4}[$, nous en concluons que

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}.$$

Puisque $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$, nous obtenons

$$\sin^2 a = 1 - \frac{1 + \cos 2a}{2} = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

3. En particulier pour $a = \frac{\pi}{12}$, nous avons

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

Puisque $\cos \frac{\pi}{12} > 0$, nous en concluons

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

De la même façon, il vient

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

Puisque $\sin \frac{\pi}{12} > 0$, nous obtenons

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

Exercice 2. Tangente en un point du cercle trigonométrique

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal du plan. On donne sur le cercle trigonométrique le point A repéré par le réel $a \in]-\pi, \pi[$.

1. Montrer qu'une équation de la droite Δ perpendiculaire à la droite (OA) en A est

$$x \cos a + y \sin a = 1.$$

2. Représenter Δ lorsque $a = 0$, $a = \frac{\pi}{2}$, puis $a = \frac{3\pi}{4}$.

3. On suppose que $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection E et F de la droite Δ , avec respectivement, la droite (OI) des abscisses et la droite (OJ) des ordonnées.

Calculer l'aire du triangle OEF en fonction de a .

4. Vérifier l'égalité

$$(\cos a - \sin a)^2 + 2 \cos a \sin a = 1.$$

En déduire que, pour tout $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$, l'aire de ce triangle est supérieure ou égale à 1.

Montrer que cette aire est égale à 1 si et seulement si $a = \frac{\pi}{4}$.

Solution

1. Soit un point $M(x, y)$ de la droite Δ . Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x - \cos a, y - \sin a)$ et $\overrightarrow{OA}(\cos a, \sin a)$ sont orthogonaux. Nous avons

$$M \in \Delta \text{ si et seulement si } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{OA} = 0.$$

Nous en déduisons qu'une équation de la droite Δ est

$$(x - \cos a) \cos a + (y - \sin a) \sin a = 0 \Leftrightarrow x \cos a + y \sin a = \cos^2 a + \sin^2 a.$$

Puisque $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, nous en concluons que la droite Δ a pour équation

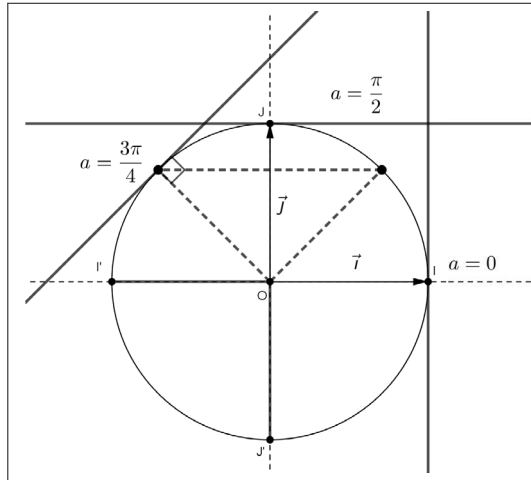
$$x \cos a + y \sin a = 1.$$

2.

Si $a = 0$, alors $\Delta : x = 1$.

Si $a = \frac{\pi}{2}$, alors $\Delta : y = 1$.

Si $a = \frac{3\pi}{4}$, alors Δ a pour équation, $-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = 1$, soit $\Delta : y = x + \sqrt{2}$.



3.

▷ Soit $E(x_E, 0)$ le point d'intersection de Δ avec la droite (OI) . Nous avons

$$x_E \cos a = 1.$$

Puisque $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a, $\cos a > 0$.

Il en résulte que

$$x_E = \frac{1}{\cos a}.$$

Ainsi nous obtenons

$$E\left(\frac{1}{\cos a}, 0\right).$$

▷ Soit $F(0, y_F)$ le point d'intersection de Δ avec la droite (OJ) . Nous avons

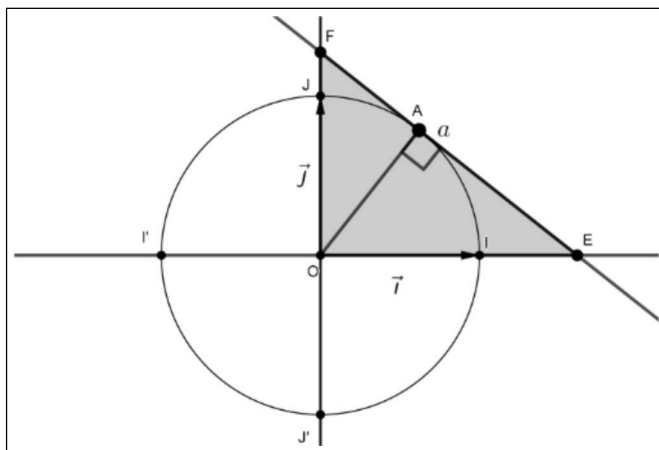
$$y_F \sin a = 1.$$

Puisque $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a, $\sin a > 0$, ce qui donne

$$y_F = \frac{1}{\sin a}.$$

Ainsi, nous obtenons

$$F\left(0, \frac{1}{\sin a}\right).$$



▷ Désignons par \mathcal{A} l'aire du triangle OEF . Nous avons

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times OE \times OF = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos a} \times \frac{1}{\sin a} = \frac{1}{2 \cos a \sin a}.$$

4. Soit $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Nous obtenons

$$(\cos a - \sin a)^2 + 2 \cos a \sin a = \cos^2 a + \sin^2 a - 2 \cos a \sin a + 2 \cos a \sin a = 1.$$

De cette égalité, il résulte que

$$2 \cos a \sin a \leq 1.$$

Puisque $\cos a \sin a > 0$, en utilisant le sens de variation de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, nous en déduisons

$$\frac{1}{2 \cos a \sin a} \geq 1.$$

Nous en concluons

$$\mathcal{A} \geq 1.$$

Si $\mathcal{A} = 1$, alors on a

$$2 \cos a \sin a = 1.$$

L'identité obtenue ci-dessus implique, dans ce cas

$$(\cos a - \sin a)^2 = 0, \text{ soit } \cos a = \sin a.$$

Puisque $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$, nous en déduisons que $a = \frac{\pi}{4}$.

Réciproquement, nous vérifions qu'il suffit que $a = \frac{\pi}{4}$ pour que $\mathcal{A} = 1$.

Nous en concluons que $\mathcal{A} = 1$ si et seulement si $a = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3. Aire d'un triangle

Soit ABC un triangle quelconque.

On pose $AB = c$ et $AC = b$ et $BC = a$.

On désigne, par $\widehat{A} \in]0, \pi[$, une mesure en radians de l'angle \widehat{BAC} .

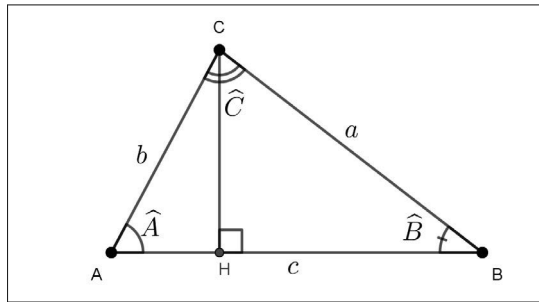
1. Montrer que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{1}{2}bc \sin \widehat{A}$.

2. En déduire la formule des sinus dans un triangle quelconque (voir l'exercice corrigé 4 du chapitre 4).

Solution

1. Nous distinguons deux cas selon que l'angle \widehat{BAC} est aigu ou obtus.

1^{er} cas : $\widehat{A} \in]0, \frac{\pi}{2}[$.



Désignons par \mathcal{A} l'aire de ce triangle. Nous savons que

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}AB \times CH = \frac{1}{2}c \times CH.$$

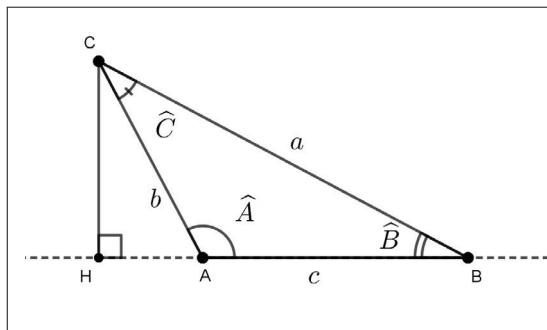
Dans le triangle AHC rectangle en H , nous avons

$$CH = b \sin \widehat{A}.$$

Dans ce cas, nous obtenons l'égalité attendue, soit

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A}.$$

2^e cas : $\widehat{A} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$.



Nous avons, comme dans le 1^{er} cas,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}AB \times CH = \frac{1}{2}c \times CH.$$

Dans le triangle AHC rectangle en H , nous avons

$$CH = b \sin(\pi - \widehat{A}) = b \sin \widehat{A}.$$

Nous obtenons à nouveau l'égalité

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A}.$$

2. Avec les notations des deux figures ci-dessus, nous avons également

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2}ab \sin \widehat{C} = \frac{1}{2}ac \sin \widehat{B}.$$

Il en résulte que

$$bc \sin \widehat{A} = ab \sin \widehat{C} = ac \sin \widehat{B}.$$

En divisant par $abc > 0$ chaque membre des égalités ci-dessus, nous obtenons la formule des sinus dans un triangle quelconque, soit

$$\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c}.$$

Exercice 4. Résolution d'un système

Soit $a \in]-\pi, \pi]$. Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système

$$\begin{cases} x \sin a - y \cos a = 0 \\ x \cos a + y \sin a = 1 \end{cases}.$$

Interpréter géométriquement.

Solution

Soit D le déterminant de ce système. Nous avons

$$D = \begin{vmatrix} \sin a & -\cos a \\ \cos a & \sin a \end{vmatrix} = \sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

Par conséquent, ce système admet une solution unique qui est le couple (x, y) tel que

$$x = \begin{vmatrix} 0 & -\cos a \\ 1 & \sin a \end{vmatrix} = \cos a \text{ et } y = \begin{vmatrix} \sin a & 0 \\ \cos a & 1 \end{vmatrix} = \sin a.$$

Considérons le point $A(\cos a, \sin a)$.

Ce point appartient au cercle trigonométrique.

Le point A est l'intersection de la droite (OA) dont une est équation $x \sin a - y \cos a = 0$, avec la droite d'équation $x \cos a + y \sin a = 1$, qui est la tangente en A à ce cercle (voir l'exercice 2 de ce paragraphe).

Exercice 5. Un défi

Trouver les valeurs exactes de $\cos x$ et $\sin x$, sachant que

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5.$$

Solution

Nous avons $3 \sin x = 5 - 4 \cos x$.

En élevant au carré les deux membres de cette égalité, nous obtenons

$$9 \sin^2 x = (5 - 4 \cos x)^2.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} 9(1 - \cos^2 x) &= 25 - 40 \cos x + 16 \cos^2 x \Leftrightarrow 16 - 40 \cos x + 25 \cos^2 x = 0, \\ &\Leftrightarrow (5 \cos x - 4)^2 = 0. \end{aligned}$$

ce qui implique

$$5 \cos x - 4 = 0.$$

Nous en concluons

$$\cos x = \frac{4}{5} \text{ et } \sin x = \frac{1}{3} \left(5 - 4 \times \frac{4}{5} \right) = \frac{3}{5}.$$

Exercice 6. Lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$

1. Soit x un réel distinct de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Justifier que $\tan(x + \pi) = \tan x$ et $\tan(\pi - x) = -\tan x$.

2. Placer, sur le cercle trigonométrique, le point repéré par le réel $\frac{\pi}{8}$.

La figure est à compléter au fur et à mesure de l'exercice.

3. On donne $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$. Donner les valeurs exactes de $\tan \frac{9\pi}{8}$ et $\tan \frac{7\pi}{8}$.

4. Calculer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

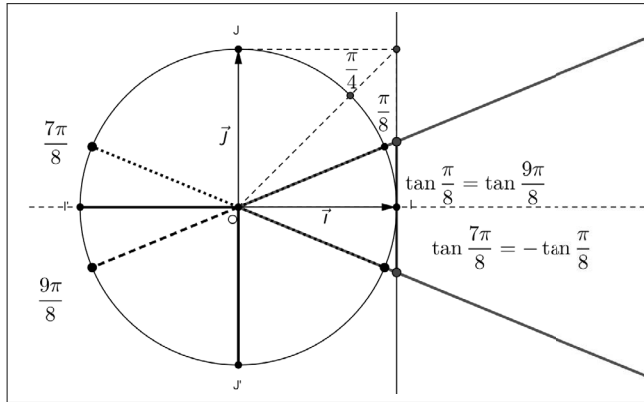
5. En déduire l'égalité $(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Solution

1. Soit x un réel distinct de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Nous avons

$$\begin{aligned}\tan(x + \pi) &= \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x. \\ \tan(\pi - x) &= \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin x}{-\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x.\end{aligned}$$

2.



3. En appliquant les égalités obtenues à la question 1, nous avons

$$\begin{aligned}\tan \frac{9\pi}{8} &= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) = \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1. \\ \tan \frac{7\pi}{8} &= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\tan \frac{\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}.\end{aligned}$$

4. Nous savons que

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{8}} = 1 + \tan^2 \frac{\pi}{8} = 1 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Il en résulte

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2(2 - \sqrt{2})} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

Puisque $\cos \frac{\pi}{8} > 0$, nous obtenons

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Nous en déduisons

$$\sin \frac{\pi}{8} = \tan \frac{\pi}{8} \times \cos \frac{\pi}{8} = \frac{(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

5. Calculons $\sin \frac{\pi}{8}$ d'une autre façon. Nous obtenons

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

Puisque $\sin \frac{\pi}{8} > 0$, nous en déduisons

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Il en résulte

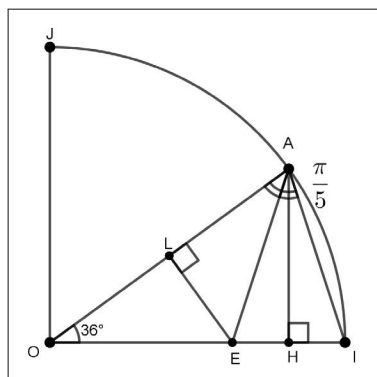
$$\frac{(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2},$$

ce qui justifie l'égalité proposée

$$(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Exercice 7. Lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{5}$

Sur le quart de cercle trigonométrique représenté ci-dessous, le point A est repéré par $\frac{\pi}{5}$ radians, soit $\widehat{IOA} = 36^\circ$. La bissectrice de l'angle \widehat{OAI} coupe le segment $[OI]$ en E .



1. Montrer que les triangles OEA et EAI sont isocèles.
2. Dans le triangle EAI , H est le pied de la hauteur issue de A . Montrer que $HI = 1 - \cos \frac{\pi}{5}$. En déduire que $OE = 2 \cos \frac{\pi}{5} - 1$.
3. Dans le triangle OEA , L est le pied de la hauteur issue de E . Montrer que $OE = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{5}}$.
4. Prouver que $\cos \frac{\pi}{5}$ est une solution de l'équation $4X^2 - 2X - 1 = 0$.
5. En déduire les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{5}$, c'est-à-dire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{5}$, $\sin \frac{\pi}{5}$ et $\tan \frac{\pi}{5}$.

Solution

1. \triangleright Le triangle AOI est isocèle en O . Il en résulte

$$\widehat{OAI} = \widehat{OIA}.$$

De plus nous savons que $\widehat{AOI} = 36^\circ$.

Nous en déduisons

$$180^\circ = 2\widehat{OAI} + 36^\circ \Leftrightarrow \widehat{OAI} = 72^\circ.$$

Puisque (AE) est la bissectrice de l'angle \widehat{OAI} , nous obtenons

$$\widehat{OAE} = 36^\circ = \widehat{AOE},$$

ce qui justifie que le triangle OEA est isocèle en E .

\triangleright Nous en déduisons

$$\widehat{AEI} = 180^\circ - \widehat{OEA} = 180^\circ - (180^\circ - 2\widehat{AOE}) = 2\widehat{AOE} = 72^\circ.$$

De plus nous savons que $\widehat{EIA} = \widehat{OIA} = \widehat{IAO} = 72^\circ$.

Ainsi nous obtenons

$$\widehat{AEI} = \widehat{EIA},$$

ce qui prouve que le triangle EAI est isocèle en A .

2. \triangleright Nous avons

$$HI = OI - OH = 1 - OH.$$

Dans le triangle OHA rectangle en H , nous avons

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{OH}{OA} = \frac{OH}{1} = OH.$$

Par suite, il vient

$$HI = 1 - \cos \frac{\pi}{5}.$$

\triangleright De plus le triangle IAE est isocèle en A , donc le point H est le milieu du segment $[IE]$.

Il en résulte

$$OE = OI - IE = 1 - 2HI = 1 - 2(1 - \cos \frac{\pi}{5}) = 2 \cos \frac{\pi}{5} - 1.$$

3. Le triangle OLE est rectangle en L , donc :

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{OL}{OE}.$$

Puisque le triangle OEA est isocèle en E , le point L est le milieu de $[OA]$.

Nous en déduisons

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\frac{1}{2}}{OE}, \text{ soit } OE = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{5}}.$$

4. Il résulte, des deux expressions de OE , les équivalences suivantes :

$$2 \cos \frac{\pi}{5} - 1 = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{5}} \Leftrightarrow 2 \cos \frac{\pi}{5} (2 \cos \frac{\pi}{5} - 1) = 1 \Leftrightarrow 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 2 \cos \frac{\pi}{5} - 1 = 0.$$

Par conséquent $\cos \frac{\pi}{5}$ est une solution de l'équation

$$4X^2 - 2X - 1 = 0.$$

5. Désignons par (E) cette équation.

En utilisant la mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré, nous obtenons

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow X^2 - \frac{1}{2}X = \frac{1}{4}, \\ (E) &\Leftrightarrow X^2 - 2 \times \frac{1}{4}X + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}, \\ (E) &\Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$X = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} \text{ ou } X = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

En remarquant que $1 < \sqrt{5}$ et $\cos \frac{\pi}{5} > 0$, nous en concluons

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

De plus nous avons

$$\sin^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^2 = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}.$$

Comme $\sin \frac{\pi}{5} > 0$, nous en déduisons

$$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

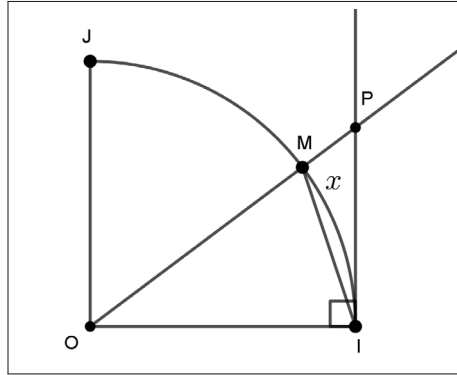
Enfin nous obtenons

$$\tan \frac{\pi}{5} = \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + 1}.$$

Exercice 8. Une double inégalité

Sur le quart de cercle trigonométrique ci-dessous, on donne le point M tel que l'angle \widehat{IOM} ait pour mesure en radians $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Le point P est l'intersection de la demi-droite $[OM)$ avec la tangente en I .



1. Par des considérations d'aires, justifier que

$$\sin x < x < \tan x.$$

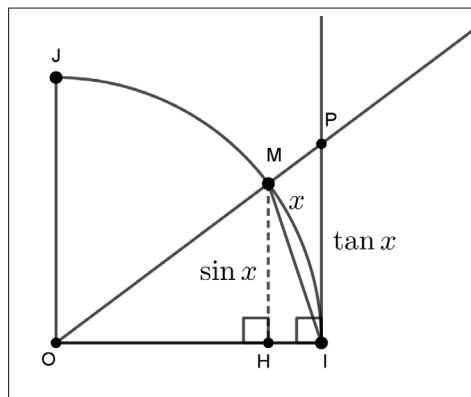
2. En déduire que, pour tout réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, nous disposons de la double inégalité

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

3. Expliquez pourquoi cette double inégalité reste vraie lorsque $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$?

Solution

1. L'aire du triangle OIM est inférieure strictement à l'aire du secteur angulaire limité par l'arc \widehat{IM} . Cette aire est elle-même inférieure à l'aire du triangle OIP rectangle en I .



Avec les notations de la figure, nous obtenons

$$\frac{OI \times MH}{2} < \frac{OI^2 \times x}{2} < \frac{OI \times IP}{2}.$$

Sachant que $OI = 1$, nous en déduisons

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}.$$

Nous en concluons

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \sin x < x < \tan x.$$

2. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Nous avons

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$

En divisant chaque membre de cette double inégalité par $\sin x > 0$, pour tout réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, nous en concluons

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

3. Si $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, alors $-x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Ainsi nous pouvons appliquer la double inégalité ci-dessus en remplaçant x par $-x$, ce qui donne

$$1 < \frac{-x}{\sin(-x)} < \frac{1}{\cos(-x)}.$$

La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.

Nous en déduisons

$$1 < \frac{-x}{-\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, nous obtenons à nouveau

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Remarque.

Cette double inégalité permettra en classe de Première ou de Terminale de préciser le comportement de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, pour x proche de 0.

Exercice 9. Une formule de trigonométrie

Quel est l'ensemble D des réels x tel que le réel $1 + \frac{1}{\tan^2 x}$ soit défini ?

Pour $x \in D$, justifier que $1 + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Solution

Le réel $1 + \frac{1}{\tan^2 x}$ est défini si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\tan x \neq 0$.

Or nous avons

$$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Nous en déduisons que $x \in D$ si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Nous en concluons

$$D = \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pour tout réel $x \in D$, nous avons

$$1 + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Exercice 10. Calculs d'angles dans un cube

On donne le cube $ABCDEFGH$ d'arête $a > 0$. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[EG]$.

1. En admettant que les droites (EG) et (EA) sont perpendiculaires en E , quelle est la nature du triangle AIJ ?

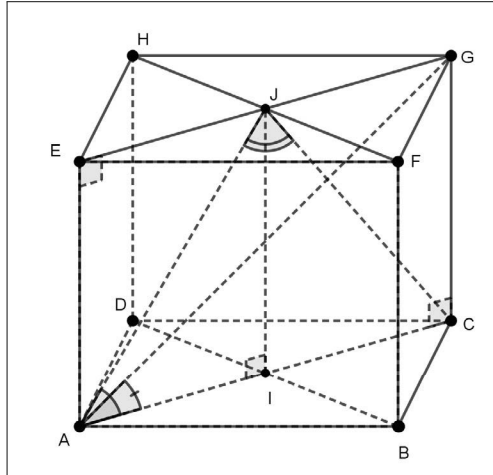
2. En déduire que \widehat{CAJ} ne dépend pas du réel $a > 0$.

3. Donner une mesure en degré de l'angle \widehat{CAJ} , arrondi au dixième de degré.

En déduire une mesure en degré de l'angle \widehat{AJC} , arrondi au dixième de degré.

4. Déterminer une mesure en degré de l'angle \widehat{CAG} , arrondi au dixième de degré.

Solution



1. Dans ce cube, le quadrilatère $AEJI$ est un parallélogramme qui a un angle droit, c'est donc un rectangle.

Il en résulte que le triangle AIJ est rectangle en I .

2. Dans ce triangle rectangle, nous avons

$$\cos \widehat{CAJ} = \cos \widehat{IAJ} = \frac{AI}{AJ}.$$

Or $[AC]$, de milieu I , est une diagonale du carré $ABCD$, donc

$$AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

De plus, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AIJ , nous obtenons

$$AJ^2 = AI^2 + IJ^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{3a^2}{2}.$$

Nous en déduisons

$$AJ = a \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Finalement nous obtenons

$$\cos \widehat{CAJ} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Nous en concluons que le réel $\cos \widehat{CAJ}$ ne dépend pas du réel $a > 0$.

3. En utilisant une calculatrice, nous obtenons :

$$\widehat{CAJ} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 54,7^\circ.$$

Le triangle AJC est isocèle en J . Nous en déduisons

$$\widehat{AJC} = 180^\circ - 2\widehat{CAJ} \approx 180^\circ - 2 \times 54,7^\circ \approx 70,6^\circ.$$

4. Le quadrilatère $ACGE$ est un parallélogramme qui a un angle droit, c'est donc un rectangle.

Nous en déduisons que le triangle ACG est rectangle en C .

Il en résulte que

$$\cos \widehat{CAG} = \frac{AC}{AG}.$$

Nous avons $AC = a\sqrt{2}$ et en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ACG , nous obtenons

$$AG^2 = AC^2 + CG^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2 = 3a^2,$$

ce qui implique

$$AG = a\sqrt{3}.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\cos \widehat{CAG} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Nous en déduisons

$$\widehat{CAG} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 35,3^\circ.$$

Exercice 11. Résolutions d'équations trigonométriques

Résoudre dans \mathbb{R} les équations qui suivent, puis placer sur le cercle trigonométrique les solutions qui appartiennent à $] -\pi, \pi]$.

- (1) $\sin 3x = 1$.
- (2) $|\sin 3x| = 1$.
- (3) $4 \cos^3 x = \cos x$.
- (4) $2 \cos^2 x = 3 \cos x - 1$.
- (5) $2 \cos x \sin x - 2 \cos x + \sin x = 1$.

Solution

- Équation (1)

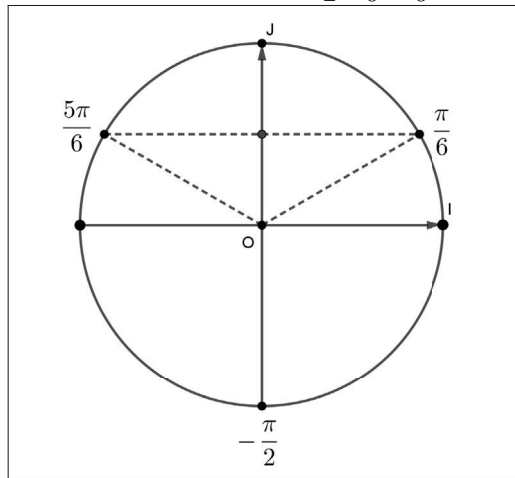
$$(1) \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k(2\pi) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Nous en concluons

$$S_{(1)} = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\left(\frac{2\pi}{3}\right) / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De plus nous obtenons

$$S_{(1)} \cap]-\pi, \pi] = \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}.$$



- Équation (2).

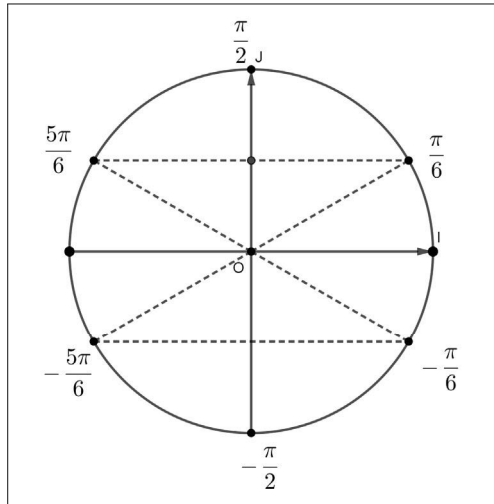
$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \sin 3x = 1 \text{ ou } \sin 3x = -1, \\ (2) &\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k(2\pi) \text{ ou } 3x = -\frac{\pi}{2} + k(2\pi), \\ (2) &\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ (2) &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Nous en concluons

$$S_{(2)} = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\left(\frac{\pi}{3}\right) / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De plus nous obtenons

$$S_{(2)} \cap]-\pi, \pi] = \left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\}.$$



- Équation (3)

$$(3) \Leftrightarrow \cos x(4 \cos^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } \cos^2 x = \frac{1}{4},$$

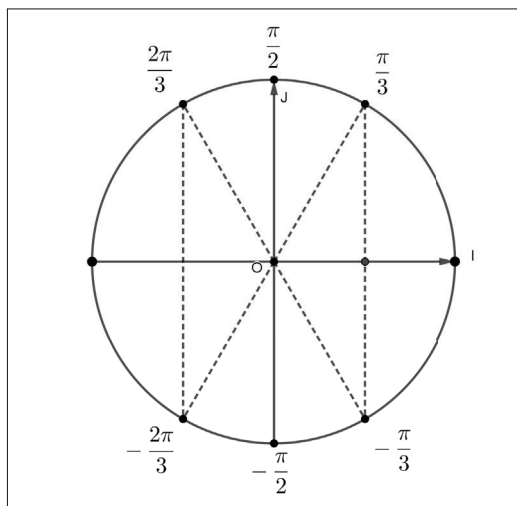
$$(3) \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi les solutions de l'équation (3), sont les réels x tels que

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + k(2\pi) \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + k(2\pi) \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k(2\pi) \text{ ou } \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k(2\pi), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

L'ensemble des solutions dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$ est

$$\left\{ -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right\}.$$



- Équation (4)

$$(4) \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{3}{2} \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Posons $X = \cos x$. Nous sommes ainsi amenés à résoudre l'équation du second degré notée (E), $X^2 - \frac{3}{2}X = -\frac{1}{2}$. Il vient

$$(E) \Leftrightarrow X^2 - 2\left(\frac{3}{4}\right)X + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2},$$

$$(E) \Leftrightarrow \left(X - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16},$$

$$(E) \Leftrightarrow X - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \text{ ou } X - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4},$$

$$(E) \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = \frac{1}{2}.$$

Nous en déduisons

$$(4) \Leftrightarrow \cos x = 1 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2},$$

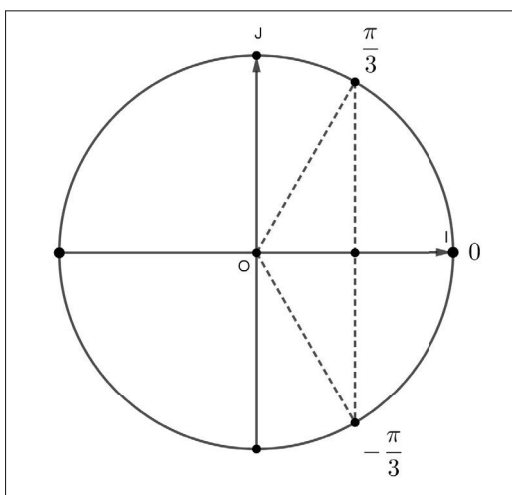
$$(4) \Leftrightarrow x = k(2\pi) \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + k(2\pi) \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + k(2\pi).$$

Nous en concluons

$$S_{(4)} = \{k(2\pi)/k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + k(2\pi)/k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + k(2\pi)/k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$, nous avons

$$S_{(4)} \cap] -\pi, \pi] = \left\{-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}\right\}.$$



• Équation (5)

$$(5) \Leftrightarrow 2 \cos x (\sin x - 1) + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2 \cos x + 1)(\sin x - 1) = 0,$$

$$(5) \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \sin x = 1.$$

Cela donne

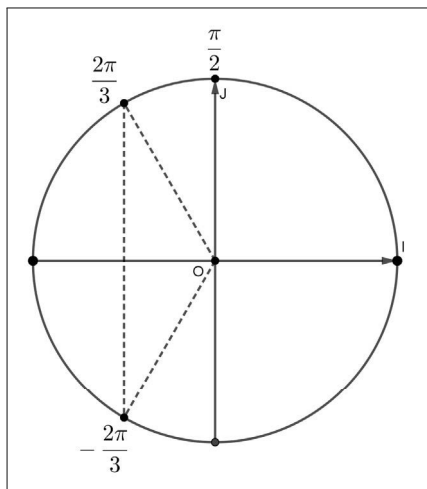
$$(5) \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k(2\pi) \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + k(2\pi) \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k(2\pi).$$

Pour conclure, nous obtenons

$$S_{(5)} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k(2\pi)/k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + k(2\pi)/k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{2\pi}{3} + k(2\pi)/k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nous en déduisons

$$S_{(5)} \cap]-\pi, \pi] = \left\{ -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right\}.$$



Exercice 12. Une inéquation

Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ l'inéquation $\frac{1}{\cos x} < \frac{1}{\sin x}$.

Solution

Un réel $x \in [0, 2\pi[$ est solution de cette inéquation à condition que

$$\cos x \neq 0 \text{ et } \sin x \neq 0.$$

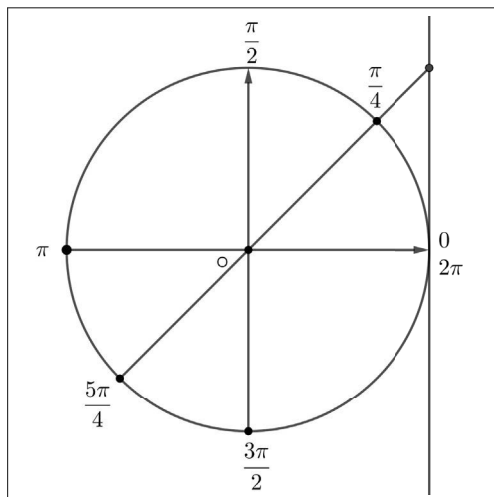
Nous en déduisons que la résolution est autorisée pour les réels x tels que

$$x \neq 0 \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ et } x \neq \pi \text{ et } x \neq \frac{3\pi}{2}.$$

Sous ces conditions, nous obtenons :

$$\frac{1}{\cos x} < \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} \left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1 \right) < 0 \Leftrightarrow \frac{\tan x - 1}{\sin x} < 0.$$

Nous formons le tableau de signes du quotient $\frac{\tan x - 1}{\sin x}$ en utilisant le cercle trigonométrique.



x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π						
$\tan x - 1$	-	0	+		-	-	0	+		-			
$\sin x$	0	+	+	+	0	-	-	-	-	-			
$\frac{\tan x - 1}{\sin x}$		-	0	+		-		+	0	-		+	

Nous en déduisons que l'ensemble S des solutions est

$$S =]0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[\cup]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}[.$$

Exercice 13. Un signal "triangulaire"

Représenter graphiquement la fonction f définie sur \mathbb{R} , 2-périodique telle que

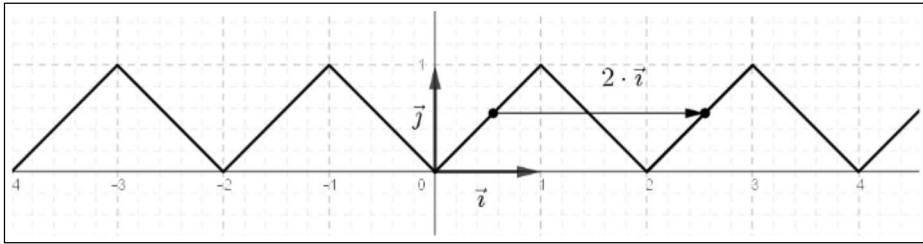
$$\forall x \in [-1, 1], f(x) = |x|.$$

Solution

La fonction f , restreinte à l'intervalle $[-1, 1]$ est paire.

Pour $x \geq 0$, l'action successive de la translation de vecteur $2 \cdot \vec{i}$ restitue la partie de C_f correspondant à $x \geq 0$.

La symétrie par rapport à la droite des ordonnées fournit la courbe C_f , pour tout $x \in \mathbb{R}$.



Exercice 14. Sinus "redressé"

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = |\sin(\pi t)|$.

1. Quelle est la parité de la fonction f ?
2. Justifier que f est 1-périodique.
3. Représenter graphiquement la fonction f .

Solution

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$f(-t) = |\sin(\pi(-t))| = |-\sin(\pi t)| = |\sin(\pi t)| = f(t).$$

Nous en concluons que la fonction f est paire.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Nous avons

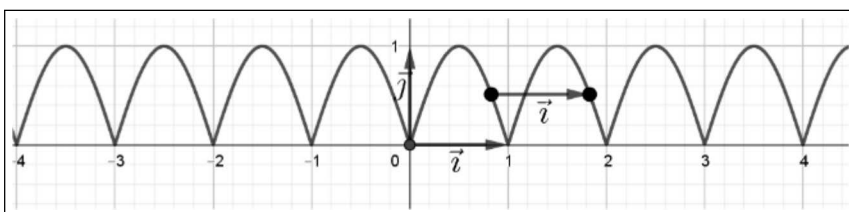
$$f(t+1) = |\sin(\pi(t+1))| = |\sin(\pi t + \pi)| = |-\sin(\pi t)| = |\sin(\pi t)| = f(t),$$

ce qui justifie que f est 1-périodique.

3. Pour représenter graphiquement la fonction f , nous nous intéressons d'abord à la restriction de f sur un intervalle de longueur une période, par exemple sur l'intervalle $[0, 1]$.

Par une translation de vecteur \vec{i} , nous obtenons C_f restreint à \mathbb{R}^+ .

Sur \mathbb{R} , la courbe C_f est obtenue par symétrie par rapport à la droite des ordonnées.



Exercice 15. Étude d'une fonction trigonométrique

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{\cos(2x) + 2}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de cette fonction ?

2. Étudier la parité de la fonction f .

En déduire que sa courbe représentative C_f admet un élément de symétrie.

3. Montrer que f est π -périodique.

4. Expliquez comment représenter graphiquement la fonction f ?

5. Justifier que, pour tout réel x , $\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 2$.

6. Déterminer les coordonnées des points communs à la courbe C_f et à la droite d'équation $y = 2$. Même question avec la droite d'équation $y = \frac{3}{2}$.

7. Soit a un réel tel que $a \geq 2$. Déterminer une période de la fonction $g : x \mapsto \frac{a}{\cos(ax) + a}$.

Solution

1. La fonction f est définie à condition que $\cos(2x) + 2 \neq 0$.

Pour tout réel x , cette condition est réalisée car l'équation $\cos(2x) = -2$ n'a pas de solution.

Nous en concluons que $D_f = \mathbb{R}$.

2. Pour tout réel x , puisque la fonction $x \mapsto \cos x$ est paire, nous avons

$$f(-x) = \frac{2}{\cos(-2x) + 2} = \frac{2}{\cos(2x) + 2} = f(x).$$

La fonction f est paire.

Nous en déduisons que la droite des ordonnées est un axe de symétrie pour la courbe C_f .

3. Puisque $x \mapsto \cos x$ est 2π périodique, nous obtenons

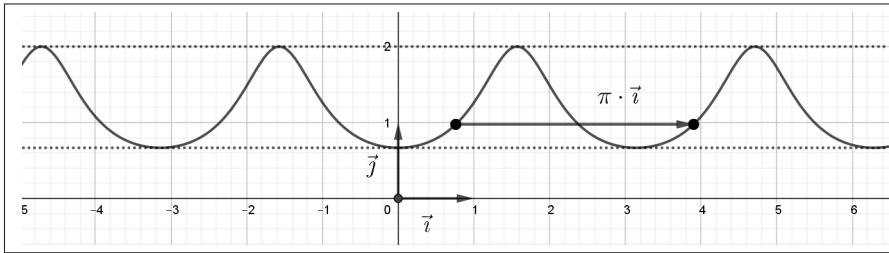
$$f(x + \pi) = \frac{2}{\cos(2(x + \pi)) + 2} = \frac{2}{\cos(2x + 2\pi) + 2} = \frac{2}{\cos(2x) + 2} = f(x),$$

ce qui justifie que f est π -périodique.

4. Pour représenter graphiquement la fonction f , nous nous intéressons d'abord à la restriction de f sur un intervalle de longueur une période, par exemple sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Par une translation de vecteur $\pi \cdot \vec{i}$, nous obtenons C_f restreint à \mathbb{R}^+ .

Enfin sur \mathbb{R} , la courbe C_f est obtenue par symétrie par rapport à la droite des ordonnées.



5. Soit x un réel quelconque. Nous savons que

$$-1 \leq \cos(2x) \leq 1, \text{ ce qui implique } 1 \leq \cos(2x) + 2 \leq 3.$$

La fonction inverse est décroissante strictement sur $]0, +\infty[$. Il en résulte

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{\cos(2x) + 2} \leq 1.$$

Nous en concluons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{2}{3} \leq f(x) \leq 2.$$

6. Les abscisses des points communs à la courbe C_f et à la droite d'équation $y = 2$ sont les solutions de l'équation $f(x) = 2$. Ainsi nous avons

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\cos(2x) + 2} = 2 \Leftrightarrow 2(\cos(2x) + 2) = 2 \Leftrightarrow \cos 2x = -1,$$

soit

$$\cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + k(2\pi) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Nous en concluons que les points communs à la courbe C_f et à la droite d'équation $y = 2$ ont pour coordonnées $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 2)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

De la même façon, les abscisses des points communs à la courbe C_f et à la droite d'équation $y = \frac{2}{3}$ sont les solutions de l'équation $f(x) = \frac{2}{3}$. Il vient

$$f(x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{\cos(2x) + 2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2(\cos(2x) + 2) = 6 \Leftrightarrow \cos 2x = 1,$$

soit

$$\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k(2\pi) \Leftrightarrow x = k\pi.$$

Nous en concluons que les points communs à la courbe C_f et à la droite d'équation $y = \frac{2}{3}$ ont pour coordonnées $(k\pi, \frac{2}{3})$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque

Nous observons sur la figure ci-dessus que les droites d'équations $y = 2$ et $y = \frac{2}{3}$ sont tangentes à la courbe C_f en une infinité de points.

7. Par analogie avec la question 3, pour tout réel x , nous avons :

$$g\left(x + \frac{2\pi}{a}\right) = \frac{a}{\cos\left(a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right)\right) + a} = \frac{a}{\cos(ax + 2\pi) + a} = \frac{a}{\cos(ax) + a} = g(x).$$

Nous en concluons que la fonction g est $\frac{2\pi}{a}$ -périodique.

Exercice 16. Étude d'une fonction trigonométrique

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{1 + |\sin x|}$?
2. Quelle est la parité de la fonction f ?
3. Justifier que f est π -périodique.
4. Montrer que, pour tout réel x , $1 \leq f(x) \leq 2$.
5. Observer, à l'aide de votre calculatrice ou de Geogebra, la représentation graphique de cette fonction.

Solution

1. La fonction f est définie si et seulement si $1 + |\sin x| \neq 0$.

Puisque pour tout réel x , $|\sin x| \geq 0$, nous en déduisons

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + |\sin x| > 0.$$

Il en résulte que $D_f = \mathbb{R}$.

2. Pour tout réel x , il vient

$$f(-x) = \frac{2}{1 + |\sin(-x)|} = \frac{2}{1 + |-\sin x|} = \frac{2}{1 + |\sin x|} = f(x).$$

Ainsi la fonction f est paire.

3. Pour tout réel x , nous avons

$$f(x + \pi) = \frac{2}{1 + |\sin(x + \pi)|} = \frac{2}{1 + |-\sin x|} = \frac{2}{1 + |\sin x|} = f(x),$$

ce qui signifie que la fonction f est π -périodique.

4. Soit x un réel.

Nous savons que $|\sin x| \leq 1$, ce qui implique

$$0 < 1 + |\sin x| \leq 2.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Il en résulte

$$\frac{1}{1 + |\sin x|} \geq \frac{1}{2}.$$

Nous obtenons que $f(x) \geq 1$.

Pour justifier que $f(x) \leq 2$, nous calculons $2 - f(x)$.

Il vient :

$$2 - f(x) = 2 - \frac{2}{1 + |\sin x|} = 2\left(1 - \frac{1}{1 + |\sin x|}\right) = 2 \frac{|\sin x|}{1 + |\sin x|}.$$

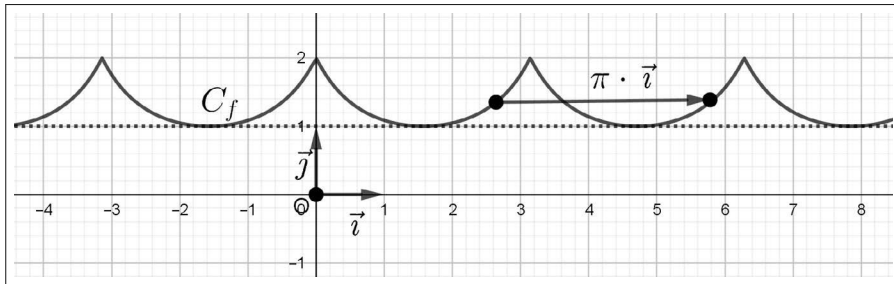
Nous en déduisons

$$2 - f(x) \geq 0, \text{ soit } f(x) \leq 2.$$

Nous en concluons

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 \leq f(x) \leq 2.$$

5.

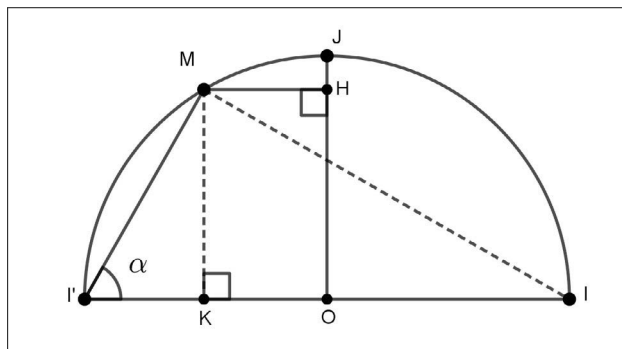


Nous observons que connaissant C_f sur l'intervalle $[0, \pi]$, nous en déduisons la courbe C_f sur $[0, +\infty[$ par la translation de vecteur $\pi \cdot \vec{i}$.

Par symétrie par rapport à la droite des ordonnées, nous obtenons la courbe C_f sur $D_f = \mathbb{R}$.

Exercice 17. Style premier Bac des années 1950

On considère le demi-cercle de rayon 1 représenté ci-dessous.



Avec les données de la figure, nous supposons que $M \in \widehat{I'J}$ et $M \neq I'$.

1. Déterminer $\cos \alpha$ tel que $I'M = MH$.

En déduire dans ce cas une valeur approchée de la mesure α de l'angle $\widehat{O'PM}$.

2. Déterminer α tel que $I'K + I'M = \frac{3}{2}$.

Solution

1. Dans le triangle IMI' rectangle en M , nous avons

$$I'M = II' \cos \alpha = 2 \cos \alpha.$$

De plus il vient

$$MH = OK = OI' - I'K = 1 - I'K.$$

Dans le triangle $I'KM$ rectangle en K , nous avons

$$I'K = I'M \cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha.$$

Il en résulte

$$MH = 1 - 2 \cos^2 \alpha.$$

Nous en déduisons

$$I'M = MH \Leftrightarrow 2 \cos \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha.$$

En posant $X = \cos \alpha$, nous sommes amenés à résoudre l'équation du second degré, notée (1)

$$2X^2 + 2X - 1 = 0.$$

Il vient

$$(1) \Leftrightarrow X^2 + X = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4},$$
$$(1) \Leftrightarrow X + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } X + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow X = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } X = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Nous observons que $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc

$$0 < \cos \alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par conséquent la solution, $\cos \alpha = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, n'est pas retenue.

De plus on a

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0.$$

Il reste à vérifier que $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour cela, nous avons :

$$(\sqrt{3} - 1)^2 - (\sqrt{2})^2 = 2(1 - \sqrt{3}) < 0.$$

Il en résulte

$$0 < -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nous en concluons que $\cos \alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ est l'unique valeur qui réalise l'égalité $I'M = MH$.

▷ Votre calculatrice restitue une valeur approchée de α .

Nous obtenons

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 1,19 \text{ radians, soit } \alpha \approx 68,5^\circ.$$

2. Nous savons que

$$I'M = 2 \cos \alpha \text{ et } I'K = 2 \cos^2 \alpha.$$

Nous obtenons

$$I'K + I'M = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha = \frac{3}{2}.$$

En posant $X = \cos \alpha$, nous sommes amenés à résoudre l'équation du second degré, notée (2)

$$2X^2 + 2X - \frac{3}{2} = 0.$$

Cela donne

$$(2) \Leftrightarrow X^2 + X = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 = 1,$$

$$(2) \Leftrightarrow X + \frac{1}{2} = 1 \text{ ou } X + \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow X = \frac{1}{2} \text{ ou } X = -\frac{3}{2}.$$

Nous savons que $0 < \cos \alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Par suite, la solution $\cos \alpha = -\frac{3}{2}$ est exclue.

Par conséquent la solution $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ est la seule qui convient.

Nous en concluons

$$I'K + I'M = \frac{3}{2} \text{ si et seulement si } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Exercice 18. Étude d'une fonction ALGO

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{x}{2}.$$

La représentation graphique de cette fonction est désignée par \mathcal{C}_f .

1. Quelle est la parité de la fonction f ?
2. Justifier que, pour tout réel x , $f(x+4) = f(x) - 2$.

En déduire qu'il existe une translation t qui laisse globalement invariante la courbe \mathcal{C}_f , c'est-à-dire prouver que,

$$\text{quel que soit le point } M \in \mathcal{C}_f, M' = t(M) \in \mathcal{C}_f.$$

En représentant graphiquement cette fonction, à l'aide de GeoGebra par exemple, contrôler ce résultat.

3. Montrer que, quel que soit le réel x ,

$$-(1 + \frac{x}{2}) \leq f(x) \leq 1 - \frac{x}{2}.$$

Interpréter géométriquement cet encadrement.

4. Graphiquement, justifier que l'équation

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = x,$$

admet une unique solution $x_0 > 0$.

Que peut-on dire du réel $-x_0$?

En utilisant l'algorithme de dichotomie, déterminer une valeur arrondie de x_0 à 10^{-3} près.

Solution

1. Pour tout réel x , nous avons

$$f(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(-x)\right) - \frac{(-x)}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{x}{2} = -f(x),$$

ce qui établit que la fonction f est impaire.

2. \triangleright Pour tout réel x , sachant que la fonction \sin est 2π -périodique, nous obtenons

$$\begin{aligned} f(x+4) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+4)\right) - \frac{x+4}{2}, \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}x + 2\pi\right) - \frac{x}{2} - 2, \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{x}{2} - 2, \\ &= f(x) - 2. \end{aligned}$$

▷ Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, nous considérons la translation t de vecteur $\vec{u} = 4 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j}$.

Cette translation associe à chaque point $M(x, y)$ du plan un unique point $M'(x', y')$ tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} = 4 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 4 \\ y' - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y - 2 \end{cases}.$$

Par conséquent, si $M(x, y) \in \mathcal{C}_f$, alors $y = f(x)$, ce qui implique que les coordonnées (x', y') du point $M' = t(M)$ satisfont à l'équation

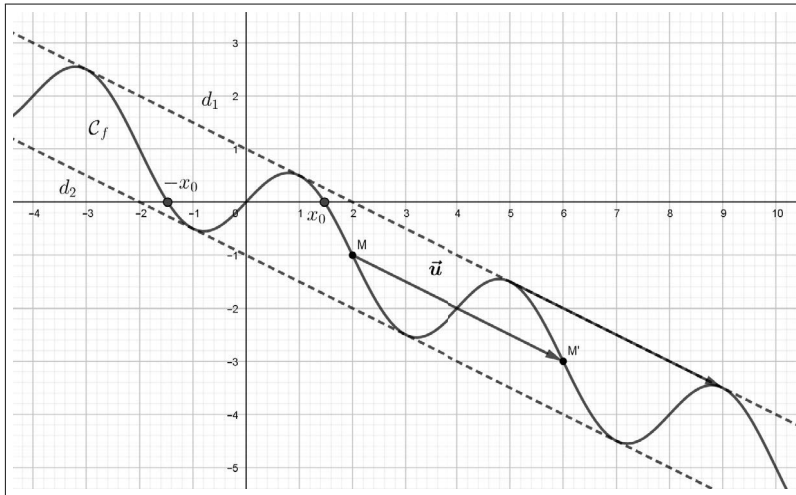
$$y' = f(x) - 2 = f(x + 4) = f(x').$$

Ainsi, pour tout point M , nous avons établi que

$$\text{si } M \in \mathcal{C}_f, \text{ alors } M' = t(M) \in \mathcal{C}_f.$$

Nous en concluons que la courbe \mathcal{C}_f est globalement invariante par la translation de vecteur $\vec{u} = 4 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j}$.

▷ Contrôle graphique.



3. ▷ Soit un réel x .

D'une part, puisque $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq 1$, nous avons

$$f(x) + \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1 \geq 0,$$

ce qui justifie l'inégalité

$$-(1 + \frac{x}{2}) \leq f(x).$$

D'autre part, puisque $-1 \leq \sin(\frac{\pi}{2}x) \leq 1$, nous obtenons

$$(1 - \frac{x}{2}) - f(x) = 1 - \frac{x}{2} - \sin(\frac{\pi}{2}x) + \frac{x}{2} = 1 - \sin(\frac{\pi}{2}x) \geq 0,$$

ce qui justifie la seconde inégalité

$$f(x) \leq 1 - \frac{x}{2}.$$

Nous en concluons

$$\forall x \in \mathbb{R}, -(1 + \frac{x}{2}) \leq f(x) \leq 1 - \frac{x}{2}.$$

▷ En considérant les deux droites parallèles d_1 et d_2 d'équations respectives

$$y = -(1 + \frac{x}{2}) \text{ et } y = 1 - \frac{x}{2},$$

nous observons que la courbe \mathcal{C}_f est incluse dans la bande de plan limitée par ces deux droites.

4. ▷ L'équation proposée est équivalente à

$$\sin(\frac{\pi}{2}x) - \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Nous en déduisons graphiquement que cette équation admet une unique solution $x_0 \in [1, 2]$.

▷ Puisque f est impaire, il vient

$$f(-x_0) = -f(x_0) = 0,$$

ce qui justifie que $-x_0$ est également une solution de l'équation proposée.

▷ Nous utilisons la fonction Python `dicho (f, a, b, p)`

```
from math import *
def f(x) :
    return sin((pi/2)*x)-x/2
def dicho(f, a, b, p):
    while b-a>10**(-p):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return (b)
```

Nous obtenons

```
>>> dico(f, 1, 2, 3)
```

```
1.4736328125.
```

Nous en concluons qu'une valeur arrondie de x_0 à 10^{-3} près est 1,474.

Probabilités

La notion de probabilité apparaît dans la deuxième moitié du XVII^e siècle lors de la correspondance entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal au sujet de jeux de hasard. Ces derniers constituent d'ailleurs des problèmes historiques. Nous en aborderons quelques-uns dans la partie "Exercices corrigés" de ce chapitre. Jusqu'à la fin du XIX^e siècle, le calcul de probabilités concernait uniquement une quantification du hasard liée à des expériences aléatoires dont le nombre d'issues est fini. La description de situations aléatoires dont l'ensemble des issues est infini a conduit à la naissance de la théorie des probabilités.

C'est le mathématicien russe Kolmogorov qui, au début du XX^e siècle, en utilisant la théorie naissante des ensembles, proposa une axiomatique qui est le fondement de l'étude théorique des probabilités. De nos jours c'est une branche très importante et féconde des mathématiques contemporaines.

Dans ce chapitre nous étudions diverses situations aléatoires dont les issues sont en nombres finis. Nous proposons aussi une première utilisation du vocabulaire ensembliste qui autorise une plus grande rigueur dans la manipulation de la notion d'événements aléatoires et du calcul de leurs probabilités.

11.1 Loi de probabilité - Probabilité d'un événement

11.1.1 Expérience aléatoire

Définition. Une expérience est aléatoire lorsqu'elle a plusieurs issues possibles non prévisibles.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ est l'ensemble des issues possibles.

Exemples. Nous en proposons deux.

- Un pièce de monnaie est lancée. L'ensemble des issues possibles est $\Omega = \{Pile, Face\}$, est $\Omega = \{P, F\}$.

- On jette un dé ayant six faces numérotées de 1 à 6. L'ensemble des issues possibles est noté aussi $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Nous simulons le jet de ce dé cubique n fois de suite en utilisant la fonction Python `decub(n)` qui suit.

```
from random import *
def decub(n) :
    L=[]
    for i in range(1,n+1):
        d=randint(1,6)
        L.append(d)
    return L
```

Par exemple, nous simulons vingt jets de ce dé, ce qui donne

```
>>> decub(20)
```

```
[5, 3, 6, 5, 3, 6, 5, 5, 4, 5, 5, 5, 2, 1, 1, 6, 5, 5, 1, 5].
```

Définition. Le nombre d'éléments d'un ensemble fini Ω est le cardinal de Ω , noté $\text{card}(\Omega)$.

11.1.2 Loi de probabilité

Définition. Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un ensemble d'issues possibles. Définir une loi de probabilité sur Ω , c'est associer à chaque issue ω_i un réel $p_i \in [0, 1]$, avec $1 \leq i \leq n$, telle que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Le réel p_i est la probabilité de l'issue ω_i .

Exemples. Nous en proposons trois.

- Jet d'un dé cubique équilibré. Nous savons que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

La probabilité de chaque issue est $\frac{1}{6}$.

La loi de probabilité de cette expérience aléatoire est résumée par le tableau suivant :

issues	1	2	3	4	5	6
probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Jet d'une pièce équilibrée. Nous savons que $\Omega = \{P, F\}$.

La probabilité de chaque issue est $\frac{1}{2}$.

La loi de probabilité de cette expérience aléatoire est résumée par le tableau suivant :

issues	P	F
probabilités	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- Jet d'une pièce non équilibrée.

L'ensemble des issues possibles est à nouveau $\Omega = \{P, F\}$.

La loi de probabilité de cette expérience aléatoire est résumée par le tableau suivant :

issues	P	F
probabilités	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Remarque. Pour une expérience aléatoire donnée, la loi de probabilité n'est pas unique. Sur un ensemble Ω d'issues possibles, on peut définir une infinité de lois de probabilité.

Définition (loi uniforme ou équirépartie). Soient $n \geq 2$ un entier naturel et Ω un ensemble ayant n issues possibles.

Une loi de probabilité est **équirépartie ou uniforme** sur Ω si et seulement si chaque issue possible a une probabilité égale à $\frac{1}{n}$.

Algorithme. Simulation d'une loi uniforme.

Nous simulons n lancers d'un dé tétraédrique et la fréquence d'apparition de la face 1

Pour cela, nous définissons la fonction Python `def simulationdetra(n)`.

```

from random import *
def simulationdetra(n) :
    s=0
    for i in range(1, n+1):
        d=randint(1, 4)
        if d==1:
            s=s+1
        f=s/n
    return f

```

Nous obtenons en prenant l'entier n suffisamment grand,

```

>>> simulationdetra(1000)
0.246.

```

Ceci corrobore la valeur théorique de 0,25 qui est la probabilité uniforme d'obtenir l'as dans cette expérience aléatoire.

11.1.3 Probabilité d'un événement

Définition (d'un événement). Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.

On appelle événement A toute partie de Ω , (ou sous ensemble de Ω).

On note $A \subset \Omega$, (lire A est inclus dans Ω).

Vocabulaire - Événements particuliers.

- Soit a une issue appartenant à A : on dit que l'issue a réalise A . On note $a \in A$.
- Un événement réduit à une seule issue (par exemple l'issue ω_1) est noté $\{\omega_1\}$.
- Un événement qu'aucune issue ne réalise est l'événement impossible, noté \emptyset , (ensemble vide).
- Ω est l'événement certain : toutes les issues le réalisent.

Définition (de la probabilité d'un événement). Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ l'ensemble des issues possibles sur lequel est définie une loi de probabilité. Pour tout événement $A \subset \Omega$, la probabilité de A , notée $P(A)$, est la somme des probabilités des issues réalisant A .

Exemple. Jet d'un dé cubique équilibré ou non.

Un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est jeté. Nous nous intéressons à la probabilité de l'événement A : "obtenir un numéro pair" ?

L'événement A est réalisé par les issues 2, 4, 6.

▷ Le dé est équilibré, nous obtenons

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

▷ Le dé est non équilibré (truqué). Sa loi de probabilité est donnée par le tableau

issues	1	2	3	4	5	6
probabilités	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

Nous en déduisons

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}.$$

Remarques. Nous en faisons trois.

- Avec les notations ci-dessus, si $A = \{\omega_i\}$, on a $P(\{\omega_i\}) = p_i$.
- Il résulte de la définition ci-dessus que

$$P(\Omega) = 1 \text{ et } P(\emptyset) = 0.$$

- Pour tout événement A , nous admettons et nous retiendrons que

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Proposition (cas d'une loi uniforme). *Soit Ω un ensemble fini d'issues possibles.*

On suppose que la loi sur Ω est uniforme (ou équirépartie).

Pour tout événement A , on a

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre d'issues possibles}}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{card}(\Omega) = n$, ce qui signifie que le nombre d'issues possibles est n .

Soit $m \in \mathbb{N}$ le nombre issues favorables à la réalisation de A .

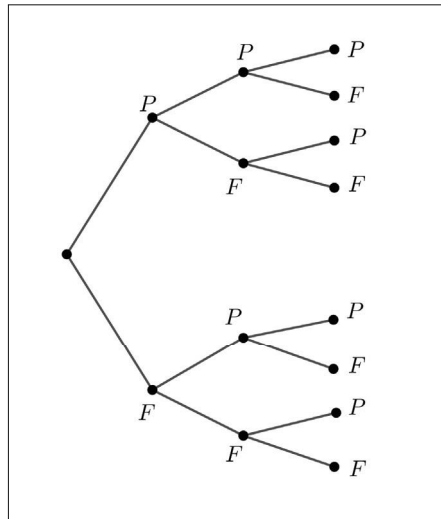
Puisque la loi probabilité est uniforme sur Ω , nous obtenons

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ termes}} = m \times \frac{1}{n} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Exemple. Probabilité d'un événement à l'aide d'un arbre.

Une pièce équilibrée est lancée trois fois de suite. Nous observons une issue possible sous la forme d'une suite ordonnée de Pile ou Face, notée par exemple PPF .

- À l'aide de l'arbre qui suit, nous décrivons l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire et nous en déduisons le nombre de ces issues.



L'ensemble des chemins de cet arbre constitue l'ensemble Ω des issues possibles.

Ainsi nous dénombrons 8 issues possibles.

- Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq 3$. Nous désignons par A_k l'événement "obtenir k Piles exactement lors de ces trois lancers".

Pour $0 \leq k \leq 3$, nous déterminons les probabilités $P(A_k)$.

▷ Seule l'issue FFF est favorable à la réalisation de l'événement A_0 . Il en résulte que

$$P(A_0) = \frac{\text{card}(A_0)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{8}.$$

▷ Nous avons $A_1 = \{PFF, FPF, FFP\}$. Nous obtenons

$$P(A_1) = \frac{\text{card}(A_1)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{8}.$$

▷ Nous avons $A_2 = \{PPF, PFP, FPP\}$, ce qui donne :

$$P(A_2) = \frac{\text{card}(A_2)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{8}.$$

▷ Pour finir, seule l'issue PPP est favorable à la réalisation de l'événement A_3 . Il en résulte

$$P(A_3) = \frac{\text{card}(A_3)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{8}.$$

▷ Nous vérifions

$$P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

11.2 Calculs de probabilités

Dans ce paragraphe $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ est un ensemble dont les éléments sont les issues possibles d'une expérience aléatoire sur lequel on a défini une loi de probabilité.

11.2.1 Événements et opérations ensemblistes

Définition. Soient A et B deux événements inclus dans Ω .

- L'événement $A \cap B$ est l'ensemble des issues favorables à la réalisation de A et B .
- L'événement $A \cup B$ est l'ensemble des issues favorables à la réalisation de A ou B .
- L'événement contraire \bar{A} est l'ensemble des issues non favorables à la réalisation de A .
- Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que les événements A et B sont incompatibles.

Exemple. Votre calculatrice peut générer des nombres entiers aléatoires compris en 1 et 10. On considère les événements suivants :

A : "le nombre affiché est pair",

B : " le nombre affiché est inférieur strictement à 5".

Nous obtenons immédiatement

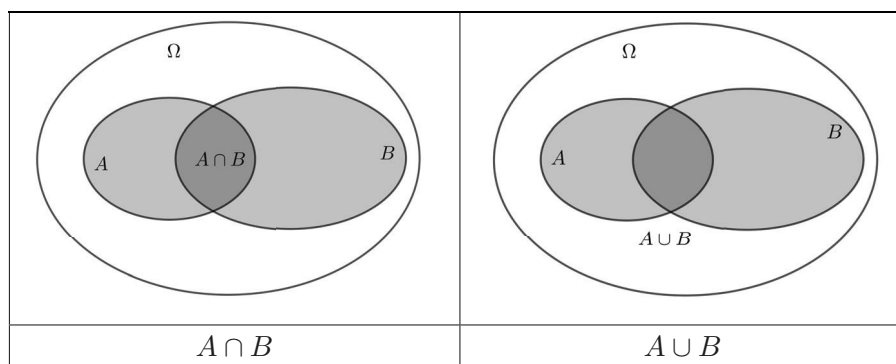
$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \text{ et } B = \{1, 2, 3, 4\},$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 A \cap B &= \{2, 4\}, \\
 A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}, \\
 \bar{A} &= \{1, 3, 5, 7, 9\} \text{ et } \bar{B} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \\
 \bar{A} \cap \bar{B} &= \{5, 7, 9\}, \\
 \overline{A \cup B} &= \{5, 7, 9\}.
 \end{aligned}$$

Remarques. • Nous en faisons deux.

Nous pouvons représenter les événements $A \cap B$ et $A \cup B$ par les diagrammes ci-dessous, appelés diagramme de Venn¹ :



• Le "ou" est inclusif ce qui signifie que $A \cup B$ est réalisé si et seulement si A est réalisé ou B ou $A \cap B$.

Le "ou" exclusif est celui du raisonnement par disjonction².

11.2.2 Propriétés d'une probabilité

Proposition (propriété d'additivité). *Soient A et B deux événements incompatibles (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$). Nous disposons de l'égalité*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Démonstration. $P(A \cup B)$ est la somme des probabilités des issues favorables à la réalisation de A ou de B sachant que A et B ne contiennent pas d'issues favorables à leurs réalisations simultanées d'où l'additivité de leur probabilité respective.

Exemple. Dans l'exemple précédent, nous considérons les événements suivants :

1. Mathématicien et logicien britannique : 1834-1923
2. Annexe § 5.4

E : " le nombre affiché est divisible par 5 ",

F : " le nombre affiché est divisible par 3".

Nous obtenons

$$E = \{5, 10\}, F = \{3, 6, 9\}.$$

Il en résulte que

$$E \cap F = \emptyset \text{ et } E \cup F = \{3, 5, 6, 9, 10\}.$$

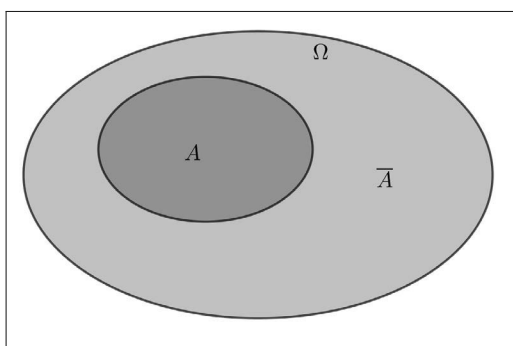
Nous vérifions que

$$P(E \cup F) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \text{ et } P(E) + P(F) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}.$$

Proposition (probabilité d'un événement contraire). *Pour tout événement A inclus dans Ω , nous avons*

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Démonstration. Soit $A \subset \Omega$.



Nous avons, $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$.

En utilisant la propriété d'additivité, nous obtenons

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

Nous en déduisons

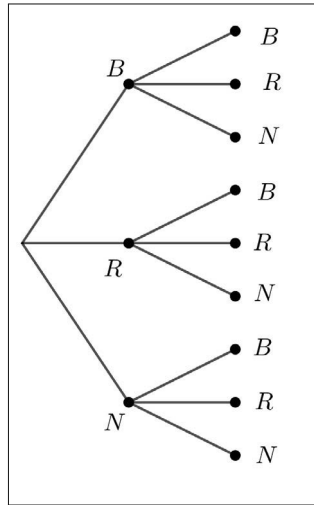
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Exemple. Tirages avec remise.

Une urne contient trois boules : une noire, une blanche et une rouge.

Un joueur prélève dans cette urne, au hasard, successivement et avec remise, deux boules.

Nous décrivons cette expérience aléatoire par l'arbre suivant :



Nous dénombrons 9 tirages possibles de deux boules qui sont successifs et sans remise.

▷ Nous déterminons la probabilité que les deux boules soient de la même couleur.

Désignons par C l'événement : "obtenir deux boules de la même couleur".

Il y a 3 issues favorables à la réalisation de C . Il en résulte

$$P(C) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

▷ Nous en déduisons la probabilité que les deux boules soient de couleurs différentes.

\bar{C} est l'événement : "obtenir deux boules de couleurs différentes", ce qui donne

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = \frac{2}{3}.$$

Remarques. Nous en faisons deux.

- Lors de cette expérience aléatoire, le second tirage ne dépend pas du premier.

- Nous observons que la probabilité de chaque issue possible est égale à

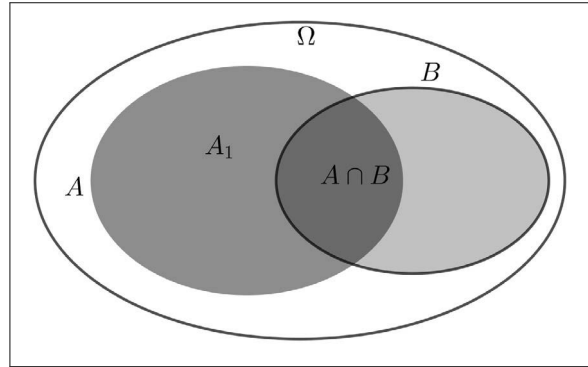
$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}.$$

Proposition (calcul de $P(A \cup B)$, lorsque $A \cap B \neq \emptyset$). Soient A et B deux événements quelconques, nous disposons de l'égalité

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Démonstration. Nous supposons que $A \cap B \neq \emptyset$.

Soit A_1 l'événement dont les issues sont favorables à la réalisation de A sans être favorables à la réalisation de $A \cap B$ comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Nous avons, d'une part,

$$A_1 \cap (A \cap B) = \emptyset \text{ et } A_1 \cup (A \cap B) = A.$$

En appliquant la propriété d'additivité, nous obtenons

$$P(A_1) + P(A \cap B) = P(A),$$

ce qui donne

$$P(A_1) = P(A) - P(A \cap B).$$

D'autre part, nous observons que

$$A_1 \cup B = A \cup B, \text{ avec } A_1 \cap B = \emptyset.$$

À nouveau, par additivité, il vient

$$P(A \cup B) = P(A_1 \cup B) = P(A_1) + P(B),$$

ce qui donne

$$P(A_1) = P(A \cup B) - P(B).$$

Des deux expressions de $P(A_1)$, nous déduisons

$$P(A) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(B).$$

Nous en concluons

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Exemple. Un référendum.

Au cours d'un référendum, deux questions étaient posées :

- 65% des personnes ont répondu "oui" à la première question,
- 51% des personnes ont répondu "oui" à la seconde question,
- 46% des personnes ont répondu "oui" aux deux questions.

Nous considérons les deux événements suivants :

A : " une personne a répondu "oui" à la première question ",

B : " une personne a répondu "oui" à la seconde question ".

▷ Nous calculons la probabilité qu'une personne ait répondu "oui" à l'une ou l'autre des deux questions.

Il s'agit de calculer $P(A \cup B)$. Il vient

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,65 + 0,31 - 0,46 = 0,5.$$

Nous en concluons que 50% des personnes ont répondu "oui" à l'une ou l'autre des deux questions.

▷ Nous remarquons que l'événement $\overline{A \cup B}$ est réalisé si et seulement si une personne a répondu "non" aux deux questions.

Il en résulte

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,5.$$

Nous en concluons que 50% des personnes ont répondu "non" aux deux questions.

Remarque. L'observation de l'événement $\overline{A \cup B}$ nous autorise à énoncer les lois de De Morgan³.

Pour tous les événements A et B , nous admettons

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Une preuve des lois de De Morgan est proposée dans l'exercice corrigé 10 de ce chapitre.

3. Mathématicien britannique : 1806-1871

11.3 Exercices corrigés

Exercice 1. Tirage sans remise

Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On prélève au hasard une boule dans l'urne, puis, sans la remettre, on tire une seconde boule. Une issue est donc un couple de numéros distincts.

1. Dénombrer les issues possibles.

2. On désigne par :

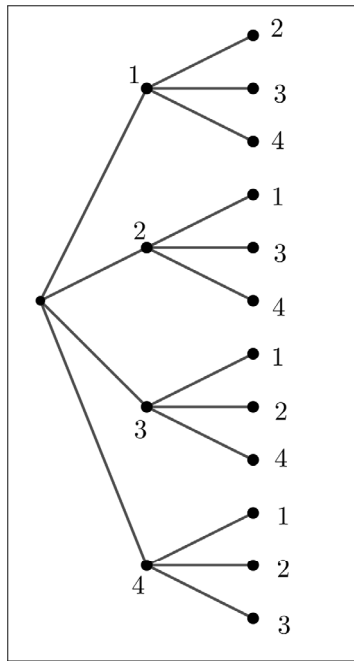
- A l'événement : "le premier numéro est pair et le second impair".
- B l'événement : "le produit des deux numéros est un nombre impair".

Déterminer les probabilités des événements $A \cup B$ et $A \cap \overline{B}$.

En déduire la probabilité de $A \cup \overline{B}$.

Solution

1. Nous décrivons cette expérience aléatoire par l'arbre suivant :



Ainsi nous comptons 12 issues possibles.

2. \triangleright Par une lecture des branches de l'arbre, nous obtenons

$$A = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3)\},$$

$$B = \{(1, 3), (3, 1)\}.$$

Puisque $A \cap B = \emptyset$, par additivité, nous en déduisons :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{12} + \frac{2}{12} = \frac{1}{2}.$$

▷ De plus, nous avons

$$\overline{B} = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}.$$

Nous observons que $A \subset \overline{B}$.

Il en résulte que

$$A \cap \overline{B} = A,$$

ce qui donne

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Nous savons que

$$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}).$$

Puisque $P(A \cap \overline{B}) = P(A)$, nous en concluons

$$P(A \cup \overline{B}) = P(\overline{B}) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

Exercice 2. Jets de deux dés

ALGO

1. On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Quel est le nombre d'issues possibles ?

2. A chaque lancer de ces deux dés, on associe l'écart entre les deux nombres obtenus, c'est-à-dire la différence qui donne un résultat positif.

a. Donner un tableau à deux entrées qui restitue l'écart entre les deux nombres obtenus.

b. Quelle est la probabilité de l'événement A : "obtenir un écart de 1" ?

c. Donner la probabilité de l'événement B : "obtenir l'écart le plus grand".

d. Quelle est la probabilité de l'événement C : "obtenir un écart strictement inférieur à 2" ?

e. Définir l'événement contraire \overline{C} . En déduire sa probabilité.

3. Nous répétons n fois cette expérience aléatoire afin de la simuler. Que restitue le script Python qui suit ?

```

from random import *
def simulation(n) :
    s=0
    for i in range(1,n+1):
        a=randint(1,6)
        b=randint(1,6)
        if abs(a-b)==1:
            s=s+1
    return s/n

```

Modifier ce script pour simuler les événements B et C .

Solution

1. Le nombre d'issues possibles est le cardinal de l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Il y a donc 36 issues possibles.

2. a.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

b. Un écart de 1 est réalisé à 10 reprises, ce qui donne

$$P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

c. L'écart le plus grand est de 5. Il est réalisé à 2 reprises. Nous obtenons

$$P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

d. Un écart strictement inférieur à 2 est réalisé à 16 reprises en prenant les valeurs 0 ou 1. Il en résulte que

$$P(C) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

e. \bar{C} est l'événement : "obtenir un écart supérieur ou égal à 2". Nous en déduisons :

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

3. ▷ Ce script simule la réalisation de l'événement A .

Par exemple, pour $n = 10000$, nous obtenons

```
>>> simulation(10000)
```

```
0.2782,
```

ce qui est proche du résultat théorique obtenu.

▷ Pour simuler l'événement B , nous remplaçons le branchement conditionnel

```
"if abs(b - a) == 1 :" par "if abs(b - a) == 5 :".
```

▷ Pour simuler l'événement C , nous remplaçons le branchement conditionnel

```
if "abs(b - a) == 1 :" par "if abs(b - a) < 2 :".
```

Exercice 3. Le problème du chevalier de Méré⁴

Le chevalier de Méré posait la question suivante au philosophe et mathématicien Blaise Pascal . " Qu'est-ce qui est le plus probable : obtenir au moins un six en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double six en lançant vingt-quatre fois deux dés" ?

Solution

1^{er} cas : obtenir au moins un six en quatre lancers d'un dé.

Désignons par A l'événement : "obtenir au moins un six en quatre lancers d'un dé".

Une issue possible est une suite constituée de quatre nombres, chacun de ces nombres étant compris entre 1 et 6. Dans cette situation aléatoire nous ne faisons pas appel à un arbre car le nombre d'issues est important. Un raisonnement combinatoire va nous permettre d'aboutir.

En effet, nous disposons de 6 choix pour obtenir le premier nombre, puis ce dernier étant acquis, nous lui associons à nouveau 6 choix pour le second nombre.

Ce qui signifie qu'il y a $6 \times 6 = 6^2$ façons de choisir les deux premiers nombres.

En réitérant ce processus multiplicatif pour le choix du troisième nombre puis le quatrième, nous dénombrons finalement $6^4 = 1296$ issues possibles pour cette expérience aléatoire.

4. Écrivain et mathématicien amateur : 1607-1684

L'événement \bar{A} est l'événement : "n'obtenir aucun 6 lors des quatre lancers".

Par conséquent, nous comptons 5 choix pour la réalisation du premier nombre, puis 5 choix pour le second, le troisième et le quatrième. Nous en déduisons qu'il y a 5^4 issues favorables à la réalisation de \bar{A} .

Cela donne

$$P(\bar{A}) = \frac{5^4}{6^4}.$$

Nous en concluons

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0,518.$$

2^e cas : obtenir au moins un double six en lançant vingt-quatre fois deux dés.

Désignons par B l'événement : "obtenir au moins un double six en lançant vingt-quatre fois deux dés".

Dans cette seconde situation, une issue possible est une suite de 24 couples de nombres, chacun de ces nombres étant compris entre 1 et 6.

Nous adoptons à nouveau le principe multiplicatif explicité ci-dessus.

Nous avons $6 \times 6 = 36$ choix pour le premier couple. Nous en déduisons qu'en lançant 24 fois les deux dés, nous dénombrons 36^{24} issues possibles.

Considérons l'événement \bar{B} : "ne pas obtenir de double six".

Nous avons

$$P(\bar{B}) = \frac{35^{24}}{36^{24}}.$$

Il en résulte

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491.$$

Nous en concluons qu'il est plus probable d'obtenir au moins un six en quatre lancers d'un dé que d'obtenir au moins un double six en lançant vingt-quatre fois deux dés.

Exercice 4. Probabilité et régionnement du plan

Le plan est muni d'un repère orthonormal. On choisit au hasard un point $M(x, y)$ à coordonnées entières comprises entre 1 et 6.

1. *Quelle est la probabilité des événements suivants :*

A : "le point M appartient à la droite d'équation $y = x$ " ?

B : "le point M appartient à la parabole d'équation $y = x^2$ " ?

C : "le point M appartient à la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ " ?

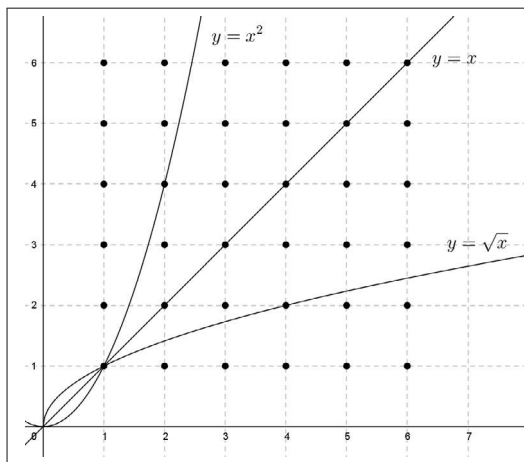
D : "le point M est tel que $\sqrt{x} < y < x^2$ " ?

2. Quelle est la probabilité de $B \cup C$?

3. Exprimer l'événement E : "le point M est tel que $y < \sqrt{x}$ ou $y > x^2$ " en fonction des événements B , C , D . En déduire la probabilité de E .

Solution

Nous visualisons l'ensemble des issues possibles dans le repère donné.



L'événement A est réalisé par les 6 points à coordonnées entières qui appartiennent à la droite d'équation $y = x$, ce qui donne

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

L'événement B est réalisé par les 2 points à coordonnées entières qui appartiennent à la parabole d'équation $y = x^2$, ce qui donne

$$P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

L'événement C est réalisé par les 2 points à coordonnées entières qui appartiennent à la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$, ce qui donne

$$P(C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

L'événement D est réalisé par les 19 points à coordonnées entières qui appartiennent à la partie du plan située, au sens strict, entre les deux courbes. Ainsi nous obtenons

$$P(D) = \frac{19}{36}.$$

2. Nous avons

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} - \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

3. Il est clair que $E = \overline{B \cup C \cup D}$.

Nous en déduisons

$$P(E) = 1 - P(B \cup C \cup D).$$

Puisque $\emptyset = (B \cup C) \cap D$, par additivité, nous obtenons

$$P(E) = 1 - P(B \cup C) - P(D) = 1 - \frac{3}{36} - \frac{19}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}.$$

Ce résultat est vérifiable directement sur la figure.

Exercice 5. Problème du Duc de Toscane

ALGO

Trois dés sont lancés. On désigne par S la somme des points obtenue.

1. L'événement $S = 10$ est plus probable que $S = 9$. Pourquoi ?
2. Proposer un programme Python qui dénombre le nombre d'issues favorables à la réalisation des deux événements considérés.

Solution

1. Nous avons $6 \times 6 \times 6 = 216$ issues possibles dans cette expérience aléatoire. Ainsi nous n'envisageons pas un arbre pour compter les issues favorables à la réalisation de $S = 9$, puis de $S = 10$.

• Pour déterminer la probabilité $P(S = 9)$, nous observons que le nombre 9 peut être décomposé de 6 manières distinctes :

$$9 = 1 + 2 + 6,$$

$$9 = 1 + 3 + 5,$$

$$9 = 2 + 3 + 4,$$

$$9 = 1 + 4 + 4,$$

$$9 = 2 + 2 + 5,$$

$$9 = 3 + 3 + 3.$$

La décomposition $9 = 1 + 2 + 6$ peut résulter de 6 triplets distincts :

$$(1, 2, 6), (1, 6, 2), (2, 1, 6), (2, 6, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1).$$

Il en est de même des deux suivantes.

La décomposition $9 = 1 + 4 + 4$ peut être réalisée par 3 triplets distincts :

$$(1, 4, 4), (4, 1, 4), (4, 4, 1).$$

Il en est de même de $9 = 2 + 2 + 5$.

Enfin la décomposition $9 = 3 + 3 + 3$ n'est obtenue que d'une seule façon.

Nous en déduisons qu'il y a $6 \times 3 + 3 \times 2 + 1 = 25$ issues favorables à la réalisation de l'événement $S = 9$. Ainsi nous obtenons

$$P(S = 9) = \frac{25}{216}.$$

- Pour déterminer $P(S = 10)$, nous dénombrons les issues favorables à l'événement $S = 10$.

Nous procédons comme ci-dessus. Le tableau qui suit résume ce comptage.

$10 = 1 + 3 + 6$	6 triplets
$10 = 1 + 4 + 5$	6 triplets
$10 = 2 + 3 + 5$	6 triplets
$10 = 2 + 2 + 6$	3 triplets
$10 = 2 + 4 + 4$	3 triplets
$10 = 3 + 3 + 4$	3 triplets
total	27 issues favorables à la réalisation de $S = 10$

Nous en déduisons : $P(S = 10) = \frac{27}{216}$.

Nous en concluons

$$P(S = 9) < P(S = 10).$$

Dans cette expérience aléatoire, l'événement $S = 10$ est plus probable que $S = 9$.

2. Dans ce script, `s9` et `s10` dénombrent le nombre de sommes de trois entiers compris entre 1 et 6 qui sont égales à 9 ou à 10.

```

s9 , s10=0,0
for x in range(1,7):
    for y in range(1,7):
        for z in range(1,7):
            s=x+y+z
            if s==9 :
                s9=s9+1
            elif s==10:
                s10=s10+1
print ("s9=", s9)
print ("s10=", s10)

```

Nous obtenons

```

>>>
s9 = 25,
s10 = 27.

```

Ceci vérifie les résultats obtenus à la question 1.

Exercice 6. Pair-Impair **ALGO**

1. Soit n un entier naturel supérieur à 1. On pose

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = n + \dots + 3 + 2 + 1.$$

En calculant $2S$, justifier que

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. On considère une urne dans laquelle se trouvent :

- une boule portant le numéro 1,
- deux boules portant le numéro 2,
- trois boules portant le numéro 3, ...
- n boules portant le numéro n .

Combien l'urne contient-elle de boules ?

Une boule est tirée au hasard dans l'urne.

En distinguant les deux cas : n est un nombre pair ou n impair, (on pourra poser $n = 2p$, avec $p \geq 1$ ou $n = 2p + 1$, avec $p \geq 0$), exprimer, en fonction de n , les probabilités p_n et q_n que la boule tirée porte respectivement un numéro pair, un numéro impair.

3. Selon la parité de l'entier $n \geq 1$, comparer les probabilités p_n et q_n .

Proposer un programme Python qui restitue ces deux probabilités, l'entier $n \geq 1$ étant choisi par l'utilisateur.

En exécutant ce programme pour des valeurs de n suffisamment grandes qu'observez-vous ?

Solution

1. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Nous avons

$$\begin{cases} S = 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ S = n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 \end{cases}.$$

En additionnant membres à membres ces deux égalités, il vient

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ termes}} = n(n+1).$$

Nous en déduisons

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. \triangleright L'urne contient $1 + 2 + 3 + \dots + n = S = \frac{n(n+1)}{2}$ boules.

\triangleright Désignons par A l'événement : "la boule tirée porte un numéro pair".

1^{er} cas : n est pair, c'est-à-dire $n = 2p$, avec $p \geq 1$.

Nous avons

$$\text{card}(A) = 2 + 4 + \dots + 2p = 2(1 + 2 + \dots + p) = 2 \times \frac{p(p+1)}{2} = p(p+1).$$

Puisque $p = \frac{n}{2}$, il vient

$$\text{card}(A) = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{n(n+2)}{4}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$ pair, après simplification, nous obtenons

$$p_n = P(A) = \frac{\text{card}(A)}{S} = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

Dans ce premier cas, \bar{A} est l'événement : "obtenir un numéro impair". Il vient

$$q_n = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{n}{2(n+1)}.$$

2^e cas : n est impair, c'est-à-dire $n = 2p + 1$, avec $p \geq 0$.

De la même façon que ci-dessus, nous avons :

$$\text{card}(A) = p(p+1).$$

Puisque, dans ce cas, $p = \frac{n-1}{2}$, nous obtenons

$$\text{card}(A) = \frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right) = \frac{(n-1)(n+1)}{4}.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$ impair, nous obtenons après simplification

$$p_n = P(A) = \frac{\text{card}(A)}{S} = \frac{n-1}{2n}.$$

Par suite nous avons

$$q_n = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{n-1}{2n} = \frac{n+1}{2n}.$$

3.

1^{er} cas : n est pair.

Nous avons

$$p_n = \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{n}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} = q_n + \frac{1}{n+1},$$

ce qui justifie que si n est pair, alors

$$p_n > q_n.$$

2^e cas : n est impair.

Dans ce cas, nous obtenons

$$q_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{n-1+2}{2n} = \frac{n-1}{2n} + \frac{1}{n} = p_n + \frac{1}{n},$$

ce qui établit que si n est impair, alors

$$p_n < q_n.$$

En distinguant la parité de l'entier $n \geq 1$ nous proposons le programme Python qui suit.

```
n=int(input("n="))
if n%2==0:
    q=n/(2*(n+1))
    p=q+1/(n+1)
else:
    p=(n-1)/(2*n)
    q=p+1/n
print("pour", "n=",n)
print("p=",p)
print("q=",q)
```

Ainsi, en prenant $n = 100$, puis $n = 101$, nous obtenons

>>> pour n= 100

p= 0.504950495049505,

q= 0.49504950495049505.

>>> pour n= 101

p= 0.49504950495049505,

q= 0.504950495049505.

Nous observons que indépendamment de la parité de n , les probabilités p_n et q_n se rapprochent de 0,5 dès que n est suffisamment grand.

Exercice 7. Marche aléatoire sur une droite et notion de variable aléatoire **ALGO**

Sur une droite graduée par un repère d'origine O , on place un pion en O .

On lance 4 fois de suite une pièce équilibrée.

Lorsque Pile est obtenu, le jeton est déplacé d'une unité vers la droite, modélisée par +1, sinon le jeton est déplacé vers la gauche d'une unité (-1). On désigne par X , l'abscisse du jeton après quatre lancers.

1. *Quel est le nombre d'issues possibles et quelles sont les valeurs que X peut atteindre lors de cette expérience aléatoire ?*

2. *Quelle est la probabilité que le jeton revienne en O après quatre lancers ?*

Quelle est la probabilité que le jeton se trouve à droite de O après quatre lancers ?

Proposer un programme Python qui simule cette expérience aléatoire.

3. *La loi de l'abscisse X est, par définition, la donnée des probabilités des événements : " $X = k$ " lorsque $k \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$.*

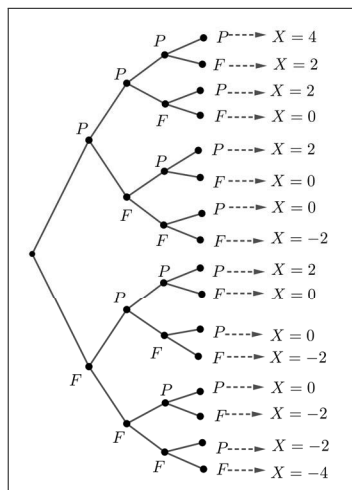
Déterminer la loi de X .

Calculer l'espérance de X , notée $E(X)$, qui est par définition la moyenne des valeurs prises par X , chacune de ces valeurs étant pondérée par sa probabilité. Comment interpréter le résultat obtenu ?

4. *Proposer un algorithme qui simule n fois de suite cette expérience aléatoire et qui restitue pour chacune la position atteinte par le jeton.*

Solution

1. Nous représentons les 16 issues possibles de cette expérience aléatoire par l'arbre ci-après.



Grâce à cette arborescence, nous obtenons que l'ensemble des valeurs prises par X est

$$\{-4, -2, 0, 2, 4\}.$$

2. \triangleright L'événement : "le jeton revient en O après quatre lancers" peut être noté $(X = 0)$.

Nous avons

$$P(X = 0) = \frac{\text{card}(X = 0)}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

\triangleright L'événement : "le jeton se trouve à droite de O après quatre lancers" est noté $(X > 0)$.

Nous avons

$$(X > 0) = (X = 2) \cup (X = 4), \text{ avec } (X = 2) \cap (X = 4) = \emptyset.$$

Par additivité, nous obtenons

$$P(X > 0) = P(X = 2) + P(X = 4) = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}.$$

\triangleright Préalablement, nous observons que la fonction affine $f : x \mapsto 2x - 1$ est telle que $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$. Par conséquent, $f(\text{randint}(0,1))$ autorise l'obtention aléatoire de -1 ou de 1 . Nous obtenons :

```

from random import randint
L=[]
x=0
for i in range(4):
    r=2*randint(0,1)-1
    L.append(r)
    x=x+r
print (L)
print (x)

```

L'exécution de ce script simule cette expérience, ce qui donne par exemple

```

>>>
[-1, -1, -1, 1]
-2.

```

3. ▷ Nous déterminons la loi de X sous la forme du tableau suivant :

k	-4	-2	0	2	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

▷ En appliquant la définition de l'énoncé, nous obtenons

$$E(X) = (-4) \times \frac{1}{16} + (-2) \times \frac{4}{16} + 0 \times \frac{6}{16} + 2 \times \frac{4}{16} + 4 \times \frac{1}{16} = 0.$$

Ce résultat est justifié par le fait que X atteint des valeurs symétriques par rapport à 0, les probabilités de ces dernières étant égales.

4. Nous obtenons

```

from random import randint
n=int(input("n="))
for k in range(1,n+1):
    x=0
    for i in range(4):
        r=2*randint(0,1)-1
        x=x+r
    print (x)

```

Par exemple, en simulant pour :

$\ggg n = 6,$
 $0, -2, 2, 0, -4, 0,$
 $\ggg n = 10,$
 $-2, 0, -4, -4, 0, 0, 4, -2, 0, 0.$

Exercice 8. Tirages sans remise

Soit un entier naturel $n \geq 1$. Dans une urne il y a $n - 1$ boules noires et $n + 1$ boules blanches.

On prélève, au hasard, successivement deux boules, avec remise dans l'urne de la première boule prélevée.

On désigne par A l'événement : "les deux boules sont de la même couleur".

1. Calculer la probabilité p_n de l'événement A .
2. Déterminer la probabilité q_n de l'événement B : "les deux boules sont de couleurs différentes".
3. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, $p_n > \frac{1}{2}$ et $q_n < \frac{1}{2}$.

Solution

1. Soit Ω l'ensemble des tirages successifs de deux boules avec remise.

Il y a $2n$ choix pour la première boule.

Le tirage étant avec remise, il y a également $2n$ choix pour la seconde boule.

Nous en déduisons que

$$\text{card}(\Omega) = 2n \times 2n = 4n^2.$$

Désignons par :

N_2 l'événement : "les deux boules sont noires",

B_2 l'événement : "les deux boules sont blanches".

Nous avons

$$N_2 \cup B_2 = A, \text{ avec } N_2 \cap B_2 = \emptyset.$$

Par additivité, nous obtenons

$$P(A) = P(N_2) + P(B_2) = \frac{\text{card}(N_2)}{\text{card}(\Omega)} + \frac{\text{card}(B_2)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Nous comptons $n - 1$ choix pour obtenir une boule noire au premier tirage et à nouveau $n - 1$ choix pour obtenir une boule noire au second tirage.

Nous en déduisons

$$\text{card}(N_2) = (n - 1)^2.$$

De la même façon, nous dénombrons $(n + 1)^2$ issues favorables à la réalisation de B_2 .

Il en résulte que, pour tout entier $n \geq 1$, nous avons

$$p_n = P(A) = \frac{(n-1)^2}{4n^2} + \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{n^2+1}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}.$$

2. Nous observons immédiatement que $B = \overline{A}$.

Il en résulte que

$$q_n = 1 - p_n = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}.$$

3. Soit un entier $n \geq 1$. Nous avons

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2n^2} > 0, \\ q_n - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{2n^2} < 0. \end{aligned}$$

Nous en concluons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n > \frac{1}{2} \text{ et } q_n < \frac{1}{2}.$$

Exercice 9. Lancers d'un dé n fois de suite

ALGO

On lance un dé cubique équilibré n fois de suite.

1. Déterminer, pour quelles valeurs de l'entier $n \geq 1$, la probabilité d'obtenir au moins une fois l'as (la face 1) est supérieure à 0,99 ?

On pourra utiliser une table de valeur d'une calculatrice ou proposer une fonction Python qui restitue le premier entier qui réalise cet événement.

2. Proposer un script Python que simule la probabilité de réalisation de l'événement "obtenir aucun as lors des n lancers".

Solution

1. Nous désignons par A_n l'événement : "obtenir au moins une fois l'as lors de n lancers".

L'événement contraire $\overline{A_n}$ est : "n'obtenir aucun as lors de n lancers".

Il s'agit de trouver à partir de quel entier $n \geq 1$, nous avons

$$P(A_n) > 0,99,$$

ce qui donne

$$1 - P(\overline{A_n}) > 0,99 \Leftrightarrow P(\overline{A_n}) < 0,01.$$

Puisque $P(\overline{A_n}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$, nous utilisons par exemple

▷ une table de valeur d'une calculatrice pour déterminer n .

Nous obtenons que $\left(\frac{5}{6}\right)^{25} \approx 0,0105$ et $\left(\frac{5}{6}\right)^{26} \approx 0,009$.

Par conséquent, les entiers $n \geq 26$ conviennent.

▷ Nous pouvons aussi utiliser la fonction Python suivante :

```
def rang():
    n=1
    while (5/6)**n >= 0.01:
        n=n+1
    return n
```

Nous obtenons

```
>>> rang()
```

26.

2. Pour simuler cette probabilité, nous proposons la fonction Python qui suit.

```
from random import randint
def rep(n):
    n1=0
    for k in range(1, n+1):
        if randint(1,6) != 1:
            n1=n1+1
    return n1/n
```

Ceci donne par exemple :

```
>>> rep(100000)
```

0.8317

Exercice 10. Fonction indicatrice - Calculs sur les événements

Soit A un événement inclus dans un ensemble Ω d'issues possibles.

On définit l'indicatrice de A , noté 1_A , comme une fonction définie sur Ω , à valeurs dans $\{0, 1\}$ telle que, pour tout $\omega \in \Omega$

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \in \overline{A} \end{cases}.$$

1. Montrer que, pour tous les événements A et B ,

$$A = B \Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega, 1_A(\omega) = 1_B(\omega).$$

2. Pour tout $\omega \in \Omega$, déterminer $1_\emptyset(\omega)$ et $1_\Omega(\omega)$.

3. Justifier que, pour tous les événements A et B et tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} 1_{A \cap B}(\omega) &= 1_A(\omega) \times 1_B(\omega), \\ 1_{A \cup B}(\omega) &= 1_A(\omega) + 1_B(\omega) - 1_A(\omega) \times 1_B(\omega). \end{aligned}$$

4. En déduire que, pour tout $\omega \in \Omega$, $1_{\overline{A}}(\omega) = 1 - 1_A(\omega)$.

5. Lois de Morgan. En utilisant les propriétés ci-dessus, montrer que, pour tous les événements A et B , nous disposons des deux égalités :

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}. \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}. \end{aligned}$$

6. Distributivité de \cap sur \cup , et réciproquement. Montrer que, pour tous les événements A , B et C ,

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C). \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Solution

1. Soit $\omega \in \Omega$. Si $A = B$, alors nous avons $1_A(\omega) = 1_B(\omega)$.

Réciproquement, supposons que $1_A(\omega) = 1_B(\omega)$.

Si $\omega \in A$, alors $1_A(\omega) = 1$, donc $1_B(\omega) = 1$, ce qui prouve que $\omega \in B$, par suite nous obtenons $A \subset B$.

De la même façon si $\omega \in B$, alors $\omega \in A$, soit $B \subset A$.

La double inclusion $A \subset B$ et $B \subset A$ équivaut, par définition⁵ à l'égalité $A = B$.

Nous en concluons

$$A = B \Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega, 1_A(\omega) = 1_B(\omega).$$

2. Pour tout $\omega \in \Omega$, nous avons $\omega \notin \emptyset$. Il en résulte que $1_\emptyset(\omega) = 0$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, nous avons $\omega \in \Omega$, ce qui donne $1_\Omega(\omega) = 1$.

3. Soit $\omega \in \Omega$. Pour justifier la première égalité, nous distinguons, par disjonction, 4 cas selon que ω réalise ou non les événements A ou B .

Nous considérons le tableau suivant :

5. Annexe § 1.4

	$1_A(\omega)$	$1_B(\omega)$	$1_{A \cap B}(\omega)$	$1_A(\omega) \cdot 1_B(\omega)$
$\omega \in A \text{ et } \omega \in B$	1	1	1	1
$\omega \in A \text{ et } \omega \notin B$	1	0	0	0
$\omega \notin A \text{ et } \omega \in B$	0	1	0	0
$\omega \notin A \text{ et } \omega \notin B$	0	0	0	0

Les deux dernières colonnes de ce tableau nous permettent de conclure que

$$\forall \omega \in \Omega, 1_{A \cap B}(\omega) = 1_A(\omega) \times 1_B(\omega).$$

Nous procédons de la même façon pour justifier la seconde égalité.

	$1_A(\omega)$	$1_B(\omega)$	$1_{A \cup B}(\omega)$	$1_A(\omega) + 1_B(\omega) - 1_A(\omega) \cdot 1_B(\omega)$
$\omega \in A \text{ et } \omega \in B$	1	1	1	1
$\omega \in A \text{ et } \omega \notin B$	1	0	1	1
$\omega \notin A \text{ et } \omega \in B$	0	1	1	1
$\omega \notin A \text{ et } \omega \notin B$	0	0	0	0

Nous en concluons :

$$\forall \omega \in \Omega, 1_{A \cup B}(\omega) = 1_A(\omega) + 1_B(\omega) - 1_A(\omega) \times 1_B(\omega).$$

4. Nous savons que $A \cup \bar{A} = \Omega$. Il en résulte que

$$1_{A \cup \bar{A}} = 1_\Omega.$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, nous en déduisons

$$1_A(\omega) + 1_{\bar{A}}(\omega) - 1_A(\omega) \times 1_{\bar{A}}(\omega) = 1.$$

Or nous avons

$$1_A(\omega) \times 1_{\bar{A}}(\omega) = 1_{A \cap \bar{A}} = 1_\emptyset = 0,$$

ce qui permet de conclure par

$$\forall \omega \in \Omega, 1_{\bar{A}}(\omega) = 1 - 1_A(\omega).$$

5. Pour simplifier la rédaction, nous confondons, par abus de langage, $1_A(\omega)$ avec 1_A .

Soient A et B deux événements. Nous avons d'une part,

$$1_{\overline{A \cap B}} = 1 - 1_{A \cap B} = 1 - 1_A \times 1_B.$$

D'autre part, nous obtenons

$$1_{\overline{A \cup B}} = 1_{\overline{A}} + 1_{\overline{B}} - 1_{\overline{A}} \times 1_{\overline{B}} = 1 - 1_A + 1 - 1_B - (1 - 1_A)(1 - 1_B) = 1 - 1_A \times 1_B.$$

Nous en déduisons

$$1_{\overline{A \cap B}} = 1_{\overline{A \cup B}}.$$

Ainsi nous avons prouvé la première loi de Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Avec le même abus de langage, nous obtenons

$$\begin{aligned} 1_{\overline{A \cup B}} &= 1 - 1_{A \cup B} = 1 - (1_A + 1_B - 1_A \times 1_B) = (1 - 1_A) - 1_B(1 - 1_A), \\ &= (1 - 1_A)(1 - 1_B) = 1_{\overline{A}} \times 1_{\overline{B}} = 1_{\overline{A \cap B}}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons la seconde loi de Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

6. Soient les événements A , B et C . D'une part, nous avons

$$1_{A \cap (B \cup C)} = 1_A 1_{B \cup C} = 1_A(1_B + 1_C - 1_B 1_C) = 1_A 1_B + 1_A 1_C - 1_A 1_B 1_C.$$

D'autre part, il vient

$$1_{(A \cap B) \cup (A \cap C)} = 1_{A \cap B} + 1_{A \cap C} - 1_{A \cap B} 1_{A \cap C} = 1_A 1_B + 1_A 1_C - 1_A 1_B 1_C.$$

En remarquant que $1_A 1_A = 1_{A \cap A} = 1_A$, nous obtenons

$$1_{(A \cap B) \cup (A \cap C)} = 1_A 1_B + 1_A 1_C - 1_A 1_B 1_C.$$

Nous en déduisons

$$1_{A \cap (B \cup C)} = 1_{(A \cap B) \cup (A \cap C)}.$$

La distributivité de \cap sur \cup est ainsi prouvée, c'est-à-dire

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Pour justifier la distributivité de \cup sur \cap , nous utilisons les règles de calcul dont nous disposons à présent sur les événements. Nous avons

$$\begin{aligned} \overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{A} \cap (\overline{B \cap C}) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C}) = \overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup C}, \\ \overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{(A \cup B) \cap (A \cup C)}. \end{aligned}$$

En passant aux événements contraires, nous en concluons

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Exercice 11. Méthode de Monte-Carlo

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, nous considérons un quart de cercle Γ de centre l'origine O et de rayon 1 représenté ci-après.

1. Justifier qu'un point $M(x, y)$, avec $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$ appartient à Γ si et seulement si $y = \sqrt{1 - x^2}$.

En déduire que ce point appartient au quart de disque \mathcal{D} ouvert de frontière Γ si et seulement si $y < \sqrt{1 - x^2}$.

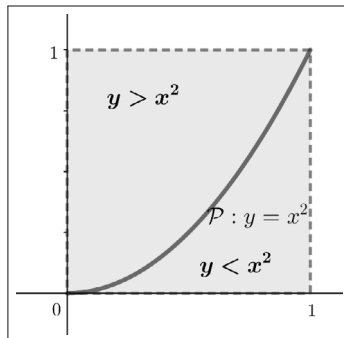
2. Nous supposons que les coordonnées $x \in [0, 1]$ et $y \in [0, 1]$ du point M sont aléatoires selon une loi uniforme et que le nombre n de tirages est grand, par exemple $n = 5000$. Nous donnons le programme Python.

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import *
from random import random
n=0
for i in range(5000):
    x=random()
    y=random()
    if y>(1-x**2)**0.5:
        plt.plot([x],[y],"k,")
    else:
        n=n+1
        plt.plot([x],[y],"kx")
print(4*n/5000)
plt.axis("equal")
plt.show()
```

En exécutant ce script qu'observez-vous ?

Le modifier afin de disposer du nombre de points en entrée.

3. Nous considérons à présent l'arc de parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2$, avec $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$.



Modifier le programme précédent pour évaluer l'aire sous la courbe \mathcal{P} lorsque $0 \leq x \leq 1$.

Solution

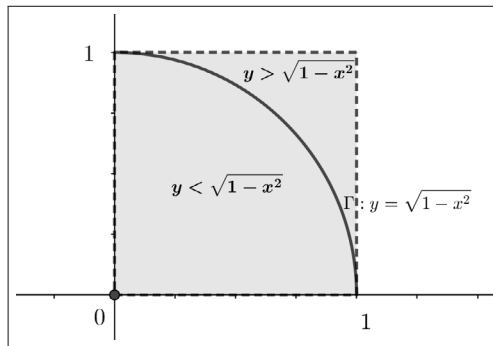
1. Soit un point $M(x, y)$, avec $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$.
▷ Ce point appartient à Γ si et seulement si

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2,$$

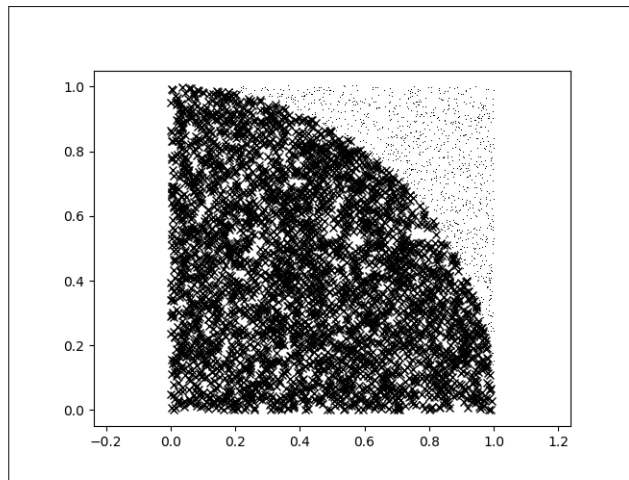
ce qui équivaut à, puisque $x \in [0, 1]$ et $y \geq 0$,

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \text{ avec } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1.$$

▷ Nous en déduisons le régionnement attendu, illustré par la figure qui suit.



2. ▷ En exécutant ce script nous obtenons d'une part la figure ci-dessous,



et d'autre part la réponse numérique,

>>> 3.156.

Ceci est une approximation du réel π , c'est-à-dire quatre fois la probabilité obtenue en faisant le rapport du nombre de points dans le quart de disque \mathcal{D} au nombre de tirages, ce quart de disque ayant une aire égale à $\frac{\pi}{4}$.

▷ Modification du script en proposant en entrée le nombre de points.

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import *
from random import random
p=int(input("nbrepoints"))
n=0
for i in range(p):
    x=random()
    y=random()
    if y>(1-x**2)**0.5:
        plt.plot([x],[y],"k,")
    else:
        n=n+1
        plt.plot([x],[y],"kx")
print(4*n/p)
plt.axis("equal")
plt.show()
```

Ceci donne, en prenant par exemple "nbrepoints=20000",
>>> 3.1434.

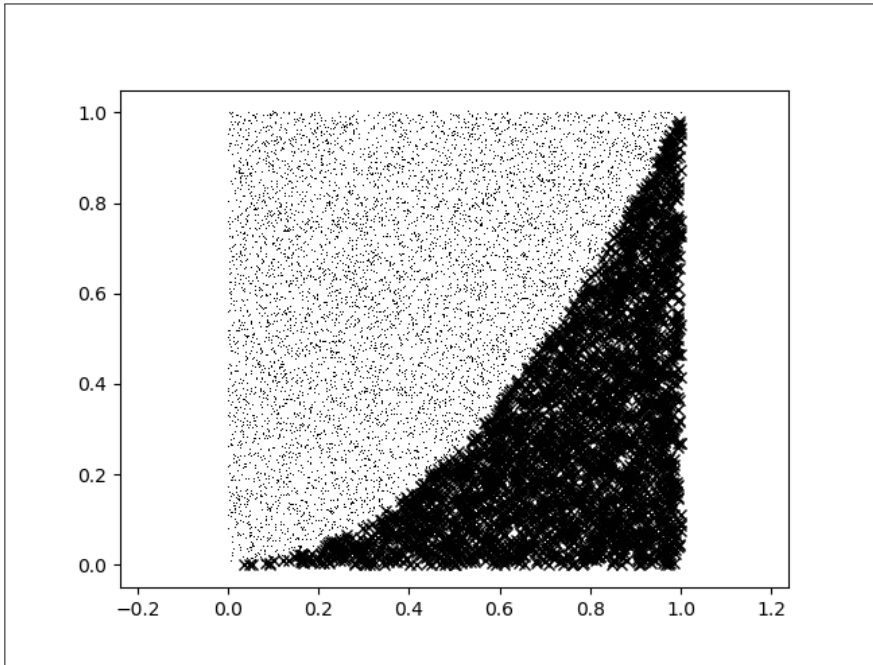
Nous obtenons une approximation de π à 10^{-2} près.

3. En modifiant le branchement conditionnel et en remplaçant la ligne "print" par "print(n/p)", nous obtenons

```
import matplotlib.pyplot as plt
from random import random
p=int(input("nbrepoints"))
n=0
for i in range(p):
    x=random()
    y=random()
    if y>x**2:
        plt.plot([x],[y],"k,")
    else:
        n=n+1
        plt.plot([x],[y],"kx")

print(n/p)
plt.axis("equal")
plt.show()
```

Ceci donne d'une part :



et d'autre part la réponse numérique,

`>>> 0.3322.`

Nous obtenons est une valeur approchée de $\frac{1}{3}$.

On justifiera en Terminale que $\frac{1}{3}$ est l'aire sous la courbe \mathcal{P} lorsque $0 \leq x \leq 1$.

Annexe : Ensembles - Logique

À la fin du XIX^e siècle et au début du XX^e des mathématiciens tels que G. Cantor (1845-1918) ou E. Zermelo (1871-1953) ont introduit le concept d'ensemble qui fournit un cadre unificateur pour les diverses branches des mathématiques.

Dans cette annexe, nous introduisons le vocabulaire de la théorie des ensembles et les opérations ensemblistes de base. Ces notions sont largement utilisées dans le programme de Seconde (et les suivants), ainsi que dans ce livre.

Nous abordons ensuite un exposé modeste concernant la logique mathématique. L'objectif est de préciser les outils de raisonnement que nous avons utilisés dans les différents chapitres de ce cours. Il s'agit donc d'approfondir les notions telles que celles de connecteurs logiques comme "et", "ou", "non", "implication", "équivalence", ainsi que sur les diverses argumentations qui nous ont permis d'élaborer des démonstrations, comme la mise en place d'un contre-exemple, d'une réciproque, d'un raisonnement par disjonction, par l'absurde, par contraposition.

Le mot "logique" est d'origine grecque. La logique fut érigée en science par le savant grec Aristote (384-382 av. J-C). C'est au début du XVIII^e siècle que Leibniz fait une tentative pour créer un système de logique formelle, mais ses travaux à ce sujet ne seront pas publiés. Il faut attendre le XIX^e siècle pour que les mathématiciens anglais Augustus De Morgan et George Boole fondent une logique mathématique en développant notamment le calcul des propositions.

En codant par 1 (vrai) ou 0 (faux) la valeur de vérité d'une proposition, nous abordons un des fondements de l'informatique. Il s'agit du calcul binaire

mis en œuvre dans le calcul des propositions.

Le XX^e siècle est marqué par un essor très important de la logique, conjointement à la théorie des ensembles. Les mathématiciens et logiciens contemporains ont notamment travaillé sur les fondements des mathématiques.

12.1 Notions sur les ensembles

12.1.1 Des exemples rencontrés au collège

Au collège, les notions de nombres entiers et de nombres décimaux ont été abordés.

Comme dans le chapitre 1, nous considérons l'ensemble des entiers naturels noté \mathbb{N} ou bien l'ensemble des entiers relatifs noté \mathbb{Z} .

L'ensemble des nombres décimaux est noté \mathbb{D} .

Nous décrivons \mathbb{N} en donnant la liste infinie des ses éléments, ce qui se note

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, n + 1 \dots\}.$$

De même, nous avons

$$\mathbb{Z} = \{\dots - n - 1, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, n + 1 \dots\}.$$

On dit que ces deux ensembles sont donnés en *extension*.

Par contre, pour l'ensemble \mathbb{D} , nous ne savons pas expliciter la liste des ses éléments.

Mais il est possible de décrire chaque élément de \mathbb{D} par une propriété générique.

Ainsi \mathbb{D} est l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{10^p}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$.

Une écriture ensembliste de cet ensemble est

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^p} / a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N} \right\}.$$

On dit que l'ensemble \mathbb{D} est donné en *compréhension*.

L'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} peut être aussi défini en compréhension

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Mais l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} ne peut pas être défini en extension ou en compréhension.

12.1.2 Plus généralement

En géométrie les points sont des objets du plan ou de l'espace. Nous parlerons de l'ensemble \mathcal{P} des points du plan ou bien de l'ensemble \mathcal{E} des points de l'espace.

Dans ces deux exemples il n'est pas possible de donner une description en extension ou en compréhension.

Plus généralement on désigne par E un ensemble quelconque. C'est un terme générique. On dit aussi que la donnée de l'ensemble E est une notion primitive.

Cet ensemble E peut représenter n'importe lequel des exemples cités ci-dessus mais aussi une infinité d'autres situations.

Par exemple, en Seconde et après, nous rencontrons :

- l'ensemble des vecteurs du plan, noté souvent (\vec{P}) ,
- l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire, noté souvent Ω ,
- l'ensemble des fonctions numériques définies sur un intervalle de \mathbb{R} ...

12.1.3 Relation d'appartenance - Relation d'inclusion

Définition (relation d'appartenance). *Lorsqu'un objet x est un élément d'un ensemble E , on dit que x appartient à E . L'appartenance de x à E est notée $x \in E$.*

Si x n'appartient pas à E , on note $x \notin E$.

Exemples. Nous en donnons deux.

- $-2 \in \mathbb{Z}$, mais $-2 \notin \mathbb{N}$.
- La médiatrice Δ d'un segment $[AB]$ de milieu I est l'ensemble des points M du plan tel que $MA = MB$.

Nous avons $I \in \Delta$, mais $A \notin \Delta$.

Définition (relation d'inclusion). *Soient E et F deux ensembles. On dit que F est inclus dans E si tout élément de F appartient à E .*

On note $F \subset E$.

En d'autres termes, nous retiendrons que

$F \subset E$ si et seulement si, quel que soit x , $x \in F$ implique $x \in E$.

Remarques. Nous en proposons trois.

- Ne pas confondre " \subset " qui met en relation deux ensembles avec " \in " qui met en relation un élément avec un ensemble.

- Lorsque $F \subset E$, on dit aussi que F est un sous-ensemble de E ou bien que F est contenu dans E .

- L'ensemble vide, noté \emptyset , ne contient aucun élément. C'est un sous-ensemble de tout ensemble E .

Exemples. Nous en donnons trois.

- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

En effet, si $a \in \mathbb{Z}$, alors on a $a = \frac{a}{10^0}$, ce qui justifie que $a \in \mathbb{D}$.

- Soit $a \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble, noté $a\mathbb{N}$, des multiples de a , est défini

▷ en extension par

$$a\mathbb{N} = \{0, a, 2a, \dots, na, (n+1)a, \dots\},$$

▷ en compréhension par

$$a\mathbb{N} = \{na/n \in \mathbb{N}\}.$$

- Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Nous prouvons la propriété suivante :

si b divise a , alors $a\mathbb{N} \subset b\mathbb{N}$.

On suppose que b divise a , ce qui signifie qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = b \times k$.

Si $x \in a\mathbb{N}$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = a \times n$.

Nous en déduisons

$$x = (b \times k) \times n = b \times (kn).$$

En posant $q = kn \in \mathbb{N}$, nous obtenons que $x = b \times q$, ce qui prouve que $x \in b\mathbb{N}$.

Nous en concluons que $a\mathbb{N} \subset b\mathbb{N}$.

12.1.4 Égalité ensembliste

Définition. Soient E et F deux ensembles.

L'égalité ensembliste, notée $=$, est définie par

$$E = F \text{ si et seulement si } E \subset F \text{ et } F \subset E.$$

Remarques. Nous en faisons deux.

- Ne pas confondre x avec $\{x\}$.

En effet nous avons $x \in \{x\}$, mais $\{x\} \neq x$.

- La notion d'égalité est diverse. Dans différents chapitres nous avons rencontré :

- l'égalité dans \mathbb{R} (chapitre 1),
- l'égalité de deux fonctions (chapitre 5),
- l'égalité de deux vecteurs (chapitre 7),
- l'égalité dans \mathbb{R}^2 (chapitre 9).

Exemple. Nous déterminons l'ensemble S des couples (x, y) d'entiers relatifs satisfaisant à $x(y + 1) = 1$.

Nous étudions ensuite le cas où (x, y) est un couple de nombres réels.

▷ Puisque $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$, si $(x, y) \in S$, alors

$$x = 1 \text{ et } y + 1 = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ et } y + 1 = -1,$$

ce qui implique

$$x = 1 \text{ et } y = 0 \text{ ou } x = -1 \text{ et } y = -2.$$

Ainsi, en posant $S' = \{(1, 0); (-1, -2)\}$, nous avons justifié l'inclusion $S \subset S'$.

Réciproquement, si $(x, y) \in S'$, alors $(x, y) = (1, 0)$ ou $(x, y) = (-1, -2)$.

Nous vérifions que ces deux couples satisfont à l'équation $x(y + 1) = 1$.

Par conséquent nous obtenons l'inclusion $S' \subset S$.

Nous disposons donc de la double inclusion $S \subset S'$ et $S' \subset S$, ce qui prouve

$$S = S' = \{(1, 0); (-1, -2)\}.$$

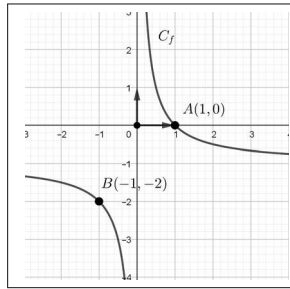
▷ Que peut-on dire des couples (x, y) de nombres réels qui sont solutions de l'équation $x(y + 1) = 1$?

Les réels $x = 0$ et $y \in \mathbb{R}$ ne vérifient pas l'équation $x(y + 1) = 1$.

Pour $x \neq 0$, cette équation équivaut à $y = \frac{1}{x} - 1$.

Il en résulte que l'ensemble des solutions de $x(y + 1) = 1$ dans \mathbb{R}^2 , est représenté par l'ensemble des points $M(x, y)$ appartenant à la représentation graphique de la fonction f , définie sur \mathbb{R}^* , par $f : x \mapsto \frac{1}{x} - 1$.

Les solutions dans \mathbb{Z}^2 sont les deux points $A(1, 0)$ et $B(-1, -2)$ de C_f , à coordonnées entières.



12.2 Opérations ensemblistes

12.2.1 Intersection

Définition. Soient E et F deux ensembles.

L'intersection de E et de F , notée $E \cap F$, est l'ensemble des x tels que $x \in E$ et $x \in F$.

En d'autres termes, nous avons

$$E \cap F = \{x/x \in E \text{ et } x \in F\}.$$

Exemples. Nous en donnons trois.

- Si (D) et (D') sont deux droites du plan sécantes en un point A , alors $(D) \cap (D') = \{A\}$.
- Si $[-1, 1]$ est un intervalle fermé de \mathbb{R} , alors $[-1, 1] \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1\}$.
- Si n et $n + 1$ sont deux entiers naturels consécutifs, alors $[n, n + 1] \cap \mathbb{N} = \{n, n + 1\}$.

Définition. Si $E \cap F = \emptyset$, alors on dit que E et F sont disjoints.

Exemple. Si (D) et (D') sont deux droites du plan strictement parallèles, alors $(D) \cap (D') = \emptyset$.

Proposition. Soient E , F et G trois ensembles.

Nous disposons des propriétés suivantes :

- $E \cap E = E$.
- $E \cap \emptyset = \emptyset$.
- Si $E \subset F$, alors $E \cap F = E$.
- $E \cap F = F \cap E$.
- $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$.

Démonstration. Nous pouvons admettre ces propriétés. Cependant la preuve de chacune d'elle est simple à mettre en œuvre en utilisant la notion de fonction indicatrice présentée dans le chapitre 11-exercice 10 du paragraphe "Exercices corrigés".

12.2.2 Union

Définition. Soient E et F deux ensembles.

L'union de E et de F , notée $E \cup F$, est l'ensemble des x tels que $x \in E$ **ou** $x \in F$.

En d'autres termes, nous avons

$$E \cup F = \{x/x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$

Remarque. Le "ou" de l'union est **inclusif**, ce qui signifie que si $x \in E \cup F$ alors x appartient **au moins** à l'un des deux ensembles, ainsi x peut appartenir éventuellement à $E \cap F$.

Ce "ou" inclusif est moins restrictif que la conjonction "ou" du langage courant qui a un sens exclusif. Par exemple : "une porte est ouverte ou fermée".

On utilise en mathématiques le "ou" exclusif lorsque E et F sont disjoints. C'est le "ou" exclusif qui est utilisé lors d'un raisonnement par disjonction des cas.

Exemples. Nous en donnons deux.

- E est l'ensemble des entiers naturels pairs et F est l'ensemble des entiers naturels impairs. Nous avons $E \cup F = \mathbb{N}$ et $E \cap F = \emptyset$.

- $] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[= \mathbb{R}^*$.

Proposition. Soient E , F et G trois ensembles.

Nous disposons des propriétés suivantes :

- $E \cup E = E$.
- $E \cup \emptyset = E$.
- Si $E \subset F$, alors $E \cup F = F$.
- $E \cup F = F \cup E$.
- $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$.

Démonstration. Nous pouvons admettre ces propriétés. La preuve de chacune d'elle est simple à mettre en œuvre en utilisant la notion de fonction indicatrice.

12.2.3 Distributivité

Proposition. *L'opération \cap est distributive par rapport à l'opération \cup et réciproquement. En d'autres termes, pour tous les ensembles E , F et G , nous avons*

$$\begin{aligned}E \cap (F \cup G) &= (E \cap F) \cup (E \cap G). \\E \cup (F \cap G) &= (E \cup F) \cap (E \cup G).\end{aligned}$$

Démonstration. La preuve de ces deux égalités peut être également justifiée en utilisant la notion de fonction indicatrice.

À ce sujet, voir la question 6 de l'exercice 10 du chapitre 11.

12.2.4 Complémentaire

Définition. *Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E . Le complémentaire de A dans E , noté $\complement_E A$, est l'ensemble des x appartenant à E tel que x n'appartienne pas à A .*

En d'autres termes, nous avons

$$\complement_E A = \{x \in E / x \notin A\}.$$

Remarque. $\complement_E A$ peut être aussi noté A^c ou $E - A$ ou bien \overline{A} .

Cette dernière est la notation probabiliste d'un événement contraire.

Proposition. *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . Nous disposons des propriétés suivantes :*

- $\overline{\overline{A}} = A$.
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = E$.
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Démonstration. La preuve de ces quatre égalités peut être également justifiée en utilisant la notion de fonction indicatrice.

Pour les deux derniers points (lois de Morgan), voir la question 5 de l'exercice 10 du chapitre 11.

12.3 Proposition - Connecteurs logiques

12.3.1 Proposition

Définition. En mathématiques une proposition p est un énoncé qui est **vrai** ou **faux**.

Exemples. En voici deux :

- la proposition "6 est un nombre premier" est fausse,
- la proposition "Si A , B et C sont trois points non alignés du plan tels que $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A " est vraie.

12.3.2 Négation

Définition. Soit p une proposition, la proposition contraire de p , notée non p , est la **négation** de p .

Axiome (du tiers exclu). Soit p une proposition, p et non p ne peuvent pas être vraies ou fausses simultanément. Si l'une est vraie alors l'autre est fausse.

Exemples. Nous en proposons deux.

- La proposition " $1 - \sqrt{2} < 0$ " est vraie .
Sa négation " $1 - \sqrt{2} \geq 0$ " est fausse.
- La proposition " $\frac{1}{3} \in \mathbb{Z}$ " est fausse.
Sa négation " $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ " est vraie.

Remarques. Nous en faisons trois, les deux premières seront utilisées abondamment dans la suite de ce chapitre.

- En utilisant le codage "vrai= V " ou "vrai= 1 " et "faux= F " ou "faux= 0 ", nous pouvons résumer le principe du tiers exclu par la *table de vérité* suivante :

p	non p
1	0
0	1

- Lien avec la théorie des ensembles.

Soient E un ensemble, $x \in E$ et $p(x)$ une proposition dont la valeur de vérité dépend de x . Nous considérons le sous-ensemble A de E tel que

$$A = \{x \in E / p(x) \text{ vraie}\}.$$

Nous obtenons

$$\bar{A} = \{x \in E / p(x) \text{ fausse}\} = \{x \in E / \text{non } p(x) \text{ vraie}\}.$$

- La proposition non p est parfois notée $(\neg p)$ ou bien \bar{p} .

12.3.3 Le connecteur "et"

Définition. Soient p et q deux propositions. La proposition $(p \text{ et } q)$ est vraie lorsque p, q sont simultanément vraies .

$(p \text{ et } q)$ a pour table de vérité

p	q	$p \text{ et } q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Remarques. Nous en donnons deux.

- La proposition p et q est souvent notée $p \wedge q$.
- Lien avec la théorie des ensembles.

Soit E un ensemble. Nous considérons les sous-ensembles A et B de E définis par

$$A = \{x \in E / p(x) \text{ vraie}\} \text{ et } B = \{x \in E / q(x) \text{ vraie}\}.$$

Nous avons

$$A \cap B = \{x \in E / p(x) \text{ et } q(x) \text{ vraies}\}.$$

12.3.4 Le connecteur "ou"

Définition. Soient p et q deux propositions. La proposition $(p \text{ ou } q)$ est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions p, q sont vraies.

$(p \text{ ou } q)$ a pour table de vérité

p	q	$p \text{ ou } q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Remarques. Elles sont au nombre de trois.

- La proposition p ou q est souvent notée $p \vee q$.
- Lien avec la théorie des ensembles.

Soit E un ensemble. Considérons les sous-ensembles A et B de E définis par :

$$A = \{x \in E/p(x) \text{ vraie}\} \text{ et } B = \{x \in E/q(x) \text{ vraie}\}.$$

Nous avons

$$A \cup B = \{x \in E/p(x) \text{ ou } q(x) \text{ vraie}\}.$$

- Le connecteur "ou" est inclusif par opposition au "ou exclusif".

En mathématiques, le "ou" est soit inclusif soit exclusif suivant le contexte.

Par exemple, dans le langage courant, considérons les deux propositions :

"Boire ou conduire, il faut choisir". Il s'agit d'un "ou" exclusif.

"Qu'il neige ou qu'il vente, je ne mettrai pas le nez dehors". Le "ou" est ici inclusif.

En mathématiques, nous considérons les exemples suivants :

▷ "un entier naturel est pair ou impair". Le "ou" est exclusif.

▷ $(0 \leq x \leq 2)$ ou $(-1 < x < 1)$ signifie que $-1 < x \leq 2$.

Le "ou" est ici inclusif.

En d'autres termes, nous avons

$[0, 2] \cup]-1, 1[=]-1, 2]$, avec $[0, 2] \cap]-1, 1[= [0, 1[$.

12.3.5 Le connecteur "implication"

Définition. Soient p et q deux propositions. La proposition (p implique q), notée ($p \Rightarrow q$), est fausse dans le cas où p est vraie et q est fausse ; elle est vraie dans les trois autres cas.

En d'autres termes ($p \Rightarrow q$) a pour table de vérité

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Remarque. Nous apportons la précision suivante :

En mathématiques l'usage de l'implication est synonyme de "si...alors" ou bien de "donc", ou encore de "par suite".

Cet usage induit le raisonnement par déduction, très fréquent, car prouver que la proposition $(p \Rightarrow q)$ est vraie, revient à démontrer que si la proposition p est vraie, alors la proposition q est vraie.

En fait nous raisonnons par déduction en restant sur la première ligne de la table de vérité de $(p \Rightarrow q)$.

Définition. Soient p et q deux propositions telles que $(p \Rightarrow q)$ soit vraie.

On dit que :

- p est une condition **suffisante** pour q , c'est-à-dire il suffit que p soit vraie pour que q soit vraie.
- q est une condition **nécessaire** pour p , c'est-à-dire il faut que q soit vraie pour que p soit vraie.

Remarques. Nous en donnons trois.

- Les expressions "il suffit" ou "il faut" sont à employer avec précaution.
- Soient p et q deux propositions vraies.

On retiendra que les six formulations suivantes sont synonymes de la proposition $(p \Rightarrow q)$.

1. p donc q .
2. Si p , alors q .
3. Il suffit que p pour q .
4. Il faut que q pour p .
5. p est une condition suffisante pour q .
6. q est une condition nécessaire pour p .

• Lien avec la théorie des ensembles. Soit E un ensemble. Considérons les sous-ensembles A et B de E définis par

$$A = \{x \in E/p(x) \text{ vraie}\} \text{ et } B = \{x \in E/q(x) \text{ vraie}\}.$$
$$A \subset B \text{ signifie que } (p(x) \Rightarrow q(x)) \text{ est vraie.}$$

Proposition. Les deux propositions $(p \Rightarrow q)$ et $(\text{non } p \vee q)$ ont les mêmes valeurs de vérité.

Démonstration. Nous avons

p	q	$\text{non}p$	$(p \Rightarrow q)$	$\text{non} p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

12.3.6 Réciproque

Définition. Soient p et q deux propositions. La réciproque de $(p \Rightarrow q)$ est $(q \Rightarrow p)$.

La table de vérité de $(q \Rightarrow p)$ est

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

Remarque. Lorsque $(p \Rightarrow q)$ est vraie, sa réciproque peut être vraie ou fausse comme l'indique la table de vérité ci-dessus.

Exemples. Nous en proposons deux.

- Si ABC est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est rectangle en A . C'est la réciproque du théorème de Pythagore.

- Si a et b sont deux réels tels que $a = b$, alors $a^2 = b^2$. Cette proposition est vraie.

Sa réciproque est :

Si a et b sont deux réels tels que $a^2 = b^2$, alors $a = b$.

Cette proposition est fausse. En effet on peut trouver deux réels a et b tels que $a^2 = b^2$ et $a \neq b$. Par exemple $a = 3$ et $b = -3$ est un contre-exemple qui prouve que cette réciproque est fausse.

Pour bien le comprendre, voir ci-après le paragraphe 12.3.8 "négation d'une implication".

12.3.7 Equivalence

Définition. Soient p et q deux propositions. La proposition (p équivalent à q), notée ($p \Leftrightarrow q$), est vraie lorsque p et q sont simultanément vraies ou fausses. Elle est fausse dans les deux autres cas.

($p \Leftrightarrow q$) a pour table de vérité

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Remarques. Nous en donnons deux.

- Comme pour ($p \Rightarrow q$), on raisonne avec ($p \Leftrightarrow q$) en restant, la plupart du temps, sur la première ligne de la table de vérité.

- Plus généralement, on considère que deux propositions sont équivalentes lorsqu'elles ont les mêmes valeurs de vérité.

Ce principe permet d'établir des règles de calcul sur les propositions, règles dont les utilisations sont fréquentes en mathématiques.

Nous illustrons cette remarque par la proposition suivante :

Proposition. Soient p et q deux propositions. Nous avons

- ($p \Rightarrow q$) \Leftrightarrow ($\text{non } p \vee q$).
- ($p \Leftrightarrow q$) \Leftrightarrow ($(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$).

Démonstration. ($p \Rightarrow q$) \Leftrightarrow ($\text{non } p \vee q$) est justifiée par la proposition du paragraphe 12.3.5 .

Pour la seconde équivalence, nous formons simultanément la table de vérité de chacune des deux propositions.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Remarques. Nous avons les points suivants :

- Nous retiendrons que les formulations qui suivent sont synonymes de la proposition ($p \Leftrightarrow q$).

1. p équivaut à q .
2. p si et seulement si q .
3. p est une condition nécessaire et suffisante de q .

- Lien avec la théorie des ensembles.

Soit E un ensemble. Nous considérons les sous-ensembles A et B de E définis par

$$A = \{x \in E / p(x) \text{ vraie}\} \text{ et } B = \{x \in E / q(x) \text{ vraie}\}.$$

$$A = B \text{ signifie que } (p(x) \Leftrightarrow q(x)) \text{ est vraie.}$$

Nous retiendrons que cette interprétation fait le lien entre la résolution d'une équation ou inéquation par équivalence et l'obtention de l'ensemble des solutions.

Exemple. Résolution dans \mathbb{R} de l'équation $x^2 = 2$, notée [1].

Nous avons

$$[1] \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}.$$

En désignant par S l'ensemble des solutions de [1], nous avons

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 2\}.$$

La résolution de [1] par équivalence justifie que $S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

12.3.8 Négation des connecteurs *non*, \wedge , \vee , \Rightarrow

Proposition. Soient p et q deux propositions. Nous disposons des équivalences suivantes :

1. $\text{non}(\text{non } p) \Leftrightarrow p$.
2. $\text{non}(p \wedge q) \Leftrightarrow (\text{non } p \vee \text{non } q)$.
3. $\text{non}(p \vee q) \Leftrightarrow (\text{non } p \wedge \text{non } q)$.
4. $\text{non}(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \text{non } q)$.

Démonstration. Nous justifions les trois premières propriétés à l'aide de tables de vérité.

1.

p	$\text{non } p$	$\text{non}(\text{non } p)$
1	0	1
0	1	0

2.

p	q	$p \wedge q$	$\text{non}(p \wedge q)$	$\text{non } p$	$\text{non } q$	$\text{non } p \vee \text{non } q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

3.

p	q	$p \vee q$	$\text{non}(p \vee q)$	$\text{non } p$	$\text{non } q$	$\text{non } p \wedge \text{non } q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

4. En ce qui concerne cette dernière propriété, nous sommes en mesure, en utilisant les propriétés ci-dessus, de faire un premier calcul de propositions équivalentes.

Dans le paragraphe 12.3.7, nous avons justifié que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\text{non } p \vee q)$.

Nous en déduisons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\text{non}(p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow \text{non}(\text{non } p \vee q), \\ \text{non}(p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow \text{non}(\text{non } p) \wedge \text{non } q, \\ \text{non}(p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow p \wedge \text{non } q.\end{aligned}$$

Remarques. Nous en faisons deux.

- Les propriétés 2. et 3. sont les lois de Morgan pour le calcul des propositions.
- La propriété 4. est utilisée pour prouver qu'une implication est fausse.

12.4 Quantificateurs

12.4.1 Quantificateur universel

Définition. Soient E un ensemble, $x \in E$ et $p(x)$ une proposition dont la valeur de vérité dépend de x .

Si, quel que soit $x \in E$, la proposition $p(x)$ est vraie, alors on écrit

$$\forall x \in E, p(x).$$

Le symbole \forall est le quantificateur universel.

Remarques. Nous en faisons deux.

- $\forall x \in E$ peut se lire aussi, pour tout x élément de E , ou bien pour chaque x élément de E .

- La proposition

$(\forall x \in E, p(x))$ est soit vraie, soit fausse.

Nous illustrons cette situation dans les exemples qui suivent.

Exemples. Nous en donnons deux.

- Soit x un réel quelconque. Nous avons : $(-x)^2 = (-x)(-x) = x^2$.

Nous pouvons donc en conclure que la proposition

$$(\forall x \in \mathbb{R}, (-x)^2 = x^2) \text{ est vraie.}$$

- Considérons la proposition : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = x + 1$.

Il est clair que pour $x = 0$, l'égalité n'est pas vérifiée.

Nous en concluons que la proposition

$$(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = x + 1) \text{ est fausse.}$$

On dit que $x = 0$ est un *contre-exemple* prouvant que le quantificateur \forall induit une égalité fausse. Plus précisément nous observons que la proposition

$$(\text{il existe } x \in \mathbb{R}, x^2 \neq x + 1) \text{ est vraie.}$$

Elle est la négation de la proposition initiale.

12.4.2 Quantificateur existentiel

Définition. Soient E un ensemble, $x \in E$ et $p(x)$ une proposition dont la valeur de vérité dépend de x .

S'il existe au moins un élément $x \in E$, tel que la proposition $p(x)$ soit vraie, alors on écrit

$$\exists x \in E, p(x).$$

Le symbole \exists est le quantificateur existentiel.

Remarques. Nous en proposons quatre.

- Lorsque des quantificateurs sont utilisés, la rédaction mathématique est formalisée. Les propositions avec quantificateurs sont séparées du reste du texte, en passant le plus souvent à la ligne.

En d'autres termes, \forall , \exists et les connecteurs logiques ne sont pas des abréviations mais sont régulés par des règles précises.

- Le quantificateur \exists induit une notion d'existence mais pas nécessairement d'unicité. Lorsque nous disposons de l'existence et de l'unicité d'un élément x d'un ensemble E , on note parfois $\exists! x \in E$.

- La notion de contre-exemple est importante.

On retiendra qu'elle est régie par le quantificateur \exists .

- La notation \forall provient du renversement du A, première lettre du mot anglais " All".

La notation \exists provient du renversement du E, première lettre du mot anglais "Exist".

12.4.3 Négation et quantificateurs

Proposition. Soient E un ensemble, $x \in E$ et $p(x)$ une proposition dont la valeur de vérité dépend de x . Nous avons

- $\text{non}(\forall x \in E, p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, \text{non } p(x)$.
- $\text{non}(\exists x \in E, p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E, \text{non } p(x)$.

Démonstration. Désignons par $A = \{x \in E/p(x) \text{ vraie}\}$.

Nous avons

$$(\forall x \in E, p(x)) \Leftrightarrow A = E.$$

Nous en déduisons :

$$\text{non}(\forall x \in E, p(x)) \Leftrightarrow A \neq E.$$

Cela donne

$$\text{non}(\forall x \in E, p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, x \notin A.$$

Nous avons ainsi justifié que

$$\text{non}(\forall x \in E, p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, \text{non } p(x).$$

Nous procédons de la même manière pour la seconde négation.

Remarque. Nous retiendrons que lorsqu'une négation agit sur un quantificateur universel, il se transforme en un quantificateur existentiel et vice-versa, quel que soit le nombre de quantificateurs dans la proposition considérée.

Exemples. . Nous en donnons quatre.

- La proposition

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1, \text{ est vraie.}$$

- La proposition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + y^2} = x + y, \text{ est fausse.}$$

Sa négation

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + y^2} \neq x + y, \text{ est vraie.}$$

En effet $x = 1$ et $y = 2$ conviennent. C'est un *contre-exemple* qui justifie que la proposition initiale est fausse.

- La proposition

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p > n, \text{ est vraie.}$$

En effet, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $p = n + 1$ convient.

Dans ce cas, nous remarquons que p dépend de n .

Sa négation

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \leq n, \text{ est fausse.}$$

Cette négation signifie que tous les entiers naturels sont majorés par un entier n fixé, ce qui est faux puisque \mathbb{N} est infini. Nous remarquons ici que n ne dépend pas de p .

- La définition formalisée de la croissance d'une fonction f sur un intervalle I est :

$$\forall a \in I, \forall b \in I, (a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)).$$

Puisque $\text{non}(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \text{non } q)$, la négation de cette définition est

$$\exists a \in I, \exists b \in I, (a < b \wedge f(a) > f(b)).$$

12.5 Quelques méthodes usuelles de démonstration

12.5.1 Raisonnement par l'absurde

Principe. Soient p et q deux propositions.

Nous nous proposons de montrer qu'une implication $p \Rightarrow q$ est vraie.

Pour cela nous supposons que p est vraie et $\text{non } q$ est vraie.

Nous parvenons par déduction à prouver que $\text{non } p$ est vraie.

Il en résulte que la proposition p est fautive, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse p vraie.

Par conséquent $\text{non } q$ est fautive, donc q est vraie.

Nous en concluons que $p \Rightarrow q$ est vraie.

Exemple. Nous prouvons que si $a \in \mathbb{N}^*$, alors 0 ne divise pas a .

Supposons, par l'absurde, qu'il existe $a \neq 0$ et 0 divise a .

Dans ce cas, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $a = 0 \times q = 0$, ce qui est contradictoire avec $a \neq 0$.

12.5.2 Raisonnement par contraposition

Définition. Soient p et q deux propositions. La proposition $(\text{non } q \Rightarrow \text{non } p)$ est la contraposée de $(p \Rightarrow q)$.

Proposition. Soient p et q deux propositions. Une implication et sa contraposée ont les mêmes valeurs de vérité.

En d'autres termes, p et q étant deux propositions, nous avons

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\text{non } q \Rightarrow \text{non } p).$$

Démonstration. Deux méthodes sont possibles, en utilisant une table de vérité ou par le calcul des propositions. Nous choisissons la seconde méthode. Il vient :

$$\begin{aligned}
(\text{non } q \Rightarrow \text{non } p) &\Leftrightarrow (\text{non}(\text{non } q) \vee \text{non } p), \\
(\text{non } q \Rightarrow \text{non } p) &\Leftrightarrow \text{non}(\text{non } q \wedge p), \\
(\text{non } q \Rightarrow \text{non } p) &\Leftrightarrow \text{non}(p \wedge \text{non } q), \\
(\text{non } q \Rightarrow \text{non } p) &\Leftrightarrow \text{non}(\text{non}(p \Rightarrow q)), \\
(\text{non } q \Rightarrow \text{non } p) &\Leftrightarrow (p \Rightarrow q).
\end{aligned}$$

Remarque. Pour étudier la réciproque de $p \Rightarrow q$, la contraposée de $q \Rightarrow p$ est parfois utilisée, c'est-à-dire $(\text{non } p \Rightarrow \text{non } q)$.

En effet nous savons que

$$(\text{non } p \Rightarrow \text{non } q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p).$$

Exemple. On rappelle que le carré d'un nombre pair est un nombre pair et que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

Réciproquement, nous montrons que si le carré d'un nombre est pair, alors ce nombre est pair.

Soit a un entier naturel. Il s'agit de prouver la proposition

$$a^2 \text{ pair implique } a \text{ pair.}$$

Sa contraposée est

$$a \text{ impair implique } a^2 \text{ impair.}$$

Cette implication est vraie.

Cela prouve que " a^2 pair implique a pair" est une proposition vraie.

12.5.3 Preuve par un contre-exemple

Principe. Pour prouver qu'une proposition de la forme $(\forall x \in E, p(x))$ est fausse, nous justifions que sa négation $(\exists x \in E, \text{non}p(x))$ est vraie.

Dans ce cas il suffit de mettre en évidence un exemple pour $x = a$ tel que $p(a)$ est vrai.

C'est ce qui est nommé un contre-exemple.

Exemple. Est-il vrai que si n est un entier divisible par 5 et par 10, alors n est divisible par 50 ?

Cet énoncé est faux. Sa négation est

$$\text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } 5 \text{ divise } n \text{ et } 10 \text{ divise } n \text{ et } 50 \text{ ne divise pas } n.$$

En effet le contre-exemple $n = 70$ convient.

12.5.4 Raisonnement par disjonction

Principe. Pour démontrer qu'une proposition $p(x)$ est vraie pour tout élément x d'un ensemble E , nous raisonnons par disjonction en prouvant que $p(x)$ est vraie pour les éléments x appartenant à des sous-ensembles non vides disjoints deux à deux de E dont la réunion est E .

Remarque. L'ensemble des sous-ensembles non vides disjoints deux à deux de E , dont la réunion est E , est une partition de E .

Exemple. Nous montrons que, si $a \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$, alors le nombre rationnel $x = \frac{a}{2^p \times 5^q}$ est un nombre décimal.

Par disjonction, nous distinguons 3 cas : $p = q$ ou $p < q$ ou $p > q$.

1^{er} cas : $p = q$.

Dans ce cas, nous obtenons

$$x = \frac{a}{2^p \times 5^p} = \frac{a}{10^p},$$

ce qui prouve que $x \in \mathbb{D}$.

2^e cas : $p < q$.

Nous avons

$$x = \frac{a}{2^{p-q} \times 2^q \times 5^q} = \frac{a \times 2^{q-p}}{10^q}.$$

Puisque $q - p > 0$, nous en déduisons, dans ce second cas, que $x \in \mathbb{D}$.

3^e cas : $p > q$.

Nous avons

$$x = \frac{a}{2^p \times 5^p \times 5^{q-p}} = \frac{a \times 5^{p-q}}{10^p}.$$

Puisque $p - q > 0$, nous en déduisons, dans ce troisième cas, que $x \in \mathbb{D}$.

Nous en concluons, par disjonction,

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \frac{a}{2^p \times 5^q} \in \mathbb{D}.$$

Cette seconde édition s'adresse principalement aux élèves qui souhaitent **bien maîtriser et approfondir les mathématiques** qui leur sont enseignées en **Seconde**. Il est à l'origine un cours donné au Lycée Louis-le-Grand à Paris. Tout élève de Seconde ayant une attente exigeante en mathématiques pourra acquérir par son étude des bases solides afin de poursuivre dans de bonnes conditions un cursus scientifique.

Ce cours développé est un choix pédagogique : en effet il ne s'agit plus de s'en tenir à illustrer par des exemples de nombreuses propriétés, notamment algébriques, communément admises au Collège et parfois même au Lycée, mais d'en faire la preuve. Ainsi **chaque résultat de ce cours est suivi d'une démonstration**, toujours complétée par un ou plusieurs exemples.

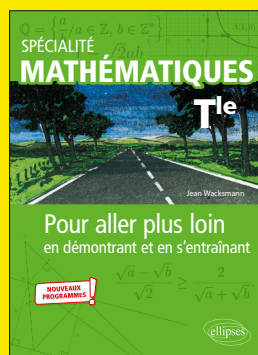
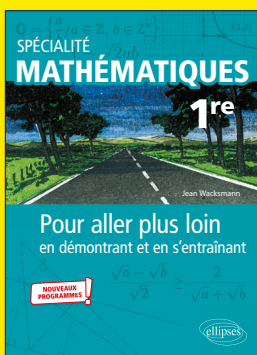
Certains développements sont des compléments qui se situent à la marge du programme spécifique de la classe Seconde. Ils ont cependant toute leur place dans la **perspective d'approfondissement** qui caractérise ce livre.

Au dernier paragraphe de chaque chapitre intitulé « **Exercices corrigés** », on trouve de nombreux exercices et problèmes d'approfondissement, exigeants certes, originaux pour certains, mais toujours accessibles à ce niveau. Il y en a en tout **176, accompagnés de corrigés très détaillés**. Ils ont été testés par des élèves de Seconde du Lycée Louis-le-Grand, en classe ou en devoirs à la maison.

Des **programmes en Python** illustrent également de façon significative de nombreux résultats proposés dans ce livre.

Ce livre peut être proposé pour assurer une bonne transition entre la classe de Seconde et le choix de la spécialité mathématiques de la classe de Première, voire de Terminale. Il est même conseillé de le garder comme un **outil de référence** à consulter pendant les trois années de scolarité du Lycée.

Il peut être également efficace pour toute personne aspirant à une remise à niveau de ses bases en mathématiques.



www.editions-ellipses.fr

